12/21 印刷

分割アルゴリズム． 入力の集合を F とする．初期値を $\mathcal{P} = \{\}, F' = F$ とし，$F' \neq \emptyset$ である限り 1. から 3. を繰り返す．

1. $P \leftarrow \{(t,x) \in F' \mid L(t,x) \cap F' = \emptyset\}$
2. $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{P\}$.
3. $F' \leftarrow F' \setminus P$,

$\mathcal{P}$ を出力する．■

前述の貪欲な分割の仕方で集合 S から左端の運行可能集合 $s' := \{(t,x) \in S \mid L(t,x) \cap S = \emptyset\}$ を取り出すときには，定義の通り s' の任意の点 (t,x) に対する領域 $L(t,x)$ に S の点が存在しないことのみが s' の点の条件である．よって，$\bigcup_{(t,x)\in X[0:T)} L(t,x)$ を分割アルゴリズムの入力として与え，出力された分割 $\mathcal{P}$ から $[0,T)$ の範囲を取り出せば $X[0:T)$ の分割 $\{P_1[0:T), \ldots, P_l[0:T)\}$ が得られる． □

3 Star

ここでは

グラフの形状が Star の場合については，利得か《訪問間隔上限》のいずれかが一般であれば，《警邏問題》は巡査が 1 人であっても NP 困難であることが知られている [3]. よって，~~本稿の《警邏問題》については~~，巡査数が一般であって，全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合を調べる．

独立警邏問題においては，グラフが Star で巡査数が一般の場合は利得と《訪問間隔上限》がすべて等しくても NP 困難になることが Coene ら [3] により示されているが，一方で同じ条件における《警邏問題》の場合は次が成り立つ．

何を変えたのか（単独警備かどうか）をわかりやすく

定理 3.1. グラフの形状が Star で全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合，《警邏問題》は（巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

Line の場合では協力の発生によって複雑な運行による警邏が発生した状況から考えると，独立警邏問題より《警邏問題》の方が簡単に解けるというのは意外な結果に思われるが，Star の場合は，独立警邏問題ではうまく頂点集合を分割しなければならないことを用いて分割問題を帰着することができるため NP 困難になるのに対し，《警邏問題》では巡査が協力できることによりある単純な運行が最適となるため簡単に解くことができる．

本節では，Star の頂点 v に隣接する辺を e_v, その長さを d_v ~~のように~~ と書く．

文を分けて
記述を整理せよ

意味ヲ明記

補題 3.2. グラフの形状が Star のときの《警邏問題》において，点 v が警備されているならば，どの長さ Q の時間にも $\min(2d_v, Q)$ の時間は少なくとも一人の巡査が e_v 上に存在する．

？（そうとは限らないし
そもそも前文までで主張は示せているのでは？）

証明. 以下の場合分けによる．(i) $2d_v \geq Q$ のとき，もし v の隣接辺 e_v 上に巡査が存在しない時刻 s があるとすると，v を訪問した s 以前で最後の時刻と s 以後で最初の時刻の間隔は $2d_v \geq Q$ より長いため，v が警備されていることに反する．よってこの場合は e_v 上に常に巡査が存在するので成り立つ．(ii) $2d_v < Q$ のとき，長さ Q の時間区間 $[t, t+Q)$ を任意に選ぶ．警備の条件から v は $[t, t+Q)$ に少なくとも 1 回訪問されるが，その時刻によって以下の場合を考える．(a) $[t+d_v, t+Q-d_v)$ に 1 回以上訪問されるとき，その訪問時刻を任意に 1 つ選び s とすると s の前後の合計 $2d_v$ 以上の時間は巡査は辺 e_v 上に存在し，これは $[t, t+Q)$ に含まれる．(b) $[t+d_v, t+Q-d_v)$ に 1 回も訪問されないときは，$[t, t+d_v)$ か $[t+Q-d_v, t+Q)$ に少なくとも 1 回訪問される．(b1) $[t, t+d_v)$ に 1 回以上訪問されるとき，$[t, t+d_v)$ に含まれる最後の訪問時刻を s とすると，点 v の警備の条件と場合分けの条件から s の次の訪問時刻 u は $t+Q-d_v < u \leq s+Q$ を満たす．s と u それぞれの前後 d_v の時間のうち $[t, t+Q)$ に含まれる $[t, s+d_v], [u-d_v, t+Q)$ には巡査が辺 e_v に存在し，その時間の合計は $((s+d_v)-t) + ((t+Q)-(u-d_v)) = 2d_v + (Q-(u-s)) \geq 2d_v$ より $2d_v$ 以上となる．(b2) $[t+Q-d_v, t+Q)$ に 1 回以上訪問されるときも (b1) と同様． □

補題 3.3. グラフの形状が Star のときの《警邏問題》において，全点の《訪問間隔上限》が Q のとき，点集合 V の任意の部分集合 W について

$$\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ \iff W \text{ は } m \text{ 人の巡査により警邏可能である}$$

言葉で書く

が成り立つ．

証明. ($\Rightarrow$) $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ$ が成り立つとき，m 人の巡査の運行を次のように定めれば W の全点を警邏できる．$W' := \{v \in W \mid 2d_v \geq Q\}$ とする．まず，$|W'|$ 人の巡査が W' の各点に 1 人ずつ停止しこれを警備する．残りの $m - |W'|$ 人の巡査は，速さ 1 で動きながら $W \setminus W'$ の全点をちょうど 1 度ずつ訪問する巡回を繰り返す．このとき，$m - |W'|$ 人の巡査のうち巡査 i は巡査 1 番目より時間 $(i-1)Q$ 遅れて同じ運行を行うようにする（すなわち，$a_i(t) = a_1(t-(i-1)Q)$ となるように運行を定める）．中心点と点 v の 1 回の往復には $2d_v$ の時間を要するので，1 人の巡査がある点から出発し速さ 1 で $W \setminus W'$ の全点を 1 度ずつ訪問して最初の点に戻ってくるのにかかる時間は

$\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v$ である．$\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v = \sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) - |W'|Q \leq (m - |W'|)Q$ よりこの時間は $(m - |W'|)Q$ 以下となるので $(m - |W'|)Q$ 人の巡査が先ほどの巡回を行うと，どの点も時間 Q 以上放置されない．これにより W の全点が警備される．

($\Leftarrow$) 対偶を示す．補題 3.2 より，点 v が警備されているとき，どの長さ Q の時間にも $\min(2d_v, Q)$ の時間は少なくとも一人の巡査が e_v 上に存在する．よって，W の全点の警備には時間 Q あたり合計 $\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q)$ の巡査の時間を要する．各巡査は時間 Q の間にいずれか 1 つの点の訪問に時間を使う必要があるので，$\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) > mQ$ のとき W の全点を警邏することはできない．□

補題 3.3 より Star の任意の点部分集合 W が警邏可能であるかを W の点の隣接辺の長さだけから簡単に計算できることが分かった．定理 3.1 では，全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合を考えているので警邏する部分集合としては隣接辺の短い点から順に選べばよく（隣接辺のより長い点 v_1 とより短い点 v_2 があるとき，v_1 を警備して v_2 を警備しない運行は常に v_1 を警備する代わりに v_2 を警備する運行に変換できる），警邏できる最大の部分集合を求める計算は点の数を n として $O(n \log n)$ となる．以上から定理 3.1 が示された．

4 Unit

第 1 章で述べた通り，Unit は Star の特殊な場合とみなせるため，定理 3.1 から全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合は《警邏問題》を多項式時間で解くことができるが，Unit の場合は全点の《訪問間隔上限》だけが等しければ《警邏問題》を多項式時間で解ける（定理 4.1）．

既知の事と これから示す事を 書き分ける

《訪問間隔上限》が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しかったため，第 2 章で扱った時刻指定警邏問題を再び考える．グラフが Unit の場合は時刻指定警邏問題が NP 困難になることを示す（定理 4.2）．

4.1 全点の《訪問間隔上限》が等しい場合

定理 4.1. グラフの形状が Unit で全点の《訪問間隔上限》が等しい場合，《警邏問題》は（利得，巡査数が一般であっても）多項式時間で解くことができる．

証明. Unit は Star の特殊な場合であるから，補題 3.3 から Unit の全点の《訪問間隔上

限》が Q のとき，頂点集合 V の任意の部分集合 W について

$$\sum_{v \in W} \min(d, Q) = |W| \min(d, Q) \leq mQ \iff W \text{ は } m \text{ 人の巡査により警邏可能である}$$

が成り立つ．d は Unit の各辺の長さである．

グラフの形状が Unit の場合，全点の《訪問間隔上限》が等しいならば警邏する部分集合 W は利得の大きい点から選べばよい（利得のより大きい点 v_1 とより小さい点 v_2 があるとき，v_1 を警備して v_2 を警備しない運行は常に v_1 を警備する代わりに v_2 を警備する運行に変換できる）．$|W| \min(d, Q) \leq mQ$ を満たす最大の $|W|$ は $|W| = \lfloor mQ/\min(d, Q) \rfloor$ であるので，利得の大きい~~点に~~ $\lfloor mQ/\min(d, Q) \rfloor$ 点を選べばよい． □

最も　トル

もう少し意味がはっきりする表現にできないか？

4.2 《訪問間隔上限》が一般の場合：時刻指定警邏問題

節（修論では「章」）

第 3 章冒頭で述べた通り，グラフの形状が Star の場合については，《訪問間隔上限》が一般の場合は《警邏問題》は巡査が 1 人であっても NP 困難であった [3]．この NP 困難性の証明は主に Star の辺の長さをコストとして扱うことによっている．Unit は Star の辺の長さがすべて等しい場合という特殊な場合であるため，この方法による NP 困難性の証明ができない．Unit で《訪問間隔上限》が一般の場合は Line のときと同様，多項式時間アルゴリズムや NP 困難性の証明が難しかったため，時刻指定警邏問題を代わりに考える．

定理4.2.が自分の結果，4.1が他文献の結果であることが地の文だけ読めばすぐわかるようにして下さい

定理 4.2. グラフの形状が Unit のとき，時刻指定警邏問題は巡査が 1 人で全点の利得が等しくても NP 困難である．

説明又ハ引用

証明．最大独立集合問題からの帰着による．

最大独立集合問題の入力のグラフが $G = (V, E)$ のとき，頂点集合を V，利得をすべて 1，辺の長さをすべて 1 とした Unit のグラフ G' を考える．G' の各点の《指定時刻》(q_i, r_i) $(i \in \{1, \ldots, n\})$ は次のように定める．まず，${}_nC_2$ 個の相異なる素数 $p_{(i,j)}$ $(1 \leq i < j \leq n)$ を用意する．$i > j$ に対して $p_{(i,j)}$ と書くときは $p_{(j,i)}$ を指すことにする．$q_i := \prod_{k \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}} p_{(i,k)}$ とする．次に，$r_1, \ldots, r_n$ を，G のすべての 2 点 v_i, v_j $(1 \leq i < j \leq n)$ に対して，$(v_i, v_j) \in E$ ならば $r_i \equiv r_j \equiv 0 \mod p_{(i,j)}$，$(v_i, v_j) \notin E$ ならば $r_i \equiv 0, r_j \equiv 1 \mod p_{(i,j)}$ を満たすように定める．各 r_i に対して相異なる $n-1$ 個の素数 $p_{(i,k)}$ $(k \neq i)$ で割ったときの余りが与えられているので，中国剰余定理からそのような r_i がその $n-1$ 個の素数の積 q_i を法として一意に存在する．

定義？　前文の内容と同じ？

$0 \leq r_i < q_i$ とするとそのような r_i の値を定めることができる．以上のようにして得られる G' を入力として与えたとき時刻指定警邏問題の解は G の最大独立集合となる．

実際，G' の異なる 2 点 v_i, v_j の両方を警備できるための必要十分条件は，2 点間の移動時間が 1 以上かかることから，訪問しなければならない時刻同士がすべて 1 以上離れていること，すなわち，任意の整数 k, l に対し $|(kq_i + r_i) - (lq_j + r_j)| \geq 1$ が成り立つこととなる．q_i, r_i, q_j, r_j がすべて整数のとき，これは $q_i k + r_i \neq q_j l + r_j$，すなわち $r_i - r_j \neq q_j l - q_i k$ が任意の整数 k, l で成り立つこと同値である．これはさらに $r_i - r_j \neq gcd(q_i, q_j)n$ が任意の整数 n で成り立つこと，つまり $r_i \not\equiv r_j \mod gcd(q_i, q_j)$ と同値である．$gcd(q_i, q_j) = p_{(i,j)}$ であるから v_i と v_j の両方を警備できる必要十分条件は $r_i \not\equiv r_j \mod p_{(i,j)}$ となる．r_i の決め方から，

$$(v_i, v_j) \in E \iff G' \text{ の 2 点 } v_i, v_j \text{ を両方警備することができない}$$

が成り立つため，G' の警邏可能な頂点部分集合であって最大のものを選ぶと G の最大独立集合となることがわかる．

また，k 番目に小さい素数を P_k と書くと，$k \geq 6$ のときは $P_k < k(\ln k + \ln \ln k)$ であり [7]，ある数が素数であるかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムが存在する [6] ので，${}_nC_2$ 個の素数の列挙は n の多項式時間でできる．□

定理 4.2 では，各点の《指定時刻》が与えられる場合について NP 困難性が示したが，《指定時刻》のうち訪問間隔 $q_1, \ldots, q_n$ のみが指定されている以下のような問題も考えることができる．訪問間隔

意味

間隔指定警邏判定問題. 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および $q_1, \ldots, q_n$ が与えられる．V の各点 v_i の警備の条件が《指定時刻》(q_i, r_i) で定められるとき，m 人の巡査により全点を警邏できるような $r_1, \ldots, r_n$ が存在するか判定せよ．

グラフの形状が Unit の場合の間隔指定警邏判定問題について以下が成り立つ．

定理 4.3. グラフの形状が Unit のとき，間隔指定警邏判定問題は巡査が 1 人であっても NP 困難である．

引用 → 述べ方においても他文献の結果であることを明記

証明. Disjoint Residue Class Problem [5] からの帰着による．

ある整数の組の集合 $\{(q_1, r_1), \ldots, (q_n, r_n)\}$ が Disjoint Residue Class であるとは，任意の整数 x に対して $x \equiv r_i \mod q_i$ となるような i が高々 1 つ存在することと定義される．Disjoint Residue Class Problem とは整数の組 $(q_1, \ldots, q_n)$ が与えられたときに，