H29.12.31 13:00 印刷

[最終変更日時：2017/12/31 2 時 2 分]

[ToDo]

- 図の追加・差し替え
- 参考文献リストの書式の統一
- 引用を書き足す（定理名等の参照も）
- 単語の統一
  - 緑色にしている一時的な単語を決める
- 本文の後で補足？（不要？）
  - 2.1 各区間の利得の計算や選ばれた区間に含まれる点の列挙の方法
  - ??節：運行可能集合 S に対して運行 a が存在することの証明

- 今後の展望を！
  （残された課題など。修論は頁数の制限はないので「コレをやろうとしたがココがうまくいかず…」というような「泥臭い」ことも書いてよい。）

第1章

はじめに

所与の領域を一人または複数の巡査が動き回り，その領域内の指定された場所を十分な頻度で訪れることを警邏（patrolling）という [8, 3, 4, 6]．［文献追加］

本稿では，与えられた距離空間 U 内を速さ 1 以下の巡査 m 人が動きまわることにより，集合 $V \subseteq U$ に属する多くの点に十分な頻度で訪れるという目標を考える．すなわち次のような問題である．

この時點 あるいは

巡査 $i \in \{1, \ldots, m\}$ の U 上の運行 $a_i \colon \mathbf{R} \to U$ とは，各時刻 $t \in \mathbf{R}$ における位置 $a_i(t) \in U$ を定めるものであって，任意の時刻 s，$t \in \mathbf{R}$ に対し $a_i(s)$ と $a_i(t)$ の距離が $|s-t|$ を超えないものをいう．巡査 m 人による U 上の運行とは，全巡査の運行を定めた組 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ をいう．U の有限な部分集合 V があり，V の各点には利得および放置限度と呼ばれる正整数が定まっている．点 $v \in V$ の放置限度が q であるとき，巡査達が運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ で点 v を警備するとは，長さ q のどの時間にもいずれかの巡査が v を少なくとも一度は訪れる（任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対して巡査 i と時刻 $\tau \in [t, t+q)$ が存在し $a_i(\tau) = v$）ことをいう．巡査達が運行 A により点集合 $W \subseteq V$ を警邏するとは，各点 $v \in W$ に対し巡査達が運行 A で v を警備することをいう．そのような運行が存在するとき W は m 人により警邏可能であるという．

この時点で グラフの話に してよいのでは

点警邏問題．巡査の人数 $m \in \mathbf{N}$ と距離空間 U 内の点集合 V および V の各点の利得と放置限度が与えられる．m 人の巡査により警邏可能な V の部分集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．

距離空間 U といっても，V の点同士の測地距離のみが重要である．そこで $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ を点集合，$q_1, \ldots, q_n$ を V の各点の放置限度，$d \colon V \times V \to \mathbf{R}$ を V の 2 点間の距離として，$(\{(v_i, q_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}, d)$ を地図と呼び，点警邏問題の入力は地図であるとする．

この問題は，巡査が一人かつ全点の利得と放置限度が等しい場合に限っても，ハミルト

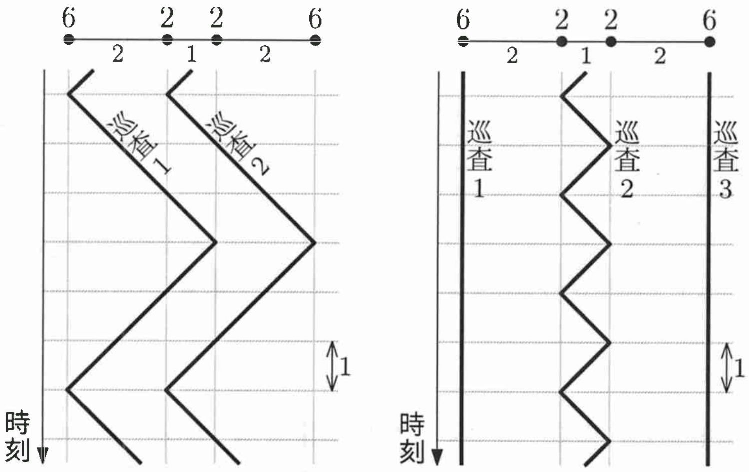

図 1.1　図の上部に描かれている四点からなる Line のグラフの全点を警邏する二つの運行．点と辺に書かれた数は，それぞれ放置限度と距離である．左図の運行では二人の巡査が協力して中央の二点を~~間隔 2 で~~警備している．これを禁じ，各点がいずれかの巡査により単独警備されることを求める場合は，右図のように三人の巡査を要する．

トル（の方が本文中の用語法に合いますよね？）

ン路問題からの帰着により NP 困難である [4, Theorem 8]．そこでグラフの形状を限ったときにどのようになるかを調べる．

この段落は

一つの点を複数の巡査の訪問により警備し得ることに注意されたい．例えば図 1.1 左はそのような運行の例である．Coene ら [4] は似た問題を扱っているが，このような協力を許さず，図 1.1 右のように各点を専ら一人の巡査が「担当」することを要求している．つまり，各点 $v \in W$ が単独警備される（すなわち或る一人の巡査がおり，その巡査のみの運行が v を警備する）ことを要求しているのである．対比のため本稿ではこの問題を独立点警邏問題と呼ぶことにする（[4] では MPLPP と称している）．Coene ら [4] の諸結果においては，この単独警備という限定が，多項式時間算法の設計にも困難性の証明にも重要な役割を果している．この限定を外したときの様子を調べるのが本稿の目的である．

ここに移した方が次に繋がり易いのでは？

本稿では地図の形状（即ち距離関数 d の制約）として線分，星と，すべての辺の長さが等しい完全グラフの 3 種類を扱うこととし（図 1.2），以降はそれぞれを Line，Star，Unit と呼ぶ．Star では葉のみに放置限度が定められている（中心は警備の対象としない）．Unit のグラフはその辺の長さを d とすると，同じ点数で辺の長さがすべて $d/2$ である Star のグラフの場合に帰着できることから，Unit は Star の特殊な場合である．

点警邏問題についての我々の結果を Coene らの独立点警邏問題についての結果との比較も含めてグラフの形ごとにまとめると次のようになる．それぞれ 2，3，4 節で述べる．

- グラフが Line の場合は，独立点警邏問題は動的計画法により多項式時間で解けることが示されていた [4, Theorem 11] が，その正しさは単独警備という設定に強く

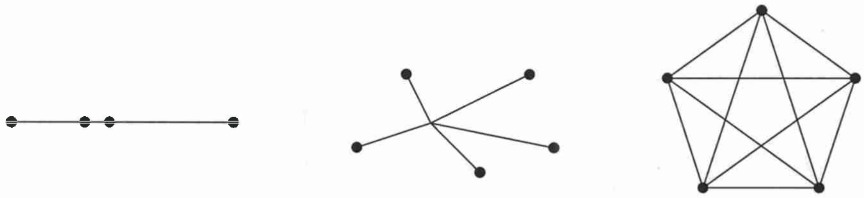

図 1.2　本論文では Line（左），Star（中），Unit（右，但し各辺の長さが等しい）を扱う．Star は葉のみを警備の対象とする（中央の点は移動の途中で使うのみであり，放置限度は定められていない）．

依存している．本稿では点警邏問題について，全点の放置限度が等しい場合には多項式時間で解けることを示す（定理 2.1.1）．

- グラフが Star の場合は，全点の利得と放置限度が等しい場合に限っても，独立点警邏問題は NP 困難であることが示されていた [4, Theorem 10]．本稿では，この場合の点警邏問題は多項式時間で解けるという興味深い結果を得る（定理 3.0.3）．なお利得または放置限度を一般にすると，巡査が一人であっても（したがって独立かどうかによらず）NP 困難であることがわかっている [4, Theorems 5 and 6]．
- グラフが Unit の場合は，本稿では全点の放置限度が等しい場合は点警邏問題が多項式時間で解けることを示す（定理 4.1.1）．グラフが Star の場合は全点の放置限度が等しくても利得が一般だと NP 困難になるので，これにより Unit は Star よりも簡単に解ける場合となっていることが分かる．

同じNと書いてるけど qは正で rは0もアリ?

グラフが Line や Unit の場合には，全点の放置限度が等しい場合には多項式時間で解けるのに対し，放置限度が一般の場合には多項式時間アルゴリズムを見つけることができなかった．グラフが Star の場合は点警邏問題が NP 困難になる [4] ので，グラフが Line や Unit の場合についても NP 困難になるのではないかと予想したが，これも示すことができなかった．これらの未解決な場合については，放置限度の代わりに指定訪問時刻を警備の条件とする次のような問題を考えた．

「定時訪問」

定義 1.0.1. 運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が点 $v \in U$ を指定訪問時刻 $(q, r) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ に定時訪問するとは，任意の時刻 $t := qk + r$ $(k \in \mathbf{Z})$ に対し巡査 i が存在し $a_i(t) = v$ であることをいう．

何故定時版だけ ここで判定問題を言う?（後でもよい）

時刻指定警邏判定問題． 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および各点の指定訪問時刻が与えられる．m 人の巡査により V の全点を定時訪問可能か判定せよ．

時刻指定警邏問題． 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および各点の利得，各点の指定訪問時刻が与えられる．m 人の巡査により全点を定時訪問可能な V の部分集合の

これを両方「定時訪問」と呼んでいいのなら「警備」と「警邏」も区別する必要がないんでは?

* 多くの場合 TSP の解に基づく巡回戦略が最適だが，長い辺がある場合は分割戦略が有利であり，また巨大グラフの場合には TSP の解の計算コストが大きくなる問題がある．
* TSP の解に基づく巡回戦略が多くの場合最適なので，TSP の解を求める近似アルゴリズムにより巡査の運行を決めるものもある．グラフを最小全域木に簡単化し，この上で TSP の解を求め巡回戦略を与えるという近似をしているものがある．→ グラフが木の場合の多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのは重要である．

文献によって
• 目標が警邏だったり
周期的訪問だったり
定時訪問だったりする？
（periodicナントカという名前だけど
実際には警邏とか．？）
その辺が文献によってちがうようであれば
ココで注意しておくとよいかも
（本当にそうかは知りません…）

第 2 章

Line

「地図」？

グラフが Line の場合，グラフの全体（点と辺）を実直線上におくことができる．本節では，点の名前 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ はその位置の実数値も表すことにする．

Line における巡査 m 人の運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ で $a_1(t) \leq a_2(t) \leq \cdots \leq a_m(t)$ を満すとき，A は順序保存であるという．巡査 m 人で警邏可能な任意の点集合 W は，或る巡査 m 人の順序保存運行により警邏される．これは，W がある運行により警邏されるならば，その運行で二人の巡査がすれ違うときに代わりに互いの以降の運行を交換し引き返すようにした運行（巡査の速さの上限がすべて等しいため巡査が互いの運行を一部だけ交換することができる）によっても W が警邏されるためである．

2.1 全点の放置限度が等しい場合

本節では次のことを示す．

定理 2.1.1. グラフが Line で全点の放置限度が等しい場合，点警邏問題は多項式時間で解くことができる．

この場合については，全点を警備可能か判定する問題ならば Collins ら [5] の問題の特殊な場合として既に示されている．［Collins らの結果についてここでもう少し詳しく書く？］これに対して定理 2.1.1 は利得最大化問題である点警邏問題が多項式時間で解けるという主張である．

以降では，グラフが Line で全点の放置限度が等しい場合，次に定義する独立往復運行という単純な運行によって最大利得が得られることを示す．

定義 2.1.2. グラフが Line で全点の放置限度を Q とする．点 $v_1, \ldots, v_n$ を左端とする長さ $Q/2$ の区間をそれぞれ $S_1, \ldots, S_n$ と書く（すなわち，$S_i = [v_i, v_i + Q/2]$）．運行

というか、彼らの状況（警備対象が区間）にも本節の方法は通用するのでもしそうならそれを最後に書くとよいのでは

$A = (a_1, \ldots, a_m)$ が独立往復運行であるとは，各 a_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ が $S_1, \ldots, S_n$ のいずれかを往復する運行であって，$a_1, \ldots, a_m$ の往復区間が互いに重複していないことである．

補題 2.1.3. 点 v_i がある一人の巡査 s により単独警備されているとき，放置限度を q_i として，s は常に区間 $[v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$ にいる．

証明 この区間にない或る座標 $v_{\mathrm{out}} \notin [v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$ を s が時刻 t_0 に訪問するとする．v_{out} と v_i の間の移動には少なくとも時間 $|v_i - v_{\mathrm{out}}| > q_i/2$ を要するから，s は区間 $[t_0 - q_i/2, t_0 + q_i/2]$ に属する時刻に v_i を訪問できない．この区間の長さは q_i であるので，s が v_i を単独警備していることに反する． □

補題 2.1.4. グラフが Line で全点の放置限度が等しいとする．点集合 V の任意の部分集合 W について，W が巡査 m 人により警邏可能ならば W は巡査 m 人による独立往復運行で警邏可能である．

証明 巡査数 m に関する帰納法で示す．全点の放置限度を Q とする．$m = 0$ のときは明らかなので，以下 $m > 0$ とする．

W は m 人の巡査により警邏可能であるので，2 節始めの議論により W を警邏する m 人の巡査による順序保存運行が存在する．このような運行を任意に一つ選び $A = (a_1, \ldots, a_m)$ とする．

W の点のうち最も左にあるものを b とする．まず，各巡査は b より左に存在する時間 b で停止するように変換する．このようにしても W は警邏されたままであり，またこれによりすべての巡査は区間 $[b, +\infty)$ に存在することになる．

ここで，最も左に~~存在する~~巡査 1 に注目する．順序保存であることから b が A により訪問されるすべての時刻に巡査 1 は b を訪問しているので，b は a_1 により単独警備されている．補題 2.1.3 より，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対し $a_1(t) \leq b + Q/2$ である．一方，巡査 1 が区間 $[b, b + Q/2]$ を速さ 1 で往復する運行 a_1' を行うと，a_1' はこの区間に含まれるすべての点を警備する．実際，$b \leq x \leq b + Q/2$ である位置 x が運行 a_1' により訪問される間隔の最大値は $\max(2(x - b), 2(b + Q/2 - x)) \leq 2(b + Q/2 - b) = Q$ より，$[b, b + Q/2]$ に含まれるどの点も放置限度を超えずに訪問できていることが分かる．一方，$W^- := \{v \in W \mid b + Q/2 < v\}$ は A で巡査 1 以外の $m - 1$ 人の巡査により警備されているので，帰納法の仮定から残る $m - 1$ 人の巡査も独立往復運行に変換することができる．以上により W を警邏する m 人の巡査による独立往復運行が得られた． □

補題 2.1.4 により，Line のグラフで全点の放置限度が等しい場合は独立往復運行のみを考えればよい．よって，$S_1, \ldots, S_n$ から m 人の巡査がそれぞれ担当する重複のない m 個

の

「存在」のような固い言葉を使うのは こういう本当にハッキリ存在と言いたい ときに限ろう

この時点で判ったことは「a_1で警備できていた点はすべて a_1'でできている」なので，そう明記するとよいで．

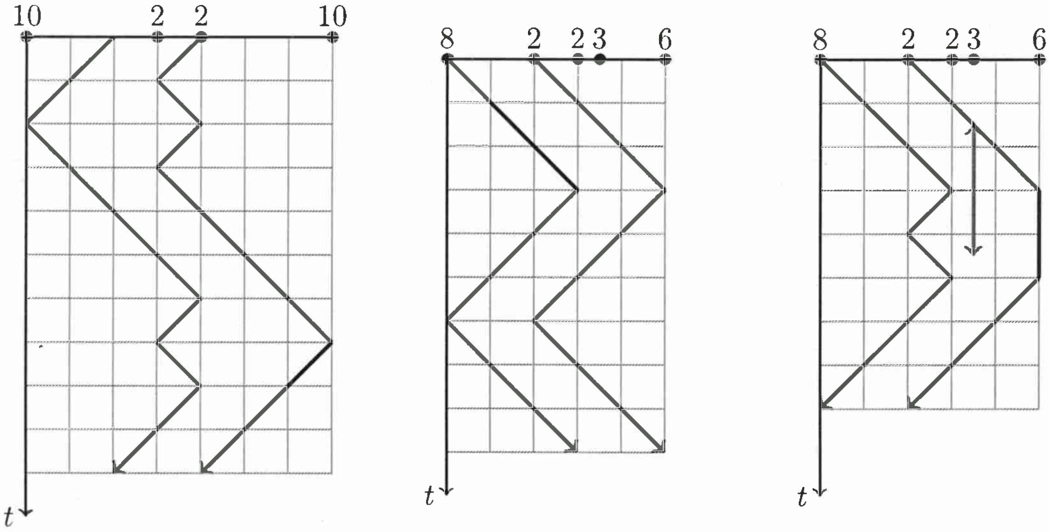

図 2.1　巡査の協力が必要な例．横軸を点の座標，縦軸を時刻として巡査の軌跡を表す．点の上の数値は放置限度を表す．［あとで図を差し替える］

問題の困難性を示すこともできなかった．そこで，放置限度より短い間隔で点を訪問しうることで運行の決定が複雑になる例が存在したことを踏まえて，ここでは 1 節で定義した時刻指定警邏判定問題という別種の問題を代わりに考える．

グラフが Line の場合の時刻指定警邏判定問題は次のようにも記述できる．

定義 2.2.1. $S \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ とする．任意の $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in S$ が $|x_1 - x_2| \leq |t_1 - t_2|$ を満たすとき，S は運行可能であるという．また，分割 $\{P_1, \ldots, P_l\}$ が運行可能であるとは，$P_1, \ldots, P_l$ がそれぞれ運行可能集合であることである．

任意の運行可能集合 S に対して，Line 上の巡査の運行 a であって，S のすべての元 (t, x) に対して $a(t) = x$ を満たす（このとき a を運行可能集合 S に対応する運行と呼ぶ）ものが存在することは簡単に示される．

時刻指定線分警邏判定問題. 正の整数 m と n 個の自然数の組 $(q_i, r_i, x_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ が与えられる．集合 $\{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ を m 個以下の運行可能集合に分割できるか判定せよ．

これは数学的定義をもつ主張ではないので 定理と言ってしまうのは ビミョー

定理 2.2.2. 時刻指定線分警邏判定問題を解く貪欲アルゴリズムが存在する．

証明　グラフが Line の場合は順序保存運行を考えることができるのと同様に，順序保存（運行可能）分割も考えることができる．分割 $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_l\}$ が順序保存であるとは，$\mathcal{P}$ に対応する運行 $A = (a_1, \ldots, a_l)$ であって順序保存なものが存在すること，あるいは，

$$L(t, x) := \{(t', x') \mid |x - x'| > |t - t'| \text{ かつ } x' < x\} = \{(t', x') \mid x - x' > |t - t'|\}$$

第 3 章

Star

，次のことを示す

グラフが Star の場合については，利得か放置限度のいずれかが一般であれば，点警邏問題は巡査が一人であっても NP 困難であることが知られている [4, Theorem 5 and 6]．よってここでは，巡査数が一般であって，全点の利得と放置限度が等しい場合を調べる．

定理 3.0.3. グラフが Star で全点の利得と放置限度が等しい場合，点警邏問題は（巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

あり得た　こと (2.2節)

独立点警邏問題においては，グラフが Star で巡査数が一般の場合は利得と放置限度がすべて等しくても NP 困難になることが Coene らにより示されている [4, Theorem 10]．Line の場合では協力~~の発生によって~~複雑な運行による警邏が~~発生した~~状況から考えると，単独警備の条件を外した点警邏問題の方が簡単に解けるというのは意外な結果に思われる．これは，Star の場合，独立点警邏問題では単独警備の条件のためにうまく点集合を分割しなければならないことが難しさを生み NP 困難になるのに対し，点警邏問題では単独警備の条件が無いことで後述の定理 3.0.5 の証明中に述べる単純な運行が可能となるためである．

トル

厳密には中心は頂点でないので これを辺と呼んでよいか若干微妙だから 第一章か，ココで何か補足する

本節では，Star の点 v に隣接する辺を e_v，その長さを d_v と書く．

補題 3.0.4. グラフが Star で全点の放置限度が Q のとき，点 v が警備されているならば，どの長さ Q の時間にも $\min(2d_v, Q)$ の時間は少なくとも一人の巡査が e_v 上に存在する．

証明　以下の場合分けによる．

なるべく直接的な表現を！

1. $2d_v \geq Q$ のとき，もし v の隣接辺 e_v 上に巡査が存在しない時刻 τ があるとすると，v を訪問した τ 以前で最後の時刻と τ 以後で最初の時刻の間隔は $2d_v \geq Q$ より長いため，v が警備されていることに反する．
2. $2d_v < Q$ のとき，長さ Q の時間区間 $[t, t+Q)$ を任意に選ぶ．警備の条件から v は

等号のとき多分やばい？

この場合「$[\tau-d_v, \tau+d_v]$ の時刻には v を訪問できない」と言った方が良い

$[t, t+Q)$ に少なくとも 1 回訪問されるが，その時刻によって以下の場合を考える．

(a)　$[t+d_v, t+Q-d_v)$ に 1 回以上訪問されるとき，その訪問時刻を任意に 1 つ選び τ とすると τ の前後の合計 $2d_v$ の時間は巡査は辺 e_v 上に存在し，これは $[t, t+Q)$ に含まれる．

(b)　$[t+d_v, t+Q-d_v)$ に 1 回も訪問されないときは，$[t, t+d_v)$ か $[t+Q-d_v, t+Q)$ に少なくとも 1 回訪問される．(i) $[t, t+d_v)$ に 1 回以上訪問されるとき，$[t, t+d_v)$ に含まれる最後の訪問時刻を τ とすると，点 v の警備の条件と場合分けの条件から τ の次の訪問時刻 σ は $t+Q-d_v < \sigma \leq \tau + Q$ を満たす．τ と σ それぞれの前後 d_v の時間のうち $[t, t+Q)$ に含まれる $[t, \tau+d_v]$, $[\sigma - d_v, t+Q)$ には巡査が辺 e_v に存在し，その時間の合計は $((\tau+d_v)-t)+((t+Q)-(\sigma-d_v)) = 2d_v + (Q-(\sigma-\tau)) \geq 2d_v$ より $2d_v$ 以上となる．(ii) $[t+Q-d_v, t+Q)$ に 1 回以上訪問されるときも 2 (b) i と同様．　(i)　□

これらが重なっていたら困るのでは？

困りはしないけど

この式はまずいですね

補題 3.0.5. グラフが Star で全点の放置限度が Q のとき，点集合 V の部分集合 W が m 人の巡査により警邏可能であるには，

$$\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ \tag{3.1}$$

が成立つことが必要十分である．

証明　十分であることを示す．(3.1) が成り立つとき，m 人の巡査の運行 $(a_1, \ldots, a_m)$ を次のように定めれば W の全点を警邏可能である．$W' := \{v \in W \mid 2d_v \geq Q\}$, $l := m - |W'|$ とする．まず，$|W'|$ 人の巡査 $s_{l+1}, \ldots, s_m$ は W' の各点に一人ずつ停止しこれを警備する．巡査 $s_1, \ldots, s_l$ は速さ 1 で動きながら $W \setminus W'$ の全点をちょうど 1 度ずつ訪問する巡回を繰り返す．このとき，巡査 s_i は巡査 s_1 より時間 $(i-1)Q$ 遅れて同じ運行を行うようにする（すなわち，$a_i(t) = a_1(t-(i-1)Q)$ となるように運行を定める）．中心点と点 v の 1 回の往復には $2d_v$ の時間を要するので，一人の巡査がある点から出発し速さ 1 で $W \setminus W'$ の全点を 1 度ずつ訪問して最初の点に戻ってくるのにかかる時間は $\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v$ である．$\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v = \sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) - |W'|Q \leq (m - |W'|)Q$ よりこの時間は $(m-|W'|)Q$ 以下となるので $(m-|W'|)Q$ 人の巡査が先ほどの巡回を行うと，$W \setminus W'$ のどの点も時間 Q 以上放置されない．これにより W の全点が警備される．

必要であることを示す．W が m 人の巡査により警邏されているとすると，補題 3.0.4 より，各点 $v \in W$ について，どの長さ Q の時間にも $\min(2d_v, Q)$ の時間は少なくとも一人の巡査が e_v 上に存在する．よって，W の全点の警備には時間 Q あたり合計 $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q)$ の巡査の時間を要する．各巡査は時間 Q の間にいずれか 1 つの点の訪問に時間を使う必要があるので，(3.1) が成り立つ．　□

補題 3.0.5 より Star の任意の点部分集合 W が警邏可能であるかを W の点の隣接辺の長さだけから簡単に計算できることが分かった．定理 3.0.3 では，全点の利得と放置限度が等しい場合を考えているので警邏する部分集合としては隣接辺の短い点から順に選べばよく（隣接辺のより長い点 v_1 とより短い点 v_2 があるとき，v_1 を警備して v_2 を警備しない運行は常に v_1 を警備する代わりに v_2 を警備する運行に変換できる)，警邏可能な最大の部分集合を求める計算は点の数を n として $O(n \log n)$ となる．以上から定理 3.0.3 が示された．

木について何か書く

それが
何故星を調べたのか
という説明にもなる