

Clase especial de finanzas

Christian G. Miranda Ruiz

ITAM

16 de enero 2021

Definición y supuestos: Modelo de Merton

Este modelo valora el riesgo de crédito y considera lo siguiente:

- ▶ Se considera una empresa cuyo valor sigue un proceso estocástico K_t .
- ▶ La empresa es financiada por la emisión de acciones con valor A_t y deuda con valor de mercado D_t .
- ▶ Se asume que se tiene una sola obligación que se puede ver como un bono cupón cero con madurez o fecha de vencimiento T y valor nominal $D > 0$.
- ▶ Bajo el supuesto de que los mercados no se friccionan, es decir, que no existen costos de transacciones o impuestos, al tiempo $t \leq T$, el valor de la firma es igual a la suma de sus obligaciones $K_t = A_t + D_t$.
- ▶ Se tiene que:
$$\begin{cases} \text{Si } K_T > D & \implies A_T = K_T - D \\ \text{Si } K_T \leq D & \implies A_T = 0 \text{ y } D_T = K_T \end{cases}$$
- ▶ En el modelo de Merton, los acreedores no pueden forzar a la empresa a declararse en quiebra antes del tiempo de madurez T .
- ▶ Tenemos que $A_T = \max(K_T - D, 0) = (K_T - D, 0)^+$, que implica que el valor de las acciones emitidas por la empresa al tiempo T es igual al *payoff* de una opción call europea en K_T con precio de ejercicio D ;
- ▶ Y $D_T = \min(K_T, D) = D - (D - K_T)^+$, que implica que el valor de la deuda de la empresa al fin del período es igual al valor nominal de las deudas menos el *payoff* de opción europea put sobre K_T con precio de ejercicio D .

Supuestos

Se asume bajo una medida de probabilidad P que K_t sigue un movimiento Browniano geométrico de la forma

$$dK_t = K_t(\mu_K dt + \sigma_K dB_t) \quad K_0 > 0.$$

con $B_t, t \in [0, \infty)$ un movimiento Browniano estándar, constantes $\mu_K \in \mathbb{R}$ y $\sigma_K > 0$.

La ecuación diferencial estocástica anterior implica que

$K_T = K_0 \exp\{(\mu_K - \frac{1}{2}\sigma_K^2)T + \sigma_K B_T\}$, y en particular, que

$K_T \sim N(\ln K_0 + (\mu_K - \frac{1}{2}\sigma_K^2)T, \sigma_K^2 T)$. Bajo el movimiento Browniano geométrico antes descrito la probabilidad de incumplimiento de una empresa es:

$$P(K_T \leq D) = P(\ln K_T \leq \ln D) = \Phi\left(\frac{\ln(D/K_0) - (\mu_K - \frac{1}{2}\sigma_K^2)T}{\sigma_K \sqrt{T}}\right).$$

Asumiremos lo siguiente:

1. Tenemos mercados sin fricción con transacciones continuas.
2. La tasa de interés sin riesgo es determinística e igual a $r \geq 0$.
3. El proceso del valor de la empresa (K_t) es independiente de la forma en que la empresa se financia, y en particular es independiente del nivel de deuda D . Además (K_t) es una acción que se transacciona bajo la dinámica descrita anteriormente (dK_t).

Valoración general

Consideremos una solicitud de pago sobre el valor de la empresa con plazo T y un payoff $h(K_T)$, y tal que A_t y D_t como ya se definió.

La teoría de valuación de derivados ofrece dos formas para calcular el valor justo de $f(t, K_t)$ de esta solicitud de pago al tiempo $t \leq T$. Bajo la ecuación diferencial parcial (EDP) la aproximación a la función $f(t, k)$ se calcula resolviendo

$$f_t(k, t) + \frac{1}{2} \sigma_K^2 k^2 f_{kk}(k, t) + r k f_k(k, t) = r f(t, k) \quad t \in [0, T),$$

con valor final $f(T, k) = h(k)$ que es el valor del payoff al tiempo T . Esta ecuación es la famosa Black-Scholes EDP para valores finales.

Alternativamente, el valor de $f(t, K_t)$ se puede calcular como la esperanza del payoff descontado bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo P^* . Bajo P^* el proceso (K_t) satisface la ecuación diferencial estocástica (EDE) $dK_t = K_t(\mu_K dt + \sigma_K d\tilde{B}_t)$ para un movimiento estándar P^* -browniano \tilde{B} ; en particular μ_K se reemplaza por la tasa de interés sin riesgo r . La valuación neutral al riesgo es

$$f(t, V_t) = E_{P^*}[e^{-r(T-t)} h(K_T) | \mathcal{F}_t],$$

donde E_{P^*} es la esperanza con respecto a la medida P^* , y \mathcal{F}_t es el espacio de filtración natural del movimiento estándar P^* -browniano.

Valoración general

El pago al tenedor del bono es $h(K_T) = \min(K_T, D) = D - (D - K_T)^+$,

El pago al accionista es $h(K_T) = \max(K_T - D, 0) = (K_T - D, 0)^+$

Teorema: En el modelo de Merton, bajo el modelo de Black-Scholes, los valores de la deuda D_t y de la acción A_t son respectivamente

$$D_t = De^{-r(T-t)}\Phi(-d_{t,2}) - K_t\Phi(-d_{t,1}), \quad (1)$$

$$A_t = K_t\Phi(d_{t,1}) - De^{-r(T-t)}\Phi(d_{t,2}), \quad (2)$$

$$\text{con } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad d_{t,1} = \frac{\ln(K_t/D) + (r + \frac{1}{2}\sigma_K^2)(T-t)}{\sigma_K\sqrt{T-t}}, \text{ y}$$

$$d_{t,2} = d_{t,1} - \sigma_K\sqrt{T} = \frac{\ln(K_t/D) + (r - \frac{1}{2}\sigma_K^2)(T-t)}{\sigma_K\sqrt{T-t}}.$$

Notemos que bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo P^* $\ln K_T \sim N(\ln K_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma_K^2)T, \sigma_K^2 T)$, entonces al tiempo $t = T$, la probabilidad de incumplimiento neutral al riesgo es

$$\begin{aligned} P^*(K_T \leq D) &= P^*(K_T \leq D) = P^*(\ln K_T \leq \ln D) \\ &= P^*\left(\frac{\ln K_T - \ln K_0 - (r - \frac{1}{2}\sigma_K^2)T}{\sigma_K\sqrt{T}} \leq \frac{\ln D - \ln K_0 - (r - \frac{1}{2}\sigma_K^2)T}{\sigma_K\sqrt{T}}\right) \\ &= P^*\left(\frac{\ln K_T - \ln K_0 - (r - \frac{1}{2}\sigma_K^2)T}{\sigma_K\sqrt{T}} \leq -d_{0,2}\right) = \Phi(-d_{0,2}) = 1 - \Phi(d_{0,2}) \end{aligned}$$

De forma análoga la probabilidad de incumplimiento al tiempo t es $1 - \Phi(d_{t,2})$, este valor se le conoce como distancia para incumplimiento.

Estimación de D y σ_K

Para calcular probabilidad de incumplimiento necesitamos usar (1) y (2).

¿Qué datos conocemos?

K_0, A_0, D_0, σ_A y r .

¿Qué datos NO conocemos (no son tan observables)?

D_T, σ_K .

Proposición Si el valor de las acciones de la empresa sigue un movimiento browniano geométrico y el valor de los activos de la empresa se describe por la ecuación $dK_t = K_t(rdt + \sigma_K d\tilde{B}_t)$, la volatilidad de los activos de la empresa y la volatilidad de las acciones de la empresa cumplen la siguiente relación:

$$\sigma_A = \eta \sigma_K \quad \text{con } \eta = \frac{K_t}{A_t} \frac{\delta A_t}{\delta K_t}.$$

En la ecuación anterior $\eta = \frac{K_t}{A_t} \frac{\delta A_t}{\delta K_t}$ representa la elasticidad instantánea del valor de la acción respecto al valor de los activos ($\eta \geq 1$) y el factor $\frac{\delta A_t}{\delta K_t} = \Phi(d_{t,1})$ puede interpretarse como la delta de la opción de compra. De esta manera para $t = 0$ se tiene

$$\sigma_A A_0 = \sigma_K K_0 \Phi(d_{0,1}), \quad \text{es decir } \sigma_K = \frac{A_0}{K_0} \Phi(d_{0,1}) \sigma_A, \quad (3)$$

por lo que la relación entre σ_A y σ_K depende del grado de apalancamiento de las empresas, ahora bien, para encontrar σ_K y D es necesario resolver el sistema de ecuaciones no lineal formado por la ecuación anterior y la ecuación (2):

$$\begin{aligned} G_1(D, \sigma_K) &= A_0 - K_0 \Phi(d_{0,1}(D, \sigma_K)) + D e^{-rT} \Phi(d_{0,2}(D, \sigma_K)) = 0 \\ G_2(D, \sigma_K) &= A_0 \sigma_A - \sigma_K K_0 \Phi(d_{0,1}(D, \sigma_K)) = 0. \end{aligned}$$

Este sistema puede resolverse localmente en términos de D y σ_K si la matriz jacobiana existe y si su determinante es diferente de cero. Se puede resolver numéricamente este sistema utilizando el método de Newton-Raphson.

Medidas de riesgo de mercado

En resumen tenemos que si L es la v.a. de las pérdidas y ganancias bajo una función de distribución $F_L(\cdot)$, las medidas más comunes de riesgo son:

Pérdida o ganancia esperada

$$PE = E(L)$$

Valor en riesgo

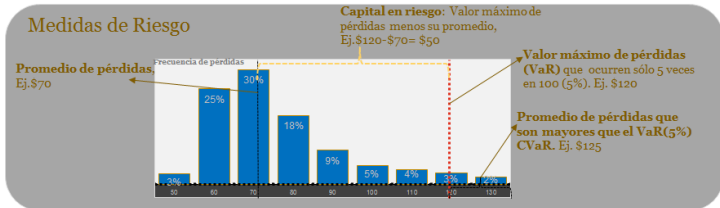
$$VaR_\alpha = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}$$

Capital Económico

Valor en riesgo Condicional

$$PE_\alpha = VaR_\alpha - PE$$

$$CVaR_\alpha = E(L | L \geq VaR_\alpha)$$



Métodos de estimación de riesgo de mercado

En términos generales, las etapas para estimar las distribuciones de pérdidas y ganancias de un instrumento o cartera de inversión son:

1. Identificar los factores de riesgo.
2. Estimar la distribución de probabilidad de los cambios de los factores de riesgo en un horizonte de inversión.
3. Construir la distribución de probabilidad evaluando los cambios anteriores en la valoración del instrumento o cartera de inversión.
4. Calcular las medidas de riesgo deseadas de las posiciones individuales y de toda la cartera de inversión.

Existen, básicamente, dos métodos para estimar las distribuciones de pérdidas y ganancias de un instrumento o cartera de inversión:

Paramétricos

Reevaluación Analítica

- ▶ Delta-Normal.
- ▶ Delta-Gamma.
 - ▶ Delta-Gamma-Normal.
 - ▶ Delta-Gamma-Cornish Fisher.

Simulación

Reevaluación completa

- ▶ Histórica (Sin alisado, Con alisado)
- ▶ Montecarlo.
 - ▶ Componentes Principales.
 - ▶ Cholesky.

Método de simulación Montecarlo

Un experimento de Montecarlo consiste en **la repetición de “muchas corridas” en las que intervienen números generados de manera aleatoria, con el propósito de estimar, entre otros, el valor esperado y la dispersión , en este caso, de los precios de un instrumento financiero.** Para estimar la distribución de pérdidas y ganancias mediante este modelo es necesario:

1. Definir el modelo estocástico que permita simular la distribución de frecuencia de los cambios en los factores de riesgo.
 - ▶ El modelo teórico para simular el comportamiento de los factores de riesgo.
 - ▶ El método para generar, de manera eficiente, números aleatorios.
 - ▶ El procedimiento para transformar números aleatorios independientes en cambios correlacionados de los factores de riesgo (cholesky o componentes principales).
2. Determinar el modelo de valuación de los instrumentos. El portafolio debe revaluarse con cada uno de los escenarios que se generen con el modelo de precios estocástico. Eso significa que éste es un modelo de revaluación completa, al igual que el modelo de simulación histórica.
3. Construir la distribución de probabilidad de pérdidas y ganancias del portafolio.
4. Calcular las medidas de riesgo necesarias.

Transformación de números aleatorios:Cholesky

Factorización Cholesky

La descomposición de la matriz de correlación a través del método de Cholesky tiene como objetivo transformar “ n ” variables aleatorias independientes en “ n ” cambios correlacionados de los factores de riesgo.

La factorización de Cholesky consiste en definir una matriz A que multiplicada por su transpuesta, sea igual a la matriz de correlacion, es decir $AA^T = \Omega$.

Para descomponer la matriz de correlación mediante la factorización de Cholesky, los elementos de la matriz A se calculan de manera recursiva a partir de la siguiente expresión:

$$a_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij} \sum_{w=1}^{i-1} a_{iw}^2 & \text{si } i = j \\ \sigma_{ij} \sum_{w=1}^{i-1} a_{iw} a_{jw} \frac{1}{a_{ji}} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donde los elementos σ_{ij} corresponden a la matriz de correación.

¿En qué casos aplican la factorización Cholesky?

Cuando se tienen que simular pocos factores de riesgo que sean de naturaleza distinta (relativamente heterogéneos), no se recomienda para swaps, ni bonos con cupón.

Transformación de números aleatorios: CP

Componentes Principales

El objetivo principal del análisis de componentes principales (ACP) es reducir el número de variables de un conjunto de datos sin perder mucha información, si suponemos que $x^i \in \mathbf{R}^m$ ($i = 1, \dots, n$), cuando m es grande, ACP busca reemplazar x^i por $y^i \in \mathbf{R}^k$, donde $k < m$ sin perder mucha información. La varianza total de X es

$$\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = \sum_{j=1}^m \text{Var}(x_j) = \sum_{j=1}^m \sigma_{jj} = \text{tr } \Sigma.$$

Recordemos que $\Sigma \geq 0$ se puede escribir como $\Sigma = \Gamma \Lambda \Gamma^\top$, por el teorema espectral, donde $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, es una matriz ortogonal de eigenvectores de Σ , y $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, y $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p$ son los eigenvalores ordenados de Σ .

Llamaremos a las variables $Y_i = \gamma_i^\top (X - \mu)$, $i = 1, \dots, m$ los **componentes principales** de X . Algebraicamente, los componentes principales los podemos ver como las coordenadas de X con respecto a la base ortonormal $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ de \mathbf{R}^m , en otras palabras los pesos de cada componente principal nos indican en qué dirección, expresados en las variables originales, se da la mejor explicación de la varianza.

¿En qué casos aplican los Componentes Principales?

Aplica para los casos cuando se tienen muchos factores de riesgo, cuando se tienen muchos factores de riesgo homogéneos, se recomienda para swaps y bonos con cupón.

Elementos simulación Montecarlo

Este método consiste en generar escenarios simulados de los factores de riesgo (tasas de interés, tipo de cambio, precio de las acciones, etc.) a partir de la distribución correlacionada de las variaciones de los factores de riesgo. Los elementos que tenemos son:

- ▶ Una matriz $X_{(n+1) \times m}$ de m factores de riesgo y $n + 1$ observaciones.
- ▶ Denotemos el vector de precios actual como $X_{00} := (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,m})$.
- ▶ Sea r el número de instrumentos de un portafolio, entonces cada instrumento tiene una función de valuación $f_i: A_i \rightarrow R$ para todo $x \in X$, $i = 1, \dots, r$, donde $A_i \subset X_i$ con $\#(A_i) \leq \#(X_i)$.
- ▶ Sea $M_{1 \times r} = (m_1, \dots, m_r)$ el vector de posiciones nominales de cada instrumento, es decir, el número de contratos que se tienen por instrumento $m_i \in R$ ($i = 1, \dots, r$).

La distribución de pérdidas y ganancias simuladas del portafolio basada en los r instrumentos, con m factores de riesgo y N factores simulados se obtiene de la siguiente manera:

Modelo de simulación de factores de riesgo

Sabemos que $X_{n \times m}$ es el conjunto de m factores de riesgo con n datos; ΔX_τ son las variaciones del factor de riesgo en el τ unidades de tiempo, y puede ser bajo la función f ya sea logaritmo $\ln(x_t/x_{t-\tau})$ o variación relativa $x_t/x_{t-\tau} - 1$.

¿Qué simulamos?

El precio $X_{t+\tau}$ a un tiempo determinado $t + \tau$. Es suficiente simular ΔX_τ para posteriormente encontrar el precio

$$X_{t+\tau} = X_t \cdot f^{-1}(\Delta X_\tau)$$

¿Cómo simulamos?

1. Calcular $\Omega = (\Delta X_\tau)$, matriz de correlación para cholesky o $\Omega = (\Delta X_\tau)$ para Componentes Principales.
2. Definir qué método se aplicará a la matriz (correlación o matriz) para correlacionar los números aleatorios independientes: factorización Cholesky o componentes principales.

Factorización Cholesky

- i. Factorizar $\Omega = AA^\top$.
- ii. $\Delta X_{i,\tau} \sim ?$ y $\Delta X_\tau \sim ?$, conocer las distribuciones marginales y conjuntas
- iii. Simular matriz S de $N \times m$ valores con distribución marginal $F_{\Delta X_{\tau,i}}$ para $i = 1, \dots, m$. $F_{\Delta X_\tau}$ y $F_{\Delta X_\tau}$ pueden ser paramétricas o empíricas.
- iv. Calcular $\Delta X_s = S \cdot A^\top$
- v. Calcular $X_{s_{t+\tau}} = X_t \cdot f^{-1}(\Delta X_s)$

Componentes Principales (CP)

- i. Aplicar CP a Ω , definir tolerancia η .
- ii. Obtener la matriz de eigenvectores $\Gamma_{m \times k}$ de los primeros k eigenvalores, que representen el η de variabilidad.
- iii. Calcular los k CP $\mathcal{Y} = \Gamma^\top (\Delta X_\tau - \mu_{\Delta X_\tau})$, $i = 1, \dots, k$.
- iv. $\mathcal{Y}_i \sim ?$ y $\mathcal{Y} \sim ?$, conocer las distribuciones marginales y conjuntas
- v. Simular matriz S_{cp} de $N \times k$ valores con distribución marginal $F_{\mathcal{Y}_i}$ para $i = 1, \dots, k$. $F_{\mathcal{Y}_i}$ y $F_{\mathcal{Y}}$ pueden ser paramétricas o empíricas.
- vi. Calcular $\Delta X_s = S_{cp} \cdot \Gamma^\top$.
- vii. Calcular $X_{s_{t+\tau}} = X_t \cdot f^{-1}(\Delta X_s)$

Algoritmo simulación Montecarlo: Cholesky

1. Construir $\Delta X_{n \times m}$ que es la matriz de diferencias basados en el operador T_j (donde $T_1(x) = \ln(x)$ ó $T_2(x) = x - 1$), es decir

$$\Delta X_{\tau} = \left[T_j\left(\frac{x_{t,1}}{x_{t+\tau,1}}\right), T_j\left(\frac{x_{t,2}}{x_{t+\tau,2}}\right), \dots, T_j\left(\frac{x_{t,m}}{x_{t+\tau,m}}\right) \right] \quad t = 0, 1, \dots, n-1.$$

2. Calcular la matriz de correlación de ΔX_{τ} , i.e. $\Omega = (\Delta X_{\tau})$.
3. Factorizar $\Omega = AA^{\top}$.
4. Analizar la distribución individual de las variaciones de los factores de riesgo $\Delta X_{\tau,k}$ ($k = 1, \dots, m$) para ajustar a una función de distribución paramétrica conocida ó utilizar la función empírica tal cual.
5. Calcular matriz S de $N \times m$ valores con

$$S_{i.} = \left[F_{\Delta X_{\tau,1}}^{-1}(\alpha_{i1}), \dots, F_{\Delta X_{\tau,m}}^{-1}(\alpha_{im}) \right]$$

donde $\alpha_{i.} \sim U(0, 1)$ con $N \times m$ valores a.i.i.d. simulados, y $F_{\Delta X_{\tau,k}}^{-1}$ es la inversa de la distribución empírica o paramétrica (seleccionada en el paso anterior) de las variaciones del factor de riesgo k , i.e. de $\Delta X_{\tau,k}$ ($k = 1, \dots, m$).

6. Calcular matriz $\Delta X_{s_{\tau}}$ como $\Delta X_{s_{\tau}} = S \cdot A^{\top}$.
7. Construir $X_{s_{N \times m}}$ que es la matriz de factores de riesgo simulada basada en el vector de precios actual X_{00}

$$X_{s_{j.}} = \left[x_{0,1} T_j^{-1}(\Delta x_{s_{j1}}), \dots, x_{0,m} T_j^{-1}(\Delta x_{s_{jm}}) \right] \quad (i = 1, \dots, N \quad j = 1 \text{ ó } 2),$$

Algoritmo simulación Montecarlo: Cholesky

1. Construcción de la matriz de reevaluación del portafolio basada en los escenarios simulados $Y_{N \times r}$ de todos los instrumentos financieros, es decir

$$Y_z = [m_1 f_1(X_{s_z}), m_2 f_2(X_{s_z}), \dots, m_r f_r(X_{s_z})] \quad (z = 1, \dots, N).$$

2. Construcción de la matriz de pérdidas y ganancias del portafolio basada en los escenarios simulados $\Delta Y_{N \times r}$ de todos los instrumentos financieros, es decir

$$\Delta Y_{z \cdot} = Y_z - Y_0 = [m_1(f_1(X_{s_z \cdot}) - f_1(X_{00})), \dots, m_r(f_r(X_{s_z \cdot}) - f_r(X_{00}))],$$

para $(z = 1, \dots, N)$. Se puede obtener el vector de pérdidas totales $\Delta Y T_N$ muy fácilmente, esto es $\Delta Y T = \sum_{k=1}^r Y_{z \cdot}$ ($z = 1, \dots, N$), incluso se puede hacer lo mismo por tipo de riesgo, ya que para cada tipo de riesgo pueden existir diferentes instrumentos, lo único que se tiene que hacer es sumar los instrumentos de un mismo tipo de riesgo por escenario.

3. Obtener las medidas de riesgo deseada de la matriz $\Delta Y_{\cdot k}$ ($k = 1, \dots, r$) y $\Delta Y T$, ejemplo se puede calcular $\text{VaR}_\alpha(\Delta Y_{\cdot k})$, $\text{CVaR}_\alpha(\Delta Y_{\cdot k})$, $\alpha(\Delta Y_{\cdot k})$, $\mu(\Delta Y_{\cdot k})$, $\sigma(\Delta Y_{\cdot k})$, etc. para $k = 1, \dots, r$.

Algoritmo simulación Montecarlo: CP

1. Construir $\Delta X_{n \times m}$ que es la matriz de diferencias basados en el operador T_j (donde $T_1(x) = \ln(x)$ ó $T_2(x) = x - 1$), es decir

$$\Delta X_\tau = \left[T_j\left(\frac{x_{t,1}}{x_{t+\tau,1}}\right), T_j\left(\frac{x_{t,2}}{x_{t+\tau,2}}\right), \dots, T_j\left(\frac{x_{t,m}}{x_{t+\tau,m}}\right) \right] \quad t = 0, 1, \dots, n-1.$$

2. Calcular la matriz de varianza-covarianza de ΔX_τ , i.e. $\Omega = \text{Cov}(\Delta X_\tau)$.
3. Obtener los eigenvalores y eigenvectores de Ω y definir tolerancia $\eta \in (0, 1)$.
4. Obtener la matriz de eigenvectores $\Gamma_{m \times k}$ de los primeros k eigenvalores, donde k es el mínimo valor que cumple que $\sum_{i=1}^k \lambda_i / \sum_{i=1}^m \lambda_i > \eta$ y λ_i ($i = 1, \dots, m$) son los eigenvalores de Ω .
5. Calcular los primeros k componentes principales

$$\mathcal{Y} = \Gamma^\top (\Delta X_\tau - \mu_{\Delta X_\tau}) \quad i = 1, \dots, k.$$

6. Analizar la distribución individual de cada componente principal \mathcal{Y}_i ($i = 1, \dots, k$) para ajustar a una función de distribución paramétrica conocida ó utilizar la función empírica tal cual.
7. Obtener la matriz S de $N \times k$ valores con

$$S_{i\cdot} = \left[F_{\mathcal{Y}_1}^{-1}(\alpha_{i1}), \dots, F_{\mathcal{Y}_k}^{-1}(\alpha_{ik}) \right]$$

donde $\alpha_{ij} \sim U(0, 1)$ con $N \times k$ valores a.i.i.d. simulados, y $F_{\mathcal{Y}_h}^{-1}$ es la inversa de la distribución empírica o paramétrica (seleccionada en el paso anterior) del componente principal h , i.e. de \mathcal{Y}_h ($h = 1, \dots, k$).

8. Calcular matriz ΔX_{s_τ} como $\Delta X_{s_\tau} = S \cdot \Gamma^\top$.

Algoritmo simulación Montecarlo: CP

1. Construir $X_{sN \times m}$ que es la matriz de factores de riesgo simulada basada en el vector de precios actual X_{00}

$$X_{s_i.} = [x_{0,1} T_j^{-1}(\Delta x_{s_{i1}}), \dots, x_{0,m} T_j^{-1}(\Delta x_{s_{im}})] \quad (i = 1, \dots, N \quad j = 1 \text{ ó } 2),$$

2. Construcción de la matriz de reevaluación del portafolio basada en los escenarios simulados $Y_{N \times r}$ de todos los instrumentos financieros, es decir

$$Y_{z.} = [m_1 f_1(X_{s_z}), m_2 f_2(X_{s_z}), \dots, m_r f_r(X_{s_z})] \quad (z = 1, \dots, N).$$

3. Construcción de la matriz de pérdidas y ganancias del portafolio basada en los escenarios simulados $\Delta Y_{N \times r}$ de todos los instrumentos financieros, es decir

$$\Delta Y_{z.} = Y_{z.} - Y_0 = [m_1 (f_1(X_{s_z.}) - f_1(X_{00})), \dots, m_r (f_r(X_{s_z.}) - f_r(X_{00}))],$$

para $(z = 1, \dots, N)$. Se puede obtener el vector de pérdidas totales $\Delta Y T_N$ muy fácilmente, esto es $\Delta Y T = \sum_{k=1}^r Y_{z.}$ ($z = 1, \dots, N$), incluso se puede hacer lo mismo por tipo de riesgo, ya que para cada tipo de riesgo pueden existir diferentes instrumentos, lo único que se tiene que hacer es sumar los instrumentos de un mismo tipo de riesgo por escenario.

4. Obtener las medidas de riesgo deseada de la matriz $\Delta Y_{.k}$ ($k = 1, \dots, r$) y $\Delta Y T$, ejemplo se puede calcular $\text{VaR}_\alpha(\Delta Y_{.k})$, $\text{CVaR}_\alpha(\Delta Y_{.k})$, $\alpha(\Delta Y_{.k})$, $\mu(\Delta Y_{.k})$, $\sigma(\Delta Y_{.k})$, etc. para $k = 1, \dots, r$.

Ventajas y Desventajas

Ventajas

- ▶ El modelo permite incorporar los riesgos a través de los diferentes mercados.
- ▶ En la medida en la que el portafolio se revalúa con diferentes niveles de cada factor de riesgo, el modelo puede incorporar la característica no lineal de las opciones y algunos derivados.
- ▶ La estimación de medidas de riesgo se puede escalar a diferentes horizontes de inversión.
- ▶ La exactitud de las estimaciones es mayor que la de los otros modelos, ya que podría considerar niveles de equilibrio locales y globales.

Desventajas

- ▶ Cuando se incluyen portafolios muy grandes o con estructuras muy complicadas, el modelo se puede volver impráctico y computacionalmente muy caro. En esos casos es recomendable estimar el VaR por subportafolio, o por áreas de negocios.
- ▶ Se tiene un riesgo de modelo alto (básicamente de la distribución a simular).
- ▶ El riesgo de utilizar Cholesky sin revisar dependencia lineal puede llevar a cálculos sin sentido.