

複数の巡査の協力による指定地点の警邏について

Collaborative Patrolling of Designated Points on Graphs

河村 彰星

Akitoshi Kawamura

能城 秀彬

Hideaki Noshiro

2017 年 12 月 19 日

[単語を迷っているところはマクロにして《》で囲って表示しています。]

[ToDo]

- 3, 4 章の修正
- 関連研究について
- 修論フォーマットに合わせる
- 図の差し替え

1 はじめに

所与の領域を 1 人または複数の巡査が動き回り、その領域内の指定された場所を十分な頻度で訪れることを警邏 (patrolling) という [1, 2, 3].

本稿では、与えられた距離空間 U 内を速さ 1 以下の巡査 m 人が動きまわることにより、集合 $V \subseteq U$ に属する多くの点に十分な頻度で訪れるという目標を考える。すなわち次のような問題である。

巡査 $i \in \{1, \dots, m\}$ の U 上の運行 $a_i: \mathbf{R} \rightarrow U$ とは、各時刻 $t \in \mathbf{R}$ における位置 $a_i(t) \in U$ を定めるものであって、任意の時刻 $s, t \in \mathbf{R}$ に対し $a_i(s)$ と $a_i(t)$ の距離が $|s - t|$ を超えないものをいう。巡査 m 人による U 上の運行とは、全巡査の運行を定めた組 $A = (a_1, \dots, a_m)$ をいう。運行 $A = (a_1, \dots, a_m)$ が点 $v \in U$ を《訪問間隔上限》 $q > 0$ で警備するとは、長さ q のどの時間区間にもいずれかの巡査が v を少なくとも一度は訪れる（任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対して巡査 i と時刻 $\tau \in [t, t + q)$ が存在し $a_i(\tau) = v$ ）こと

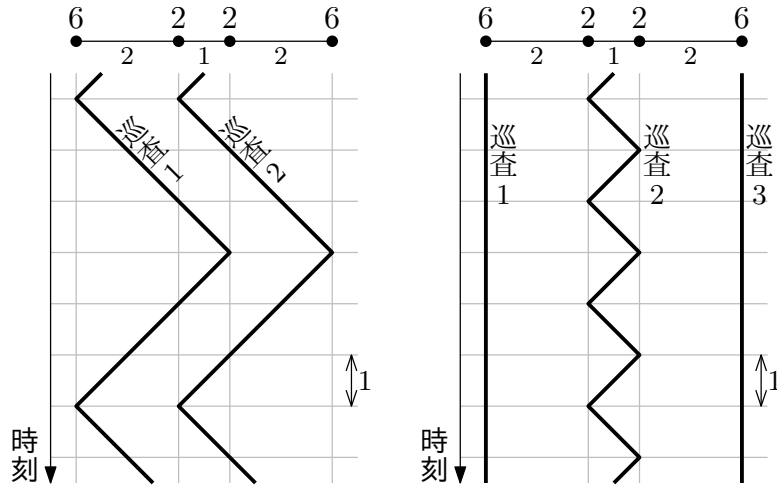


図1 図の上部に描かれている四点からなるグラフの全点を警邏する二つの運行．頂点と辺に書かれた数は、それぞれ《訪問間隔上限》と距離である．左図の運行では二人の巡査が協力して中央の二点を間隔2で警備している．これを禁じ、各点がいずれかの巡査により単独警備されることを求める場合は、右図のように三人の巡査を要する．

をいう．

U の有限な部分集合 V があり、 V の各点には利得および《訪問間隔上限》と呼ばれる非負整数が定まっている．運行 A が点集合 $W \subseteq V$ を警邏するとは、各点 $v \in W$ に対し A が v を警備することをいう．そのような運行が存在するとき W は m 人により警邏可能であるという．

《警邏問題》．巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および V の各点の利得と《訪問間隔上限》が与えられたとき、 m 人の巡査により警邏可能な頂点集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．

距離空間 U といっても、 V の点同士の測地距離のみが重要である．そこでこの問題の入力は、 V を頂点集合とし辺に非負整数の長さがついた無向グラフと考えることにする．

この問題は、巡査が一人かつ全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合に限っても、ハミルトン路問題からの帰着により NP 困難である [2, Theorem 8]．そこでグラフの形状を限ったときにどのようなになるかを調べる．

一つの頂点が複数の巡査の訪問により警備され得ることに注意されたい．例えば図1左はそのような運行の例である．Coene ら [2] は似た問題を扱っているが、このような協力を許さず、図1右のように各頂点を専ら一人の巡査が「担当」することを要求している．

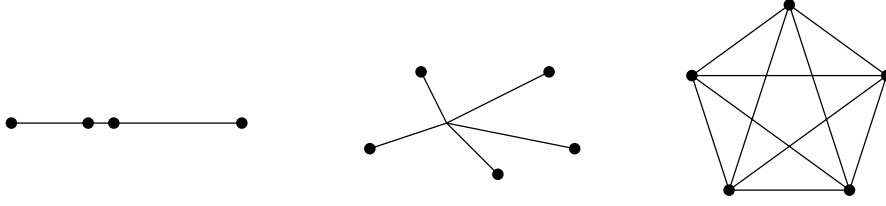


図2 本論文では Line (左), Star (中), Unit (右, 但し各辺の長さが等しい) を扱う. Star は葉のみを警備の対象とする (中央の点は移動の途中で使うのみであり, 《訪問間隔上限》は定められていない).

つまり, 各頂点 $v \in W$ が単独警備される (すなわち或る一人の巡査がおり, その巡査のみの運行が $\{v\}$ を警邏する) ことを要求しているのである. 対比のため本稿ではこの問題を《独立警邏問題》と呼ぶことにする ([2] では MPLPP と称している). Coene ら [2] の諸結果においては, この単独警備という限定が, 多項式時間算法の設計にも困難性の証明にも重要な役割を果している. この限定を外したときの様子を調べるのが本稿の目的である.

本稿ではグラフの形状として線分, 星と, すべての枝の長さが等しい完全グラフの3種類を扱うこととし (図2), 以降はそれぞれを Line, Star, Unit と呼ぶ. Star では葉のみに《訪問間隔上限》が定められている (中心は警備の対象としない). 《警邏問題》においては前述のとおり頂点同士の測地距離のみが重要であるため, Unit は, その各辺の長さを d とすると, 同じ頂点数で辺の長さがすべて $d/2$ である Star と同一視できることから, Unit は Star の特殊な場合である.

《警邏問題》についての我々の結果と, 《独立警邏問題》についての Coene らの結果を, グラフの形ごとに比較すると次のようになる. それぞれ2, 3, 4節で述べる.

- グラフが Line の場合は, 《独立警邏問題》は動的計画法により多項式時間で解けることが示されていた [2, Theorem 11] が, その正しさは単独警備という設定に強く依存している. 本稿では《警邏問題》について, 全点の《訪問間隔上限》が等しい場合には多項式時間で解ける (定理2.1).
- グラフが Star の場合は, 全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合に限っても, 《独立警邏問題》は NP 困難であることが示されていた [2, Theorem 10]. 本稿では, この場合の《警邏問題》は多項式時間で解けるという興味深い結果を得る (定理3.1). なお利得または《訪問間隔上限》を一般にすると, 巡査が一人であっても (したがって独立かどうかによらず) NP 困難であることがわかっている [2,

Theorems 5 and 6].

- グラフが Unit の場合は，《独立警邏問題》では巡査が 1 人で利得がすべて等しく《訪問間隔上限》が一般の場合は多項式時間で解けることが示されていた [2, Theorem 7] [《独立警邏問題》との比較と言っているので書くべきかと思ったが正しい結果でない可能性があるのあとで確認する]．本稿では全点の《訪問間隔上限》が等しい場合は《警邏問題》が多項式時間で解けることを示す（定理 4.1）．グラフが Star の場合は全点の《訪問間隔上限》が等しくても利得が一般だと NP 困難になるので，これにより Unit は Star よりも簡単に解ける場合となっていることが分かる．

Line と Unit については《訪問間隔上限》が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しく未解決である．これらの未解決な状況については，警備の条件を《訪問間隔上限》の代わりに《指定時刻》とする次のような問題を考えた．

定義 1.1. 運行 $A = (a_1, \dots, a_m)$ が点 $v \in U$ を《指定時刻》 (q, r) で警備するとは，任意の時刻 $t := qk + r (k \in \mathbf{Z})$ に対し巡査 i が存在し $a_i(t) = v$ であることをいう．

時刻指定警邏問題. 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および V の各点の利得と《指定時刻》が与えられたとき， m 人の巡査により警邏可能な頂点集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．

時刻指定警邏判定問題. 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および V の各点の《指定時刻》が与えられたとき， m 人の巡査により V を警邏可能か判定せよ．

Line については時刻指定警邏判定問題を解く貪欲アルゴリズムを示す（定理 2.5）．Unit については時刻指定警邏問題が NP 困難であることを示す（定理 4.2）．

関連研究

また，Line や Star は木の特別な場合である．

2 Line

グラフが Line の場合，グラフの全体（頂点と辺）をすべて実直線上におくことができる．以降，頂点の名前 v_1, v_2, \dots, v_n などはその位置を表す実数値も表すことにする．

Line の場合には順序保存運行という特別な運行を考えることができる．運行 $A = (a_1, \dots, a_m)$ が順序保存であるとは，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ において $a_1(t) \leq a_2(t) \leq \dots \leq a_m(t)$ を満すことである．巡査 m 人で警邏可能な任意の頂点集合 W に対して，ある巡査 m 人の順序保存運行が存在し， W はこれにより警邏される．これは，ある運行 A により警邏される集合 W は，巡査の最高速度がすべて同じであることから A で 2 人以上の巡査がすれ違うときに代わりに互いに引き返すようにした運行 A' を考えることができ， A' によっても W が警邏されるためである．

2.1 全点の《訪問間隔上限》が等しい場合

本節では次のことを示す．

定理 2.1. グラフの形状が Line で全点の《訪問間隔上限》が等しい場合，《警邏問題》は多項式時間で解くことができる．

この場合については，全点を警備可能か判定する問題ならば Collins ら ?? の問題の特殊な場合として既に示されているが，ここでは全点の《訪問間隔上限》が等しいという条件のみでも成り立つことを示す．

以降では，グラフの形状が Line で全点の《訪問間隔上限》が等しい場合，各巡査が部分集合を担当し独立に往復するという単純な運行によって最大利得が得られることを示す．

まず次の補題を示す．

補題 2.2. 頂点 v_i がある 1 人の巡査 s により単独警備されているとき，《訪問間隔上限》を q_i として， s は常に区間 $[v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$ にいる．

証明．この区間でない或る座標 $v_{\text{out}} \notin [v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$ を s が時刻 t_0 に訪問するとする． v_{out} と v_i の間の移動には少なくとも時間 $|v_i - v_{\text{out}}| > q_i/2$ を要するから， s は区間 $[t_0 - q_i/2, t_0 + q_i/2]$ に属する時刻に v_i を訪問できない．この区間の長さは q_i であるので， s が v_i を単独警備していることに反する． \square

これにより次の補題が成り立つ．

補題 2.3. グラフの形状が Line で，全頂点の《訪問間隔上限》がすべて等しいとする．頂点集合 V の任意の部分集合 W に付いて， W が巡査 m 人により警邏可能ならば W は巡査 m 人による独立往復運行で警邏できる．

証明．巡査数 m に関する帰納法で示す．全点の《訪問間隔上限》を Q とする． $m = 0$ の

ときは明らかなので、以下 $m > 0$ とする。

W は m 人の巡査により警邏可能であるので、2 章始めの議論により W を警邏する m 人の巡査による順序保存運行が存在する。このような運行を任意に一つ選び $A = (a_1, \dots, a_m)$ とする。

W の点のうち最も左にあるものを b とする。まず、各巡査は b より左に存在する時間 b で停止するように変換する。このようにしても W は警邏されたままであり、また、これによりすべての巡査は区間 $[b, +\infty)$ に存在することになる。

ここで、最も左の巡査 巡査 1 に注目する。順序保存であることから b が A により訪問されるすべての時刻に 巡査 1 は b を訪問しているので、 b は a_1 により単独警備されている。すると、補題 2.2 より、任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対し $a_1(t) \leq b + Q/2$ であるが、一方、 a_1 を区間 $[b, b + Q/2]$ を速さ 1 で往復する運行とすればこの区間に含まれるすべての頂点を警備することができる。実際、 a_1 がこのような運行であるとき $b \leq x \leq b + Q/2$ である位置 x に存在する時刻の間隔の最大値は

$$\max(2(x - b), 2(b + Q/2 - x)) \leq 2(b + Q/2 - b) = Q$$

より、 $[b, b + Q/2]$ に含まれるどの頂点も《訪問間隔上限》を超えずに訪問できていることが分かる。一方、 $W^- := \{v \in W \mid b + Q/2 < v\}$ は A で 巡査 1 以外の $m - 1$ 人の巡査により警備されているので、帰納法の仮定から残る $m - 1$ 人の巡査も独立往復運行に変換することができる。以上により W を警邏する m 人の巡査による独立往復運行が得られた。□

補題 2.3 により、独立往復運行を行う場合のみを考えればよい。ため、 m 人の巡査がそれぞれ担当する m 個の区間を求めればよい。以下のアルゴリズムにより利得の和が最大となる m 個の区間を求めることができる。

初めに Line 上の頂点をソートしておき、左側から順に v_1, v_2, \dots, v_n とする。頂点 v_i を左端とする区間を $I_i := [v_i, v_i + Q/2]$ と書く。

まず、 n 個の区間 $I_i (i = 1, 2, \dots, n)$ について各区間に含まれる点から得られる利得の合計 $P_i := \sum_{v_j \in I_i} p_j$ を求める。 P_1, \dots, P_n は v_1, v_2, \dots, v_n がソートしてあるので $O(n)$ で求めることができる。

あとは m 個 (m は巡査の人数) の区間を選び利得の合計を最大化すればよいが、以下の漸化式 1 に従う動的計画法で $O(mn)$ で最大の利得を得られる m 個の区間を選択できる。 $OPT(i, j)$ は、区間 I_1, \dots, I_j から最大 i 個の区間を選ぶときの利得の合計の最大値

を表す． $OPT(m, n)$ が全体の利得の最大値となる．

$$OPT(i, j) = \begin{cases} 0 & i = 0 \text{ または } j = 0 \text{ のとき} \\ \max\{OPT(i, j-1), P_j + OPT(i-1, j-1)\} & \text{それ以外の場合} \end{cases} \quad (1)$$

最後に， $OPT(m, n)$ において選ばれた区間をトレースバックして求め，この区間に含まれる頂点全体を出力して終了する．

このアルゴリズムの計算量は全体で $O(n \log n + nm)$ となる．これで定理 2.1 が示された．

この証明では線分に端の頂点が存在することが重要な役割を果たしているため，グラフの形状が閉路の場合にそのまま適用することはできない．

2.2 《訪問間隔上限》が一般の場合

全点の《訪問間隔上限》が等しい場合は結局巡査の最適な運行が独立であったため単純になっていたが，《訪問間隔上限》が一般の場合は，頂点を複数の巡査が訪問して警備する必要がある場合が存在する．図 3（左）の例では，中央の《訪問間隔上限》の短い 2 つの頂点は 2 人の巡査に訪問されており，また，全点の《訪問間隔上限》が等しい場合に反して各巡査の最適な運行はなんらかの区間の往復であるとは限らないことも分かる．

また，この例では左の巡査は左端の点を《訪問間隔上限》ちょうどごとに訪問しているが，左端の点の《訪問間隔上限》から順に巡査の運行を決定することも難しい次のような例が存在する．図 3（中央）の例では，左側の巡査は左端の点をあえてより短い周期で訪問することで全点を警邏しているが，同じ例について，図 3（右）のように左の巡査が左端の点の《訪問間隔上限》ぎりぎりの時間まで右の方へ動き左端へ帰る運行を行うと 2 人の巡査がうまく協力できず全点の警備ができない．

これらの例は，《訪問間隔上限》が異なる場合は巡査の運行を個別に決定するのは難しいということを示唆している．しかしながら，この《訪問間隔上限》が一般の場合での Line 上の《警邏問題》の困難性を示すこともできなかった．そこで，《訪問間隔上限》より短い間隔で点を訪問しうることによって運行の決定を複雑になる例が存在したことを踏まえて，ここでは 1 章で定義した時刻指定警邏判定問題という別種の問題を代わりに考える．

定義 2.4. $S \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ とする．任意の $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in S$ が $|x_1 - x_2| \leq |t_1 - t_2|$ を満たすとき， S は運行可能であるという．また，分割 $\{P_1, \dots, P_l\}$ が運行可能であるとは， P_1, \dots, P_l がそれぞれ運行可能集合であることである．

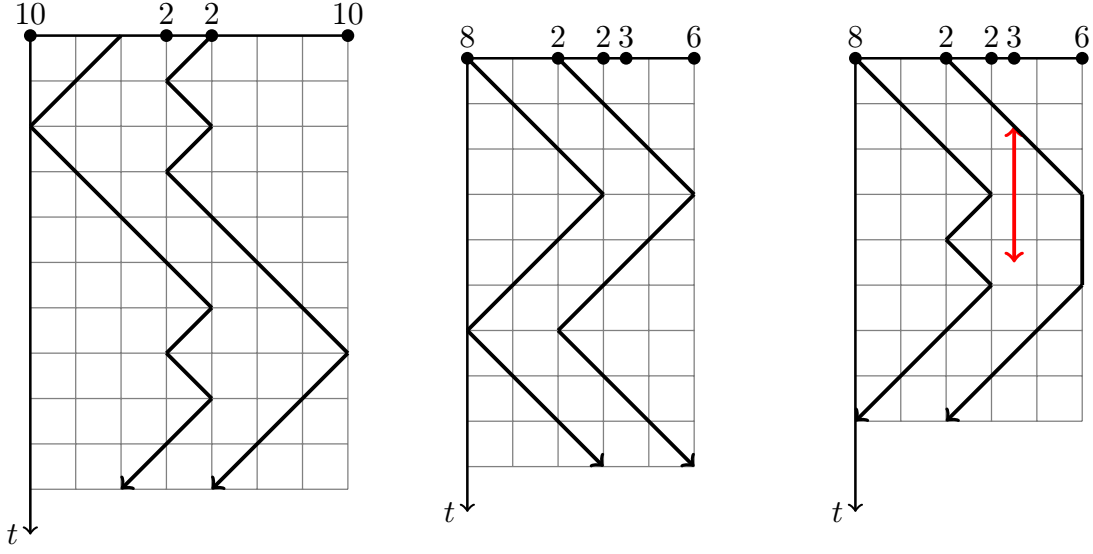


図3 巡査の協力が必要な例．横軸を頂点の座標，縦軸を時刻として巡査の軌跡を表す．点の上の数値は《訪問間隔上限》を表す．[あとで図を差し替える]

任意の運行可能集合 S に対して，Line 上の巡査の運行 a であって， S のすべての元 (t, x) に対して $a(t) = x$ を満たす（このとき a を運行可能集合 S に対応する運行と呼ぶ）ものが存在することは簡単に示すことができる．よって，グラフが Line の場合の時刻指定警邏判定問題は次のようにも記述できる．

時刻指定線分警邏判定問題． 巡査の人数を表す正の整数 m と n 個の自然数の組 $(q_i, r_i, x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ が与えられる．集合 $\{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ を m 個以下の運行可能集合に分割できるか判定せよ．

定理 2.5． 時刻指定線分警邏判定問題は多項式時間で解くことができる．[1 章で参照するので追加．位置をあとで考える]

グラフが Line の場合は順序保存運行を考えることができるのと同様に，順序保存（運行可能）分割も考えることができる．分割 $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_l\}$ が順序保存であるとは， \mathcal{P} に対応する運行 $A = (a_1, \dots, a_l)$ であって順序保存なものが存在することであり，これは，

$$L(t, x) := \{(t', x') \mid |x - x'| > |t - t'| \text{ かつ } x' < x\} = \{(t', x') \mid x - x' > |t - t'|\}$$

として，任意の $P_i (i \in \{1, \dots, l\})$ について，領域 $\bigcup_{(t, x) \in P_i} L(t, x)$ に $P_j (i < j)$ の点が存在しないことということもできる．

$X := \{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ の任意の順序保存分割のうち一番左の

集合は順序保存分割の定義から $P_1 := \{(t, x) \in X \mid L(t, x) \cap X = \emptyset\}$ の部分集合となる．よって， X の最小の順序保存分割であって一番左の集合が P_1 であるようなものが存在する．同様に，残りの $X \setminus P_1$ の最小の順序保存分割であって一番左の集合が $P_2 := \{(t, x) \in X \setminus P_1 \mid L(t, x) \cap X \setminus P_1 = \emptyset\}$ であるようなものが存在する．このように，集合 X の左側から貪欲に運行可能集合を取り出していく操作を再帰的に繰り返すと，最小の順序保存分割 $\{P_1, P_2, \dots, P_l\}$ が得られる．これを $\mathfrak{P}(X)$ と書くことにする．

時刻指定線分警邏判定問題は $|\mathfrak{P}(X)| \leq m$ が成り立つかを判定すればよい． X は無限集合であるから直接 X を入力として分割 $\mathfrak{P}(X)$ を計算することはできないが，この問題では q_1, \dots, q_n が整数であることから集合 X は時刻（組 $(t, x) \in X$ の第 1 要素）について周期的であるため， X の 1 周期分の有限部分集合を $\mathfrak{P}(X)$ の一部となるように分割する計算ができれば元の分割が可能か判定することができる．

以下では，集合 S に対して $S[a : b) := \{(t, x) \in S \mid a \leq t < b\}$ と記号を定義する．また， $T := \text{lcm}(q_1, \dots, q_n)$ とする．以降は $X[0 : T)$ を $\mathfrak{P}(X) = \{P_1, \dots, P_l\}$ の一部となるように分割する（すなわち， $X[0 : T)$ の分割 $\{P_1[0 : T), \dots, P_l[0 : T)\}$ を与える）のが目的となる．

まず，有限集合 F の分割 $\mathfrak{P}(F)$ を与える分割アルゴリズムは次のようになる．

分割アルゴリズム． 入力の集合を F とする．初期値を $\mathcal{P} = \{\}$ ， $F' = F$ とし， $F' \neq \emptyset$ である限り 1. から 3. を繰り返す．

1. $P \leftarrow \{(t, x) \in F' \mid L(t, x) \cap F' = \emptyset\}$
2. $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{P\}$.
3. $F' \leftarrow F' \setminus P$,

\mathcal{P} を出力する． ■

$X[0 : T)$ の分割 $\{P_1[0 : T), \dots, P_l[0 : T)\}$ を計算するには， X の分割 $\mathfrak{P}(X)$ を得る際に $X[0 : T)$ の分割に関係がある X の点をすべて含むような有限集合を分割アルゴリズムに与え，出力された分割 \mathcal{P} から $[0, T)$ の範囲を取り出せばよい．前述の貪欲な分割の仕方では集合 S から左端の運行可能集合 $s' := \{(t, x) \in S \mid L(t, x) \cap S = \emptyset\}$ を取り出すときには，定義の通り s' の任意の点 (t, x) に対する領域 $L(t, x)$ に S の点が存在しないことのみが s' の点の条件である．よって，分割アルゴリズムに与える入力は $\bigcup_{(t, x) \in X[0 : T)} L(t, x)$ を含む X の有限集合であればよく，例えば Line の両端の点の距離 $Y := |x_n - x_1|$ として $X[-Y : T + Y)$ とすれば十分である．

3 Star

グラフの形状が Star の場合については、利得か《訪問間隔上限》のいずれかが一般であれば、《警邏問題》は巡査が 1 人であっても NP 困難であることが分かっている [2]. よって、本稿の《警邏問題》については、巡査数が一般であって、全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合を調べる.

《独立警邏問題》においては、グラフが Star で巡査数が一般の場合は利得と《訪問間隔上限》がすべて等しくても NP 困難になることが Coene ら [2] により示されているが、一方で同じ条件における《警邏問題》の場合は次が成り立つ.

定理 3.1. グラフの形状が Star で全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合、《警邏問題》は（巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる.

Line の場合では協力の発生によって複雑な運行による警邏が発生した状況から考えると、《独立警邏問題》より《警邏問題》の方が簡単に解けるというのは意外な結果に思われるが、Star の場合は、《独立警邏問題》ではうまく頂点集合を分割しなければならないことを用いて分割問題を帰着することができるため NP 困難になるのに対し、《警邏問題》ではある単純な運行が最適となるため簡単に解くことができる.

本節では、頂点 v に隣接する辺を e_v , その長さを d_v のように書く.

補題 3.2. グラフの形状が Star のときの《警邏問題》において、全点の《訪問間隔上限》が Q のとき、点集合 V の任意の部分集合 W について

$$\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ \iff m \text{ 人の巡査により } W \text{ の全点を警邏できる}$$

が成り立つ.

証明. (\Rightarrow) $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ$ が成り立つとき、 m 人の巡査の運行を次のように定めれば W の全点を警邏できる. $W' := \{v \in W \mid 2d_v \geq Q\}$ とする. まず、 $|W'|$ 人の巡査を W' の各点に 1 人ずつ配備し常駐させることで警備する. このとき、 $|W'|Q = \sum_{v \in W'} Q \leq \sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ$ より $|W'| \leq m$ である. これにより W' の全点は $|W'|$ 人の巡査により警備される. 残りの $2d_v < Q$ である頂点 $v \in W \setminus W'$ は、残りの $m - |W'|$ 人の巡査により警邏しなければならないが、 $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ$ より $\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v \leq (m - |W'|)Q$ であるから、1 人の巡査が速さ 1 で $W \setminus W'$ の全点をちょうど 1 度ずつ訪問するのにかかる時間は $(m - |W'|)Q$ 以下となるので（中心点と点

v を一往復するには $2d_v$ の時間を要する), $m - |W'|$ 人の巡査全員が時間 Q ずつずらし
てこの動きを繰り返すことでどの点も時間 Q 以上放置せずに訪問し続けることができ,
これにより $W \setminus W'$ の全点も警備される.

(\Leftarrow) 対偶を示す. まず, ある点 v が警備されているとは, どの長さ Q の時間区間にも
少なくとも1度巡査の訪問を受けることであるが, 点 v が警備されているとき, どの長さ
 Q の時間にも $\min(2d_v, Q)$ の時間は (少なくとも一人の) 巡査が e_v 上 (端点のうち中心点
は含まず v のみを含む) に存在する. これは後で示す. 各点 v に対して定まる時間 Q あ
たりの巡査の滞在時間 $\min(2d_v, Q)$ は点 v の警備に必要なコストと考えることができる.
 W の全点の警備に必要なコストは, 各点の警備コストの和 $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q)$ であり,
 m 人の巡査の持つ時間 (資源) の和は時間 Q あたり mQ であるが, 各巡査は同時に2つ
以上の辺上には存在しえないため (中心点は辺に含まない), $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) > mQ$
のとき W の全点を警備することはできない.

最後に, 点 v が警備されているとき, どの長さ Q の時間にも $\min(2d_v, Q)$ の時間は (少
なくとも一人の) 巡査が e_v 上に存在することを示す. (i) v が $2d_v \geq Q$ を満たすとき, も
し v の隣接辺 e_v 上 (端点を含む) に一人も巡査が存在しない時刻 s があるとする, v
を訪問した s 以前で最後の時刻と s 以後で最初の時刻の間隔は $2d_v \geq Q$ より長いため, v
が警備されていることに反する. よってこの場合は隣接辺 e_v 上には常にいずれかの巡査
が存在する必要がある. (ii) v が $2d_v < Q$ を満たすとき, 長さ Q の時間区間 $[t, t+Q]$ を
任意に選ぶ. 警備の条件から v は $[t, t+Q]$ に少なくとも1回訪問されるが, その時刻に
よって以下の場合を考える. (a) $[t+d_v, t+Q-d_v]$ に1回以上訪問されるとき, その訪
問時刻を任意に1つ選び s とすると s の前後の少なくとも d_v ずつの時間は巡査は辺 e_v
上に存在し, これは $[t, t+Q]$ に含まれる. (b) $[t+d_v, t+Q-d_v]$ に1度も訪問されない
ときは, $[t, t+d_v]$ か $(t+Q-d_v, t+Q]$ に少なくとも1回訪問される. (b1) $[t, t+d_v]$
と $(t+Q-d_v, t+Q]$ でそれぞれで少なくとも1回ずつ訪問されるときは $[t, t+d_v]$ と
 $[t+Q-d_v, t+Q]$ に巡査が e_v 上に存在するので巡査の滞在時間は $2d_v$ 以上となる. (b2)
 $(t+Q-d_v, t+Q]$ に1度も訪問されないとき, $[t, t+d_v)$ に含まれる最後の訪問時刻を s と
すると, 点 v の警備の条件と場合分けの仮定から s の次の訪問時刻 u は $t+Q < u \leq s+Q$
を満たす. s と u それぞれの前後 d_v の時間 $[s-d_v, s+d_v], [u-d_v, u+d_v]$ には巡査が辺
 e_v に存在するが, このうち $[t, t+Q]$ に含まれるのは $[t, s+d_v], [u-d_v, t+Q]$ であり,
その時間の和は $(s+d_v-t) + (t+Q-(u-d_v)) = 2d_v + (Q-(u-s)) \geq 2d_v$ より $2d_v$
以上となる. (b3) $[t, t+d_v)$ に1度も訪問されないとき, $(t+Q-d_v, t+Q]$ に含まれる
最初の訪問時刻とその1つ前の訪問時刻を考えると (b2) と同様に巡査の滞在時間の和は
 $2d_v$ 以上となる.

□

補題 3.2 より Star の任意の点部分集合 W が警邏可能であるかを W の点の隣接辺の長さだけから簡単に計算できることが分かった. 定理 3.1 では, 全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合を考えているので警邏する部分集合としては隣接辺の短い点から順に選べばよく (隣接辺のより長い点 v_1 とより短い点 v_2 があるとき, v_1 を警備して v_2 を警備しない運行は常に v_1 を警備する代わりに v_2 を警備する運行に変換できる), 警邏できる最大の部分集合は n を点の数として $O(n \log n)$ で計算できる (もちろん, ヒープソートなどを用いれば計算量はさらに改善される). 以上から定理 3.1 が示された.

4 Unit

第 1 章で述べた通り, Unit は Star の特殊な場合とみなせるため, 定理 3.1 から全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合は《警邏問題》を多項式時間で解くことができるが, Unit の場合は全点の《訪問間隔上限》だけが等しければ《警邏問題》を多項式時間で解ける (定理 4.1).

《訪問間隔上限》が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しかったため, 第 2 章で扱った時刻指定警邏問題を再び考える. グラフが Unit の場合は時刻指定警邏問題が NP 困難になることを示す (定理 4.2).

4.1 全点の《訪問間隔上限》が等しい場合

定理 4.1. グラフの形状が Unit で全点の《訪問間隔上限》が等しい場合, 《警邏問題》は (利得, 巡査数が一般であっても) 多項式時間で解くことができる.

Proof. 補題 3.2 から Unit の全点の《訪問間隔上限》が Q のとき, 点集合 V の任意の部分集合 W について

$$\sum_{v \in W} \min(d, Q) = |W| \min(d, Q) \leq mQ \iff m \text{ 人の巡査により } W \text{ の全点を警邏できる}$$

が成り立つ. d は Unit の各辺の長さである.

グラフの形状が Unit の場合, 全点の《訪問間隔上限》が等しいならば警邏する部分集合 W は利得の大きい点から選べばよい (利得のより大きい点 v_1 とより小さい点 v_2 があるとき, v_1 を警備して v_2 を警備しない運行は常に v_1 を警備する代わりに v_2 を警備する運行に変換できる). $|W| \min(d, Q) \leq mQ$ を満たす最大の $|W|$ は $|W| = \lfloor mQ / \min(d, Q) \rfloor$

であり, 利得の大きい点から $\lfloor mQ/\min(d, Q) \rfloor$ 点を選ぶ計算は $O(\lfloor mQ/\min(d, Q) \rfloor \log n)$ となる. \square

4.2 《訪問間隔上限》が一般の場合：時刻指定警邏問題

[ここに説明文]

定理 4.2. グラフの形状が Unit のとき, 時刻指定警邏問題は巡査が 1 人で全点の利得が等しくても NP 困難である.

証明. 最大独立集合問題からの帰着による.

最大独立集合問題の入力のグラフが $G = (V, E)$ のとき, 時刻指定警邏問題に対して, 巡査の人数 1 と Unit のグラフ $G' = (V', E')$ を入力として与える. G' は以下のように定める. $V' = V$ とし, 全点の利得は 1, 辺の長さはすべて 1 とする. 各点の《指定時刻》は次のように定める. まず, ${}_nC_2$ 個の相異なる素数 $p_{i,j} (1 \leq i < j \leq n)$ を用意し, $q_i := \prod_{k=1}^{i-1} p_{1,k} \prod_{k=i+1}^n p_{k,n}$ とする. 次に, $r_i (i \in \{1, \dots, n\})$ を, G のすべての 2 点 $v_i, v_j (1 \leq i < j \leq n)$ に対して, $(v_i, v_j) \in E$ ならば $r_i \equiv r_j \equiv 0 \pmod{p_{i,j}}$, $(v_i, v_j) \notin E$ ならば $r_i \equiv 0, r_j \equiv 1 \pmod{p_{i,j}}$, さらに $0 \leq r_i < q_i$ を満たすように定める. 各 r_i に対して相異なる $n-1$ 個の素数で割ったときの余りが与えられているので, 中国剰余定理からそのような r_i がその $n-1$ 個の素数の積 q_i を法として一意に存在する. 以上のようにして得た $q_i, r_i (i \in \{1, \dots, n\})$ から, 各点 $v_i (i \in \{1, \dots, n\})$ の《指定時刻》を $q_i k + r_i (k \in \mathbb{N})$ と定めると, 時刻指定警邏問題の解は G の最大独立集合となる.

実際, G' の任意の 2 点 $v_i, v_j (i < j \text{ としてよい})$ に対し, この両方を警備できるための必要十分条件は, 2 点間の移動時間が 1 以上かかることから, 訪問しなければならない時刻同士がすべて 1 以上離れていること, すなわち, 任意の整数 k, l に対し $|(kq_i + r_i) - (lq_j + r_j)| \geq 1$ が成り立つこととなる. q_i, r_i, q_j, r_j がすべて整数のとき, これは $q_i k + r_i \neq q_j l + r_j$, すなわち $r_i - r_j \neq q_j l - q_i k$ が任意の整数 k, l で成り立つこと同値である. $\gcd(x, y)$ を x と y の最大公約数とすると, $r_i - r_j \neq \gcd(q_i, q_j)n$ が任意の整数 n で成り立つこと, つまり $r_i \not\equiv r_j \pmod{\gcd(q_i, q_j) = p_{i,j}}$ と同値である. よって, v_i と v_j の両方を警備できる必要十分条件は $r_i \not\equiv r_j \pmod{p_{i,j}}$ となる. r_i の決め方から,

$$(v_i, v_j) \in E \iff G' \text{ の 2 点 } v_i, v_j \text{ を両方警備することができない}$$

が成り立つため, G' の点部分集合であって同時に警備できない 2 点のうち少なくとも一方は含まないようなもののうち最大のものを選ぶと, これは G の最大独立集合となる.

最後に、 ${}_nC_2$ 個の相異なる素数を用意する計算量も確かめる必要がある。 k 番目に小さい素数を P_k と書くと、 $k \geq 6$ のときは $P_k < k(\ln k + \ln \ln k)$ であることが知られているため [?], $k(\ln k + \ln \ln k)$ までの自然数を順に素数かどうか判定していくことで k 個以上の素数を得ることができる。ある数が素数であるかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムは存在するので [?], ${}_nC_2$ 個の素数の列挙は n の多項式時間でできる。 \square

定理 4.2 では、各点の《指定時刻》といっても間隔 q_i と剰余 r_i が与えられる場合について NP 困難性が示したが、各点に間隔 q_i のみが指定されている「間隔指定警邏問題」も考えることができる。この全点警邏判定問題を「間隔指定警邏判定問題」と呼ぶことにする。

定理 4.3. グラフの形状が Unit のとき、間隔指定警邏判定問題は巡査が 1 人であっても NP 困難である。

証明. Disjoint Residue Class Problem [4] からの帰着による。

ある整数の組の集合 $\{(m_1, r_1), \dots, (m_n, r_n)\}$ が Disjoint Residue Class であるとは、任意の整数 x に対して $x \equiv r_i \pmod{m_i}$ となるような i が高々 1 つ存在することと定義される。Disjoint Residue Class Problem とは整数の組 (m_1, \dots, m_n) が与えられたときに、 $\{(m_1, r_1), \dots, (m_n, r_n)\}$ が Disjoint Residue Class となるような組 (r_1, \dots, r_n) が存在するかを判定する問題であり、NP 困難であることが知られている [4]。

Disjoint Residue Class Problem の入力 (m_1, \dots, m_n) のとき、間隔指定警邏問題に対して巡査の人数 1 と n 点からなる Unit のグラフで各点の指定訪問間隔を $q_i = m_i$ となるように定め、辺の長さはすべて 1 としたものを入力として与えることで Disjoint Residue Class Problem を解くことができる。

辺の長さが 1 であるから、すべての整数の時刻にいずれかの 1 点を訪問できる。各頂点 v_i の最初の訪問時刻 [←替える] を r_i とすると、この点を警備するために訪問しなければならない時刻の列は $q_i k + r_i (k \in \mathbf{N})$ で与えられるが、全点を警備するためには任意の 2 点 $v_i, v_j \in V$, 任意の整数 k, l について $q_i k + r_i \neq q_j l + r_j$ である必要がある。

Disjoint Residue Class Problem の解 (r_1, \dots, r_n) が存在するならば、任意の時刻 $t \in \mathbf{Z}$ に対して $t \equiv r_i \pmod{q_i}$, すなわち $t = r_i + q_i k$ となる $k \in \mathbf{Z}$ が存在するような i は高々 1 つであり、任意の $k, l \in \mathbf{Z}$ に対して $q_i k + r_i \neq q_j l + r_j$ が成り立つので、巡査は全点を警備でき、解が存在しなければあるの整数 x に対して $x \equiv r_i \pmod{m_i}$, $x \equiv r_j \pmod{m_j}$ となる i, j が存在するので、 v_i, v_j を両方警備することができず、したがって全点を警備できない。 \square

参考文献

- [1] K. Chen, A. Dumitrescu, and A. Ghosh. On fence patrolling by mobile agents. In *Proc. 25th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG)*, 2013.
- [2] S. Coene, F. C. R. Spieksma, and G. J. Woeginger. Charlemagne’s challenge: the periodic latency problem. *Operations research*, 59(3), pp. 674–683, 2011.
- [3] J. Czyzowicz, L. Gąsieniec, A. Kosowski, and E. Kranakis. Boundary patrolling by mobile agents with distinct maximal speeds. In *Proc. 19th Annual European Symposium on Algorithms (ESA)*, LNCS 6942, pp. 701–712, 2011.
- [4] A. Kawamura and M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. In *Proc. Ninth International Conference on Algorithms and Complexity (CIAC)*, LNCS 9079, pp. 261–273, 2015.