

Leyes Fundamentales de la Lógica Proposicional

Estas leyes son tautologías o verdades universales. Actúan como reglas de equivalencia que permiten simplificar y reordenar expresiones complejas, de forma similar a la aritmética.



Expresar

Identificar

Aplicar

Simplificar

Verificar

Leyes Esenciales para la Simplificación

Estas tres leyes básicas nos permiten reorganizar y reducir la redundancia en cualquier expresión lógica.

1

Ley de Idempotencia

Fórmulas: $p \wedge p = p; p \vee p = p$

Significado: La repetición de una proposición conectada por "y" (\wedge) u "o" (\vee) es innecesaria, ya que no cambia el valor de verdad.

Ejemplo: "Llueve y llueve" es lógicamente equivalente a "Llueve".

2

Ley Comutativa

Fórmulas: $p \wedge q = q \wedge p; p \vee q = q \vee p$

Significado: El orden de las proposiciones en una conjunción (\wedge) o disyunción (\vee) no afecta el resultado. Se pueden intercambiar.

Ejemplo: "Estudio y trabajo" es igual a "Trabajo y estudio".

3

Ley Asociativa

Fórmulas: $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r; p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

Significado: La agrupación de proposiciones mediante paréntesis no importa cuando se utiliza el mismo operador. Permite mover o eliminar paréntesis.

Ejemplo: "(Estudio y leo) y escribo" equivale a "Estudio y (leo y escribo)".

Expansión y Agrupación: La Ley Distributiva

La Ley Distributiva es crucial, ya que relaciona los operadores "y" (\wedge) y "o" (\vee), permitiendo expandir o factorizar expresiones complejas.

Ley Distributiva

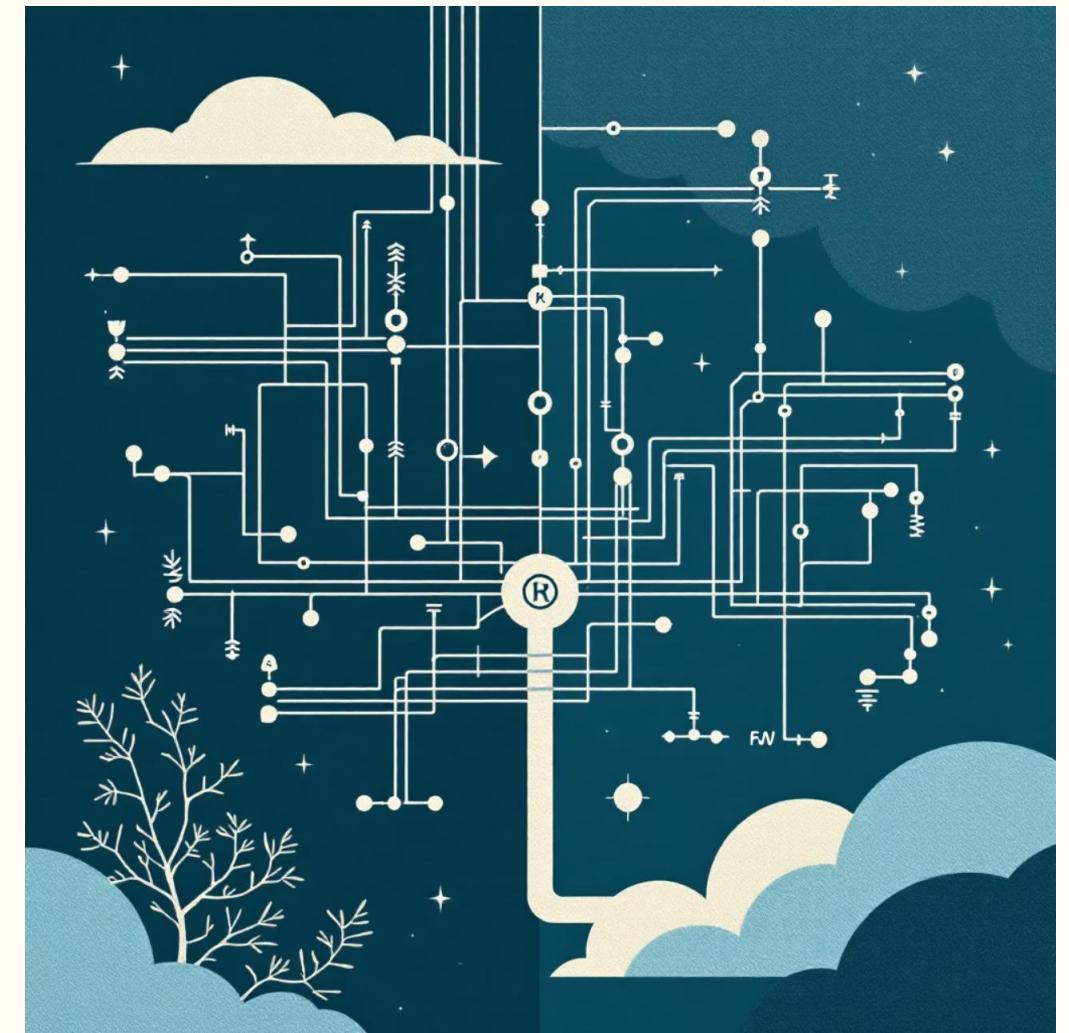
Fórmulas:

- $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Analogía: Es similar a la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma en la aritmética ($A \times (B+C) = A \times B + A \times C$).

Ejemplo: “Voy si (llueve o hace frío)” se distribuye como “(Voy si llueve) o (voy si hace frío)”.

Uso: Fundamental para transformar la estructura de las fórmulas al simplificar o probar equivalencias.



Interacción con Valores de Verdad Constantes

Estas leyes definen cómo las proposiciones interactúan con los valores lógicos constantes: Verdadero (V) y Falso (F), y con su propia negación ($\neg p$).

Ley de la Identidad

Fórmulas: $p \wedge V = p; p \vee F = p$

En Contexto: Una proposición unida a un valor verdadero (V) mediante una conjunción (\wedge) sigue siendo la proposición original. Unida a un valor falso (F) mediante una disyunción (\vee) también permanece igual.

Uso: Permite eliminar términos constantes innecesarios durante la simplificación.

Ley del Complemento

Fórmulas: $p \wedge \neg p = F; p \vee \neg p = V$

En Contexto: Cualquier proposición "y" su negación siempre resultan en una contradicción (Falso). Cualquier proposición "o" su negación siempre resultan en una tautología (Verdadero).

Ejemplo: "Llueve o no llueve" es una verdad absoluta (V).

Ley de Involución

Fórmula: $\neg(\neg p) = p$

En Contexto: Aplicar la negación dos veces sobre una proposición la revierte a su estado original. Es la ley de la doble negación.

Ejemplo: "No es cierto que no estudia" es equivalente a "Estudia".

Las Poderosas Leyes de De Morgan

Las leyes de De Morgan son esenciales para mover las negaciones dentro o fuera de las expresiones agrupadas, transformando conjunciones en disyunciones y viceversa.

Transformando Negaciones Compuestas

- **Fórmula (a):** $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$
- **Fórmula (b):** $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

Principio Clave: Negar una proposición compuesta requiere negar cada componente y cambiar el operador interno ($\wedge \leftrightarrow \vee$).

Ejemplo Práctico: Decir que “No es cierto que (Estudio y Trabajo)” es lo mismo que decir que “No estudio o No trabajo”.



Convertir Implicaciones: Leyes Condicionales

Estas leyes son vitales para transformar proposiciones condicionales (el "Si... entonces...") a formas equivalentes que solo utilizan negaciones (\neg) y disyunciones (\vee), lo cual simplifica enormemente el álgebra lógica.

Ley de la Condicional (Implicación)

Fórmula: $p \rightarrow q = \neg p \vee q$

Significado: La expresión “Si p , entonces q ” es lógicamente idéntica a “No p o q ”. El único caso en que la condicional es falsa es cuando p es verdadero y q es falso.

Ejemplo: “Si estudio, apruebo” es lo mismo que decir: “O bien no estudio, o bien apruebo”.



La Ley de la Bicondicional

La bicondicional representa una equivalencia rigurosa, significando "si y solo si". Es verdadera únicamente cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

1

Fórmula de Doble Implicación

$$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Es una conjunción de dos implicaciones mutuas: Si p implica q , y si q implica p .

2

Fórmula de Equivalencia de Valores

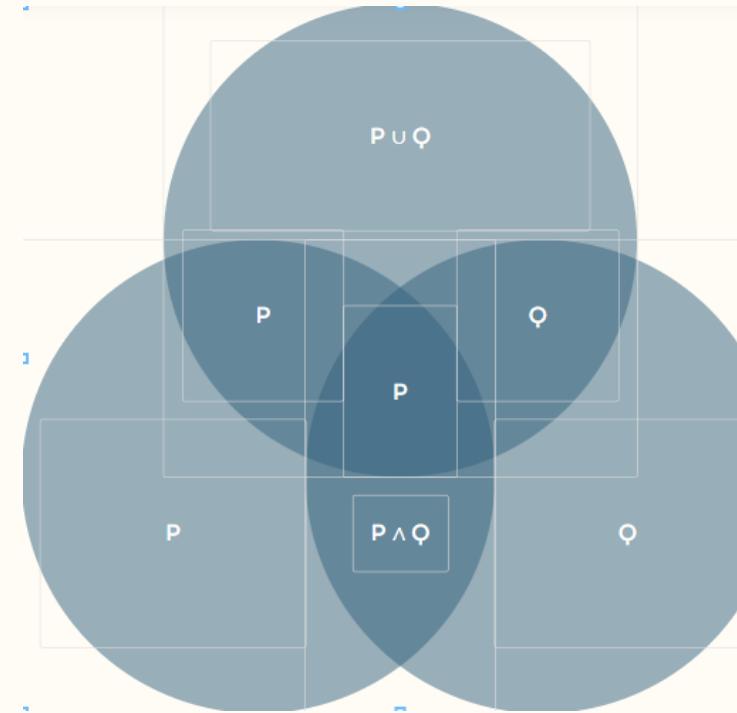
$$p \leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Es verdadera si ambas son V ($p \wedge q$) o si ambas son F ($\neg p \wedge \neg q$).

Ejemplo: La afirmación “Estudio si y solo si apruebo” significa que para que una sea cierta, la otra también debe serlo.

La Ley de Absorción

La Ley de Absorción es una potente herramienta de simplificación que elimina la redundancia cuando una proposición está contenida o absorbida por una expresión más grande.



Disyunción Absorbe a Conjunción

Fórmula: $p \vee (p \wedge q) = p$

Explicación: Si ya sabes que 'p' es cierto, añadir la condición "p y q" no aporta nueva información, ya que 'p' ya está garantizado. Por lo tanto, toda la expresión se reduce a 'p'.

Conjunción Absorbe a Disyunción

Fórmula: $p \wedge (p \vee q) = p$

Explicación: Para que la conjunción sea verdadera, 'p' debe ser verdadero, y también lo debe ser "(p o q)". Como si 'p' es verdadero, "(p o q)" siempre es verdadero, toda la expresión se reduce a la verdad de 'p'.

Ejemplo: "Llueve y (llueve o hace frío)" se simplifica a "Llueve".



Reglas de Inferencia:

Las reglas de inferencia son modelos universales de razonamiento correcto. Nos permiten deducir conclusiones válidas partiendo de ciertas premisas verdaderas. Su validez no depende del contenido de las frases, sino de la forma lógica que tienen. Por eso decimos que son tautológicas: funcionan siempre, sin importar el tema. Reglas Clave para la Deducción



Regla 1: Modus Ponendo Ponens (PP)

La regla fundamental para afirmar el consecuente al afirmar el antecedente.

Fórmula (Forma)

$$1. p \rightarrow q$$

$$2. p$$

$$\therefore q$$

Significado

Si afirmas la causa, afirmas el efecto.

Ejemplo Práctico

“*Si llueve, la calle se moja. Llueve → la calle se moja.*”

Regla 2: Modus Tollendo Tollens (TT)

El principio lógico que permite negar el antecedente al negar el consecuente.

01

Estructura Formal

$$1. p \rightarrow q$$

$$2. \neg q$$

$$\therefore \neg p$$

02

Concepto Clave

Si el efecto no ocurre, la causa tampoco.

03

Aplicación

“Si estudio, apruebo. No aprobé → No estudié.”



Regla 3 y 4: Doble Negación ($\text{D}\neg$) y Adjunción/Simplificación



Doble Negación ($\text{D}\neg$)

Forma: $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$

Ejemplo: “No es falso que no estoy feliz”
 \rightarrow “Estoy feliz”.

Adjunción

Forma: $p, q \rightarrow \therefore p \wedge q$

Permite combinar dos proposiciones
verdaderas.

Simplificación

Forma: $p \wedge q \rightarrow \therefore p$

Ejemplo: “Estudio y leo” \rightarrow “Estudio”.

Estas reglas facilitan la manipulación de enunciados al permitir la eliminación de dobles negaciones y la combinación o separación de conjunciones.

Regla 5 ψ 6: Modus Tollendo Ponens (TP) ψ Ley de Adición (LA)

Modus Tollendo Ponens (TP)

Fórmula:

$$p \vee q$$

$$\neg p$$

$$\therefore q$$

Ley de Adición (LA)

Fórmula:

$$p \rightarrow \therefore p \vee q$$

Ejemplo de TP

“O estudio o descanso. No estudio → descanso.”

Niega una parte de la disyunción para afirmar la otra.

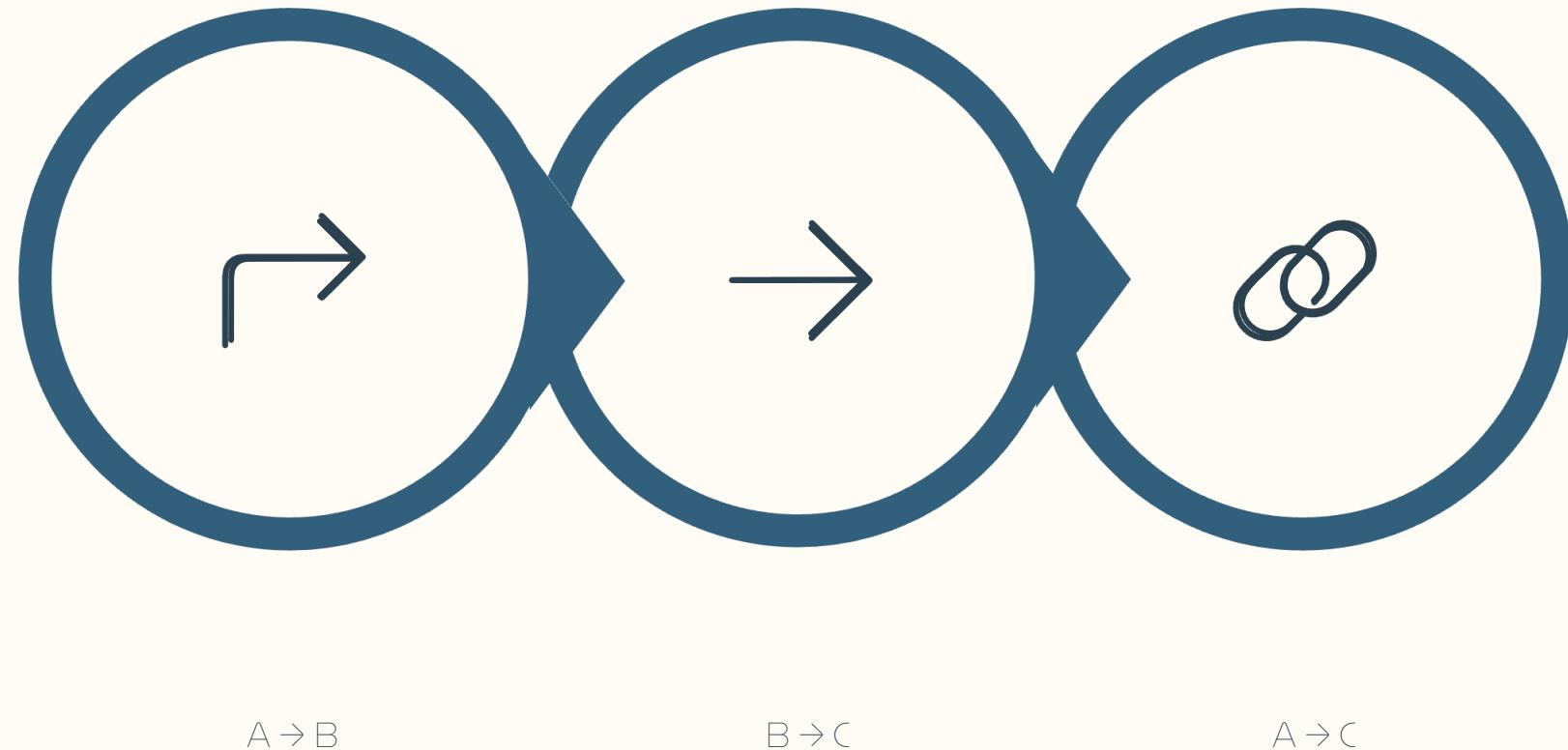
Ejemplo de LA

“Estudio” → “Estudio o veo TV”.

Permite añadir cualquier proposición a una ya existente mediante la disyunción.

Regla 7: Silogismo Hipotético (SH)

Una regla de transitividad para proposiciones condicionales.



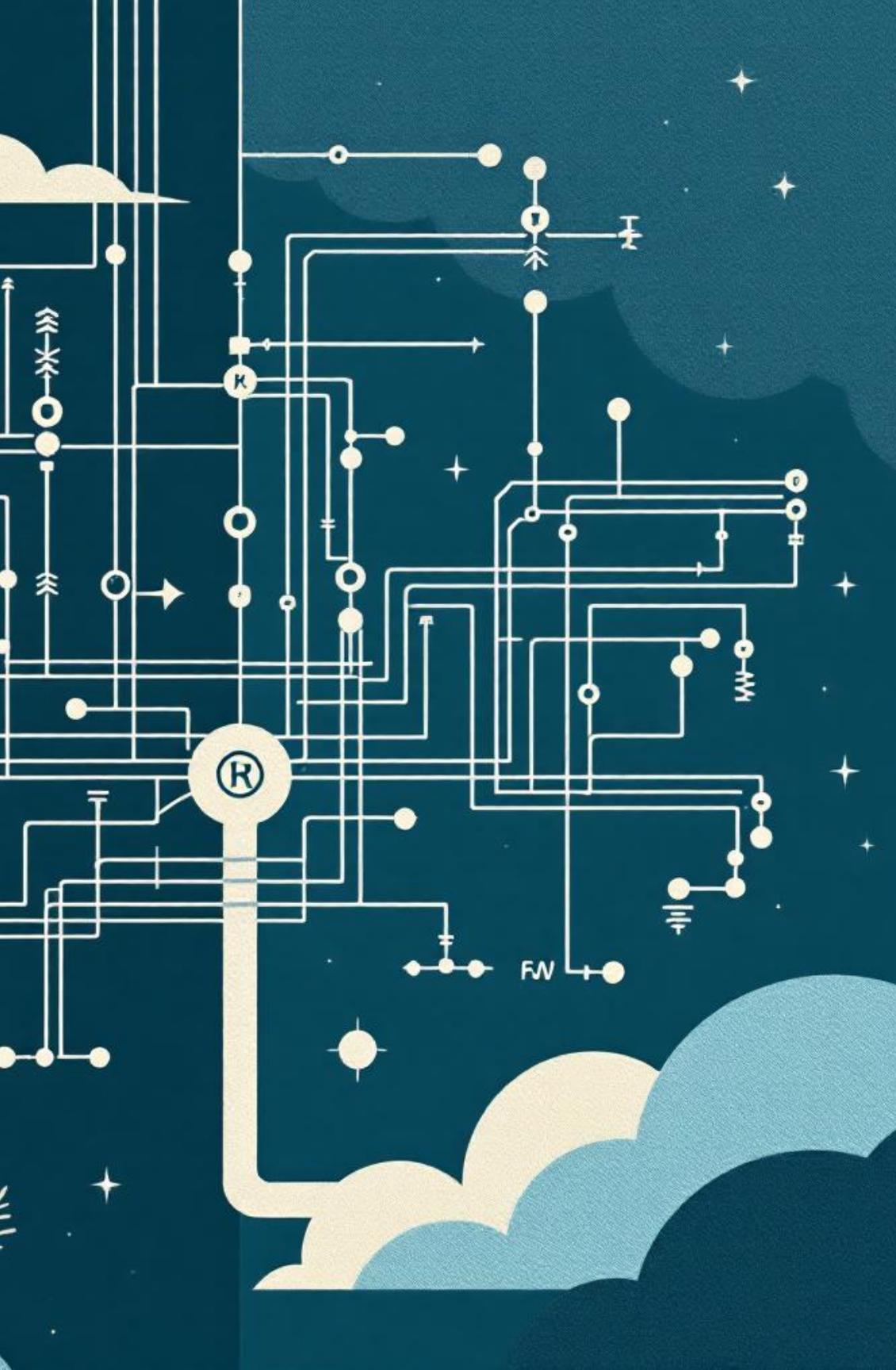
Fórmula (Forma)

$$p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow r$$

$$\therefore p \rightarrow r$$

Ejemplo: “Si estudio → apruebo → me gradúo” → “Si estudio → me gradúo”.



Regla 8: Silogismo Disyuntivo (DS)

Combina dos condicionales y una disyunción para obtener una nueva disyunción.



Ejemplo: “O estudio o trabajo → Apruebo o gano dinero.”

Regla 9: Simplificación Disyuntiva (SD)

Una forma de razonamiento en la que el resultado es el mismo independientemente de la premisa disyuntiva que se cumpla.



Forma

$$p \rightarrow r$$

$$q \rightarrow r$$

$$p \vee q$$

$$\therefore r$$

Ejemplo: “O estudio o hago tareas \rightarrow Apruebo.”