Matemática Discreta II Ano Letivo 2023-2024 Ficha nº2 **Grafos**

1. O grafo complementar $\bar{G}$ de um grafo simples G tem os mesmos vértices que G. Dois vértices são adjacentes em $\bar{G}$ sse não são adjacentes em G. Determine os grafos complementares de:

a. K_n; b. C_n; c. $K_{m,n}$.

2. Existirá algum grafo não orientado com 5 vértices cujos graus sejam os seguintes?

a. 3,3,3,3,2 d. 3,4,3,4,3
b. 1,2,3,4,5 e. 0,1,2,2,3
c. 1,2,3,4,4 f. 1,1,1,1,1

3. Quantas arestas tem um grafo com 4 vértices de grau 2 e 3 vértices de grau 4?

4. Quantas arestas têm os grafos seguintes?

a. K_n b. C_n c. W_n d. $K_{m,n}$ e. Q_n

5. Para que valores de n, os grafos seguintes são bipartidos?

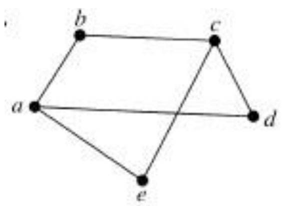
a. K_n; b. C_n; c. W_n.

6. Um grafo simples diz-se regular se cada um dos vértices desse grafo tiver o mesmo grau. Para que valores de n os grafos seguintes são regulares?

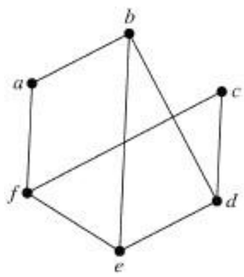
a. K_n; b. C_n; c. W_n.

7. Verifique se os grafos seguintes são bipartidos.

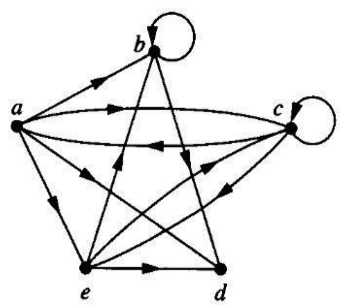
a.



b.

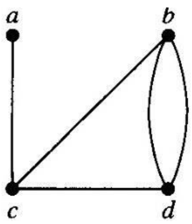


8. Determine a lista de adjacência do grafo seguinte:

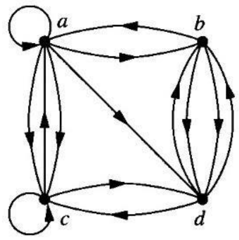


9. Determine a matriz de adjacência dos grafos seguintes:

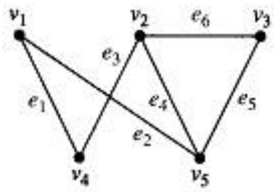
a.



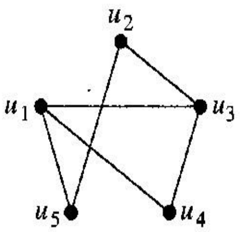
b.

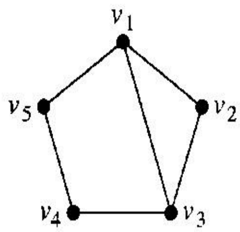


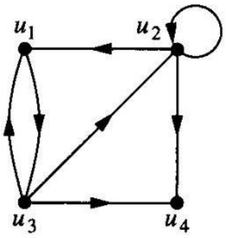
10. Determine a matriz de incidência do grafo seguinte:

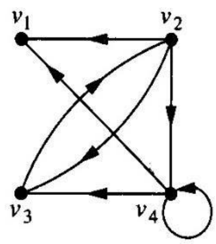


11. Verifique se os seguintes pares de grafos são isomorfos.



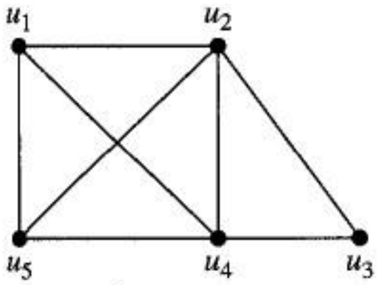






12. Considere o grafo *H* e a matriz *A*:

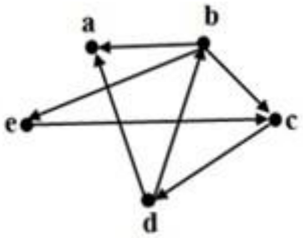
Determine, se possível, um isomorfismo, entre os grafos H e J, sabendo que a matriz de adjacência de J corresponde à matriz A.
(frequência 2014/2015).



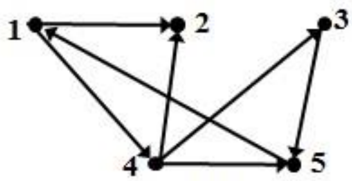
G

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

13. Considere os grafos G1 e G2:



G1



G2

a. Caso seja possível, defina um isomorfismo entre eles.
b. G1 é um grafo fortemente conexo, fracamente conexo ou não é conexo? Justifique.
c. Seja G2' o grafo não orientado obtido a partir de G2 removendo o vértice **1** e todas as arestas que nele incidem. Determine o número de caminhos distintos de comprimento 4 entre os vértices **2** e **3**.

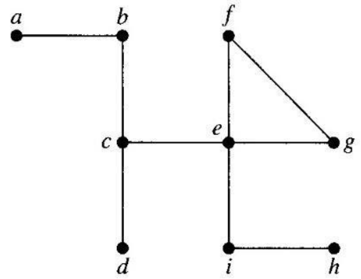
(exame de recurso 2013/2014)

14. Determine o número de caminhos de comprimento n entre qualquer par de vértices de K_4, sendo n:

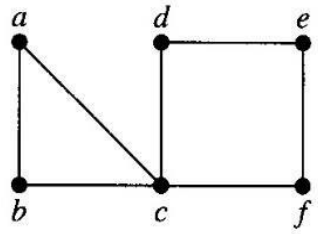
a. 2 b. 3 c. 4 d. 5

15. Identifique os vértices de corte dos grafos seguintes:

a.



b.



16. Para que valores de n, os grafos seguintes possuem circuito/caminho euleriano?

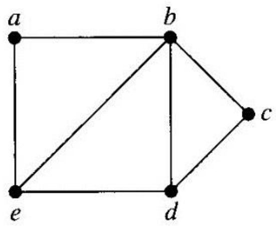
a) Kn b) Cn c) Wn d) Km,n

17. Dê um exemplo de um grafo que admita um circuito hamiltoniano e que verifique as condições do teorema de Dirac.

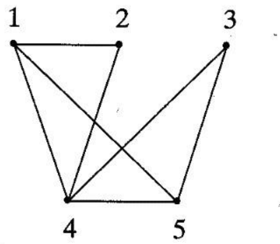
18. Dê um exemplo de um grafo que admita um circuito hamiltoniano e que verifique as condições do teorema de Ore.

19. Dê um exemplo de um grafo que admita um circuito hamiltoniano e que não verifique as condições do teorema de Dirac nem do teorema de Ore.

20. Considere os grafos **G** e **H**:



G

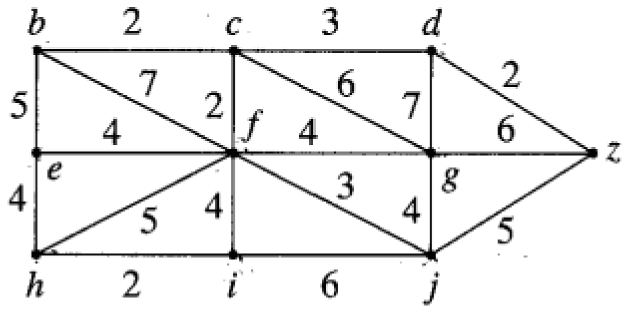


H

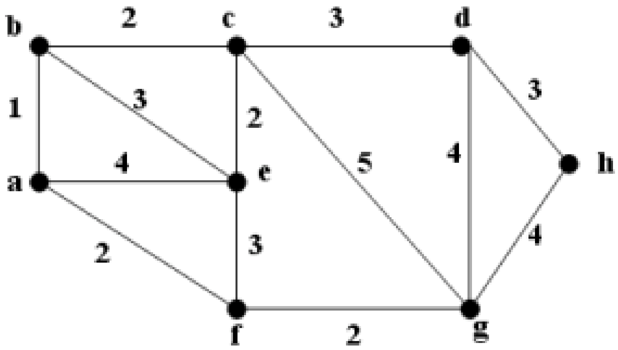
a) Caso seja possível, determine um isomorfismo entre os grafos.
b) Defina um circuito hamiltoniano em H e averigue se são verificadas as condições do teorema de Dirac.

21. Qual é a diferença entre um grafo fortemente conexo e fracamente conexo? Dê um exemplo de cada, justificando.

22. Recorrendo ao algoritmo de Dijkstra, determine o comprimento e o caminho mais curto entre os vértices $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{z}$.

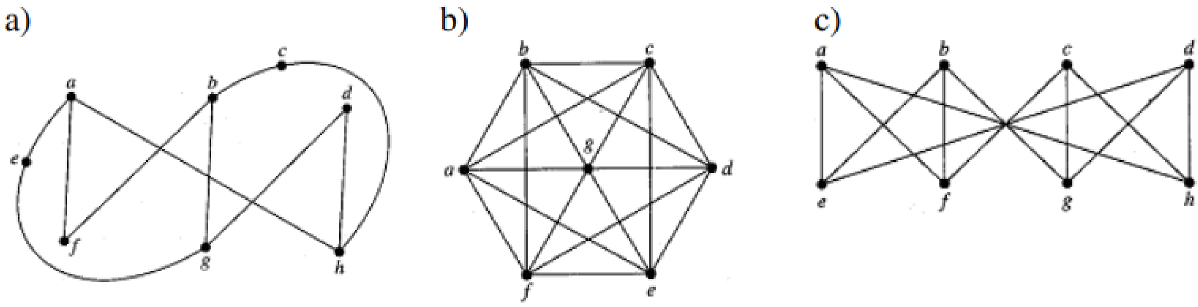


23. Recorrendo ao algoritmo de Dijkstra, determine o comprimento e o caminho mais curto entre os vértices $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{h}$ e entre o vértice $\boldsymbol{b}$ e qualquer vértice do grafo**.**



24. Considere um grafo planar com 6 vértices de grau 4. Em quantas regiões é dividido o plano pela sua representação planar?

25. Verifique se os grafos seguintes são planares.



26. Considere os grafos não planares $k_5, k_6, K_{3,3}$ e $K_{3,4}$. Identifique aqueles que, ao remover-se qualquer vértice e as arestas que nele incidem, produzem um grafo planar.

27. Qual o número cromático dos grafos seguintes?

a. K_n; b. C_n; c. W_n.

28. Aplicações da coloração de grafos

a. Escala de exames finais.

Faça a escala de um conjunto de sete exames de modo que um dado aluno não tenha que realizar dois exames em simultâneo. As disciplinas são numeradas de 1 a 7 e os pares de disciplinas com alunos em comum são os seguintes:

(1,2);(1,3);(1,4);(1,7)　　(2,3);(2,4);(2,5);(2,7)　　(3,4);(3,6);(3,7)
(4,5);(4,6)　　(5,6);(5,7)　　(6,7)

Resolução: construa um grafo em que os vértices correspondem às disciplinas e em que os arcos ligam dois vértices caso as respetivas disciplinas tenham um aluno em comum. De seguida, proceda à coloração do mesmo. Cada cor vai representar um período de tempo. Conclui-se que o número cromático do grafo corresponde ao número de períodos de tempo necessários para a escala dos exames e que os vértices com a mesma cor correspondem a disciplinas cujos exames podem decorrer em simultâneo.

b. "Index registers"

Uma maneira de acelerar a execução de ciclos consiste em guardar as variáveis temporárias em "index registers" no CPU. Considere um ciclo em que 7 variáveis temporárias são utilizadas ao longo do mesmo. As variáveis e os respetivos passos de execução em que devem ser armazenadas são os seguintes:

variável	**passo de execução**
t	1 → 6
u	2
v	2 → 4
w	1,3,5
x	1,6
y	3 → 6
z	4,5

Determine o número mínimo de index registers necessários para armazenar temporariamente as variáveis durante a execução do ciclo.

Resolução: construa um grafo em que os vértices correspondem às variáveis e em que os arcos ligam dois vértices caso as respetivas variáveis devam ser armazenadas em simultâneo. De seguida, proceda à coloração do mesmo. Cada cor vai representar um index register. Conclui-se que o número cromático do grafo corresponde ao número mínimo de index register necessários para armazenar temporariamente as variáveis do ciclo.

29. Um individuo possui sete espécies de peixe (A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7) em aquários distintos no seu apartamento. Algumas espécies atacam as outras, pelo que não podem estar juntas no mesmo aquário. Na tabela a seguir, as entradas com "X" indicam as espécies de peixe que incompatíveis. Recorrendo à coloração de grafos, indique o número mínimo de aquários necessários para armazenar os peixes e uma possível distribuição das espécies de peixe pelos vários aquários.

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
A1			×	×			×
A2			×	×			×
A3	×	×				×	
A4	×	×			×		
A5				×		×	
A6			×		×		
A7	×	×					