複数の巡査の協力による指定地点の警邏について

Collaborative Patrolling of Designated Points on Graphs

河村 彰星　　　能城 秀彬

Akitoshi Kawamura　　　Hideaki Noshiro

2017 年 3 月 9 日

1　はじめに

所与の領域を 1 人または複数の巡査が動き回り，その領域内の指定された場所を十分な頻度で訪れることを警邏 (patrolling) という [1, 2, 3].

本稿では，与えられた距離空間 U 内を速さ 1 の巡査 m 人が動きまわることにより，集合 $V \subseteq U$ に属する多くの点に十分な頻度で訪れるという目標を考える．すなわち次のような問題である．

まず，巡査 m 人による U 上の運行とは，各巡査 $i \in \{1, \ldots, m\}$ の各時刻 $t \in \mathbf{R}$ における位置 $a_i(t) \in U$ を定めたものであって，任意の時刻 s，$t \in \mathbf{R}$ に対し $a_i(s)$ と $a_i(t)$ の距離が $|s - t|$ を超えないものをいう．運行 $A = (a_i)_{i \in \{1,\ldots,m\}}$ が点 $v \in U$ を間隔 $q \geq 0$ で警備するとは，長さ q のどの時間区間にもいずれかの巡査が v を少くとも一度は訪れる（任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対して巡査 i と時刻 $\tau \in [t, t + q)$ が存在し $a_i(\tau) = v$）ことをいう．

U の有限な部分集合 V があり，V の各点には利得および許容訪問間隔と呼ばれる非負整数が定まっている．運行 A が点集合 $W \subseteq V$ を警邏するとは，各点 $v \in W$ に対し，A が v をその許容訪問間隔以下の間隔で警備することをいう．そのような運行が存在するとき W は m 人により警邏可能であるという．

協力警邏問題． 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V（各点の利得と許容訪問間隔を含む）が与えられたとき，警邏可能な頂点集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．

距離空間 U といっても，V の点どうしの距離のみが重要である．そこでこの問題の入

力は，V を頂点集合とし辺に非負整数の長さがついた無向グラフと考えることにする．

この問題は，巡査が一人かつ全頂点の利得と許容訪問間隔が等しい場合に限っても，ハミルトン路問題からの帰着により NP 困難である [2, Theorem 8]．そこでグラフの形状を限ったときにどのようになるかを調べる．

一つの頂点が複数の巡査の訪問により警備され得ることに注意されたい．例えば図**??**では，…….（←適当な例を図に描く。）

Coene ら [2] は似た問題を扱っているが，このような協力を許さず，各頂点を専ら一人の巡査が「担当」することを要求している．つまり，各頂点 $v \in W$ が単独警備されること，すなわち v によって決るある一人の巡査が，v の許容訪問間隔以上の長さのどの時間区間においても v を訪問することを要求しているのである．対比のため本稿ではこの問題を非協力警備問題と呼ぶことにする（[2] では MPLPP と称している）．Coene ら [2] の諸結果においては，この非協力という限定が，多項式時間算法の設計にも困難性の証明にも重要な役割を果している．この限定を外したときの様子を調べるのが本稿の目的である．

本稿ではグラフ G の形状として線分，星と，枝の長さがすべて等しい完全グラフの 3 種類を扱うこととし（←定義が必要ですね。図にしましょうか。），以降はそれぞれを Line, Star, Unit と呼ぶ．Unit は，その各辺の長さを d とすると，同じ頂点数で辺の長さがすべて $d/2$ という Star の特別な場合と考えることができる．

協力警邏問題についての我々の結果と，非協力警邏問題についての Coene らの結果を，グラフの形ごとに比較すると次のようになる．それぞれ 2，**??**，**??**節で述べる．

- Line では，非協力警邏問題は動的計画法により多項式時間で解けることが示されていた [2, Theorem 11] が，その正しさは非協力の設定に強く依存している．本稿では協力警邏問題について，全頂点の許容訪問間隔が等しい場合には P であることを示す（定理 2.1）．
- Star では，全頂点の利得と許容訪問間隔がすべて等しい場合に限っても，非協力警邏問題は NP 困難であることが示されていた [2, Theorem 10]．本稿では，この場合の協力警邏問題は P となるという興味深い結果を得る（定理＊＊）．なお利得または許容訪問間隔を一般にすると，巡査が一人であっても（したがって協力・非協力に関わらず）NP 困難であることがわかっている [2, Theorems 5 and 6]．
- Unit では，全頂点の許容訪問間隔が等しい場合は協力警邏問題が P であることを示す（定理＊＊）．Star では全頂点の許容訪問間隔が等しくても利得が一般だと NP 困難になるので，これにより Unit は Star よりも簡単に解ける場合となっていることが分かる．

Line と Unit については許容訪問間隔が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しかったため，許容訪問間隔の代わりに「厳密訪問間隔」というものを考え，最初の訪問時刻から厳密訪問間隔ごとの時刻ちょうどに訪問し続けることを警備の条件とする問題も考えた．

関連研究

（あまり本筋に関係ない関連研究は、論文冒頭ではなくこの辺に書くのも手）

また，Line や Star は木の特別な場合である．

2　Line

グラフが Line の場合，グラフの全体（辺と頂点）は実直線上にあるとし，頂点の名前 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ はその位置を表す実数値も表すことにする．

また，Line の場合は順序保存運行というものを考えることができる．運行 A が順序保存であるとは，A が定める巡査 $u_1, u_2, \ldots, u_m$ の位置 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ が，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ において $a_1(t) \leq a_2(t) \leq \cdots \leq a_m(t)$ を満すことである．

巡査 m 人により警邏可能な任意の頂点集合 W は，巡査 m 人による或る順序保存運行 A' によって警邏される．これは次のように示すことができる．まず W は警邏可能であるから，ある運行 A が存在し W を警邏するとする．$a_1, a_2, \ldots, a_m$ を A が定める各巡査の位置，$s_i : \mathbf{N}^m \to \mathbf{N}$ を与えられた m 個の整数のうち i 番目に小さいものを返す関数として，

$$a'_i(t) := s_i(a_1(t), a_2(t), \ldots, a_m(t))$$

のように $a'_1, a'_2, \ldots, a'_m$ を定める．巡査の最高速度は互いに等しいので，各巡査 $u_1, u_2, \ldots, u_m$ の位置を $a'_1, a'_2, \ldots, a'_m$

これは運行となる．

任意の時刻 t において $\{a_1(t), a_2(t), \ldots, a_m(t)\} = \{a'_1(t), a'_2(t), \ldots, a'_m(t)\}$ であるから運行 A' も W を警邏しており，$a'_1(t) \leq a'_2(t) \leq \cdots \leq a'_m(t)$ であるから A' は順序保存運行である．

2.1 節と 2.2 節はまとめられそう？「なるべく右に」が共通なので説明をまとめられるかも。「一番左の巡査をなるべく右に動かす」で解決できる場合とできない場合、という説明ができる。

2.1 許容訪問間隔がすべて等しい場合

この設定に関しては、やはり Collins et al. との関係を述べるべきではないか？

本節では次のことを示す．

定理 2.1. グラフの形状が Line で許容訪問間隔がすべて等しい場合，協力警邏問題は多項式時間で解くことができる．

初めに次の補題を示す．

補題 2.2. 頂点 v_i がある 1 人の巡査 s により単独警備されているとき，許容訪問間隔を q_i として，s は常に区間 $[v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$ にいる．

↑「単独警備」は Coene らの非協力警邏問題の定義に出て来たものであることを述べる。それを十分うまく述べれば多分、読者が「なるほど、Line かつ Q 一定のときは、要するに協力する意味がなくなったから簡単になったのだな」と（2.2 節の冒頭には書いてあるが、既にこの時点で）自然に納得できるように書けるのでは？

証明. この区間にない或る座標 $v_{\mathrm{out}} \notin [v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$ を s が時刻 t_0 に訪問するとする．v_{out} と v_i の間の移動には少くとも時間 $|v_i - v_{\mathrm{out}}| > q_i/2$ を要するから，s は区間 $[t_0 - q_i/2, t_0 + q_i/2]$ に属する時刻に v_i を訪問できない．この区間の長さは q_i であるので，s が v_i を単独警備していることに反する． □

これにより次の補題が成り立つ．

補題 2.3. グラフの形状が Line で，全頂点の許容訪問間隔がすべて Q であるとする．頂点集合 W が警邏可能であるとする．このとき，W を警邏する運行であって，各巡査が W の頂点を左端とする長さ $Q/2$ の区間を往復するものが存在する．人数？

証明. 巡査数 m に関する帰納法で示す．$m = 0$ のときは明らかなので，以下 $m > 0$ とする．

m 人の巡査により警邏可能な頂点集合 W が与えられたとき，2 章の初めで述べたように W を警邏する m 人の巡査による順序保存運行 A が存在する．W の頂点のうち最も左にあるものを v_l とする．A 名づけるタイミング？

まず，すべての巡査は $[v_l, +\infty)$ に存在するとしてよい．なぜなら，v_l より左に存在することがある巡査はその時間 v_l で停止するようにしても，W は警邏されるためである．

ここで，v_l に注目する．いま，A は順序保存運行であり，どの巡査も v_l より左には進まないので，一番左側を動く巡査 u_1 以外の巡査が v_l に存在するときは，u_1 も v_l に存在する．よって v_l は u_1 により単独警備される．

一方，u_1 はこの区間を最高速度 1 で往復することでこの区間に含まれるすべての頂点を警備することができる．実際，u_1 がこのような往復をするとき $v_l \le x \le v_l + Q/2$ である位置 x に存在する時刻の間隔の最大値は

$$\max(2(x - v_l), 2(v_l + Q/2 - x)) \le 2(v_l + Q/2 - v_l) = Q$$

より，$[v_l, v_l + Q/2]$ に含まれるどの頂点も許容訪問間隔を超えずに訪問できていることが分かる．

したがって，補題 2.2 より u_1 が動ける範囲は $[v_l, v_l + Q/2]$ に含まれるが

よって，残りの巡査は $W^- := \{v \in W \mid v_l + Q/2 < v\}$ を警備すればよいことが分かる．

W^- の頂点はすべて u_1 以外の巡査達によって警邏可能であったので，帰納法の仮定より，巡査が W^- の頂点を左端とする長さ $Q/2$ の区間を往復するようにできる． □

補題 2.3 により，各巡査の動きとしては頂点の座標 v_i を左端とする区間 $[v_i, v_i + Q/2]$ を往復するもののみを考えれば良い．n 個の区間 $I_i := [v_i, v_i + Q/2]$ について各区間に含まれる点から得られる利得の合計 P_i を求めておき，m 個（m は巡査の人数）の区間を選び利得の合計を最大化する問題を解けばよい．各区間 I_i の利得 P_i は $v_1, v_2, \ldots, v_n$ がソートしてあるので $O(n)$ で求めることができる．m 個の区間を選び利得の和を最大化する問題は，以下の漸化式 1 に従う動的計画法で $O(mn)$ で最大の利得を得られる m 個の区間を選択できる．$OPT(i,j)$ は，区間 $I_1, \ldots, I_j$ から最大 i 個の区間を選ぶときの利得の合計の最大値を表す．$OPT(m,n)$ が求めたい利得の最大値となる．

$$OPT(i,j) = \begin{cases} 0 & i = 0 \text{ または } j = 0 \text{ のとき} \\ \max\{OPT(i,j-1), P_j + OPT(i-1,j-1)\} & \text{その他} \end{cases} \tag{1}$$

このアルゴリズム（←どこから算法の説明が始まったのか明確にせよ。）の計算量は最初のソートも含めて全体で $O(n \log n + nm)$ である．これで定理 2.1 が示された（←どこから定理 2.1 の証明を始めたのか明確にせよ。）．

ちなみにこの証明では線分には端の頂点が存在することが重要な役割を果たしているので，閉路の場合にそのまま適用することはできない．

2.2　許容訪問間隔が一般の場合

許容訪問間隔がすべて等しい場合は結局どの頂点も複数の巡査の協力で警備する必要がないので単純になっていたが，許容訪問間隔が一般の場合は，ある許容訪問間隔が短い頂点を複数の巡査が交代で訪問することで警備すると最大の利得が得られる例が存在する．図 1 は横軸を頂点の座標，縦軸を時刻として t-x 平面に巡査の軌跡を書いたものであるが，左から許容訪問間隔が $8, 2, 2, 3, 6$ である 5 つの頂点が存在するとき，左図のような動きを繰り返せば中央の許容訪問間隔の短い頂点を協力して警備することで全点を警備できる．左の巡査は許容訪問間隔が 8 である頂点をより短い時間 6 ごとに訪問しているが，このようにあえて早めに戻る動きをすることで右の巡査との協力が効率よくなっており，右図のように仮に左の巡査が許容訪問間隔ぎりぎりまで右の方へ動き頂点をなるべく多く訪問して左端へ帰る動き方をすると右の巡査がどのような動き方をしても訪問間隔が許容訪問間隔を超え警備できない頂点が生まれてしまう．この例は，協力が発生する場合巡査の動きを個別に決定するのは難しいということを示唆している．

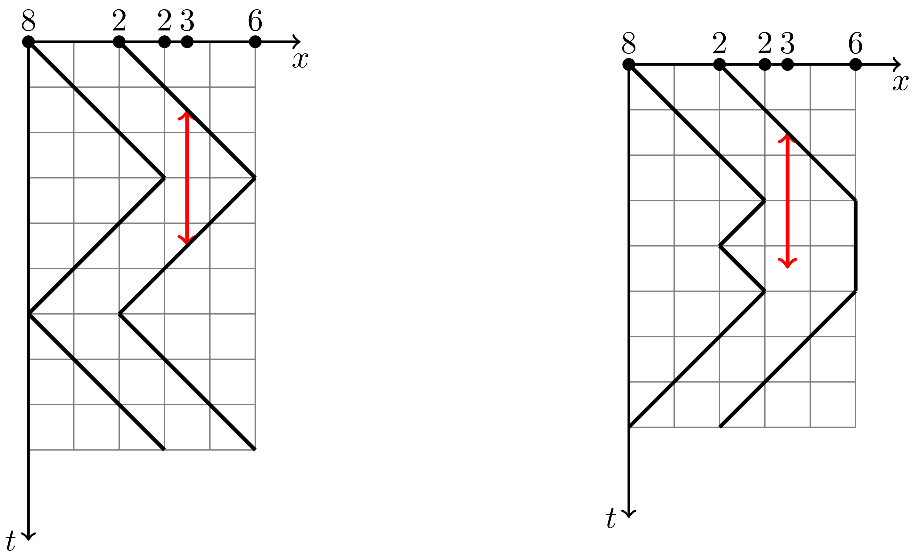

図 1　巡査の協力が必要な例

ここでは「間隔は厳密だが剰余の指定なし」に関する結果はないのだから、二段階に分けて説明する必要がないのでは。つまり、いきなり「間隔は厳密で、剰余の指定あり」の状況、あるいは更に定理 2.4 の状況に飛んだ方がすっきりするのでは。→そこで我々は許容訪問間隔の代わりに「厳密訪問間隔」というものを考え，各頂点を警備するにはその点の厳密訪問間隔ちょうどごとの時刻には訪問しなければならないという問題も考えた．

この「あえて短い間隔で訪問する」ことで得をしにくいような設定では，さらに各頂点を訪問しなければならない最初の時刻も指定されるならば，「できる限り右の方へ動く戦略」で Line の全点警備可能性を判定するができることを示した．実際にはより一般的に，Line 上の訪問しなければならない座標と時刻のペアが有限個指定されている場合について全点警備可能性判定問題を解くことができる．

定理 2.4. グラフの形状が Line で，各頂点 x_i に対し訪問しなければならない時刻 $t_{i,1}, t_{i,2}, \ldots, t_{i,N_i}$ が指定されているとき，(t, x) の集合？「できる限り右の方へ動く戦略」で巡査を左側から 1 人ずつ割り当てることで全点警備可能性判定問題を解くことができる．

「できる限り右の方へ動く戦略」は，次のように定義する．

まず，図 2 のように t-x 平面の点 $a = (t_a, x_a)$ に対して領域 $L(a), R(a)$ を

$$R(a) := \{(t, x) \mid -x + x_a + t_a < t < x - x_a + t_a\}$$
$$L(a) := \{(t, x) \mid (t, x) \notin R(a)\}$$

と定義する．$R(a), L(a)$ を $R(t_a, x_a), L(t_a, x_a)$ のようにも書くことにする．

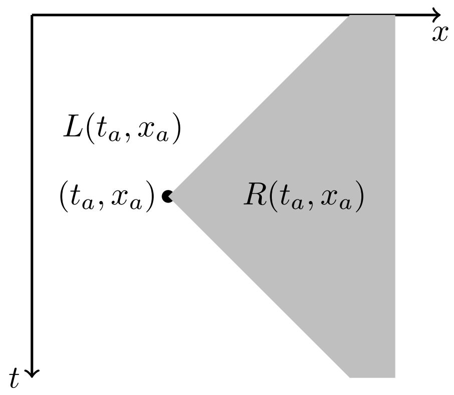

図 2　$L(t_a, x_a)$ と $R(t_a, x_a)$ の定義

t-x 平面上の点の集合 X' が与えられたとき，X' のどの点 a に対する右側の三角形の領域 $R(a)$ にも含まれない領域 $\bigcap_{a \in X'} L(a)$ の（右の）境界線が軌跡であるような動き方を「できる限り右の方へ動く戦略」と定義する．定理 2.4 は，与えられた巡査のうち一番左を動く巡査 s_1 が（初期順序を保つ動き方において）どのような動き方をしたとしても「できる限り右の方へ動く戦略」で s_1 が訪問する点の一部しか訪問できないという意味で「できる限り右の方へ動く戦略」は s_1 の最適な動き方であり，この動き方で 1 人ずつ巡査の

動きを左側から定めることができるので巡査の必要最小数が分かるという主張である．

ここを編集中

証明←何の？．全頂点を警備する任意の順序保存運行 A で一番左側を動く巡査 s_1 の軌跡を考える．もし t-x 平面上のある点 (t_a, x_a) から定まる $R(t_a, x_a)$ に含まれる点 (t_b, x_b) を s_1 の軌跡が通っているとすると，s_1 は $|x_a - x_b| > |t_a - t_b|$ より時刻 t_a に座標 x_a を訪問できないので s_1 が一番左側を動くことから (t_a, x_a) が訪問されない点となってしまい矛盾する．よって，A で一番左側を動く巡査 s_1 の軌跡は $\bigcap_{a \in X'} L(a)$ に含まれる．$L(X') := \bigcap_{a \in X'} L(a)$ とする．

一方，この領域 $L(X')$ の境界線は傾き 1 または -1 の線分のつながったものであるので，s_1 はこの境界線が軌跡となるように動くことができ，そのようにすることで $L(X')$ に含まれるすべての点を訪問でき A での s_1 の動きを改善できる．$s_2, s_3, \ldots, s_m$ の動き方も X' 　の残りの点に対して s_1 のときと同様に決めていくことで A での動きを改善できる．

ここを編集中

□

3 Star

グラフの形状が Star の場合については，利得か許容訪問間隔のいずれかが一般であれば，協力警邏問題は巡査が 1 人であっても NP 困難であることがわかっている [2]．そこで，ここでは巡査数が一般であって，利得と許容訪問間隔がすべて等しい場合を考える．巡査同士が協力をしない設定では，DecisionPP に相当する問題←定義？でこの場合が NP 困難になることが Coene ら [2] により示されているが，協力を許す設定では多項式時間で解くことができる．

定理 3.1. グラフの形状が Star で利得と許容訪問間隔がすべて等しい場合，協力警邏問題は多項式時間で解くことができる．

証明．編集中

巡査数を m, 全頂点の許容訪問間隔を Q, 頂点 v_i に接続する枝を e_i, その長さを d_i とする．

まず，$d_i > Q/2$ であるような頂点 v_i は，警備するならば巡査が 1 人常駐するとしてよい．これは次のように示される．(i) ある運行において v_i が 1 人の巡査 s により単独警備

されるとすると，v_i を訪問してから別の頂点 v_j を訪問して再び v_i に戻ってくるには $2d_i$ 以上の時間がかかり $2d_i > Q$ より v_i が警備できなくなってしまうため v_i 以外の頂点を警備することができないので v_i のみを警備すればよく，これは v_i に常駐すれば十分である．(ii) もし v_i が 2 人以上の巡査により警備されるとすると，ある巡査 s_a が時刻 t_a に v_i を訪問してから時間 Q 以内の時刻 t_b に別の巡査 s_b が v_i を訪問するという状況が発生するが，s_a が枝 s_b は端点 v_i を含む枝 e_i 上のある点に同時に存在するような時刻が s が s は s' とすれ違うことなく v_i 以外の頂点を訪問

2 人の巡査がすれ違う動きは互いに動きを交換して引き返す動きに変換しているとすると s と s' が枝 e_i 上で 1 度以上すれ違わない限り s' が v_i を訪問するときには s も v_i を訪問しているので，v_i は s のみにより警備できており，s も v_i 以外を警備していない動きとなる．

また，全頂点は利得と許容訪問間隔がすべて等しいので，枝の短い頂点から選んでよい．実際，ある警邏において警備している頂点 v_i と警備していない頂点 v_j であって枝の長さが $d_i > d_j$ となっているようなものがあったとき，v_j を訪問していた時刻に代わりに v_i を訪問するようにすべての巡査の動きを変えることができる．

よって，あとは隣接している枝の短い頂点から何個の頂点を選べるかを計算できればよい．はじめに，頂点を枝の長さの昇順でソートし，枝の短いものから順に $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする．これらを枝の長さが $Q/2$ 以下のグループ $V_1 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ とそれ以外のグループ $V_2 = \{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ に分ける．V_2 の頂点は，V_1 の全頂点を $m-1$ 人以下の巡査により警備できる場合のみ，残りの巡査の人数分 V_2 の頂点を選び 1 人ずつ巡査を常駐させることで警備すればよいので，まず V_1 のすべての頂点を警備できる最小の巡査数 m' を求める必要がある．

$m' \leq m$ であれば利得（警備できる頂点数）は $k + (m - m')$ となる．$m' > m$ であれば V_1 のうち

□

4 Unit

定理 3.1 から Star の特殊な場合とみなせる Unit も巡査 1 人で利得と許容訪問間隔がすべて等しい場合は協力警邏問題が P であることがすぐに分かるが，許容訪問間隔さえすべて等しければ巡査数と利得が一般の場合でも協力警邏問題が P となる．これは，警備のコストとなる辺の長さと許容訪問間隔の両方が全点で等しいことによって単純に利得

の大きい頂点から選べばよいためである．

4.1 許容訪問間隔がすべて等しい場合

4.2 許容訪問間隔が一般の場合

Unit で許容訪問間隔がすべて等しい場合は P であることを示せたが，許容訪問間隔が一般の場合は多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しかったため，ここでも Line のときのように，最初の訪問時刻からその厳密訪問間隔ごとの時刻は必ず訪問しなければならないという問題をここでも考えてみる．

1. 最初の訪問時刻も指定されるときの協力警邏問題は独立点集合問題からの帰着で NP 困難．
2. 全点警備可能性判定なら 1 人のときは P（おまけ）．
3. 最初の訪問時刻が指定されず自由度がある場合は Disjoint Residue Class Problem と同じ問題になるので NP 困難（おまけ）．

4.2.1 厳密訪問間隔の場合

許容訪問間隔を厳密訪問間隔に替えた問題では巡査が 1 人の場合でも Unit 上での DecisionPP が NP 困難となる．

定理 4.1. グラフの形状が Unit で，厳密訪問間隔が与えられたときに，最初の訪問時刻からその厳密訪問間隔ごとの時刻は必ず訪問しなければならないという制約の場合，巡査が 1 人でも DecisionPP が NP 困難である．

証明. Disjoint Residue Class Problem [4] からの帰着による．

ある整数のペアの集合 $\{(m_1, r_1), \ldots, (m_n, r_n)\}$ が Disjoint Residue Class であるとは，任意の整数 x に対して $x \equiv r_i \mod m_i$ となるような i が高々 1 つ存在することと定義される．Disjoint Residue Class Problem とは整数の組 $(m_1, \ldots, m_n)$ が与えられたときに，$\{(m_1, r_1), \ldots, (m_n, r_n)\}$ が Disjoint Residue Class となるような組 $(r_1, \ldots, r_n)$ が存在するかを判定する問題であり，これは NP 困難であることが知られている [4].

Disjoint Residue Class Problem は，巡査 1 人，グラフの形状が Unit で厳密訪問間隔ごとの時刻は必ず訪問しなければならないという制約での DecisionPP に多項式時間帰着できる．Disjoint Residue Class Problem の入力が $(m_1, \ldots, m_n)$ のとき，Unit で頂点を $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, 厳密訪問間隔を $q_i = m_i$, 辺の長さを $d = 1$ とする．$d = 1$ より

整数の時刻にいずれかの点を訪問できるようにする．各頂点 v_i の最初の訪問時刻を r_i とすると，この点を警備するために訪問しなければならない時刻の列は $q_ik + r_i(k \in \mathbb{N})$ で与えられるが，全点を警備するためには任意の 2 点 $v_i, v_j \in V$, 任意の整数 k, l について $q_ik + r_i \neq q_jl + r_j$ である必要がある．

Disjoint Residue Class Problem の解 $(r_1, \ldots, r_n)$ が存在するならば，これにより任意の時刻 $t \in \mathbb{Z}$ に対して $t \equiv r_i \mod q_i$, すなわち $t = r_i + q_ik$ となる $k \in \mathbb{Z}$ が存在するような i は高々 1 つであり，任意の $k, l \in \mathbb{Z}$ に対して $q_ik + r_i \neq q_jl + r_j$ が成り立つので，巡査は全点を警備できる．

逆に DecisionPP の解が存在するとき，全点を警備できるのでその警邏において各頂点 v_i を最初に訪問する時刻を r_i とすると，任意の $v_i, v_j \in V$, $k, l \in \mathbb{Z}$ に対し

$$q_ik + r_i \neq q_jl + r_j \tag{2}$$

が成り立つ．すると，任意の時刻 $t \in \mathbb{Z}$ に対して $t \equiv r_i \mod q_i$ となるような i が 2 つ存在するとすると，それを i, j として $t \equiv r_i \mod q_i$, $t \equiv r_j \mod q_j$ すなわち，ある整数 k, l が存在して $t = q_ik + r_i$, $t = q_jl + r_j$ となり，この k, l によって $q_ik + r_i = q_jl + r_j$ となり，式 2 に矛盾する．よって，任意の整数 t に対して $t \equiv r_i \mod q_i$ を満たす i は高々 1 つであるような r_i が与えられたので，DecisionPP の解が存在するとき，Disjoint Residue Class Problem にも解が存在する．

以上より Disjoint Residue Class Problem を帰着できた． □

4.2.2 最初の訪問時刻指定，厳密訪問間隔

今，最初の訪問時刻には自由度があり厳密訪問間隔だけが指定される問題を考えたが，さらに最初の訪問時刻も与えられる問題も考えることができる．

定理 4.2. グラフの形状が Unit で巡査が 1 人の場合，最初の訪問時刻と厳密訪問間隔が与えられて最初の訪問時刻からその厳密訪問間隔ごとの時刻は必ず訪問しなければならないという問題の場合，DecisionPP は P である．

証明. まず，Unit の辺の長さを d とする．各 i について正整数 q_i と整数 r_i とが与えられ，集合 $S_i = \{q_ik + r_i : k \in \mathbb{Z}\}$ に属する時刻に頂点 v_i を訪問することが要求される． （定義済？→）DecisionPP が Yes である（＝全頂点を警備できる）ことは，連続した訪問しなければならない時刻の差がすべて移動時間 d 以上であること，すなわち任意の相異なる i，j について S_i に属するどの時刻と S_j に属するどの時刻も差が d 以上であることを意味する．これは任意の 2 頂点 $v_i, v_j \in V$ と任意の整数 k, l に対して

$|(q_i k + r_i) - (q_j l + r_j)| \geq d$ という条件となり（←「$(i, k) = (j, l)$ の場合を除いて」が必要？），これは任意の整数 n に対して $|(r_i - r_j) + gcd(q_i, q_j)n| \geq d$ と同値であり，左辺の最小値を考えると $|r_i - r_j|$ を $gcd(q_i, q_j)$ で割った余り a と $gcd(q_i, q_j) - a$ のうち小さい方が d 以上かを計算すればよい．この計算は定数時間であり ${}_nC_2$ 通りこれを調べればよい． □

DecisionPP で巡査を複数とすると，T に差が d 未満の整数が含まれていても複数の巡査によりそれぞれ訪問できる場合が生じるため難しい．

DecisionPP では巡査が 1 人ならば多項式時間アルゴリズムが存在したが，一方協力警邏問題は巡査が 1 人でも（複数人でも）NP 困難となる．

定理 4.3. グラフの形状が Unit で，最初の訪問時刻と厳密訪問間隔が与えられたときに，最初の訪問時刻からその厳密訪問間隔ごとの時刻は必ず訪問しなければならないという問題の場合，巡査が 1 人で利得がすべて等しい場合でも協力警邏問題は NP 困難である．

証明．最大独立点集合問題からの帰着による．

最大独立点集合問題は，無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられたときに独立点集合で最大のものを求める問題で NP 完全であることが知られている．この問題において，間に辺の存在する 2 頂点の両方を選ぶことはできないという制約を，協力警邏問題において 2 頂点のどちらか一方しか警備できないという制約に帰着する．

まず Unit の辺の長さを $d = 1$ とする．これにより巡査がちょうど速さ 1 で動くとすると各頂点の訪問にかかる時間は 1 となり，Unit なのですべての整数の時刻にどれか 1 点を訪問できる．その上で，厳密訪問間隔 q_i，最初の訪問時刻 r_i は整数，利得はすべて 1 とする．Unit の頂点集合は V とする．頂点 v_i を警備するために訪問しなければならない時刻の列は $q_i k + r_i$ $(k \in \mathbb{N})$ で表される．すると，v_i と v_j の両方を警備できる必要十分条件は

$$q_i k + r_i = q_j l + r_j$$

すなわち

$$r_i - r_j = q_j l - q_i k$$

となる自然数 k, l が存在しないこととなるが，これは $r_i - r_j = gcd(q_i, q_j)n$ となる整数 n が存在しないことと同値である．よって，v_i と v_j の両方を警備できる必要十分条件は $r_i \not\equiv r_j \mod gcd(q_i, q_j)$ となる．

ここで，${}_nC_2$ 個の相異なる素数 $p_{ij} (1 \leq i < j \leq n)$ を用意し，各頂点の厳密訪問間隔を $q_i = p_{1i} p_{2i} \cdots p_{(i-1)i} p_{i(i+1)} \cdots p_{in}$ とすると，$gcd(q_i, q_j) = p_{ij}$ （$i < j$ のとき）とな

り，先ほどの条件は $r_i \not\equiv r_j \mod p_{ij}$ となる．

G において $(v_i, v_j) \in E$ ならば $r_i \equiv r_j \equiv 0 \mod p_{ij}$, $(v_i, v_j) \notin E$ ならば $r_i \equiv 0, r_j \equiv 1 \mod p_{ij}$ と定めると，各 r_k に対して相異なる $n-1$ 個の素数で割ったときの余りが与えられるので，中国剰余定理からそのような r_k がその $n-1$ 個の素数の積 q_k を法として一意に存在することが言え，これにより，$(v_i, v_j) \in E$ ならば $r_i \equiv r_j \mod p_{ij}$ $(v_i, v_j) \notin E$ ならば $r_i \not\equiv r_j \mod p_{ij}$ を満たすように各 r_k を定めることができる

最後に，${}_nC_2$ 個の相異なる素数を用意する計算量も確かめる必要がある．k 番目に小さい素数を P_k と書くと，$k \geq 6$ のときは $P_k < k(\ln k + \ln\ln k)$ であることが知られているため [**?**]，$k(\ln k + \ln\ln k)$ までの自然数を順に素数かどうか判定していくことで k 個以上の素数を得ることができる．ある数が素数であるかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムは存在するので [**?**]，${}_nC_2$ 個の素数の列挙は n の多項式時間でできる．

以上の手順で q_k と r_k を設定することにより，G において最大の独立点集合を求める問題を，最初の訪問時刻が指定され周期ちょうど毎に訪問しなければならない問題で巡査が 1 人で利得がすべて等しい場合の協力警邏問題に帰着できた． □

参考文献

[1] K. Chen, A. Dumitrescu, and A. Ghosh. On fence patrolling by mobile agents. In *Proc. 25th Canadian Conference on Computational Geometry* (CCCG), 2013.

[2] S. Coene, F. C. R. Spieksma, and G. J. Woeginger. Charlemagne's challenge: the periodic latency problem. *Operations research*, 59(3), pp. 674–683, 2011.

[3] J. Czyzowicz, L. Gąsieniec, A. Kosowski, and E. Kranakis. Boundary patrolling by mobile agents with distinct maximal speeds. In *Proc. 19th Annual European Symposium on Algorithms* (ESA), LNCS 6942, pp. 701–712, 2011.

[4] A. Kawamura and M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. In *Proc. Ninth International Conference on Algorithms and Complexity* (CIAC), LNCS 9079, pp. 261–273, 2015.