Algoritmy v digitální kartografii

Geometrické vyhledávání bodu

Zimní semestr 2018/2019

Tereza Kulovaná
Markéta Pecenová

Obsah

1 Zadání

Vstup: Souvislá polygonová mapa n polygonů $\{P_1, ..., P_n\}$*, analyzovaný bod* q*.*

Výstup: P_i, $q \in P_i$.

Nad polygonovou mapou implementujete následující algoritmy pro geometrické vyhledávání:

- Ray Crossing Algorithm (varianta s posunem těžiště polygonu).
- Winding Number Algorithm.

Nalezený polygon obsahující zadaný bod q graficky zvýrazněte vhodným způsobem (např. vyplněním, šrafováním, blikáním). Grafické rozhraní vytvořte s využitím frameworku QT.

Pro generování nekonvexních polygonů můžete navrhnout vlastní algoritmus či použít existující geografická data (např. mapa evropských států).

Polygony budou načítány z textového souboru ve Vámi zvoleném formátu. Pro datovou reprezentaci jednotlivých polygonů použijte špagetový model.

Hodnocení:

Krok	**Hodnocení**
Detekce polohy bodu rozlišující stavy uvnitř, vně na hranici polygonu.	10b
Ošetření singulárního případu u Winding Number Algorithm: bod leží na hraně polygonu.	*+2b*
Ošetření singulárního případu u obou algoritmů: bod je totožný s vrcholem jednoho či více polygonů.	*+2b*
Zvýraznění všech polygonů pro oba výše uvedené singulární případy.	*+2b*
Algoritmus pro automatické generování nekonvexních polygonů.	*+5b*
Max celkem:	**21b**

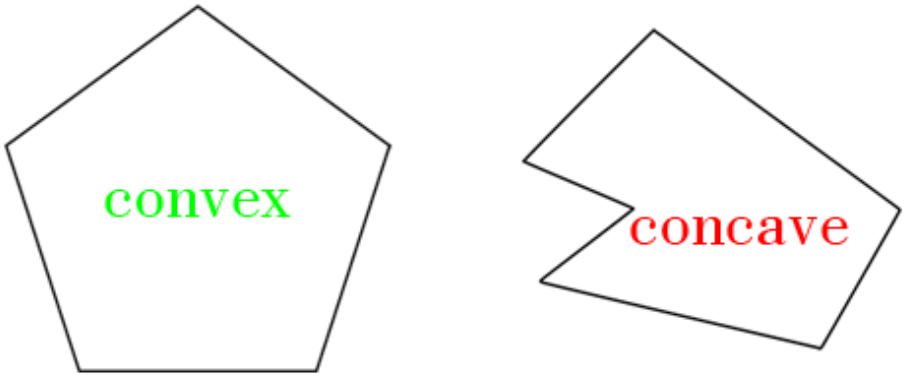
Čas zpracování: 2 týdny.

V rámci této úlohy byly implementovány bonusové úlohy č. 1-3. Poslední bonusovou úlohu, generování nekonvexních polygonů, tato aplikace neposkytuje.

2 Popis a rozbor problému

Úloha *Geometrické vyhledávání bodu* se zabývá vytvořením aplikace, která umožní uživateli zjistit polohu jím zvoleného bodu q vzhledem k příslušnému mnohoúhelníku. Jako vhodné řešení bylo vzhledem k náročnosti problému zvoleno opakované určovnání polohy bodu q a mnohoúhelníku.

Existují dva základní druhy mnohoúhelníků (pro účely této úlohy je nazývejme polygony), konvexní a nekonvexní. Konvexní polygon je takový polygon, jehož všechny diagonály leží uvnitř polygonu a žádná z nich neprotíná jeho hranu. Konkávní polygon tuto podmínku nesplňuje. Pro představu je níže přiložen obrázek obou druhů polygonů.



Obrázek 1: Ukázka konvexního (vlevo) a konkávního polygonu (vpravo) (*zdroj*)

Z výše uvedeného vyplývá, že bod q může vůči polygonu P zaujímat 4 pozice:

1. Bod q se nalézá uvnitř polygonu P.
2. Bod q se nalézá vně polygonu P.
3. Bod q se nalézá na hraně polygonu P.
4. Bod q se nalézá ve vrcholu polygonu P.

Pro účely této aplikace byly zvoleny výpočetní algoritmy *Ray Crossing* a *Winding Number*, jejichž princip je vysvětlen v následující kapitole.

3 Algoritmy

Tato kapitola se zabývá popisem algoritmů, které byly v aplikaci implementovány.

3.1 Ray Crossing Algorithm

Prvním zvoleným algoritmem je tzv. *Ray Crossing Algorithm* neboli *Paprskový algoritmus*. Svůj název získal po způsobu, jakým řeší nalezení polohy bodu vůči polygonu. Tento algoritmus je primárně využíván pro konvexní polygony, lze ho však zobecnit a využít ho i pro nekonvexní polygony.

Mějme polygon P a daný bod q. Z bodu q veďme libovolný počet polopřímek (paprsků). Princip algoritmu je založen na vyhodnocení počtu průsečíků k, které vzniknou protnutím paprsků vedených z bodu q s hranami polygonu P. Pro k mohou nastat dvě situace:

1. Hodnota k je rovna lichému číslu $\rightarrow$ bod q se nachází uvnitř polygonu P.
2. Hodnota k je rovna sudému číslu $\rightarrow$ bod q se nachází vně polygonu P.

Základní varianta algoritmu neošetřuje problémové situace, které mohou během výpočtu nastat. Konkrétně se jedná o situace, kdy je bod q totožný s jedním z vrcholů polygonu P nebo pokud bod q leží na jedné z hran polygonu P. Pro eliminaci těchto tzv. singularit je vhodné použít modifikovanou variantu algoritmu, která redukuje souřadnice bodů polygonu k bodu q.

Zjednodušený zápis takto modifikovaného algoritmu lze zapsat způsobem uvedeným níže:

1. Načtení bodů polygonu p_i, počet průsečíků $k = 0$
2. Postupně pro všechny p_i opakuj kroky I–IV:
   - I. Redukce souřadnic bodu p_i k bodu q:
     $x'_i = x_i - x_q$
     $y'_i = y_i - y_q$
   - II. Podmínka $(y'_i > 0)\&\&(y'_{i-1} \leq 0)\|(y'_{i-1} > 0)\&\&(y'_i \leq 0)$
   - III. Je-li podmínka splněna: $x'_m = \frac{x'_i y'_{i-1} - x'_{i-1} y'_i}{y'_i - y'_{i-1}}$
   - IV. Podmínka $(x'_m > 0) \rightarrow k = k + 1$
3. Výpočet $k\%2$
4. Vyhodnocení k (liché $k \rightarrow q$ náleží P; sudé $k \rightarrow q$ nenáleží P)

3.2 Winding Number Algorithm

Druhý algoritmus použitý v aplikaci je tzv. *Winding Number Algorithm* neboli *Metoda oviják*, který je vhodný pro nekonvexní polygony. Princip tohoto algoritmu je založen na součtovém úhlu ω.

Mějme polygon P a bod q, na kterém stojí pozorovatel. Nachází-li se q uvnitř P, pak pozorovatel, který by si přál postupně vidět všechny vrcholy polygonu, se musí otočit celkem o 2π. Výsledkem algoritmu je pak tzv. Winding number ω, které říká, o kolik otáček se pozorovatel otočil:

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

Zde se hodí zdůraznit, že záleží na zvoleném směru otáčení. Otáčí-li se pozorovatel ve směru chodu hodinových ručiček, úhly se sčítají. V opačném směru se od sebe úhly odečítají a ω by vyšlo záporné. Během výpočtů je také nutno zavést určitou toleranci ϵ, která pokrývá chyby způsobené zaokrouhlováním. Z výše uvedených vztahů vyplývá:

1. $w = 2\pi \rightarrow q$ se nachází uvnitř P

2. $w < 2\pi \rightarrow q$ se nachází vně P

Mezi singularity pro tento algoritmus patří pouze případ, je-li $q \approx p_i$. Tento problém byl vyřešen zavedením návratové hodnoty -1 z metody.

Zjednodušený zápis algoritmu:

1. Načtení bodů polygonu, úhel $\omega = 0$, tolerance $\epsilon = 1e - 10$
2. Orientace o_i bodu q ke straně p_i, p_{i+1}
3. Postupně pro všechny orientované trojice p_i, q, p_{i+1} opakuj kroky I-III:
   I. Výpočet úhlu $\omega_i = \sphericalangle p_i, q, p_{i+1}$
   II. Podmínka (q je vlevo) $\rightarrow \omega = \omega + \omega_i$
   III. Jinak $\omega = \omega - \omega_i$
4. Podmínka ($\mid \omega - 2\pi \mid$) $< \epsilon \rightarrow q$ náleží P
5. Jinak q nenáleží P

4 Problematické situace

V úloze byly nutné ošetřit sigularity, zda bod q neleží v hraně některého z polygonů či v jejich vrcholech. Pro vyřešení tohoto problému byla použita metoda *getDistanceEdgeQ* třídy **Algorithms**, která zjišťuje, zda bod neleží velmi blízko přímce (rozdíl vzdáleností je porovnáván s mezní hodnotou ϵ).

5 Vstupní data

Aplikace požaduje dva druhy vstupních dat:

1. soubor daných polygonů
2. daný bod q

Seznam bodů jednotlivých polygonů je uložen v textovém souboru polygon.txt. Pro vykreslení jednotlivých polygonů v aplikaci je nutno tento soubor do aplikace nahrát pomocí tlačítka *Load*. K vygenerování souřadnic bodů byla použita online aplikace ze stránek mobilefish.com. Struktura souboru s polygony je následující:

První řádek: počet polygonů v souboru
Sloupec 1: číslo polygonu, jehož součástí daný bod je
Sloupec 2: souřadnice X daného bodu polygonu
Sloupec 3: souřadnice Y daného bodu polygonu

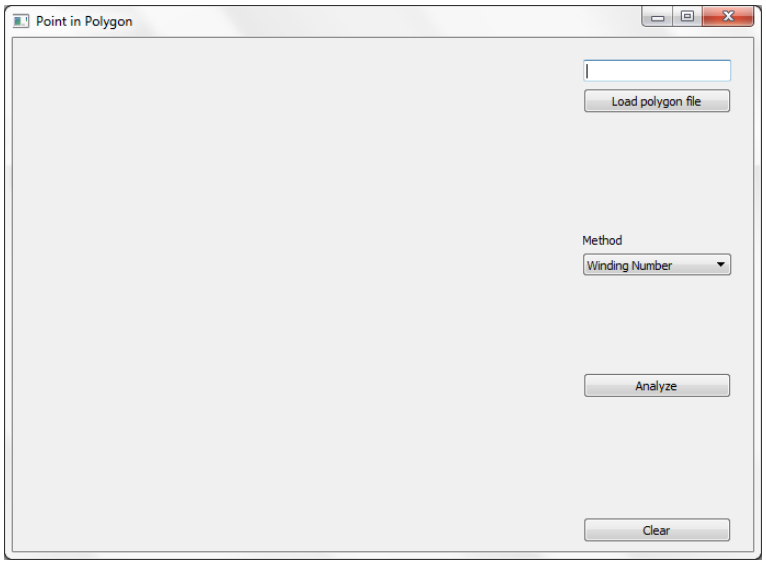
Bod q není součástí textového souboru, do aplikace vstupuje na základě ručního zadání uživatelem. Pro zadání bodu je nutné v aplikaci kliknout levým tlačítkem myši do okna s polygony.

6 Výstupní data

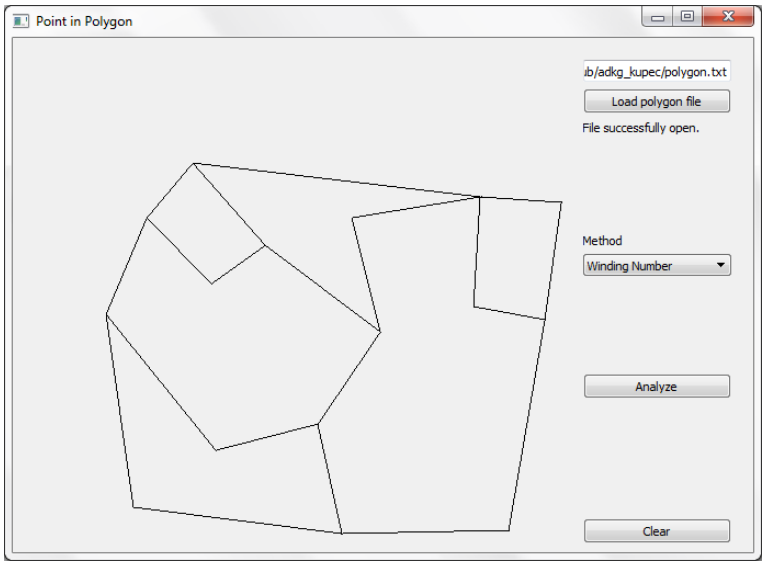
Výstupem úlohy je vypsání v grafickém okně aplikace, v jaké poloze se analyzovaný bod vůči polygonům nachází. Polygony, kterým bod náleží, jsou barevně zvýrazněny.

7 Aplikace

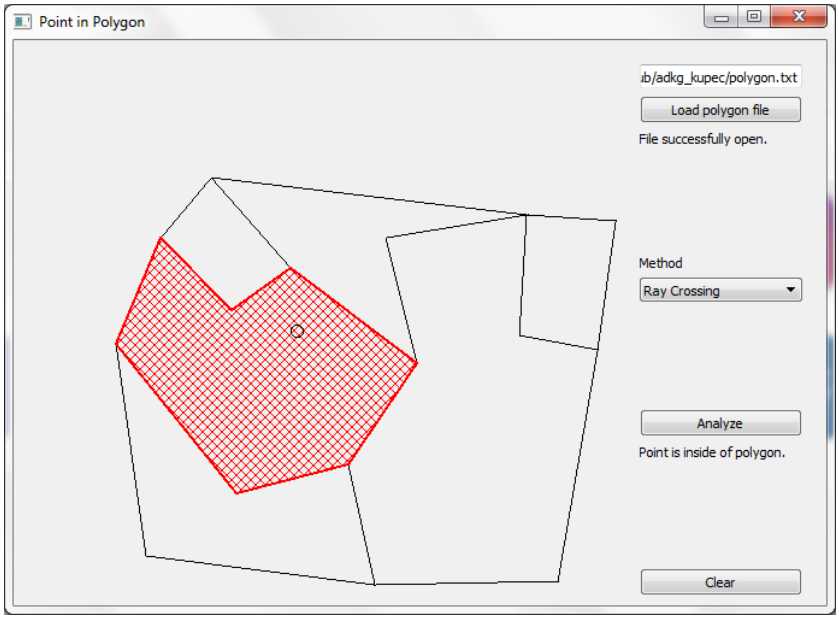
V následují kapitole je představen vizuální vzhled vytvořené aplikace tak, jak ji vidí prostý uživatel.



Obrázek 2: Aplikace ve výchozím stavu



Obrázek 3: Aplikace po nahrání polygonů



Obrázek 4: Výstup při použití *Ray Crossing Algorithm*

Obrázek 5: Výstup při použití *Winding Number Algorithm* pro q ležící ve více vrcholech polygonů

8 Dokumentace

Tato kapitola obsahuje dokumentaci k jednotlivým třídám.

8.1 Algorithms

Třída *Algorithms* obsahuje metody, které určují polohu zvoleného bodu q vzhledem k polygonu. Dále obsahuje pomocné metody pro výpočet úhlu mezi třemi body a na zjištění polohy bodu vzhledem k přímce.

8.1.1 getPositionRay

Metoda **getPositionRay** určuje polohu bodu q vzhledem k polygonu za použití algoritmu *Ray Crossing*. Na vstupu je bod třídy QPoint a vektor bodů polygonu. Návratová hodnota je typu *int*.

Input:

- *QPoint* q
- *std* :: *vector*<*QPoint*> pol

Output:

- 0 → bod se nachází vně polygonu
- 1 → bod se nachází uvnitř nebo na hraně polygonu
- -1 → bod se nachází na hraně polygonu

8.1.2 getPositionWinding

Metoda **getPositionWinding** určuje polohu bodu q vzhledem k polygonu za použití algoritmu *Winding Number*. Na vstupu je bod třídy QPoint a vektor bodů polygonu. Návratová hodnota je typu *int*.

Input:

- *QPoint* q
- *std* :: *vector*<*QPoint*> pol

Output:

- 0 → bod se nachází vně polygonu
- 1 → bod se nachází uvnitř polygonu
- -1 → bod se nachází na hraně polygonu

8.1.3 getPointLinePosition

Metoda **getPointLinePosition** určuje polohu bodu q vzhledem k přímce tvořené dvěma body. Na vstupu jsou souřadnice x a y pro 3 body typu *double*, návratová hodnota je typu *int* podle výsledku.

Input:

- *double* x_q
- *double* y_q
- *double* x_1
- *double* y_1
- *double* x_2
- *double* y_2

Output:

- 0 → bod se nachází vpravo od přímky
- 1 → bod se nachází vlevo od přímky
- -1 → bod se nachází na přímce

8.1.4 getTwoVectorsAngle

Metoda **getTwoVectorsAngle** počítá úhel mezi dvěma vektory. Na vstupu jsou souřadnice x a y pro 4 body typu *double*, návratová hodnota typu *double* vrací velikost úhlu v radiánech.

Input:

- *double* x_1
- *double* y_1
- *double* x_2
- *double* y_2
- *double* x_3
- *double* y_3
- *double* x_4
- *double* y_4

Output:

- double

8.1.5 getDistanceEdgeQ

Metoda **getDistanceEdgeQ** počítá, zda se bod nenachází na přímce na základě porovnání vzdálenosti mezi dvěma body na přímce se sumou vzdáleností těchto bodů k bodu q. Je-li rozdíl menší než zadané ϵ, bod leží na přímce. Návratová hodnota je typu *int*.

Input:

- *double* x_1
- *double* y_1
- *double* x_2
- *double* y_2

Output:

- -1 $\rightarrow$ bod q leží na přímce
- 2 $\rightarrow$ bod q neleží na přímce

8.2 Draw

Třída *Draw* obsahuje metody, které slouží k vykreslení polygonů, analyzovaného bodu q a výstupních dat.

8.2.1 paintEvent

Metoda **paintEvent** vykresluje polygony a analyzovaný bod q. Návratová hodnota je typu *void*.

Input:

- QPaintEvent *e

8.2.2 mousePressEvent

Metoda **mousePressEvent** slouží k načtení souřadnic bodu q. Návratová hodnota je typu *void*.

Input:

- QMouseEvent *e

8.2.3 clearCanvas

Metoda **clearCanvas** slouží k vymazání všech vykreslených dat. Metoda neobsahuje žádné proměnné na vstupu a návratová hodnota je typu *void*.

8.2.4 fillPolygon

Metoda **fillPolygon** barevně vyšrafuje polygon, ve kterém se nachází analyzovaný bod q. Návratová hodnota je typu *void*.

Input:

- $std :: vector<std :: vector<QPoint>>$ poly_fill

8.2.5 loadPolygon

Metoda **loadPolygon** slouží k nahrání bodů jednotlivých polygonů do aplikace. Součástí metody je i kontrola, zda se soubor úspěšně nahrál, zda vůbec obsahuje nějaké polygony a zda jsou polygony tvořeny aspoň 3 body. Návratová hodnota je typu *QString* vrací hlášku, zda byly polygony úspěšně nahrány.

Input:

- const char* path

Output:

- QString

8.3 Widget

Metody třídy **Widget** slouží pro práci uživatele s aplikací. Až na jednu výjimku nemají metody na vstupu nic, návratové hodnoty všech metod jsou typu *void*.

8.3.1 writeResult

Metoda **writeResult** vrací polohu bodu q vzhledem k polygonu na základě vstupní hodnoty typu *int*.

Input:

- int

8.3.2 on_load_button_clicked

Metoda **on_load_button_clicked** načítá data z textového formátu. Uživatel sám vyhledává cestu k požadovanému souboru.

8.3.3 on_analyze_button_clicked

Metoda **on_analyze_button_clicked** vypisuje na obrazovku polohu bodu q vzhledem k polygonům po zvolení požadovaného algoritmu a kliknutí na tlačítko *Analyze*.

8.3.4 on_clear_button_clicked

Metoda **on_clear_button_clicked** vrací aplikaci do výchozí polohy smazáním všeho, co bylo vykresleno.

9 Závěr

V rámci úlohy *Geometrické vyhledávání bodu* byla vytvořena aplikace, která určuje polohu analyzovaného bodu q vzhledem k polygonu. Z důvodu větší časové náročnosti úlohy než obě autorky původně očekávaly nebyly implementovány všechny bonusové úlohy a některé části kódu mohly být řešeny lépe.

Jedná se například o použití tříd QPoint a QPolygon, které na vstupu mají hodnoty typu *int* a které mohly být nahrazeny třídami QPointF a QPolygonF, jež na vstupu mají hodnot typu *float*, což je pro práci se souřadnicemi bodů praktičtější. Dále jako ne zrovna nejšťastnější řešení hodnotíme množství vstupních hodnot, které mají na vstupu metody *getPointLinePosition*, *getTwoVectorsAngle* a *getDistanceEdgeQ* třídy **Algorithms**. Vhodné by bylo nahradit jednotlivé souřadnice třídou QPoint, resp. QPointF.

Dále mohlo být implementováno více kontrolních podmínek pro načítání bodů polygonu z textového souboru, například ošetření, zda soubor neobsahuje text, zda všechny body mají x a y souřadnici apod. Umisťování bodu q do hran či vrcholů polygonů vyžaduje notnou dávku trpělivosti, aby se zobrazil korektní výsledek. Experimentálně bylo zjištěno, že aplikace zvládá lépe (tzn. je potřeba méně pokusů na kliknutí) zobrazovat polohu bodu q ve vrcholech než v hranách, ač obě situace jsou v kódu ošetřené.

Úloha přinesla i pozitivní přínos v tom směru, že se autorky mohly potrénovat v psaní kódu v jazyce C++ a oprášit své znalosti psaní v prostředí LaTeX.

10 Zdroje

1. *BAYER, Tomáš. Geometrické vyhledávání bodů* [online][cit. 24. 10. 2018]. Dostupné z: https://web.natur.cuni.cz

2. *What is concave & convex polygon?* [online][cit. 23. 10. 2018]. Dostupné z: https://www.nextgurukul.in

3. *Record XY mouse coordinates* [online][cit. 23. 10. 2018]. Dostupné z: https://mobilefish.com/