[最終変更日時：2018/1/9, 16 時 45 分]

[ToDo]

- **図の追加・差し替え**
- **関連研究**
- 最終チェック
  - 参考文献リストの書式の統一
  - 引用は著者名は 2 人以下なら全員列挙に
  - 単語の統一
    - 緑色にしている一時的な単語を決める　点？ 頂点？
  - 補足（不要？）
    - 2.1 各区間の利得の計算や選ばれた区間に含まれる点の列挙の方法
    - 2.2 節：運行可能集合 S に対して運行 a が存在することの証明
  - 「章」、「節」（修正済み）
  - 運行
  - 巡査数 → 巡査の人数

張である．

未定義

以降では，地図が Line で全点の放置限度が等しい場合，次に定義する独立往復運行という単純な運行によって最大利得が得られることを示す．

定義 2.2. 地図 $(\mathbf{R}, V)$ が Line で全点の放置限度が q とする．V のうち最も右にある点（存在しなければ 0）を v_n として，$n+m$ 個の区間 $S_1, \ldots, S_{n+m}$ を

定ギ

$$S_i = \begin{cases} [v_i, v_i + q/2] & 1 \le i \le n \text{ のとき} \\ [v_n + iq, v_n + (i+1/2)q] & n+1 \le i \le n+m \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.1}$$

と定義する．運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が独立往復運行であるとは，各 a_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ が $S_1, \ldots, S_{n+m}$ のいずれかを速さ 1 で往復する運行であって，$a_1, \ldots, a_m$ の往復区間が互いに重複していないことである．

補題 2.3. 地図 $(\mathbf{R}, V)$ が Line で全点の放置限度が等しいとする．集合 $W \subseteq V$ が或る運行により警邏されるならば，W は同人数の巡査による或る独立往復運行で警邏される．

証明 巡査の人数 m に関する帰納法で示す．全点の放置限度を q とする．$m = 0$ のときは明らかなので，以下 $m > 0$ とする．

$W = \emptyset$ のとき，v_n を V のうち最も右にある点として，巡査 i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ は区間 $[v_n + iq, v_n + (i+1/2)q]$ を速さ 1 で往復するとする．これは独立往復運行になっている．

以下では $W \neq \emptyset$ とし，W の点のうち最も左にあるものを u とする．

所望の独立往復運行 $(a'_1, \ldots, a'_m)$ を次のように作る．まず区間 $[u, u+q/2]$ を速さ 1 で休まず往復する運行を a'_1 とする．a'_1 はこの区間に属するすべての点を警邏する．実際，位置 $x \in [u, u+q/2]$ を運行 a'_1 が訪れる間隔の最大値は $\max(2(x-u), 2(u+q/2-x)) \le 2(u+q/2-u) = q$ である．W の点のうち a'_1 によって警邏されないもの，すなわち $u + q/2$ よりも右にあるものの全体を W^- とする．

2 章始めの議論により W は或る順序保存運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ により警邏される．すると，a_1 は任意の時刻 t で $a_1(t) \le u + q/2$ を満たす． なぜならば，もし或る位置 $v_{\mathrm{out}} > u + q/2$ と時刻 t_0 があって $a_1(t_0) = v_{\mathrm{out}}$ であるとする．v_{out} と u の間の移動には少なくとも時間 $|u - v_{\mathrm{out}}| > q/2$ を要するから，巡査 1 は区間 $[t_0 - q/2, t_0 + q/2]$ に属する時刻に u を訪問できない．この区間の長さは q であり，順序保存運行であるから他の巡査もこの時間に u を訪問しないので，u が警邏されていることに反する．よって，W^- の点を巡査 1 が訪れることはない．

したがって W^- は $(a_2, \ldots, a_m)$ により警邏され，ゆえに帰納法の仮定から，或る独立往復運行 $(a'_2, \ldots, a'_m)$ により警邏される．これに a'_1 を加えた $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_m)$ は W を警邏する独立往復運行である． □

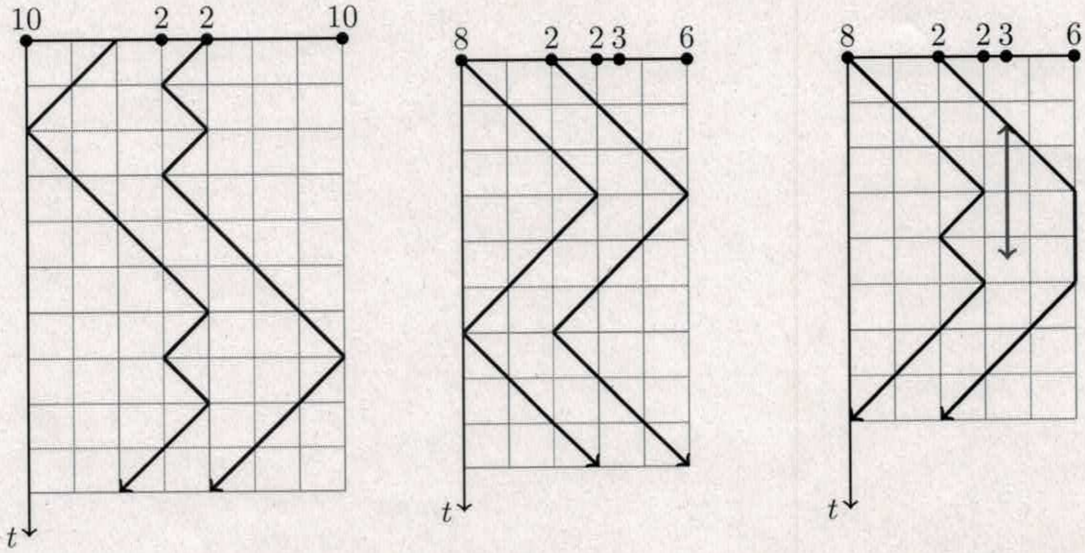

図 2.1　巡査の協力が必要な例．横軸を点の座標，縦軸を時刻として巡査の軌跡を表す．点の上の数値は放置限度を表す．［あとで図を差し替える］

うーん…以下の部分がよく解らなかった
どこまでがアルゴリズムの記述で
どこがその正しさの証明でしょうか。
もし時間があれば記述を整理しましょう

これらの例は，放置限度が異なる場合は巡査の運行を個別に決定するのは難しいということを示唆している．しかしながら，地図が Line で放置限度が一般の場合での警邏問題の困難性を示すこともできなかった．そこで，放置限度より短い間隔で点を訪問しうることで運行の決定が複雑になる例が存在したことを踏まえて，ここでは 1 章で定義した定時訪問判定問題という別種の問題を代わりに考える．

地図が Line の場合の定時訪問判定問題は，正の整数 m と n 個の自然数の組 $(q_i, r_i, x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ が与えられたとき，集合 $\{(q_i k + r_i, x_i) \mid k \in \mathbf{Z}, i \in \{1,\ldots,n\}\}$ を m 個以下の運行可能集合に分割できるか判定する問題と言い換えることができる．ただし，集合 $S \subset \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ が**運行可能**であるとは，任意の $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in S$ が $|x_1 - x_2| \le |t_1 - t_2|$ を満たすことであり，分割 $\{P_1, \ldots, P_h\}$ が**運行可能**であるとは，$P_1, \ldots, P_h$ がそれぞれ運行可能であることと定義する．［運行可能分割の説明の図］任意の運行可能集合 S に対して，Line 上の巡査の運行 a であって，S のすべての元 (t, x) に対して $a(t) = x$ を満たす（このとき a を運行可能集合 S に対応する運行と呼ぶ）ものが存在することは簡単に示すことができる．

地図が Line の場合の定時訪問判定問題は以下に示す貪欲アルゴリズムにより解くことができる．

まず，地図が Line の場合は順序保存運行を考えることができるのと同様に，順序保存（運行可能）分割を考えることができる．分割 $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_h\}$ が順序保存であるとは，$\mathcal{P}$ に対応する運行 $A = (a_1, \ldots, a_h)$ であって順序保存なものが存在すること，あるいは，

$$L(t,x) := \{(t',x') \mid |x-x'| > |t-t'| \text{ かつ } x' < x\} = \{(t',x') \mid x-x' > |t-t'|\}$$

第 3 章

Star

地図が Star の場合については，利得か放置限度のいずれかが一般であれば，警邏問題は巡査が一人であっても NP 困難であることが知られている [9, Theorems 5 and 6]．よってここでは，全点の利得と放置限度が等しい場合について次のことを示す．

定理 3.1. 地図が Star で全点の利得と放置限度が等しい場合，警邏問題は（巡査の人数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

独立警邏問題においては，地図が Star で巡査の人数が一般の場合は利得と放置限度がすべて等しくても NP 困難になることが Coene らにより示されている [9, Theorem 10]．Line の場合では複雑な協力による警邏があり得たこと（2.2 節）から考えると，協力を許した方が簡単に解けるというのは意外な結果に思われる．これは，Star の場合，独立警邏問題ではうまく点集合を分割しなければならないことが難しさを生み NP 困難になるのに対し，警邏問題では後述の補題 3.3 の証明中に述べる単純な運行が可能となるためである．

図 1.2，1.3 で注意したように Star の中心は警邏すべき点ではないが，本章では中心と点 v を結ぶ辺（端点のうち中心は含まず v のみを含む）を e_v，その長さを d_v と書く．なお，中心も警邏すべき点である場合を考えるには，$d_v = 0$ であるような点 v を追加すればよい．

ここを単に長さの和というなら，これを「互に交わりのない」合併にしておかないとまずい？（文字通り読むと重なりを二度長さに入れてしまうことになるので）

補題 3.2. Star において，放置限度 q の点 v が警邏されているならば，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対し，長さの和が $\min(2d_v, q)$ であるような有限個の時刻区間の合併 $J \subseteq [t, t+q)$ が存在し，J に属するすべての時刻において少なくとも一人の巡査が辺 e_v 上にいる．

証明 もし $2d_v > q$ ならば，常に e_v 上に巡査が存在する．何故なら，もし e_v 上に巡査がいない時刻 τ があれば，長さ $2d_v$ の時刻区間 $(\tau - d_v, \tau + d_v)$ にわたって v が放置され，仮定に反するからである．よって $J = [t, t+q)$ とすればよい．以下では $2d_v \leq q$ とする．

第 4 章

Unit

1 章で述べたように Unit は Star の特殊な場合とみなせるため，全点の利得と放置限度が等しい場合，警邏問題は定理 3.1 により多項式時間で解くことができる．ここでは，Unit で全点の放置限度が等しい場合の警邏問題が（利得が異なっていても）多項式時間で解けることを示す（定理 4.1）．

放置限度が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しかったため，2 章で扱った定時訪問問題を再び考える．地図が Unit の場合は定時訪問問題が NP 困難になることを示す（定理 4.2）．

4.1 全点の放置限度が等しい場合

定理 4.1. 地図が Unit で全点の放置限度が等しい場合，警邏問題は（利得，巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

トル

証明 Unit は Star の特殊な場合であるから，補題 3.3 から ~~Unit の地図 (U,V) の V の~~ 全点の放置限度が q のとき，~~点集合 V の任意の部分~~集合 W を警邏する m 人の運行が存在するための必要十分条件は d を各辺の長さとして

トル

定ギ？

$$\sum_{v\in W}\min(d,q)=|W|\min(d,q)\le mq$$

すぐ判る

コレではなく コレが条件であると すぐ判るように書く．

である．

トル（もう言った）

~~地図が Unit の場合，全点の放置限度が等しいならば~~警邏する部分集合 W は利得の大きい点から選べばよい（2 点 v,w について，w より v の方が利得が大きい場合，w を警邏せず v を警邏する運行は v を警邏せず w を警邏する運行に必ず変換できる）．$|W|\min(d,q)\le mq$ を満たす最大の $|W|$ は $|W|=\lfloor mq/\min(d,q)\rfloor$ であるので，利得の最も大きい $\lfloor mq/\min(d,q)\rfloor$ 点を選べばよい． □

「変換できる」のは常にであって「vの方が利得が大きい場合」だけでないので，ちょっと言い方がヘン

Star で全点の放置限度が等しい場合は，警邏できる点の最大数が式 (3.1) で与えられることから，利得が等しい場合は枝の短いものから選べばよく（定理 3.1），枝の長さが等しい場合は利得の大きいものから選べばよい（定理 4.1）というようにまとめることができる．

4.2　放置限度が一般の場合

3 章冒頭で述べた通り，地図が Star の場合については，放置限度が一般の場合は警邏問題は巡査が一人であっても NP 困難であった [9, Theorem 6]．この NP 困難性の証明では辺の長さが異なる Star の地図を用いていた．Unit は Star の辺の長さがすべて等しい場合であるため，この方法による NP 困難性の証明ができない．Unit で放置限度が一般の場合は多項式時間アルゴリズムや NP 困難性の証明が難しかったため，Line のときのように定時訪問問題を代わりに考える．

地図 (U, V) が Unit で各点 $v_i \in V$ の指定訪問時刻が (q_i, r_i) のとき，巡査一人で V の全点を定時訪問できるかどうかは次のように多項式時間で判定できる．辺の長さを d とすると，V の異なる 2 点 i, j の間の移動には時間 d を要することから，その両方を定時訪問できるためには，訪問すべき時刻同士がすべて d 以上離れていること，すなわち任意の整数 k, l に対して $|(q_i k + r_i) - (q_j l + r_j)| \geq d$ が成り立つことが必要十分である．g を q_i と q_j の最大公約数として，これは任意の整数 n で $|(r_i - r_j) + gn| \geq d$ が成り立つことに等しいので，r_i, r_j をそれぞれ g で割った余りを r'_i, r'_j として $|(r'_i - r'_j)|$，$|(r'_i - r'_j) + g|$，$|(r'_i - r'_j) - g|$ のいずれも d 以上となることに等しい．全点を定時訪問可能かどうかは，この条件を V のすべての 2 点について確かめればよい．

全点を定時訪問可能か判定する問題は多項式時間で解けるのに対し，定時訪問問題では次が成り立つ．

定理 4.2. 地図が Unit のとき，定時訪問問題は巡査が一人で全点の利得が等しい場合であっても NP 困難である．

証明　NP 困難であることが知られている最大独立集合問題からの帰着による．最大独立集合問題は，無向グラフが与えられたとき，どの二点間にも辺が存在しないような頂点集合（独立集合）のうち頂点の個数が最大のものを求める問題である．

最大独立集合問題の入力として点集合 $[n] = \{1, \ldots, n\}$，辺集合 E のグラフ G が与えられたとする．同じ大きさの点集合 V をもち，利得をすべて 1，辺の長さをすべて 1 とした Unit の地図 $M = (U, V)$ を考える．各点 $i \in V$ の指定訪問時刻 (q_i, r_i) を次のように定める．まず，$n(n-1)/2$ 個の相異なる素数 p_{ij} $(1 \leq i < j \leq n)$ を用意する．$i > j$ に

以下の記述（コレとか）を見ると，V は
ただ「同じ大きさ」というのではなく，
V = [n] としているようにみえる

対して p_{ij} と書くときは p_{ji} を指すことにする．各 $i \in V$ について，

$$q_i = \prod_{j \in [n] \setminus \{i\}} p_{ij} \tag{4.1}$$

とし，r_i をすべての $j \in [n] \setminus \{i\}$ に対して次を満たすように定める．

$$r_i \equiv \begin{cases} 1 & (i,j) \notin E \text{ かつ } i > j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \pmod{p_{ij}} \tag{4.2}$$

そのような r_i は中国剰余定理より（q_i の剰余として一意に）存在する．

V の異なる 2 点 i, j の間の移動には時間 1 を要することから，その両方を定時訪問できるためには，q_i と q_j の最大公約数 p_{ij} について $|(r_i - r_j) + p_{ij}k| \geq 1$ が任意の整数 k で成り立つことが必要十分である．r_i, r_j が整数なので，これは $r_i - r_j$ が p_{ij} の倍数でないこと，つまり $r_i \not\equiv r_j \mod p_{ij}$ に同値である．r_i の決め方 (4.2) から，これは $(i,j) \notin E$ に同値である．以上より，$(i,j) \in E$ と M の 2 点 i, j を両方定時訪問することができないことが同値となるため，M の最大の警邏可能な点部分集合は G の最大独立集合となることがわかる．

また，k 番目に小さい素数を P_k と書くと，$k \geq 6$ について $P_k < k(\ln k + \ln\ln k)$ が成り立つ [15] ので，$n(n-1)/2$ 個の素数の列挙は n の多項式時間でできる． □

なお，地図が Unit で巡査が一人かつ全点の利得が等しい場合，全点を定時訪問可能か判定する問題は本節冒頭で示した通り多項式時間で解けるので，定時訪問可能な部分集合であって大きさが N 以上のものが存在するか判定せよ，という問題~~であれば~~ NP 完全である．

はNPに属する。この問題は
...... なので

定期訪問の場合

定理 4.2 では，点 $v_1, \ldots, v_n$ を指定訪問時刻 $(q_1, r_1), \ldots, (q_n, r_n)$ に訪問せねばならないという定時訪問問題が NP 困難であることを示したが，$r_1, \ldots, r_n$ は与えられず $q_1, \ldots, q_n$ のみが指定される次のような問題も考えることができる．

上で述べた「[illegible]」
から従うのはコレ。主張は一ずつ
分けて述べましょう。「NP完全」を
述べるなら次の文で。

定期訪問判定問題．巡査の人数 m と地図 (U, V) および各点の指定訪問間隔 $(q_1, \ldots, q_n)$ が与えられる．m 人の巡査により V の全点を定期訪問できるか判定せよ．ただし，点 v を指定訪問間隔 q で**定期訪問**するとは，非負整数 r $(0 \leq r < q)$ が存在して v を指定訪問時刻 (q, r) で定時訪問することである．

巡査が一人の場合の定時訪問判定問題では各点を訪問すべき時刻が完全に定められていたため，全点を警邏できるかどうかは任意の 2 点の両方を警邏できるかを判断すれば必要

十分であった．一方，定期訪問判定問題では各点を訪問すべき時刻は間隔のみしか定められていないため，同様の判断の仕方ができない．実際，地図が Unit で二点間距離が 1 の場合の定期訪問判定問題は Campbell と Hardin [7] ~~の問題（~~ が DVMPD と称している~~）~~ 問題 と同じ~~問題~~ もの となり，巡査が一人であっても NP 困難である [7, Theorem 4].