H29.12.25 09:00 Fp訂

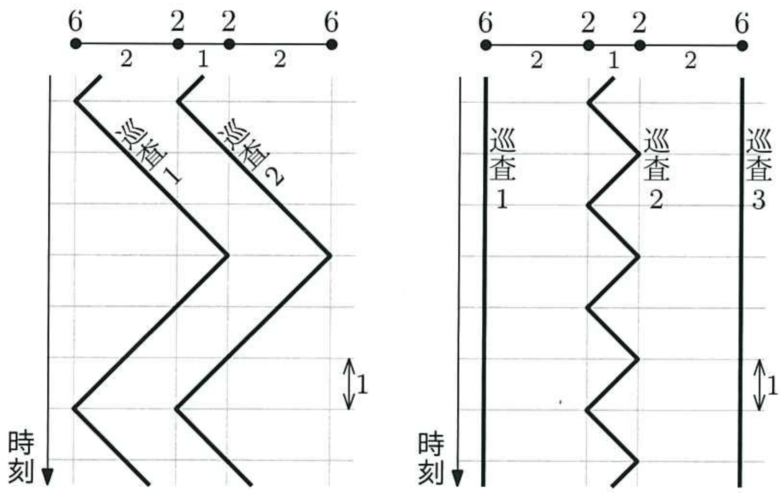

図 1　図の上部に描かれている四点からなるグラフの全点を警邏する二つの運行．頂点と辺に書かれた数は，それぞれ訪問間隔上限と距離である．左図の運行では二人の巡査が協力して中央の二点を間隔 2 で警備している．これを禁じ，各点がいずれかの巡査により単独警備されることを求める場合は，右図のように三人の巡査を要する．

警邏問題．巡査の人数 $m \in \mathbf{N}$ と距離空間 U 内の点集合 V および V の各点の利得と訪問間隔上限が与えられる．m 人の巡査により警邏可能な V の部分集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．

距離空間 U といっても，V の点同士の測地距離のみが重要である．そこでこの問題の入力は，V を頂点集合とし辺に非負整数の長さがついた無向グラフと考えることにする．

この問題は，巡査が一人かつ全点の利得と訪問間隔上限が等しい場合に限っても，ハミルトン路問題からの帰着により NP 困難である [4, Theorem 8]．そこでグラフの形状を限ったときにどのようになるかを調べる．

ツメル

一つの頂点が複数の巡査の訪問により警備され得ることに注意されたい．例えば図 1 左はそのような運行の例である．Coene ら [4] は似た問題を扱っているが，このような協力を許さず，図 1 右のように各頂点を専ら一人の巡査が「担当」することを要求している．つまり，各頂点 $v \in W$ が単独警備される（すなわち或る一人の巡査がおり，その巡査のみの運行が $\{v\}$ を警邏する）ことを要求しているのである．対比のため本稿ではこの問題を独立警邏問題と呼ぶことにする（[4] では MPLPP と称している）．Coene ら [4] の諸結果においては，この単独警備という限定が，多項式時間算法の設計にも困難性の証明にも重要な役割を果している．この限定を外したときの様子を調べるのが本稿の目的である．

本稿ではグラフの形状として線分，星と，すべての枝の長さが等しい完全グラフの 3 種

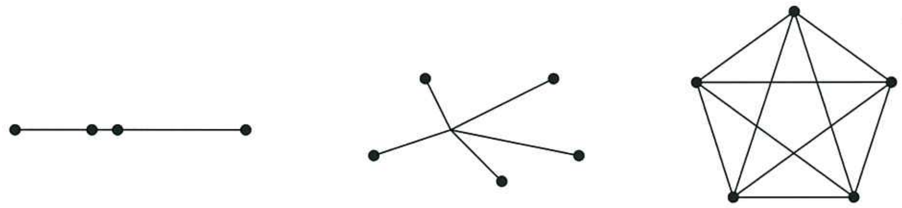

図 2　本論文では Line（左），Star（中），Unit（右，但し各辺の長さが等しい）を扱う．Star は葉のみを警備の対象とする（中央の点は移動の途中で使うのみであり，訪問間隔上限は定められていない）．

類を扱うこととし（図 2），以降はそれぞれを Line, Star, Unit と呼ぶ．Star では葉のみに訪問間隔上限が定められている（中心は警備の対象としない）．辺の長さがすべて d である Unit のグラフは同じ頂点数で辺の長さがすべて $d/2$ である Star のグラフの場合に帰着できることから，Unit は Star の特殊な場合である．

警邏問題についての我々の結果を Coene らの独立警邏問題についての結果との比較も含めてグラフの形ごとにまとめると次のようになる．それぞれ 2, 3, 4 節で述べる．

- グラフが Line の場合は，独立警邏問題は動的計画法により多項式時間で解けることが示されていた [4, Theorem 11] が，その正しさは単独警備という設定に強く依存している．本稿では警邏問題について，全点の訪問間隔上限が等しい場合には多項式時間で解けることを示す（定理 2.1）．
- グラフが Star の場合は，全点の利得と訪問間隔上限が等しい場合に限っても，独立警邏問題は NP 困難であることが示されていた [4, Theorem 10]．本稿では，この場合の警邏問題は多項式時間で解けるという興味深い結果を得る（定理 3.1）．なお利得または訪問間隔上限を一般にすると，巡査が一人であっても（したがって独立かどうかによらず）NP 困難であることがわかっている [4, Theorems 5 and 6]．
- グラフが Unit の場合は，本稿では全点の訪問間隔上限が等しい場合は警邏問題が多項式時間で解けることを示す（定理 4.1）．グラフが Star の場合は全点の訪問間隔上限が等しくても利得が一般だと NP 困難になるので，これにより Unit は Star よりも簡単に解ける場合となっていることが分かる．

何が未解決と言ってるのか解りにくいかも

Line と Unit については訪問間隔上限が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しく未解決である．これらの未解決な状況については，訪問間隔上限の代わりに指定時刻を警備の条件とする次のような問題を考えた．

・○○かどうか判らなかった
・○○と予想だが示せてない
のように述べるとか

定義 1.1. 運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が点 $v \in U$ を指定時刻 $(q, r) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ で警備すると

これまでの警邏用語の定義を地の文でやっていたのと合せるなら見出しを立てない？

既にグラフの話と言ってあるのだから
逐一距離空間と言うのは
大袈裟な気がする

は，任意の時刻 $t := qk + r$ $(k \in \mathbf{Z})$ に対し巡査 i が存在し $a_i(t) = v$ であることをいう．

時刻指定警邏問題． 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および各点の利得，警備の条件として指定時刻が与えられる．m 人の巡査により警邏可能な V の部分集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．

時刻指定警邏判定問題． 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および警備の条件として各点の指定時刻が与えられる．m 人の巡査により V を警邏可能か判定せよ．

Line については時刻指定警邏判定問題を解く貪欲アルゴリズムを示す（定理 2.6）．Unit については時刻指定警邏問題が NP 困難であることを示す（定理 4.2）．

関連研究

［文章化，引用の追加］

警邏に関する問題には様々な設定が考えられている．

［メモ］

- 警邏問題を考える動機
  - 巡査が障害物を含む 2 次元平面内を動き回り警備するという目的の問題において，障害物を含む 2 次元平面をグラフに簡略化して考えるというところから，グラフの頂点を警備するという問題が考えられていた [11].
  - （なぜ図形として Line, Star, Unit を考えたか？） → Line は塀の警邏などの文脈でよく現れるため．Star は高さが 1 の木であり，グラフが木である場合の警邏問題の困難性の評価に有用な図形である．
  - （なぜ訪問間隔上限を警備の条件にしたか？）→ Coene らの先行研究と似た設定を考えたかったため（自然な条件なのであまり説明しなくてよさそう？）
  - 頂点を通過するだけで警備したことになる設定だが，より一般に時間 $d \geq 0$ 滞在しなければならないとしたらどうか？ → 点 p を警備するのに時間 d 滞在しなければならないという条件は，p から長さ $d/2$ の辺を伸ばした先の点 p' を代わりに警備対象とするグラフを入力とする警邏問題に帰着できる．
  -
  -
- 問題設定の大枠について
  - 現実世界の平面上を動く巡査の警備のモデル化として，警備対象が存在する部

定義 2.2. グラフが Line で全頂点の訪問間隔上限が Q とする．V のいずれかの頂点を左端とする長さ $Q/2$ の区間を往復する運行を独立往復運行と呼ぶ．巡査 m 人による運行 A が独立往復運行であるとは，A の各運行が独立往復運行であることをいう．

補題 2.3. 頂点 v_i がある一人の巡査 s により単独警備されているとき，訪問間隔上限を q_i として，s は常に区間 $[v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$ にいる．

証明　この区間にない或る座標 $v_{\mathrm{out}} \notin [v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$ を s が時刻 t_0 に訪問するとする．v_{out} と v_i の間の移動には少なくとも時間 $|v_i - v_{\mathrm{out}}| > q_i/2$ を要するから，s は区間 $[t_0 - q_i/2, t_0 + q_i/2]$ に属する時刻に v_i を訪問できない．この区間の長さは q_i であるので，s が v_i を単独警備していることに反する．□

補題 2.4. グラフが Line で，全点の訪問間隔上限が等しいとする．頂点集合 V の任意の部分集合 W について，W が巡査 m 人により警邏可能ならば W は巡査 m 人による独立往復運行で警邏可能である．

証明　巡査数 m に関する帰納法で示す．全点の訪問間隔上限を Q とする．$m = 0$ のときは明らかなので，以下 $m > 0$ とする．

W は m 人の巡査により警邏可能であるので，2 節始めの議論により W を警邏する m 人の巡査による順序保存運行が存在する．このような運行を任意に一つ選び $A = (a_1, \ldots, a_m)$ とする．

W の点のうち最も左にあるものを y とする．まず，各巡査は y より左に存在する時間 y で停止するように変換する．このようにしても W は警邏されたままであり，またこれによりすべての巡査は区間 $[y, +\infty)$ に存在することになる．

巡査1？

ここで，最も左に存在する巡査 1 に注目する．順序保存であることから y が A により訪問されるすべての時刻に巡査 1 は y を訪問しているので，y は a_1 により単独警備されている．補題 2.3 より，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対し $a_1(t) \le y + Q/2$ である．一方，巡査 1 が区間 $[b, b + Q/2]$ を速さ 1 で往復する運行 a'_1 を行うと，この区間に含まれるすべての点を警備することができる．実際，運行が a'_1 とすると巡査 1 $y \le x \le y + Q/2$ である位置 x に存在する時刻の間隔の最大値は $\max(2(x - y), 2(y + Q/2 - x)) \le 2(y + Q/2 - y) = Q$ より，$[y, y + Q/2]$ に含まれるどの点も訪問間隔上限を超えずに訪問できていることが分かる．一方，$W^- := \{v \in W \mid y + Q/2 < v\}$ は A で巡査 1 以外の $m - 1$ 人の巡査により警備されているので，帰納法の仮定から残る $m - 1$ 人の巡査も独立往復運行に変換することができる．以上により W を警邏する m 人の巡査による独立往復運行が得られた．□

？

重なりがある区間のお得は
二重には貰えないので
「合計」というのはちょっと
語弊がある

コレ が
コレ よりも 早く現れる
べき？

補題 2.4 により，Line のグラフで全点の訪問間隔上限が等しい場合は独立往復運行のみを考えればよい．頂点 $v_1, \ldots, v_n$ に対応する長さ $Q/2$ の区間を $S_1, \ldots, S_n$ から m 人の巡査がそれぞれ担当する m 個の区間のうち利得の合計が最大となるものを求めればよい．これは以下のアルゴリズムにより求めることができる．

「とする」？

初めに Line 上の頂点をソートしておき，左側から順に $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする．頂点 v_i を左端とする区間を $\boxed{S_i := [v_i, v_i + Q/2]}$ と書く．巡査数を m とする．

まず，n 個の区間 $S_1, \ldots, S_n$ について各区間 S_i $(i \in \{1, \ldots, n\}$ に含まれる点から得られる利得の合計 $P_i := \sum_{v_j \in S_i} p_j$ を求める．$P_1, \ldots, P_n$ は $v_1, v_2, \ldots, v_n$ がソートしてあるので合計 $O(n)$ で求めることができる．次に利得の合計が最大になる m 個の区間を選ぶ．漸化式 (1) に従う動的計画法で $O(mn)$ で最大の利得を得られる m 個の区間を選択できる．$OPT(i, j)$ は，区間 $S_1, \ldots, S_j$ から最大 i 個の区間を選ぶときの利得の合計の最大値を表す．$OPT(m, n)$ が全体の利得の最大値となる．

}) 閉じ括弧

$$OPT(i, j) = \begin{cases} 0 & i = 0 \text{ または } j = 0 \text{ のとき} \\ \max\{OPT(i, j-1), P_j + OPT(i-1, j-1)\} & \text{それ以外の場合} \end{cases} \tag{1}$$

ここ [illegible] ルします

最後に，$OPT(m, n)$ において選ばれた区間をトレースバックして求め，この区間に含まれる頂点全体を出力して終了する．

このアルゴリズムの計算量は全体で $O(n \log n + nm)$ となる．これで定理 2.1 が示された．□

これに対応する証明の始まりは？

文字 i の意味が変わるのが若干キモチワルイ

2.2 訪問間隔上限が一般の場合

全点の訪問間隔上限が等しい場合は，結局巡査がそれぞれ区間を 1 つずつ担当し往復する運行のみ考えればよいという単純な状況になっていたが，訪問間隔上限が一般の場合は，一部の頂点を複数の巡査が訪問して警備する必要がある場合が存在する．図 3（左）の例では，中央の訪問間隔上限の短い 2 つの頂点は 2 人の巡査に訪問されており，また，全点の訪問間隔上限が等しい場合に反して各巡査の最適な運行はなんらかの区間の往復であるとは限らないことも分かる．

また，この例では左の巡査は左端の点を訪問間隔上限ちょうどごとに訪問しているが，一方，図 3（中央）の例では，左側の巡査は左端の点をあえてより短い周期で訪問することで全点を警邏している．図 3（中央）と同じ入力に対して，図 3（右）のように左の巡査が左端の点の訪問間隔上限ぎりぎりの時間まで右の方へ動き左端へ帰る運行を行うと 2 人の巡査がうまく協力できず全点の警備ができない．このように，補題 2.4 のときのよう

これは意味が（数学的に定義されてないという点で）曖昧なので「定理」とは言い難い

定理 2.6. 時刻指定線分警邏判定問題を解く貪欲アルゴリズムが存在する．

証明　グラフが Line の場合は順序保存運行を考えることができるのと同様に，順序保存（運行可能）分割も考えることができる．分割 $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_l\}$ が順序保存であるとは，$\mathcal{P}$ に対応する運行 $A = (a_1, \ldots, a_l)$ であって順序保存なものが存在すること，あるいは，

$$L(t,x) := \{(t', x') \mid |x - x'| > |t - t'| \text{ かつ } x' < x\} = \{(t', x') \mid x - x' > |t - t'|\}$$

として，任意の P_i $(i \in \{1 \ldots, l\})$ について，領域 $\bigcup_{(t,x) \in P_i} L(t,x)$ に P_j $(i < j)$ の点が存在しないこととと定義される．

$X := \{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ の任意の順序保存分割のうち一番左の集合は順序保存分割の定義から $\mathfrak{P}_1 := \{(t,x) \in X \mid L(t,x) \cap X = \emptyset\}$ の部分集合となる．よって，X の最小の順序保存分割であって一番左の集合が $\mathfrak{P}_1$ であるようなものが存在する．同様に，残りの $X \setminus \mathfrak{P}_1$ の最小の順序保存分割であって一番左の集合が $\mathfrak{P}_2 := \{(t,x) \in X \setminus \mathfrak{P}_1 \mid L(t,x) \cap X \setminus \mathfrak{P}_1 = \emptyset\}$ であるようなものが存在する．このように，集合 X の左側から貪欲に運行可能集合を取り出していく操作を再帰的に繰り返すと，最小の順序保存分割 $\{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_l\}$ が得られる．これを $\mathfrak{P}(X)$ と書くことにする．時刻指定線分警邏判定問題の判定は $|\mathfrak{P}(X)| \leq m$ が成り立つかの判定をすればよい．

以下では，集合 $S \subseteq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に対して $S[a:b) := \{(t,x) \in S \mid a \leq t < b\}$ と定義する．

$q_1, \ldots, q_n$ が整数であるので X は時刻（組 $(t,x) \in X$ の第 1 要素）について周期的であり，その周期は $q_1, \ldots, q_n$ の最小公倍数 T となる（すなわち，任意の整数 k に対して，$(t,x) \in X[kT : (k+1)T)$ と $(t - kT, x) \in X[0:T)$ が同値である）．従って，前述の貪欲な分割 $\mathfrak{P}(X)$ の各要素 $\mathfrak{P}_i$ $(i \in \{1, \ldots, l\})$ も同様に時刻について周期的である．X の最小の運行可能分割 $\mathfrak{P}(X) = \{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_l\}$ の大きさを計算するには，$X[0:T)$ の運行可能分割 $\{\mathfrak{P}_1[0:T), \ldots, \mathfrak{P}_l[0:T)\}$ を計算できればよい．

ここで，$X[0:t)$ の分割 $\mathfrak{P}(X[0:T))$ と $\mathfrak{P}(X)$ の大きさは必ずしも一致しないことに注意されたい．$X[0:T)$ の運行可能分割 $\{\mathfrak{P}_1[0:T), \ldots, \mathfrak{P}_l[0:T)\}$ を計算するには，前述の貪欲な分割の仕方で集合 S から左端の運行可能集合 $s' := \{(t,x) \in S \mid L(t,x) \cap S = \emptyset\}$ を取り出すとき，s' の点 (t,x) の条件は領域 $L(t,x)$ に S の点が存在しないことである．よって，X を $\mathfrak{P}(X)$ へ分割するときと“同じ条件で”$X[0:T)$ を分割するには，以下の有限集合 F の分割 $\mathfrak{P}(F)$ を与える最小運行可能分割アルゴリズム の入力として $\bigcup_{(t,x) \in X[0:T)} L(t,x)$ を与えればよい．あとは，出力された分割 $\mathcal{P}$ の各要素を $[0:T)$ に制限すれば $X[0:T)$ の分割 $\{\mathfrak{P}_1[0:T), \ldots, \mathfrak{P}_l[0:T)\}$ が得られる．

最小運行可能分割アルゴリズム． 入力を有限集合 F とする．初期値を $\mathcal{P} = \{\}$, $F' = F$

と，v を訪問した τ 以前で最後の時刻と τ 以後で最初の時刻の間隔は $2d_v \geq Q$ より長いため，v が警備されていることに反する．

2. $2d_v < Q$ のとき，長さ Q の時間区間 $[t, t+Q)$ を任意に選ぶ．警備の条件から v は $[t, t+Q)$ に少なくとも 1 回訪問されるが，その時刻によって以下の場合を考える．
   (a) $[t+d_v, t+Q-d_v)$ に 1 回以上訪問されるとき，その訪問時刻を任意に 1 つ選び τ とすると τ の前後の合計 $2d_v$ 以上の時間は巡査は辺 e_v 上に存在し，これは $[t, t+Q)$ に含まれる．
   (b) $[t+d_v, t+Q-d_v)$ に 1 回も訪問されないときは，$[t, t+d_v)$ か $[t+Q-d_v, t+Q)$ に少なくとも 1 回訪問される． (i) $[t, t+d_v)$ に 1 回以上訪問されるとき，$[t, t+d_v)$ に含まれる最後の訪問時刻を τ とすると，点 v の警備の条件と場合分けの条件から τ の次の訪問時刻 σ は $t+Q-d_v < \sigma \leq \tau + Q$ を満たす．τ と σ それぞれの前後 d_v の時間のうち $[t, t+Q)$ に含まれる $[t, \tau+d_v], [\sigma - d_v, t+Q)$ には巡査が辺 e_v に存在し，その時間の合計は $((\tau+d_v)-t)+((t+Q)-(\sigma-d_v)) = 2d_v + (Q-(\sigma-\tau)) \geq 2d_v$ より $2d_v$ 以上となる．(ii) $[t+Q-d_v, t+Q)$ に 1 回以上訪問されるときも 2 (b) i と同様．

補題 3.3. グラフが Star のときの警邏問題において，全点の訪問間隔上限が Q のとき，点集合 V の部分集合 W が m 人の巡査により警邏可能であるには，

$$\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ \tag{2}$$

が成立つことが必要十分である．

とは？

証明　十分であることを示す．(2) が成り立つとき，m 人の巡査の運行を次のように定めれば W の全点を警邏可能である．$W' := \{v \in W \mid 2d_v \geq Q\}$ とする．まず，$|W'|$ 人の巡査が W' の各点に一人ずつ停止しこれを警備する．残りの $m-|W'|$ 人の巡査は，速さ 1 で動きながら $W \setminus W'$ の全点をちょうど 1 度ずつ訪問する巡回を繰り返す．このとき，W' の警備にあたっていない $m-|W'|$ 人の巡査のうち巡査 i は巡査 1 より時間 $(i-1)Q$ 遅れて同じ運行を行うようにする（すなわち，$a_i(t) = a_1(t-(i-1)Q)$ となるように運行を定める）．中心点と点 v の 1 回の往復には $2d_v$ の時間を要するので，一人の巡査がある点から出発し速さ 1 で $W \setminus W'$ の全点を 1 度ずつ訪問して最初の点に戻ってくるのにかかる時間は $\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v$ である．$\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v = \sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) - |W'|Q \leq (m-|W'|)Q$

よりこの時間は $(m-|W'|)Q$ 以下となるので $(m-|W'|)Q$ 人の巡査が先ほどの巡回を行うと，どの点も時間 Q 以上放置されない．これにより W の全点が警備される．

必要であることを示す．W が m 人の巡査により警邏されているとすると，補題 3.2 より，各点 $v \in W$ について，どの長さ Q の時間にも $\min(2d_v, Q)$ の時間は少なくとも一人の巡査が e_v 上に存在する．よって，W の全点の警備には時間 Q あたり合計 ? $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q)$ の巡査の時間を要する．各巡査は時間 Q の間にいずれか 1 つの点の訪問に時間を使う必要があるので，(2) が成り立つ． □

補題 3.3 より Star の任意の点部分集合 W が警邏可能であるかを W の点の隣接辺の長さだけから簡単に計算できることが分かった．定理 3.1 では，全点の利得と訪問間隔上限が等しい場合を考えているので警邏する部分集合としては隣接辺の短い点から順に選べばよく（隣接辺のより長い点 v_1 とより短い点 v_2 があるとき，v_1 を警備して v_2 を警備しない運行は常に v_1 を警備する代わりに v_2 を警備する運行に変換できる），警邏可能な最大の部分集合を求める計算は点の数を n として $O(n \log n)$ となる．以上から定理 3.1 が示された．

4 Unit

「って」?

1 節で述べたように Unit は Star の特殊な場合とみなせるため，全点の利得と訪問間隔上限が等しい場合は定理 3.1 に従う．警邏問題を多項式時間で解くことができる．ここでは，Unit で全点の訪問間隔上限が等しい場合の警邏問題が（利得が一般でも）多項式時間で解けることを示す（定理 4.1）．

訪問間隔上限が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しかったため，2 節で扱った時刻指定警邏問題を再び考える．グラフが Unit の場合は時刻指定警邏問題が NP 困難になることを示す（定理 4.2）．

4.1 全点の訪問間隔上限が等しい場合

定理 4.1. グラフが Unit で全点の訪問間隔上限が等しい場合，警邏問題は（利得，巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

証明 Unit は Star の特殊な場合であるから，補題 3.3 から Unit のグラフの全点の訪問間隔上限が Q のとき，頂点集合 V の任意の部分集合 W について W を m 人の巡査によ

とし，r_i をすべての $j \in [n] \setminus \{i\}$ に対して次を満たすように定める．

$$r_i \equiv \begin{cases} 1 & (i,j) \notin E \text{ かつ } i > j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \pmod{p_{(i,j)}} \tag{4}$$

そのような r_i は中国剰余定理より（q_i の剰余として一意に）存在する [].

G' の異なる 2 点 i, j の間の移動には時間 1 を要することから，その両方を警備できるためには，訪問すべき時刻同士がすべて 1 以上離れていること，すなわち任意の整数 k, l に対して $|(kq_i + r_i) - (lq_j + r_j)| \geq 1$ が成り立つことが必要十分である．q_i, r_i, q_j, r_j がすべて整数のとき，これは $q_i k + r_i \neq q_j l + r_j$，すなわち $r_i - r_j \neq q_j l - q_i k$ が任意の整数 k, l で成り立つことに同値である．q_i と q_j の最大公約数は $p_{(i,j)}$ なので，これはさらに $r_i - r_j$ が $p_{(i,j)}$ の倍数でないこと，つまり $r_i \not\equiv r_j \mod p_{(i,j)}$ に同値である．r_i の決め方 (4) から，これは $(i,j) \notin E$ に同値である．以上より，$(i,j) \in E$ と G' の 2 点 i, j を両方警備することができないことが同値となるため，G' の最大の警邏可能頂点集合は G の最大独立集合となることがわかる．

また，k 番目に小さい素数を P_k と書くと，$k \geq 6$ のときは $P_k < k(\ln k + \ln\ln k)$ であり [8]，ある数が素数であるかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムが存在する [1] ので，$n(n-1)/2$ 個の素数の列挙は n の多項式時間でできる． □

この事実は証明に使われていない（単純に約数を全探しても多項式時間にはなる）ので こんな大道具を引用するのは変

定理 4.2 では，各点の指定時刻が与えられる場合について NP 困難性を示したが，指定時刻のうち訪問間隔 $q_1, \ldots, q_n$ のみが指定されている次のような問題も考えることができる．

間隔指定警邏判定問題． 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および各点の訪問間隔 $q_1, \ldots, q_n$ が与えられる．V の各点 v_i の警備の条件が指定時刻 (q_i, r_i) で定められるとき m 人の巡査により全点を警邏可能な $r_1, \ldots, r_n$ が存在するか判定せよ．

グラフが Unit の場合，間隔指定警邏判定問題は巡査が一人であっても NP 困難であることが示されている [10].

参考文献

[1] Manindra Agrawal, Neeraj Kayal, and Nitin Saxena. Primes is in p. *Annals of mathematics*, pp. 781–793, 2004.

[2] Tomáš Brázdil, Petr Hliněný, Antonín Kučera, Vojtěch Řehák, and Matúš Abaffy. Strategy synthesis in adversarial patrolling games. *arXiv preprint*