修士学位論文

複数の巡査の協力による指定地点の警邏について

Collaborative Patrolling of Designated Points on Graphs

2017 年度

広域科学専攻・広域システム科学系

31-166813

能城秀彬

目次

［最終変更日時：2018/1/11, 9 時 2 分］

[ToDo]

- 図の追加・差し替え
- 最終チェック
  - 参考文献リストの書式の統一
    - 正しい bibtex ファイルを再取得
  - 引用は著者名は 2 人以下なら全員列挙に
  - 並列列挙は・で
  - cite はアルファベット順に

第 1 章

はじめに

1.1　問題設定

所与の領域を一人または複数の巡査が動き回り，その領域内の指定された場所を十分な頻度で訪れることを警邏（patrolling）という[**?**, **?**, 1, 10, 12].

本論文では，与えられた距離空間 U 内を巡査 m 人が速さ 1 以下で動きまわることにより，有限集合 $V \subseteq U$ に属する点を十分な頻度で訪れるという目標を考える．距離空間 U といっても，V の点どうしを結ぶ最短路以外を歩むことは無駄であるから，V を頂点集合として辺に長さのついたグラフを考え，U はその頂点および辺上の点のみからなるとしてよい．このような空間と点集合の組 (U, V) を**地図**と呼ぶ.

地図 (U, V) における巡査 $i \in \{1, \ldots, m\}$ の**運行** $a_i \colon \mathbf{R} \to U$ とは，各時刻 $t \in \mathbf{R}$ における位置 $a_i(t) \in U$ を定める函数であって，移動の速さが 1 以下であるもの，すなわち任意の時刻 $s, t \in \mathbf{R}$ に対し $a_i(s)$ と $a_i(t)$ の距離が $|s - t|$ を超えないものをいう．巡査 m 人による**運行**とは，全巡査の運行を定めた組 $(a_1, \ldots, a_m)$ をいう．V の各点には**利得**および**放置限度**と呼ばれる正整数が定まっている．点 $v \in V$ の放置限度が q であるとき，巡査達が運行 $(a_1, \ldots, a_m)$ で点 v を**警邏**するとは，長さ q のどの時間にもいずれかの巡査が v を少なくとも一度は訪れる（任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対して巡査 i と時刻 $\tau \in [t, t + q)$ が存在し $a_i(\tau) = v$）ことをいう．巡査達が運行 A により集合 $W \subseteq V$ に属するすべての点を警邏するとき，巡査達は A により W を**警邏**するという.

警邏問題　巡査の人数 $m \in \mathbf{N}$ と地図 (U, V) および V の各点の利得と放置限度が与えられる．m 人の巡査により全点を警邏できる V の部分集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ.

また，全点を警邏できるか否かを判定する問題を**全点警邏問題**と呼ぶ.

一つの点を複数の巡査の訪問により警邏し得ることに注意されたい．例えば図 1.1 左は

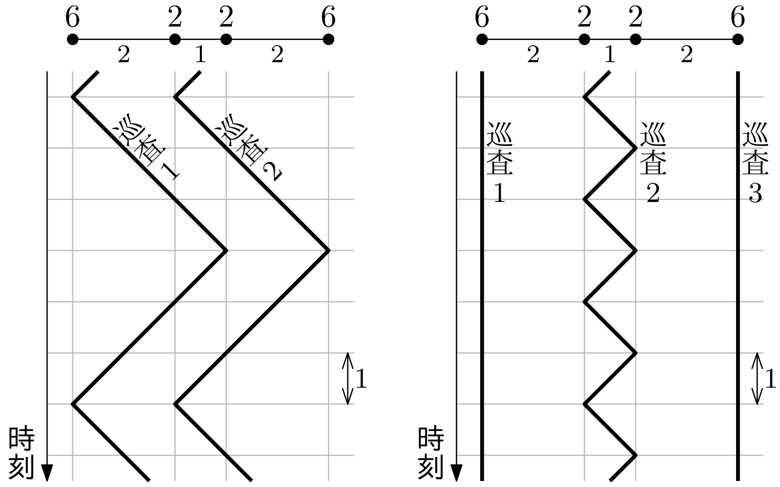


図 1.1　図の上部に描かれた地図において，四つの点すべてを警邏する二つの運行．点と辺に書かれた数は，それぞれ放置限度と距離である．左図の運行では二人の巡査が協力して中央の二点を警邏している．これを禁じ，各点をいずれかの巡査が単独で警邏することを求めると，右図のように三人の巡査を要する．

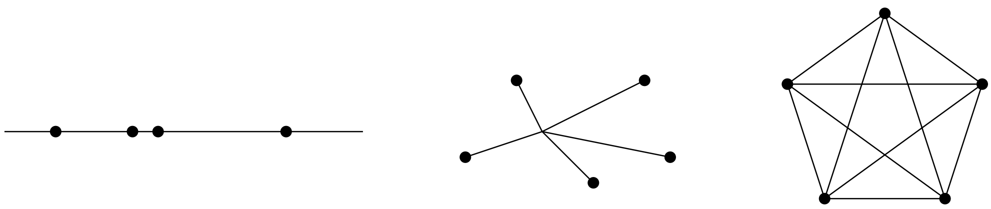


図 1.2　本論文では Line（左），Star（中），Unit（右，但し各辺の長さが等しい）を扱う．Star は葉のみを警邏の対象とする（中心は移動の途中で使うのみであり，放置限度は定められていない）．

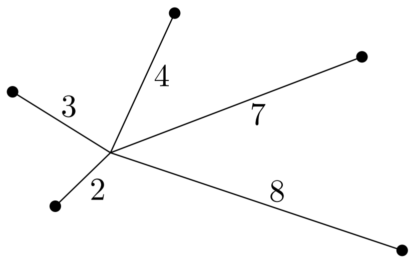
そのような運行の例である．Coene ら[10]は似た問題を扱っているが，このような協力を許さず，図 1.1 右のように各点 $v \in W$ に対して一人の巡査がおり，その巡査のみの運行が v を警邏することを要求している．対比のため本論文ではこの問題を**独立警邏問題**と呼ぶことにする（[10]では MPLPP と称している）．Coene ら[10]の諸結果においてはこの限定が，多項式時間算法の設計にも困難性の証明にも使われた．この限定を外したときの様子を調べるのが本論文の目的である．

全点警邏問題は，巡査が一人かつ全点の放置限度が等しい場合に限っても，ハミルトン路問題からの帰着により NP 困難である[10，Theorem 8]．そこで本論文では入力される地図 (U,V) を次のそれぞれの形状に限定する（図 1.2）．

Line　U は直線である．

Star　U は**中心**と呼ばれる一点を各点 $v \in V$ へ結ぶ辺のみからなる．

Unit　V の各二点間に辺があり，その長さはすべて等しい．



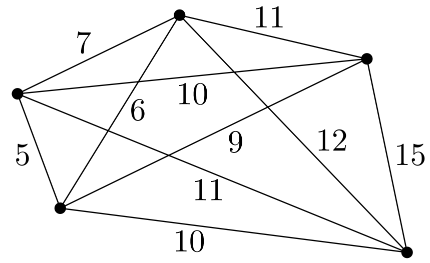


図 1.3　左図の Star は，各二点間に右図のような距離を定める．

Line では V の全点の外側の領域，Star では中心という特別な点を U は含んでいるが，警邏問題の入力の地図には V と V の点どうしの距離の情報があればよく，Star も V 上の完全グラフに適切に辺の長さを定めたものとみることができるので（図 1.3），冒頭で述べたように V 上のグラフとして与えられるとして差し支えない．なお，このように考えると各辺の長さが d の Unit は，中心から各点への距離が $d/2$ の Star と同じであるから，Unit は Star の特殊な場合である．

警邏問題についての我々の結果を Coene らの独立警邏問題についての結果との比較も含めて地図の形ごとにまとめると次のようになる．それぞれ 2，3，4 章で述べる．

- Line の独立警邏問題は動的計画法により多項式時間で解けることが示されていた[10，Theorem 11]．本論文では複数人が一点を警邏することを認めた警邏問題について，全点の放置限度が等しい場合には多項式時間で解けることを示す（定理 2.1）．
- Star については，全点の利得と放置限度が等しい場合に限っても，独立警邏問題は NP 困難であることが示されていた[10，Theorem 10]．本論文では，この場合の警邏問題は多項式時間で解けるという興味深い結果を得る（定理 3.1）．なお利得または放置限度を一般にすると，巡査が一人であっても（したがって独立かどうかによらず）NP 困難であることがわかっている[10，Theorems 5 and 6]．
- Unit については，本論文では全点の放置限度が等しい場合は警邏問題が多項式時間で解けることを示す（定理 4.1）．地図が Star の場合は巡査が一人で全点の放置限度が等しくても利得が一般だと NP 困難になる[10，Theorem 5]ので，Unit は Star よりも簡単に解ける形状と言える．

Line や Unit については，全点の放置限度が等しい場合には上述のように多項式時間アルゴリズムを見つけることができたが，放置限度が一般の場合にはそれができなかった．Star の警邏問題は上述の通り NP 困難なので[10，Theorems 5 and 6]，Line や Unit についても NP 困難ではないかと予想したが，これも示すことができなかった．これらの未解決な場合については，警邏ではなく定時訪問を目指す次のような問題を考えた．

定時訪問問題　巡査の人数 $m \in \mathbf{N}$ と地図 (U, V) および V の各点の利得と指定訪問時刻が与えられる．m 人の巡査の運行により全点を定時訪問できる V の部分集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．ただし，点 $v \in V$ の指定訪問時刻が (q, r) $(q \in \mathbf{N}, r \in \{0, 1, \ldots, q-1\})$ であるとき，巡査達が運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ で点 v を**定時訪問**するとは，任意の時刻 $t := qk + r$ $(k \in \mathbf{Z})$ に対し巡査 i が存在し $a_i(t) = v$ であることをいう．

また，全点を定時訪問できるか否かを判定する問題を**全点定時訪問問題**と呼ぶ．

Line については全点定時訪問問題を解く貪欲アルゴリズムを 2.2 節で示す．Unit については定時訪問問題が NP 困難であることを示す（定理 4.2）．

本論文は，2017 年電子情報通信学会総合大会[**?**]及び Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games 2017 [**?**]で発表した内容を含む．

1.2　関連研究

警邏に関する問題には様々なものが考えられている．警邏問題に似ているがその由来する現実の状況は全く異なる場合もあり，機械の定期的な保守・整備[4, 5]，「周期的スケジューリング問題 (periodic scheduling problem)」[**?**]，配達[8]，「周期的な待ち時間の問題 (periodic latency problem)」[10] など，様々な名称で論じられている．

警邏という目的に限っても，その問題設定には様々なものがある．

警邏問題はグラフの頂点を警邏する問題といえるが，グラフの辺を警邏する問題もある[**?**]．グラフの辺を警邏する問題に関連して，グラフの形状を限ったものとして「塀の警邏問題 (fence patrolling problem)」[**?**, 1, 11, 12]がある（「境界の警邏問題 (boundary patrolling problem)」とも呼ばれている）．塀の警邏問題では線分や閉路で表される塀に沿って巡査が動く．塀全体の点に対する訪問の待ち時間の最大値を最小化するもの[**?**, 1]，平均値を最小化するもの[**?**]，全点の訪問頻度をなるべく同程度にするもの[**?**]，塀の任意の点をある時間以上放置せずに訪問する条件の下でなるべく長い塀を警邏するもの[12]など，様々な目標が考えられている．塀の警邏については巡査の速さの最大値が異なる場合も考えられている[**?**, **?**, 12]が，任意の巡査数に対する最適な運行は分かっていない．塀のすべての点を警邏対象とするのではなく，塀に含まれる有限個の区間の合併のみを警邏対象とするという拡張もある[11]．特にこの問題は，各区間を一点集合とすると警邏問題の Line の場合と似た問題になり，関係が深い．以上はいずれも，塀の点の訪問とは点で表される巡査がその位置を通ることであった．これに対し，Czyzowicz ら[**?**]は巡査が一点より広い視野を有し，その範囲内の点はすべて訪問されているとするという拡張について調べている．

警邏とは呼べないが，部屋の内部を監視するという目的の美術館問題[**?**]という問題もある．美術館問題では，部屋にいくつかの防犯カメラを設置し全体を監視するという目標を考える．部屋が多角形 P（内部を含む）で表されるとき，防犯カメラの位置を表す点集合 G であって P の任意の点が G のいずれかの点から見えるようなもののうち最小のものを求めるという問題である．点 $p \in P$ が点 $g \in G$ から見えるとは，p と g を結ぶ線分の全体が P に含まれることである．美術館問題は NP 困難であることが知られている[**?**]．動かない防犯カメラの位置を決める問題でさえ NP 困難であることからも，二次元の領域を動く巡査の最適な運行は望みがたく，巡査の動く領域をグラフに制限する・視野を制限する・巡査の人数が少ない場合を考えるなど，なんらかの制約を設ける必要があると予想される．

Machado ら[**?**]は，障害物を含む二次元平面で表される領域を “skeltonization” によりグラフにし，グラフの頂点を警邏する問題としてモデル化している．Machado ら[**?**]は，辺の長さはすべて 1・巡査の視野はその存在する位置の一点・すべての頂点は同じ優先度とするなどの制約を設け，頂点の放置時間の最大値を最小化するなどいくつかの目標についてヒューリスティックな巡査の運行戦略をいくつか考え計算機実験により比較している．グラフの頂点を警邏する問題を扱っている点で警邏問題と関係が深いが，我々は巡査の最適な運行を求める問題の計算量クラスを理論的に調べることを目的としている点で異なる．

警邏の問題を侵略者の動きまで含めてゲーム理論的に考察している研究もある[**?**, **?**, **?**, 2, 3, 7]．Brázdil ら[7]の問題では，あるグラフ $G = (V, E)$ の上を巡査一人と侵略者一人が動く状況を考える．$T \subseteq V$ が定められており，侵略者は T の点を訪問し，その点によって決まっている時間滞在することを目指すが，点に巡査が存在するときに侵略者も同時にその点を訪問することはできない．巡査は単位時間に一つ辺を渡るが，どの辺を選択し渡るかは前回の選択とは独立に確率的に決まる．巡査の戦略とは訪問する点の列に対する確率のことである．侵略者は巡査の位置や戦略まで知っているが，次にどの辺を選択し移動するか予知することはできない．警邏問題では，点 v は放置限度の条件さえ満たしていれば警邏されるとしており具体的な侵略者のことは考えていないので，決定論的に定めた巡査の運行を知る侵略者に対応されてしまう可能性がある．Brázdil ら[7]の問題では巡査が確率的に動くのでそのような弱点が補われているともいえる．

警邏問題にはいくつかの拡張が考えられる．警邏問題は，非常に単純な図形についてさえ NP 困難性が示されていたり（[10，Theorems 5 and 6]），多項式時間アルゴリズムを示すことができていない場合（地図が Line で巡査が複数の場合など）が存在するように，複雑な問題設定である．よって，警邏問題に対して問題設定の拡張を考えること自体はできても厳密な最適解を得る効率的なアルゴリズムは望みがたい．

例えば，巡査の速さの最大値が異なるという拡張が考えられるが，塀（線分）の警邏で

巡査の速さの最大値が異なる場合に複雑な運行が生じる例があることが知られており[**?**, Theorem 1]，任意の巡査数に対する最適な運行は分かっていないことからも，最適解を得るのは難しいと予想される．

警邏問題ではある点を訪問するには通過する（時間 0 滞在する）だけでよいとしているが，各点を訪問するには時間 $s \geq 0$ 滞在しなければならないという拡張も考えられる．この条件を追加した問題を**滞在時間付き警邏問題**と呼ぶ．Coene ら[10]はこの問題が，すべての点が同じ位置にあり巡査が一人であっても全点警邏問題が NP 困難であることを示している[10，Theorem 3]．このように滞在時間付き警邏問題は一見警邏問題を非常に難しくする拡張に思われるが，実は，滞在時間付き警邏問題は次のように警邏問題に帰着することができる．滞在時間付き警邏問題の入力を地図 $M = (U, V)$ と V の各点 v_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ の必要滞在時間 $s_i \geq 0$ とする．各 v_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ について，v_i から長さ $s_i/2$ の辺 $e_i \not\subseteq U$ を伸ばした先の点を v'_i とする．ただし $v'_i \notin U$ とする．$V' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$，$U' = U \cup \bigcup_{i \in \{1, \ldots n\}} e_i$ とする．警邏問題に地図 $M' = (U', V')$ を入力として与え，得られた V' の部分集合と同じ添え字の点からなる V の部分集合を答えればよい．U' の点 v'_i を訪問するには長さ $s_i/2$ の辺 e_i を通らねばならず v_i と v'_i の間の往復には s_i の時間を要するので，v_i に時間 s_i 滞在するのと同じ状況を作ることができる．利得がある場合でも同様である．

上の帰着では，すべての点が同じ位置にある地図で滞在時間が付いたものは Star に変換される．警邏問題は Star の地図の場合は巡査が一人でも NP 困難である[10, Theorem 10]ことから，滞在時間付き警邏問題で全点が同じ位置にある場合は NP 困難であることは確かめられる．また，Line の地図で滞在時間が付いたものは Tree に変換される．地図が Tree で巡査が一人かつ全点の利得と放置限度が等しい場合は警邏問題は多項式時間で解ける[10，Corollary 3]ので，地図が Line で巡査が一人かつ全点の利得と放置限度が等しい場合は滞在時間付き警邏問題は多項式時間で解ける．

滞在時間付き警邏問題は周期的スケジューリング問題 (periodic scheduling problem) [**?**, **?**, 6]とも関係が深い．Liu と Layland [**?**]の問題は，地図が Unit で二点間距離が 1 であり巡査が一人である場合の滞在時間付きの全点定期訪問問題と同じである．全点定期訪問問題は 4.2 節の後ろで定義する．

我々は警邏問題を地図が Line, Star, Unit の場合について調べたが，これらは Coene ら[10]が独立警邏問題で扱っていた形状の一部である．Coene ら[10]はさらに地図が Circle（閉路），Tree（木）の場合についても調べている．Circle は Line を，Tree は Line，Star，Unit をそれぞれ特殊な場合として含んでいる．地図が Line のときの滞在時間付き警邏問題は地図が Tree のときの警邏問題に帰着されることや，一般のグラフの警邏をするときに最小全域木を代わりに警邏するという近似が考えられている[9]ことからも，Tree は重要である．地図が Tree の場合の警邏問題については 3 章の後ろで言及する．

第 2 章

Line

地図 (U, V) が Line の場合，U を実直線 $\mathbf{R}$ としてよい．

Line における巡査 m 人の運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ で $a_1(t) \leq a_2(t) \leq \cdots \leq a_m(t)$ を満すとき，A は**順序保存**であるという．点集合 $W \subseteq V$ が或る運行により警邏されるならば，同人数の順序保存運行により警邏される．これは，もとの運行で二人の巡査がすれ違うときに代わりに互いの以降の運行を交換し引き返すようにした運行（巡査の速さの上限がすべて等しいため互いの運行を一部だけ交換することができる）によっても W が警邏されるためである．

2.1　全点の放置限度が等しい場合

本節では次のことを示す．

定理 2.1　地図が Line で全点の放置限度が等しい場合，警邏問題は多項式時間で解くことができる．

これに関し，Collins ら[11]は次の問題を考えた．

> 巡査の人数 m と線分 C といくつかの区間 $V_1, \ldots, V_n$ $(V_i \subseteq C,\ i \in \{1, \ldots, n\})$ が与えられる．C 上を速さ 1 以下で動く m 人の巡査が $\bigcup_{i=1}^{n} V_i$ に含まれるすべての点を訪問する．$\bigcup_{i=1}^{n} V_i$ の点のうち，放置される時間が最大の点の放置時間が最小になるようにするとき，その最小値を求めよ．

この問題は多項式時間で解ける[11，Theorem 2.1]ので，$V_1, \ldots, V_n$ として一点集合を与えることにより，地図が Line で全点の放置限度が等しい場合は全点警邏問題を多項式時間で解くことができることが分かる．

これに対し，定理 2.1 は警邏問題が多項式時間で解けるという主張である．

以降では，地図が Line で全点の放置限度が等しい場合，次に定義する**独立往復運行**という単純な運行によって最大利得が得られることを示す．

定義 2.2　地図 (U, V) が Line で全点の放置限度が q，巡査の人数が m であるとする．$V = \{x_1, \ldots, x_n\}$，$x_{\max} = \max(V)$ とする．$n + m$ 個の区間 $S_1, \ldots, S_{n+m}$ を

$$S_i = \begin{cases} [x_i, x_i + q/2] & 1 \leq i \leq n \text{ のとき} \\ [x_{\max} + iq, x_{\max} + (i + 1/2)q] & n + 1 \leq i \leq n + m \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.1}$$

と定義する．運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が**独立往復運行**であるとは，各 a_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ が $S_1, \ldots, S_{n+m}$ のいずれかを速さ 1 で往復する運行であって，$a_1, \ldots, a_m$ の往復区間が互いに重複していないことである．

補題 2.3　地図 (U, V) が Line で全点の放置限度が等しいとする．集合 $W \subseteq V$ が或る運行により警邏されるならば，W は同人数の巡査による或る独立往復運行で警邏される．

証明　巡査の人数 m に関する帰納法で示す．全点の放置限度を q とする．$m = 0$ のときは明らかなので，以下 $m > 0$ とする．

$W = \emptyset$ のとき，$x_{\max}$ を V のうち最も右にある点として，巡査 i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ は区間 $[x_{\max} + iq, x_{\max} + (i + 1/2)q]$ を速さ 1 で往復するとする．これは独立往復運行になっている．

以下では $W \neq \emptyset$ とし，W の点のうち最も左にあるものを u とする．

所望の独立往復運行 $(a'_1, \ldots, a'_m)$ を次のように作る．まず区間 $[u, u + q/2]$ を速さ 1 で休まず往復する運行を a'_1 とする．a'_1 はこの区間に属するすべての点を警邏する．実際，位置 $x \in [u, u + q/2]$ を運行 a'_1 が訪れる間隔の最大値は $\max(2(x - u), 2(u + q/2 - x)) \leq 2(u + q/2 - u) = q$ である．W の点のうち a'_1 によって警邏されないもの，すなわち $u + q/2$ よりも右にあるものの全体を W^- とする．

2 章始めの議論により W は或る順序保存運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ により警邏される．すると，a_1 は任意の時刻 t で $a_1(t) \leq u + q/2$ を満たす．なぜならば，もし或る位置 $x_{\text{out}} > u + q/2$ と時刻 t_0 があって $a_1(t_0) = x_{\text{out}}$ であるとすると，x_{out} と u の間の移動には少なくとも時間 $|u - x_{\text{out}}| > q/2$ を要するから，巡査 1 は区間 $[t_0 - q/2, t_0 + q/2]$ に属する時刻に u を訪問できない．この区間の長さは q であり，順序保存運行であるから他の巡査もこの時間に u を訪問しないので，u が警邏されていることに反する．よって，W^- の点を巡査 1 が訪れることはない．

したがって W^- は $(a_2, \ldots, a_m)$ により警邏され，ゆえに帰納法の仮定から，或る独立往復運行 $(a'_2, \ldots, a'_m)$ により警邏される．これに a'_1 を加えた $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_m)$ は W を警邏する独立往復運行である．　□

補題 2.3 により，地図 (U, V) が Line で全点の放置限度が等しい場合は独立往復運行のみを考えればよい．よって，m を巡査の人数，n を V の大きさとして，式 (2.1) のように定義される区間 $S_1, \ldots, S_{n+m}$ から m 人の巡査がそれぞれ担当する重複のない m 個の区間のうち利得の合計が最大となるものを求め，それらに含まれる点を求めればよい．これは以下のアルゴリズムにより求めることができる．

初めに Line 上の点をソートしておき，左側から順に $x_1, x_2, \ldots, x_n$ とする．各区間 S_i $(i \in \{1, \ldots, n+m\})$ に属する点の利得の和 $P_i := \sum_{x_j \in S_i} p_j$ を求める（$i > n$ に対しては $P_i = 0$ となる）．S_i $(i \in \{1, \ldots, n+m\})$ と重複部分のない区間の添え字のうち i 未満で最大のもの（存在しない場合は 0 とする）を求め，h_i と書く（$i > n$ に対しては $h_i = i - 1$ となる）．$x_1, \ldots, x_n$ がソートしてあるので $P_1, \ldots, P_{n+m}$ と $h_1, \ldots, h_{n+m}$ を合計 $O(n+m)$ で求めることができる．次に，漸化式 (2.2) に従う動的計画法で利得の合計が最大となる重複のない m 個の区間を選ぶ（m は巡査の人数）．$OPT(k, l)$ は，区間 $S_1, \ldots, S_l$ から最大 k 個の重複のない区間を選ぶときの利得の合計の最大値を表す．$OPT(m, n+m)$ が全体の利得の最大値となる．

$$OPT(k,l) = \begin{cases} 0 & k = 0 \text{ または } l = 0 \text{ のとき} \\ \max\{OPT(k, l-1), P_l + OPT(k-1, h_l)\} & \text{それ以外の場合} \end{cases} \tag{2.2}$$

最後に，選ばれた m 個の区間に含まれる点全体を出力して終了する．

このアルゴリズムの計算量は全体で $O(n \log n + nm)$ となる．これで定理 2.1 が示された．

なお，2.1 節の冒頭で上げた Collins らの問題で最適と示されている戦略は，上で述べた独立往復運行を拡張したものになっている[11，Theorem 2.1]．

2.2　放置限度が一般の場合

全点の放置限度が等しい場合は，結局巡査がそれぞれ独立な区間を一つずつ担当し往復する運行のみ考えればよいという単純な状況になっていたが，放置限度が一般の場合は，一部の点を複数の巡査が訪問して警邏する必要がある場合が存在する．図 2.1（左）の例では，中央の放置限度の短い二つの点は 2 人の巡査に訪問されており，また，全点の放置限度が等しい場合に反して各巡査の最適な運行はなんらかの区間の往復であるとは限らないことも分かる．また，この例では左の巡査は左端の点を放置限度ちょうどの間隔で訪問しているが，一方，図 2.1（中央）の例では，左側の巡査は左端の点をあえてより短い周期で訪問することで全点を警邏している．図 2.1（中央）と同じ入力に対して，図 2.1（右）のように左の巡査が左端の点の放置限度ぎりぎりの時間まで右の方へ動き左端へ帰る運行を行うと 2 人の巡査がうまく協力できず全点の警邏ができない．このように，補題 2.3 の

ときのように左端の点の放置限度から順に巡査の運行を決定することも難しい例が存在する．

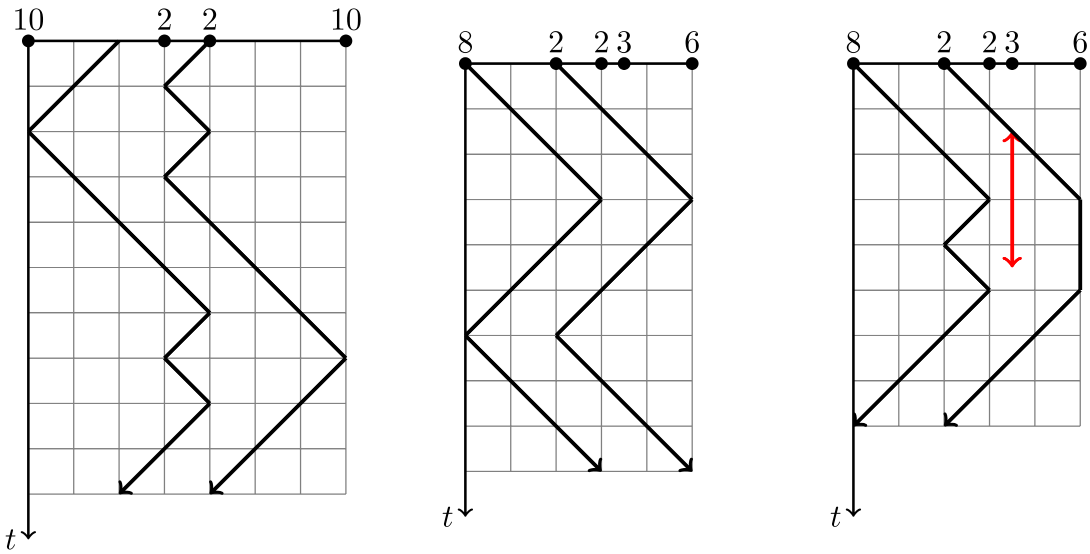


図 2.1　巡査の協力が必要な例．横軸を点の座標，縦軸を時刻として巡査の軌跡を表す．点の上の数値は放置限度を表す．

これらの例は，放置限度が異なる場合は巡査の運行を個別に決定するのは難しいということを示唆している．しかしながら，地図が Line で放置限度が一般の場合での警邏問題の困難性を示すこともできなかった．そこで，放置限度より短い間隔で点を訪問しうることで運行の決定が複雑になる例が存在したことを踏まえて，ここでは 1 章で定義した別種の問題，全点定時訪問問題を代わりに考える．

地図が Line の場合の全点定時訪問問題は，正の整数 m と n 個の自然数の組 $(q_i, r_i, x_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ が与えられたとき，集合 $\{(q_i k + r_i, x_i) \mid k \in \mathbf{Z}, i \in \{1,\ldots,n\}\}$ を m 個以下の運行可能集合に分割できるか判定する問題と言い換えることができる．ただし，集合 $S \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ が**運行可能**であるとは，任意の $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in S$ が $|x_1 - x_2| \le |t_1 - t_2|$ を満たすことであり，分割 $\{P_1, \ldots, P_h\}$ が**運行可能**であるとは，$P_1, \ldots, P_h$ がそれぞれ運行可能であることと定義する．任意の運行可能集合 S に対して，Line 上の巡査の運行 a であって，S のすべての元 (t, x) に対して $a(t) = x$ を満たす（このとき a を運行可能集合 S に対応する運行と呼ぶ）ものが存在することは簡単に示すことができる．

まず，地図が Line の場合は順序保存運行を考えることができるのと同様に，順序保存（運行可能）分割を考えることができる．分割 $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_h\}$ が**順序保存**であるとは，

$\mathcal{P}$ に対応する運行 $A=(a_1,\dots,a_h)$ であって順序保存なものが存在すること，あるいは，

$$\begin{aligned} L(t,x) &:= \{(t',x') \mid |x-x'| > |t-t'| \text{ かつ } x' < x\} \\ &= \{(t',x') \mid x-x' > |t-t'|\} \end{aligned}$$

として，任意の P_i $(i \in \{1\dots,h\})$ について，領域 $\bigcup_{(t,x)\in P_i} L(t,x)$ に P_j $(i<j)$ の点が存在しないことと定義する．

$X := \{(q_i k + r_i, x_i) \mid k \in \mathbf{Z}, i \in \{1,\dots,n\}\}$ の任意の順序保存分割のうち一番左の集合は順序保存分割の定義から $\mathfrak{P}_1 := \{(t,x) \in X \mid L(t,x) \cap X = \emptyset\}$ の部分集合となる．よって，X の最小の順序保存分割であって一番左の集合が $\mathfrak{P}_1$ であるようなものが存在する．同様に，残りの $X \setminus \mathfrak{P}_1$ の最小の順序保存分割であって一番左の集合が $\mathfrak{P}_2 := \{(t,x) \in X \setminus \mathfrak{P}_1 \mid L(t,x) \cap X \setminus \mathfrak{P}_1 = \emptyset\}$ であるようなものが存在する．このように，集合 X の左側から貪欲に運行可能集合を取り出していく操作を再帰的に繰り返すと，最小の順序保存分割 $\{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_h\}$ が得られる．これを $\mathfrak{P}(X)$ と書くことにする．全点を定時訪問する運行が存在するには，$|\mathfrak{P}(X)| \le m$ が成り立つことが必要十分である．

以下では，集合 $S \subseteq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に対して $S_{[a:b)} := \{(t,x) \in S \mid a \le t < b\}$ と定義する．

$q_1,\dots,q_n$ が整数であるので X は時刻（組 $(t,x) \in X$ の第 1 要素）について周期的であり，その周期は $q_1,\dots,q_n$ の最小公倍数 T となる（すなわち，任意の整数 k に対して，$(t,x) \in X_{[kT:(k+1)T)}$ と $(t-kT,x) \in X_{[0:T)}$ が同値である）．従って，前述の貪欲な分割 $\mathfrak{P}(X)$ の各要素 $\mathfrak{P}_i$ $(i \in \{1,\dots,h\})$ も同様に時刻について周期的である（すなわち，任意の $\mathfrak{P}_i$ と整数 k に対して，$(t,x) \in \mathfrak{P}_{i[kT:(k+1)T)}$ と $(t-kT,x) \in \mathfrak{P}_{i[0:T)}$ が同値である）．よって，X の最小の運行可能分割 $\mathfrak{P}(X) = \{\mathfrak{P}_1,\dots,\mathfrak{P}_h\}$ の大きさを知るには，$X_{[0:T)}$ の運行可能分割 $\{\mathfrak{P}_{1[0:T)},\dots,\mathfrak{P}_{h[0:T)}\}$ を計算すれば十分である．

ここで，$\mathfrak{P}(X_{[0:T)})$ と $\mathfrak{P}(X)$ の大きさは必ずしも一致しないことに注意する必要がある．前述の貪欲な分割の仕方で集合 S から左端の運行可能集合 $s' := \{(t,x) \in S \mid L(t,x) \cap S = \emptyset\}$ を取り出すとき，s' の点 (t,x) の条件は領域 $L(t,x)$ に S の点が存在しないことである．X の分割 $\mathfrak{P}(X) = \{\mathfrak{P}_1,\dots,\mathfrak{P}_h\}$ の部分となるような $X_{[0:T)}$ の分割 $\{\mathfrak{P}_{1[0:T)},\dots,\mathfrak{P}_{h[0:T)}\}$ を得るには，$X_{[0:T)}$ のいずれかの点 (t,x) に対して $L(t,x)$ に含まれるような X の点全体，すなわち $X \cap \bigcup_{(t,x)\in X_{[0:T)}} L(t,x)$ を含む集合 F を分割する必要がある．$\mathfrak{P}(F)$ の各要素を $[0:T)$ に制限すれば $\{\mathfrak{P}_{1[0:T)},\dots,\mathfrak{P}_{h[0:T)}\}$ が得られる．F は例えば $W = \max(x_1,\dots,x_n) - \min(x_1,\dots,x_n)$ として $\{(t,x) \in X \mid -W \le t \le T+W\}$ とすればよい．

以上の議論から，地図 (U,V) が Line の場合の全点定時訪問問題は以下の貪欲アルゴリズムで解くことができる．

$V = \{x_1,\dots,x_n\}$ とし，$x_i \in V$ の指定訪問時刻を (q_i, r_i) とする．

$W = \max(V) - \min(V)$ を計算する．

$$F = \{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \mathbf{Z}, -W \leq q_i k + r_i < T + W\}$$

を求める．最小運行可能分割アルゴリズムの入力として F を与え，出力 $\mathcal{P}$ について $|\mathcal{P}| \leq m$ であるかどうかを判定する．

最小運行可能分割アルゴリズム　入力を有限集合 S とする．初期値を $\mathcal{P} = \{\}$, $S' = S$ とし，$S' \neq \emptyset$ である限り次の (i) から (iii) を繰り返す．

(i) $P \leftarrow \{(t, x) \in S' \mid L(t, x) \cap S' = \emptyset\}$
(ii) $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{P\}$
(iii) $S' \leftarrow S' \setminus P$

$\mathcal{P}$ を出力する．

第3章

Star

地図が Star の場合については，利得か放置限度のいずれかが一般であれば，警邏問題は巡査が一人であっても NP 困難であることが知られている[10，Theorems 5 and 6]．よってここでは，全点の利得と放置限度が等しい場合について次のことを示す．

定理 3.1　地図が Star で全点の利得と放置限度が等しい場合，警邏問題は（巡査の人数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

独立警邏問題においては，地図が Star で巡査の人数が一般の場合は利得と放置限度がすべて等しくても NP 困難になることが Coene らにより示されている[10，Theorem 10]．Line の場合では複雑な協力による警邏があり得たこと（2.2 節）から考えると，協力を許した方が簡単に解けるというのは意外な結果に思われる．これは，Star の場合，独立警邏問題ではうまく点集合を分割しなければならないことが難しさを生み NP 困難になるのに対し，警邏問題では後述の補題 3.3 の証明中に述べる単純な運行が可能となるためである．

図 1.2，1.3 で注意したように Star の中心は警邏すべき点ではないが，本章では中心と点 v を結ぶ辺（端点のうち中心は含まず v のみを含む）を e_v，その長さを d_v と書く．なお，中心も警邏すべき点である場合を考えるには，$d_v = 0$ であるような点 v を追加すればよい．また，$d_v = 0$ のときは e_v は一点 v とする．

補題 3.2　Star において，放置限度 q の点 v が警邏されているならば，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対し，長さの和が $\min(2d_v, q)$ であるような互いに交わらない有限個の時刻区間の合併 $J \subseteq [t, t+q)$ が存在し，J に属するすべての時刻において少なくとも一人の巡査が辺 e_v 上にいる．

証明　もし $2d_v > q$ ならば，常に e_v 上に巡査が存在する．何故なら，もし e_v 上に巡査がいない時刻 τ があれば，長さ $2d_v$ の時刻区間 $(\tau - d_v, \tau + d_v)$ にわたって v が放置され，

仮定に反するからである．よって $J = [t, t+q)$ とすればよい．以下では $2d_v \leq q$ とする．

警邏の条件から v は時刻区間 $[t, t+q)$ に少なくとも 1 回訪問される．もしその訪問時刻のうち $[t+d_v, t+q-d_v)$ に属するもの τ があれば，長さ $2d_v$ の時刻区間 $J = (\tau-d_v, \tau+d_v)$ にわたって巡査は辺 e_v 上におり，これは $[t, t+q)$ に含まれる．

そうでないとき，v は $[t, t+d_v)$ か $[t+q-d_v, t+q)$ に少なくとも 1 回訪問される． (i) $[t, t+d_v)$ に訪問されるとき，$[t, t+d_v)$ に属する最後の訪問時刻を τ とすると，点 v の警邏の条件と場合分けの条件から τ の次の訪問時刻 σ は $t+q-d_v < \sigma \leq \tau + q$ を満たす．τ と σ それぞれの前後 d_v の時間のうち $[t, t+q)$ に含まれる時刻区間 $J = [t, \tau+d_v) \cup (\sigma - d_v, t+q)$ にわたって巡査は辺 e_v に存在し，その長さは $q - \max(0, (\sigma - d_v) - (\tau + d_v)) = \min(q, q - \sigma + \tau + 2d_v) \geq 2d_v$．(ii) $[t+q-d_v, t+q)$ に 1 回以上訪問されるときも (i) と同様． □

補題 3.3 地図が Star で全点の放置限度が q のとき，点集合 V の部分集合 W を警邏する m 人の運行が存在するには，

$$\sum_{v \in W} \min(2d_v, q) \leq mq \tag{3.1}$$

が成立つことが必要十分である．

証明 十分であることを示す．(3.1) が成り立つとき，m 人の巡査の運行 $(a_1, \ldots, a_m)$ を次のように定めれば W の全点が警邏される．$W' := \{v \in W \mid 2d_v > q\}, l := m - |W \setminus W'|$ とする．巡査 1 は中心から出発して速さ 1 で動きながら W' の全点をちょうど 1 度ずつ訪問し中心に戻るという巡回を繰り返す．中心点と点 v の 1 回の往復には $2d_v$ の時間を要するので，1 回の巡回にかかる時間は $\sum_{v \in W'} 2d_v = \sum_{v \in W} \min(2d_v, q) - |W \setminus W'|q \leq (m - |W \setminus W'|)q = lq$ より lq 以下となる．巡査 i $(i \in \{2, 3, \ldots, l\})$ は巡査 1 より時間 $(i-1)q$ 遅れて同じ運行を行うようにする（すなわち，$a_i(t) = a_1(t-(i-1)q)$ となるように運行を定める）．$a_1, \ldots, a_l$ により W' の各点は時間 q 以上放置されることなく訪問される．$W \setminus W'$ の各点は巡査 $(l+1), \ldots, m$ が一人ずつ停止しこれを警邏する．これにより W の全点が警邏される．

必要であることを示す．W が m 人の巡査により警邏されているとすると，補題 3.2 より，各点 $v \in W$ について，どの長さ q の時刻区間 $[t, t+q)$ にも合計 $\min(2d_v, q)$ の時間はいずれかの巡査が e_v 上に存在し，その時間の合計は $\sum_{v \in W} \min(2d_v, q)$ である．m 人の巡査は各時刻 $\tau \in [t, t+q)$ に高々一つの辺に存在するので，全点警邏しているならば (3.1) が成り立つ． □

補題 3.3 より Star の任意の点集合 W が警邏できるか否かを W の点の隣接辺の長さだけから簡単に計算できることが分かった．定理 3.1 では全点の利得と放置限度が等しい場

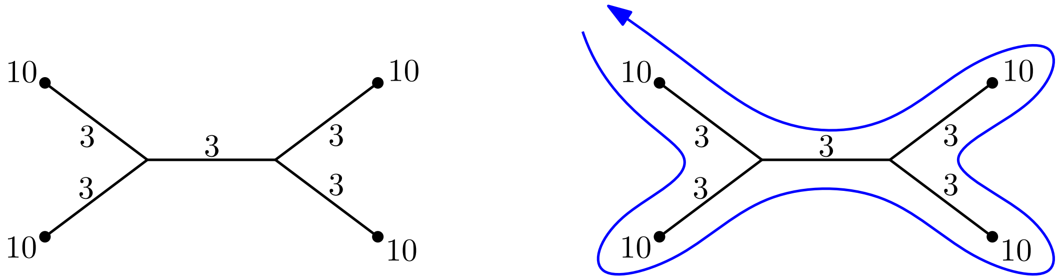


図 3.1　2 点からなる星二つを橋でつないだ木．点と辺に書かれた数は，それぞれ放置限度と距離である．右図のような順路で周回を行うとき 1 周にかかる時間は 30 であり，3 人の巡査が時間 10 ずつずれてこの周回を行うと各点はちょうど時間 10 ごとに訪問される．

合を考えているので，警邏する部分集合としては隣接辺の短い点から順に選べばよい（2 点 v, w について，$d_v > d_w$ ならば，w を警邏せず v を警邏する運行は v を警邏せず w を警邏する運行に必ず変換できる）．以上で定理 3.1 が示された．

木の場合

Star を一般化した地図の形状として木を考えることができる．Star のときと同様，木の各葉のみに放置限度が定められているとする．長さが 0 の辺を許せば，任意の木はその葉どうしの距離を保ったまま二分木に変換できるので，本節では二分木の地図を Tree と呼び，Tree の場合の警邏問題について考える．

Coene ら[10]は独立警邏問題を地図が Tree の場合について調べている．独立警邏問題においては，巡査が一人かつ全点の利得と放置限度が等しい場合は，地図が Tree であっても多項式時間で解ける[10，Corollary 3]のに対し，巡査数，利得，放置限度のいずれか一つでも一般の場合は Star であっても NP 困難である[10，Theorems 5, 6 and 10]．巡査が一人の場合は警邏問題と独立警邏問題は同じ問題であるから，Tree で全点の利得と放置限度が等しいときは多項式時間で解くことができ，利得か放置限度のいずれかが一般の場合は NP 困難であることは直ちに分かる．一方，巡査数が一般で全点の利得と放置限度が等しい場合は，警邏問題では地図が Star のとき多項式時間で解けるので，Tree でどうなるかは未解決である．

我々はまず，星ではない二分木の例として図 3.1 左のような例を考えた．図 3.1 左の例では，2 点からなる二つの星の中心どうしが一本の橋で結ばれている．ここで，この Tree の地図の全点警邏に必要な最小の巡査数を考えてみる．まず，左右の星を独立に Star に対する最適戦略で警邏する運行が考えられる．これを**左右独立運行**と呼ぶことにする．補題 3.3 から星それぞれは全点警邏に 2 人，合計 4 人の巡査を要することが分かる．一方，

図 3.1 右のような巡回を繰り返す運行を 3 人の巡査が放置限度 10 ずつずれて行うと全点を警邏できる．このように巡査全員が全体を一度ずつ訪問する巡回を繰り返す運行を**全員協力運行**と呼ぶことにする．図 3.1 左の例には存在しないが，隣接辺が $q/2$ より長い点が存在する場合は全員協力運行では巡査が一人停止して担当するものとする．

この例で仮に橋の長さが 10 などとしてみると，全員が全体を巡回する二つ目の戦略で 3 人の巡査では全点警邏ができなくなり，巡査 4 人による左右独立運行が最小人数の運行となる．このように，橋の長さによっては橋を渡るべきかどうかが変わる．

より一般に二つの星とその中心間を結ぶ長さ b の橋からなる Tree の地図 T について考える．左右の星の点集合をそれぞれ L, R とする．全点の放置限度を q とする．また，以下では $S_V := \sum_{v \in V} \min(2d_v, q)$ と書くことにする．

左右独立運行では，補題 3.3 より，左の星の全点警邏に $\lceil S_L/q \rceil$ 人，右の星の全点警邏に $\lceil S_R/q \rceil$ 人の巡査を要する．全員協力運行では T 全点の警邏に $\lceil (2b + S_{L \cup R})/q \rceil = \lceil (2b + S_L + S_R)/q \rceil$ 人の巡査を要する．よって，T は多くとも $\min(\lceil (2b + S_L + S_R)/q \rceil, \lceil S_L/q \rceil + \lceil S_R/q \rceil)$ の巡査で警邏できる．

T の橋の長さを 0 にした地図を T' とすると，T' 全体は点集合が $L \cup R$ の Star となり，全点警邏には $\lceil (S_L + S_R)/q \rceil$ 人の巡査が必要である．T' の全点警邏に必要な最小巡査数は明らかに T の全点警邏に必要な最小巡査数以下となるので，T の警邏には少なくとも $\lceil (S_L + S_R)/q \rceil$ 人の巡査が必要である．

以上より，T の全点警邏に必要な巡査の最小数を $m_{\min}$ と書くと，

$$\lceil (S_L + S_R)/q \rceil \leq m_{\min} \leq \min(\lceil (2b + S_L + S_R)/q \rceil, \lceil S_L/q \rceil + \lceil S_R/q \rceil)$$

となる．我々は $m_{\min} = \min(\lceil (2b + S_L + S_R)/q \rceil, \lceil S_L/q \rceil + \lceil S_R/q \rceil)$，即ち，左右独立運行か全員協力運行のいずれかは最適であると予想しているが，これを示すことはできていない．

第 4 章

Unit

1 章で述べたように Unit は Star の特殊な場合とみなせるため，全点の利得と放置限度が等しい場合，警邏問題は定理 3.1 により多項式時間で解くことができる．ここでは，Unit で全点の放置限度が等しい場合の警邏問題が（利得が異なっていても）多項式時間で解けることを示す（定理 4.1）．

放置限度が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しかったため，2 章で扱った定時訪問問題を再び考える．地図が Unit の場合は定時訪問問題が NP 困難になることを示す（定理 4.2）．

4.1　全点の放置限度が等しい場合

定理 4.1　地図が Unit で全点の放置限度が等しい場合，警邏問題は（利得，巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

証明　放置限度を q とし，各辺の長さを d とする．Unit は Star の特殊な場合であるから，補題 3.3 が適用できる．すなわち点集合 W が m 人で警邏できるためには，式 (3.1) が $d_v = d/2$ で成立つこと，つまり W に属する点の個数 $|W|$ が

$$|W| \cdot \min(d, q) \leq mq \tag{4.1}$$

を満すことが必要十分である．したがって，利得の大きい順に $\lfloor mq/\min(d, q) \rfloor$ 個の点を選んだものが最適の W である．□

Star で全点の放置限度が等しい場合は，警邏できる点の最大数が式 (3.1) で与えられることから，利得が等しい場合は枝の短いものから選べばよく（定理 3.1），枝の長さが等しい場合は利得の大きいものから選べばよい（定理 4.1）というようにまとめることができる．

4.2　放置限度が一般の場合

3 章冒頭で述べた通り，地図が Star の場合については，放置限度が一般の場合は警邏問題は巡査が一人であっても NP 困難であった[10，Theorem 6]．この NP 困難性の証明では辺の長さが異なる Star の地図を用いていた．Unit は Star の辺の長さがすべて等しい場合であるため，この方法による NP 困難性の証明ができない．Unit で放置限度が一般の場合は多項式時間アルゴリズムや NP 困難性の証明が難しかったため，Line のときのように定時訪問問題を代わりに考える．

地図 (U, V) が Unit で各点 $v_i \in V$ の指定訪問時刻が (q_i, r_i) のとき，巡査一人で V の全点を定時訪問できるかどうかは次のように多項式時間で判定できる．辺の長さを d とすると，V の異なる 2 点 i, j の間の移動には時間 d を要することから，その両方を定時訪問できるためには，訪問すべき時刻どうしがすべて d 以上離れていること，すなわち任意の整数 k, l に対して $|(q_i k + r_i) - (q_j l + r_j)| \geq d$ が成り立つことが必要十分である．g を q_i と q_j の最大公約数として，これは任意の整数 n で $|(r_i - r_j) + gn| \geq d$ が成り立つことに等しいので，r_i, r_j をそれぞれ g で割った余りを r'_i, r'_j として $|r'_i - r'_j|$，$|r'_i - r'_j + g|$，$|r'_i - r'_j - g|$ のいずれも d 以上となることに等しい．全点を定時訪問可能かどうかは，この条件を V のすべての 2 点について確かめればよい．

全点を定時訪問可能か判定する問題は多項式時間で解けるのに対し，定時訪問問題では次が成り立つ．

定理 4.2　地図が Unit のとき，定時訪問問題は巡査が一人で全点の利得が等しい場合であっても NP 困難である．

証明　NP 困難であることが知られている最大独立集合問題からの帰着による．最大独立集合問題は，無向グラフが与えられたとき，どの二点間にも辺が存在しないような頂点集合（独立集合）のうち頂点の個数が最大のものを求める問題である．

最大独立集合問題の入力として点集合 $[n] = \{1, \ldots, n\}$，辺集合 E のグラフ G が与えられたとする．同じ大きさの点集合 V をもち，利得をすべて 1，辺の長さをすべて 1 とした Unit の地図 $M = (U, V)$ を考える．各点 $v_i \in V$ の指定訪問時刻 (q_i, r_i) を次のように定める．まず，$n(n-1)/2$ 個の相異なる素数 p_{ij} $(1 \leq i < j \leq n)$ を用意する．$i > j$ に対して p_{ij} と書くときは p_{ji} を指すことにする．各 $i \in [n]$ について，

$$q_i = \prod_{j \in [n] \setminus \{i\}} p_{ij} \tag{4.2}$$

とし，r_i をすべての $j \in [n] \setminus \{i\}$ に対して次を満たすように定める．

$$r_i \equiv \begin{cases} 1 & (i,j) \notin E \text{ かつ } i > j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \pmod{p_{ij}} \tag{4.3}$$

そのような r_i は中国剰余定理より（q_i の剰余として一意に）存在する．

V の異なる 2 点 v_i, v_j の間の移動には時間 1 を要することから，その両方を定時訪問できるためには，q_i と q_j の最大公約数 p_{ij} について $|(r_i - r_j) + p_{ij}k| \geq 1$ が任意の整数 k で成り立つことが必要十分である．r_i, r_j が整数なので，これは $r_i - r_j$ が p_{ij} の倍数でないこと，つまり $r_i \not\equiv r_j \mod p_{ij}$ に同値である．r_i の決め方 (4.3) から，これは $(i,j) \notin E$ に同値である．以上より，$(i,j) \in E$ と M の 2 点 v_i, v_j を両方定時訪問することができないことが同値となるため，M の最大の警邏可能な点部分集合は G の最大独立集合となることがわかる．

また，k 番目に小さい素数を P_k と書くと，$k \geq 6$ について $P_k < k(\ln k + \ln\ln k)$ が成り立つ[**?**]ので，$n(n-1)/2$ 個の素数の列挙は n の多項式時間でできる． □

なお，地図が Unit で巡査が一人かつ全点の利得が等しい場合は全点を定時訪問可能か判定する問題は本節冒頭で示した通り多項式時間で解けるので，整数 N が与えられたとき定時訪問可能な部分集合であって大きさが N 以上のものが存在するか判定する問題は NP に属する．この問題は定理 4.2 より NP 困難なので NP 完全である．

定期訪問の場合

定理 4.2 では，点 $v_1, \ldots, v_n$ を指定訪問時刻 $(q_1, r_1), \ldots, (q_n, r_n)$ に訪問せねばならないという定時訪問問題が NP 困難であることを示したが，$r_1, \ldots, r_n$ は与えられず $q_1, \ldots, q_n$ のみが指定される次のような問題も考えることができる．

全点定期訪問問題　巡査の人数 m と地図 (U, V) および各点の指定訪問間隔 $(q_1, \ldots, q_n)$ が与えられる．m 人の巡査により V の全点を定期訪問できるか判定せよ．ただし，点 v を**指定訪問間隔** q で**定期訪問**するとは，非負整数 r $(0 \leq r < q)$ が存在して v を指定訪問時刻 (q, r) で定時訪問することである．

巡査が一人の場合の全点定時訪問問題では各点を訪問すべき時刻が完全に定められていたため，全点を警邏できるかどうかは任意の 2 点の両方を警邏できるかを判断すれば必要十分であった．一方，全点定期訪問問題では各点を訪問すべき時刻は間隔のみしか定められていないため，同様の判断の仕方ができない．実際，地図が Unit で二点間距離が 1 の場合の全点定期訪問問題は Campbell と Hardin [8]が DVMPD と呼んでいる問題と同じものであり，巡査が一人であっても NP 困難である[8，Theorem 4]．

参考文献

[1] Csaba D. Tóth Adrian Dumitrescu, Anirban Ghosh. On fence patrolling by mobile agents. *arXiv preprint arXiv:1401.6070*, 2014.

[2] Steve Alpern, Thomas Lidbetter, Alec Morton, and Katerina Papadaki. *Patrolling a Pipeline*, pp. 129–138. Springer International Publishing, Cham, 2016.

[3] Steve Alpern, Alec Morton, and Katerina Papadaki. Patrolling games. *Operations Research*, Vol. 59, No. 5, pp. 1246–1257, 2011.

[4] Shoshana Anily, Celia A. Glass, and Refael Hassin. The scheduling of maintenance service. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 82, No. 1, pp. 27–42, 1998.

[5] Amotz Bar-Noy, Randeep Bhatia, Joseph (Seffi) Naor, and Baruch Schieber. Minimizing service and operation costs of periodic scheduling. *Mathematics of Operations Research*, Vol. 27, No. 3, pp. 518–544, 2002.

[6] Sanjoy K. Baruah, Rodney R. Howell, and Louis E. Rosier. *On preemptive scheduling of periodic, real-time tasks on one processor*, pp. 173–179. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1990.

[7] Tomáš Brázdil, Petr Hliněný, Antonín Kučera, Vojtěch Řehák, and Matúš Abaffy. Strategy synthesis in adversarial patrolling games. *arXiv preprint arXiv:1507.03407*, 2015.

[8] Ann Melissa Campbell and Jill R. Hardin. Vehicle minimization for periodic deliveries. *European Journal of Operational Research*, Vol. 165, No. 3, pp. 668 – 684, 2005.

[9] Y. Chevaleyre. Theoretical analysis of the multi-agent patrolling problem. In *Proceedings. IEEE/WIC/ACM International Conference on Intelligent Agent Technology, 2004. (IAT 2004).*, pp. 302–308, Sept 2004.

[10] S. Coene, G. J. Woeginger, and F. C. R. Spieksma. Charlemagne's challenge: The periodic latency problem. In *2009 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, pp. 296–300, Dec 2009.

[11] Andrew Collins, Jurek Czyzowicz, Leszek Gasieniec, Adrian Kosowski, Evangelos Kranakis, Danny Krizanc, Russell Martin, and Oscar Morales Ponce. Optimal patrolling of fragmented boundaries. In *Proceedings of the Twenty-fifth Annual ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures*, SPAA '13, pp. 241–250, New York, NY, USA, 2013. ACM.

[12] Jurek Czyzowicz, Leszek Gasieniec, Adrian Kosowski, and Evangelos Kranakis. Boundary patrolling by mobile agents with distinct maximal speeds. In *ESA*, pp. 701–712. Springer, 2011.