塀の警邏

河村彰星（東京大学)

平成 27 年 8 月

所与の領域を守備，監督，保守するなどの目的で，一人ないし複数の巡査がくまなく動きまわり，域内のあらゆる場所を十分な頻度で訪れるようにすることを**警邏**（patrolling）という [2, 3, 6, 10, 15]．基本的な行動計画問題の一つであり，領域の形や巡査の能力といった状況設定に応じて様々な戦略が論ぜられてきたが，旧来は理論的というより実験による分析が多かった．

近年になって最適解や近似率についての研究が進み，極めて基本的な状況においてさえ警邏が非自明な問題であることが判ってきた [9]．本稿では複数の巡査による警邏のうち，領域といっても一次元的な形状（塀）つまり線分や円周を，点で表される巡査が動くという最も単純な場合についての研究の現状を，小林佑輔氏，副島真氏と筆者の共同研究 [12, 13] を含め紹介する．

1　線分の警邏

Czyzowicz ら [6] は次の問題を考えた．

問題 1. k 人の巡査を使って線分状の塀を警邏したい．各巡査の速さの上限 v_1，⋯，v_k が与えられている．塀の任意の点 x と任意の時刻 $t \in \mathbb{R}$ に対し，或る巡査が x を区間 $[t, t+1)$ 内の時刻に訪れるようにしたい．塀をどれだけ長くできるか．

図に描くなら，塀を水平に置き時間を縦軸にして全巡査の軌跡を表すとき，単位長の垂直な線分を置く隙間ができないようにしたいわけである．

なおここでは各点を放置してよい時間を 1 として塀をなるべく長くする問題としたが，逆に塀の長さを一定として最大放置時間を短くするとしても，適切に全体の動きを拡縮して考えれば同じことである．また，時刻を $\mathbb{R}$ ではなく片側にのみ無限な $[0, \infty)$ とする論文もあるが，長さの上界を問う上では違いがない [13]．

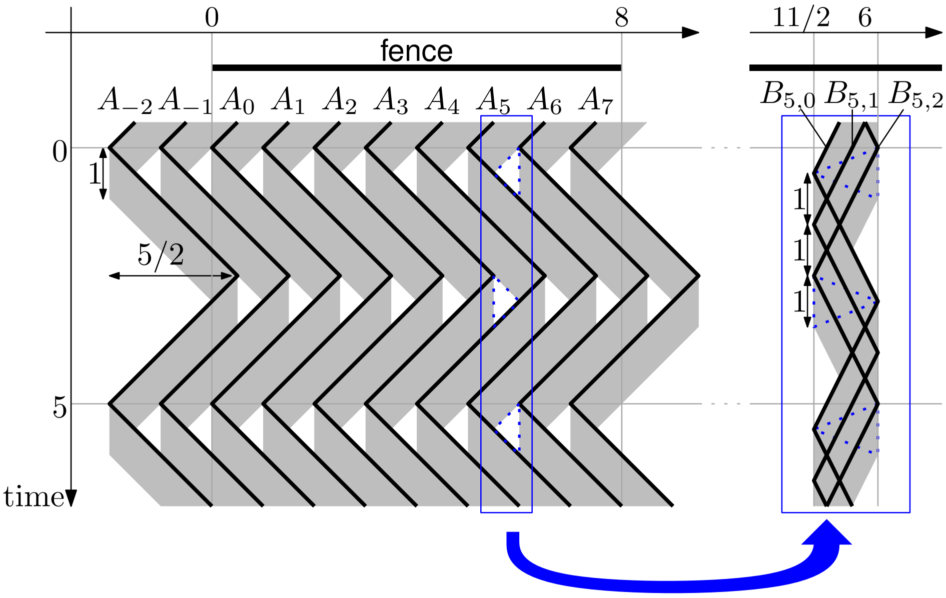

図 1　速さ 1 の 10 人の巡査 A_i（$-2 \le i < 8$，左図）と速さ 1/5 の 24 人の巡査 $B_{i,j}$（$1 \le j \le 3$，右図は $i = 5$ のみ）が周期 5 の動きで長さ 8 の線分を警邏している．実線が各巡査の経路であり，灰色は「過去 1 単位時間に巡査が訪れた場所」．同じ巡査らが按分戦略に従うと警邏できる線分の長さは 7.4 である．

問題 1 に対して最も素朴なのは次の戦略だろう．

按分戦略． 塀を k 個の区間に分割して第 i 区間の長さを $v_i/2$ とし，これを第 i 巡査が往復する．これにより全長 $(v_1 + \cdots + v_k)/2$ の塀を警邏できる．

この 2 倍である $v_1 + \cdots + v_k$ を超える長さの塀が警邏できないことは，先述のような図で各巡査が担当できる面積を考えると比較的容易にわかる [6]．つまり按分戦略は 2 近似である．

Czyzowicz ら [6] は按分戦略が常に最適であると予想したが，河村と小林 [12] により否定された．即ち巡査の速さ v_1，…，v_k の組と，それらの巡査の動かし方であって，按分戦略よりも僅かに長い塀を警邏するものが見つかったのである（図 1――但しこの例は [13] から取った）．

なお按分戦略は，巡査の速さが皆同じである場合や，異なっていても巡査が三人以内である場合には，最適であることがわかっている [12]．

按分戦略の近似率，つまり「按分戦略の c 倍以上の長さの塀は決して警邏できない」が成立つような最小の（巡査の人数によらない）定数 c を決定したい．すぐわかるのは

$1 \leq c \leq 2$ であり，Czyzowicz ら [6] は $c = 1$ と予想していたわけである．河村と小林による反例では $c \geq 42/41$ がわかり，この下界は 25/24 に [1, 8]，次いで 4/3 に [13] 高められた．河村と副島 [13] は $c = 4/3$ と予想しているが，今の所 $c < 2$ であることすら示されていない．

2　周の警邏

塀が平面上の領地の囲いである場合も考えよう．これも Czyzowicz ら [6] が提示した問題である．

問題 2. k 人の巡査を使って円周状の塀を警邏したい．各巡査の速さの上限 v_1，…，v_k が与えられている．但し巡査は左廻りにしか動けない．塀上の各点 x と各時刻 $t \in \mathbb{R}$ に対し，或る巡査が x を区間 $[t, t+1)$ 内の時刻に訪れるようにしたい．塀をどれだけ長くできるか．

線分警邏における按分戦略に相当するこの場合の単純な戦略として，Czyzowicz ら [6] は次のものを考え，巡査が四人以内であればこれが最適であることを示し，一般にも最適であろうと予想した．

等間隔戦略． 一般性を失わず $v_1 \geq \cdots \geq v_k$ とする．最も速い r 人を等間隔に置いて一斉に速さ v_r で動かす（その他の巡査は使わない）ことで，長さ rv_r の円周を警邏できる．この r を最適に選ぶと長さ $\max rv_r$ の円周を警邏できる．

しかし Dumitrescu ら [8] は反例として，速さ 1，1/2，1/3，1/4，…の巡査（のうち初めの 32 人）が長さ 1 を超える円周を警邏する動き方を与えた．

とはいえこのような周長には（巡査の人数によらない）上限がある，即ち等間隔戦略は定数近似であると Dumitrescu と Tóth [9] は予想している．河村と副島 [13] はこれを等価な予想に言換えた上で計算機での探索により近似率が 1.05 以上であることを示したが，予想そのものは未解決である．

なお Czyzowicz ら [6] は巡査が両方向に動けるとした問題も取り上げ，実際に行きつ戻りつする動きにより長い円周を警邏できるようになる場合が存在することを示している．

3　拡張など

以上は領域が線分や円周であり，点である巡査がその全域を警邏するという極めて単純な場合であった．様々な拡張が考えられる．尤ももとの単純な場合でさえ既述のように非自明であるので，一般の状況で厳密な最適解を得ることは望み難い．まずは巡査の人数や速さの種類が少い場合などに限定したり，何らかの近似を与えることができないか考えたりすることになろう．また状況設定だけでなく目的についても，ここまでで扱った塀の最長化（或いは最長放置時間の最短化）に加えて「警備される場所をなるべく多くする」「巡査をなるべく少くする」などの変種が考えられるし，戦略を見出そうとするのみならず関連問題の計算量を明らかにする研究もある．以下の文献でもそのような状況や目的がまちまちであるが，広く警邏の最適化に関する研究として紹介する．

Collins ら [3] は，巡査の動く領域は本稿と同じく線分や円周であるが，その一部のみが警備すべき場所として指定される状況を扱っている．もし巡査の速さが皆同じであれば按分（といっても等分であるが）戦略をこの状況にも一般化でき，それが最適であることを示している．

これを更に極端にして円周上の一点のみを警備する状況を考え，但し巡査がこの点に留まることを許しては無意味なので常に正の速さで進むものとすると，巡査の速さの上限とは要するに一度この点を訪れてから次に訪れるまでに最低かかる時間間隔を定めていることになる．この点警邏 [13] も基本的な問題設定といえよう．

領域の形状を線分や閉路などよりも一般のグラフにするならば，警備すべき対象を辺 [15] とすることも頂点 [11, 14] とすることも考えられる．更に，許される放置時間を場所ごとに設定する（或る場所は他よりも重要なので頻繁に訪れるべきであるとする）[4]，巡査ごとに設定する（或る巡査は他よりも「強い」ので彼の訪問後は長く放置してよいとする）[12] といった問題もある．

巡査が単なる点ではなく一定の視野を有したり [1, 7]，ただ移動するときは警戒しつつ移動するときよりも速く動けたり [5] する設定も現実的には自然だろう（但し [5] で扱っているのは警邏でなく一回限りの訪問である）．また按分戦略のように単純な戦略であれば各巡査が局所的な知識や単純な処理能力しかもたなくても或る程度は実現できるが [14, 15]，より高度な動きをそのような分散状況で実現できるかというのも興味深い問である．

参考文献

[1] K. Chen, A. Dumitrescu, and A. Ghosh. On fence patrolling by mobile agents. In *Proc. 25th Canadian Conference on Computational Geometry* (CCCG), 2013.

[2] Y. Chevaleyre. Theoretical analysis of the multi-agent patrolling problem, In *Proceedings of IEEE/WIC/ACM International Conference on Intelligent Agent Technology* (IAT), 2004, pp. 302–308.

[3] A. Collins, J. Czyzowicz, L. Gąsieniec, A. Kosowski, E. Kranakis, D. Krizanc, R. Martin, and O. Morales Ponce. Optimal patrolling of fragmented boundaries, In *Proc. 25th ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures* (SPAA), 2013, pp. 241–250.

[4] S. Coene, F. C. R. Spieksma, and G. J. Woeginger. Charlemagne's challenge: The periodic latency problem. *Operations Research*, 59(3), 674–683, 2011.

[5] J. Czyzowicz, L. Gąsieniec, K. Georgiou, E. Kranakis, and F. MacQuarrie. The beachcombers' problem: walking and searching with mobile robots, arXiv:1304.7693, 2013.

[6] J. Czyzowicz, L. Gąsieniec, A. Kosowski, and E. Kranakis. Boundary patrolling by mobile agents with distinct maximal speeds. In *Proc. 19th European Symposium on Algorithms* (ESA), 2011, LNCS 6942, pp. 701–712.

[7] J. Czyzowicz, E. Kranakis, D. Pajak, and N. Taleb. Patrolling by robots equipped with visibility. In *Proc. 21st International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity* (SIROCCO), 2014, LNCS 8576, pp. 224–234.

[8] A. Dumitrescu, A. Ghosh, and C. D. Tóth. On fence patrolling by mobile agents. *Electronic Journal of Combinatorics*, 21, P3.4, 2014.

[9] A. Dumitrescu and C. D. Tóth. Computational Geometry Column 59. *ACM SIGACT News*, 45(2), 2014.

[10] Y. Elmaliach, A. Shiloni, and G. A. Kaminka. A realistic model of frequency-based multi-robot polyline patrolling. In *Proc. Seventh International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems* (AAMAS), 2008, pp. 63–70.

[11] B. Gorain and P. S. Mandal. Approximation algorithms for sweep coverage in wireless sensor networks. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 74, 2699–2707, 2014.

[12] A. Kawamura and Y. Kobayashi. Fence patrolling by mobile agents with distinct speeds. *Distributed Computing*, 28(2), 147–154, 2015.

[13] A. Kawamura and M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. In *Proc. Ninth International Conference on Algorithms and Complexity* (CIAC), 2015, LNCS 9079, pp. 261–273.

[14] F. Pasqualetti, A. Franchi, and F. Bullo. On optimal cooperative patrolling. In *Proc. 49th IEEE Conference on Decision and Control* (CDC), 2010, pp. 7153–7158.

[15] V. Yanovski, I. A. Wagner, and A. M. Bruckstein. A distributed ant algorithm for efficiently patrolling a network. *Algorithmica*, 37, 165–186, 2003.