修士学位論文

複数の巡査の協力による指定地点の警邏について

Collaborative Patrolling of Designated Points on Graphs

2017 年度
広域科学専攻・広域システム科学系
31-166813
能城秀彬

［最終変更日時：2017/12/27 18 時 4 分］

[ToDo]

- 図の追加・差し替え
- 参考文献リストの書式の統一
- 引用を書き足す（定理名等の参照も）
- 単語の統一
  - 緑色にしている一時的な単語を決める
- 本文の後で補足？（不要？）
  - 2.1 各区間の利得の計算や選ばれた区間に含まれる点の列挙の方法
  - 2.2 節：運行可能集合 S に対して運行 a が存在することの証明

第 1 章

はじめに

所与の領域を一人または複数の巡査が動き回り，その領域内の指定された場所を十分な頻度で訪れることを警邏（patrolling）という [8, 3, 4, 6]．［文献追加］

本稿では，与えられた距離空間 U 内を速さ 1 以下の巡査 m 人が動きまわることにより，集合 $V \subseteq U$ に属する多くの点に十分な頻度で訪れるという目標を考える．すなわち次のような問題である．

巡査 $i \in \{1, \ldots, m\}$ の U 上の運行 $a_i \colon \mathbf{R} \to U$ とは，各時刻 $t \in \mathbf{R}$ における位置 $a_i(t) \in U$ を定めるものであって，任意の時刻 s，$t \in \mathbf{R}$ に対し $a_i(s)$ と $a_i(t)$ の距離が $|s - t|$ を超えないものをいう．巡査 m 人による U 上の運行とは，全巡査の運行を定めた組 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ をいう．U の有限な部分集合 V があり，V の各点には利得および放置限度と呼ばれる正整数が定まっている．点 $v \in V$ の放置限度が q であるとき，巡査達が運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ で点 v を警備するとは，長さ q のどの時間にもいずれかの巡査が v を少なくとも一度は訪れる（任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対して巡査 i と時刻 $\tau \in [t, t+q)$ が存在し $a_i(\tau) = v$）ことをいう．巡査達が運行 A により点集合 $W \subseteq V$ を警邏するとは，各点 $v \in W$ に対し巡査達が運行 A で v を警備することをいう．そのような運行が存在するとき W は m 人により警邏可能であるという．

点警邏問題． 巡査の人数 $m \in \mathbf{N}$ と距離空間 U 内の点集合 V および V の各点の利得と放置限度が与えられる．m 人の巡査により警邏可能な V の部分集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．

距離空間 U といっても，V の点同士の測地距離のみが重要である．そこで $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ を点集合，$q_1, \ldots, q_n$ を V の各点の放置限度，$p_1, \ldots, p_n$ を V の各点の利得，$d \colon V \times V \to \mathbf{R}$ を V の 2 点間の距離として，$(\{(v_i, q_i, p_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}, d)$ を**地図**と呼び，点警邏問題の入力は地図であるとする．

この問題は，巡査が一人かつ全点の利得と放置限度が等しい場合に限っても，ハミルト

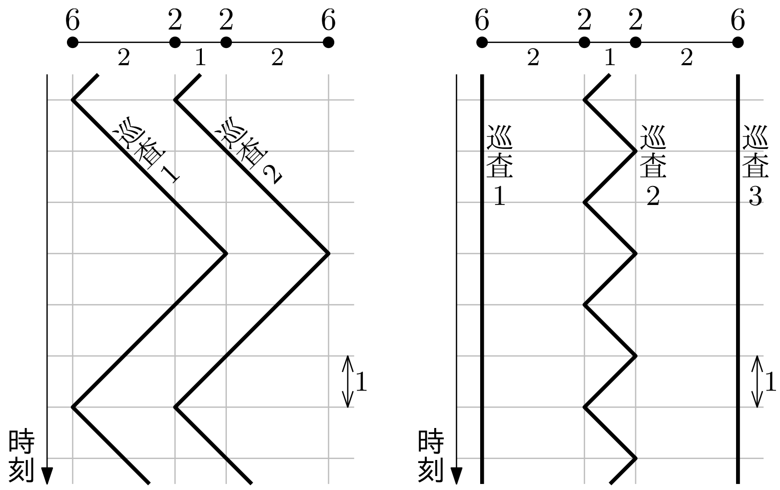

図 1.1　図の上部に描かれている四点からなる Line のグラフの全点を警邏する二つの運行．点と辺に書かれた数は，それぞれ放置限度と距離である．左図の運行では二人の巡査が協力して中央の二点を間隔 2 で警備している．これを禁じ，各点がいずれかの巡査により単独警備されることを求める場合は，右図のように三人の巡査を要する．

ン路問題からの帰着により NP 困難である [4, Theorem 8]．そこでグラフの形状を限ったときにどのようになるかを調べる．

一つの点を複数の巡査の訪問により警備し得ることに注意されたい．例えば図 1.1 左はそのような運行の例である．Coene ら [4] は似た問題を扱っているが，このような協力を許さず，図 1.1 右のように各点を専ら一人の巡査が「担当」することを要求している．つまり，各点 $v \in W$ が単独警備される（すなわち或る一人の巡査がおり，その巡査のみの運行が v を警備する）ことを要求しているのである．対比のため本稿ではこの問題を独立点警邏問題と呼ぶことにする（[4] では MPLPP と称している）．Coene ら [4] の諸結果においては，この単独警備という限定が，多項式時間算法の設計にも困難性の証明にも重要な役割を果している．この限定を外したときの様子を調べるのが本稿の目的である．

本稿では地図の形状（即ち距離関数 d の制約）として線分，星と，すべての枝の長さが等しい完全グラフの 3 種類を扱うこととし（図 1.2），以降はそれぞれを Line，Star，Unit と呼ぶ．Star では葉のみに放置限度が定められている（中心は警備の対象としない）．Unit のグラフはその辺の長さを d とすると，同じ点数で辺の長さがすべて $d/2$ である Star のグラフの場合に帰着できることから，Unit は Star の特殊な場合である．

点警邏問題についての我々の結果を Coene らの独立点警邏問題についての結果との比較も含めてグラフの形ごとにまとめると次のようになる．それぞれ 2，3，4 節で述べる．

- グラフが Line の場合は，独立点警邏問題は動的計画法により多項式時間で解けることが示されていた [4, Theorem 11] が，その正しさは単独警備という設定に強く

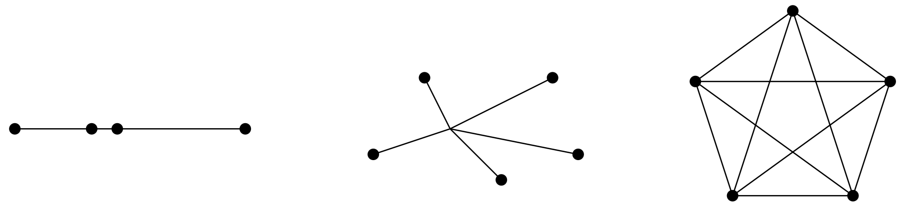

図 1.2　本論文では Line（左），Star（中），Unit（右，但し各辺の長さが等しい）を扱う．Star は葉のみを警備の対象とする（中央の点は移動の途中で使うのみであり，放置限度は定められていない）．

依存している．本稿では点警邏問題について，全点の放置限度が等しい場合には多項式時間で解けることを示す（定理 2.1.1）．

- グラフが Star の場合は，全点の利得と放置限度が等しい場合に限っても，独立点警邏問題は NP 困難であることが示されていた [4, Theorem 10]．本稿では，この場合の点警邏問題は多項式時間で解けるという興味深い結果を得る（定理 3.0.3）．なお利得または放置限度を一般にすると，巡査が一人であっても（したがって独立かどうかによらず）NP 困難であることがわかっている [4, Theorems 5 and 6]．
- グラフが Unit の場合は，本稿では全点の放置限度が等しい場合は点警邏問題が多項式時間で解けることを示す（定理 4.1.1）．グラフが Star の場合は全点の放置限度が等しくても利得が一般だと NP 困難になるので，これにより Unit は Star よりも簡単に解ける場合となっていることが分かる．

グラフが Line や Unit の場合には，全点の放置限度が等しい場合には多項式時間で解けるのに対し，放置限度が一般の場合には多項式時間アルゴリズムを見つけることができなかった．グラフが Star の場合は点警邏問題が NP 困難になる [4] ので，グラフが Line や Unit の場合についても NP 困難になるのではないかと予想したが，これも示すことができなかった．これらの未解決な場合については，放置限度の代わりに指定訪問時刻を警備の条件とする次のような問題を考えた．

定義 1.0.1. 運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が点 $v \in U$ を指定訪問時刻 $(q, r) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ で警備するとは，任意の時刻 $t := qk + r$ $(k \in \mathbf{Z})$ に対し巡査 i が存在し $a_i(t) = v$ であることをいう．

時刻指定警邏問題. 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および各点の利得，警備の条件として指定訪問時刻が与えられる．m 人の巡査により警邏可能な V の部分集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．

時刻指定警邏判定問題. 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および警備の条件とし

て各点の指定訪問時刻が与えられる．m 人の巡査により V を警邏可能か判定せよ．

Line については時刻指定警邏判定問題を解く貪欲アルゴリズムを示す（定理 2.2.2）．Unit については時刻指定警邏問題が NP 困難であることを示す（定理 4.2.1）．

関連研究

［文章化，引用の追加］

警邏に関する問題には様々な設定が考えられている．

［メモ］

- 問題設定の大枠について
  - 現実世界の平面上を動く巡査の警備のモデル化として，警備対象が存在する部屋の周囲を巡回するものや，部屋の内部を巡査が動き回るものなどが考えられる．
    - 前者は「塀の警邏問題 (fence patrolling)」･「境界の警邏問題 (boundary patrolling) などの名前で知られており，塀を表す線分または閉路のすべての点を警備対象とするもの [6, 7, 10]，より一般に線分や閉路の一部のみを警備対象とする問題などが考えられている [5].
    - 部屋の内部を警備する場合には部屋の内部には複数の障害物が存在する状況が考えられる [].
  - 点警邏問題では，放置限度の条件さえ満たしていれば警備できるという設定で考えており，侵略者の動きなどは具体的に考えていないが，侵略者の動き方まで含めてゲーム理論的に考察している研究も存在する [2, 13].
  - 点警邏問題では，巡査達の動きを決定論的に与えるので，モデル化したい現実の状況によっては十分賢い侵略者に対応されてしまい有用でない場合がありうる．このような欠点を補うため，巡査の運行にランダム性を取り入れたものがある [].
  - 点警邏問題では，警備対象の環境が与えられたときに最適な巡査の運行を最初に決定してしまって，巡査がその通りに動くという意味で，中央集権的な運行の決定の仕方である．一方で，巡査がその近傍の情報から各々の判断で運行を決定するという設定のものも考えられている [].
- 問題に対する様々なアプローチ
  - 理論的な研究を行うもの []
  - ヒューリスティックな戦略を先に与え，計算機でシミュレーションを行うもの []

  - 実際のロボットで実験しているものもある [].
- 点警邏問題を考える動機
  - 巡査が障害物を含む 2 次元平面内を動き回り警備するという目的の問題において，障害物を含む 2 次元平面をグラフに簡略化して考えるというところから，グラフの点を警備するという問題が考えられていた [12].
  - （なぜ図形として Line, Star, Unit を考えたか？）→ Line は塀の警邏などの文脈でよく現れるため []．Star は木の特殊な場合であり，グラフが木の場合の点警邏問題の困難性の評価に有用な図形である．グラフの点の警邏を行うために，そのグラフの最小全域木を計算し代わりにこれを警邏するとする研究もある []［確認］．
- 似た問題設定の他の研究との細かい違いについて
  - 目標（いずれも与えられた m 人の巡査で全点を警邏できるか判定する問題の一般化）
    * 全点警備可能な最小の巡査数を求める []
    * 与えられた巡査により警邏可能な部分集合であって点の数や利得の合計が最大のものを求める []
    * 与えられた巡査により全点を警備する上で，各点の訪問頻度を（同程度にする・平均値を最大化する・最小の訪問頻度を最大化する）[]
- 拡張について
  - 我々の考える点警邏問題は，非常に単純な図形についてさえ NP 困難性が示されていたり，多項式時間アルゴリズムを示すことができていない場合が存在する．よって，点警邏問題に対して問題設定の拡張を考えること自体はできても厳密な最適解を得る効率的なアルゴリズムは望みがたい．
  - 例えば，巡査の速さの上限が異なる場合などを考えることもできるが，グラフの警邏の場合については・・・［調べる］．塀の警邏問題について速さの上限が異なる巡査の場合について調べている研究はいくつか存在する [] が，一般の状況に対する最適解を与えることには成功していないようである []［確認］．
  - 点警邏問題は点を通過する（時間 0 滞在する）だけで警備したことになる設定だが，より一般に時間 $d \geq 0$ 滞在しなければならないという拡張が考えられる．しかしこれについては点 p を警備するのに時間 d 滞在しなければならない状況を，p から長さ $d/2$ の辺を伸ばした先の点 p' を代わりに警備対象とし滞在時間 0 とするグラフに帰着できるため拡張にはなっていない．
  - 巡査が視野を持つ
- その他
  - 分割戦略と巡回戦略

* 多くの場合 TSP の解に基づく巡回戦略が最適だが，長い辺がある場合は分割戦略が有利であり，また巨大グラフの場合には TSP の解の計算コストが大きくなる問題がある．
* TSP の解に基づく巡回戦略が多くの場合最適なので，TSP の解を求める近似アルゴリズムにより巡査の運行を決めるものもある．グラフを最小全域木に簡単化し，この上で TSP の解を求め巡回戦略を与えるという近似をしているものがある．→ グラフが木の場合の多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのは重要である．

第 2 章

Line

グラフが Line の場合，グラフの全体（点と辺）を実直線上におくことができる．本節では，点の名前 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ はその位置の実数値も表すことにする．

Line における巡査 m 人の運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ で $a_1(t) \leq a_2(t) \leq \cdots \leq a_m(t)$ を満すとき，A は順序保存であるという．巡査 m 人で警邏可能な任意の点集合 W は，或る巡査 m 人の順序保存運行により警邏される．これは，W がある運行により警邏されるならば，その運行で二人の巡査がすれ違うときに代わりに互いの以降の運行を交換し引き返すようにした運行（巡査の速さの上限がすべて等しいため巡査が互いの運行を一部だけ交換することができる）によっても W が警邏されるためである．

2.1　全点の放置限度が等しい場合

本節では次のことを示す．

定理 2.1.1. グラフが Line で全点の放置限度が等しい場合，点警邏問題は多項式時間で解くことができる．

この場合については，全点を警備可能か判定する問題ならば Collins ら [5] の問題の特殊な場合として既に示されている．［Collins らの結果についてここでもう少し詳しく書く？］これに対して定理 2.1.1 は利得最大化問題である点警邏問題が多項式時間で解けるという主張である．

以降では，グラフが Line で全点の放置限度が等しい場合，次に定義する独立往復運行という単純な運行によって最大利得が得られることを示す．

定義 2.1.2. グラフが Line で全点の放置限度を Q とする．点 $v_1, \ldots, v_n$ を左端とする長さ $Q/2$ の区間をそれぞれ $S_1, \ldots, S_n$ と書く（すなわち，$S_i = [v_i, v_i + Q/2]$）．運行

$A = (a_1, \ldots, a_m)$ が独立往復運行であるとは，各 a_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ が $S_1, \ldots, S_n$ のいずれかを往復する運行であって，$a_1, \ldots, a_m$ の往復区間が互いに重複していないことである．

補題 2.1.3. 点 v_i がある一人の巡査 s により単独警備されているとき，放置限度を q_i として，s は常に区間 $[v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$ にいる．

証明　この区間にない或る座標 $v_{\mathrm{out}} \notin [v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$ を s が時刻 t_0 に訪問するとする．v_{out} と v_i の間の移動には少なくとも時間 $|v_i - v_{\mathrm{out}}| > q_i/2$ を要するから，s は区間 $[t_0 - q_i/2, t_0 + q_i/2]$ に属する時刻に v_i を訪問できない．この区間の長さは q_i であるので，s が v_i を単独警備していることに反する． □

補題 2.1.4. グラフが Line で全点の放置限度が等しいとする．点集合 V の任意の部分集合 W について，W が巡査 m 人により警邏可能ならば W は巡査 m 人による独立往復運行で警邏可能である．

証明　巡査数 m に関する帰納法で示す．全点の放置限度を Q とする．$m = 0$ のときは明らかなので，以下 $m > 0$ とする．

W は m 人の巡査により警邏可能であるので，2 節始めの議論により W を警邏する m 人の巡査による順序保存運行が存在する．このような運行を任意に一つ選び $A = (a_1, \ldots, a_m)$ とする．

W の点のうち最も左にあるものを b とする．まず，各巡査は b より左に存在する時間 b で停止するように変換する．このようにしても W は警邏されたままであり，またこれによりすべての巡査は区間 $[b, +\infty)$ に存在することになる．

ここで，最も左に存在する巡査 1 に注目する．順序保存であることから b が A により訪問されるすべての時刻に巡査 1 は b を訪問しているので，b は a_1 により単独警備されている．補題 2.1.3 より，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対し $a_1(t) \leq b + Q/2$ である．一方，巡査 1 が区間 $[b, b + Q/2]$ を速さ 1 で往復する運行 a'_1 を行うと，a'_1 はこの区間に含まれるすべての点を警備する．実際，$b \leq x \leq b + Q/2$ である位置 x が運行 a'_1 により訪問される間隔の最大値は $\max(2(x - b), 2(b + Q/2 - x)) \leq 2(b + Q/2 - b) = Q$ より，$[b, b + Q/2]$ に含まれるどの点も放置限度を超えずに訪問できていることが分かる．一方，$W^- := \{v \in W \mid b + Q/2 < v\}$ は A で巡査 1 以外の $m - 1$ 人の巡査により警備されているので，帰納法の仮定から残る $m - 1$ 人の巡査も独立往復運行に変換することができる．以上により W を警邏する m 人の巡査による独立往復運行が得られた． □

補題 2.1.4 により，Line のグラフで全点の放置限度が等しい場合は独立往復運行のみを考えればよい．よって，$S_1, \ldots, S_n$ から m 人の巡査がそれぞれ担当する重複のない m 個

の区間のうち利得の合計が最大となるものを求めればよい．これは以下のアルゴリズムにより求めることができる．

初めに Line 上の点をソートしておき，左側から順に $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする．n 個の区間 $S_1, \ldots, S_n$ について各区間 S_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ に含まれる点から得られる利得の合計を求め $P_i := \sum_{v_j \in S_i} p_j$ と書く．各区間 S_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ について，S_i と重複部分のない区間の添え字のうち i 未満で最大のもの（存在しない場合は 0）を求め，$h_1, \ldots, h_n$ と書く．$v_1, v_2, \ldots, v_n$ がソートしてあるので $P_1, \ldots, P_n$ や $h_1, \ldots, h_n$ は合計 $O(n)$ で求めることができる．次に利得の合計が最大になる重複のない m 個の区間を選ぶ（m は巡査数）．漸化式 (2.1) に従う動的計画法で $O(mn)$ で最大の利得を得られる m 個の区間を選択できる．$OPT(k, l)$ は，区間 $S_1, \ldots, S_l$ から最大 k 個の重複のない区間を選ぶときの利得の合計の最大値を表す．$OPT(m, n)$ が全体の利得の最大値となる．

$$OPT(k,l) = \begin{cases} 0 & k = 0 \text{ または } l = 0 \text{ のとき} \\ \max\{OPT(k, l-1), P_l + OPT(k-1, h_l)\} & \text{それ以外の場合} \end{cases} \tag{2.1}$$

最後に，$OPT(m, n)$ において選ばれた区間をトレースバックして求め，この区間に含まれる点全体を出力して終了する．

このアルゴリズムの計算量は全体で $O(n \log n + nm)$ となる．これで定理 2.1.1 が示された．

2.2　放置限度が一般の場合

全点の放置限度が等しい場合は，結局巡査がそれぞれ区間を 1 つずつ担当し往復する運行のみ考えればよいという単純な状況になっていたが，放置限度が一般の場合は，一部の点を複数の巡査が訪問して警備する必要がある場合が存在する．図 2.1（左）の例では，中央の放置限度の短い 2 つの点は 2 人の巡査に訪問されており，また，全点の放置限度が等しい場合に反して各巡査の最適な運行はなんらかの区間の往復であるとは限らないことも分かる．

また，この例では左の巡査は左端の点を放置限度ちょうどごとに訪問しているが，一方，図 2.1（中央）の例では，左側の巡査は左端の点をあえてより短い周期で訪問することで全点を警邏している．図 2.1（中央）と同じ入力に対して，図 2.1（右）のように左の巡査が左端の点の放置限度ぎりぎりの時間まで右の方へ動き左端へ帰る運行を行うと 2 人の巡査がうまく協力できず全点の警備ができない．このように，補題 2.1.4 のときのように左端の点の放置限度から順に巡査の運行を決定することも難しい例が存在する．

これらの例は，放置限度が異なる場合は巡査の運行を個別に決定するのは難しいということを示唆している．しかしながら，Line のグラフで放置限度が一般の場合での点警邏

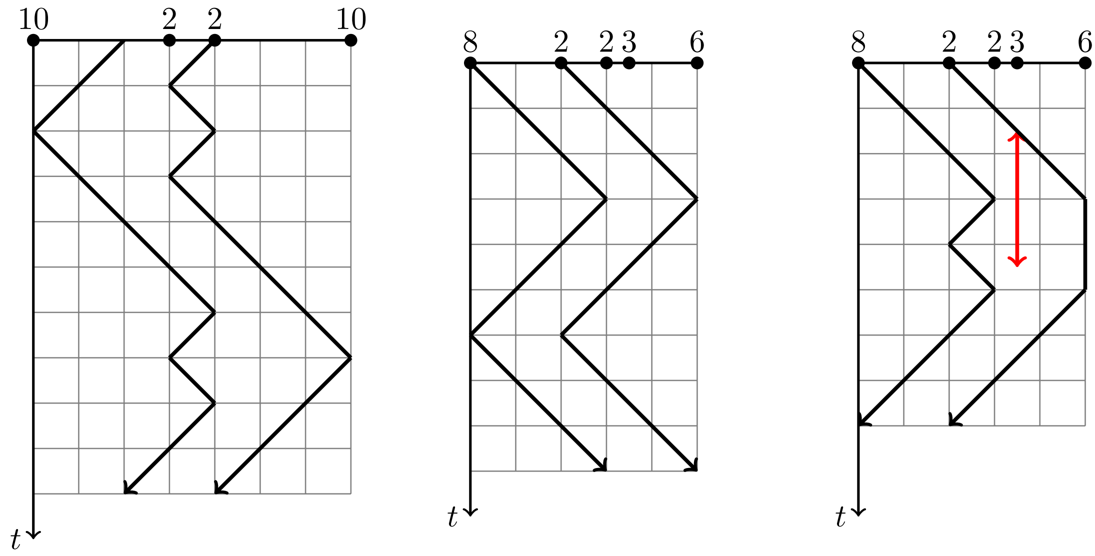

図 2.1　巡査の協力が必要な例．横軸を点の座標，縦軸を時刻として巡査の軌跡を表す．点の上の数値は放置限度を表す．［あとで図を差し替える］

問題の困難性を示すこともできなかった．そこで，放置限度より短い間隔で点を訪問しうることで運行の決定が複雑になる例が存在したことを踏まえて，ここでは 1 節で定義した時刻指定警邏判定問題という別種の問題を代わりに考える．

グラフが Line の場合の時刻指定警邏判定問題は次のようにも記述できる．

定義 2.2.1. $S \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ とする．任意の $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in S$ が $|x_1 - x_2| \le |t_1 - t_2|$ を満たすとき，S は運行可能であるという．また，分割 $\{P_1, \ldots, P_l\}$ が運行可能であるとは，$P_1, \ldots, P_l$ がそれぞれ運行可能集合であることである．

任意の運行可能集合 S に対して，Line 上の巡査の運行 a であって，S のすべての元 (t, x) に対して $a(t) = x$ を満たす（このとき a を運行可能集合 S に対応する運行と呼ぶ）ものが存在することは簡単に示される．

時刻指定線分警邏判定問題. 正の整数 m と n 個の自然数の組 $(q_i, r_i, x_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ が与えられる．集合 $\{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ を m 個以下の運行可能集合に分割できるか判定せよ．

定理 2.2.2. 時刻指定線分警邏判定問題を解く貪欲アルゴリズムが存在する．

証明　グラフが Line の場合は順序保存運行を考えることができるのと同様に，順序保存（運行可能）分割も考えることができる．分割 $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_l\}$ が順序保存であるとは，$\mathcal{P}$ に対応する運行 $A = (a_1, \ldots, a_l)$ であって順序保存なものが存在すること，あるいは，

$$L(t, x) := \{(t', x') \mid |x - x'| > |t - t'| \text{ かつ } x' < x\} = \{(t', x') \mid x - x' > |t - t'|\}$$

として，任意の P_i $(i \in \{1 \ldots, l\})$ について，領域 $\bigcup_{(t,x)\in P_i} L(t,x)$ に P_j $(i<j)$ の点が存在しないことと定義される．

$X := \{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1,\ldots,n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ の任意の順序保存分割のうち一番左の集合は順序保存分割の定義から $\mathfrak{P}_1 := \{(t,x) \in X \mid L(t,x) \cap X = \emptyset\}$ の部分集合となる．よって，X の最小の順序保存分割であって一番左の集合が $\mathfrak{P}_1$ であるようなものが存在する．同様に，残りの $X \setminus \mathfrak{P}_1$ の最小の順序保存分割であって一番左の集合が $\mathfrak{P}_2 := \{(t,x) \in X \setminus \mathfrak{P}_1 \mid L(t,x) \cap X \setminus \mathfrak{P}_1 = \emptyset\}$ であるようなものが存在する．このように，集合 X の左側から貪欲に運行可能集合を取り出していく操作を再帰的に繰り返すと，最小の順序保存分割 $\{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_l\}$ が得られる．これを $\mathfrak{P}(X)$ と書くことにする．時刻指定線分警邏判定問題の判定は $|\mathfrak{P}(X)| \leq m$ が成り立つかの判定をすればよい．

以下では，集合 $S \subseteq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に対して $S[a:b) := \{(t,x) \in S \mid a \leq t < b\}$ と定義する．

$q_1, \ldots, q_n$ が整数であるので X は時刻（組 $(t,x) \in X$ の第 1 要素）について周期的であり，その周期は $q_1, \ldots, q_n$ の最小公倍数 T となる（すなわち，任意の整数 k に対して，$(t,x) \in X[kT:(k+1)T)$ と $(t-kT, x) \in X[0:T)$ が同値である）．従って，前述の貪欲な分割 $\mathfrak{P}(X)$ の各要素 $\mathfrak{P}_i$ $(i \in \{1,\ldots,l\})$ も同様に時刻について周期的である．X の最小の運行可能分割 $\mathfrak{P}(X) = \{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_l\}$ の大きさを計算するには，$X[0:T)$ の運行可能分割 $\{\mathfrak{P}_1[0:T), \ldots, \mathfrak{P}_l[0:T)\}$ を計算できればよい．

ここで，$X[0:t)$ の分割 $\mathfrak{P}(X[0:T))$ と $\mathfrak{P}(X)$ の大きさは必ずしも一致しないことに注意されたい．$X[0:T)$ の運行可能分割 $\{\mathfrak{P}_1[0:T), \ldots, \mathfrak{P}_l[0:T)\}$ を計算するには，前述の貪欲な分割の仕方で集合 S から左端の運行可能集合 $s' := \{(t,x) \in S \mid L(t,x) \cap S = \emptyset\}$ を取り出すとき，s' の点 (t,x) の条件は領域 $L(t,x)$ に S の点が存在しないことである．よって，X を $\mathfrak{P}(X)$ へ分割するときと「同じ条件で」$X[0:T)$ を分割するには，以下の有限集合 F の分割 $\mathfrak{P}(F)$ を与える最小運行可能分割アルゴリズム の入力として $\bigcup_{(t,x)\in X[0:T)} L(t,x)$ を与えればよい．あとは，出力された分割 $\mathcal{P}$ の各要素を $[0:T)$ に制限すれば $X[0:T)$ の分割 $\{\mathfrak{P}_1[0:T), \ldots, \mathfrak{P}_l[0:T)\}$ が得られる．

最小運行可能分割アルゴリズム．入力を有限集合 F とする．初期値を $\mathcal{P} = \{\}$, $F' = F$ とし，$F' \neq \emptyset$ である限り次の 1 から 3 を繰り返す．

1. $P \leftarrow \{(t,x) \in F' \mid L(t,x) \cap F' = \emptyset\}$
2. $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{P\}$
3. $F' \leftarrow F' \setminus P$

$\mathcal{P}$ を出力する．

$\square$

第 3 章

Star

グラフが Star の場合については，利得か放置限度のいずれかが一般であれば，点警邏問題は巡査が一人であっても NP 困難であることが知られている [4, Theorem 5 and 6]. よってここでは，巡査数が一般であって，全点の利得と放置限度が等しい場合を調べる．

定理 3.0.3. グラフが Star で全点の利得と放置限度が等しい場合，点警邏問題は（巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

独立点警邏問題においては，グラフが Star で巡査数が一般の場合は利得と放置限度がすべて等しくても NP 困難になることが Coene らにより示されている [4, Theorem 10]. Line の場合では協力の発生によって複雑な運行による警邏が発生した状況から考えると，単独警備の条件を外した点警邏問題の方が簡単に解けるというのは意外な結果に思われる．これは，Star の場合，独立点警邏問題では単独警備の条件のためにうまく点集合を分割しなければならないことが難しさを生み NP 困難になるのに対し，点警邏問題では単独警備の条件が無いことで後述の定理 3.0.5 の証明中に述べる単純な運行が可能となるためである．

本節では，Star の点 v に隣接する辺を e_v, その長さを d_v と書く．

補題 3.0.4. グラフが Star で全点の放置限度が Q のとき，点 v が警備されているならば，どの長さ Q の時間にも $\min(2d_v, Q)$ の時間は少なくとも一人の巡査が e_v 上に存在する．

証明　以下の場合分けによる．

1. $2d_v \geq Q$ のとき，もし v の隣接辺 e_v 上に巡査が存在しない時刻 τ があるとすると，v を訪問した τ 以前で最後の時刻と τ 以後で最初の時刻の間隔は $2d_v \geq Q$ より長いため，v が警備されていることに反する．
2. $2d_v < Q$ のとき，長さ Q の時間区間 $[t, t+Q)$ を任意に選ぶ．警備の条件から v は

$[t, t+Q)$ に少なくとも 1 回訪問されるが，その時刻によって以下の場合を考える．

（a）　$[t+d_v, t+Q-d_v)$ に 1 回以上訪問されるとき，その訪問時刻を任意に 1 つ選び τ とすると τ の前後の合計 $2d_v$ の時間は巡査は辺 e_v 上に存在し，これは $[t, t+Q)$ に含まれる．

（b）　$[t+d_v, t+Q-d_v)$ に 1 回も訪問されないときは, $[t, t+d_v)$ か $[t+Q-d_v, t+Q)$ に少なくとも 1 回訪問される． (i) $[t, t+d_v)$ に 1 回以上訪問されるとき，$[t, t+d_v)$ に含まれる最後の訪問時刻を τ とすると，点 v の警備の条件と場合分けの条件から τ の次の訪問時刻 σ は $t+Q-d_v < \sigma \leq \tau+Q$ を満たす．τ と σ それぞれの前後 d_v の時間のうち $[t, t+Q)$ に含まれる $[t, \tau+d_v], [\sigma-d_v, t+Q)$ には巡査が辺 e_v に存在し，その時間の合計は $((\tau+d_v)-t)+((t+Q)-(\sigma-d_v)) = 2d_v+(Q-(\sigma-\tau)) \geq 2d_v$ より $2d_v$ 以上となる．(ii) $[t+Q-d_v, t+Q)$ に 1 回以上訪問されるときも 2（b）i と同様. □

補題 3.0.5. グラフが Star で全点の放置限度が Q のとき，点集合 V の部分集合 W が m 人の巡査により警邏可能であるには,

$$\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ \tag{3.1}$$

が成立つことが必要十分である．

証明　十分であることを示す．(3.1) が成り立つとき，m 人の巡査の運行 $(a_1, \ldots, a_m)$ を次のように定めれば W の全点を警邏可能である．$W' := \{v \in W \mid 2d_v \geq Q\}$, $l := m - |W'|$ とする．まず，$|W'|$ 人の巡査 $s_{l+1}, \ldots, s_m$ は W' の各点に一人ずつ停止しこれを警備する．巡査 $s_1, \ldots, s_l$ は速さ 1 で動きながら $W \setminus W'$ の全点をちょうど 1 度ずつ訪問する巡回を繰り返す．このとき，巡査 s_i は巡査 s_1 より時間 $(i-1)Q$ 遅れて同じ運行を行うようにする（すなわち，$a_i(t) = a_1(t-(i-1)Q)$ となるように運行を定める）. 中心点と点 v の 1 回の往復には $2d_v$ の時間を要するので，一人の巡査がある点から出発し速さ 1 で $W \setminus W'$ の全点を 1 度ずつ訪問して最初の点に戻ってくるのにかかる時間は $\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v$ である．$\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v = \sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) - |W'|Q \leq (m-|W'|)Q$ よりこの時間は $(m-|W'|)Q$ 以下となるので $(m-|W'|)Q$ 人の巡査が先ほどの巡回を行うと，$W \setminus W'$ のどの点も時間 Q 以上放置されない．これにより W の全点が警備される．

必要であることを示す．W が m 人の巡査により警邏されているとすると，補題 3.0.4 より，各点 $v \in W$ について，どの長さ Q の時間にも $\min(2d_v, Q)$ の時間は少なくとも一人の巡査が e_v 上に存在する．よって，W の全点の警備には時間 Q あたり合計 $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q)$ の巡査の時間を要する．各巡査は時間 Q の間にいずれか 1 つの点の訪問に時間を使う必要があるので，(3.1) が成り立つ. □

補題 3.0.5 より Star の任意の点部分集合 W が警邏可能であるかを W の点の隣接辺の長さだけから簡単に計算できることが分かった．定理 3.0.3 では，全点の利得と放置限度が等しい場合を考えているので警邏する部分集合としては隣接辺の短い点から順に選べばよく（隣接辺のより長い点 v_1 とより短い点 v_2 があるとき，v_1 を警備して v_2 を警備しない運行は常に v_1 を警備する代わりに v_2 を警備する運行に変換できる），警邏可能な最大の部分集合を求める計算は点の数を n として $O(n \log n)$ となる．以上から定理 3.0.3 が示された．

第 4 章

Unit

1 節で述べたように Unit は Star の特殊な場合とみなせるため，全点の利得と放置限度が等しい場合点警邏問題は定理 3.0.3 により多項式時間で解くことができる．ここでは，Unit で全点の放置限度が等しい場合の点警邏問題が（利得が一般でも）多項式時間で解けることを示す（定理 4.1.1）．

放置限度が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しかったため，2 節で扱った時刻指定警邏問題を再び考える．グラフが Unit の場合は時刻指定警邏問題が NP 困難になることを示す（定理 4.2.1）．

4.1 全点の放置限度が等しい場合

定理 4.1.1. グラフが Unit で全点の放置限度が等しい場合，点警邏問題は（利得，巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

証明 Unit は Star の特殊な場合であるから，補題 3.0.5 から Unit のグラフの全点の放置限度が Q のとき，点集合 V の任意の部分集合 W について W を m 人の巡査により警邏可能であることの必要十分条件は d を各辺の長さとして

$$\sum_{v \in W} \min(d, Q) = |W| \min(d, Q) \leq mQ$$

である．

グラフが Unit の場合，全点の放置限度が等しいならば警邏する部分集合 W は利得の大きい点から選べばよい（利得のより大きい点 v_1 とより小さい点 v_2 があるとき，v_1 を警備して v_2 を警備しない運行は常に v_1 を警備する代わりに v_2 を警備する運行に変換できる）．$|W| \min(d, Q) \leq mQ$ を満たす最大の $|W|$ は $|W| = \lfloor mQ/\min(d, Q) \rfloor$ であるので，利得の最も大きい $\lfloor mQ/\min(d, Q) \rfloor$ 点を選べばよい． $\square$

4.2　放置限度が一般の場合

3 節冒頭で述べた通り，グラフが Star の場合については，放置限度が一般の場合は点警邏問題は巡査が一人であっても NP 困難であった [4, Theorem 6]．この NP 困難性の証明では辺の長さが異なる Star のグラフを用いていた．Unit は Star の辺の長さがすべて等しい場合であるため，この方法による NP 困難性の証明ができない．Unit で放置限度が一般の場合は多項式時間アルゴリズムや NP 困難性の証明が難しかったため，Line のときのように時刻指定警邏問題を代わりに考える．

定理 4.2.1. グラフが Unit のとき，時刻指定警邏問題は巡査が一人で全点の利得が等しくても NP 困難である．

証明　最大独立集合問題からの帰着による．

最大独立集合問題は，与えられた無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，点集合 V の部分集合 W のうち W 内の点間に辺が存在しないようなもの（独立集合）で大きさが最大のものを求める問題である．

最大独立集合問題の入力として点集合 $[n] = \{1, \ldots, n\}$，辺集合 E のグラフ G が与えられたとする．同じ点集合 $[n]$ をもち，利得をすべて 1，辺の長さをすべて 1 とした Unit のグラフ G' を考える．G' の各点 $i \in [n]$ の指定訪問時刻 (q_i, r_i) を次のように定める．まず，$n(n-1)/2$ 個の相異なる素数 $p_{(i,j)}$ $(1 \le i < j \le n)$ を用意する．$i > j$ に対して $p_{(i,j)}$ と書くときは $p_{(j,i)}$ を指すことにする．各 $i \in [n]$ について，

$$q_i = \prod_{j \in [n] \setminus \{i\}} p_{(i,j)} \tag{4.1}$$

とし，r_i をすべての $j \in [n] \setminus \{i\}$ に対して次を満たすように定める．

$$r_i \equiv \begin{cases} 1 & (i,j) \notin E \text{ かつ } i > j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \pmod{p_{(i,j)}} \tag{4.2}$$

そのような r_i は中国剰余定理より（q_i の剰余として一意に）存在する []．

G' の異なる 2 点 i, j の間の移動には時間 1 を要することから，その両方を警備できるためには，訪問すべき時刻同士がすべて 1 以上離れていること，すなわち任意の整数 k, l に対して $|(kq_i + r_i) - (lq_j + r_j)| \ge 1$ が成り立つことが必要十分である．q_i, r_i, q_j, r_j がすべて整数のとき，これは $q_i k + r_i \ne q_j l + r_j$，すなわち $r_i - r_j \ne q_j l - q_i k$ が任意の整数 k, l で成り立つことに同値である．q_i と q_j の最大公約数は $p_{(i,j)}$ なので，これはさらに $r_i - r_j$ が $p_{(i,j)}$ の倍数でないこと，つまり $r_i \not\equiv r_j \mod p_{(i,j)}$ に同値である．r_i の決め方 (4.2) から，これは $(i,j) \notin E$ に同値である．以上より，$(i,j) \in E$ と G' の 2 点 i, j

を両方警備することができないことが同値となるため，G' の最大の警邏可能点集合は G の最大独立集合となることがわかる．

また，k 番目に小さい素数を P_k と書くと，$k \geq 6$ のときは $P_k < k(\ln k + \ln\ln k)$ であり [9]，或る数が素数であるかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムが存在する [1] ので，$n(n-1)/2$ 個の素数の列挙は n の多項式時間でできる． □

定理 4.2.1 では，各点の指定訪問時刻が与えられる場合について NP 困難性を示したが，指定訪問時刻のうち訪問間隔 $q_1, \ldots, q_n$ のみが指定されている次のような問題も考えることができる．

間隔指定警邏判定問題． 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および各点の指定訪問間隔 $q_1, \ldots, q_n$ が与えられる．非負整数 $r_1, \ldots, r_n$ をうまく定めることにより，m 人の巡査により V の全点を警邏可能か判定せよ．ただし，V の各点 v_i の警備の条件が指定訪問時刻 (q_i, r_i) であるとする．

グラフが Unit の場合，間隔指定警邏判定問題は巡査が一人であっても NP 困難であることが示されている [11]．

参考文献

[1] Manindra Agrawal, Neeraj Kayal, and Nitin Saxena. Primes is in p. *Annals of mathematics*, pp. 781–793, 2004.

[2] Tomáš Brázdil, Petr Hliněnỳ, Antonín Kučera, Vojtěch Řehák, and Matúš Abaffy. Strategy synthesis in adversarial patrolling games. *arXiv preprint arXiv:1507.03407*, 2015.

[3] Ke Chen, Adrian Dumitrescu, and Anirban Ghosh. On fence patrolling by mobile agents. In *CCCG*, 2013.

[4] Sofie Coene, Frits CR Spieksma, and Gerhard J Woeginger. Charlemagne's challenge: the periodic latency problem. *Operations Research*, Vol. 59, No. 3, pp. 674–683, 2011.

[5] Andrew Collins, Jurek Czyzowicz, Leszek Gasieniec, Adrian Kosowski, Evangelos Kranakis, Danny Krizanc, Russell Martin, and Oscar Morales Ponce. Optimal patrolling of fragmented boundaries. In *Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Parallelism in algorithms and architectures*, pp. 241–250. ACM, 2013.

[6] Jurek Czyzowicz, Leszek Gasieniec, Adrian Kosowski, and Evangelos Kranakis. Boundary patrolling by mobile agents with distinct maximal speeds. In *ESA*, pp. 701–712. Springer, 2011.

[7] Adrian Dumitrescu, Anirban Ghosh, and Csaba D Tóth. On fence patrolling by mobile agents. *arXiv preprint arXiv:1401.6070*, 2014.

[8] Adrian Dumitrescu and Csaba D. Tóth. Computational geometry column 59. *SIGACT News*, Vol. 45, No. 2, pp. 68–72, June 2014.

[9] Pierre Dusart. The k th prime is greater than $k(\ln k + \ln\ln k - 1)$ for $k \geq 2$. *Mathematics of Computation*, pp. 411–415, 1999.

[10] Akitoshi Kawamura and Yusuke Kobayashi. Fence patrolling by mobile agents with distinct speeds. *Distributed Computing*, Vol. 28, No. 2, pp. 147–154, 2015.

[11] Akitoshi Kawamura and Makoto Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. In *International Conference on Algorithms and Complexity*, pp. 261–273. Springer, 2015.

[12] Aydano Machado, Geber Ramalho, Jean-Daniel Zucker, and Alexis Drogoul. Multi-agent patrolling: An empirical analysis of alternative architectures. In *International Workshop on Multi-Agent Systems and Agent-Based Simulation*, pp. 155–170. Springer, 2002.

[13] Katerina Papadaki, Steve Alpern, Thomas Lidbetter, and Alec Morton. Patrolling a border. *Operations Research*, Vol. 64, No. 6, pp. 1256–1269, 2016.