修士学位論文

複数の巡査の協力による指定地点の警邏について

Collaborative Patrolling of Designated Points on Graphs

2017 年度

広域科学専攻・広域システム科学系
31-166813
能城秀彬

目次

［最終変更日時：2018/1/7, 19 時 33 分］

[ToDo]

- **木の場合など，今後の展望について**
- **図の追加・差し替え**
- **関連研究**
  - 文献追加
  - 目標が警邏・定時訪問・定期訪問などがあるが，”periodic ...”のような名前で警邏だったりすることもあるので注意を述べるべきか［はい、色々な呼称があることは列挙して述べると良いと思います。］
  - 警邏、配達、など色々な状況から考えられる問題であることを書いておく
- 最後にチェック
  - 参考文献リストの書式の統一
  - 引用は著者名は 2 人以下なら全員列挙に
  - 単語の統一
    * 緑色にしている一時的な単語を決める
  - 補足（不要？）
    * 2.1 各区間の利得の計算や選ばれた区間に含まれる点の列挙の方法
    * 2.2 節：運行可能集合 S に対して運行 a が存在することの証明
  - 「章」、「節」（修正済み）
  - 運行

第 1 章

はじめに

1.1 問題設定

所与の領域を一人または複数の巡査が動き回り，その領域内の指定された場所を十分な頻度で訪れることを警邏（patrolling）という [8, 3, 4, 6]． ［文献追加］

本稿では，与えられた距離空間 U 内を巡査 m 人が速さ 1 以下で動きまわることにより，有限集合 $V \subseteq U$ に属する点を十分な頻度で訪れるという目標を考える．距離空間 U といっても，V の点どうしを結ぶ最短路以外を巡査が歩むことは無駄であるから，V を頂点集合とし，辺に長さのついたグラフを考え，U はその頂点および辺上の点のみからなるとしてよい．このような空間と点集合の組 (U, V) を**地図**と呼ぶ．

地図 (U, V) における巡査 $i \in \{1, \ldots, m\}$ の**運行** $a_i \colon \mathbf{R} \to U$ とは，各時刻 $t \in \mathbf{R}$ における位置 $a_i(t) \in U$ を定めるものであって，任意の時刻 s，$t \in \mathbf{R}$ に対し $a_i(s)$ と $a_i(t)$ の距離が $|s - t|$ を超えないものをいう．巡査 m 人による**運行**とは，全巡査の運行を定めた組 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ をいう．V の各頂点には利得および放置限度と呼ばれる正整数が定まっている．点 $v \in V$ の放置限度が q であるとき，巡査達が運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ で点 v を**警邏**するとは，長さ q のどの時間にもいずれかの巡査が v を少なくとも一度は訪れる（任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対して巡査 i と時刻 $\tau \in [t, t + q)$ が存在し $a_i(\tau) = v$）ことをいう．巡査達が運行 A により点集合 $W \subseteq V$ を**警邏**するとは，各点 $v \in W$ に対し巡査達が運行 A で v を警邏することをいう．そのような運行が存在するとき W は m 人により**警邏可能**であるという．

点警邏問題． 巡査の人数 $m \in \mathbf{N}$ と地図 (U, V) およびその各頂点の利得と放置限度が与えられる．m 人の巡査により警邏可能な頂点集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．

一つの点を複数の巡査の訪問により警邏し得ることに注意されたい．例えば図 1.1 左は

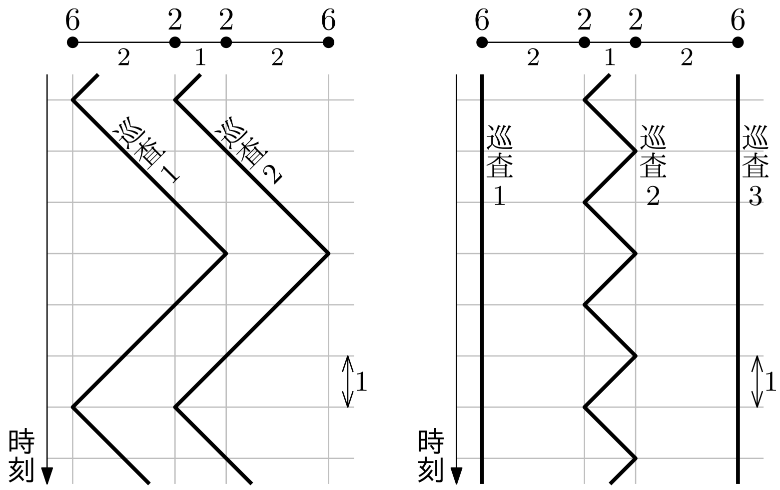


図 1.1　図の上部に描かれている四点からなる Line の地図の全点を警邏する二つの運行．点と辺に書かれた数は，それぞれ放置限度と距離である．左図の運行では二人の巡査が協力して中央の二点を警邏している．これを禁じ，各点がいずれかの巡査により単独警邏されることを求める場合は，右図のように三人の巡査を要する．

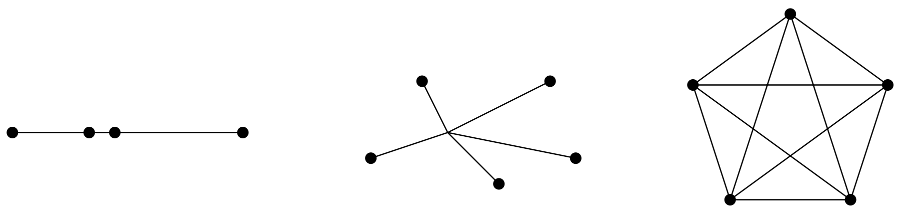
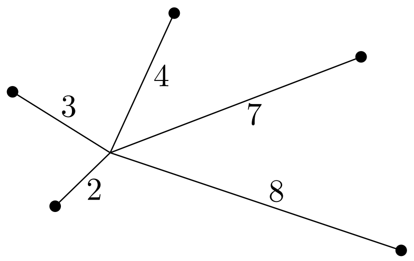


図 1.2　本論文では Line（左），Star（中），Unit（右，但し各辺の長さが等しい）を扱う．Star は葉のみを警邏の対象とする（中央の点は移動の途中で使うのみであり，放置限度は定められていない）．

そのような運行の例である．Coene ら [4] は似た問題を扱っているが，このような協力を許さず，図 1.1 右のように各点を専ら一人の巡査が「担当」することを要求している．つまり，各点 $v \in W$ が**単独警邏**される（すなわち或る一人の巡査がおり，その巡査のみの運行が v を警邏する）ことを要求しているのである．対比のため本稿ではこの問題を独立点警邏問題と呼ぶことにする（[4] では MPLPP と称している）．Coene ら [4] の諸結果においては，この単独警邏という限定が，多項式時間算法の設計にも困難性の証明にも重要な役割を果している．この限定を外したときの様子を調べるのが本稿の目的である．

点警邏問題は，巡査が一人かつ全点の利得と放置限度が等しい場合に限っても，ハミルトン路問題からの帰着により NP 困難である [4, Theorem 8]．そこで本稿では入力される地図を限定する．具体的には線分（Line），星（Star），すべての辺の長さが等しい完全グラフ（Unit）を扱う（図 1.2）．このうち Star では各葉 v のみに放置限度（と中心からの距離 d_v）が定められている．つまり厳密には，警邏の対象となる頂点集合 V は葉のみ



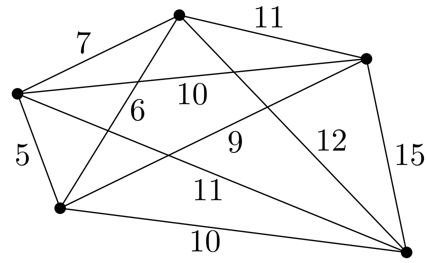


図 1.3　左図の Star は，各二点間に右図のような距離を定める．

であり，その二点 u，$v \in V$ 間の距離が和 $d_u + d_v$ の形で表されるという性質を満す完全グラフと考えてよいのであるが（図 1.3），以下では便宜上図 1.2 や図 1.3 左のような形状で図示・説明を行う．こう考えると各辺の長さが d の Unit は，中心から各頂点への距離が $d/2$ の Star と同じであるから，Unit は Star の特殊な場合である．

点警邏問題についての我々の結果を Coene らの独立点警邏問題についての結果との比較も含めて地図の形ごとにまとめると次のようになる．それぞれ 2，3，4 章で述べる．

- Line の独立点警邏問題は動的計画法により多項式時間で解けることが示されていた [4, Theorem 11] が，その正しさは単独警邏という設定に強く依存している．本稿では点警邏問題について，全点の放置限度が等しい場合には多項式時間で解けることを示す（定理 2.1）．
- Star については，全点の利得と放置限度が等しい場合に限っても，独立点警邏問題は NP 困難であることが示されていた [4, Theorem 10]．本稿では，この場合の点警邏問題は多項式時間で解けるという興味深い結果を得る（定理 3.1）．なお利得または放置限度を一般にすると，巡査が一人であっても（したがって独立かどうかによらず）NP 困難であることがわかっている [4, Theorems 5 and 6]．
- Unit については，本稿では全点の放置限度が等しい場合は点警邏問題が多項式時間で解けることを示す（定理 4.1）．地図が Star の場合は全点の放置限度が等しくても利得が一般だと NP 困難になるので，これにより Unit は Star よりも簡単に解ける場合となっていることが分かる．

Line や Unit については，全点の放置限度が等しい場合には上述のように多項式時間で解けるが，放置限度が一般の場合には多項式時間アルゴリズムを見つけることができなかった．Star の点警邏問題は上述の通り NP 困難なので [4, Theorems 5 and 6]，Line や Unit についても NP 困難ではないかと予想したが，これも示すことができなかった．これらの未解決な場合については，警邏ではなく定時訪問を目指す次のような問題を考えた．運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が点 $v \in U$ を指定訪問時刻 (q, r) $(q \in \mathbf{N}, r \in \{0, 1, \ldots, q-1\})$ に**定時訪問**するとは，任意の時刻 $t := qk + r$ $(k \in \mathbf{Z})$ に対し巡査 i が存在し $a_i(t) = v$ で

あることをいう．

定時訪問問題． 巡査の人数 m と地図 (U, V) および V の各点の指定訪問時刻と利得が与えられる．m 人の巡査により全点を定時訪問可能な V の部分集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．

また，利得最大化ではなく全点を定時訪問可能か判定する問題を定時訪問判定問題と呼ぶ．

Line については定時訪問判定問題を解く貪欲アルゴリズムを 2.2 節で示す．Unit については定時訪問問題が NP 困難であることを示す（定理 4.2）．

本論文は，電子情報通信学会○○ [] 及び△△◆◆□□ [] で発表した内容を含む．

1.2　関連研究

［文章化，引用の追加］

警邏に関する問題には様々な設定が考えられている．

［メモ］

- 問題設定の大枠について
  - 現実世界の平面上を動く巡査の警邏のモデル化として，警邏対象が存在する部屋の周囲を巡回するものや，部屋の内部を巡査が動き回るものなどが考えられる．
    - 前者は「塀の警邏問題 (fence patrolling)」・「境界の警邏問題 (boundary patrolling) などの名前で知られており，塀を表す線分または閉路のすべての点を警邏対象とするもの [6, 7, 11]，より一般に線分や閉路の一部のみを警邏対象とする問題などが考えられている [5].
    - 部屋の内部を警邏する場合には部屋の内部には複数の障害物が存在する状況が考えられる [].
  - 点警邏問題では，放置限度の条件さえ満たしていれば警邏できるという設定で考えており，侵略者の動きなどは具体的に考えていないが，侵略者の動き方まで含めてゲーム理論的に考察している研究も存在する [1, 14].
  - 点警邏問題では，巡査達の動きを決定論的に与えるので，モデル化したい現実の状況によっては十分賢い侵略者に対応される可能性がある．このような欠点を補うため，巡査の運行にランダム性を取り入れたものがある [].
  - 点警邏問題では，警邏対象の環境が与えられたときに最適な巡査の運行を最初に決定してしまって，巡査がその通りに動くという意味で，中央集権的な運行

の決定の仕方である．一方で，巡査がその近傍の情報から各々の判断で運行を決定するという設定のものも考えられている [].

- 問題に対する様々なアプローチ
  - 理論的な研究を行うもの []
  - ヒューリスティックな戦略を先に与え，計算機でシミュレーションを行うもの []
  - 実際のロボットで実験しているものもある [].
- 点警邏問題を考える動機
  - 巡査が障害物を含む 2 次元平面内を動き回り警邏するという目的の問題において，障害物を含む 2 次元平面をグラフに簡略化して考えるというところから，グラフの点を警邏するという問題が考えられていた [13].
  - （なぜ図形として Line, Star, Unit を考えたか？）→ Line は塀の警邏などの文脈でよく現れるため []．Star は木の特殊な場合であり，グラフが木の場合の点警邏問題の困難性の評価に有用な図形である．グラフの点の警邏を行うために，そのグラフの最小全域木を計算し代わりにこれを警邏するとする研究もある [] ［確認］．
- 似た問題設定の他の研究との細かい違いについて
  - 目標（いずれも与えられた m 人の巡査で全点を警邏できるか判定する問題の一般化）
    - 全点警邏可能な最小の巡査数を求める [] [10]
    - 与えられた巡査により警邏可能な部分集合であって点の数や利得の合計が最大のものを求める []
    - 与えられた巡査により全点を警邏する上で，各点の訪問頻度を（同程度にする・平均値を最大化する・最小の訪問頻度を最大化する）[]
- 拡張について
  - 我々の考える点警邏問題は，非常に単純な図形についてさえ NP 困難性が示されていたり，多項式時間アルゴリズムを示すことができていない場合が存在する．よって，点警邏問題に対して問題設定の拡張を考えること自体はできても厳密な最適解を得る効率的なアルゴリズムは望みがたい．
  - 例えば，巡査の速さの上限が異なる場合などを考えることもできるが，点警邏問題については・・・［調べる］．塀の警邏問題について速さの上限が異なる巡査の場合について調べている研究はいくつか存在する [] が，一般の状況に対する最適解を与えることには成功していないようである [] ［確認］．
  - 点警邏問題ではある点を訪問するには通過する（時間 0 滞在する）だけでよいが，より一般に時間 $s \geq 0$ 滞在することを要求するという拡張が考えられる．

しかしこれについては，点 p を警邏するのに時間 s 滞在しなければならない状況を，p から長さ $s/2$ の辺を伸ばした先の点 p' を代わりに警邏対象とし必要滞在時間 0 である場合に帰着できるため拡張にはなっていない．また，このような変換により Line は図**??**［図を作る］のように二分木に変換されるので，点警邏問題を木やその特殊な場合である Star や Unit について調べることは正の滞在時間の設定された Line の警邏にも関係が深い．

  – 巡査が視野を持つ

- その他
  – 分割戦略と巡回戦略
    * 多くの場合 TSP の解に基づく巡回戦略が最適だが，長い辺がある場合は分割戦略が有利であり，また巨大グラフの場合には TSP の解の計算コストが大きくなる問題がある．
    * TSP の解に基づく巡回戦略が多くの場合最適なので，TSP の解を求める近似アルゴリズムにより巡査の運行を決めるものもある．グラフを最小全域木に簡単化し，この上で TSP の解を求め巡回戦略を与えるという近似をしているものがある．→ グラフが木の場合の多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのは重要である．

第 2 章

Line

地図 (U,V) が Line の場合，U を実直線としてよい．本章では，V の各点の位置は実数値とする．

Line における巡査 m 人の運行 $A=(a_1,\dots,a_m)$ が任意の時刻 $t\in\mathbf{R}$ で $a_1(t)\le a_2(t)\le\cdots\le a_m(t)$ を満すとき，A は**順序保存**であるという．巡査 m 人で警邏可能な任意の点集合 W は，或る巡査 m 人の順序保存運行により警邏される．これは，W がある運行により警邏されるならば，その運行で二人の巡査がすれ違うときに代わりに互いの以降の運行を交換し引き返すようにした運行（巡査の速さの上限がすべて等しいため巡査が互いの運行を一部だけ交換することができる）によっても W が警邏されるためである．

2.1 全点の放置限度が等しい場合

本節では次のことを示す．

定理 2.1. 地図が Line で全点の放置限度が等しい場合，点警邏問題は多項式時間で解くことができる．

これに関し，Collins ら [5] は次の問題を考えた．

> 巡査数 m と線分 C といくつかの区間 $V_1,\dots,V_n$ $(V_i\subseteq C,\ i\in\{1,\dots,n\})$ が与えられる．C 上を速さ 1 以下で動く m 人の巡査が $\bigcup_{i=1}^n V_i$ に含まれるすべての点を訪問する．$\bigcup_{i=1}^n V_i$ の点のうち，放置される時間が最大の点の放置時間が最小になるようにするとき，その最小値を求めよ．

この問題は多項式時間で解けることが示されている [5, Theorem 2.1]．$V_1,\dots,V_n$ として一点集合を与えることにより，地図が Line で全点の放置限度が等しい場合は全点を警邏可能か判定する問題を多項式時間で解くことができることが分かる．

これに対し，定理 2.1 は利得最大化問題である点警邏問題が多項式時間で解けるという主張である．

以降では，地図が Line で全点の放置限度が等しい場合，次に定義する独立往復運行という単純な運行によって最大利得が得られることを示す．

定義 2.2. 地図 (U, V) が Line で全点の放置限度が q とする．点 $v_i \in V$ を左端とする長さ $q/2$ の区間 $[v_i, v_i + q/2]$ を S_i と書く．運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が独立往復運行であるとは，各 a_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ が $S_1, \ldots, S_n$ のいずれかを往復する運行であって，$a_1, \ldots, a_m$ の往復区間が互いに重複していないことである．

補題 2.3. 点 v がある一人の巡査 s により単独警邏されているとき，放置限度を q として，s は常に区間 $[v - q/2, v + q/2]$ にいる．

証明 この区間にない或る位置 $v_{\text{out}} \notin [v - q/2, v + q/2]$ を s が時刻 t_0 に訪問するとする．v_{out} と v の間の移動には少なくとも時間 $|v - v_{\text{out}}| > q/2$ を要するから，s は区間 $[t_0 - q/2, t_0 + q/2]$ に属する時刻に v を訪問できない．この区間の長さは q であるので，s が v を単独警邏していることに反する． □

補題 2.4. 地図 (U, V) が Line で全点の放置限度が等しいとする．V の任意の部分集合 W について，W が巡査 m 人により警邏可能ならば W は巡査 m 人による独立往復運行で警邏可能である．

証明 巡査数 m に関する帰納法で示す．全点の放置限度を q とする．$m = 0$ のときは明らかなので，以下 $m > 0$ とする．

W は m 人の巡査により警邏可能であるので，2 章始めの議論により W を警邏する m 人の巡査による順序保存運行が存在する．このような運行を任意に一つ選び $A = (a_1, \ldots, a_m)$ とする．

W の点のうち最も左にあるものを u とする．まず，各巡査は u より左に存在する時間 u で停止するように変換する．このようにしても W は警邏されたままであり，またこれによりすべての巡査は区間 $[u, +\infty)$ に存在することになる．

ここで，A で最も左を運行する巡査 1 に注目する．順序保存であることから u が A により訪問されるすべての時刻に巡査 1 は u を訪問しているので，u は a_1 により単独警邏されている．補題 2.3 より，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対し $a_1(t) \leq u + q/2$ である．一方，巡査 1 が区間 $[u, u + q/2]$ を速さ 1 で往復する運行 a_1' を行うと，a_1' はこの区間に含まれるすべての点を警邏する．実際，$u \leq x \leq u + q/2$ である位置 x が運行 a_1' により訪問される間隔の最大値は $\max(2(x - u), 2(u + q/2 - x)) \leq 2(u + q/2 - u) = q$ より，$[u, u + q/2]$ に含まれるどの点も放置限度を超えずに訪問できていることが分かる．よって，V の点の

うち a_1 が訪問することがあるものはすべて a'_1 により警邏される．

また，$W^- := \{v \in W \mid u + q/2 < v\}$ は A で巡査 1 以外の $m-1$ 人の巡査により警邏されている．ゆえに帰納法の仮定から W^- は，残る $m-1$ 人の巡査の独立往復運行より警邏される．この運行と a'_1 を合せると，W を警邏する独立往復運行が得られる． □

補題 2.4 により，地図 (U, V) が Line で全点の放置限度が等しい場合は独立往復運行のみを考えればよい．よって，区間 $S_1, \ldots, S_n$ $(S_i := [v_i, v_i + q/2], v_i \in V)$ から m 人の巡査がそれぞれ担当する重複のない m 個の区間のうち利得の合計が最大となるものを求め，それらに含まれる点を求めればよい．これは以下のアルゴリズムにより求めることができる．

初めに Line 上の点をソートしておき，左側から順に $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする．n 個の区間 $S_1, \ldots, S_n$ について各区間 S_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ に含まれる点から得られる利得の合計 $P_i := \sum_{v_j \in S_i} p_j$ を求める．各区間 S_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ について，S_i と重複部分のない区間の添え字のうち i 未満で最大のもの（存在しない場合は 0 とする）を求め，h_i と書く．$v_1, \ldots, v_n$ がソートしてあるので $P_1, \ldots, P_n$ と $h_1, \ldots, h_n$ を合計 $O(n)$ で求めることができる．次に，漸化式 (2.1) に従う動的計画法で利得の合計が最大となる重複のない m 個の区間を選ぶ（m は巡査数）．$OPT(k, l)$ は，区間 $S_1, \ldots, S_l$ から最大 k 個の重複のない区間を選ぶときの利得の合計の最大値を表す．$OPT(m, n)$ が全体の利得の最大値となる．

$$OPT(k,l) = \begin{cases} 0 & k = 0 \text{ または } l = 0 \text{ のとき} \\ \max\{OPT(k, l-1), P_l + OPT(k-1, h_l)\} & \text{それ以外の場合} \end{cases} \tag{2.1}$$

最後に，$OPT(m, n)$ において選ばれた区間をトレースバックして求め，この区間に含まれる点全体を出力して終了する．

このアルゴリズムの計算量は全体で $O(n \log n + nm)$ となる．これで定理 2.1 が示された．

なお，2.1 節の冒頭で上げた Collins らの問題で最適と示されている戦略は，上で述べた独立往復運行を拡張したものになっている [5, Theorem 2.1].

2.2　放置限度が一般の場合

全点の放置限度が等しい場合は，結局巡査がそれぞれ区間を 1 つずつ担当し往復する運行のみ考えればよいという単純な状況になっていたが，放置限度が一般の場合は，一部の点を複数の巡査が訪問して警邏する必要がある場合が存在する．図 2.1（左）の例では，中央の放置限度の短い 2 つの点は 2 人の巡査に訪問されており，また，全点の放置限度が

等しい場合に反して各巡査の最適な運行はなんらかの区間の往復であるとは限らないことも分かる．また，この例では左の巡査は左端の点を放置限度ちょうどごとに訪問しているが，一方，図 2.1（中央）の例では，左側の巡査は左端の点をあえてより短い周期で訪問することで全点を警邏している．図 2.1（中央）と同じ入力に対して，図 2.1（右）のように左の巡査が左端の点の放置限度ぎりぎりの時間まで右の方へ動き左端へ帰る運行を行うと 2 人の巡査がうまく協力できず全点の警邏ができない．このように，補題 2.4 のときのように左端の点の放置限度から順に巡査の運行を決定することも難しい例が存在する．

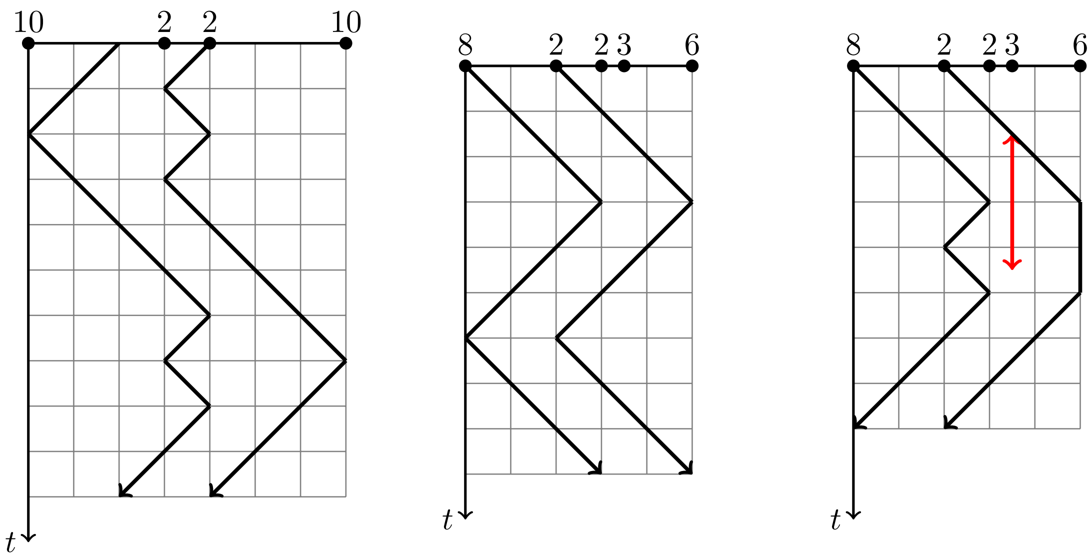


図 2.1　巡査の協力が必要な例．横軸を点の座標，縦軸を時刻として巡査の軌跡を表す．点の上の数値は放置限度を表す．［あとで図を差し替える］

これらの例は，放置限度が異なる場合は巡査の運行を個別に決定するのは難しいということを示唆している．しかしながら，地図が Line で放置限度が一般の場合での点警邏問題の困難性を示すこともできなかった．そこで，放置限度より短い間隔で点を訪問しうることで運行の決定が複雑になる例が存在したことを踏まえて，ここでは 1 章で定義した定時訪問判定問題という別種の問題を代わりに考える．

地図が Line の場合の定時訪問判定問題は，正の整数 m と n 個の自然数の組 $(q_i, r_i, x_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ が与えられたとき，集合 $\{(q_i k + r_i, x_i) \mid k \in \mathbf{Z}, i \in \{1,\dots,n\}\}$ を m 個以下の運行可能集合に分割できるか判定する問題と言い換えることができる．ただし，集合 $S \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ が**運行可能**であるとは，任意の $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in S$ が $|x_1 - x_2| \le |t_1 - t_2|$ を満たすことであり，分割 $\{P_1, \dots, P_h\}$ が**運行可能**であるとは，$P_1, \dots, P_h$ がそれぞれ運行可能であることと定義する．［運行可能分割の説明の図］任意の運行可能集合 S に対して，Line 上の巡査の運行 a であって，S のすべての元 (t, x) に対して $a(t) = x$ を満たす（このとき a を運行可能集合 S に対応する運行と呼ぶ）ものが

存在することは簡単に示すことができる．

地図が Line の場合の定時訪問判定問題は以下に示す貪欲アルゴリズムにより解くことができる．

まず，地図が Line の場合は順序保存運行を考えることができるのと同様に，順序保存（運行可能）分割を考えることができる．分割 $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_h\}$ が順序保存であるとは，$\mathcal{P}$ に対応する運行 $A = (a_1, \ldots, a_h)$ であって順序保存なものが存在すること，あるいは，

$$L(t, x) := \{(t', x') \mid |x - x'| > |t - t'| \text{ かつ } x' < x\} = \{(t', x') \mid x - x' > |t - t'|\}$$

として，任意の P_i $(i \in \{1 \ldots, h\})$ について，領域 $\bigcup_{(t,x)\in P_i} L(t, x)$ に P_j $(i < j)$ の点が存在しないことと定義する．［L の説明の図］

$X := \{(q_i k + r_i, x_i) \mid k \in \mathbf{Z}, i \in \{1, \ldots, n\}\}$ の任意の順序保存分割のうち一番左の集合は順序保存分割の定義から $\mathfrak{P}_1 := \{(t, x) \in X \mid L(t, x) \cap X = \emptyset\}$ の部分集合となる．よって，X の最小の順序保存分割であって一番左の集合が $\mathfrak{P}_1$ であるようなものが存在する．同様に，残りの $X \setminus \mathfrak{P}_1$ の最小の順序保存分割であって一番左の集合が $\mathfrak{P}_2 := \{(t, x) \in X \setminus \mathfrak{P}_1 \mid L(t, x) \cap X \setminus \mathfrak{P}_1 = \emptyset\}$ であるようなものが存在する．このように，集合 X の左側から貪欲に運行可能集合を取り出していく操作を再帰的に繰り返すと，最小の順序保存分割 $\{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_h\}$ が得られる．これを $\mathfrak{P}(X)$ と書くことにする．全点を定時訪問可能かどうかは $|\mathfrak{P}(X)| \leq m$ が成り立つか判定すればよい．

以下では，集合 $S \subseteq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に対して $S_{[a:b)} := \{(t, x) \in S \mid a \leq t < b\}$ と定義する．

$q_1, \ldots, q_n$ が整数であるので X は時刻（組 $(t, x) \in X$ の第 1 要素）について周期的であり，その周期は $q_1, \ldots, q_n$ の最小公倍数 T となる（すなわち，任意の整数 k に対して，$(t, x) \in X_{[kT:(k+1)T)}$ と $(t - kT, x) \in X_{[0:T)}$ が同値である）．従って，前述の貪欲な分割 $\mathfrak{P}(X)$ の各要素 $\mathfrak{P}_i$ $(i \in \{1, \ldots, h\})$ も同様に時刻について周期的である（すなわち，任意の $\mathfrak{P}_i$ と整数 k に対して，$(t, x) \in \mathfrak{P}_{i[kT:(k+1)T)}$ と $(t - kT, x) \in \mathfrak{P}_{i[0:T)}$ が同値である）．よって，X の最小の運行可能分割 $\mathfrak{P}(X) = \{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_h\}$ の大きさを計算するには，$X_{[0:T)}$ の運行可能分割 $\{\mathfrak{P}_{1[0:T)}, \ldots, \mathfrak{P}_{h[0:T)}\}$ を計算できればよい．

ここで，$\mathfrak{P}(X_{[0:T)})$ と $\mathfrak{P}(X)$ の大きさは必ずしも一致しないことに注意する必要がある．前述の貪欲な分割の仕方で集合 S から左端の運行可能集合 $s' := \{(t, x) \in S \mid L(t, x) \cap S = \emptyset\}$ を取り出すとき，s' の点 (t, x) の条件は領域 $L(t, x)$ に S の点が存在しないことである．X を $\mathfrak{P}(X)$ へ分割するときと「同じ条件で」$X_{[0:T)}$ を分割する（すなわち，$X_{[0:T)}$ を $\{\mathfrak{P}_{1[0:T)}, \ldots, \mathfrak{P}_{h[0:T)}\}$ に分割する）には，

$$X' := \{(t, x) \in X \mid (t', x') \in X_{[0:T)} \text{ が存在して } (t, x) \in L(t', x')\}$$

として $\mathfrak{P}(X')$ を求めればよい．

以下の有限集合 F の分割 $\mathfrak{P}(F)$ を与える最小運行可能分割アルゴリズム の入力と

して X' を与え，出力された分割 $\mathcal{P}$ の各要素を $[0:T)$ に制限すれば $X_{[0:T)}$ の分割 $\{\mathfrak{P}_{1[0:T)}, \ldots, \mathfrak{P}_{h[0:T)}\}$ が得られる．

最小運行可能分割アルゴリズム． 入力を有限集合 F とする．初期値を $\mathcal{P} = \{\}$, $F' = F$ とし，$F' \neq \emptyset$ である限り次の 1 から 3 を繰り返す．

1. $P \leftarrow \{(t,x) \in F' \mid L(t,x) \cap F' = \emptyset\}$
2. $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{P\}$
3. $F' \leftarrow F' \setminus P$

$\mathcal{P}$ を出力する．

第 3 章

Star

地図が Star の場合については，利得か放置限度のいずれかが一般であれば，点警邏問題は巡査が一人であっても NP 困難であることが知られている [4, Theorems 5 and 6]．よってここでは，巡査数が一般であって全点の利得と放置限度が等しい場合についての次のことを示す．

定理 3.1. 地図が Star で全点の利得と放置限度が等しい場合，点警邏問題は（巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

独立点警邏問題においては，地図が Star で巡査数が一般の場合は利得と放置限度がすべて等しくても NP 困難になることが Coene らにより示されている [4, Theorem 10]．Line の場合では複雑な協力による警邏があり得たこと（2.2 節）から考えると，単独警邏の条件を外した点警邏問題の方が簡単に解けるというのは意外な結果に思われる．これは，Star の場合，独立点警邏問題では単独警邏の条件のためにうまく点集合を分割しなければならないことが難しさを生み NP 困難になるのに対し，点警邏問題では単独警邏の条件が無いことで後述の定理 3.3 の証明中に述べる単純な運行が可能となるためである．

図 1.2，1.3 で注意したように Star の中心は警邏すべき点ではないが，本章では中心と点 v を結ぶ辺（両端点を含む）を e_v，その長さを d_v と書く．なお，中心も警邏すべき点である場合を考えるには，$d_v = 0$ であるような点 v を追加すればよい．

補題 3.2. Star において，放置限度 q の点 v が警邏されているならば，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対し，長さの和が $\min(2d_v, q)$ であるような互いに交わらない有限個の時刻区間の合併 $J \subseteq [t, t+q)$ が存在し，J に属するすべての時刻において少なくとも一人の巡査が辺 e_v 上にいる．

証明　もし $2d_v > q$ ならば，常に e_v 上に巡査が存在する．何故なら，もし e_v 上に巡査がいない時刻 τ があれば，長さ $2d_v$ の時刻区間 $(\tau - d_v, \tau + d_v)$ にわたって v が放置され，

仮定に反するからである．よって $J=[t,t+q)$ とすればよい．以下では $2d_v \le q$ とする．

警邏の条件から v は時刻区間 $[t,t+q)$ に少なくとも 1 回訪問される．もしその訪問時刻のうち $[t+d_v, t+q-d_v)$ に属するもの τ があれば，長さ $2d_v$ の時刻区間 $J=[\tau-d_v, \tau+d_v]$ にわたって巡査は辺 e_v 上におり，これは $[t,t+q)$ に含まれる．

そうでないとき，v は $[t,t+d_v)$ か $[t+q-d_v, t+q)$ に少なくとも 1 回訪問される． (i) $[t,t+d_v)$ に訪問されるとき，$[t,t+d_v)$ に属する最後の訪問時刻を τ とすると，点 v の警邏の条件と場合分けの条件から τ の次の訪問時刻 σ は $t+q-d_v < \sigma \le \tau+q$ を満たす．τ と σ それぞれの前後 d_v の時間のうち $[t,t+q)$ に含まれる時刻区間 $J=[t,\tau+d_v] \cup [\sigma-d_v, t+q)$ にわたって巡査は辺 e_v に存在し，その長さは $q-\max(0,(\sigma-d_v)-(\tau+d_v)) = \min(q, q-\sigma+\tau+2d_v) \ge 2d_v$．(ii) $[t+q-d_v, t+q)$ に 1 回以上訪問されるときも i と同様． □

補題 3.3. 地図が Star で全点の放置限度が q のとき，点集合 V の部分集合 W が m 人の巡査により警邏可能であるには，

$$\sum_{v\in W} \min(2d_v, q) \le mq \tag{3.1}$$

が成立つことが必要十分である．

証明 十分であることを示す．(3.1) が成り立つとき，m 人の巡査の運行 $(a_1,\ldots,a_m)$ を次のように定めれば W の全点を警邏可能である．$W' := \{v\in W \mid 2d_v \ge q\}$, $l := m-|W'|$ とする．まず，$|W'|$ 人の巡査 $s_{l+1},\ldots,s_m$ は W' の各点に一人ずつ停止しこれを警邏する．巡査 $s_1,\ldots,s_l$ は速さ 1 で動きながら $W\setminus W'$ の全点をちょうど 1 度ずつ訪問する巡回を繰り返す．このとき，巡査 s_i は巡査 s_1 より時間 $(i-1)q$ 遅れて同じ運行を行うようにする (すなわち，$a_i(t)=a_1(t-(i-1)q)$ となるように運行を定める)．中心点と点 v の 1 回の往復には $2d_v$ の時間を要するので，一人の巡査がある点から出発し速さ 1 で $W\setminus W'$ の全点を 1 度ずつ訪問して最初の点に戻ってくるのにかかる時間は $\sum_{v\in W\setminus W'} 2d_v$ である．この時間は $\sum_{v\in W\setminus W'} 2d_v = \sum_{v\in W}\min(2d_v,q) - |W'|q \le (m-|W'|)q$ より $(m-|W'|)q$ 以下となるので $(m-|W'|)q$ 人の巡査が先ほどの巡回を行うと，$W\setminus W'$ のどの点も時間 q 以上放置されない．これにより W の全点が警邏される．

必要であることを示す．W が m 人の巡査により警邏されているとすると，補題 3.2 より，各点 $v\in W$ について，どの長さ q の時間にも $\min(2d_v,q)$ の時間は少なくとも一人の巡査が e_v 上に存在する．よって，W の全点の警邏には時間 q あたり合計 $\sum_{v\in W}\min(2d_v,q)$ の巡査の時間を要する．巡査は同時に 2 つ以上の辺上には存在できないので，全点警邏しているならば (3.1) が成り立つ． □

補題 3.3 より Star の任意の点部分集合 W が警邏可能であるかを W の点の隣接辺の長

さだけから簡単に計算できることが分かった．定理 3.1 では，全点の利得と放置限度が等しい場合を考えているので警邏する部分集合としては隣接辺の短い点から順に選べばよい（2 点 v, w について，$d_v > d_w$ ならば，w を警邏せず v を警邏する運行は v を警邏せず w を警邏する運行に必ず変換できる）．以上で定理 3.1 が示された．

木の場合

［編集中］

Star を一般化した地図の形状として木を考えることができる．Star のときと同様，木の各葉のみに放置限度が定められているとする．長さが 0 の辺を許せば，任意の木はその葉どうしの距離を保ったまま二分木に変換できるので，本節では二分木の地図を Tree と呼び，Tree の場合の点警邏問題について考える．

Coene ら [4] は独立点警邏問題を地図が Tree の場合について調べている．独立点警邏問題においては，巡査が一人かつ全点の利得と放置限度が等しい場合は，地図が Tree であっても多項式時間で解ける [4, Corollary 3] のに対し，巡査数，利得，放置限度のいずれか一つでも一般の場合は Star であっても NP 困難である [4, Theorems 5, 6 and 10]. 巡査が一人の場合は点警邏問題と独立点警邏問題は同じ問題であるから，Tree で全点の利得と放置限度が等しいときは多項式時間で解くことができ，利得か放置限度のいずれかが一般の場合は NP 困難であることは直ちに分かる．一方，巡査数が一般で全点の利得と放置限度が等しい場合は，点警邏問題では地図が Star のとき多項式時間で解けるので，Tree でどうなるかは未解決である．

我々はまず，星ではない二分木の例として図**??**［図追加］のような例を考えた．図**??**の例では，2 点からなる 2 つの星の中心どうしが一本の橋で結ばれている．ここで，この Tree の地図の全点警邏に必要な最小の巡査数を考えてみる．まず，左右の星を独立に Star に対する最適戦略で警邏する運行が考えられる．これを**左右独立運行**と呼ぶことにする．補題 3.3 から星それぞれは全点警邏に 2 人，合計 4 人の巡査を要することが分かる．一方，図**??**のような巡回を繰り返す運行を 3 人の巡査が放置限度 10 ずつずれて行うと全点を警邏できる．このように巡査全員が全体を一度ずつ訪問する巡回を繰り返す運行を**全員協力運行**と呼ぶことにする．図**??**の例には存在しないが，隣接辺が $q/2$ より長い点が存在する場合は全員協力運行では巡査が一人停止して担当するものとする．

この例で仮に橋の長さが 10 などとしてみると，全員が全体を巡回する 2 つ目の戦略で 3 人の巡査では全点警邏ができなくなり，巡査 4 人による左右独立運行が最小人数の運行となる．このように，橋の長さによっては橋を渡るべきかどうかが変わる．

より一般に 2 つの星とその中心間を結ぶ長さ b の橋からなる Tree の地図 T について考える．左右の星の点集合をそれぞれ L, R とする．全点の放置限度を q とする．また，以

下では $S_V := \sum_{v\in V} \min(2d_v, q)$ と書くことにする．

左右独立運行では，補題 3.3 より，星 L の全点警邏に $\lceil S_L/q \rceil$ 人，星 R の全点警邏に $\lceil S_R/q \rceil$ 人の巡査を要する．全員協力運行では T 全点の警邏に $\lceil (2b+S_{L\cup R})/q \rceil = \lceil (2b+S_L+S_R)/q \rceil$ 人の巡査を要する．よって，T は多くとも $\min(\lceil (2b+S_L+S_R)/q \rceil, \lceil S_L/q \rceil + \lceil S_R/q \rceil)$ の巡査で警邏できる．

T の左右の星はそのままで橋の長さだけ短くした Tree を T' とすると，T' の警邏に必要な最小巡査数は明らかに T の警邏に必要な最小巡査数以下となる（橋に存在する時間が同じになるような運行を考えればよい）．T の橋の長さを 0 にしたものを T' とすると，T' 全体は点集合が $L \cup R$ の Star となり，全点警邏には $\lceil (S_L+S_R)/q \rceil$ 人の巡査が必要である．よって，T の警邏には少なくとも $\lceil (S_L+S_R)/q \rceil$ 人の巡査が必要である．

以上より，T 全点の警邏に必要な巡査の最小数を $m_{\min}$ と書くと，

$$\lceil (S_L+S_R)/q \rceil \le m_{\min} \le \min(\lceil (2b+S_L+S_R)/q \rceil, \lceil S_L/q \rceil + \lceil S_R/q \rceil)$$

となる．我々は $m_{\min} = \min(\lceil (2b+S_L+S_R)/q \rceil, \lceil S_L/q \rceil + \lceil S_R/q \rceil)$，即ち，左右独立運行と全員協力運行のいずれかが最適であると予想しているが，これを示すことはできていない．

第 4 章

Unit

1 章で述べたように Unit は Star の特殊な場合とみなせるため，全点の利得と放置限度が等しい場合，点警邏問題は定理 3.1 により多項式時間で解くことができる．ここでは，Unit で全点の放置限度が等しい場合の点警邏問題が（利得が異なっていても）多項式時間で解けることを示す（定理 4.1）．

放置限度が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しかったため，2 章で扱った定時訪問問題を再び考える．地図が Unit の場合は定時訪問問題が NP 困難になることを示す（定理 4.2）．

4.1　全点の放置限度が等しい場合

定理 4.1. 地図が Unit で全点の放置限度が等しい場合，点警邏問題は（利得，巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

証明　Unit は Star の特殊な場合であるから，補題 3.3 から Unit の地図 (U, V) の V の全点の放置限度が q のとき，点集合 V の任意の部分集合 W について W を m 人の巡査により警邏可能であることの必要十分条件は d を各辺の長さとして

$$\sum_{v \in W} \min(d, q) = |W| \min(d, q) \leq mq$$

である．

地図が Unit の場合，全点の放置限度が等しいならば警邏する部分集合 W は利得の大きい点から選べばよい（2 点 v, w について，w より v の方が利得が大きい場合，w を警邏せず v を警邏する運行は v を警邏せず w を警邏する運行に必ず変換できる）．$|W| \min(d, q) \leq mq$ を満たす最大の $|W|$ は $|W| = \lfloor mq / \min(d, q) \rfloor$ であるので，利得の最も大きい $\lfloor mq / \min(d, q) \rfloor$ 点を選べばよい．□

Star で全点の放置限度が等しい場合は，警邏可能な点の最大数が式 (3.1) で与えられることから，利得が等しい場合は枝の短いものから選べばよく（定理 3.1），枝の長さが等しい場合は利得の大きいものから選べばよい（定理 4.1）というようにまとめることができる．

4.2　放置限度が一般の場合

3 章冒頭で述べた通り，地図が Star の場合については，放置限度が一般の場合は点警邏問題は巡査が一人であっても NP 困難であった [4, Theorem 6]．この NP 困難性の証明では辺の長さが異なる Star の地図を用いていた．Unit は Star の辺の長さがすべて等しい場合であるため，この方法による NP 困難性の証明ができない．Unit で放置限度が一般の場合は多項式時間アルゴリズムや NP 困難性の証明が難しかったため，Line のときのように定時訪問問題を代わりに考える．

地図 (U, V) が Unit で各点 $v_i \in V$ の指定訪問時刻が (q_i, r_i) のとき，巡査一人で V の全点を定時訪問可能かどうかは次のように多項式時間で判定できる．辺の長さを d とすると，V の異なる 2 点 i, j の間の移動には時間 d を要することから，その両方を定時訪問できるためには，訪問すべき時刻同士がすべて d 以上離れていること，すなわち任意の整数 k, l に対して $|(q_i k + r_i) - (q_j l + r_j)| \geq d$ が成り立つことが必要十分である．g を q_i と q_j の最大公約数として，これは任意の整数 n で $|(r_i - r_j) + gn| \geq d$ が成り立つことに等しいので，r_i, r_j をそれぞれ g で割った余りを r'_i, r'_j として $|(r'_i - r'_j)|$，$|(r'_i - r'_j) + g|$，$|(r'_i - r'_j) - g|$ のいずれも d 以上となることに等しい．全点を定時訪問可能かどうかは，この条件を V のすべての 2 点について確かめればよい．

全点を定時訪問可能か判定する問題は多項式時間で解けるのに対し，定時訪問問題では次が成り立つ．

定理 4.2. 地図が Unit のとき，定時訪問問題は巡査が一人で全点の利得が等しい場合であっても NP 困難である．

証明　NP 困難であることが知られている最大独立集合問題からの帰着による．最大独立集合問題は，無向グラフが与えられたとき，どの二点間にも辺が存在しないような頂点集合（独立集合）のうち頂点の個数が最大のものを求める問題である．

最大独立集合問題の入力として点集合 $[n] = \{1, \ldots, n\}$，辺集合 E のグラフ G が与えられたとする．同じ大きさの点集合 V をもち，利得をすべて 1，辺の長さをすべて 1 とした Unit の地図 $M = (U, V)$ を考える．各点 $i \in V$ の指定訪問時刻 (q_i, r_i) を次のように定める．まず，$n(n-1)/2$ 個の相異なる素数 p_{ij} $(1 \leq i < j \leq n)$ を用意する．$i > j$ に

対して p_{ij} と書くときは p_{ji} を指すことにする．各 $i \in V$ について，

$$q_i = \prod_{j \in [n] \setminus \{i\}} p_{ij} \tag{4.1}$$

とし，r_i をすべての $j \in [n] \setminus \{i\}$ に対して次を満たすように定める．

$$r_i \equiv \begin{cases} 1 & (i,j) \notin E \text{ かつ } i > j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \pmod{p_{ij}} \tag{4.2}$$

そのような r_i は中国剰余定理より（q_i の剰余として一意に）存在する．

M の異なる 2 点 v_i, v_j の間の移動には時間 1 を要することから，その両方を定時訪問できるためには，q_i と q_j の最大公約数 p_{ij} について $|(r_i - r_j) + p_{ij}n| \geq 1$ が任意の整数 n で成り立つことが必要十分である．r_i, r_j が整数なので，これは $r_i - r_j$ が p_{ij} の倍数でないこと，つまり $r_i \not\equiv r_j \mod p_{ij}$ に同値である．r_i の決め方 (4.2) から，これは $(i,j) \notin E$ に同値である．以上より，$(i,j) \in E$ と M の 2 点 i,j を両方定時訪問することができないことが同値となるため，M の最大の警邏可能点集合は G の最大独立集合となることがわかる．

また，k 番目に小さい素数を P_k と書くと，$k \geq 6$ について $P_k < k(\ln k + \ln \ln k)$ が成り立つ [9] ので，$n(n-1)/2$ 個の素数の列挙は n の多項式時間でできる． □

定理 4.2 では，各点を指定訪問時刻 $((q_1, r_1), \ldots, (q_n, r_n))$ に訪問せねばならないという定時訪問問題が NP 困難であることを示したが，$(r_1, \ldots, r_n)$ は与えられず $(q_1, \ldots, q_n)$ のみが指定される次のような問題も考えることができる．

定期訪問判定問題． 巡査の人数 m と地図 (U, V) および各点の指定訪問間隔 $(q_1, \ldots, q_n)$ が与えられる．m 人の巡査により V の全点を定期訪問可能か判定せよ．ただし，点 v を指定訪問間隔 q で**定期訪問**するとは，非負整数 r $(0 \leq r < q)$ が存在して v を指定訪問時刻 (q, r) で定時訪問することである．

巡査が一人の場合の定時訪問判定問題では各点を訪問すべき時刻は完全に定められていたため，全点を警邏可能かどうかは任意の 2 点の両方を警邏可能であるかを判断するだけで十分であった．一方，定期訪問判定問題では各点を訪問すべき時刻は間隔のみしか定められておらず，全点をより難しい問題と思われる．［編集中］実際，地図が Unit で二点間距離が 1 の場合の定期訪問判定問題は Campbell と Hardin[2] の問題（DVMPD と称している）と同じ問題となり，これは NP 困難であることが示されている [2, Theorem 4]．さらに，河村と添島が巡査が一人の場合であっても NP 困難であることを示している [12, Theorem 20]．

参考文献

[1] Tomáš Brázdil, Petr Hliněný, Antonín Kučera, Vojtěch Řehák, and Matúš Abaffy. Strategy synthesis in adversarial patrolling games. *arXiv preprint arXiv:1507.03407*, 2015.

[2] Ann Melissa Campbell and Jill R Hardin. Vehicle minimization for periodic deliveries. *European Journal of Operational Research*, Vol. 165, No. 3, pp. 668–684, 2005.

[3] Ke Chen, Adrian Dumitrescu, and Anirban Ghosh. On fence patrolling by mobile agents. In *CCCG*, 2013.

[4] Sofie Coene, Frits CR Spieksma, and Gerhard J Woeginger. Charlemagne's challenge: the periodic latency problem. *Operations Research*, Vol. 59, No. 3, pp. 674–683, 2011.

[5] Andrew Collins, Jurek Czyzowicz, Leszek Gasieniec, Adrian Kosowski, Evangelos Kranakis, Danny Krizanc, Russell Martin, and Oscar Morales Ponce. Optimal patrolling of fragmented boundaries. In *Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Parallelism in algorithms and architectures*, pp. 241–250. ACM, 2013.

[6] Jurek Czyzowicz, Leszek Gasieniec, Adrian Kosowski, and Evangelos Kranakis. Boundary patrolling by mobile agents with distinct maximal speeds. In *ESA*, pp. 701–712. Springer, 2011.

[7] Adrian Dumitrescu, Anirban Ghosh, and Csaba D Tóth. On fence patrolling by mobile agents. *arXiv preprint arXiv:1401.6070*, 2014.

[8] Adrian Dumitrescu and Csaba D. Tóth. Computational geometry column 59. *SIGACT News*, Vol. 45, No. 2, pp. 68–72, June 2014.

[9] Pierre Dusart. The k th prime is greater than $k(\ln k + \ln\ln k - 1)$ for $k \geq 2$. *Mathematics of Computation*, pp. 411–415, 1999.

[10] Barun Gorain and Partha Sarathi Mandal. Approximation algorithm for sweep

coverage on graph. *Information Processing Letters*, Vol. 115, No. 9, pp. 712–718, 2015.

[11] Akitoshi Kawamura and Yusuke Kobayashi. Fence patrolling by mobile agents with distinct speeds. *Distributed Computing*, Vol. 28, No. 2, pp. 147–154, 2015.

[12] Akitoshi Kawamura and Makoto Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. In *International Conference on Algorithms and Complexity*, pp. 261–273. Springer, 2015.

[13] Aydano Machado, Geber Ramalho, Jean-Daniel Zucker, and Alexis Drogoul. Multi-agent patrolling: An empirical analysis of alternative architectures. In *International Workshop on Multi-Agent Systems and Agent-Based Simulation*, pp. 155–170. Springer, 2002.

[14] Katerina Papadaki, Steve Alpern, Thomas Lidbetter, and Alec Morton. Patrolling a border. *Operations Research*, Vol. 64, No. 6, pp. 1256–1269, 2016.