# 複数の巡査の協力による指定地点の警邏について

Collaborative Patrolling of Designated Points on Graphs


河村 彰星　　能城 秀彬

Akitoshi Kawamura　　Hideaki Noshiro


2017 年 12 月 11 日

## 1　はじめに

所与の領域を 1 人または複数の巡査が動き回り，その領域内の指定された場所を十分な頻度で訪れることを警邏 (patrolling) という [1, 2, 3].

本稿では，与えられた距離空間 $U$ 内を速さ 1 以下の巡査 $m$ 人が動きまわることにより，集合 $V \subseteq U$ に属する多くの点に十分な頻度で訪れるという目標を考える．すなわち次のような問題である．

巡査 $i \in \{1, \ldots, m\}$ の $U$ 上の運行 $a_i \colon \mathbf{R} \to U$ とは，各時刻 $t \in \mathbf{R}$ における位置 $a_i(t) \in U$ を定めるものであって，任意の時刻 $s$，$t \in \mathbf{R}$ に対し $a_i(s)$ と $a_i(t)$ の距離が $|s - t|$ を超えないものをいう．巡査 $m$ 人による $U$ 上の運行とは，全巡査の運行を定めた組 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ をいう．運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が点 $v \in U$ を訪問間隔 $q \geq 0$ で警備するとは，長さ $q$ のどの時間区間にもいずれかの巡査が $v$ を少くとも一度は訪れる（任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対して巡査 $i$ と時刻 $\tau \in [t, t + q)$ が存在し $a_i(\tau) = v$）ことをいう．（$\leftarrow q = 0$ のときおかしい？）

$U$ の有限な部分集合 $V$ があり，$V$ の各点には利得および訪問間隔と呼ばれる非負整数が定まっている．運行 $A$ が点集合 $W \subseteq V$ を警邏するとは，各点 $v \in W$ に対し $A$ が $v$ を警備することをいう．そのような運行が存在するとき $W$ は $m$ 人により警邏可能であるという．

**警邏問題．** 巡査の人数 $m$ と距離空間 $U$ 内の点集合 $V$ および $V$ の各点の利得と訪問間隔が与えられたとき，$m$ 人の巡査により警邏可能な頂点集合のうち利得の和が最大となるも

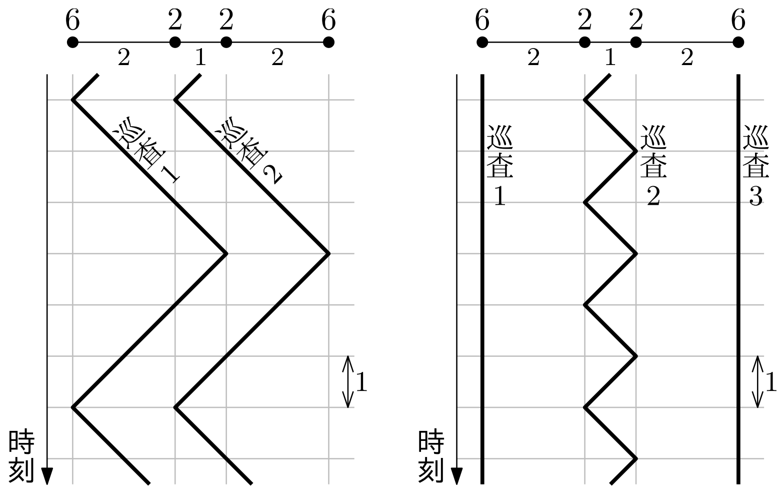


図 1　図の上部に描かれている四点からなるグラフの全点を警邏する二つの運行．頂点と辺に書かれた数は，それぞれ訪問間隔と距離である．左図の運行では二人の巡査が協力して中央の二点を間隔 2 で警備している．これを禁じ，各点がいずれかの巡査により単独警備されることを求める場合は，右図のように三人の巡査を要する．

のを求めよ．

距離空間 $U$ といっても，$V$ の点同士の測地距離のみが重要である．そこでこの問題の入力は，$V$ を頂点集合とし辺に非負整数の長さがついた無向グラフと考えることにする．

この問題は，巡査が一人かつ全点の利得と訪問間隔が等しい場合に限っても，ハミルトン路問題からの帰着により NP 困難である [2, Theorem 8]．そこでグラフの形状を限ったときにどのようになるかを調べる．

一つの頂点が複数の巡査の訪問により警備され得ることに注意されたい．例えば図 1 左はそのような運行の例である．Coene ら [2] は似た問題を扱っているが，このような協力を許さず，図 1 右のように各頂点を専ら一人の巡査が「担当」することを要求している．つまり，各頂点 $v \in W$ が単独警備される（すなわち或る一人の巡査がおり，その巡査のみの運行が $\{v\}$ を警邏する）ことを要求しているのである．対比のため本稿ではこの問題を担当警邏問題と呼ぶことにする（[2] では MPLPP と称している）．Coene ら [2] の諸結果においては，この単独警備という限定が，多項式時間算法の設計にも困難性の証明にも重要な役割を果している．この限定を外したときの様子を調べるのが本稿の目的である．

本稿ではグラフの形状として線分，星と，すべての枝の長さが等しい完全グラフの 3 種類を扱うこととし（図 2），以降はそれぞれを Line, Star, Unit と呼ぶ．Star では葉のみに訪問間隔が定められている（中心は警備の対象としない）．警邏問題においては前述の

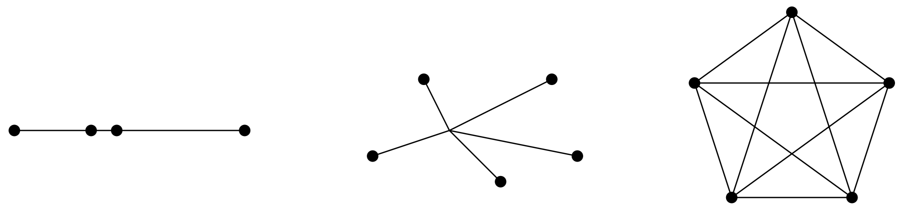

図 2　本論文では Line（左），Star（中），Unit（右，但し各辺の長さが等しい）を扱う．Star は葉のみを警備の対象とする（中央の点は移動の途中で使うのみであり，訪問間隔は定められていない）．

とおり頂点同士の測地距離のみが重要であるため，Unit は，その各辺の長さを $d$ とすると，同じ頂点数で辺の長さがすべて $d/2$ である Star と同一視できることから，Unit は Star の特殊な場合である．

警邏問題についての我々の結果と，担当警邏問題についての Coene らの結果を，グラフの形ごとに比較すると次のようになる．それぞれ 2，3，4 節で述べる．

- グラフが Line の場合は，担当警邏問題は動的計画法により多項式時間で解けることが示されていた [2, Theorem 11] が，その正しさは非協力の設定に強く依存している．本稿では警邏問題について，全点の訪問間隔が等しい場合には多項式時間で解ける（定理 2.1）．
- グラフが Star の場合は，全点の利得と訪問間隔が等しい場合に限っても，担当警邏問題は NP 困難であることが示されていた [2, Theorem 10]．本稿では，この場合の警邏問題は多項式時間で解けるという興味深い結果を得る（定理$**$）．なお利得または訪問間隔を一般にすると，巡査が一人であっても（したがって担当の有無に関わらず）NP 困難であることがわかっている [2, Theorems 5 and 6]．
- グラフが Unit の場合は，全点の訪問間隔が等しい場合は警邏問題が多項式時間で解けることを示す（定理$**$）．グラフが Star の場合は全点の訪問間隔が等しくても利得が一般だと NP 困難になるので，これにより Unit は Star よりも簡単に解ける場合となっていることが分かる．

Line と Unit については訪問間隔が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しく未解決である．これらの未解決な状況については，訪問間隔の代わりに以下に定義する指定時刻を警備の条件とする問題も考えた．

**定義 1.1.** 運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が点 $v \in U$ を指定時刻 $(q, r)$ で警備するとは，任意の

時刻 $t := qk + r (k \in \mathbf{Z})$ に対し巡査 $i$ が存在し $a_i(t) = v$ であることをいう．

指定時刻による警邏問題は以下のように定義される．

**時刻指定警邏問題．** 巡査の人数 $m$ と距離空間 $U$ 内の点集合 $V$ および $V$ の各点の利得と指定時刻が与えられたとき，$m$ 人の巡査により警邏可能な頂点集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．

判定問題は以下のようになる．

**時刻指定警邏判定問題．** 巡査の人数 $m$ と距離空間 $U$ 内の点集合 $V$ および $V$ の各点の指定時刻が与えられたとき，$m$ 人の巡査により $V$ を警邏可能か判定せよ．

Line については時刻指定警邏判定問題を解く貪欲アルゴリズムを示す（定理**??**）．Unit については時刻指定警邏判定問題が NP 困難であることを示す（定理**??**）．

### 関連研究

（あまり本筋に関係ない関連研究は、論文冒頭ではなくこの辺に書くのも手）
また，Line や Star は木の特別な場合である．

## 2 Line

グラフが Line の場合，グラフの全体（頂点と辺）をすべて実直線上におくことができる．以降，頂点の名前 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ はその位置を表す実数値も表すことにする．

まず，Line の場合における順序保存運行という特別な運行を定義する．運行 $A$ が順序保存であるとは，$A$ が定める巡査の位置 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ が，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ において $a_1(t) \leq a_2(t) \leq \cdots \leq a_m(t)$ を満すことである．

Line 上の任意の運行 $A$ は，$A$ と同じ数の巡査でかつ警邏する点集合を保ったまま，順序保存運行 $A'$ に以下のように変換することができる．まず，$A$ が定める各巡査の運行を $a_1, a_2, \ldots, a_m$ とする．これに対し，$a'_i (i \in \{1, \ldots, m\})$ を各時刻 $t \in \mathbf{R}$ において $a'_i(t)$ が $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_m(t)$ のうち $i$ 番目に小さいものとなるように定める．すると，各 $a'_i$ は運行となっており，$A' = (a'_1, \ldots, a'_m)$ とすると $A'$ と $A$ の運行の軌跡の集合は等しい（すなわち，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ において $\{a_1(t), \ldots, a_m(t)\} = \{a'_1(t), \ldots, a'_m(t)\}$）ので，$A$ で警邏していた点集合を $A'$ も警邏している．これにより順序保存運行 $A'$ が得られる．順序保存運行 $A'$ は $A$ において巡査がすれ違う時に代わりに互いの動きを交換することに

より順序を保ったものとみなすことができる．

以上から，巡査 $m$ 人により警邏可能な任意の頂点集合 $W$ は，巡査 $m$ 人による或る順序保存運行 $A'$ によって警邏されることが分かる．

## 2.1　全点の訪問間隔が等しい場合

本節では次のことを示す．

**定理 2.1.** グラフの形状が Line で全点の訪問間隔が等しい場合，警邏問題は多項式時間で解くことができる．

この問題は，〜〜な場合については Collins ら **??**の問題の特殊な場合として既に示されているが，ここでは全点の訪問間隔が等しいという条件のみでも成り立つことを示す．

以降では，グラフの形状が Line で全点の訪問間隔が等しい場合，警邏可能な頂点集合のうち利得の和が最大となるものは次に定義する個別往復運行という運行によって警邏可能であるということを示す．Line で全点の訪問間隔が等しい場合に用いることができる個別往復運行という戦略ではどの頂点も高々 1 人の巡査が担当すればよいため（補題 2.4），全点の訪問間隔が等しいという条件が問題を簡単にしているといえる．

**定義 2.2.** $V$ を頂点集合，$Q$ を各頂点の訪問間隔とする．各巡査が $V$ のいずれかの頂点を左端とする長さ $Q/2$ の区間を往復する運行を個別往復運行と呼ぶ．$m$ 人の巡査による運行 $A$ において各巡査が個別往復運行をしているとき，$A$ を単に $m$ 人の巡査による個別往復運行と呼ぶ．

まず次の補題を示す．

**補題 2.3.** 頂点 $v_i$ がある 1 人の巡査 $s$ により単独警備されているとき，訪問間隔を $q_i$ として，$s$ は常に区間 $[v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$ にいる．

証明．この区間にない或る座標 $v_{\mathrm{out}} \notin [v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$ を $s$ が時刻 $t_0$ に訪問するとする．$v_{\mathrm{out}}$ と $v_i$ の間の移動には少くとも時間 $|v_i - v_{\mathrm{out}}| > q_i/2$ を要するから，$s$ は区間 $[t_0 - q_i/2, t_0 + q_i/2]$ に属する時刻に $v_i$ を訪問できない．この区間の長さは $q_i$ であるので，$s$ が $v_i$ を単独警備していることに反する．□

これにより次の補題が成り立つ．

**補題 2.4.** グラフの形状が Line で，頂点の訪問間隔がすべて $Q$ であるとする．頂点集合

$W$ が $m$ 人の巡査により警邏可能であるとする．このとき，$W$ を警邏する $m$ 人の巡査による個別往復運行が存在する．

証明. 巡査数 $m$ に関する帰納法で示す．$m = 0$ のときは明らかなので，以下 $m > 0$ とする．

$W$ は $m$ 人の巡査により警邏可能であるので，2 章始めの議論により $W$ を警邏する $m$ 人の巡査による順序保存運行が存在する．このような運行を任意に一つ選び $A = (a_1, \ldots, a_m)$ とする．

$W$ の点のうち最も左にあるものを $b$ とする．まず，各巡査は $b$ より左に存在する時間 $b$ で停止するように変換する．このようにしても $W$ は警邏されたままであり，また，これによりすべての巡査は $[b, +\infty)$ に存在することになる．

ここで，最も左の巡査 $a_1$ に注目する．$b$ が $A$ により訪問されるすべての時刻に $a_1$ は $b$ を訪問しているので，$b$ は $a_1$ により単独警備されている．すると，補題 2.3 より，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対し $a_1(t) \leq b + Q/2$ であるが，一方，$a_1$ は区間 $[b, b + Q/2]$ を速さ 1 で往復することでこの区間に含まれるすべての頂点を警備することができる．実際，$a_1$ がこのような往復をするとき $b \leq x \leq b + Q/2$ である位置 $x$ に存在する時刻の間隔の最大値は

$$\max(2(x - b), 2(b + Q/2 - x)) \leq 2(b + Q/2 - b) = Q$$

より，$[b, b + Q/2]$ に含まれるどの頂点も訪問間隔を超えずに訪問できていることが分かる．これにより $a_1$ の運行は個別往復運行となる．一方，$W^- := \{v \in W \mid b + Q/2 < v\}$ は $a_1$ 以外の $m - 1$ 人の巡査により警備されているので，帰納法の仮定から残る $m - 1$ 人の巡査も個別往復運行に変換することができる．以上により $W$ を警邏する $m$ 人の巡査による個別往復運行が得られた． □

補題 2.4 により，個別往復運行を行う場合のみを考えればよいため，$m$ 人の巡査がそれぞれ担当する $m$ 個の区間を求めればよい．以下のアルゴリズムにより利得の和が最大となる $m$ 個の区間を求めることができる．

初めに Line 上の頂点をソートしておき，左側から順に $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする．頂点 $v_i$ を左端とする区間を $I_i := [v_i, v_i + Q/2]$ と書く．

まず，$n$ 個の区間 $I_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ について各区間に含まれる点から得られる利得の合計 $P_i$ を求める．$P_i$ は $v_1, v_2, \ldots, v_n$ がソートしてあるので $O(n)$ で求めることができる．

あとは $m$ 個（$m$ は巡査の人数）の区間を選び利得の合計を最大化すればよいが，以下の漸化式 1 に従う動的計画法で $O(mn)$ で最大の利得を得られる $m$ 個の区間を選択でき

る．$OPT(i, j)$ は，区間 $I_1, \ldots, I_j$ から最大 $i$ 個の区間を選ぶときの利得の合計の最大値を表す．$OPT(m, n)$ が求めたい利得の最大値となる．

$$OPT(i,j) = \begin{cases} 0 & i = 0 \text{ または } j = 0 \text{ のとき} \\ \max\{OPT(i, j-1), P_j + OPT(i-1, j-1)\} & \text{それ以外の場合} \end{cases} \tag{1}$$

最後に，$OPT(m, n)$ において選ばれた区間をトレースバックして求め，この区間に含まれる頂点全体を出力して終了する．

このアルゴリズムの計算量は全体で $O(n \log n + nm)$ となる．これで定理 2.1 が示された．

この証明では線分に端の頂点が存在することが重要な役割を果たしているため，グラフの形状が閉路の場合にそのまま適用することはできない．

## 2.2 訪問間隔が一般の場合

全点の訪問間隔が等しい場合はどの頂点も高々 1 人の巡査が担当するため単純になっていたが，訪問間隔が一般の場合は，頂点を複数の巡査が交代で訪問して警備する必要がある場合が存在する．図 3（左）の例では，中央の訪問間隔の短い 2 つの頂点を 2 人の巡査が交互に訪問しており，また，全点の訪問間隔が等しい場合と異なり各巡査の最適な運行はなんらかの区間の往復であるとは限らないことも分かる．

また，この例では左の巡査は左端の点を訪問間隔 10 ちょうどごとに訪問しているが，左端の点の訪問間隔から順に巡査の運行を決定することも難しい次のような例が存在する．図 3（中央）の例では訪問間隔 8 の左端の点をあえてより短い 6 ごとに訪問することで全点を警邏できるが，同じグラフについて，図 3（右）のように左の巡査が左端の点の訪問間隔ぎりぎりの時間まで右の方へ動き頂点をなるべく多くの時間訪問して左端へ帰る運行を選ぶと右の巡査がどのような動き方をしても訪問間隔を超え警備できない頂点が生まれてしまう．

これらの例は，協力が発生する場合巡査の運行を個別に決定するのは難しいということを示唆している．しかしながら，この訪問間隔が一般の場合での Line 上の警邏問題の困難性を示すこともできなかった．そこで，訪問間隔より短い間隔で点を訪問しうることで運行の決定を複雑になる例が存在したことを踏まえて，1 章で定義した時刻指定警邏判定問題を考える．

**定義 2.5.** $X \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ とする．任意の $(t, x), (t', x') \in X$ が $|t - t'| \geq |x - x'|$ を満たす

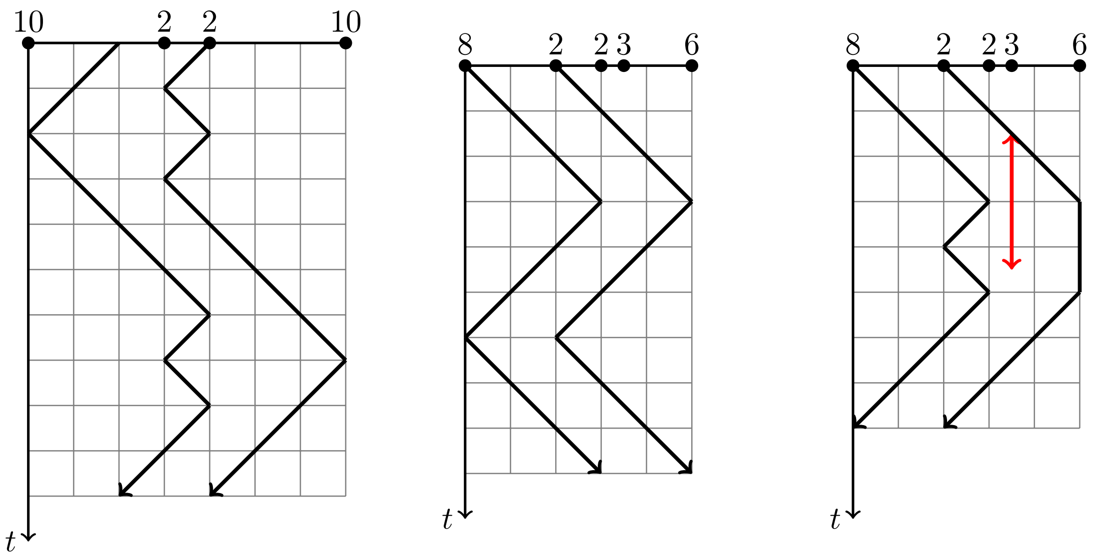


図 3　巡査の協力が必要な例．横軸を頂点の座標，縦軸を時刻として巡査の軌跡を表す．点の上の数値は訪問間隔を表す．

とき，$X$ は運行可能であるという．

任意の運行可能な集合 $X$ に対して，Line 上の巡査の運行 $a$ であって，$X$ のすべての元 $(t,x)$ に対して $a(t)=x$ を満たすものが存在することは簡単に示すことができる．これにより，グラフが Line の場合の時刻指定警邏判定問題は次のようにも記述できる．

**時刻指定線分警邏問題．** 正の整数 $m$（巡査の人数を表す）と自然数の組 $(q_i, r_i, x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ が与えられる．集合 $\{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1,\ldots,n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ を $m$ 個以下の運行可能な集合に分割できるか判定せよ．

この問題では，$X := \{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1,\ldots,n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ という無限集合の分割が可能か判定しなければならないが，実際には $X$ の点は時刻（組 $(t,x)\in X$ の第 1 要素）について周期的であるため，1 周期分の有限部分集合を以下に定義する「周期的に運行可能な集合」に分割できるかどうかさえ判定すればよい．

理由を説明

**定義 2.6.** $X \subset \mathbf{Z}\times\mathbf{N}$ を有限集合とする．ある正の整数 $T$ が存在し，任意の $(t,x),(t',x')\in X$ が $|t-t'|\geq|x-x'|$ かつ $|t+T-t'|\geq|x-x'|$ を満たすとき，$X$ は周期的に運行可能であるという．

**貪欲アルゴリズム．** 入力を $(m,(q_i,r_i,x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}})$ とする．始めに $T := lcm(q_1,\ldots,q_n)$,

$X := \{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \mathbf{Z}\}$, $L((\alpha, \beta)) := \{(t, x) \mid x - \beta \le |t - \alpha|\}$ と記号を定義する．

まず $X$ の部分集合 $S := \{(x, t) \in X \mid -T \le t < 2T\}$ を求める．初期値を $\mathcal{B} = \{\}$, $B_0 = S$, $B' = S$, $i = 0$ とし，$B_i \neq \emptyset$ である限り 1. から 4. を繰り返す．

1. $i \leftarrow i + 1$,
2. $B_i \leftarrow B' \cap \left(\bigcap_{p \in B'} L(p)\right)$,
3. $B' \leftarrow B' \setminus B_i$,
4. $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{B_i\}$.

$|\mathcal{B}| > m$ ならば分割不可能と答え，そうでないときは分割可能と答えたうえで，$\mathcal{B}$ の各元を時刻方向に $[0, T)$ に制限したもの $\mathcal{C} := \{\{(t, x) \in B \mid 0 \le t < T\} \mid B \in \mathcal{B}\}$ を出力して終了する．

この貪欲アルゴリズムが

- 「分割不可能」と答えるとき，$X$ も $m$ 個の運行可能な集合に分割することはできない．実際，$X$ が $m$ 個の運行可能な集合に分割できるとき，$S := \{(t, x) \in X \mid -T \le t < 2T\}$ は $X$ の部分集合であるから $m$ 個の運行可能な集合に分割できるが，その場合は貪欲アルゴリズムは必ず $m$ 個の運行可能な集合への分割を答える．これは次の理由による．Line においては順序保存運行の存在と同様に，$S$ が $m$ 個の運行可能な集合へ分割可能ならば $S$ の $m$ 個の運行可能な集合への分割であって順序保存なものが存在する．ここで，分割 $\mathcal{B}' = \{B'_1, \ldots, B'_m\}$ が順序保存であるとは，対応する運行 $(b_1, \ldots, b_m)$ が順序保存運行になることである．貪欲アルゴリズム中で得られる $S$ の分割 $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ は任意の順序保存な $S$ の分割を選び $\mathcal{B}' = \{B'_1, \ldots, B'_m\}$ と整数 $k$ に対し，$\bigcup_{1 \le i \le k} B'_i \subseteq \bigcup_{1 \le i \le k} B_i$ を満たしており，これにより $S$ が $m$ 個の運行可能な集合へ分割可能ならば貪欲アルゴリズムは必ず $m$ 個の運行可能な集合への分割を答えることが分かる．
- 「分割可能」と答えるとき，$X$ も $m$ 個の運行可能な集合に分割することができる．実際，分割可能と答えるときには分割 $\mathcal{C}$ を出力するが，$\mathcal{C}$ の各元 $C$ は周期 $T$ で繰り返し運行可能な集合である．これは，途中の各 $B \in \mathcal{B}$ が $L$ の定義から運行可能集合となっており，$B$ の $[-T, 2T)$ の範囲が運行可能であれば $[0, T)$ の範囲は定義から周期 $T$ で繰り返し運行可能となるためである．

  集合 $X := \{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ の分割 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ は次のように構成すればよい．$k \in \mathbf{Z}$ に対して，$X$ の部分集合 $\{(t, x) \in X \mid$

$kT \le t < (k+1)T\}$ を $\mathcal{C}$ の分割の仕方で分割したものを $\{C_{k1}, \ldots, C_{km}\}$ とする．$A_i := \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} C_{ki}$ と定義すると，$C_{ki}$ が周期 $T$ で繰り返し運行可能な集合であるから，$A_i$ は運行可能な集合となる．

以上より，貪欲アルゴリズムは副問題を解く．

# 3 Star

グラフの形状が Star の場合については，利得か訪問間隔のいずれかが一般であれば，警邏問題は巡査が 1 人であっても NP 困難であることが分かっている [2]．よって，本稿の警邏問題については，巡査数が一般であって，全点の利得と訪問間隔が等しい場合を調べる．

担当警邏問題においては，グラフが Star で巡査数が一般の場合は利得と訪問間隔がすべて等しくても NP 困難になることが Coene ら [2] により示されているが，一方で同じ条件における警邏問題の場合は次が成り立つ．

**定理 3.1.** グラフの形状が Star で全点の利得と訪問間隔が等しい場合，警邏問題は（巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

Line の場合では協力の発生によって複雑な運行による警邏が発生した状況から考えると，協力無しの場合より協力有りの場合の方が簡単に解けるというのは意外な結果に思われるが，Star の場合には逆に，協力無しの問題では協力をせずにうまく分担する方法を見つけるのが難しいため NP 困難になるのに対し，協力有りの問題ではある単純な協力の仕方による警邏のみ考えればよいため簡単に解くことができる．

本節では，頂点 $v$ に隣接する辺を $e_v$, その長さを $d_v$ のように書く．

**補題 3.2.** Star 上の警邏問題で全点の訪問間隔が $Q$ のとき，点集合 $V$ の任意の部分集合 $W$ について

$$\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \le mQ \iff m \text{ 人の巡査により } W \text{ の全点を警邏できる}$$

が成り立つ．

証明．(⇒) $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \le mQ$ が成り立つとき，$m$ 人の巡査の運行を次のように定めれば $W$ の全点を警邏できる．$W' := \{v \in W \mid 2d_v \ge Q\}$ とする．まず，$|W'|$ 人の巡査を $W'$ の各点に 1 人ずつ配備し常駐させることで警備する．このとき，$|W'|Q =$

$\sum_{v \in W'} Q \leq \sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ$ より $|W'| \leq m$ である．これにより $W'$ の全点は $|W'|$ 人の巡査により警備される．残りの $2d_v < Q$ である頂点 $v \in W \setminus W'$ は，残りの $m - |W'|$ 人の巡査により警邏しなければならないが，$\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ$ より $\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v \leq (m - |W'|)Q$ であるから，1 人の巡査が速さ 1 で $W \setminus W'$ の全点をちょうど 1 度ずつ訪問するのにかかる時間は $(m - |W'|)Q$ 以下となるので（中心点と点 $v$ を一往復するには $2d_v$ の時間を要する），$m - |W'|$ 人の巡査全員が時間 $Q$ ずつずらしてこの動きを繰り返すことでどの点も時間 $Q$ 以上放置せずに訪問し続けることができ，これにより $W \setminus W'$ の全点も警備される．

($\Leftarrow$) 対偶を示す．まず，ある点 $v$ が警備されているとは，どの長さ $Q$ の時間区間にも少なくとも 1 度巡査の訪問を受けることであるが，点 $v$ が警備されているとき，どの長さ $Q$ の時間にも $\min(2d_v, Q)$ の時間は（少なくとも一人の）巡査が $e_v$ 上（端点のうち中心点は含まず $v$ のみを含む）に存在する．これは後で示す．各点 $v$ に対して定まる時間 $Q$ あたりの巡査の滞在時間 $\min(2d_v, Q)$ は点 $v$ の警備に必要なコストと考えることができる．$W$ の全点の警邏に必要なコストは，各点の警備コストの和 $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q)$ であり，$m$ 人の巡査の持つ時間（資源）の和は時間 $Q$ あたり $mQ$ であるが，各巡査は同時に 2 つ以上の辺上には存在しえないため（中心点は辺に含まない），$\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) > mQ$ のとき $W$ の全点を警邏することはできない．

最後に，点 $v$ が警備されているとき，どの長さ $Q$ の時間にも $\min(2d_v, Q)$ の時間は（少なくとも一人の）巡査が $e_v$ 上に存在することを示す．(i) $v$ が $2d_v \geq Q$ を満たすとき，もし $v$ の隣接辺 $e_v$ 上（端点を含む）に一人も巡査が存在しない時刻 $s$ があるとすると，$v$ を訪問した $s$ 以前で最後の時刻と $s$ 以後で最初の時刻の間隔は $2d_v \geq Q$ より長いため，$v$ が警備されていることに反する．よってこの場合は隣接辺 $e_v$ 上には常にいずれかの巡査が存在する必要がある．(ii) $v$ が $2d_v < Q$ を満たすとき，長さ $Q$ の時間区間 $[t, t+Q]$ を任意に選ぶ．警備の条件から $v$ は $[t, t+Q]$ に少なくとも 1 回訪問されるが，その時刻によって以下の場合を考える．(a) $[t+d_v, t+Q-d_v]$ に 1 回以上訪問されるとき，その訪問時刻を任意に 1 つ選び $s$ とすると $s$ の前後の少なくとも $d_v$ ずつの時間は巡査は辺 $e_v$ 上に存在し，これは $[t, t+Q]$ に含まれる．(b) $[t+d_v, t+Q-d_v]$ に 1 度も訪問されないときは，$[t, t+d_v)$ か $(t+Q-d_v, t+Q]$ に少なくとも 1 回訪問される．(b1) $[t, t+d_v)$ と $(t+Q-d_v, t+Q]$ でそれぞれで少なくとも 1 回ずつ訪問されるときは $[t, t+d_v]$ と $[t+Q-d_v, t+Q]$ に巡査が $e_v$ 上に存在するので巡査の滞在時間は $2d_v$ 以上となる．(b2) $(t+Q-d_v, t+Q]$ に一度も訪問されないとき，$[t, t+d_v)$ に含まれる最後の訪問時刻を $s$ とすると，点 $v$ の警備の条件と場合分けの仮定から $s$ の次の訪問時刻 $u$ は $t+Q < u \leq s+Q$ を満たす．$s$ と $u$ それぞれの前後 $d_v$ の時間 $[s-d_v, s+d_v], [u-d_v, u+d_v]$ には巡査が辺

$e_v$ に存在するが，このうち $[t, t+Q]$ に含まれるのは $[t, s+d_v], [u-d_v, t+Q]$ であり，その時間の和は $(s+d_v-t)+(t+Q-(u-d_v)) = 2d_v+(Q-(u-s)) \geq 2d_v$ より $2d_v$ 以上となる．(b3) $[t, t+d_v)$ に 1 度も訪問されないとき，$(t+Q-d_v, t+Q]$ に含まれる最初の訪問時刻とその 1 つ前の訪問時刻を考えると (b2) と同様に巡査の滞在時間の和は $2d_v$ 以上となる．

□

補題 3.2 より Star の任意の点部分集合 $W$ が警邏可能であるかを $W$ の点の隣接辺の長さだけから簡単に計算できることが分かった．定理 3.1 では，全点の利得と訪問間隔が等しい場合を考えているので警邏する部分集合としては隣接辺の短い点から順に選べばよく（隣接辺のより長い点 $v_1$ とより短い点 $v_2$ があるとき，$v_1$ を警備して $v_2$ を警備しない運行は常に $v_1$ を警備する代わりに $v_2$ を警備する運行に変換できる），警邏できる最大の部分集合は $n$ を点の数として $O(n \log n)$ で計算できる．以上から定理 3.1 が示された．

# 4 Unit

第 1 章で述べた通り，Unit は Star の特殊な場合とみなせるため，定理 3.1 から全点の利得と訪問間隔が等しい場合は警邏問題を多項式時間で解くことができるが，Unit の場合は全点の訪問間隔だけが等しければ警邏問題を多項式時間で解ける（定理 4.1）．

訪問間隔が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しかったため，第 2 章で扱った時刻指定警邏問題を再び考える．グラフが Unit の場合は時刻指定警邏問題が NP 困難になることを示す（定理 4.2）．

## 4.1 全点の訪問間隔が等しい場合

**定理 4.1.** グラフの形状が Unit で全点の訪問間隔が等しい場合，警邏問題は（利得，巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

*Proof.* 補題 3.2 から Unit の全点の訪問間隔が $Q$ のとき，点集合 $V$ の任意の部分集合 $W$ について

$$\sum_{v \in W} \min(d, Q) = |W| \min(d, Q) \leq mQ \iff m \text{ 人の巡査により } W \text{ の全点を警邏できる}$$

が成り立つ．$d$ は Unit の各辺の長さである．

グラフの形状が Unit の場合，全点の訪問間隔が等しいならば警邏する部分集合 $W$ は

利得の大きい点から選べばよい（利得のより大きい点 $v_1$ とより小さい点 $v_2$ があるとき，$v_1$ を警備して $v_2$ を警備しない運行は常に $v_1$ を警備する代わりに $v_2$ を警備する運行に変換できる）．$|W|\min(d,Q) \leq mQ$ を満たす最大の $|W|$ は $|W| = \lfloor mQ/\min(d,Q)\rfloor$ であり，利得の大きい点から $\lfloor mQ/\min(d,Q)\rfloor$ 点を選ぶ計算は $O(\lfloor mQ/\min(d,Q)\rfloor \log n)$ となる．□

## 4.2 訪問間隔が一般の場合：時刻指定警邏問題

**定理 4.2.** グラフの形状が Unit のとき，時刻指定警邏問題は巡査が 1 人で全点の利得が等しくても NP 困難である．

証明．最大独立集合問題からの帰着による．

最大独立集合問題の入力のグラフが $G = (V, E)$ のとき，時刻指定警邏問題に対して，巡査の人数 1 と Unit のグラフ $G' = (V', E')$ を入力として与える．$G'$ は以下のように定める．$V' = V$ とし，全点の利得は 1，辺の長さはすべて 1 とする．各点の指定時刻は次のように定める．まず，${}_nC_2$ 個の相異なる素数 $p_{i,j} (1 \leq i < j \leq n)$ を用意し，$q_i := \prod_{k=1}^{i-1} p_{1,k} \prod_{k=i+1}^{n} p_{k,n}$ とする．次に，$r_i (i \in \{1, \dots, n\})$ を，$G$ のすべての 2 点 $v_i, v_j (1 \leq i < j \leq n)$ に対して，$(v_i, v_j) \in E$ ならば $r_i \equiv r_j \equiv 0 \mod p_{i,j}$, $(v_i, v_j) \notin E$ ならば $r_i \equiv 0, r_j \equiv 1 \mod p_{i,j}$, さらに $0 \leq r_i < q_i$ を満たすように定める．各 $r_i$ に対して相異なる $n-1$ 個の素数で割ったときの余りが与えられているので，中国剰余定理からそのような $r_i$ がその $n-1$ 個の素数の積 $q_i$ を法として一意に存在する．以上のようにして得た $q_i, r_i (i \in \{1, \dots, n\})$ から，各点 $v_i (i \in \{1, \dots, n\})$ の指定時刻を $q_i k + r_i (k \in \mathbf{N})$ と定めると，時刻指定警邏問題の解は $G$ の最大独立集合となる．

実際，$G'$ の任意の 2 点 $v_i$, $v_j$（$i < j$ としてよい）に対し，この両方を警備できるための必要十分条件は，2 点間の移動時間が 1 以上かかることから，訪問しなければならない時刻同士がすべて 1 以上離れていること，すなわち，任意の整数 $k, l$ に対し $|(kq_i + r_i) - (lq_j + r_j)| \geq 1$ が成り立つこととなる．$q_i, r_i, q_j, r_j$ がすべて整数のとき，これは $q_i k + r_i \neq q_j l + r_j$, すなわち $r_i - r_j \neq q_j l - q_i k$ が任意の整数 $k, l$ で成り立つこと同値である．$gcd(x, y)$ を $x$ と $y$ の最大公約数とすると，$r_i - r_j \neq gcd(q_i, q_j)n$ が任意の整数 $n$ で成り立つこと，つまり $r_i \not\equiv r_j \mod gcd(q_i, q_j) = p_{i,j}$ と同値である．よって，$v_i$ と $v_j$ の両方を警備できる必要十分条件は $r_i \not\equiv r_j \mod p_{i,j}$ となる．$r_i$ の決め方から，

$$(v_i, v_j) \in E \iff G' \text{ の 2 点 } v_i, v_j \text{ を両方警備することができない}$$

が成り立つため，$G'$ の点部分集合であって同時に警備できない 2 点のうち少なくとも一

方は含まないようなもののうち最大のものを選ぶと，これは $G$ の最大独立集合となる．

最後に，${}_nC_2$ 個の相異なる素数を用意する計算量も確かめる必要がある．$k$ 番目に小さい素数を $P_k$ と書くと，$k \geq 6$ のときは $P_k < k(\ln k + \ln\ln k)$ であることが知られているため [?]，$k(\ln k + \ln\ln k)$ までの自然数を順に素数かどうか判定していくことで $k$ 個以上の素数を得ることができる．ある数が素数であるかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムは存在するので [?]，${}_nC_2$ 個の素数の列挙は $n$ の多項式時間でできる． □

定理 4.2 では，各点の指定時刻といっても間隔 $q_i$ と剰余 $r_i$ が与えられる場合についてNP 困難性が示したが，各点に間隔 $q_i$ のみが指定されている「間隔指定警邏問題」も考えることができる．これの全点警邏判定問題を「間隔指定警邏判定問題」と呼ぶことにする．

**定理 4.3.** グラフの形状が Unit のとき，間隔指定警邏判定問題は巡査が 1 人であってもNP 困難である．

証明. Disjoint Residue Class Problem [4] からの帰着による．

ある整数の組の集合 $\{(m_1, r_1), \ldots, (m_n, r_n)\}$ が Disjoint Residue Class であるとは，任意の整数 $x$ に対して $x \equiv r_i \mod m_i$ となるような $i$ が高々 1 つ存在することと定義される．Disjoint Residue Class Problem とは整数の組 $(m_1, \ldots, m_n)$ が与えられたときに，$\{(m_1, r_1), \ldots, (m_n, r_n)\}$ が Disjoint Residue Class となるような組 $(r_1, \ldots, r_n)$ が存在するかを判定する問題であり，NP 困難であることが知られている [4].

Disjoint Residue Class Problem の入力が $(m_1, \ldots, m_n)$ のとき，間隔指定警邏問題に対して巡査の人数 1 と $n$ 点からなる Unit のグラフで各点の指定訪問間隔を $q_i = m_i$ となるように定め，辺の長さはすべて 1 としたものを入力として与えることで Disjoint Residue Class Problem を解くことができる．

辺の長さが 1 であるから，すべての整数の時刻にいずれかの 1 点を訪問できる．各頂点 $v_i$ の最初の訪問時刻←替えるを $r_i$ とすると，この点を警備するために訪問しなければならない時刻の列は $q_i k + r_i (k \in \mathbf{N})$ で与えられるが，全点を警備するためには任意の 2 点 $v_i, v_j \in V$, 任意の整数 $k, l$ について $q_i k + r_i \neq q_j l + r_j$ である必要がある．

Disjoint Residue Class Problem の解 $(r_1, \ldots, r_n)$ が存在するならば，任意の時刻 $t \in \mathbf{Z}$ に対して $t \equiv r_i \mod q_i$, すなわち $t = r_i + q_i k$ となる $k \in \mathbf{Z}$ が存在するような $i$ は高々 1 つであり，任意の $k, l \in \mathbf{Z}$ に対して $q_i k + r_i \neq q_j l + r_j$ が成り立つので，巡査は全点を警備でき，解が存在しなければあるの整数 $x$ に対して $x \equiv r_i \mod m_i$, $x \equiv r_j \mod m_j$ となる $i, j$ が存在するので，$v_i, v_j$ を両方警備することができず，したがって全点を警備できない． □

## 参考文献


[1] K. Chen, A. Dumitrescu, and A. Ghosh. On fence patrolling by mobile agents. In *Proc. 25th Canadian Conference on Computational Geometry* (CCCG), 2013.

[2] S. Coene, F. C. R. Spieksma, and G. J. Woeginger. Charlemagne's challenge: the periodic latency problem. *Operations research*, 59(3), pp. 674–683, 2011.

[3] J. Czyzowicz, L. Gąsieniec, A. Kosowski, and E. Kranakis. Boundary patrolling by mobile agents with distinct maximal speeds. In *Proc. 19th Annual European Symposium on Algorithms* (ESA), LNCS 6942, pp. 701–712, 2011.

[4] A. Kawamura and M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. In *Proc. Ninth International Conference on Algorithms and Complexity* (CIAC), LNCS 9079, pp. 261–273, 2015.