

# 複数の巡査の協力による指定地点の警邏について

Collaborative Patrolling of Designated Points on Graphs

河村 彰星

能城 秀彬

Akitoshi Kawamura

Hideaki Noshiro

2017 年 10 月 27 日

## 1 はじめに

所与の領域を 1 人または複数の巡査が動き回り、その領域内の指定された場所を十分な頻度で訪れることを警邏 (patrolling) という [1, 2, 3].

本稿では、与えられた距離空間  $U$  内を速さ 1 以下の巡査  $m$  人が動きまわることにより、集合  $V \subseteq U$  に属する多くの点に十分な頻度で訪れるという目標を考える．すなわち次のような問題である．

巡査  $i \in \{1, \dots, m\}$  の  $U$  上の運行  $a_i: \mathbf{R} \rightarrow U$  とは、各時刻  $t \in \mathbf{R}$  における位置  $a_i(t) \in U$  を定めるものであって、任意の時刻  $s, t \in \mathbf{R}$  に対し  $a_i(s)$  と  $a_i(t)$  の距離が  $|s - t|$  を超えないものをいう．巡査  $m$  人による  $U$  上の運行とは、全巡査の運行を定めた組  $A = (a_1, \dots, a_m)$  をいう．運行  $A$  が点  $v \in U$  を間隔  $q \geq 0$  で警備するとは、長さ  $q$  のどの時間区間にもいずれかの巡査が  $v$  を少なくとも一度は訪れる（任意の時刻  $t \in \mathbf{R}$  に対して巡査  $i$  と時刻  $\tau \in [t, t + q)$  が存在し  $a_i(\tau) = v$ ）ことをいう．

$U$  の有限な部分集合  $V$  があり、 $V$  の各点には利得および許容訪問間隔と呼ばれる非負整数が定まっている．運行  $A$  が点集合  $W \subseteq V$  を警邏するとは、各点  $v \in W$  に対し、 $A$  が  $v$  をその許容訪問間隔以下の間隔で警備することをいう．そのような運行が存在するとき  $W$  は  $m$  人により警邏可能であるという．

**協力警邏問題.** 巡査の人数  $m$  と距離空間  $U$  内の点集合  $V$  および  $V$  の各点の利得と許容訪問間隔が与えられたとき、警邏可能な頂点集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．

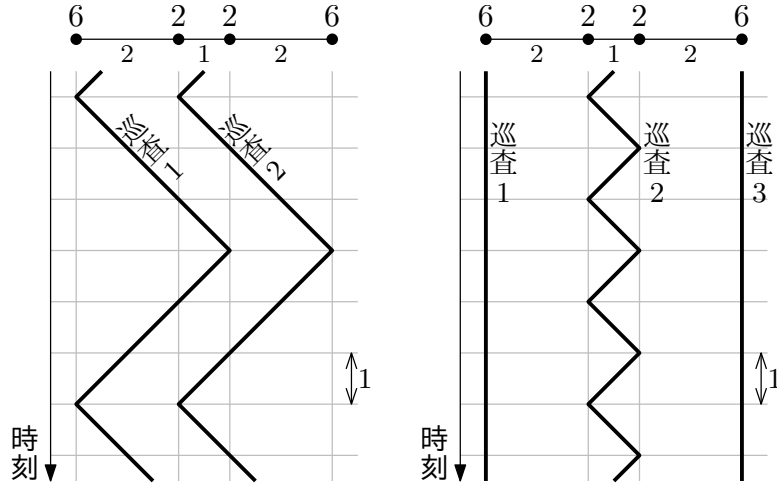


図1 図の上部に描かれている四点からなるグラフの全点を警邏する二つの運行．頂点と辺に書かれた数は、それぞれ許容訪問間隔と距離である．左図の運行では二人の巡査が協力して中央の二点を間隔2で警備している．これを禁じ、各点がいずれかの巡査により単独警備されることを求める場合は、右図のように三人の巡査を要する．

距離空間  $U$  といっても、 $V$  の点どうしの測地距離のみが重要である．そこでこの問題の入力は、 $V$  を頂点集合とし辺に非負整数の長さがついた無向グラフと考えることにする．

この問題は、巡査が一人かつ全点の利得と許容訪問間隔が等しい場合に限っても、ハミルトン路問題からの帰着により NP 困難である [2, Theorem 8]．そこでグラフの形状を限ったときにどのようなかを調べる．

一つの頂点が複数の巡査の訪問により警備され得ることに注意されたい．例えば図1左はそのような運行の例である．Coene ら [2] は似た問題を扱っているが、このような協力を許さず、図1右のように各頂点を専ら一人の巡査が「担当」することを要求している．つまり、各頂点  $v \in W$  が単独警備される（すなわち或る一人の巡査がおり、その巡査のみの運行が  $\{v\}$  を警邏する）ことを要求しているのである．対比のため本稿ではこの問題を非協力警備問題と呼ぶことにする ([2] では MPLPP と称している)．Coene ら [2] の諸結果においては、この非協力という限定が、多項式時間算法の設計にも困難性の証明にも重要な役割を果たしている．この限定を外したときの様子を調べるのが本稿の目的である．

本稿ではグラフ  $G$  の形状として線分、星と、すべての枝の長さが等しい完全グラフの3種類を扱うこととし (図2)、以降はそれぞれを Line, Star, Unit と呼ぶ．Star では葉のみに許容訪問間隔が定められている (中心は警備の対象としない)．Unit は、その各辺の

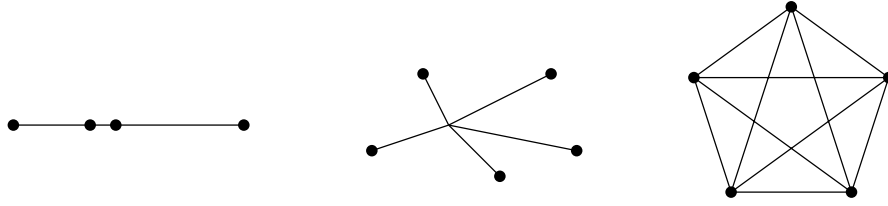


図2 本論文では Line (左), Star (中), Unit (右, 但し各辺の長さが等しい) を扱う. Star は葉のみを警備の対象とする (中央の点は移動の途中で使うのみであり, 訪問間隔は定められていない).

長さを  $d$  とすると, 同じ頂点数で辺の長さがすべて  $d/2$  という Star の特別な場合と考えることができる.

協力警邏問題についての我々の結果と, 非協力警邏問題についての Coene らの結果を, グラフの形ごとに比較すると次のようになる. それぞれ 2, ??, ??節で述べる.

- Line では, 非協力警邏問題は動的計画法により多項式時間で解けることが示されていた [2, Theorem 11] が, その正しさは非協力の設定に強く依存している. 本稿では協力警邏問題について, 全点の許容訪問間隔が等しい場合には多項式時間で解ける (定理 2.1).
- Star では, 全点の利得と許容訪問間隔が等しい場合に限っても, 非協力警邏問題は NP 困難であることが示されていた [2, Theorem 10]. 本稿では, この場合の協力警邏問題は P となるという興味深い結果を得る (定理 \*\*). なお利得または許容訪問間隔を一般にすると, 巡査が一人であっても (したがって協力・非協力に関わらず) NP 困難であることがわかっている [2, Theorems 5 and 6].
- Unit では, 全点の許容訪問間隔が等しい場合は協力警邏問題が P であることを示す (定理 \*\*). Star では全点の許容訪問間隔が等しくても利得が一般だと NP 困難になるので, これにより Unit は Star よりも簡単に解ける場合となっていることが分かる.

Line と Unit については許容訪問間隔が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しかったため, 許容訪問間隔の代わりに「厳密訪問間隔」というものを考え, 最初の訪問時刻から厳密訪問間隔ごとの時刻ちょうどに訪問し続けることを警備の条件とする問題も考えた.

## 関連研究

(あまり本筋に関係ない関連研究は、論文冒頭ではなくこの辺に書くのも手)

また、Line や Star は木の特別な場合である.

## 2 Line

グラフが Line の場合、グラフの全体（頂点と辺）をすべて実直線上におくことができる．以降、頂点の名前  $v_1, v_2, \dots, v_n$  はその位置を表す実数値も表すことにする．

まず、Line の場合における順序保存運行という特別な運行を定義する．運行  $A$  が順序保存であるとは、 $A$  が定める巡査の位置  $a_1, a_2, \dots, a_m$  が、任意の時刻  $t \in \mathbf{R}$  において  $a_1(t) \leq a_2(t) \leq \dots \leq a_m(t)$  を満たすことである．

Line 上の任意の運行  $A$  は、 $A$  と同じ数の巡査でかつ警邏する点集合を保ったまま、順序保存運行  $A'$  に以下のように変換することができる．まず、 $A$  が定める各巡査の運行を  $a_1, a_2, \dots, a_m$  とする．これに対し、 $a'_i (i \in \{1, \dots, m\})$  を各時刻  $t \in \mathbf{R}$  において  $a'_i(t)$  が  $a_1(t), a_2(t), \dots, a_m(t)$  のうち  $i$  番目に小さいものとなるように定める．すると、各  $a'_i$  は運行となっており、 $A' = (a'_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$  とすると  $A'$  と  $A$  の運行の軌跡の集合は等しい（すなわち、任意の時刻  $t \in \mathbf{R}$  において  $\{a_1(t), \dots, a_m(t)\} = \{a'_1(t), \dots, a'_m(t)\}$ ）ので、 $A$  で警邏していた点集合を  $A'$  も警邏している．これにより順序保存運行  $A'$  が得られる．順序保存運行  $A'$  は  $A$  において巡査がすれ違う時に代わりに互いの動きを交換することにより順序を保ったものとみなすことができる．

以上から、巡査  $m$  人により警邏可能な任意の頂点集合  $W$  は、巡査  $m$  人による或る順序保存運行  $A'$  によって警邏されることが分かる．

### 2.1 全点の許容訪問間隔が等しい場合

本節では次のことを示す．

**定理 2.1.** グラフの形状が Line で全点の許容訪問間隔が等しい場合、協力警邏問題は多項式時間で解くことができる．

この問題は、～～な場合については Collins ら ?? の問題の特殊な場合として既に示されているが、ここでは全点の許容訪問間隔が等しいという条件のみでも成り立つことを示す．

以降では、グラフの形状が Line で全点の許容訪問間隔が等しい場合、警邏可能な頂点集合のうち利得の和が最大となるものは次に定義する個別往復運行という運行によって警邏可能であるということを示す。Line で全点の許容訪問間隔が等しい場合に用いることができる個別往復運行という戦略では巡査の協力が不要になるため（補題 2.4），全点の許容訪問間隔が等しいという条件が問題を簡単に行っているといえる。

**定義 2.2.**  $V$  を頂点集合， $Q$  を各頂点の許容訪問間隔とする。各巡査が  $V$  のいずれかの頂点を左端とする長さ  $Q/2$  の区間を往復する運行を個別往復運行と呼ぶ。  $m$  人の巡査による運行  $A$  において各巡査が個別往復運行をしているとき，  $A$  を単に  $m$  人の巡査による個別往復運行と呼ぶ。

まず次の補題を示す。

**補題 2.3.** 頂点  $v_i$  がある 1 人の巡査  $s$  により単独警備されているとき，許容訪問間隔を  $q_i$  として，  $s$  は常に区間  $[v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$  にいる。

証明. この区間でない或る座標  $v_{\text{out}} \notin [v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$  を  $s$  が時刻  $t_0$  に訪問するとする。  $v_{\text{out}}$  と  $v_i$  の間の移動には少くとも時間  $|v_i - v_{\text{out}}| > q_i/2$  を要するから，  $s$  は区間  $[t_0 - q_i/2, t_0 + q_i/2]$  に属する時刻に  $v_i$  を訪問できない。この区間の長さは  $q_i$  であるので，  $s$  が  $v_i$  を単独警備していることに反する。  $\square$

これにより次の補題が成り立つ。

**補題 2.4.** グラフの形状が Line で，頂点の許容訪問間隔がすべて  $Q$  であるとする。頂点集合  $W$  が  $m$  人の巡査により警邏可能であるとする。このとき，  $W$  を警邏する  $m$  人の巡査による個別往復運行が存在する。

証明. 巡査数  $m$  に関する帰納法で示す。  $m = 0$  のときは明らかなので，以下  $m > 0$  とする。

$W$  は  $m$  人の巡査により警邏可能であるので，2 章始めの議論により  $W$  を警邏する  $m$  人の巡査による順序保存運行が存在する。このような運行を任意に一つ選び  $A = (a_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$  とする。

$W$  の点のうち最も左にあるものを  $b$  とする。まず，各巡査は  $b$  より左に存在する時間で停止するように変換する。このようにしても  $W$  は警邏されたままであり，また，これによりすべての巡査は  $[b, +\infty)$  に存在することになる。

ここで，最も左の巡査  $a_1$  に注目する。  $b$  が  $A$  により訪問されるすべての時刻に  $a_1$  は  $b$

を訪問しているので、 $b$  は  $a_1$  により単独警備されている。すると、補題 2.3 より、任意の時刻  $t \in \mathbf{R}$  に対し  $a_1(t) \leq b + Q/2$  であるが、一方、 $a_1$  は区間  $[b, b + Q/2]$  を速さ 1 で往復することでこの区間に含まれるすべての頂点を警備することができる。実際、 $a_1$  がこのような往復をするとき  $b \leq x \leq b + Q/2$  である位置  $x$  に存在する時刻の間隔の最大値は

$$\max(2(x - b), 2(b + Q/2 - x)) \leq 2(b + Q/2 - b) = Q$$

より、 $[b, b + Q/2]$  に含まれるどの頂点も許容訪問間隔を超えずに訪問できていることが分かる。これにより  $a_1$  の運行は個別往復運行となる。一方、 $W^- := \{v \in W \mid b + Q/2 < v\}$  は  $a_1$  以外の  $m - 1$  人の巡査により警備されているので、帰納法の仮定から残る  $m - 1$  人の巡査も個別往復運行に変換することができる。以上により  $W$  を警邏する  $m$  人の巡査による個別往復運行が得られた。□

補題 2.4 により、個別往復運行を行う場合のみを考えればよい。ため、 $m$  人の巡査がそれぞれ担当する  $m$  個の区間を求めればよい。以下のアルゴリズムにより利得の和が最大となる  $m$  個の区間を求めることができる。

初めに Line 上の頂点をソートしておき、左側から順に  $v_1, v_2, \dots, v_n$  とする。頂点  $v_i$  を左端とする区間を  $I_i := [v_i, v_i + Q/2]$  と書く。

まず、 $n$  個の区間  $I_i (i = 1, 2, \dots, n)$  について各区間に含まれる点から得られる利得の合計  $P_i$  を求める。 $P_i$  は  $v_1, v_2, \dots, v_n$  がソートしてあるので  $O(n)$  で求めることができる。

あとは  $m$  個 ( $m$  は巡査の人数) の区間を選び利得の合計を最大化すればよいが、以下の漸化式 1 に従う動的計画法で  $O(mn)$  で最大の利得を得られる  $m$  個の区間を選択できる。 $OPT(i, j)$  は、区間  $I_1, \dots, I_j$  から最大  $i$  個の区間を選ぶときの利得の合計の最大値を表す。 $OPT(m, n)$  が求めたい利得の最大値となる。

$$OPT(i, j) = \begin{cases} 0 & i = 0 \text{ または } j = 0 \text{ のとき} \\ \max\{OPT(i, j - 1), P_j + OPT(i - 1, j - 1)\} & \text{それ以外の場合} \end{cases} \quad (1)$$

最後に、 $OPT(m, n)$  において選ばれた区間をトレースバックして求め、この区間に含まれる頂点全体を出力して終了する。

このアルゴリズムの計算量は最初のソートも含めて全体で  $O(n \log n + nm)$  となる。これで定理 2.1 が示された。

この証明では線分に端の頂点が存在することが重要な役割を果たしているため、閉路の場合にそのまま適用することはできない。

## 2.2 許容訪問間隔が一般の場合

全点の許容訪問間隔が等しい場合はどの頂点も複数の巡査の協力で警備する必要がないため単純になっていたが、許容訪問間隔が一般の場合は、頂点を複数の巡査が交代で訪問して警備する必要がある場合が存在する。図3（左）の例では、中央の許容訪問間隔の短い2つの頂点を2人の巡査が交互に訪問しており、また、全点の許容訪問間隔が等しい場合と異なり各巡査の最適な運行はなんらかの区間の往復であるとは限らないことも分かる。

また、**左から巡査の動きを決定できるのではないか？しかし、…（許容訪問間隔ぴったりの周期の場合についてのみ反例を作る？**この例では左の巡査は左端の点を許容訪問間隔10ちょうどごとに訪問しているが、左端の点の許容訪問間隔から順に巡査の運行を決定することも難しい次のような例が存在する。図3（中央）の例では許容訪問間隔8の左端の点をあえてより短い6ごとに訪問することで全点を警邏できるが、同じグラフについて、図3（右）のように左の巡査が左端の点の許容訪問間隔ぎりぎりの時間まで右の方へ動き頂点をなるべく多くの時間訪問して左端へ帰る運行を選ぶと右の巡査がどのような動き方をしても訪問間隔が許容訪問間隔を超え警備できない頂点が生まれてしまう。

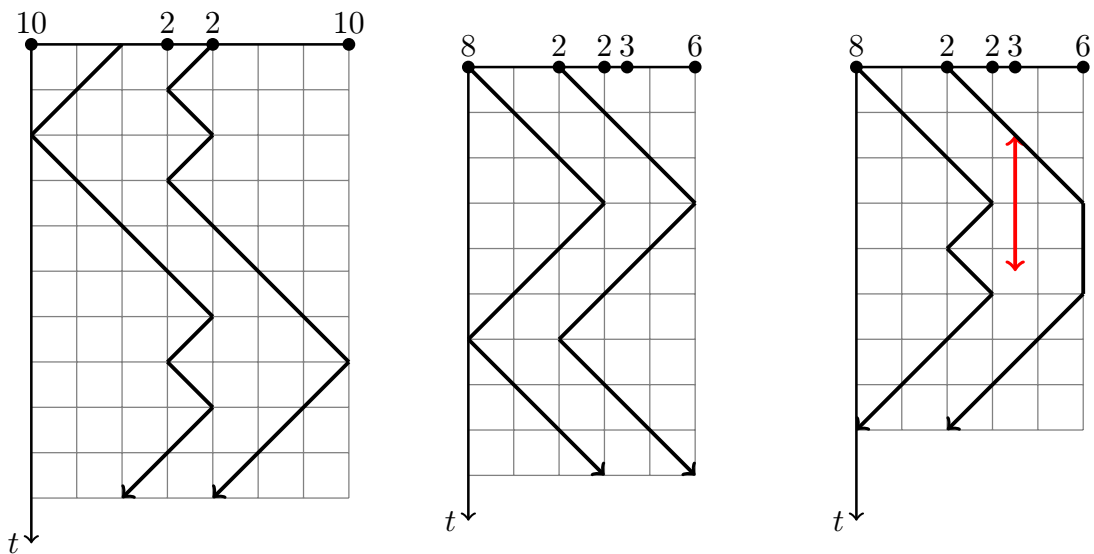


図3 巡査の協力が必要な例。横軸を頂点の座標、縦軸を時刻として巡査の軌跡を表す。点の上の数値は許容訪問間隔を表す。

これらの例は、協力が発生する場合巡査の運行を個別に決定するのは難しいということを示唆している。しかしながら、この許容訪問間隔が一般の場合での Line 上の協力警邏

問題の困難性を示すこともできなかった。

そこで我々は、あえて許容訪問間隔より短い周期で点を訪問すること許されていたことが運行の決定を複雑にしていたことを踏まえて、より自由度の少ない条件として、ある訪問時刻とその時刻からの厳密な訪問間隔が指定され、それらの時刻すべてにちょうど訪問しなければならないという別種の問題（「時刻指定協力警邏問題」と呼ぶことにする）も調べた。すなわち、警備の条件を次のようにする。

**定義 2.5.** 運行  $A = (a_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$  が点  $v \in U$  を厳密訪問間隔  $(q, r)$  で警備するとは、任意の時刻  $t := qk + r (k \in \mathbf{Z})$  に対し巡査  $i$  が存在し  $a_i(t) = v$  であることをいう。

この「時刻指定協力警邏問題」でかつ全点を警邏可能かを判定する問題であれば、以降示すように巡査の動きを端から順に個別に決定できることが分かった。

**定義 2.6.** 図 4 のように  $x$ - $t$  平面の点  $a = (x_a, t_a)$  に対して領域  $L(a), R(a)$  を

$$L(a) := \{(x, t) \mid x - x_a \leq |t - t_a|\}$$

$$R(a) := \{(x, t) \mid x - x_a > |t - t_a|\}$$

と定義する。

訪問しなければならない位置と時刻の組の集合  $X$  が与えられたとき、 $\bigcap_{a \in X} L(a)$  の境界線が軌跡であるような運行を「最右運行」と定義する。

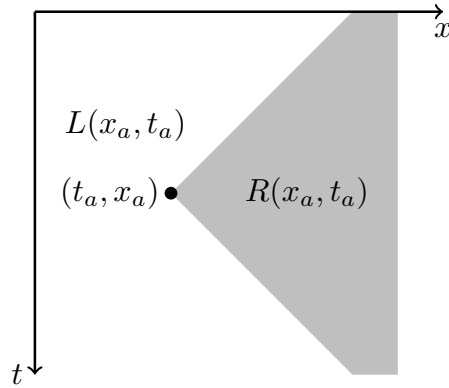


図 4  $L(x_a, t_a)$  と  $R(x_a, t_a)$  の定義

三角形領域  $R(x_a, t_a)$  は、時刻  $t_a$  に  $x_a$  に存在する巡査が存在し得ない位置と時刻の組の集合のうち  $x_a$  より右側の領域を表している ( $|x - x_a|/|t - t_a| > 1$  かつ  $x_a < x$ )。訪問しなければならない位置と時刻の組の集合  $X$  に対して、 $\bigcap_{a \in X} L(a)$  は一番左の巡査の存



在可能領域を表す（補題\*\*）.

本節で示すのは以下の定理である.

**定理 2.7.** グラフの形状が Line のとき, 時刻指定協力警邏問題は, 「最右運行」で巡査の運行を左端から順に決定する（←手順が未定義）ことで全点警邏可能か判定できる. 指定時刻が有限個ならその個数の多項式時間で判定できる、とかにする？入力が周期と剰余なら  $O(*)$  で計算できる、とかに？

**補題 2.8.**  $X$  を訪問しなければならない位置と時刻の組の集合とする. このとき, 順序保存運行において一番左の巡査  $s$  の軌跡は  $\bigcap_{a \in X} L(a)$  に含まれる.

*Proof.* 巡査  $s$  の軌跡に  $\bigcup_{a \in X} R(a)$  の点  $b = (x_b, t_b)$  が含まれるとすると, ある  $a = (x_a, t_a) \in X$  が存在して  $b \in R(a)$  となる. 巡査の速さは 1 以下なので時刻  $t_a$  における巡査  $s$  の位置  $x$  は  $|x_b - x| \leq |t_b - t_a|$  を満たすが,  $b \in R(a)$  より  $x_b - x_a > |t_b - t_a|$  なので  $x_b - x \leq |x_b - x| < x_b - x_a$ , すなわち  $x_a < x$  となる.  $x_a < x$  より  $x_a$  を警備する  $s$  より左の巡査が必要になり矛盾する. よって,  $s$  の軌跡は  $\bigcup_{a \in X} R(a)$  の点を含まない.  $\square$

これにより次がいえる.

**補題 2.9.** グラフ  $G$  が Line のときの時刻指定協力警邏問題において,  $m$  人の巡査により  $G$  を警邏可能であるとき,  $m$  人の巡査による一番左の巡査が最右運行である順序保存運行により  $G$  を警邏できる.

*Proof.* 指定時刻の集合を  $X$  とする.  $G$  は  $m$  人の巡査により警邏可能であるので, 2 章始めの議論により  $G$  を警邏する  $m$  人の巡査による順序保存運行が存在する. このような運行を任意に一つ選び  $A$  とする. 補題??より  $A$  における一番左の巡査  $s$  の軌跡は  $\bigcap_{a \in X} L(a)$  に含まれる.  $b(X)$  を  $\bigcap_{a \in X} L(a)$  の境界線とする. （←先に定義しておく）  
 $\bigcap_{a \in X} L(a)$  に含まれる  $X$  の点は  $\bigcap_{a \in X} L(a)$  の境界線上に存在するので  $s$  の軌跡に含まれる点全体は  $b(X)$  の部分集合となるが, 一方,  $s$  が  $b(X)$  が軌跡であるような運行を代わりに行くと,  $\square$

### 3 Star

グラフの形状が Star の場合については, 利得か許容訪問間隔のいずれかが一般であれば, 協力警邏問題は巡査が 1 人であっても NP 困難であることが分かっている [2]. よっ

て、本稿の協力警邏問題については、巡査数が一般であって、全点の利得と許容訪問間隔が等しい場合を調べる。

非協力警邏問題においては、グラフが Star で巡査数が一般の場合は利得と許容訪問間隔がすべて等しくても NP 困難になることが Coene ら [2] により示されているが、一方で同じ条件における協力警邏問題の場合は次が成り立つ。

**定理 3.1.** グラフの形状が Star で全点の利得と許容訪問間隔が等しい場合、協力警邏問題は（巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる。

Line の場合では協力の発生によって複雑な運行による警邏が発生した状況から考えると、協力無しの場合より協力有りの場合の方が簡単に解けるというのは意外な結果に思われるが、Star の場合には逆に、協力無しの問題では協力をせずにうまく分担する方法を見つけるのが難しいため NP 困難になるのに対し、協力有りの問題ではある単純な協力の仕方による警邏のみ考えればよいから簡単に解くことができる。

本節では、頂点  $v$  に隣接する辺を  $e_v$ 、その長さを  $d_v$  のように書く。

**補題 3.2.** Star 上の協力警邏問題で全点の許容訪問間隔が  $Q$  のとき、点集合  $V$  の任意の部分集合  $W$  について

$$\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ \iff m \text{ 人の巡査により } W \text{ の全点を警邏できる}$$

が成り立つ。

証明.  $(\Rightarrow)$   $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ$  が成り立つとき、 $m$  人の巡査の運行を次のように定めれば  $W$  の全点を警邏できる。  $W' := \{v \in W \mid 2d_v \geq Q\}$  とする。まず、 $|W'|$  人の巡査を  $W'$  の各点に 1 人ずつ配備し常駐させることで警備する。このとき、 $|W'|Q = \sum_{v \in W'} Q \leq \sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ$  より  $|W'| \leq m$  である。これにより  $W'$  の全点は  $|W'|$  人の巡査により警備される。残りの  $2d_v < Q$  である頂点  $v \in W \setminus W'$  は、残りの  $m - |W'|$  人の巡査により警邏しなければならないが、 $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ$  より  $\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v \leq (m - |W'|)Q$  であるから、1 人の巡査が速さ 1 で  $W \setminus W'$  の全点をちょうど 1 度ずつ訪問するのにかかる時間は  $(m - |W'|)Q$  以下となるので（中心点と点  $v$  を一往復するには  $2d_v$  の時間を要する）、 $m - |W'|$  人の巡査全員が時間  $Q$  ずつずらしてこの動きを繰り返すことでどの点も時間  $Q$  以上放置せずに訪問し続けることができ、これにより  $W \setminus W'$  の全点も警備される。

$(\Leftarrow)$  対偶を示す。まず、ある点  $v$  が警備されているとは、どの長さ  $Q$  の時間区間にも少なくとも 1 度巡査の訪問を受けることであるが、点  $v$  が警備されているとき、どの長さ

$Q$  の時間にも  $\min(2d_v, Q)$  の時間は (少なくとも一人の) 巡査が  $e_v$  上 (端点のうち中心点は含まず  $v$  のみを含む) に存在する. これは後で示す. 各点  $v$  に対して定まる時間  $Q$  あたりの巡査の滞在時間  $\min(2d_v, Q)$  は点  $v$  の警備に必要なコストと考えることができる.  $W$  の全点の警邏に必要なコストは, 各点の警備コストの和  $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q)$  であり,  $m$  人の巡査の持つ時間 (資源) の和は時間  $Q$  あたり  $mQ$  であるが, 各巡査は同時に 2 つ以上の辺上には存在しえないため (中心点は辺に含まない),  $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) > mQ$  のとき  $W$  の全点を警邏することはできない.

最後に, 点  $v$  が警備されているとき, どの長さ  $Q$  の時間にも  $\min(2d_v, Q)$  の時間は (少なくとも一人の) 巡査が  $e_v$  上に存在することを示す. (i)  $v$  が  $2d_v \geq Q$  を満たすとき, もし  $v$  の隣接辺  $e_v$  上 (端点を含む) に一人も巡査が存在しない時刻  $s$  があるとする,  $v$  を訪問した  $s$  以前で最後の時刻と  $s$  以後で最初の時刻の間隔は  $2d_v \geq Q$  より長いため,  $v$  が警備されていることに反する. よってこの場合は隣接辺  $e_v$  上には常にいずれかの巡査が存在する必要がある. (ii)  $v$  が  $2d_v < Q$  を満たすとき, 長さ  $Q$  の時間区間  $[t, t+Q]$  を任意に選ぶ. 警備の条件から  $v$  は  $[t, t+Q]$  に少なくとも 1 回訪問されるが, その時刻によって以下の場合を考える. (a)  $[t+d_v, t+Q-d_v]$  に 1 回以上訪問されるとき, その訪問時刻を任意に 1 つ選び  $s$  とすると  $s$  の前後の少なくとも  $d_v$  ずつの時間は巡査は辺  $e_v$  上に存在し, これは  $[t, t+Q]$  に含まれる. (b)  $[t+d_v, t+Q-d_v]$  に 1 度も訪問されないときは,  $[t, t+d_v)$  か  $(t+Q-d_v, t+Q]$  に少なくとも 1 回訪問される. (b1)  $[t, t+d_v)$  と  $(t+Q-d_v, t+Q]$  でそれぞれで少なくとも 1 回ずつ訪問されるときは  $[t, t+d_v]$  と  $[t+Q-d_v, t+Q]$  に巡査が  $e_v$  上に存在するので巡査の滞在時間は  $2d_v$  以上となる. (b2)  $(t+Q-d_v, t+Q]$  に 1 度も訪問されないとき,  $[t, t+d_v)$  に含まれる最後の訪問時刻を  $s$  とすると, 点  $v$  の警備の条件と場合分けの仮定から  $s$  の次の訪問時刻  $u$  は  $t+Q < u \leq s+Q$  を満たす.  $s$  と  $u$  それぞれの前後  $d_v$  の時間  $[s-d_v, s+d_v], [u-d_v, u+d_v]$  には巡査が辺  $e_v$  に存在するが, このうち  $[t, t+Q]$  に含まれるのは  $[t, s+d_v], [u-d_v, t+Q]$  であり, その時間の和は  $(s+d_v-t) + (t+Q-(u-d_v)) = 2d_v + (Q-(u-s)) \geq 2d_v$  より  $2d_v$  以上となる. (b3)  $[t, t+d_v)$  に 1 度も訪問されないとき,  $(t+Q-d_v, t+Q]$  に含まれる最初の訪問時刻とその 1 つ前の訪問時刻を考えると (b2) と同様に巡査の滞在時間の和は  $2d_v$  以上となる.

□

補題 3.2 より Star の任意の点部分集合  $W$  が警邏可能であるかを  $W$  の点の隣接辺の長さだけから簡単に計算できることが分かった. 定理 3.1 では, 全点の利得と許容訪問間隔が等しい場合を考えているので警邏する部分集合としては隣接辺の短い点から順に選べば

よく（隣接辺のより長い点  $v_1$  とより短い点  $v_2$  があるとき， $v_1$  を警備して  $v_2$  を警備しない運行は常に  $v_1$  を警備する代わりに  $v_2$  を警備する運行に変換できる），警邏できる最大の部分集合は  $n$  を点の数として  $O(n \log n)$  で計算できる．以上から定理 3.1 が示された．

## 4 Unit

第 1 章で述べた通り，Unit は Star の特殊な場合とみなせるため，定理 3.1 から全点の利得と許容訪問間隔が等しい場合は協力警邏問題を多項式時間で解くことができるが，Unit の場合は全点の許容訪問間隔だけが等しければ協力警邏問題を多項式時間で解ける（定理 4.1）．

許容訪問間隔が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しかったため，第 2 章で扱った時刻指定協力警邏問題を再び考える．グラフが Unit の場合は時刻指定協力警邏問題が NP 困難になることを示す（定理 4.2）．

### 4.1 全点の許容訪問間隔が等しい場合

**定理 4.1.** グラフの形状が Unit で全点の許容訪問間隔が等しい場合，協力警邏問題は（利得，巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

*Proof.* 補題 3.2 から Unit の全点の許容訪問間隔が  $Q$  のとき，点集合  $V$  の任意の部分集合  $W$  について

$$\sum_{v \in W} \min(d, Q) = |W| \min(d, Q) \leq mQ \iff m \text{ 人の巡査により } W \text{ の全点を警邏できる}$$

が成り立つ． $d$  は Unit の各辺の長さである．

グラフの形状が Unit の場合，全点の許容訪問間隔が等しいならば警邏する部分集合  $W$  は利得の大きい点から選べばよい（利得のより大きい点  $v_1$  とより小さい点  $v_2$  があるとき， $v_1$  を警備して  $v_2$  を警備しない運行は常に  $v_1$  を警備する代わりに  $v_2$  を警備する運行に変換できる）． $|W| \min(d, Q) \leq mQ$  を満たす最大の  $|W|$  は  $|W| = \lfloor mQ / \min(d, Q) \rfloor$  であり，利得の大きい点から  $\lfloor mQ / \min(d, Q) \rfloor$  点を選ぶ計算は  $O(\lfloor mQ / \min(d, Q) \rfloor \log n)$  となる．  $\square$

## 4.2 許容訪問間隔が一般の場合：時刻指定協力警邏問題

**定理 4.2.** グラフの形状が Unit のとき、時刻指定協力警邏問題は巡査が 1 人で全点の利得が等しくても NP 困難である。

証明. 最大独立集合問題からの帰着による.

最大独立集合問題の入力のグラフが  $G = (V, E)$  のとき、時刻指定協力警邏問題に対して、巡査の人数 1 と Unit のグラフ  $G' = (V', E')$  を入力として与える.  $G'$  は以下のように定める.  $V' = V$  とし、全点の利得は 1、辺の長さはすべて 1 とする. 各点の訪問指定時刻は次のように定める. まず、 ${}_nC_2$  個の相異なる素数  $p_{i,j} (1 \leq i < j \leq n)$  を用意し、 $q_i := \prod_{k=1}^{i-1} p_{1,k} \prod_{k=i+1}^n p_{k,n}$  とする. 次に、 $r_i (i \in \{1, \dots, n\})$  を、 $G$  のすべての 2 点  $v_i, v_j (1 \leq i < j \leq n)$  に対して、 $(v_i, v_j) \in E$  ならば  $r_i \equiv r_j \equiv 0 \pmod{p_{i,j}}$ 、 $(v_i, v_j) \notin E$  ならば  $r_i \equiv 0, r_j \equiv 1 \pmod{p_{i,j}}$ 、さらに  $0 \leq r_i < q_i$  を満たすように定める. 各  $r_i$  に対して相異なる  $n-1$  個の素数で割ったときの余りが与えられているので、中国剰余定理からそのような  $r_i$  がその  $n-1$  個の素数の積  $q_i$  を法として一意に存在する. 以上のようにして得た  $q_i, r_i (i \in \{1, \dots, n\})$  から、各点  $v_i (i \in \{1, \dots, n\})$  の訪問指定時刻を  $q_i k + r_i (k \in \mathbf{N})$  と定めると、時刻指定協力警邏問題の解は  $G$  の最大独立集合となる.

実際、 $G'$  の任意の 2 点  $v_i, v_j (i < j \text{ としてよい})$  に対し、この両方を警備できるための必要十分条件は、2 点間の移動時間が 1 以上かかることから、訪問しなければならない時刻同士がすべて 1 以上離れていること、すなわち、任意の整数  $k, l$  に対し  $|(kq_i + r_i) - (lq_j + r_j)| \geq 1$  が成り立つこととなる.  $q_i, r_i, q_j, r_j$  がすべて整数のとき、これは  $q_i k + r_i \neq q_j l + r_j$ 、すなわち  $r_i - r_j \neq q_j l - q_i k$  が任意の整数  $k, l$  で成り立つこと同値である.  $\gcd(x, y)$  を  $x$  と  $y$  の最大公約数とすると、 $r_i - r_j \neq \gcd(q_i, q_j)n$  が任意の整数  $n$  で成り立つこと、つまり  $r_i \not\equiv r_j \pmod{\gcd(q_i, q_j) = p_{i,j}}$  と同値である. よって、 $v_i$  と  $v_j$  の両方を警備できる必要十分条件は  $r_i \not\equiv r_j \pmod{p_{i,j}}$  となる.  $r_i$  の決め方から、

$$(v_i, v_j) \in E \iff G' \text{ の 2 点 } v_i, v_j \text{ を両方警備することができない}$$

が成り立つため、 $G'$  の点部分集合であって同時に警備できない 2 点のうち少なくとも一方は含まないようなもののうち最大のものを選ぶと、これは  $G$  の最大独立集合となる.

最後に、 ${}_nC_2$  個の相異なる素数を用意する計算量も確かめる必要がある.  $k$  番目に小さい素数を  $P_k$  と書くと、 $k \geq 6$  のときは  $P_k < k(\ln k + \ln \ln k)$  であることが知られているため [?],  $k(\ln k + \ln \ln k)$  までの自然数を順に素数かどうか判定していくことで  $k$  個以上の素数を得ることができる. ある数が素数であるかどうかを判定する多項式時間アルゴ

リズムは存在するので [?],  ${}_nC_2$  個の素数の列挙は  $n$  の多項式時間でできる.  $\square$

定理 4.2 では, 各点の訪問指定時刻といっても訪問間隔  $q_i$  と剰余  $r_i$  が与えられる場合について NP 困難性が示したが, 各点に訪問間隔  $q_i$  のみが指定されている問題も考えることができる. この訪問間隔指定の協力警邏問題は, 全点警邏可能性判定であっても NP 困難であることを示すことができる.

**定理 4.3.** グラフの形状が Unit のとき, 訪問間隔指定の協力警邏問題は巡査が 1 人で全点警邏可能性判定であっても NP 困難である.

証明. Disjoint Residue Class Problem [4] からの帰着による.

ある整数の組の集合  $\{(m_1, r_1), \dots, (m_n, r_n)\}$  が Disjoint Residue Class であるとは, 任意の整数  $x$  に対して  $x \equiv r_i \pmod{m_i}$  となるような  $i$  が高々 1 つ存在することと定義される. Disjoint Residue Class Problem とは整数の組  $(m_1, \dots, m_n)$  が与えられたときに,  $\{(m_1, r_1), \dots, (m_n, r_n)\}$  が Disjoint Residue Class となるような組  $(r_1, \dots, r_n)$  が存在するかを判定する問題であり, NP 困難であることが知られている [4].

Disjoint Residue Class Problem の入力  $(m_1, \dots, m_n)$  のとき, 訪問間隔指定協力警邏問題に対して巡査の人数 1 と  $n$  点からなる Unit のグラフで各点の訪問間隔を  $q_i = m_i$  となるように定め, 辺の長さはすべて 1 としたものを入力として与えることで Disjoint Residue Class Problem を解くことができる.

辺の長さが 1 であるから, すべての整数の時刻にいずれかの 1 点を訪問できる. 各頂点  $v_i$  の最初の訪問時刻を  $r_i$  とすると, この点を警備するために訪問しなければならない時刻の列は  $q_i k + r_i (k \in \mathbb{N})$  で与えられるが, 全点を警備するためには任意の 2 点  $v_i, v_j \in V$ , 任意の整数  $k, l$  について  $q_i k + r_i \neq q_j l + r_j$  である必要がある.

Disjoint Residue Class Problem の解  $(r_1, \dots, r_n)$  が存在するならば, 任意の時刻  $t \in \mathbb{Z}$  に対して  $t \equiv r_i \pmod{q_i}$ , すなわち  $t = r_i + q_i k$  となる  $k \in \mathbb{Z}$  が存在するような  $i$  は高々 1 つであり, 任意の  $k, l \in \mathbb{Z}$  に対して  $q_i k + r_i \neq q_j l + r_j$  が成り立つので, 巡査は全点を警備でき, 解が存在しなければある整数  $x$  に対して  $x \equiv r_i \pmod{m_i}$ ,  $x \equiv r_j \pmod{m_j}$  となる  $i, j$  が存在するので,  $v_i, v_j$  を両方警備することができず, したがって全点を警備できない.

$\square$

## 5 Tree (memo)

### 5.1 既知の結論

- 巡査が 1 人
  - グラフが星・木のとき，全点の利得と許容訪問間隔が等しい場合は多項式時間で解ける
  - グラフが星・木のとき，利得が許容訪問間隔が一般の場合は NP 困難
- 非協力警邏問題
  - グラフが星・木のとき，全点の利得と許容訪問間隔が等しい場合でも NP 困難
- 協力警邏問題
  - グラフが星・木のとき，利得が許容訪問間隔が一般の場合は，巡査が 1 人の場合から NP 困難
  - グラフが星で全点の利得と許容訪問間隔が等しい場合は多項式時間で解ける
  - グラフが木で全点の利得・許容訪問間隔が等しい場合は？

#### 5.1.1 2017/10/10

- 星 2 つの中心同士が 1 本の橋で結ばれた図形をまず考える.
- 【予想】左右独立運行 or 全員協力運行のいずれかが最適になる
- 簡単な場合から
  - 長い枝は省く (1 人常駐が必要なのは示せそう)
  - 左右の星は同じ図形の場合
  - さらに枝の長さをすべて同じにする
- $m$  人による全員協力運行で警邏可能であるとき，

$$2\left(\sum_{e \in E} d(e) + b\right) \leq mQ$$

where  $Q$ : 許容訪問間隔,  $m$ : 巡査の人数,  $b$ : 橋の長さ,  $E$ : 枝の集合. (逆も成立)

- $m$  人による左右独立運行で警邏可能であるとき，ある  $k(0 < k < m)$  が存在し，

$$2 \sum_{e \in L} d(e) \leq kQ \text{ かつ } 2 \sum_{e \in R} d(e) \leq (m - k)Q$$

where  $Q$ : 許容訪問間隔,  $m$ : 巡査の人数,  $b$ : 橋の長さ,  $L$ : 左の星の枝の集合,  $R$ : 右の星の枝の集合. (逆も成立)

### 5.1.2 2017/10/17

- 運行の帰着で示すのが難しそう（仮説の運行は複数人の動きを同時に決めているので）.
- 1 度も橋を渡らない運行では左右独立運行が最適.
- 1 度でも橋を渡る運行では全員協力運行より少ない人数では警邏できないことを示す？
- 許容訪問間隔  $Q$  ごとに橋往復の  $2b$  のコストがかかることを示せばよい

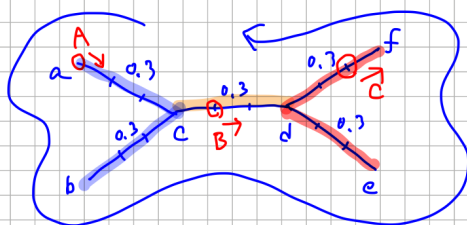
### 5.1.3 2017/10/18

- 左右それぞれの星は最小  $m_L, m_R$  人で警邏できるとすると、あえて橋を渡るのは  $m_L + m_R - 1$  人以下にできる場合のみ. すると、少なくとも一方は警邏可能最小人数より 1 人以上少ない巡査で運行する時間が生まれる. この時間の上限はいくらか.

## 参考文献

- [1] K. Chen, A. Dumitrescu, and A. Ghosh. On fence patrolling by mobile agents. In *Proc. 25th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG)*, 2013.
- [2] S. Coene, F.C.R. Spieksma, and G.J. Woeginger. Charlemagne’s challenge: the periodic latency problem. *Operations research*, 59(3), pp. 674–683, 2011.
- [3] J. Czyzowicz, L. Gąsieniec, A. Kosowski, and E. Kranakis. Boundary patrolling by mobile agents with distinct maximal speeds. In *Proc. 19th Annual European Symposium on Algorithms (ESA)*, LNCS 6942, pp. 701–712, 2011.
- [4] A. Kawamura and M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. In *Proc. Ninth International Conference on Algorithms and Complexity (CIAC)*, LNCS 9079, pp. 261–273, 2015.





全負回

