複数の巡査の協力による指定地点の警邏について

Collaborative Patrolling of Designated Points on Graphs

河村 彰星　　能城 秀彬
Akitoshi Kawamura　　Hideaki Noshiro

2017 年 12 月 23 日

［単語を迷っているところはマクロにして《》で囲って表示しています。］
[ToDo]

- 関連研究について
- 図の差し替え
- 参考文献リストの書式の統一
- 修論フォーマットに合わせる

1　はじめに

所与の領域を一人または複数の巡査が動き回り，その領域内の指定された場所を十分な頻度で訪れることを警邏 (patrolling) という [1, 3, 4]．［警邏問題を代表するにふさわしい文献を］

本稿では，与えられた距離空間 U 内を速さ 1 以下の巡査 m 人が動きまわることにより，集合 $V \subseteq U$ に属する多くの点に十分な頻度で訪れるという目標を考える．すなわち次のような問題である．

巡査 $i \in \{1, \dots, m\}$ の U 上の運行 $a_i \colon \mathbf{R} \to U$ とは，各時刻 $t \in \mathbf{R}$ における位置 $a_i(t) \in U$ を定めるものであって，任意の時刻 s，$t \in \mathbf{R}$ に対し $a_i(s)$ と $a_i(t)$ の距離が $|s-t|$ を超えないものをいう．巡査 m 人による U 上の運行とは，全巡査の運行を定めた組 $A = (a_1, \dots, a_m)$ をいう．U の有限な部分集合 V があり，V の各点には利得および《訪問間隔上限》と呼ばれる正整数が定まっている．運行 $A = (a_1, \dots, a_m)$ が点 $v \in V$

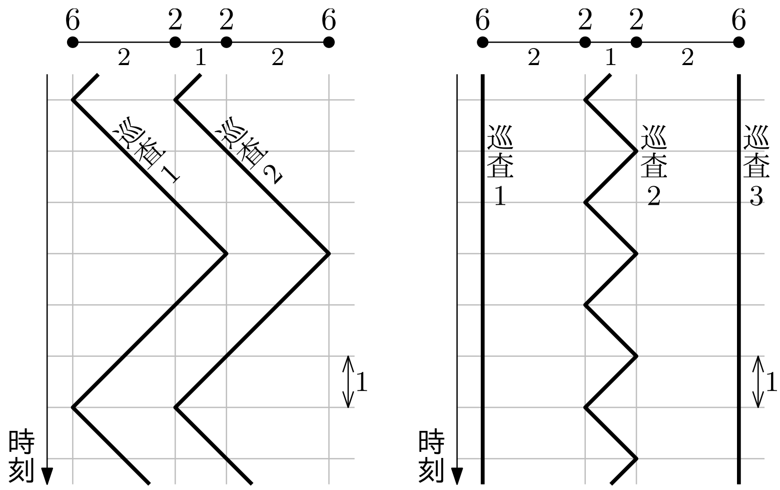

図 1　図の上部に描かれている四点からなるグラフの全点を警邏する二つの運行．頂点と辺に書かれた数は，それぞれ《訪問間隔上限》と距離である．左図の運行では二人の巡査が協力して中央の二点を間隔 2 で警備している．これを禁じ，各点がいずれかの巡査により単独警備されることを求める場合は，右図のように三人の巡査を要する．

を《訪問間隔上限》$q > 0$ で警備するとは，長さ q のどの時間区間にもいずれかの巡査が v を少なくとも一度は訪れる（任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対して巡査 i と時刻 $\tau \in [t, t+q)$ が存在し $a_i(\tau) = v$）ことをいう．運行 A が点集合 $W \subseteq V$ を警邏するとは，各点 $v \in W$ に対し A が v を警備することをいう．そのような運行が存在するとき W は m 人により警邏可能であるという．

《警邏問題》． 巡査の人数 $m \in \mathbf{N}$ と距離空間 U 内の点集合 V および V の各点の利得と《訪問間隔上限》が与えられる．m 人の巡査により警邏可能な V の部分集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．

距離空間 U といっても，V の点同士の測地距離のみが重要である．そこでこの問題の入力は，V を頂点集合とし辺に非負整数の長さがついた無向グラフと考えることにする．

この問題は，巡査が一人かつ全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合に限っても，ハミルトン路問題からの帰着により NP 困難である [3, Theorem 8]．そこでグラフの形状を限ったときにどのようになるかを調べる．

一つの頂点が複数の巡査の訪問により警備され得ることに注意されたい．例えば図 1 左はそのような運行の例である．Coene ら [3] は似た問題を扱っているが，このような協力を許さず，図 1 右のように各頂点を専ら一人の巡査が「担当」することを要求している．

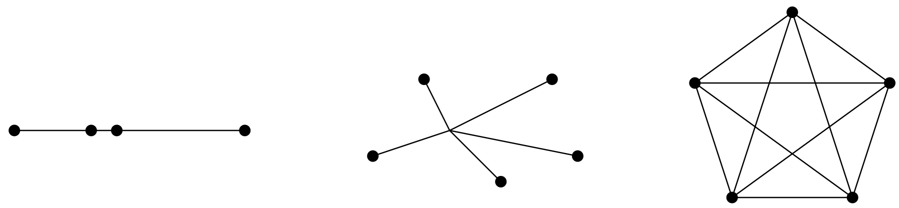

図 2　本論文では Line（左），Star（中），Unit（右，但し各辺の長さが等しい）を扱う．Star は葉のみを警備の対象とする（中央の点は移動の途中で使うのみであり，《訪問間隔上限》は定められていない）．

つまり，各頂点 $v \in W$ が単独警備される（すなわち或る一人の巡査がおり，その巡査のみの運行が $\{v\}$ を警邏する）ことを要求しているのである．対比のため本稿ではこの問題を独立警邏問題と呼ぶことにする（[3] では MPLPP と称している）．Coene ら [3] の諸結果においては，この単独警備という限定が，多項式時間算法の設計にも困難性の証明にも重要な役割を果している．この限定を外したときの様子を調べるのが本稿の目的である．

本稿ではグラフの形状として線分，星と，すべての枝の長さが等しい完全グラフの 3 種類を扱うこととし（図 2），以降はそれぞれを Line, Star, Unit と呼ぶ．Star では葉のみに《訪問間隔上限》が定められている（中心は警備の対象としない）．辺の長さがすべて d である Unit のグラフは同じ頂点数で辺の長さがすべて $d/2$ である Star のグラフの場合に帰着できることから，Unit は Star の特殊な場合である．

《警邏問題》についての我々の結果を Coene らの独立警邏問題についての結果との比較も含めてグラフの形ごとにまとめると次のようになる．それぞれ 2，3，4 節で述べる．

- グラフが Line の場合は，独立警邏問題は動的計画法により多項式時間で解けることが示されていた [3, Theorem 11] が，その正しさは単独警備という設定に強く依存している．本稿では《警邏問題》について，全点の《訪問間隔上限》が等しい場合には多項式時間で解けることを示す（定理 2.1）．
- グラフが Star の場合は，全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合に限っても，独立警邏問題は NP 困難であることが示されていた [3, Theorem 10]．本稿では，この場合の《警邏問題》は多項式時間で解けるという興味深い結果を得る（定理 3.1）．なお利得または《訪問間隔上限》を一般にすると，巡査が一人であっても（したがって独立かどうかによらず）NP 困難であることがわかっている [3, Theorems 5 and 6]．
- グラフが Unit の場合は，本稿では全点の《訪問間隔上限》が等しい場合は《警邏

問題》が多項式時間で解けることを示す（定理 4.1）．グラフが Star の場合は全点の《訪問間隔上限》が等しくても利得が一般だと NP 困難になるので，これにより Unit は Star よりも簡単に解ける場合となっていることが分かる．

Line と Unit については《訪問間隔上限》が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しく未解決である．これらの未解決な状況については，《訪問間隔上限》の代わりに《指定時刻》を警備の条件とする次のような問題を考えた．

定義 1.1. 運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が点 $v \in U$ を《指定時刻》$(q, r) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ で警備するとは，任意の時刻 $t := qk + r$ $(k \in \mathbf{Z})$ に対し巡査 i が存在し $a_i(t) = v$ であることをいう．

時刻指定警邏問題. 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および各点の利得，警備の条件として《指定時刻》が与えられる．m 人の巡査により警邏可能な V の部分集合のうち利得の和が最大となるものを求めよ．

時刻指定警邏判定問題. 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および警備の条件として各点の《指定時刻》が与えられる．m 人の巡査により V を警邏可能か判定せよ．

Line については時刻指定警邏判定問題を解く貪欲アルゴリズムを示す（定理 2.5）．Unit については時刻指定警邏問題が NP 困難であることを示す（定理 4.2）．

関連研究

警邏に関する問題には様々な設定が考えられている．
［メモ］

- 《警邏問題》を考える動機
  - 巡査が障害物を含む 2 次元平面内を動き回り警備するという目的の問題において，障害物を含む 2 次元平面をグラフに簡略化して考えるというところから，グラフの頂点を警備するという問題が考えられていた [2].
  - （なぜ図形として Line, Star, Unit を考えたか？） → Line は塀の警邏などの文脈でよく現れるため．Star は高さが 1 の木であり，グラフが木である場合の《警邏問題》の困難性の評価に有用な図形である．
  - （なぜ《訪問間隔上限》を警備の条件にしたか？）→ Coene らの先行研究と似た設定を考えたかったため（自然な条件なのであまり説明しなくてよさそう？）
  - 頂点を通過するだけで警備したことになる設定だが，より一般に時間 $d \geq 0$ 滞

在しなければならないとしたらどうか？ → 点 p を警備するのに時間 d 滞在しなければならないとすると，p から長さ $d/2$ の辺を伸ばした先の点 p' を代わりに警備対象とすればよい．

–

–

- 問題設定の大枠について
  - 現実の警備の問題としては，警備の仕方として領域内を巡査動き回るというものの他にも，領域の周囲を巡回するという警備の仕方も考えられる．実際に塀の警邏問題として知られている [4, ?, ?].
    - 一次元の連続領域のすべての点が警備対象
    - 線分や閉路の一部のみが警備対象であるという中間的な問題設定も考えられている [?]．警備対象を有限個の点とすると《警邏問題》と似た問題になり，警備対象を全体とすると塀の警邏問題と似た問題となる．
  - 《警邏問題》では，《訪問間隔上限》の条件さえ満たしていれば警備できるという設定で考えており，侵略者の動きなどは具体的に考えていないが，侵略者の動き方まで含めてゲーム理論的に考察している研究も存在する [?, ?].
  - 《警邏問題》では，巡査達は決定論的に動くので，現実的には十分賢い侵略者に対応されてしまう欠点がある．巡査の運行にランダム性を取り入れたものがある [].
  - 《警邏問題》では，警備対象の環境が与えられたときに最適な巡査の運行を決定してしまって巡査がその通りに動くという意味で，中央集権的な運行の決定をしているとみなすことができる．一方で，巡査がその近傍の情報から各々の判断で運行を決定するという設定のものも考えられている [].
- 問題に対する様々なアプローチ
  - 理論的な研究を行うもの
  - ヒューリスティックな戦略を先に与え，計算機でシミュレーションを行うもの
  - 実際のロボットで実験しているものもある
- 似た問題設定の他の研究との細かい違いについて
  - 最適化する指標
    - 全点警備可能な最小の巡査数を求める
    - 警邏できる部分集合であって点の数や利得の合計が最大のものを求める
    - 与えられた巡査により全点を警備する上で，各点の訪問頻度を（同程度にする・平均値を最大化する・最小の訪問頻度を最大化する）など

.

  – 巡査の速さがすべて同じであるという仮定を置いているが，異なる速さの巡査が存在する場合も調べられている [].

- その他
  – 分割戦略と巡回戦略
    * 多くの場合 TSP に基づく巡回が最適だが，長い辺がある場合や巨大グラフの場合に問題がある．
    * TSP に基づく巡回が多くの場合最適なので TSP の解を求める近似アルゴリズムにより巡査の運行を決めるものも

2 Line

グラフが Line の場合，グラフの全体（頂点と辺）をすべて実直線上におくことができる．以降，頂点の名前 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ などはその位置を表す実数値も表すことにする．

Line の場合には順序保存運行という特別な運行を考えることができる．運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が順序保存であるとは，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ において $a_1(t) \leq a_2(t) \leq \cdots \leq a_m(t)$ を満すことである．巡査 m 人で警邏可能な任意の頂点集合 W に対して，ある巡査 m 人の順序保存運行が存在し，W はこれにより警邏される．これは，ある運行 A により警邏される集合 W は，巡査の最高速度がすべて同じであることから A で 2 人の巡査がすれ違うときに代わりに互いの以降の運行を交換し引き返すようにした運行 A' を考えることができ，A' によっても W が警邏されるためである．

2.1 全点の《訪問間隔上限》が等しい場合

本節では次のことを示す．

定理 2.1. グラフの形状が Line で全点の《訪問間隔上限》が等しい場合，《警邏問題》は頂点数 n と巡査数 m の多項式時間で解くことができる．

この場合については，全点を警備可能か判定する問題ならば Collins ら [**?**] の問題の特殊な場合として既に示されているが，ここでは全点の《訪問間隔上限》が等しいという条件のみでも成り立つことを示す．

以降では，グラフの形状が Line で全点の《訪問間隔上限》が等しい場合，各巡査が部分集合を担当し独立に往復するという単純な運行によって最大利得が得られることを示す．

以下，各頂点の《訪問間隔上限》が Q のとき，各巡査が V のいずれかの頂点を左端とする長さ $Q/2$ の区間を往復する運行を独立往復運行と呼ぶことにする．また，巡査 m 人の運行 A において各巡査が独立往復運行をしているとき，A を m 人の巡査による独立往復運行と呼ぶ.

補題 2.2. 頂点 v_i がある一人の巡査 s により単独警備されているとき，《訪問間隔上限》を q_i として，s は常に区間 $[v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$ にいる．

証明　この区間にない或る座標 $v_{\mathrm{out}} \notin [v_i - q_i/2, v_i + q_i/2]$ を s が時刻 t_0 に訪問するとする．v_{out} と v_i の間の移動には少なくとも時間 $|v_i - v_{\mathrm{out}}| > q_i/2$ を要するから，s は区間 $[t_0 - q_i/2, t_0 + q_i/2]$ に属する時刻に v_i を訪問できない．この区間の長さは q_i であるので，s が v_i を単独警備していることに反する． $\square$

補題 2.3. グラフの形状が Line で，全点の《訪問間隔上限》が等しいとする．頂点集合 V の任意の部分集合 W に付いて、W が巡査 m 人により警邏可能ならば W は巡査 m 人による独立往復運行で警邏できる．

証明　巡査数 m に関する帰納法で示す．全点の《訪問間隔上限》を Q とする．$m = 0$ のときは明らかなので，以下 $m > 0$ とする．

W は m 人の巡査により警邏可能であるので，2 章始めの議論により W を警邏する m 人の巡査による順序保存運行が存在する．このような運行を任意に一つ選び $A = (a_1, \ldots, a_m)$ とする．

W の点のうち最も左にあるものを b とする．まず，各巡査は b より左に存在する時間 b で停止するように変換する．このようにしても W は警邏されたままであり，また，これによりすべての巡査は区間 $[b, +\infty)$ に存在することになる．

ここで，最も左の巡査 巡査 1 に注目する．順序保存であることから b が A により訪問されるすべての時刻に 巡査 1 は b を訪問しているので，b は a_1 により単独警備されている．すると，補題 2.2 より，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対し $a_1(t) \leq b + Q/2$ であるが，一方，a_1 を区間 $[b, b + Q/2]$ を速さ 1 で往復する運行とすればこの区間に含まれるすべての頂点を警備することができる．実際，a_1 がこのような運行であるとき $b \leq x \leq b+Q/2$ である位置 x に存在する時刻の間隔の最大値は $\max(2(x-b), 2(b+Q/2-x)) \leq 2(b+Q/2-b) = Q$ より，$[b, b + Q/2]$ に含まれるどの頂点も《訪問間隔上限》を超えずに訪問できていることが分かる．一方，$W^- := \{v \in W \mid b + Q/2 < v\}$ は A で 巡査 1 以外の $m - 1$ 人の巡査により警備されているので，帰納法の仮定から残る $m - 1$ 人の巡査も独立往復運行に変換することができる．以上により W を警邏する m 人の巡査による独立往復運行が得

られた． □

補題 2.3 により，Line のグラフで全点の《訪問間隔上限》が等しい場合の運行は独立往復運行のみを考えればよいため，$I_1, \ldots, I_n$ から m 人の巡査がそれぞれ担当する m 個の区間のうち利得の合計が最大となるものを求めればよい．これは以下のアルゴリズムにより求めることができる．

初めに Line 上の頂点をソートしておき，左側から順に $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする．頂点 v_i を左端とする区間を $I_i := [v_i, v_i + Q/2]$ と書く．

まず，n 個の区間 $I_1, \ldots, I_n$ について各区間 I_i $(i \in \{1, \ldots, n\}$ に含まれる点から得られる利得の合計 $P_i := \sum_{v_j \in I_i} p_j$ を求める．$P_1, \ldots, P_n$ は $v_1, v_2, \ldots, v_n$ がソートしてあるので合計 $O(n)$ で求めることができる．

あとは利得の合計が最大になる m 個の区間を選べばよい．以下の漸化式 (1) に従う動的計画法で $O(mn)$ で最大の利得を得られる m 個の区間を選択できる．$OPT(i, j)$ は，区間 $I_1, \ldots, I_j$ から最大 i 個の区間を選ぶときの利得の合計の最大値を表す．$OPT(m, n)$ が全体の利得の最大値となる．

$$OPT(i,j) = \begin{cases} 0 & i = 0 \text{ または } j = 0 \text{ のとき} \\ \max\{OPT(i, j-1), P_j + OPT(i-1, j-1)\} & \text{それ以外の場合} \end{cases} \tag{1}$$

最後に，$OPT(m, n)$ において選ばれた区間をトレースバックして求め，この区間に含まれる頂点全体を出力して終了する．

このアルゴリズムの計算量は全体で $O(n \log n + nm)$ となる．これで定理 2.1 が示された．

2.2 《訪問間隔上限》が一般の場合

全点の《訪問間隔上限》が等しい場合は，結局巡査がそれぞれ互いに素な区間を 1 つずつ担当する運行のみ考えればよいという単純な状況になっていたが，《訪問間隔上限》が一般の場合は，一部の頂点を複数の巡査が訪問して警備する必要がある場合が存在する．図 3（左）の例では，中央の《訪問間隔上限》の短い 2 つの頂点は 2 人の巡査に訪問されており，また，全点の《訪問間隔上限》が等しい場合に反して各巡査の最適な運行はなんらかの区間の往復であるとは限らないことも分かる．

また，この例では左の巡査は左端の点を《訪問間隔上限》ちょうどごとに訪問しているが，一方，図 3（中央）の例では，左側の巡査は左端の点をあえてより短い周期で訪問す

ることで全点を警邏している．図 3（中央）と同じ入力に対して，図 3（右）のように左の巡査が左端の点の《訪問間隔上限》ぎりぎりの時間まで右の方へ動き左端へ帰る運行を行うと 2 人の巡査がうまく協力できず全点の警備ができない．このように，補題 2.3 のときのように左端の点の《訪問間隔上限》から順に巡査の運行を決定することも難しい例が存在する．

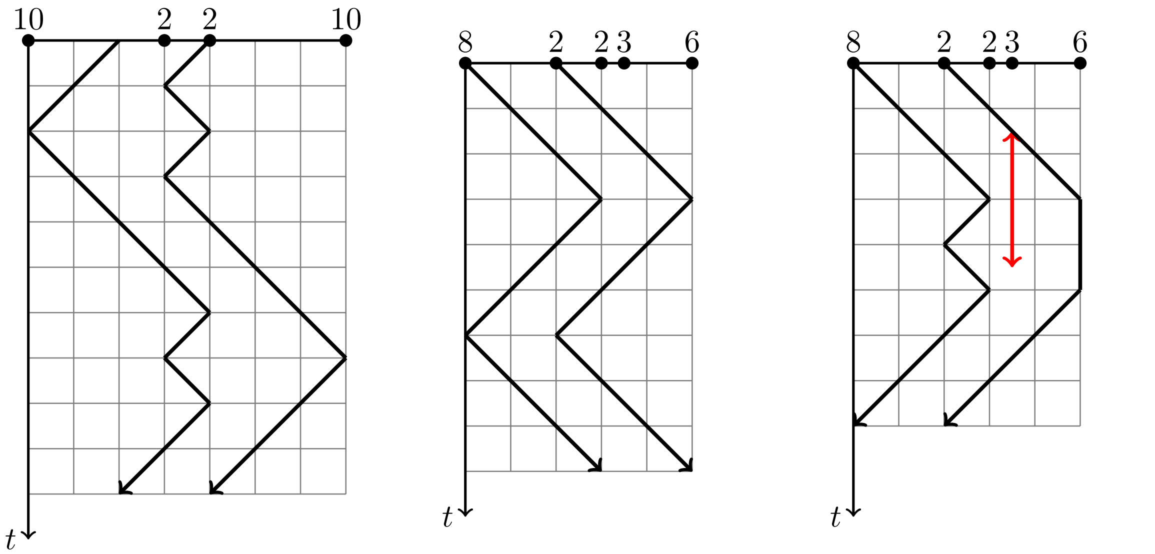

図 3　巡査の協力が必要な例．横軸を頂点の座標，縦軸を時刻として巡査の軌跡を表す．点の上の数値は《訪問間隔上限》を表す．［あとで図を差し替える］

これらの例は，《訪問間隔上限》が異なる場合は巡査の運行を個別に決定するのは難しいということを示唆している．しかしながら，この《訪問間隔上限》が一般の場合での Line 上の《警邏問題》の困難性を示すこともできなかった．そこで，《訪問間隔上限》より短い間隔で点を訪問しうることで運行の決定が複雑になる例が存在したことを踏まえて，ここでは 1 章で定義した時刻指定警邏判定問題という別種の問題を代わりに考える．

グラフが Line の場合の時刻指定警邏判定問題は次のようにも記述できる．

定義 2.4. $S \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ とする．任意の $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in S$ が $|x_1 - x_2| \leq |t_1 - t_2|$ を満たすとき，S は運行可能であるという．また，分割 $\{P_1, \ldots, P_l\}$ が運行可能であるとは，$P_1, \ldots, P_l$ がそれぞれ運行可能集合であることである．

任意の運行可能集合 S に対して，Line 上の巡査の運行 a であって，S のすべての元 (t, x) に対して $a(t) = x$ を満たす（このとき a を運行可能集合 S に対応する運行と呼ぶ）ものが存在することは簡単に示すことができる．

時刻指定線分警邏判定問題. 巡査の人数を表す正の整数 m と n 個の自然数の組 $(q_i, r_i, x_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ が与えられる．集合 $\{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1,\dots,n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ を m 個以下の運行可能集合に分割できるか判定せよ．

定理 2.5. 時刻指定線分警邏判定問題を解く貪欲アルゴリズムが存在する．

証明　グラフが Line の場合は順序保存運行を考えることができるのと同様に，順序保存（運行可能）分割も考えることができる．分割 $\mathcal{P} = \{P_1,\dots,P_l\}$ が順序保存であるとは，$\mathcal{P}$ に対応する運行 $A = (a_1,\dots,a_l)$ であって順序保存なものが存在することであり，これは，

$$L(t,x) := \{(t',x') \mid |x-x'| > |t-t'| \text{ かつ } x' < x\} = \{(t',x') \mid x - x' > |t-t'|\}$$

として，任意の $P_i (i \in \{1\dots,l\})$ について，領域 $\bigcup_{(t,x)\in P_i} L(t,x)$ に $P_j (i<j)$ の点が存在しないことということもできる．

$X := \{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1,\dots,n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ の任意の順序保存分割のうち一番左の集合は順序保存分割の定義から $P_1 := \{(t,x) \in X \mid L(t,x) \cap X = \emptyset\}$ の部分集合となる．よって，X の最小の順序保存分割であって一番左の集合が P_1 であるようなものが存在する．同様に，残りの $X \setminus P_1$ の最小の順序保存分割であって一番左の集合が $P_2 := \{(t,x) \in X \setminus P_1 \mid L(t,x) \cap X \setminus P_1 = \emptyset\}$ であるようなものが存在する．このように，集合 X の左側から貪欲に運行可能集合を取り出していく操作を再帰的に繰り返すと，最小の順序保存分割 $\{P_1, P_2, \dots, P_l\}$ が得られる．これを $\mathfrak{P}(X)$ と書くことにする．

以下では，集合 $S \subseteq \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ に対して $S[a:b) := \{(t,x) \in S \mid a \le t < b\}$ と定義する．

時刻指定線分警邏判定問題の判定は $|\mathfrak{P}(X)| \le m$ が成り立つかの判定をすればよい．X は無限集合であるから直接 X を入力として分割 $\mathfrak{P}(X)$ を計算することはできないが，この問題では $q_1,\dots,q_n$ が整数であることから集合 X は時刻（組 $(t,x) \in X$ の第 1 要素）について周期的である．よって，$|\mathfrak{P}(X)| \le m$ の判定は，$T := lcm(q_1,\dots,q_n)$ として，X の 1 周期分の有限部分集合 $X[0:T)$ を $\mathfrak{P}(X)$ の一部となるように（すなわち，$X[0:T)$ を $\{P_1[0:T),\dots,P_l[0:T)\}$ に）分割し，$l \le m$ かどうか判定をすればよい．

有限集合 F の分割 $\mathfrak{P}(F)$ を与える分割アルゴリズムは次のようになる．

分割アルゴリズム. 入力を有限集合 F とする．初期値を $\mathcal{P} = \{\}$, $F' = F$ とし，$F' \ne \emptyset$ である限り 1. から 3. を繰り返す．

1. $P \leftarrow \{(t,x) \in F' \mid L(t,x) \cap F' = \emptyset\}$
2. $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{P\}$.

3. $F' \leftarrow F' \setminus P$,

$\mathcal{P}$ を出力する．

前述の貪欲な分割の仕方で集合 S から左端の運行可能集合 $s' := \{(t,x) \in S \mid L(t,x) \cap S = \emptyset\}$ を取り出すときには，定義の通り s' の任意の点 (t,x) に対する領域 $L(t,x)$ に S の点が存在しないことのみが s' の点の条件である．よって，$\bigcup_{(t,x)\in X[0:T)} L(t,x)$ を分割アルゴリズムの入力として与え，出力された分割 $\mathcal{P}$ から $[0,T)$ の範囲を取り出せば $X[0:T)$ の分割 $\{P_1[0:T),\ldots,P_l[0:T)\}$ が得られる． □

3 Star

グラフの形状が Star の場合については，利得か《訪問間隔上限》のいずれかが一般であれば，《警邏問題》は巡査が一人であっても NP 困難であることが知られている [3]．ここでは，巡査数が一般であって，全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合を調べる．

独立警邏問題においては，グラフが Star で巡査数が一般の場合は利得と《訪問間隔上限》がすべて等しくても NP 困難になることが Coene ら [3] により示されているが，一方で単独警備の条件を外した《警邏問題》の場合は次が成り立つ．

定理 3.1. グラフの形状が Star で全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合，《警邏問題》は（巡査数が一般であっても）頂点数 n の多項式時間で解くことができる．

Line の場合では協力の発生によって複雑な運行による警邏が発生した状況から考えると，独立警邏問題より《警邏問題》の方が簡単に解けるというのは意外な結果に思われる．Star の場合，独立警邏問題では単独警備の条件のためにうまく頂点集合を分割しなければならないことが逆に難しさを生み，分割問題からの帰着により NP 困難になるのに対し，《警邏問題》では巡査が協力できることによりある単純な運行が最適となるため簡単に解くことができる．

本節では，Star の頂点 v に隣接する辺を e_v, その長さを d_v のように書く．

補題 3.2. グラフの形状が Star のときの《警邏問題》において，全点の《訪問間隔上限》が Q のとき，点 v が警備されているならば，どの長さ Q の時間にも $\min(2d_v, Q)$ の時間は少なくとも一人の巡査が e_v 上に存在する．

証明　以下の場合分けによる．(i) $2d_v \geq Q$ のとき，もし v の隣接辺 e_v 上に巡査が存在し

ない時刻 s があるとすると，v を訪問した s 以前で最後の時刻と s 以後で最初の時刻の間隔は $2d_v \geq Q$ より長いため，v が警備されていることに反する．(ii) $2d_v < Q$ のとき，長さ Q の時間区間 $[t, t+Q)$ を任意に選ぶ．警備の条件から v は $[t, t+Q)$ に少なくとも 1 回訪問されるが，その時刻によって以下の場合を考える．(a) $[t+d_v, t+Q-d_v)$ に 1 回以上訪問されるとき，その訪問時刻を任意に 1 つ選び s とすると s の前後の合計 $2d_v$ 以上の時間は巡査は辺 e_v 上に存在し，これは $[t, t+Q)$ に含まれる．(b) $[t+d_v, t+Q-d_v)$ に 1 回も訪問されないときは，$[t, t+d_v)$ か $[t+Q-d_v, t+Q)$ に少なくとも 1 回訪問される．(b1) $[t, t+d_v)$ に 1 回以上訪問されるとき，$[t, t+d_v)$ に含まれる最後の訪問時刻を s とすると，点 v の警備の条件と場合分けの条件から s の次の訪問時刻 u は $t+Q-d_v < u \leq s+Q$ を満たす．s と u それぞれの前後 d_v の時間のうち $[t, t+Q)$ に含まれる $[t, s+d_v], [u-d_v, t+Q)$ には巡査が辺 e_v に存在し，その時間の合計は $((s+d_v)-t)+((t+Q)-(u-d_v)) = 2d_v + (Q-(u-s)) \geq 2d_v$ より $2d_v$ 以上となる．(b2) $[t+Q-d_v, t+Q)$ に 1 回以上訪問されるときも (b1) と同様． $\square$

補題 3.3. グラフの形状が Star のときの《警邏問題》において，全点の《訪問間隔上限》が Q のとき，点集合 V の部分集合 W が m 人の巡査により警邏可能であるには，

$$\sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) \leq mQ \tag{2}$$

が成立つことが必要十分である．

証明　十分であることを示す．(2) が成り立つとき，m 人の巡査の運行を次のように定めれば W の全点を警邏できる．$W' := \{v \in W \mid 2d_v \geq Q\}$ とする．まず，$|W'|$ 人の巡査が W' の各点に一人ずつ停止しこれを警備する．残りの $m-|W'|$ 人の巡査は，速さ 1 で動きながら $W \setminus W'$ の全点をちょうど 1 度ずつ訪問する巡回を繰り返す．このとき，$m-|W'|$ 人の巡査のうち巡査 i は巡査 1 より時間 $(i-1)Q$ 遅れて同じ運行を行うようにする（すなわち，$a_i(t) = a_1(t-(i-1)Q)$ となるように運行を定める）．中心点と点 v の 1 回の往復には $2d_v$ の時間を要するので，一人の巡査がある点から出発し速さ 1 で $W \setminus W'$ の全点を 1 度ずつ訪問して最初の点に戻ってくるのにかかる時間は $\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v$ である．$\sum_{v \in W \setminus W'} 2d_v = \sum_{v \in W} \min(2d_v, Q) - |W'|Q \leq (m-|W'|)Q$ よりこの時間は $(m-|W'|)Q$ 以下となるので $(m-|W'|)Q$ 人の巡査が先ほどの巡回を行うと，どの点も時間 Q 以上放置されない．これにより W の全点が警備される．

　必要であることを示す．W が m 人の巡査により警邏されているとすると，補題 3.2 より，各点 $v \in W$ について，どの長さ Q の時間にも $\min(2d_v, Q)$ の時間は少なくとも一人の巡査が e_v 上に存在する．よって，W の全点の警備には時間 Q あたり合計

$\sum_{v\in W}\min(2d_v, Q)$ の巡査の時間を要する．各巡査は時間 Q の間にいずれか 1 つの点の訪問に時間を使う必要があるので，(2) が成り立つ． □

補題 3.3 より Star の任意の点部分集合 W が警邏可能であるかを W の点の隣接辺の長さだけから簡単に計算できることが分かった．定理 3.1 では，全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合を考えているので警邏する部分集合としては隣接辺の短い点から順に選べばよく（隣接辺のより長い点 v_1 とより短い点 v_2 があるとき，v_1 を警備して v_2 を警備しない運行は常に v_1 を警備する代わりに v_2 を警備する運行に変換できる)，警邏できる最大の部分集合を求める計算は点の数を n として $O(n\log n)$ となる．以上から定理 3.1 が示された．

4 Unit

第 1 節で述べたように Unit は Star の特殊な場合とみなせるため，定理 3.1 から全点の利得と《訪問間隔上限》が等しい場合は《警邏問題》を多項式時間で解くことができる．ここでは，Unit では全点の《訪問間隔上限》が等しければ《警邏問題》が多項式時間で解けることを示す（定理 4.1)．

《訪問間隔上限》が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しかったため，第 2 章で扱った時刻指定警邏問題を再び考える．グラフが Unit の場合は時刻指定警邏問題が NP 困難になることを示す（定理 4.2)．

4.1 全点の《訪問間隔上限》が等しい場合

定理 4.1. グラフの形状が Unit で全点の《訪問間隔上限》が等しい場合，《警邏問題》は（利得，巡査数が一般であっても）頂点数 n の多項式時間で解くことができる．

証明 Unit は Star の特殊な場合であるから，補題 3.3 から Unit の全点の《訪問間隔上限》が Q のとき，頂点集合 V の任意の部分集合 W について

$$\sum_{v\in W}\min(d,Q)=|W|\min(d,Q)\le mQ \iff W \text{ は } m \text{ 人の巡査により警邏可能である}$$

が成り立つ．d は Unit の各辺の長さである．

グラフの形状が Unit の場合，全点の《訪問間隔上限》が等しいならば警邏する部分集合 W は利得の大きい点から選べばよい（利得のより大きい点 v_1 とより小さい点 v_2 があるとき，v_1 を警備して v_2 を警備しない運行は常に v_1 を警備する代わりに v_2 を警備する運

行に変換できる）．$|W|\min(d,Q) \leq mQ$ を満たす最大の $|W|$ は $|W| = \lfloor mQ/\min(d,Q) \rfloor$ であるので，利得の最も大きい $\lfloor mQ/\min(d,Q) \rfloor$ 点を選べばよい． □

4.2 《訪問間隔上限》が一般の場合：時刻指定警邏問題

第 3 節冒頭で述べた通り，グラフの形状が Star の場合については，《訪問間隔上限》が一般の場合は《警邏問題》は巡査が一人であっても NP 困難であった [3]．この NP 困難性の証明は主に Star の辺の長さをコストとして扱うことによっている．Unit は Star の辺の長さがすべて等しい特殊な場合であるため，この方法による NP 困難性の証明ができない．Unit で《訪問間隔上限》が一般の場合は Line のときと同様，多項式時間アルゴリズムや NP 困難性の証明が難しかったため，時刻指定警邏問題を代わりに考える．

定理 4.2. グラフの形状が Unit のとき，時刻指定警邏問題は巡査が一人で全点の利得が等しくても NP 困難である．

証明　最大独立集合問題からの帰着による．

最大独立集合問題は，与えられた無向グラフ $G(V,E)$ に対して，頂点集合 $W \subseteq V$ のうち W 内の頂点間に辺が存在しないようなもの（独立集合）で大きさが最大のものを求める問題である．

最大独立集合問題の入力として頂点集合 $[n] = \{1,\ldots,n\}$，辺集合 E のグラフ G が与えられたとする．同じ頂点集合 $[n]$ をもち，利得をすべて 1，辺の長さをすべて 1 とした Unit のグラフ G' を考える．G' の各点 $i \in [n]$ の《指定時刻》(q_i, r_i) を次のように定める．まず，${}_nC_2$ 個の相異なる素数 $p_{(i,j)}$ $(1 \leq i < j \leq n)$ を用意する．$i > j$ に対して $p_{(i,j)}$ と書くときは $p_{(j,i)}$ を指すことにする．各 $i \in [n]$ について，

$$q_i = \prod_{k \in [n] \setminus \{i\}} p_{(i,k)} \tag{3}$$

とし，r_i をすべての $j \in [n] \setminus \{i\}$ に対して次を満たすように定める．

$$r_i \equiv \begin{cases} 1 & (i,j) \notin E \text{ かつ } i > j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \pmod{p_{(i,j)}} \tag{4}$$

そのような r_i は中国剰余定理より（q_i の剰余として一意に）存在する．以上で得られた G' と $(q_i, r_i)_{i \in [n]}$ に対する時刻指定警邏問題の解は G の最大独立集合となる．

実際，G' の異なる 2 点 i, j の間の移動には時間 1 を要することから，その両方を警備できるためには，訪問すべき時刻同士がすべて 1 以上離れていること，すなわち任意の整数

k, l に対して $|(kq_i + r_i) - (lq_j + r_j)| \geq 1$ が成り立つことが必要十分である．q_i, r_i, q_j, r_j がすべて整数のとき，これは $q_i k + r_i \neq q_j l + r_j$，すなわち $r_i - r_j \neq q_j l - q_i k$ が任意の整数 k, l で成り立つことに同値である．q_i と q_j の最大公約数は $p_{(i,j)}$ なので，これはさらに $r_i - r_j$ が $p_{(i,j)}$ の倍数でないこと，つまり $r_i \not\equiv r_j \mod p_{(i,j)}$ に同値である．r_i の決め方 (4) から，これは $(i, j) \notin E$ に同値である．以上より

$$(i, j) \in E \iff G' \text{ の 2 点 } i, j \text{ を両方警備することができない}$$

が成り立つため，G' の警邏可能な最大の頂点集合は G の最大独立集合となることがわかる．

また，k 番目に小さい素数を P_k と書くと，$k \geq 6$ のときは $P_k < k(\ln k + \ln \ln k)$ であり [7]，ある数が素数であるかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムが存在する [6] ので，${}_nC_2$ 個の素数の列挙は n の多項式時間でできる． □

定理 4.2 では，各点の《指定時刻》が与えられる場合について NP 困難性が示したが，《指定時刻》のうち訪問間隔 $q_1, \ldots, q_n$ のみが指定されている以下のような問題も考えることができる．

間隔指定警邏判定問題． 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および $q_1, \ldots, q_n$ が与えられる．V の各点 v_i の警備の条件が《指定時刻》(q_i, r_i) で定められるとき，m 人の巡査により全点を警邏できるような $r_1, \ldots, r_n$ が存在するか判定せよ．

グラフの形状が Unit の場合，間隔指定警邏判定問題は巡査が一人であっても NP 困難であることが示されている [5]．

参考文献

[1] K. Chen, A. Dumitrescu, and A. Ghosh. On fence patrolling by mobile agents. In *Proc. 25th Canadian Conference on Computational Geometry* (CCCG), 2013.

[2] Machado, Aydano and Ramalho, Geber and Zucker, Jean-Daniel and Drogoul, Alexis Multi-agent patrolling: An empirical analysis of alternative architectures. In *Proc. 25th Canadian Conference on Computational Geometry* (CCCG), 2013.

[3] S. Coene, F. C. R. Spieksma, and G. J. Woeginger. Charlemagne's challenge: the periodic latency problem. *Operations research*, 59(3), pp. 674–683, 2011.

[4] J. Czyzowicz, L. Gąsieniec, A. Kosowski, and E. Kranakis. Boundary patrolling by mobile agents with distinct maximal speeds. In *Proc. 19th Annual European*

Symposium on Algorithms (ESA), LNCS 6942, pp. 701–712, 2011.

[5] A. Kawamura and M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. In *Proc. Ninth International Conference on Algorithms and Complexity* (CIAC), LNCS 9079, pp. 261–273, 2015.

[6] M. Agrawal, N. Kayal, and N. Saxena. Primes is in P. *Annals of Mathematics*, 160(2), pp. 781–793, 2004.

[7] P. Dusart. The kth prime is greater than $k(\ln k + \ln\ln k - 1)$ for $k \geq 2$. *Mathematics of Computation*, 68, pp. 411–415, 1999.