これに対し，定理 2.1 は利得最大化問題である点警邏問題が多項式時間で解けるという主張である．

以降では，地図が Line で全点の放置限度が等しい場合，次に定義する独立往復運行という単純な運行によって最大利得が得られることを示す．

定義 2.2. 地図 (U,V) が Line で全点の放置限度が q とする．点 $v_i \in V$ を左端とする長さ $q/2$ の区間 $[v_i, v_i+q/2]$ を S_i と書く．運行 $A=(a_1,\dots,a_m)$ が独立往復運行であるとは，各 a_i $(i \in \{1,\dots,m\})$ が $S_1,\dots,S_n$ のいずれかを往復する運行であって，$a_1,\dots,a_m$ の往復区間が互いに重複していないことである．

こう言ってしまうと巡査が多すぎるときに独立往復運行ができなくなり補題2.4が成立たないのでは？

補題 2.3. 点 v がある一人の巡査 s により単独警邏されているとき，放置限度を q として，s は常に区間 $[v-q/2, v+q/2]$ にいる．

一度しか使はなくなったのであれば補題2.4の証明に入れてしまってよい？

証明　この区間にない或る位置 $v_{\mathrm{out}} \notin [v-q/2, v+q/2]$ を s が時刻 t_0 に訪問するとする．v_{out} と v の間の移動には少なくとも時間 $|v-v_{\mathrm{out}}| > q/2$ を要するから，s は区間 $[t_0-q/2, t_0+q/2]$ に属する時刻に v を訪問できない．この区間の長さは q であるので，s が v を単独警邏していることに反する．□

補題 2.4. 地図 (U,V) が Line で全点の放置限度が等しいとする．V の任意の部分集合 W について，W が巡査 m 人により警邏可能ならば W は巡査 m 人による独立往復運行で警邏~~可能である~~．
される

証明　巡査数 m に関する帰納法で示す．全点の放置限度を q とする．$m=0$ のときは明らかなので，以下 $m>0$ とする．

W は m 人の巡査により警邏可能であるので，2 節始めの議論により W を警邏する m 人の巡査による順序保存運行が存在する．このような運行を任意に一つ選び $A=(a_1,\dots,a_m)$ とする．

W の点のうち最も左にあるものを u とする．まず，各巡査は u より左に存在する時間 u で停止するように変換する．このようにしても W は警邏されたままであり，またこれによりすべての巡査は区間 $[u,+\infty)$ に存在することになる．

ここで，A で最も左を運行する巡査 1 に注目する．順序保存であることから u が A により訪問されるすべての時刻に巡査 1 は u を訪問しているので，u は a_1 により単独警邏されている．補題 2.3 より，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対し $a_1(t) \le u+q/2$ である．一方，巡査 1 が区間 $[u, u+q/2]$ を速さ 1 で往復する運行 a_1' を行うと，a_1' はこの区間に含まれるすべての点を警邏する．実際，$u \le x \le u+q/2$ である位置 x が運行 a_1' により訪問される間隔の最大値は $\max(2(x-u), 2(u+q/2-x)) \le 2(u+q/2-u) = q$ より，$[u, u+q/2]$ に含まれるどの点も放置限度を超えずに訪問できていることが分かる．よって，a_1 で警

訪問

このことが次頁「また…」の理由であることがわかるように書く

トル（一度しか使わない文字・定義は
なるべく取り除こう）

ただ，ここでは W^- を使って
次の「帰納法の仮定から」がどういうことなのか
ハッキリ言った方がよいかもしれない

「ので：変換できる」は因果関係がちょっとヘンで？

邏できていた点はすべて a'_1 で警邏できている．

また，~~$W^- := \{v \in W \mid u + q/2 < v\}$~~ は A で巡査 1 以外の $m-1$ 人の巡査により警邏されているので，帰納法の仮定から残る $m-1$ 人の巡査も独立往復運行に変換することができる．以上により W を警邏する m 人の巡査による独立往復運行が得られた． □

補題 2.4 により，地図 (U, V) が Line で全点の放置限度が等しい場合は独立往復運行のみを考えればよい．よって，区間 $S_1, \ldots, S_n$ $(S_i := [v_i, v_i + q/2], v_i \in V)$ から m 人の巡査がそれぞれ担当する重複のない m 個の区間のうち利得の合計が最大となるものを求め，それらに含まれる点を求めればよい．これは以下のアルゴリズムにより求めることができる．

トル　(これを残す)　の　の　各

初めに Line 上の点をソートしておき，左側から順に $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする．~~n 個の区間 $S_1, \ldots, S_n$ について各区間~~ S_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ に含まれる点から得られる利得の合計 $P_i := \sum_{v_j \in S_i} p_j$ を求める．各区間 S_i ~~$(i \in \{1, \ldots, n\})$ について，~~ トル S_i と重複部分のない区間の添え字のうち i 未満で最大のもの（存在しない場合は 0 とする）を求め，h_i と書く．$v_1, \ldots, v_n$ がソートしてあるので $P_1, \ldots, P_n$ と $h_1, \ldots, h_n$ を合計 $O(n)$ で求めることができる．次に，漸化式 (2.1) に従う動的計画法で利得の合計が最大となる重複のない m 個の区間を選ぶ（m は巡査数）．$OPT(k, l)$ は，区間 $S_1, \ldots, S_l$ から最大 k 個の重複のない区間を選ぶときの利得の合計の最大値を表す．$OPT(m, n)$ が全体の利得の最大値となる．

これらの記述の前後関係が変では？

$$OPT(k, l) = \begin{cases} 0 & k = 0 \text{ または } l = 0 \text{ のとき} \\ \max\{OPT(k, l-1), P_l + OPT(k-1, h_l)\} & \text{それ以外の場合} \end{cases} \tag{2.1}$$

字間
こういうときは
\mathit{OPT}
などとしましょう

最後に，$OPT(m, n)$ において選ばれた区間をトレースバックして求め，この区間に含まれる点全体を出力して終了する．

このアルゴリズムの計算量は全体で $O(n \log n + nm)$ となる．これで定理 2.1 が示された．

なお，2.1 節の冒頭で上げた Collins らの問題の線分の場合でも独立往復運行は最適となることが示されている [5, Theorem 2.1].

どういう意味か
説明．

2.2 放置限度が一般の場合

全点の放置限度が等しい場合は，結局巡査がそれぞれ区間を 1 つずつ担当し往復する運行のみ考えればよいという単純な状況になっていたが，放置限度が一般の場合は，一部の点を複数の巡査が訪問して警邏する必要がある場合が存在する．図 2.1（左）の例では，中央の放置限度の短い 2 つの点は 2 人の巡査に訪問されており，また，全点の放置限度が

他に合せるなら これは見出しつき説明ではなく 単に Line の定時問題と呼べばよい.

線分定時訪問判定問題. 正の整数 m と n 個の自然数の組 $(q_i, r_i, x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ が与えられる．集合 $\{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ を m 個以下の運行可能集合に分割できるか判定せよ．

線分定時訪問判定問題は以下に示す貪欲アルゴリズムにより解くことができる．

まず，地図が Line の場合は順序保存運行を考えることができるのと同様に，順序保存（運行可能）分割を考えることができる．分割 $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_h\}$ が順序保存であるとは，$\mathcal{P}$ に対応する運行 $A = (a_1, \ldots, a_h)$ であって順序保存なものが存在すること，あるいは，

$$L(t, x) := \{(t', x') \mid |x - x'| > |t - t'| \text{ かつ } x' < x\} = \{(t', x') \mid x - x' > |t - t'|\}$$

として，任意の P_i $(i \in \{1 \ldots, h\})$ について，領域 $\bigcup_{(t,x)\in P_i} L(t, x)$ に P_j $(i < j)$ の点が存在しないことと定義される．

$X := \{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ の任意の順序保存分割のうち一番左の集合は順序保存分割の定義から $\mathfrak{P}_1 := \{(t, x) \in X \mid L(t, x) \cap X = \emptyset\}$ の部分集合となる．よって，X の最小の順序保存分割であって一番左の集合が $\mathfrak{P}_1$ であるようなものが存在する．同様に，残りの $X \setminus \mathfrak{P}_1$ の最小の順序保存分割であって一番左の集合が $\mathfrak{P}_2 := \{(t, x) \in X \setminus \mathfrak{P}_1 \mid L(t, x) \cap X \setminus \mathfrak{P}_1 = \emptyset\}$ であるようなものが存在する．このように，集合 X の左側から貪欲に運行可能集合を取り出していく操作を再帰的に繰り返すと，最小の順序保存分割 $\{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_h\}$ が得られる．これを $\mathfrak{P}(X)$ と書くことにする．線分定時訪問判定問題の判定は $|\mathfrak{P}(X)| \leq m$ が成り立つかの判定をすればよい．

以下では，集合 $S \subseteq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に対して $S_{[a:b)} := \{(t, x) \in S \mid a \leq t < b\}$ と定義する．

$q_1, \ldots, q_n$ が整数であるので X は時刻（組 $(t, x) \in X$ の第 1 要素）について周期的であり，その周期は $q_1, \ldots, q_n$ の最小公倍数 T となる（すなわち，任意の整数 k に対して，$(t, x) \in X_{[kT:(k+1)T)}$ と $(t - kT, x) \in X_{[0:T)}$ が同値である)．従って，前述の貪欲な分割 $\mathfrak{P}(X)$ の各要素 $\mathfrak{P}_i$ $(i \in \{1, \ldots, h\})$ も同様に時刻について周期的である（すなわち，任意の $\mathfrak{P}_i$ と整数 k に対して，$(t, x) \in \mathfrak{P}_{i[kT:(k+1)T)}$ と $(t - kT, x) \in \mathfrak{P}_{i[0:T)}$ が同値である)．よって，X の最小の運行可能分割 $\mathfrak{P}(X) = \{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_h\}$ の大きさを計算するには，$X_{[0:T)}$ の運行可能分割 $\{\mathfrak{P}_{1[0:T)}, \ldots, \mathfrak{P}_{h[0:T)}\}$ を計算できればよい．

ここで，$\mathfrak{P}(X_{[0:T)})$ と $\mathfrak{P}(X)$ の大きさは必ずしも一致しないことに注意する必要がある．前述の貪欲な分割の仕方で集合 S から左端の運行可能集合 $s' := \{(t, x) \in S \mid L(t, x) \cap S = \emptyset\}$ を取り出すとき，s' の点 (t, x) の条件は領域 $L(t, x)$ に S の点が存在しないことである．X を $\mathfrak{P}(X)$ へ分割するときと「同じ条件で」$X_{[0:T)}$ を分割する（すなわち，$X_{[0:T)}$ を $\{\mathfrak{P}_{1[0:T)}, \ldots, \mathfrak{P}_{h[0:T)}\}$ に分割する）には，$X' := \{(t, x) \in X \mid (t', x') \in X_{[0:T)}$ が存在して $(t, x) \in L(t', x')\}$ として $\mathfrak{P}(X')$ を求めればよい．以下の有限集合 F の分割 $\mathfrak{P}(F)$ を与える最小運行可能分割アルゴリズム の入力として X' を与

第 3 章

Star

トル

地図が Star の場合については，利得か放置限度のいずれかが一般であれば，点警邏問題は巡査が一人であっても NP 困難であることが知られている [4, Theorems 5 and 6]．よってここでは，巡査数が一般であって全点の利得と放置限度が等しい場合についての次のことを示す．

定理 3.1. 地図が Star で全点の利得と放置限度が等しい場合，点警邏問題は（巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

補題

独立点警邏問題においては，地図が Star で巡査数が一般の場合は利得と放置限度がすべて等しくても NP 困難になることが Coene らにより示されている [4, Theorem 10]．Line の場合では複雑な協力による警邏があり得たこと（2.2 節）から考えると，単独警邏の条件を外した点警邏問題の方が簡単に解けるというのは意外な結果に思われる．これは，Star の場合，独立点警邏問題では単独警邏の条件のためにうまく点集合を分割しなければならないことが難しさを生み NP 困難になるのに対し，点警邏問題では単独警邏の条件が無いことで後述の~~定理~~ 3.3 の証明中に述べる単純な運行が可能となるためである．

図 1.2，1.3 で注意したように Star の中心は警邏すべき点ではないが，本節では中心と点 v を結ぶ辺（両端点を含む）を e_v，その長さを d_v と書く．

トル

補題 3.2. Star において，放置限度 q の点 v が警邏されているならば，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対し，長さの和が $\min(2d_v, q)$ であるような互いに交わらない有限個の時刻区間の合併 $J \subseteq [t, t+q)$ が存在し，J に属するすべての時刻において少なくとも一人の巡査が辺 e_v 上にいる．

証明　もし $2d_v > q$ ならば，常に e_v 上に巡査が存在する．何故なら，もし e_v 上に巡査がいない時刻 τ があれば，長さ $2d_v$ の時刻区間 $(\tau - d_v, \tau + d_v)$ にわたって v が放置され，仮定に反するからである．よって $J = [t, t+q)$ とすればよい．以下では $2d_v \leq q$ とする．

警邏の条件から v は時刻区間 $[t, t+q)$ に少なくとも 1 回訪問される．もしその訪問時刻のうち $[t+d_v, t+q-d_v)$ に属するもの τ があれば，長さ $2d_v$ の時刻区間 $J = [\tau-d_v, \tau+d_v]$ にわたって巡査は辺 e_v 上におり，これは $[t, t+q)$ に含まれる．

そうでないとき，v は $[t, t+d_v)$ か $[t+q-d_v, t+q)$ に少なくとも 1 回訪問される．(i) $[t, t+d_v)$ に訪問されるとき，$[t, t+d_v)$ に属する最後の訪問時刻を τ とすると，点 v の警邏の条件と場合分けの条件から τ の次の訪問時刻 σ は $t+q-d_v < \sigma \leq \tau+q$ を満たす．τ と σ それぞれの前後 d_v の時間のうち $[t, t+q)$ に含まれる時刻区間 $J = [t, \tau+d_v] \cup [\sigma-d_v, t+q)$ にわたって巡査は辺 e_v に存在し，その長さは $q - \max(0, (\sigma-d_v)-(\tau+d_v)) = \min(q, q-\sigma+\tau+2d_v) \geq 2d_v$．(ii) $[t+q-d_v, t+q)$ に 1 回以上訪問されるときも i と同様． □

(i)

補題 3.3. 地図が Star で全点の放置限度が q のとき，点集合 V の部分集合 W が m 人の巡査により警邏可能であるには，

$$\sum_{v \in W} \min(2d_v, q) \leq mq \tag{3.1}$$

が成立つことが必要十分である．

証明 十分であることを示す．(3.1) が成り立つとき，m 人の巡査の運行 $(a_1, \ldots, a_m)$ を次のように定めれば W の全点を警邏可能である．$W' := \{v \in W \mid 2d_v \geq q\}$, $l := m - |W'|$ とする．まず，$|W'|$ 人の巡査 $s_{l+1}, \ldots, s_m$ は W' の各点に一人ずつ停止しこれを警邏する．巡査 $s_1, \ldots, s_l$ は速さ 1 で動きながら $W \setminus W'$ の全点をちょうど 1 度ずつ訪問する巡回を繰り返す．このとき，巡査 s_i は巡査 s_1 より時間 $(i-1)q$ 遅れて同じ運行を行うようにする（すなわち，$a_i(t) = a_1(t-(i-1)q)$ となるように運行を定める）．中心点と点 v の 1 回の往復には $2d_v$ の時間を要するので，一人の巡査がある点から出発し速さ 1 で $W \setminus W'$ の全点を 1 度ずつ訪問して最初の点に戻ってくるのにかかる時間は $\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v$ である．この時間は $\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v = \sum_{v \in W} \min(2d_v, q) - |W'|q \leq (m - |W'|)q$ より $(m - |W'|)q$ 以下となるので $(m - |W'|)q$ 人の巡査が先ほどの巡回を行うと，$W \setminus W'$ のどの点も時間 q 以上放置されない．これにより W の全点が警邏される．

全巡査の動きを同時に言おうとして文が混乱している気がする

第一文ではまず巡査1の動きだけ言うとよいのでは？

必要であることを示す．W が m 人の巡査により警邏されているとすると，補題 3.2 より，各点 $v \in W$ について，どの長さ q の時間にも $\min(2d_v, q)$ の時間は少なくとも一人の巡査が e_v 上に存在する．よって，W の全点の警邏には時間 q あたり合計 $\sum_{v \in W} \min(2d_v, q)$ の巡査の時間を要する．巡査は同時に 2 つ以上の辺上には存在できないので，全点警邏しているならば (3.1) が成り立つ． □

補題 3.3 より Star の任意の点部分集合 W が警邏可能であるかを W の点の隣接辺の長さだけから簡単に計算できることが分かった．定理 3.1 では，全点の利得と放置限度が等

コンマ 移動

次頁「ので」の後へ