Algoritmy v digitální kartografii

Konvexní obálky

Zimní semestr 2018/2019

Tereza Kulovaná
Markéta Pecenová

Obsah

1 Zadání

Zadání úlohy bylo staženo ze stránek předmětu 155ADKG.

Vstup: množina $P = \{p_1, ..., p_n\}$, $p_i = [x, y_i]$.

Výstup: $\mathcal{H}(P)$.

Nad množinou P implementujete následující algoritmy pro konstrukci $\mathcal{H}(P)$:

- Jarvis Scan,
- Quick Hull,
- Swep Line.

Vstupní množiny bodů včetně vygenerovaných konvexních obálek vhodně vizualizujte. Pro množiny $n \in < 1000, 1000000 >$ vytvořte grafy ilustrující doby běhu algoritmů pro zvolená n. Měření proveďte pro různé typy vstupních množin (náhodná množina, rastr, body na kružnici) opakovaně (10x) a různá n (nejméně 10 množin) s uvedením rozptylu. Naměřené údaje uspořádejte do přehledných tabulek.

Zamyslete se nad problematikou možných singularit pro různé typy vstupních množin a možnými optimalizacemi. Zhodnoťte dosažené výsledky. Rozhodněte, která z těchto metod je s ohledem na časovou složitost a typ vstupní množiny P nejvhodnější.

Hodnocení:

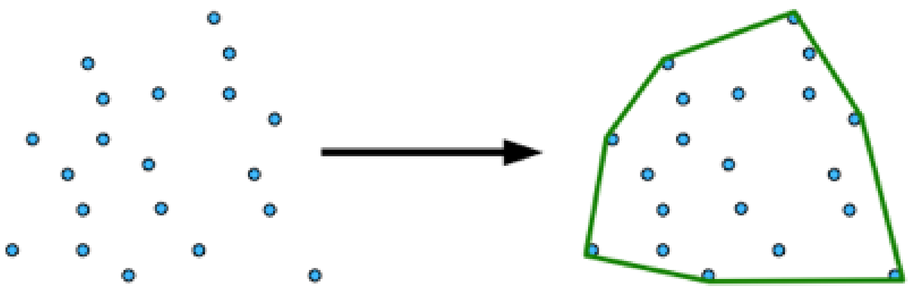
Krok	Hodnocení
Konstrukce konvexních obálek metodami Jarvis Scan, Quick Hull, Seep Line.	15b
Konstrukce konvexní obálky metodou Graham Scan	*+5b*
Konstrukce striktně konvexních obálek pro všechny uvedené algoritmy.	*+5b*
Ošetření singulárního případu u Jarvis Scan: existence kolineárních bodů v datasetu.	*+2b*
Konstrukce Minimum Area Enclosing box některou z metod (hlavní směry budov).	*+5b*
Algoritmus pro automatické generování konvexních/nekonvexních množin bodů různých tvarů (kruh, elipsa, čtverec, star-shaped, popř. další).	*+4b*
Max celkem:	**36b**

V rámci této úlohy byly implementovány bonusové úlohy č. xx.

2 Popis a rozbor problému

Úloha **Konvexní obálky** se zabývá vytvořením aplikace, která nad vybranou vstupní množinou S vytvoří tzv. konvexní obálku. Konvexní obálka je nejmenší konvexní mnohoúhelník C obsahující všechny body z množiny S. V rámci úlohy se testuje výpočetní rychlost použitých algoritmů při konstrukci obálek nad danými vstupními množinami bodů.

Své využití konvexní obálky nalézají v mnoha oborech. V kartografii se hojně využívají při detekci tvarů a natočení budov pro tvorbu minimálních ohraničujících obdélníků (???). Dále jsou vhodné pro analýzu tvarů či shluků. Konvexní obálky lze sestrojit v libovolném $\mathbb{R}^n$ prostoru, avšak pro účely této úlohy byl uvažován pouze prostor $\mathbb{R}^2$.



Obrázek 1: Ukázka konvexní obálky (*zdroj*)

Vzniklá aplikace k tvorbě konvexní obálek využívá čtyř výpočetních algoritmů: *Jarvis Scan*, *Quick Hull*, *Sweep line* a *Graham Scan*. Čtvrtý z uvedených algoritmů patří mezi bonusové úlohy, které bylo možno implementovat.

3 Algoritmy

Tato kapitola se zabývá popisem algoritmů, které byly v aplikaci implementovány.

3.1 Jarvis Scan

Prvním zvoleným algoritmem je *Jarvis Scan*. Způsob, jakým vytváří konvexní obálku, nápadně připomíná balení dárků (proto je též občas nazýván jako *Gift Wrapping Algorithm*). Mezi nevýhody tohoto algoritmu patří nutnost předzpracování dat a nalezení tzv. pivotu. Algoritmus dále není vhodný pro velké množiny bodů a ve vstupní množině S nesmí být žádné tři body kolineární. Časová náročnost algoritmu je až $O(n^2)$, jeho výhodou však je velmi snadná implementace.

Mějme množinu bodů S a pivota $q \in S$, jehož souřadnice Y je minimální ze všech bodů, a přidejme ho do konvexní obálky H. Následně do H přidejme takový bod, který s posledními dvěma body přidanými do konvexní obálky svírá maximální úhel. Na začátku výpočtu je nutno inicializovat pomocný bod s, jehož souřadnice X je minimální a Y shodná s pivotem q, který zajistí dostatečný počet bodů pro výpočet prvního úhlu. Algoritmus končí ve chvíli, kdy nově přidaným bodem do konvexní obálky H je opět pivot q.

Zjednodušený zápis algoritmu lze zapsat způsobem uvedeným níže:

1. Nalezení pivota q: $q = \min(y)$
2. Inicializace pomocného bodu s: $s = [\min(x), \min(y)]$
3. Proveď: $q \in H$
4. Inicializace: $p_{j-1} = s$, $p_j = q$
5. opakuj kroky I–III, dokud $p_{j+1} \neq q$:
   I. Najdi p_{j+1}: $\sphericalangle p_{j-1}, p_j, p_{j+1} = \max$
   II. Proveď: $p_{j+1} \in H$
   III. Přeindexuj: $p_{j-1} = p_j$, $p_j = p_{j+1}$

Singularity!!!!

3.2 Quick Hull

Druhý algoritmus použitý v aplikaci je *Quick Hull*, který k výpočtu konvexní obálky využívá strategii *Divide and Conquer*. Hlavní výhodou algoritmu je jeho rychlost, která není ovlivňována velkým počtem rekurzivních kroků, jak tomu bývá u jiných algoritmů. Časová náročnost výpočtu bývá v nejhorším případě $O(n^2)$ a nastává tehdy, pokud všechny body množiny S náleží konvexní obálce H.

Mějme body q_1, resp. q_3, jejichž souřadnice X je minimální, resp. maximální ze všech bodů z množiny S. Veďme těmito body pomyslnou přímku, která prostor rozdělí na horní (S_U) a dolní (S_L) polorovinu. Zbylé body množiny S roztřídíme do daných polorovin podle jejich pozice od přímky. V polorovině následně hledáme bod, který je od dané přímky nejvzdálenější, přidáme ho do konvexní obálky dané poloroviny a přímkami spojíme bod s krajními body přímky předchozí. Proces opakujeme, dokud od nově vzniklých přímek již neexistují vhodné body. Na závěr do konvexní obálky H přidáme bod q_3, body konvexní obálky H_U z poloroviny S_U, bod q_1 a nakonec body konvexní obálky H_L poloroviny S_L. Do konvexní obálky H je důležité přidávat body v tomto pořadí, jinak by došlo k nesprávnému vykreslení konvexní obálky H.

Algoritmus *Quick Hull* se skládá z globální a lokální procedury. Globální část zahrnuje rozdělení množiny na dvě poloroviny a spojení již nalezených bodů konvexních obálek polorovin do jediné H. V lokální části se rekurzivně volá metoda, která hledá nejvzdálenější body od přímky v dané polorovině a přidává je do konvexní obálky dané poloroviny H_i.

Mezi singularity!!!

Globální procedura:

1. Inicializace: $H = \emptyset$, $S_U = \emptyset$, $S_L = \emptyset$
2. Nalezení $q_1 = \min(x)$, $q_3 = \max(x)$

3. Proveď: $q_1 \in S_U$, $q_3 \in S_U$, $q_1 \in S_L$, $q_3 \in S_L$
4. Potupně pro všechna $p_i \in S$:

   Podmínka (p_i je vlevo od q_1, q_3) $\rightarrow S_U$

   Jinak $p_i \rightarrow S_L$
5. Proveď: $q_3 \in H$
6. Lokální procedura pro S_U
7. Proveď: $q_1 \in H$
8. Lokální procedura pro S_U

Lokální procedura nad polorovinou S_i:

I. Pro všechny $p_i \in S_i$ kromě bodů přímky:

   Podmínka (p_i vpravo) $\rightarrow$ vzdálenost d_i

   Podmínka ($d_i > d_{max}$) $\rightarrow d_{max} = d_i$, $p_{max} = p_i$

II. Podmínka (bod p_{max} $\exists$)

   opakuj krok I. nad první nově vzniklou přímku

   $p_{max} \in H_i$

   opakuj krok I. nad druhou nově vzniklou přímku

3.3 Sweep Line

Algoritmus *Sweep Line* neboli *Metoda zametací přímky* je dalším z algoritmů, které byly pro vytváření konvexních obálek implementovány. Jeho princip je založen na imaginární přímce, která se postupně přesouvá zleva doprava nad všem body množiny S. Body, které „přejede“, přidá do dočasné konvexní obálky $\bar{\mathrm{H}}$, která je následně upravena, aby byla konvexní. Pro tento algoritmus je opět nutné předzpracování vstupních dat (seřadit body $\in S$ podle souřadnice X) s náročností $O(n.\log(n))$. Další nevýhodou je citlivost algoritmu na singularity, konkrétně na duplicitní body. Ty je vhodné během předzpracování odstranit.

Algoritmus je postaven na znalosti pozice již vyhodnocených bodů vůči nově přidávanému bodu ukládáním jejich indexů do proměnných p (předchůdce) a n (následník). Zároveň je pro správné fungování algoritmu nutné dodržovat CCW orientaci (proti směru hodinových ručiček). Algoritmus má celkem tři fáze: iniciální a dvě iterativní.

V první fázi seřadíme body p_i z množiny S vzestupně podle souřadnice X. Následně z prvních dvou bodů vytvoříme přímku, jejíž koncové body umístíme do konvexní obálky H a indexy bodů umístíme do n a p. V první iterativní fázi vyhodnotíme, zda další přidávaný bod leží v horní či dolní polorovině v závislosti na jeho souřadnici Y vzhledem k předchozímu bodu, a opět obousměrně vyhodnotíme indexy n a p. Ve druhé iterativní fázi opravujeme dočasnou konvexní obálku $\bar{\mathrm{H}}$ na konvexní H vložením horních a dolních tečen a vynecháním nekonvexních vrcholů.

Zjednodušený zápis algoritmu:

1. Seřazení p_i podle souřadnice X
2. Pro body p_0, p_1 proveď:
   n[0] = 1, n[1] = 0
   p[0] = 1, p[1] = 0
3. Pro všechna $p_i \in S$, $i > 1$ proveď:
   Podmínka $(y_i > y_{i-1}) \rightarrow S_U$: p[i] = i-1, n[i] = n[i-1]
   Jinak $\rightarrow S_L$: n[i] = i-1 p[i] = p[i-1]
   Oprava indexů: n[p[i]] = i, p[n[i]] = i
   Dokud n[n[i]] je vpravo od i, n[i]:
     p[n[n[i]]] = i, n[i] = n[n[i]]
   Dokud p[p[i]] je vlevo od i, p[i]:
     n[p[p[i]]] = i, p[i] = p[p[i]]

Singularity

3.4 !Graham Scan

4 !Problematické situace

V úloze bylo nutné ošetřit sigularity, zda bod q neleží v hraně některého z polygonů či v jejich vrcholech. Pro vyřešení tohoto problému byla použita metoda *getDistanceEdgeQ* třídy **Algorithms**, která porovnává vzdálenost dvou bodů p_1 a p_2 na přímce p se sumou vzdáleností těchto bodů k danému bod q. Je-li rozdíl vzdáleností menší než mezní hodnota ϵ, je bod q vyhodnocen, že leží na přímce.

$| \, d_{p_1,p_2} - \sum(d_{p_1,q} + d_{q,p_2}) \, | < \epsilon \rightarrow q$ náleží přímce p.

5 !Vstupní data

Aplikace požaduje dva druhy vstupních dat:

1. soubor daných polygonů
2. daný bod q

Seznam bodů jednotlivých polygonů je uložen v textovém souboru polygon.txt. Pro vykreslení jednotlivých polygonů v aplikaci je nutno tento soubor do aplikace nahrát pomocí tlačítka *Load*. K vygenerování souřadnic bodů byla použita online aplikace ze stránek mobilefish.com. Struktura souboru s polygony je následující:

První řádek: počet polygonů v souboru
Sloupec 1: číslo polygonu, jehož součástí daný bod je
Sloupec 2: souřadnice X daného bodu polygonu
Sloupec 3: souřadnice Y daného bodu polygonu

Bod q není součástí textového souboru, do aplikace vstupuje na základě ručního zadání uživatelem. Pro zadání bodu je nutné v aplikaci kliknout levým tlačítkem myši do okna s polygony.

6 !Výstupní data

Vytvořená aplikace dále vypisuje dobu, po kterou výpočet probíhal v závislosti na zvoleném výpočetním algoritmu, počtu vstupním bodů a na jejich prostorovém uspořádání. Výstupem úlohy je vypsání v grafickém okně aplikace, v jaké poloze se analyzovaný bod vůči polygonům nachází. Polygony, kterým bod náleží, jsou barevně zvýrazněny.

6.1 Grafy a tabulky

7 !Aplikace

V následují kapitole je představen vizuální vzhled vytvořené aplikace tak, jak ji vidí prostý uživatel.

8 !Dokumentace

Tato kapitola obsahuje dokumentaci k jednotlivým třídám.

8.1 !Algorithms

Třída *Algorithms* obsahuje metody, které určují polohu zvoleného bodu q vzhledem k polygonu. Dále obsahuje pomocné metody pro výpočet úhlu mezi třemi body a na zjištění polohy bodu vzhledem k přímce.

8.1.1 get2LinesAngle

Metoda **get2LinesAngle** počítá úhel mezi dvěma přímkami. Na vstupu jsou 4 body typu `QPoint`, návratová hodnota typu `double` vrací velikost úhlu v radiánech. Body p_1 a p_2 definují první přímku, zbylé dva body druhou přímku.

Input:

- `QPoint` p_1
- `QPoint` p_2
- `QPoint` p_3
- `QPoint` p_4

Output:

- `double`

8.1.2 getPointLineDistance

8.1.3 getPointLinePosition

Metoda **getPointLinePosition** určuje polohu bodu q vzhledem k přímce tvořené dvěma body. Na vstupu jsou 3 body typu `QPoint`, návratová hodnota je nově definovaný typ `TPosition`.

Input:

- `QPoint` q
- `QPoint` a
- `QPoint` b

Output:

- `LEFT` $\rightarrow$ bod se nachází vlevo od přímky
- `RIGHT` $\rightarrow$ bod se nachází vpravo od přímky
- `ON` $\rightarrow$ bod se nachází na přímce

8.1.4 CHJarvis

8.1.5 QHull

8.1.6 q_hloc

8.1.7 CHSweepLine

8.2 !Draw

Třída *Draw* obsahuje metody, které slouží k vykreslení polygonů, analyzovaného bodu q a výstupních dat.

8.2.1 !paintEvent

Metoda **paintEvent** vykresluje polygony a analyzovaný bod q. Návratová hodnota je typu *void*.
Input:

- QPaintEvent *e

8.2.2 !mousePressEvent

Metoda **mousePressEvent** slouží k načtení souřadnic bodu q. Návratová hodnota je typu *void*.
Input:

- QMouseEvent *e

8.2.3 !clearCanvas

Metoda **clearCanvas** slouží k vymazání všech vykreslených dat. Metoda neobsahuje žádné proměnné na vstupu a návratová hodnota je typu *void*.

8.2.4 !fillPolygon

Metoda **fillPolygon** barevně vyšrafuje polygon, ve kterém se nachází analyzovaný bod q. Návratová hodnota je typu *void*.
Input:

- $std :: vector<std :: vector<QPoint>>$ poly_fill

8.2.5 !loadPolygon

Metoda **loadPolygon** slouží k nahrání bodů jednotlivých polygonů do aplikace. Součástí metody je i kontrola, zda se soubor úspěšně nahrál, zda vůbec obsahuje nějaké polygony a zda jsou polygony tvořeny aspoň 3 body. Návratová hodnota je typu *QString* vrací hlášku, zda byly polygony úspěšně nahrány.
Input:

- const char* path

Output:

- QString

8.3 SortByXAsc

Třída obsahuje jedinou metodu(??konstruktor) **SortByXAsc**, která má na vstupu dva body typu `QPoint`, návratová hodnota je typu `bool`. Metoda vrací bod s nižší souřadnicí X. Mají-li oba body shodnou souřadnici X, vrací bod s nižší souřadnicí Y.

Input:

- `QPoint` p_1
- `QPoint` p_2

Output:

- $0 \rightarrow$ bod p_2 má nižší x souřadnici
- $1 \rightarrow$ bod p_1 má nižší x souřadnici

8.4 SortByYAsc

Třída obsahuje jedinou metodu(??konstruktor) **SortByYAsc**, která má na vstupu dva body typu `QPoint`, návratová hodnota je typu `bool`. Metoda vrací bod s nižší souřadnicí Y. Mají-li oba body shodnou souřadnici Y, vrací bod s nižší souřadnicí X.

Input:

- `QPoint` p_1
- `QPoint` p_2

Output:

- $0 \rightarrow$ bod p_2 má nižší souřadnici Y
- $1 \rightarrow$ bod p_1 má nižší souřadnici Y

8.5 !Widget

Metody třídy **Widget** slouží pro práci uživatele s aplikací. Až na jednu výjimku nemají metody na vstupu nic, návratové hodnoty všech metod jsou typu *void*.

8.5.1 !writeResult

Metoda **writeResult** vrací polohu bodu q vzhledem k polygonu na základě vstupní hodnoty typu *int*.

Input:

- int

8.5.2 on_ch_button_clicked

Metoda **on_ch_button_clicked** načítá data z textového formátu. Uživatel sám vyhledává cestu k požadovanému souboru.

8.5.3 on_clear_button_clicked

Metoda **on_clear_button_clicked** vrací aplikaci do výchozí polohy smazáním všeho, co bylo vykresleno.

9 !Závěr

V rámci úlohy *Geometrické vyhledávání bodu* byla vytvořena aplikace, která určuje polohu analyzovaného bodu q vzhledem k polygonu. Z důvodu větší časové náročnosti úlohy než obě autorky původně očekávaly nebyly implementovány všechny bonusové úlohy a některé části kódu mohly být řešeny lépe. Tato opravená verze technické zprávy je aktualizována o několik vzorců a o text v sekci Zadání.

Jedná se například o použití tříd QPoint a QPolygon, které na vstupu mají hodnoty typu *int* a které mohly být nahrazeny třídami QPointF a QPolygonF, jež na vstupu mají hodnot typu *float*, což je pro práci se souřadnicemi bodů praktičtější. Dále jako ne zrovna nejšťastnější řešení hodnotíme množství vstupních hodnot, které mají na vstupu metody *getPointLinePosition*, *getTwoVectorsAngle* a *getDistanceEdgeQ* třídy **Algorithms**. Vhodné by bylo nahradit jednotlivé souřadnice třídou QPoint, resp. QPointF.

Dále mohlo být implementováno více kontrolních podmínek pro načítání bodů polygonu z textového souboru, například ošetření, zda soubor neobsahuje text, zda všechny body mají x a y souřadnici apod. Umisťování bodu q do hran či vrcholů polygonů vyžaduje notnou dávku trpělivosti, aby se zobrazil korektní výsledek. Experimentálně bylo zjištěno, že aplikace zvládá lépe (tzn. je potřeba méně pokusů na kliknutí) zobrazovat polohu bodu q ve vrcholech než v hranách, ač obě situace jsou v kódu ošetřené.

Úloha přinesla i pozitivní přínos v tom směru, že se autorky mohly potrénovat v psaní kódu v jazyce C++ a oprášit své znalosti psaní v prostředí LaTeX.

10 Zdroje

1. *BAYER, Tomáš. Geometrické vyhledávání bodů* [online][cit. 24. 10. 2018].
   Dostupné z: https://web.natur.cuni.cz

2. *CS 312 - Convex Hull Project* [online][cit. 10. 11. 2018].
   Dostupné z: http://mind.cs.byu.edu

3. *SOPUCH, Pavel. LaTeX v kostce* [online][cit. 12. 11. 2018].
   Dostupné z: http://www.it.cas.cz