一文を短くせよ

各文で言いたい事をハッキリさせる

H29. 12. 18 13:40
印刷

複数の巡査の協力による指定地点の警邏について

Collaborative Patrolling of Designated Points on Graphs

河村 彰星　　能城 秀彬
Akitoshi Kawamura　　Hideaki Noshiro

2017 年 12 月 16 日

より警邏問題を代表するに相応しい文献はないか?

1 はじめに

所与の領域を 1 人または複数の巡査が動き回り，その領域内の指定された場所を十分な頻度で訪れることを警邏 (patrolling) という [1, 2, 3].

(文献をこれにするのであれば、その紹介文は このように警邏全般ではなく より特化した内容になるはず)

本稿では，与えられた距離空間 U 内を速さ 1 以下の巡査 m 人が動きまわることにより，集合 $V \subseteq U$ に属する多くの点に十分な頻度で訪れるという目標を考える．すなわち次のような問題である．

巡査 $i \in \{1, \ldots, m\}$ の U 上の運行 $a_i \colon \mathbf{R} \to U$ とは，各時刻 $t \in \mathbf{R}$ における位置 $a_i(t) \in U$ を定めるものであって，任意の時刻 s, $t \in \mathbf{R}$ に対し $a_i(s)$ と $a_i(t)$ の距離が $|s - t|$ を超えないものをいう．巡査 m 人による U 上の運行とは，全巡査の運行を定めた組 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ をいう．運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が点 $v \in U$ を訪問間隔 $q \geq 0$ で警備するとは，長さ q のどの時間区間にもいずれかの巡査が v を少くとも一度は訪れる（任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対して巡査 i と時刻 $\tau \in [t, t+q)$ が存在し $a_i(\tau) = v$）ことをいう．($\leftarrow q = 0$ のときおかしい？) [$q = 0$ にすることが必要になる箇所はどこですか。]

U の有限な部分集合 V があり，V の各点には利得および訪問間隔と呼ばれる非負整数が定まっている．運行 A が点集合 $W \subseteq V$ を警邏するとは，各点 $v \in W$ に対し A が v を警備することをいう．そのような運行が存在するとき W は m 人により警邏可能であるという．

警邏問題. 巡査の人数 m と距離空間 U 内の点集合 V および V の各点の利得と訪問間隔が与えられたとき，m 人の巡査により警邏可能な頂点集合のうち利得の和が最大となるも

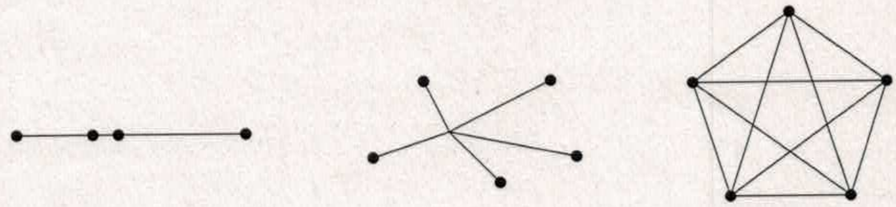

図 2　本論文では Line（左），Star（中），Unit（右，但し各辺の長さが等しい）を扱う．Star は葉のみを警備の対象とする（中央の点は移動の途中で使うのみであり，訪問間隔は定められていない）．

とおり頂点同士の測地距離のみが重要であるため，Unit は，その各辺の長さを d とすると，同じ頂点数で辺の長さがすべて $d/2$ である Star と同一視できることから，Unit は Star の特殊な場合である．

警邏問題についての我々の結果と，担当警邏問題についての Coene らの結果を，グラフの形ごとに比較すると次のようになる．それぞれ 2，3，4 節で述べる．

- グラフが Line の場合は，担当警邏問題は動的計画法により多項式時間で解けることが示されていた [2, Theorem 11] が，その正しさは非協力の設定に強く依存している．本稿では警邏問題について，全点の訪問間隔が等しい場合には多項式時間で解ける（定理 2.1）．←「ことを示す」？
- グラフが Star の場合は，全点の利得と訪問間隔が等しい場合に限っても，担当警邏問題は NP 困難であることが示されていた [2, Theorem 10]．本稿では，この場合の警邏問題は多項式時間で解けるという興味深い結果を得る（定理＊＊）．なお利得または訪問間隔を一般にすると，巡査が一人であっても（したがって担当の有無に関わらず）NP 困難であることがわかっている [2, Theorems 5 and 6]．
- グラフが Unit の場合は，全点の訪問間隔が等しい場合は警邏問題が多項式時間で解けることを示す（定理＊＊）．グラフが Star の場合は全点の訪問間隔が等しくても利得が一般だと NP 困難になるので，これにより Unit は Star よりも簡単に解ける場合となっていることが分かる．

Line と Unit については訪問間隔が一般の場合については多項式時間アルゴリズムや NP 困難性を示すのが難しく未解決である．これらの未解決な状況については，訪問間隔の代わりに以下に定義する指定時刻を警備の条件とする問題も考えた．

定義 1.1. 運行 $A = (a_1, \ldots, a_m)$ が点 $v \in U$ を指定時刻 (q, r) で警備するとは，任意の

W が m 人の巡査により警邏可能であるとする．このとき，W を警邏する m 人の巡査による個別往復運行が存在する．

証明. 巡査数 m に関する帰納法で示す．$m = 0$ のときは明らかなので，以下 $m > 0$ とする．

W は m 人の巡査により警邏可能であるので，2 章始めの議論により W を警邏する m 人の巡査による順序保存運行が存在する．このような運行を任意に一つ選び $A = (a_1, \ldots, a_m)$ とする．

W の点のうち最も左にあるものを b とする．まず，各巡査は b より左に存在する時間 b で停止するように変換する．このようにしても W は警邏されたままであり，また，これによりすべての巡査は $[b, +\infty)$ に存在することになる．

ここで，最も左の巡査 a_1 に注目する．b が A により訪問されるすべての時刻に a_1 は b を訪問しているので，b は a_1 により単独警備されている．すると，補題 2.3 より，任意の時刻 $t \in \mathbf{R}$ に対し $a_1(t) \leq b + Q/2$ であるが，一方，a_1 は区間 $[b, b + Q/2]$ を速さ 1 で往復することでこの区間に含まれるすべての頂点を警備することができる．実際，a_1 がこのような往復をするとき $b \leq x \leq b + Q/2$ である位置 x に存在する時刻の間隔の最大値は

$$\max(2(x - b), 2(b + Q/2 - x)) \leq 2(b + Q/2 - b) = Q$$

より，$[b, b + Q/2]$ に含まれるどの頂点も訪問間隔を超えずに訪問できていることが分かる．これにより a_1 の運行は個別往復運行となる．一方，$W^- := \{v \in W \mid b + Q/2 < v\}$ は a_1 以外の $m - 1$ 人の巡査により警備されているので，帰納法の仮定から残る $m - 1$ 人の巡査も個別往復運行に変換することができる．以上により W を警邏する m 人の巡査による個別往復運行が得られた． □

補題 2.4 により，個別往復運行を行う場合のみを考えればよいため，m 人の巡査がそれぞれ担当する m 個の区間を求めればよい．以下のアルゴリズムにより利得の和が最大となる m 個の区間を求めることができる．

初めに Line 上の頂点をソートしておき，左側から順に $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする．頂点 v_i を左端とする区間を $I_i := [v_i, v_i + Q/2]$ と書く．

まず，n 個の区間 $I_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ について各区間に含まれる点から得られる利得の合計 P_i を求める．P_i は $v_1, v_2, \ldots, v_n$ がソートしてあるので $O(n)$ で求めることができる．

あとは m 個（m は巡査の人数）の区間を選び利得の合計を最大化すればよいが，以下の漸化式 1 に従う動的計画法で $O(mn)$ で最大の利得を得られる m 個の区間を選択でき

(1)
(¥eqref)

各 P_i にかかる時間か
合計か？
(意味を考えたときに曖昧さなく読めるように書く

る．$OPT(i,j)$ は，区間 $I_1,\ldots,I_j$ から最大 i 個の区間を選ぶときの利得の合計の最大値を表す．$OPT(m,n)$ が求めたい利得の最大値となる．

$$OPT(i,j)=\begin{cases}0 & i=0 \text{ または } j=0 \text{ のとき}\\ \max\{OPT(i,j-1),P_j+OPT(i-1,j-1)\} & \text{それ以外の場合}\end{cases} \tag{1}$$

最後に，$OPT(m,n)$ において選ばれた区間をトレースバックして求め，この区間に含まれる頂点全体を出力して終了する．

このアルゴリズムの計算量は全体で $O(n\log n+nm)$ となる．これで定理 2.1 が示された．

この証明では線分に端の頂点が存在することが重要な役割を果たしているため，グラフの形状が閉路の場合にそのまま適用することはできない． ?

何故ここで突然閉路の話をするのか 何らかの説明が要る (理由がなければ削除)

2.2 訪問間隔が一般の場合

全点の訪問間隔が等しい場合はどの頂点も高々 1 人の巡査が担当するため単純になっていたが，訪問間隔が一般の場合は，頂点を複数の巡査が交代で訪問して警備する必要がある場合が存在する．図 3（左）の例では，中央の訪問間隔の短い 2 つの頂点を 2 人の巡査が交互に訪問しており，また，全点の訪問間隔が等しい場合と異なり各巡査の最適な運行はなんらかの区間の往復であるとは限らないことも分かる．

また，この例では左の巡査は左端の点を訪問間隔 10 ちょうどごとに訪問しているが，左端の点の訪問間隔から順に巡査の運行を決定することも難しい次のような例が存在する．図 3（中央）の例では訪問間隔 8 の左端の点をあえてより短い 6 ごとに訪問することで全点を警邏できるが，同じグラフについて，図 3（右）のように左の巡査が左端の点の訪問間隔ぎりぎりの時間まで右の方へ動き頂点をなるべく多くの時間訪問して左端へ帰る運行を選ぶと右の巡査がどのような動き方をしても訪問間隔を超え警備できない頂点が生まれてしまう．

対比をわかりやすく

どう違うのか？

これらの例は，協力が発生する場合巡査の運行を個別に決定するのは難しいということを示唆している．しかしながら，この訪問間隔が一般の場合での Line 上の警邏問題の困難性を示すこともできなかった．そこで，訪問間隔より短い間隔で点を訪問しうることで運行の決定を複雑になる例が存在したことを踏まえて，1 章で定義した時刻指定警邏判定問題を考える．

任意の運行可能［←この時点で未定義ではないか。］集合 X に対して，Line 上の巡査の運行 a であって，X のすべての元 (t,x) に対して $a(t)=x$ を満たすものが存在すること

図の描き方 統一せよ

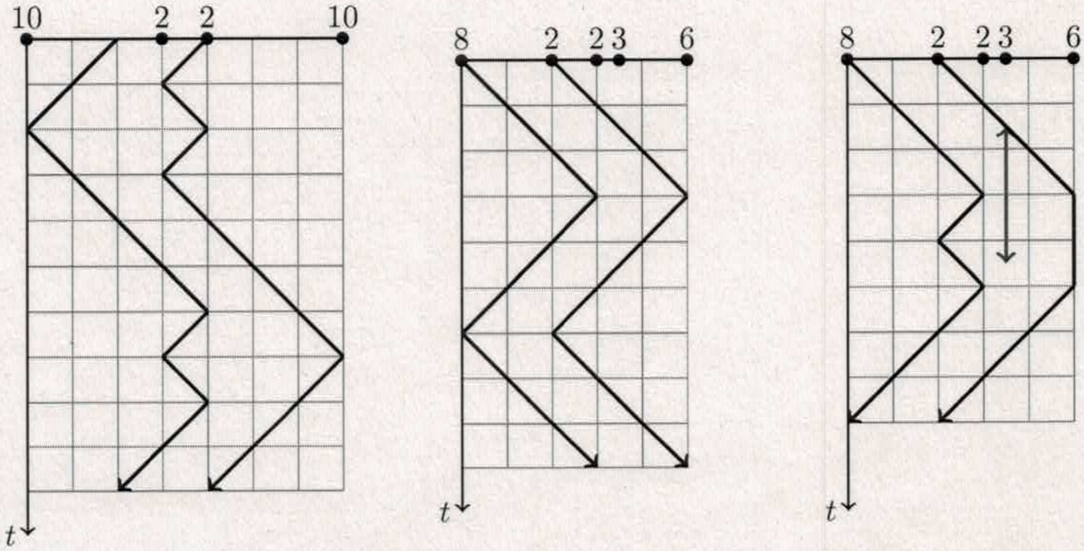

図 3　巡査の協力が必要な例．横軸を頂点の座標，縦軸を時刻として巡査の軌跡を表す．点の上の数値は訪問間隔を表す．

は簡単に示すことができる．これにより，グラフが Line の場合の時刻指定警邏判定問題は次のようにも記述できる．

定義 2.5. $S \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ とする．任意の $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in S$ が $|x_1 - x_2| \leq |t_1 - t_2|$ を満たすとき，S は運行可能であるという．また，分割 $\{P_1, \ldots, P_l\}$ が運行可能であるとは，各 $P_1, \ldots, P_l$ が運行可能集合となることである．

ℤ？

時刻指定線分警邏問題. 正の整数 m（巡査の人数を表す）と自然数の組 $(q_i, r_i, x_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ が与えられる．集合 $\{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ を m 個以下の運行可能集合に分割できるか判定せよ．

この問題では，$X := \{(q_i k + r_i, x_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \mathbf{Z}\}$ という無限集合の分割が可能か判定しなければならないが，実際には X の点は時刻（組 $(t, x) \in X$ の第 1 要素）について周期的であるため，1 周期分の有限部分集合を以下に定義する「繰り返し運行可能な」集合に分割できるかどうかさえ判定すればよい．

定義 2.6. T を正の整数，$S \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ を有限集合とする．任意の $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in S$ が $|x_1 - x_2| \leq |t_1 - t_2|$ かつ $|x_1 - x_2| \leq |T + t_1 - t_2|$ を満たすとき，S は周期 T で繰り返し運行可能であるという．また，分割 $\{P_1, \ldots, P_l\}$ が周期 T で繰り返し運行可能であるとは，各 $P_1, \ldots, P_l$ が周期 T で繰り返し運行可能となることである．

まずアルゴリズムを
記述しよう

以下では，集合 S に対して $S[a:b] := \{(t,x) \in S \mid a \le t < b\}$ と記号を定義する．また，$T := lcm(q_1, \dots, q_n)$ とする（$q_1, \dots, q_n$ は時刻指定線分警邏問題の入力のもの）．

X 全体を m 個の運行可能集合に分割できるとき，部分集合 $X[-T:2T]$ を後で述べる分割アルゴリズムで分割すると，大きさ m 以下の分割 $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_l\}$ が得られる．一方，$X[-T:2T]$ を分割アルゴリズムで分割した結果が $\{P_1, \dots, P_l\}$ となるとき，$\{P_1[0:T], \dots, P_l[0:T]\}$ は $X[0:T]$ に対する分割でありかつ周期 T で繰り返し運行可能となる←どう説明？．よって，$X[kT:(k+1)T]$ を $X[0:T]$ と同様に分割したものを $C_k := \{C_{k1}, \dots, C_{kl}\}$ とすると，$A_i := \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} C_{ki}$ として $\mathcal{A} := \{A_1, \dots, A_l\}$ は X の運行可能分割となる．

以上から，X を m 個の運行可能集合へ分割できるかどうかは，$X[-T:2T]$ を分割アルゴリズムにより分割した結果 $\mathcal{P}$ が $|\mathcal{P}| \le m$ を満たすかどうかで判定できる．

分割アルゴリズム． 入力を S とする．初期値を $\mathcal{P} = \{\}$, $S' = S$ とし，$S' \neq \emptyset$ である限り 1. から 3. を繰り返す．

1. $P \leftarrow \{(t,x) \in S' \mid x - \beta \le |t - \alpha|\}$　　α, β とは？
2. $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{P\}$.
3. $S' \leftarrow S' \setminus P$,

$\mathcal{P}$ を出力する．■

分割アルゴリズムは，有限集合 S を入力として，S の最小の運行可能分割であって「順序保存」なものを出力する．運行可能分割が順序保存であるとは，その分割から順序保存運行が生成されることである．Line における順序保存運行の存在と同様に，任意の S に対して最小の運行可能分割であって順序保存なものが存在する．$\{(t,x) \in S' \mid x - \beta \le |t - \alpha|\}$ は，S' の順序保存な運行可能分割において一番左にあるもののうち最大のものである．

3 Star

グラフの形状が Star の場合については，利得か訪問間隔のいずれかが一般であれば，警邏問題は巡査が 1 人であっても NP 困難であることが分かっている [2]．よって，本稿の警邏問題については，巡査数が一般であって，全点の利得と訪問間隔が等しい場合を調べる．

担当警邏問題においては，グラフが Star で巡査数が一般の場合は利得と訪問間隔がすべて等しくても NP 困難になることが Coene ら [2] により示されているが，一方で同じ