

# Algoritmy v digitální kartografii

## Geometrické vyhledávání bodu

Zimní semestr 2018/2019

(oprava: 4. 11. 2018)

Tereza Kulovaná  
Markéta Pecenová

# Obsah

<b>1</b>	<b>Zadání</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Popis a rozbor problému</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Algoritmy</b>	<b>3</b>
3.1	Ray Crossing Algorithm . . . . .	3
3.2	Winding Number Algorithm . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Problematické situace</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Vstupní data</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Výstupní data</b>	<b>6</b>
<b>7</b>	<b>Aplikace</b>	<b>6</b>
<b>8</b>	<b>Dokumentace</b>	<b>9</b>
8.1	Algorithms . . . . .	9
8.1.1	getPositionRay . . . . .	9
8.1.2	getPositionWinding . . . . .	9
8.1.3	getPointLinePosition . . . . .	10
8.1.4	getTwoVectorsAngle . . . . .	10
8.1.5	getDistanceEdgeQ . . . . .	11
8.2	Draw . . . . .	11
8.2.1	paintEvent . . . . .	11
8.2.2	mousePressEvent . . . . .	11
8.2.3	clearCanvas . . . . .	11
8.2.4	fillPolygon . . . . .	12
8.2.5	loadPolygon . . . . .	12
8.3	Widget . . . . .	12
8.3.1	writeResult . . . . .	12
8.3.2	on_load_button_clicked . . . . .	12
8.3.3	on_analyze_button_clicked . . . . .	12
8.3.4	on_clear_button_clicked . . . . .	12
<b>9</b>	<b>Závěr</b>	<b>13</b>
<b>10</b>	<b>Zdroje</b>	<b>14</b>

# 1 Zadání

Zadání úlohy bylo staženo ze stránek předmětu 155ADKG.

*Vstup: Souvislá polygonová mapa  $n$  polygonů  $\{P_1, \dots, P_n\}$ , analyzovaný bod  $q$ .*

*Výstup:  $P_i$ ,  $q \in P_i$ .*

Nad polygonovou mapou implementujete následující algoritmy pro geometrické vyhledávání:

- Ray Crossing Algorithm (varianta s posunem těžiště polygonu).
- Winding Number Algorithm.

Nalezený polygon obsahující zadaný bod  $q$  graficky zvýrazněte vhodným způsobem (např. vyplněním, šrafováním, blikáním). Grafické rozhraní vytvořte s využitím frameworku QT.

Pro generování nekonvexních polygonů můžete navrhnout vlastní algoritmus či použít existující geografická data (např. mapa evropských států).

Polygony budou načítány z textového souboru ve Vámi zvoleném formátu. Pro datovou reprezentaci jednotlivých polygonů použijte špagetový model.

**Hodnocení:**

Krok	Hodnocení
Detekce polohy bodu rozlišující stavy uvnitř, vně na hranici polygonu.	10b
Ošetření singulárního případu u Winding Number Algorithm: bod leží na hraně polygonu.	+2b
Ošetření singulárního případu u obou algoritmů: bod je totožný s vrcholem jednoho či více polygonů.	+2b
Zvýraznění všech polygonů pro oba výše uvedené singulární případy.	+2b
Algoritmus pro automatické generování nekonvexních polygonů.	+5b
Max celkem:	21b

Čas zpracování: 2 týdny.

V rámci této úlohy byly implementovány bonusové úlohy č. 1-3. Poslední bonusovou úlohu, generování nekonvexních polygonů, tato aplikace neposkytuje.

## 2 Popis a rozbor problému

Úloha *Geometrické vyhledávání bodu* se zabývá vytvořením aplikace, která umožní uživateli zjistit polohu jím zvoleného bodu  $q$  vzhledem k příslušnému mnohoúhelníku. Jako vhodné řešení bylo vzhledem k náročnosti problému zvoleno opakované určování polohy bodu  $q$  a mnohoúhelníku.

Existují dva základní druhy mnohoúhelníků (pro účely této úlohy je nazýváme polygony), konvexní a nekonvexní. Konvexní polygon je takový polygon, jehož všechny diagonály leží uvnitř polygonu a žádná z nich neprotíná jeho hranu. Konkávní polygon tuto podmínku nesplňuje. Pro představu je níže přiložen obrázek obou druhů polygonů.



Obrázek 1: Ukázka konvexního (vlevo) a konkávního polygonu (vpravo) (zdroj)

Z výše uvedeného vyplývá, že bod  $q$  může vůči polygonu  $P$  zaujímat 4 pozice:

1. Bod  $q$  se nalézá uvnitř polygonu  $P$ .
2. Bod  $q$  se nalézá vně polygonu  $P$ .
3. Bod  $q$  se nalézá na hraně polygonu  $P$ .
4. Bod  $q$  se nalézá ve vrcholu polygonu  $P$ .

Pro účely této aplikace byly zvoleny výpočetní algoritmy *Ray Crossing* a *Winding Number*, jejichž princip je vysvětlen v následující kapitole.

## 3 Algoritmy

Tato kapitola se zabývá popisem algoritmů, které byly v aplikaci implementovány.

### 3.1 Ray Crossing Algorithm

Prvním zvoleným algoritmem je tzv. *Ray Crossing Algorithm* neboli *Paprskový algoritmus*. Svůj název získal po způsobu, jakým řeší nalezení polohy bodu vůči polygonu. Tento algoritmus je primárně využíván pro konvexní polygony, lze ho však zobecnit a využít ho i pro nekonvexní polygony.

Mějme polygon  $P$  a daný bod  $q$ . Z bodu  $q$  ved'me libovolný počet polopřímek (paprsků). Princip algoritmu je založen na vyhodnocení počtu průsečíků  $k$ , které vzniknou protnutím paprsků vedených z bodu  $q$  s hranami polygonu  $P$ . Pro  $k$  mohou nastat dvě situace:

1. Hodnota  $k$  je rovna lichému číslu  $\rightarrow$  bod  $q$  se nachází uvnitř polygonu  $P$ .
2. Hodnota  $k$  je rovna sudému číslu  $\rightarrow$  bod  $q$  se nachází vně polygonu  $P$ .

Základní varianta algoritmu neošetřuje problémové situace, které mohou během výpočtu nastat. Konkrétně se jedná o dvě níže uvedené situace:

1.  $q == P_i$
2.  $q$  leží v hraně polygonu tvořené vrcholy  $P_i$  a  $P_{i+1}$

Pro eliminaci těchto tzv. singularit je vhodné použít modifikovanou variantu algoritmu, která redukuje souřadnice bodů polygonu k bodu  $q$  (viz krok 2(I.) níže).

Zjednodušený zápis takto modifikovaného algoritmu lze zapsat způsobem uvedeným níže:

1. Načtení bodů polygonu  $p_i$ , počet průsečíků  $k = 0$
2. Postupně pro všechny  $p_i$  opakuj kroky I–IV:
  - I. Redukce souřadnic bodu  $p_i$  k bodu  $q$ :
 
$$x'_i = x_i - x_q$$

$$y'_i = y_i - y_q$$
  - II. Podmínka  $(y'_i > 0) \& \& (y'_{i-1} \leq 0) \parallel (y'_{i-1} > 0) \& \& (y'_i \leq 0)$
  - III. Je-li podmínka splněna:  $x'_m = \frac{x'_i y'_{i-1} - x'_{i-1} y'_i}{y'_i - y'_{i-1}}$
  - IV. Podmínka  $(x'_m > 0) \rightarrow k = k + 1$
3. Výpočet  $k \% 2$
4. Vyhodnocení  $k$  (liché  $k \rightarrow q$  náleží  $P$ ; sudé  $k \rightarrow q$  nenáleží  $P$ )

### 3.2 Winding Number Algorithm

Druhý algoritmus použitý v aplikaci je tzv. *Winding Number Algorithm* neboli *Metoda ovíjení*, který je vhodný pro nekonvexní polygony. Princip tohoto algoritmu je založen na součtovém úhlu  $\omega$ .

Mějme polygon  $P$  a bod  $q$ , na kterém stojí pozorovatel. Nachází-li se  $q$  uvnitř  $P$ , pak pozorovatel, který by si přál postupně vidět všechny vrcholy polygonu, se musí otočit celkem o  $2\pi$ . Výsledkem algoritmu je pak tzv. Winding number  $\omega$ , které říká, o kolik otáček se pozorovatel otočil:

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \omega_i$$

Zde se hodí zdůraznit, že záleží na zvoleném směru otáčení. Otáčí-li se pozorovatel ve směru chodu hodinových ručiček, úhly se sčítají. V opačném směru se od sebe úhly odečítají a  $\omega$  by vyšlo záporné. Během výpočtů je také nutno zavést určitou toleranci  $\epsilon$ , která pokrývá chyby způsobené zaokrouhlováním. Z výše uvedených vztahů vyplývá:

1.  $w = 2\pi \rightarrow q$  se nachází uvnitř  $P$
2.  $w < 2\pi \rightarrow q$  se nachází vně  $P$

Mezi singularity pro tento algoritmus patří pouze případ, je-li  $q \approx p_i$ . Tento problém byl vyřešen zavedením speciální třetí návratové hodnoty, která ošetřuje tento případ.

Zjednodušený zápis algoritmu:

1. Načtení bodů polygonu, úhel  $\omega = 0$ , tolerance  $\epsilon = 1e - 10$
2. Orientace  $o_i$  bodu  $q$  ke straně  $p_i, p_{i+1}$
3. Postupně pro všechny orientované trojice  $p_i, q, p_{i+1}$  opakuj kroky I-III:
  - I. Výpočet úhlu  $\omega_i = \angle p_i, q, p_{i+1}$
  - II. Podmínka ( $q$  je vlevo)  $\rightarrow \omega = \omega + \omega_i$
  - III. Jinak  $\omega = \omega - \omega_i$
4. Podmínka ( $|\omega - 2\pi| < \epsilon \rightarrow q$  náleží  $P$
5. Jinak  $q$  nenáleží  $P$

## 4 Problematické situace

V úloze bylo nutné ošetřit singularity, zda bod  $q$  neleží v hraně některého z polygonů či v jejich vrcholech. Pro vyřešení tohoto problému byla použita metoda *getDistanceEdgeQ* třídy **Algorithms**, která porovnává vzdálenost dvou bodů na přímce ( $p_1$  a  $p_2$ ) se sumou vzdáleností těchto bodů k danému bod  $q$ . Je-li rozdíl vzdáleností menší než mezní hodnota  $\epsilon$ , je bod  $q$  vyhodnocen, že leží na přímce.

$$|d_{p_1, p_2} - \sum(d_{p_1, q} + d_{q, p_2})| < \epsilon \rightarrow q \text{ náleží přímce } p.$$

## 5 Vstupní data

Aplikace požaduje dva druhy vstupních dat:

1. soubor daných polygonů
2. daný bod  $q$

Seznam bodů jednotlivých polygonů je uložen v textovém souboru *polygon.txt*. Pro vykreslení jednotlivých polygonů v aplikaci je nutno tento soubor do aplikace nahrát pomocí tlačítka *Load*. K vygenerování souřadnic bodů byla použita online aplikace ze stránek *mobilefish.com*. Struktura souboru s polygony je následující:

*První řádek:* počet polygonů v souboru

*Sloupec 1:* číslo polygonu, jehož součástí daný bod je

*Sloupec 2:* souřadnice X daného bodu polygonu

*Sloupec 3:* souřadnice Y daného bodu polygonu

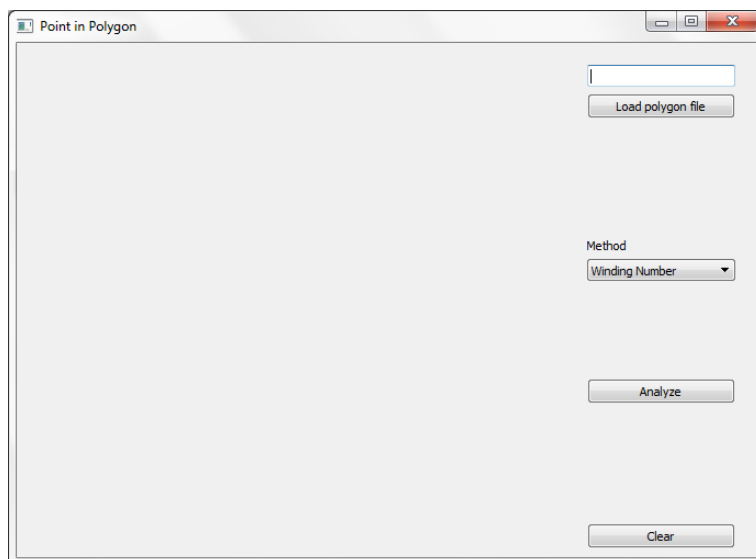
Bod  $q$  není součástí textového souboru, do aplikace vstupuje na základě ručního zadání uživatelem. Pro zadání bodu je nutné v aplikaci kliknout levým tlačítkem myši do okna s polygony.

## 6 Výstupní data

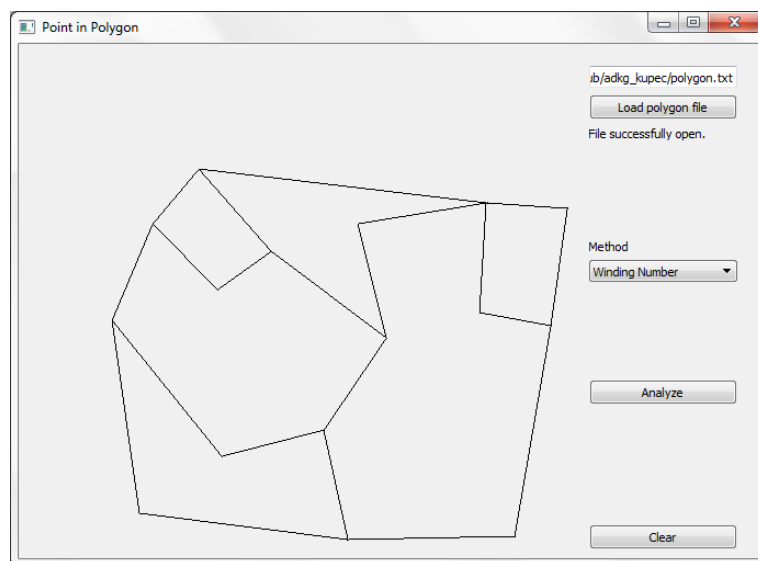
Výstupem úlohy je vypsání v grafickém okně aplikace, v jaké poloze se analyzovaný bod vůči polygonům nachází. Polygony, kterým bod náleží, jsou barevně zvýrazněny.

## 7 Aplikace

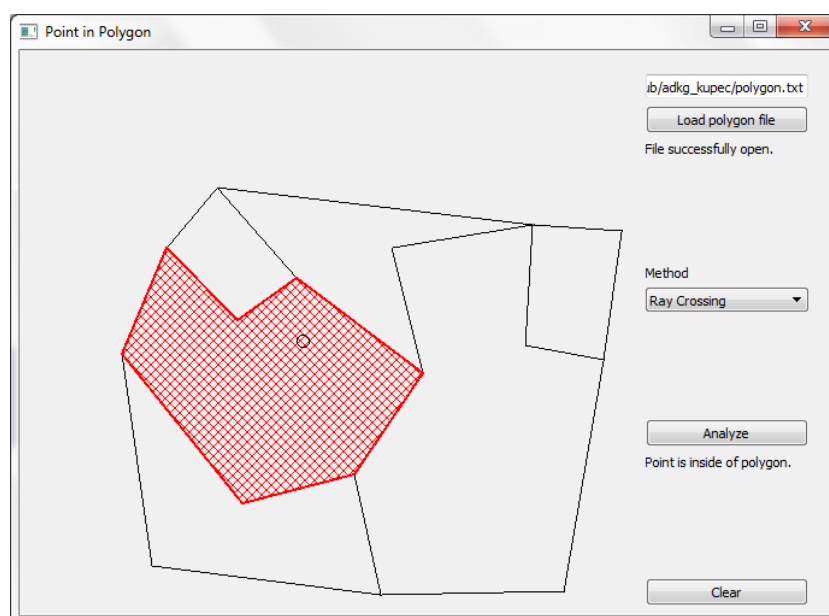
V následující kapitole je představen vizuální vzhled vytvořené aplikace tak, jak ji vidí prostý uživatel.



Obrázek 2: Aplikace ve výchozím stavu

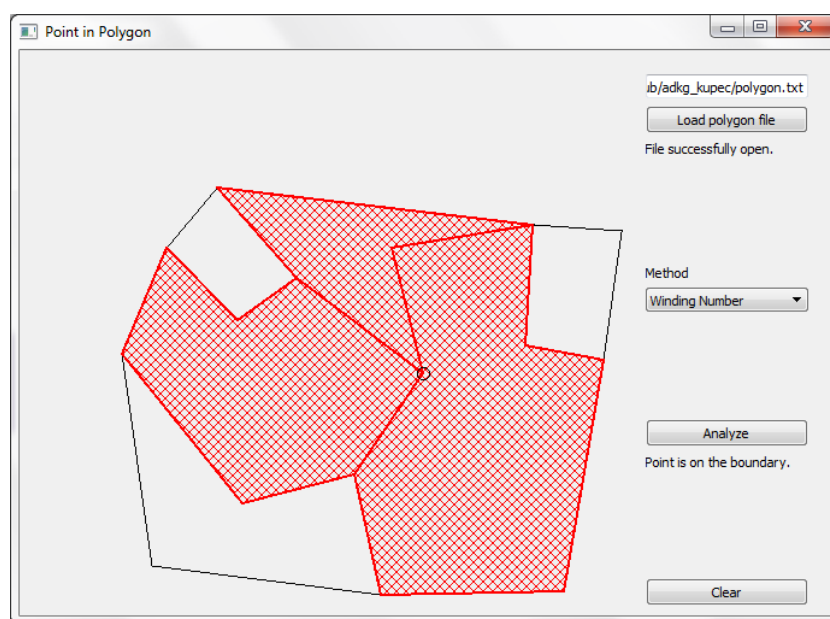


Obrázek 3: Aplikace po nahrání polygonů



Obrázek 4: Výstup při použití *Ray Crossing Algorithm*





Obrázek 5: Výstup při použití *Winding Number Algorithm* pro  $q$  ležící ve více vrcholech polygonů

## 8 Dokumentace

Tato kapitola obsahuje dokumentaci k jednotlivým třídám.

### 8.1 Algorithms

Třída *Algorithms* obsahuje metody, které určují polohu zvoleného bodu  $q$  vzhledem k polygonu. Dále obsahuje pomocné metody pro výpočet úhlu mezi třemi body a na zjištění polohy bodu vzhledem k přímce.

#### 8.1.1 getPositionRay

Metoda **getPositionRay** určuje polohu bodu  $q$  vzhledem k polygonu za použití algoritmu *Ray Crossing*. Na vstupu je bod třídy `QPoint` a vektor bodů polygonu. Návrátová hodnota je typu `int`.

**Input:**

- *QPoint*  $q$
- `std::vector<QPoint>`  $pol$

**Output:**

- 0  $\rightarrow$  bod se nachází vně polygonu
- 1  $\rightarrow$  bod se nachází uvnitř nebo na hraně polygonu
- -1  $\rightarrow$  bod se nachází na hraně polygonu

#### 8.1.2 getPositionWinding

Metoda **getPositionWinding** určuje polohu bodu  $q$  vzhledem k polygonu za použití algoritmu *Winding Number*. Na vstupu je bod třídy `QPoint` a vektor bodů polygonu. Návrátová hodnota je typu `int`.

**Input:**

- *QPoint*  $q$
- `std::vector<QPoint>`  $pol$

**Output:**

- 0  $\rightarrow$  bod se nachází vně polygonu
- 1  $\rightarrow$  bod se nachází uvnitř polygonu
- -1  $\rightarrow$  bod se nachází na hraně polygonu

### 8.1.3 **getPointLinePosition**

Metoda **getPointLinePosition** určuje polohu bodu  $q$  vzhledem k přímce tvořené dvěma body. Na vstupu jsou souřadnice  $x$  a  $y$  pro 3 body typu *double*, návratová hodnota je typu *int* podle výsledku.

**Input:**

- *double*  $x_q$
- *double*  $y_q$
- *double*  $x_1$
- *double*  $y_1$
- *double*  $x_2$
- *double*  $y_2$

**Output:**

- 0  $\rightarrow$  bod se nachází vpravo od přímky
- 1  $\rightarrow$  bod se nachází vlevo od přímky
- -1  $\rightarrow$  bod se nachází na přímce

### 8.1.4 **getTwoVectorsAngle**

Metoda **getTwoVectorsAngle** počítá úhel mezi dvěma vektory. Na vstupu jsou souřadnice  $x$  a  $y$  pro 4 body typu *double*, návratová hodnota typu *double* vrací velikost úhlu v radiánech.

**Input:**

- *double*  $x_1$
- *double*  $y_1$
- *double*  $x_2$
- *double*  $y_2$
- *double*  $x_3$
- *double*  $y_3$
- *double*  $x_4$
- *double*  $y_4$

**Output:**

- *double*

### 8.1.5 `getDistanceEdgeQ`

Metoda **`getDistanceEdgeQ`** počítá, zda se bod nenachází na přímce na základě porovnání vzdálenosti mezi dvěma body na přímce se sumou vzdáleností těchto bodů k bodu  $q$ . Je-li rozdíl menší než zadané  $\epsilon$ , bod leží na přímce. Návrátová hodnota je typu *int*.

**Input:**

- *double*  $x_1$
- *double*  $y_1$
- *double*  $x_2$
- *double*  $y_2$

**Output:**

- -1  $\rightarrow$  bod  $q$  leží na přímce
- 2  $\rightarrow$  bod  $q$  neleží na přímce

## 8.2 Draw

Třída *Draw* obsahuje metody, které slouží k vykreslení polygonů, analyzovaného bodu  $q$  a výstupních dat.

### 8.2.1 `paintEvent`

Metoda **`paintEvent`** vykresluje polygony a analyzovaný bod  $q$ . Návrátová hodnota je typu *void*.

**Input:**

- *QPaintEvent* \*e

### 8.2.2 `mousePressEvent`

Metoda **`mousePressEvent`** slouží k načtení souřadnic bodu  $q$ . Návrátová hodnota je typu *void*.

**Input:**

- *QMouseEvent* \*e

### 8.2.3 `clearCanvas`

Metoda **`clearCanvas`** slouží k vymazání všech vykreslených dat. Metoda neobsahuje žádné proměnné na vstupu a návratová hodnota je typu *void*.

### 8.2.4 fillPolygon

Metoda **fillPolygon** barevně vyšrafuje polygon, ve kterém se nachází analyzovaný bod  $q$ . Návrátová hodnota je typu *void*.

**Input:**

- *std :: vector<std :: vector<QPoint>>* poly\_fill

### 8.2.5 loadPolygon

Metoda **loadPolygon** slouží k nahrání bodů jednotlivých polygonů do aplikace. Součástí metody je i kontrola, zda se soubor úspěšně nahrál, zda vůbec obsahuje nějaké polygony a zda jsou polygony tvořeny aspoň 3 body. Návrátová hodnota je typu *QString* vrací hlášku, zda byly polygony úspěšně nahrány.

**Input:**

- *const char\** path

**Output:**

- *QString*

## 8.3 Widget

Metody třídy **Widget** slouží pro práci uživatele s aplikací. Až na jednu výjimku nemají metody na vstupu nic, návratové hodnoty všech metod jsou typu *void*.

### 8.3.1 writeResult

Metoda **writeResult** vrací polohu bodu  $q$  vzhledem k polygonu na základě vstupní hodnoty typu *int*.

**Input:**

- *int*

### 8.3.2 on\_load\_button\_clicked

Metoda **on\_load\_button\_clicked** načítá data z textového formátu. Uživatel sám vyhledává cestu k požadovanému souboru.

### 8.3.3 on\_analyze\_button\_clicked

Metoda **on\_analyze\_button\_clicked** vypisuje na obrazovku polohu bodu  $q$  vzhledem k polygonům po zvolení požadovaného algoritmu a kliknutí na tlačítko *Analyze*.

### 8.3.4 on\_clear\_button\_clicked

Metoda **on\_clear\_button\_clicked** vrací aplikaci do výchozí polohy smazáním všeho, co bylo vykresleno.

## 9 Závěr

V rámci úlohy *Geometrické vyhledávání bodu* byla vytvořena aplikace, která určuje polohu analyzovaného bodu  $q$  vzhledem k polygonu. Z důvodu větší časové náročnosti úlohy než obě autorky původně očekávaly nebyly implementovány všechny bonusové úlohy a některé části kódu mohly být řešeny lépe. Tato opravená verze technické zprávy je aktualizována o několik vzorců a o text v sekci Zadání.

Jedná se například o použití tříd `QPoint` a `QPolygon`, které na vstupu mají hodnoty typu `int` a které mohly být nahrazeny třídami `QPointF` a `QPolygonF`, jež na vstupu mají hodnoty typu `float`, což je pro práci se souřadnicemi bodů praktičtější. Dále jako ne zrovna nejšťastnější řešení hodnotíme množství vstupních hodnot, které mají na vstupu metody `getPointLinePosition`, `getTwoVectorsAngle` a `getDistanceEdgeQ` třídy **Algorithms**. Vhodné by bylo nahradit jednotlivé souřadnice třídou `QPoint`, resp. `QPointF`.

Dále mohlo být implementováno více kontrolních podmínek pro načítání bodů polygonu z textového souboru, například ošetření, zda soubor neobsahuje text, zda všechny body mají  $x$  a  $y$  souřadnici apod. Umisťování bodu  $q$  do hran či vrcholů polygonů vyžaduje notnou dávku trpělivosti, aby se zobrazil korektní výsledek. Experimentálně bylo zjištěno, že aplikace zvládá lépe (tzn. je potřeba méně pokusů na kliknutí) zobrazovat polohu bodu  $q$  ve vrcholech než v hranách, ač obě situace jsou v kódu ošetřené.

Úloha přinesla i pozitivní přínos v tom směru, že se autorky mohly potrénovat v psaní kódu v jazyce C++ a oprášit své znalosti psaní v prostředí LaTeX.

## 10 Zdroje

1. *BAYER, Tomáš. Geometrické vyhledávání bodů* [online][cit. 24. 10. 2018].  
Dostupné z: <https://web.natur.cuni.cz>
2. *What is concave & convex polygon?* [online][cit. 23. 10. 2018].  
Dostupné z: <https://www.nextgurukul.in>
3. *Record XY mouse coordinates* [online][cit. 23. 10. 2018].  
Dostupné z: <https://mobilefish.com/>