

# Modelado, simulación y control de un manipulador plano

Samaniego Villacrés, Pilar Estefanía  
Máster en Ingeniería Mecatrónica  
Universidad de Oviedo  
Gijón, España  
pilar.samaniego@eu4m.eu

**Resumen** — En este trabajo se presenta el modelado, simulación y control de un manipulador tipo RRRRR en Matlab, el cual mueve su punto central de herramienta (TCP – del inglés Tool Central Point) con una trayectoria definida, mismo que tiene una masa y una fuerza opuesta a la velocidad. Para cumplir este objetivo, en primer lugar, se realiza el modelado de la cinemática del mecanismo mediante el método de Newton, luego se ha implementado el modelado dinámico utilizando la formulación de matriz R, un integrador RK2, y finalmente se ha implementado un controlador CTC (Computed Torque Control).

**Palabras Clave** — manipulador, TCP, Matlab, control, cinemática, dinámica, grados de libertad, ecuaciones de restricción.

## I. INTRODUCCIÓN

La estructura mecánica de un robot manipulador consiste en una secuencia de cuerpos rígidos (eslabones) interconectados por medio de pares o articulaciones, que aseguran la movilidad [1].

Una articulación permite ciertos grados de libertad de movimiento relativo y previene o restringe otros. Una junta de revolución (R) es una junta de clase I que solo permite una rotación relativa. En los multicuerpos planos, las articulaciones más utilizadas son revolutoria (R) y prismática (P) [4].

Existen dos tipos básicos de manipuladores o sistemas multicuerpo: tipo serie y tipo paralelo. Los manipuladores serie se caracterizan por disponer sus eslabones y sus pares cinemáticos formando una cadena cinemática abierta. Los segundos, de tipo paralelo presentan un espacio de trabajo más reducido, pero a cambio son más rígidos lo que les permite mover mayores masas o hacerlo con mayores aceleraciones. El presente estudio presenta un sistema paralelo, un manipulador plano tipo RRRRR de cadena cerrada presentado en la Fig. 1 con cinco eslabones. Además, en el manipulador tipo paralelo las holguras en las juntas no amplifican proporcionalmente los errores de posición en el TCP [1].

Para describir un sistema multicuerpo, el primer punto importante a considerar es la elección de una forma o modelo matemático que describa su posición y movimiento; seleccionar un conjunto de parámetros o coordenadas que definan inequívocamente la posición, la velocidad y la aceleración del sistema en todo momento[4].

La descripción utilizada en el manipulador de este trabajo adopta un sistema expandido de coordenadas dependientes en un número mayor que el de los grados de libertad que puede describir el sistema multicuerpo más fácilmente, pero que no

son independientes, sino que están interrelacionados mediante ciertas ecuaciones conocidas como ecuaciones de restricción. El número de restricciones es igual a la diferencia entre el número de coordenadas dependientes y el número de grados de libertad, estas ecuaciones generalmente son no lineales y desempeñan un papel importante en la cinemática y la dinámica [1].

Con las ecuaciones de restricción, se procede a la resolución de la cinemática y la dinámica con sus respectivos problemas. Se lleva a cabo en primer lugar el problema cinemático de la Posición, el análisis de la velocidad y aceleración, se hace una primera simulación cinemática. Luego se resuelve el problema dinámico, más complejo, que asume que la velocidad y posición ya están resueltos en la cinemática, e incluye las fuerzas que actúan en el sistema multicuerpo. En la dinámica se trata con el problema de posición de equilibrio estático, y la dinámica inversa. Además, ya que como se desea seguir una trayectoria definida en el TCP, se resuelve la cinemática y dinámica inversa y se escoge un integrador para resolver las ecuaciones diferenciales de movimiento y por último se ha implementado un controlador CTC (Computed Torque Control) que combina el modelado dinámico aproximado con el control realimentado[4].

Con lo mencionado anteriormente, el objetivo de este trabajo es modelar, simular, y controlar un manipulador plano. Primero se modela su cinemática y dinámica, luego se simula el movimiento controlado del TCP que sigue una trayectoria definida; finalmente, se considera que se sitúa una masa en el TCP y se tiene una fuerza opuesta a la velocidad y en una de las articulaciones se tiene un rozamiento viscoso.

La organización de este trabajo es la siguiente. La sección II desarrolla la cinemática del sistema a controlar. La sección III obtiene la dinámica del mecanismo, luego en el apartado IV presenta el controlador empleado. En la sección V se detalla la implementación en MATLAB. Finalmente, la sección VI incluye los resultados del presente trabajo.

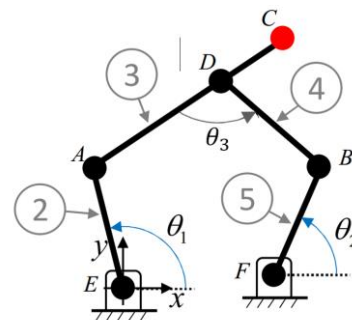


Fig. 1. Manipulador plano tipo RRRRR.

## II. CINEMÁTICA DEL MANIPULADOR

Este capítulo describe el proceso de creación de un modelo matemático simple y eficiente que describa la cinemática del mecanismo, este proceso se denomina modelado o modelización. El modelado implica transformar conceptos como eslabón rígido, par cinemático, velocidad, en un conjunto de ecuaciones[1].

Para escribir esas ecuaciones, previamente hay que encontrar un sistema de coordenadas adecuado que defina completamente la posición del mecanismo. Luego se plantean un conjunto de ecuaciones matemáticas entre las coordenadas y las dimensiones principales de los eslabones conocidas como ecuaciones de restricción, que describen las relaciones geométricas invariantes de los eslabones y/o las relaciones entre velocidades/aceleraciones, si son necesarias[1].

La elección del conjunto de coordenadas tiene importancia en aspectos fundamentales como complejidad y número de ecuaciones, en este proyecto se utilizará las coordenadas naturales que sitúan la posición y orientación de cada eslabón del mecanismo de manera absoluta a través de sus pares, son coordenadas de punto de referencia donde los puntos de interés migran a los pares, son simples y sistemáticas y las ecuaciones de restricción son sencillas[1].

El número de restricciones  $r$  es igual a la diferencia entre el número de coordenadas dependientes  $g$  y el número de grados de libertad (coordenadas independientes)  $n$ .

Para el mecanismo de la Fig.1. se tiene:

$$n = 10 \quad (1)$$

$$g = 2 \quad (2)$$

$$r = n - g = 8 \quad (3)$$

El número de ecuaciones de restricción a plantear es un total de ocho ecuaciones. Para este mecanismo que contiene cinco eslabones se deben cumplir los criterios básicos de la cinemática plana: Cada sólido debe contener como mínimo dos puntos básicos, caso contrario, su rotación queda indefinida; en cada par R (revolución) debe situarse un punto básico, entonces, es posible definir un par R con un punto básico en cada eslabón o que ambos eslabones compartan el mismo punto básico.

### A. Descripción del Movimiento.

En el manipulador tipo RRRRR de la Fig.1. se sitúa su TCP en el punto C, las coordenadas independientes indicadas en azul  $\theta_1$  y  $\theta_2$  es en donde se sitúan los actuadores. El manipulador debe mantener el modo de trabajo indicado en la Fig. 1. El TCP simulará la siguiente trayectoria:

$$\begin{aligned} \text{si } t \leq 1 \text{ s} &\rightarrow \begin{cases} x = 0,15 + 0,15 \cdot t \\ y = 0,28 \end{cases} \\ \text{si } 1 < t \leq 2 \text{ s} &\rightarrow \begin{cases} x = 0,15 + 0,15 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(t-1)\right) \\ y = 0,28 + 0,15 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(t-1)\right) \end{cases} \\ \text{si } 2 < t \leq 3 \text{ s} &\rightarrow \begin{cases} x = 0,15 \\ y = 0,43 - 0,15 \cdot (t-2) \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Para todos los eslabones se supondrá que el CDG (centro de gravedad) es el centro geométrico y el momento e inercia respecto a su CDG es  $I_{Gi} = \frac{1}{12} m_i L_i^2$ , siendo  $m_i$  la masa del

eslabón y  $L_i$  su longitud. Para calcular la masa de cada eslabón biarticulado se supondrá una densidad por unidad de longitud de 2 kg/m. Tendrá además una masa situada en su TCP y una fuerza que se opone a la velocidad definida en la ecuación (5).

$$F = -k \cdot \frac{\overrightarrow{v_{TCP}}}{|\overrightarrow{v_{TCP}}|} \quad (5)$$

Donde  $\overrightarrow{v_{TCP}}$ , es la velocidad en ese punto y  $k$  es una constante. Además, en la articulación D, existe un rozamiento viscoso con constante  $\mu$  que afecta directamente al ángulo  $\theta_3$  marcado en gris en la Fig. 1. Con esto, se incluirá el control que asegure el seguimiento de la trayectoria deseada incluso aunque ésta tenga discontinuidades

### B. Parámetros y Condiciones Iniciales.

Se detallan a continuación en las TABLA I. y TABLA II. las especificaciones técnicas deseadas para el mecanismo.

TABLA I. ESPECIFICACIÓN DE LAS DIMENSIONES

Longitud de eslabones	Valor
$L_{AE}$	250 mm
$L_{AD}$	250 mm
$L_{AC}$	400 mm
$L_{BD}$	250 mm
$L_{BF}$	250 mm

TABLA II. ESPECIFICACIONES DE PARÁMETROS Y CONSTANTES

Parámetro	Valor
$x_e$	0 mm
$y_e$	0 mm
$x_f$	200 mm
$y_f$	0 mm
$m_{TCP}$	3.5 kg
$\vec{g}$	[0, -9.81, 0] m/s <sup>2</sup>
$k$	4 N
$\mu$	0.05 $\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$

En base a la trayectoria definida por el TCP, se detalla en la TABLA III. las condiciones iniciales de las variables, obtenidas en función de la trayectoria deseada evaluada en el tiempo 0, estos datos se obtuvieron con una herramienta de CAD.

TABLA III. PARÁMETROS INICIALES

Parámetro	Valor
$x_{A-0}$	-217.7 mm
$y_{A-0}$	122 mm
$x_{D-0}$	12 mm
$y_{D-0}$	221 mm
$x_{C-0}$	150 mm
$y_{C-0}$	280 mm
$x_{B-0}$	260.4 mm
$y_{B-0}$	250 mm
$\theta_{1-0}$	150.59 °
$\theta_{2-0}$	76.42 °
$\theta_{3-0}$	163.5 °

### C. Ecuaciones de Restricción.

Tomando en cuenta que se necesitan ocho ecuaciones de restricción, y definiendo las coordenadas en  $x, y$  de los puntos de interés del Eslabón A ( $x_A, y_A$ ), B ( $x_B, y_B$ ), C ( $x_C, y_C$ ), D ( $x_D, y_D$ ), E ( $x_E, y_E$ ), F ( $x_F, y_F$ ), se tiene define  $n$  en la ecuación (6).

$$n = 10 \rightarrow [x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D, \theta_1, \theta_2] \quad (6)$$

En base a esto, se describirá cada caso para aplicar las ecuaciones de restricción en el manipulador:

#### 1) Sólido rígido con 2 puntos

Se impone para definir la distancia constante entre dos puntos del eslabón Fig. 2.

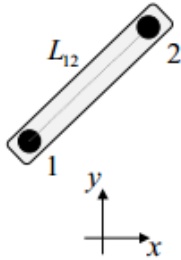


Fig. 2. Sólido Rígido con 2 puntos.

En el caso del Manipulador se tienen cinco eslabones, por lo tanto, las ecuaciones son las siguientes:

$$(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2 - L_{AE}^2 = 0 \quad (7)$$

$$(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 - L_{AD}^2 = 0 \quad (8)$$

$$(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 - L_{AC}^2 = 0 \quad (9)$$

$$(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 - L_{BD}^2 = 0 \quad (10)$$

$$(x_F - x_B)^2 + (y_F - y_B)^2 - L_{BF}^2 = 0 \quad (11)$$

#### 2) Alineación de Puntos

Observando la Fig. 1, se tiene en el eslabón tres (formado por los puntos A y C) un punto coincidente con el eslabón cuatro, punto D; entonces se plantea (13) considerando que el ángulo formado los vectores AD Y AC alineados es cero y se formula el producto cruz de (12).

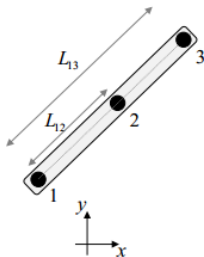


Fig. 3. Alineación de 3 puntos.

$$\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \\ x_D - x_A & y_D - y_A & 0 \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$(x_C - x_A) \cdot (y_D - y_A) - (y_C - y_A) \cdot (x_D - x_A) = 0 \quad (13)$$

#### 3) Giro de los Eslabones

Para los eslabones 2 y 5 de la Fig.1, se puede representar su giro mediante ecuaciones geométricas en (14) y (15) :

$$(x_A - x_E) - L_{AE} \cdot \cos \theta_1 = 0 \quad (14)$$

$$(x_B - x_F) - L_{BF} \cdot \cos \theta_2 = 0 \quad (15)$$

Y en el caso de no cumplir la condición de (16), donde  $\theta_i$  corresponde a cada ángulo respectivamente se plantean dos ecuaciones alternativas en (17) y (18).

$$|\sin \theta_i| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (16)$$

$$(y_A - y_E) - L_{AE} \cdot \sin \theta_1 = 0 \quad (17)$$

$$(y_B - y_F) - L_{BF} \cdot \sin \theta_2 = 0 \quad (18)$$

Debido a que se menciona de que en la dinámica del sistema aparecerá un coeficiente de rozamiento viscoso, es necesario plantear una ecuación adicional de restricción cinemática para poder obtener el valor del ángulo de la articulación D en todo momento, se la obtendrá mediante coordenadas mixtas, que consiste en la unión de las coordenadas naturales y las coordenadas relativas.

#### 4) Coordenada Angular

Cuando se quiere definir un ángulo entre dos eslabones unidos por un par R.

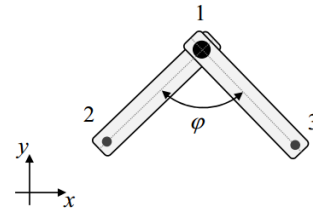


Fig. 4. Alineación de 3 puntos.

Se realiza el producto punto entre los dos vectores que forman el ángulo  $\theta_3$ , observando la Fig.1, es el que está formado por los eslabones tres y cuatro, que representan los vectores  $\overrightarrow{DA}$  y  $\overrightarrow{DB}$ , haciendo el producto punto en (19) y (20) entre estos vectores se obtiene (21):

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = [x_A - x_D \quad y_A - y_D] \cdot \begin{bmatrix} x_B - x_D \\ y_B - y_D \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DB}| \cdot \cos \theta_3 \quad (20)$$

$$(x_A - x_D) \cdot (x_B - x_D) + (y_A - y_D) \cdot (y_B - y_D) - L_{AD} \cdot L_{DB} \cdot \cos \theta_3 = 0 \quad (21)$$

Y en el caso de no cumplir la condición de (16), se plantea la alternativa desarrollada mediante producto cruz en (22).

$$(x_A - x_D) \cdot (y_B - y_D) - (y_A - y_D) \cdot (x_B - x_D) - L_{AD} \cdot L_{DB} \cdot \sin \theta_3 = 0 \quad (22)$$

Una vez encontradas las ecuaciones de restricción que describen el mecanismo, se procede a la resolución de la cinemática directa y sus respectivos problemas. Se lleva a cabo en primer lugar el problema cinemático de la Posición, el análisis de la velocidad y aceleración y se hace una primera simulación cinemática.

#### D. Problema de la Posición.

Se resuelve el problema algebraico utilizando el método iterativo de Newton-Raphson formado por las ecuaciones de restricción geométrica conociendo el valor que toman las coordenadas independientes, el método necesita una aproximación inicial que define el montaje del mecanismo, no suele causar serias dificultades si se comienza con una buena aproximación inicial., dichas condiciones están en la TABLA III. Con esto se pueden agrupar y representar las ecuaciones de restricción que dependen de las variables dependientes  $\mathbf{q}$ , del vector de constantes  $\mathbf{c}$  y del tiempo de la siguiente manera en el vector  $\Phi[1]$ .

$$\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{c}, t) = \begin{bmatrix} (x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2 - L_{AE}^2 \\ (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 - L_{AD}^2 \\ (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 - L_{AC}^2 \\ (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 - L_{BD}^2 \\ (x_F - x_B)^2 + (y_F - y_B)^2 - L_{BF}^2 \\ (x_A - x_E) - L_{AE} \cdot \cos \theta_1 \\ (x_B - x_F) - L_{BF} \cdot \cos \theta_2 \\ (x_C - x_A) \cdot (y_D - y_A) - (y_C - y_A) \cdot (x_D - x_A) \\ (x_A - x_D) \cdot (x_B - x_D) + (y_A - y_D) \cdot (y_B - y_D) \dots \\ \dots - L_{AD} \cdot L_{DB} \cdot \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

De donde,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{var} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{c} = [x_E \ y_E \ x_F \ y_F \ L_{AE} \ L_{AD} \ L_{AC} \ L_{BD} \ L_{BF}] \quad (25)$$

$$\mathbf{q}_{var} = [x_A \ y_A \ x_B \ y_B \ x_C \ y_C \ x_D \ y_D \ \theta_3]^T \quad (26)$$

$$\mathbf{z} = [\theta_1 \ \theta_2] \quad (27)$$

El método de Newton-Raphson ampliado en [4] se basa en una linealización de  $\Phi$ , y consiste en reemplazar este sistema de ecuaciones con los dos primeros términos de su expansión en una serie de Taylor alrededor de una cierta aproximación  $\mathbf{q}_i$  a la solución deseada. Una vez hecha esta sustitución, el sistema queda para el tiempo inicial  $\mathbf{q}_0$ :

$$\Phi(\mathbf{q}) \approx \Phi(\mathbf{q}_0) + \Phi_q(\mathbf{q}_0) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = 0 \quad (28)$$

Donde  $\Phi_q$  es la matriz Jacobiano:

$$\Phi_q(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_r}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_r}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Reordenando (28), para otro instante temporal  $\mathbf{q}_i$ :

$$\Phi_q(\mathbf{q}_i) \cdot (\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i) = -\Phi(\mathbf{q}_i) \quad (30)$$

Sustituyendo (24) en (30), y resolviendo, se tiene (31).

$$\Phi_{var}(\mathbf{q}_i) \cdot (\mathbf{q}_{var\_i+1} - \mathbf{q}_{var\_i}) + \dots \Phi_z(\mathbf{q}_i) \cdot (\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i) = -\Phi(\mathbf{q}_i) \quad (31)$$

En dos iteraciones del método de Newton, el instante temporal de cálculo del mecanismo no cambia.

$$\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{z}_i \quad (32)$$

Quedando finalmente,

$$\mathbf{q}_{var\_i+1} = \mathbf{q}_{var\_i} - \Phi_{var}^{-1}(\mathbf{q}_i) \cdot \Phi(\mathbf{q}_i) \quad (33)$$

Este error se repite hasta quedar por debajo de una tolerancia  $tol$  definida, siendo para este manipulador  $1e-8$ .

$$error = \sqrt{\sum_{m=1}^r \dots \Phi_m} < tol \quad (34)$$

Para el caso de este mecanismo, se muestra a continuación en la TABLA IV. los datos obtenidos tras 5 iteraciones de la posición del punto A y el error correspondiente, y se puede comprobar que se converge tras 4 iteraciones a la solución.

Nº	$x_c$	$y_c$	Error
0	0.15 m m	0.28 m	0.0040
1	0.1447 m	0.2922 m	0.0013
2	0.1455 m	0.2901 m	$7.43e - 4$
3	0.1455 m	0.2900 m	$5.67 e - 7$
4	0.1455 m	0.2900 m	$3.7 e - 8$

Se puede ver en la Fig. 5 los resultados tras cada iteración, los cuáles reflejan los datos de la tabla anterior.

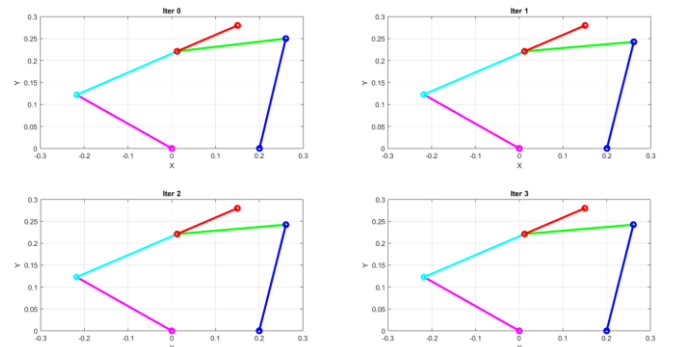


Fig. 5. Resultado de Iteraciones.

#### E. Problema de la Velocidad.

Debido a la posición del manipulador y la velocidad de los elementos de entrada, el análisis de velocidad consiste en

determinar las velocidades de todos los demás elementos y todos los puntos de interés. Este problema es mucho más fácil de resolver que los problemas de posición discutidos anteriormente, principalmente porque es lineal y tiene una solución única. Entonces, derivando respecto del tiempo el vector de las ecuaciones de restricción (23).

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0 \quad (35)$$

$$\Phi_q(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = 0 \quad (36)$$

Siendo,

$$\dot{\mathbf{q}}_{var} = [\dot{x}_A \dot{y}_A \dot{x}_B \dot{y}_B \dot{x}_C \dot{y}_C \dot{x}_D \dot{y}_D \dot{\theta}_3]^T \quad (37)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = [\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2] \quad (38)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{var} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Sustituyendo (37)y (38) en (39) y ésta a su vez en (36) y suponiendo que las ecuaciones de restricción no dependen del tiempo  $\Phi_t = 0$ , se tiene:

$$\Phi_{var}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}_{var} = -\Phi_z(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{z}} \quad (40)$$

Y despejando la velocidad de las variables  $\dot{\mathbf{q}}_{var}$ .

$$\dot{\mathbf{q}}_{var} = \Phi_{var}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot (-\Phi_z(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{z}}) \quad (41)$$

Para el caso de este manipulador, las velocidades para un tiempo  $t=1$  segundo son:

TABLA V. VELOCIDAD DEL MANIPULADOR A 1 SEGUNDO

Velocidades	Valor
$\dot{x}_A$	0.0853 m/s
$\dot{y}_A$	0.15 m/s
$\dot{x}_D$	0.1257 m/s
$\dot{y}_D$	0.056 m/s
$\dot{x}_C$	0.15 m/s
$\dot{y}_C$	0 m/s
$\dot{x}_B$	0.133 m/s
$\dot{y}_B$	-0.033 m/s

#### F. Problema de la Aceleración.

Obtenida la posición y la velocidad, el análisis de aceleración consiste en encontrar la aceleración de todos los elementos y puntos de interés restantes. El problema de la aceleración es también lineal, tiene la misma matriz del problema de velocidad, el procedimiento es similar. Entonces, considerando los vectores:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{var} = [\ddot{x}_A \ddot{y}_A \ddot{x}_B \ddot{y}_B \ddot{x}_C \ddot{y}_C \ddot{x}_D \ddot{y}_D \ddot{\theta}_3]^T \quad (42)$$

$$\ddot{\mathbf{z}} = [\ddot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2] \quad (43)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{var} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Se deriva la ecuación de la velocidad (36) y reemplazando y operando con (42)(43) y (44)se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{var} = \Phi_{var}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot (-\Phi_z(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{z}} - \Phi_{var}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}}_{var} - \Phi_z(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{z}}) \quad (45)$$

De (45), todos los términos son ya conocidos del problema de la posición y de la velocidad. Con esto se presenta a

continuación los datos de aceleración obtenidos en los puntos de interés para un tiempo  $t=1$  segundo.

TABLA VI. ACELERACIÓN DEL MANIPULADOR A 1 SEGUNDO

Accleraciones	Valor
$\ddot{x}_A$	0.1051 m/s <sup>2</sup>
$\ddot{y}_A$	-0.059m /s <sup>2</sup>
$\ddot{x}_D$	0.018 m/s <sup>2</sup>
$\ddot{y}_D$	0.0748 m/s <sup>2</sup>
$\ddot{x}_C$	-0.0601 m/s <sup>2</sup>
$\ddot{y}_C$	0.1553 m/s <sup>2</sup>
$\ddot{x}_B$	-0.018 m/s <sup>2</sup>
$\ddot{y}_B$	-0.0735 m/s <sup>2</sup>

Se ven a continuación las gráficas de la posición, velocidad y aceleración del mecanismo para 1 segundo, haciendo una variación únicamente en uno de los actuadores, es decir en  $\theta_1$  con un movimiento continuo en sentido antihorario.

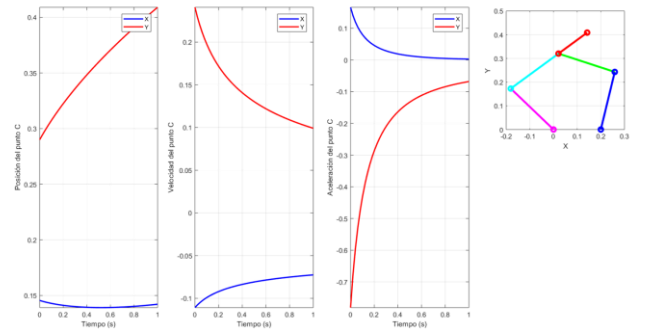


Fig. 6. Resultado de Simulación Cinemática Directa.

#### G. Problema Cinemático Inverso.

La formulación planteada no diferencia de si se trata de un problema de cinemática directa o inversa ya que consiste en la resolución de un sistema de ecuaciones, por tanto, si se desea poner como variables independientes la posición del TCP en x, y se realizaría de igual manera el procedimiento; simplemente las variables independientes serían las de TCP.

### III. DINÁMICA DEL MANIPULADOR

En general, la dinámica es un poco más compleja, y requiere que los problemas cinemáticos se resuelvan antes que los problemas dinámicos. La dinámica involucra las fuerzas que actúan en el manipulador y sus características de inercia de la siguiente manera: masa, tensor de inercia y la posición de su centro de gravedad, se tratará sobre los problemas más importantes encontrados. Debido a que la formulación de Newton Euler no es muy apropiada puesto que genera un sistema de ecuaciones de gran tamaño y la cinemática se resuelve aparte, se utilizará las ecuaciones de Lagrange que son resultado de aplicar el principio de las potencias virtuales a los teoremas fundamentales[2].

$$E_C = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \cdot \mathbf{M}^* \cdot \dot{\mathbf{z}} \quad (46)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{Q} \quad (47)$$

De donde,  $E_C$  es la energía cinética del manipulador,  $\mathbf{Q}$  es el vector fuerzas generalizadas en las coordenadas independientes  $\mathbf{z}$ . Sin embargo, en estas coordenadas es más difícil de formular por lo que se plantea en coordenadas dependientes.

$$E_C = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{M}^* \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (48)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \mathbf{q}} + \Phi_q^T \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q} \quad (49)$$

El término nuevo  $\boldsymbol{\lambda}$  en (49), es el vector de multiplicadores de Lagrange, y junto con la matriz jacobiana de las restricciones cinemáticas representan los esfuerzos requeridos para mantener las restricciones entre las variables dependientes. Entonces, sustituyendo (48) en (49) y operando, se tiene:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q} \quad (50)$$

Para el caso de este artículo la matriz  $\mathbf{M}$  es constante. El sistema de ecuaciones diferenciales planteado tiene  $n$  ecuaciones con  $n$  variables. Sin embargo, el número de incógnitas del sistema es  $n + m$  porque hay  $m$  multiplicadores de Lagrange desconocidos (tantos como ecuaciones de restricción). Es necesario, añadir  $m$  ecuaciones adicionales algebraicas, las  $m$  restricciones cinemáticas:

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0 \quad (51)$$

En base al sistema formado por (50) y (51) se modelará la dinámica plana.

#### A. Matriz de Masas del Manipulador

Los elementos planos se modelizan en coordenadas naturales con un mínimo de 2 puntos. Entonces, se va a definir la matriz de masas de un eslabón en base a dos puntos que lo definan en el modelo matemático como en la Fig. 7.

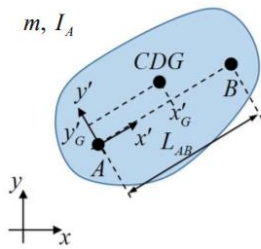


Fig. 7. Sistema inercial y local de coordenadas de un eslabón con coordenadas naturales.

Dicha Matriz es simétrica y constante para dos dimensiones.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m - 2 \cdot m \cdot \frac{x'_G}{L_{AB}} + \frac{I_A}{L_{AB}^2} & 0 & m \cdot \frac{x'_G}{L_{AB}} - \frac{I_A}{L_{AB}^2} & -m \cdot \frac{y'_G}{L_{AB}} \\ 0 & m - 2 \cdot m \cdot \frac{y'_G}{L_{AB}} + \frac{I_A}{L_{AB}^2} & m \cdot \frac{y'_G}{L_{AB}} - \frac{I_A}{L_{AB}^2} & m \cdot \frac{x'_G}{L_{AB}} - \frac{I_A}{L_{AB}^2} \\ m \cdot \frac{x'_G}{L_{AB}} - \frac{I_A}{L_{AB}^2} & m \cdot \frac{y'_G}{L_{AB}} - \frac{I_A}{L_{AB}^2} & \frac{I_A}{L_{AB}^2} & 0 \\ -m \cdot \frac{y'_G}{L_{AB}} & m \cdot \frac{x'_G}{L_{AB}} - \frac{I_A}{L_{AB}^2} & 0 & \frac{I_A}{L_{AB}^2} \end{bmatrix} \begin{matrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \end{matrix} \quad (52)$$

De donde,  $m$  es la masa del elemento;  $x'_G$  e  $y'_G$  son las coordenadas del centro de gravedad del elemento en el sistema de referencia local;  $I_A$  es el momento de inercia del elemento respecto al punto A de la Fig. 7, que es origen del sistema local. Además, aparece la distancia entre los puntos A y B,  $L_{AB}$ . Considerando que el planteamiento de las condiciones en II.A, nos indica una inercia respecto al centro de gravedad es necesario, hacer el cálculo de las inercias aplicando el teorema de Steiner para trasladarlo al punto de referencia A y tener concordancia. A continuación, se plantea la ecuación de la inercia en el CDG y la ecuación aplicando Steiner.

$$I_{Gi\_CDG} = \frac{1}{12} * m_i * L_i^2 \quad (53)$$

$$I_A = \frac{1}{12} * m_i * L_i^2 + m_i * (x'_G{}^2 + y'_G{}^2) \quad (54)$$

#### B. Vector de Fuerzas Generalizadas.

Es el vector de un elemento del mecanismo para fuerzas y momentos puntuales aplicados sobre el mismo, se obtiene al proyectar la fuerza aplicada al eslabón sobre las coordenadas naturales que lo definen, Fig. 8.

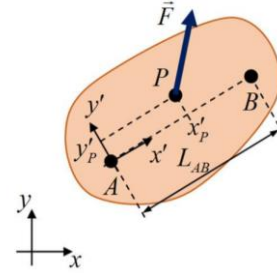


Fig. 8. Fuerza concentrada en un punto P de un eslabón con coordenadas naturales.

Cuando se aplica una fuerza concentrada en un punto P de un elemento que no es un punto básico, Fig. 8, se debe introducir una transformación que transformará las fuerzas en el punto P en las coordenadas naturales del elemento. Para configurar la transformación requerida, se puede usar directamente (55) aplicada al punto P, entonces:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{q} \quad (55)$$

De donde,  $\mathbf{r}_P$  es el vector posición que representa la ubicación de un punto genérico P en el sistema inercial, la matriz  $\mathbf{C}_P$  actúa como una matriz de transformación de coordenadas. Se usa para este propósito el principio de trabajo virtual que impone la condición de que ambos conjuntos de fuerzas realicen una cantidad igual de trabajo virtual [4]. En consecuencia:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}_P^T \cdot \mathbf{F} \quad (56)$$

La matriz de proyección  $\mathbf{C}_P$  se construye en base a los puntos A y B que definen el eslabón[1].



$$C_P = \frac{1}{L_{AB}} \cdot \begin{bmatrix} L_{AB} - x'_p & y'_p & x'_p & -y'_p \\ -y'_p & L_{AB} - x'_p & y'_p & x'_p \end{bmatrix} \quad (57)$$

Consecuentemente el vector de fuerzas que actúa en los puntos básicos se puede representar como en (58).

$$\begin{bmatrix} F_{AX} \\ F_{AY} \\ F_{BX} \\ F_{BY} \end{bmatrix} = \frac{1}{L_{AB}} \cdot \begin{bmatrix} L_{AB} - x'_p & -y'_p \\ y'_p & L_{AB} - x'_p \\ x'_p & y'_p \\ -y'_p & x'_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{PX} \\ F_{PY} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Una vez conocidas (52) y (58) se deben ensamblar como en la Fig. 9 en una matriz de masas y un vector de fuerzas generalizadas global teniendo en cuenta las coordenadas para las que están definidas[2].

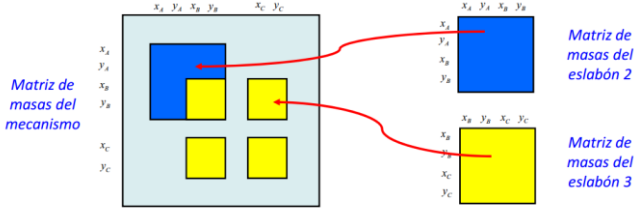


Fig. 9. Ensamblaje de las matrices de Masa y el vector de Fuerzas generalizadas.

Considerando que cuando en una celda de la matriz/vector global coinciden componentes de distintos elementos, se suman los valores confluyentes conservando el signo.

En base a lo anterior y considerando lo mencionado en la sección II.A, se muestra a continuación los parámetros principales para ensamblar estas matrices.

TABLA VII. PARÁMETROS PARA LA DINÁMICA				
Eslabón Nº	$x'_{Gi}$ [m]	$y'_{Gi}$ [m]	$m_i$ [Kg]	$I_{GiCDG}$ [Kg m <sup>2</sup> ]
2	0.125	0	0.5	2.6
3	0.225	0	0.9	12
4	0.125	0	0.5	2.6
5	0.125	0	0.5	2.6

En cuanto a la masa del TCP se muestra en la TABLA II. sus parámetros, considerando que su inercia se calculará como para una masa puntual situada al final del eslabón 2, entonces:

$$I_{m_{TCP}} = m_{TCP} * (L_{AC}^2) \quad (59)$$

Y se adicionará como otra masa en la matriz de masas, otra opción es aplicar el teorema de Steiner en el eslabón 2 y calcular un momento de inercia equivalente.

TABLA VIII. PARÁMETROS PARA LA DINÁMICA-TCP				
	$x'_{G_{TCP}}$ [m]	$y'_{G_{TCP}}$ [m]	$m_{TCP}$ [Kg]	$I_{G_{TCP}}$ [Kg m <sup>2</sup> ]
<b>TCP</b>	0.250	0	3.5	2.6

Adicionalmente, se debe agregar al vector de Fuerzas generalizadas (58) las fuerzas ejercidas por la gravedad en el CDG de los eslabones. Sería de considerar que los puntos de aplicación de estas fuerzas son los de la TABLA VII. y considerar el valor de la gravedad está descrita en la TABLA II.

También, se menciona en la sección II.A que se tiene un coeficiente de rozamiento viscoso en la articulación D, el cual se lo representa como un amortiguador de rotación que también ejercerá una fuerza, y que se agrega en el vector de fuerzas cómo:

$$\begin{bmatrix} F_{AX} \\ F_{AY} \\ T_{\theta Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -C_{\theta} \cdot \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (60)$$

De donde  $\dot{\theta}$ , es la velocidad de rotación asociada a la extensión del resorte, este valor se obtuvo ya en la cinemática en (41), por lo que su cálculo no tiene mayor complicación.

Y finalmente, se indica que se tiene una fuerza que se opone a la velocidad con la siguiente expresión

$$F_{TCP} = -4 \cdot \frac{\overrightarrow{v_{TCP}}}{|\overrightarrow{v_{TCP}}|} \quad (61)$$

De donde  $\overrightarrow{v_{TCP}} = [\dot{x}_C \ \dot{y}_C \ 0]$  es la velocidad en el TCP, dicha fuerza se añade también en el vector de fuerzas, con las posiciones indicadas en la TABLA VIII.

Para el manipulador desarrollado en este artículo se presentan a continuación la matriz de masas y el vector de fuerzas generalizadas.

$$M = \begin{pmatrix} 0.467 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.467 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.167 & 0 & 0 & 0 & 0.083 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.166 & 0 & 0 & 0 & 0.083 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0 & 0 & 0 & 3.80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 3.80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.083 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.083 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -6.86 \\ 0 \\ -2.45 \\ -4.0 \\ -38.7 \\ 0 \\ -4.9 \\ -0.0008 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (63)$$

### C. Formulación dinámica – Matriz R

Las ecuaciones de Lagrange en coordenadas dependientes (50) y (51) conducen al sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas (DAE's), pero la gran mayoría de integradores disponibles sirven para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE's). Debido a esto, se trata de convertir el sistema formado por (50) y (51) en ODE, para esto se tienen varias alternativas, de las cuales se profundizará en la utilizada para el desarrollo de este artículo, las otras dos se puede profundizar en [4].

La primera es Lagrange estabilizado que es inestable ya que impone la compatibilidad de aceleraciones y no de las ecuaciones de restricción, es utilizado cuando se quieren calcular las reacciones en los pares además del movimiento del mecanismo completo. La segunda, detallada más adelante es Matriz R, que tiene la ventaja de ser un sistema pequeño y es empleada cuando sólo se necesita la variación de las coordenadas independientes. Y la tercera es mediante penalizadores que resuelve un sistema de ecuaciones de tamaño pequeño y que es un sistema muy robusto ante configuraciones singulares, ecuaciones redundantes, etc. [2]

A continuación, se detalla la formulación mediante matriz  $R$ . Cualquier vector de velocidad dependiente  $\dot{q}$  puede expresarse como una combinación lineal de la base del espacio nulo de la matriz Jacobiano  $\Phi_q$  mediante  $R$  de la siguiente manera:

$$\dot{q} = R \cdot \dot{z} \quad (64)$$

El Vector  $z$  tendrá solo  $f = n - m$  componentes que serán independientes. Y derivando (60) respecto del tiempo:

$$\ddot{q} = R \cdot \ddot{z} + \dot{R} \cdot \dot{z} \quad (65)$$

Sustituyendo (65) en (50),

$$M \cdot (R \cdot \ddot{z} + \dot{R} \cdot \dot{z}) + \Phi_q^T \cdot \lambda = Q \quad (66)$$

Premultiplicando por  $R^T$  y reordenando,

$$R^T M \cdot R \cdot \ddot{z} + (\Phi_q \cdot R)^T \cdot \lambda = R^T (Q - M \cdot \dot{R} \cdot \dot{z}) \quad (67)$$

De (36), se sabe que  $\Phi_q(q) \cdot \dot{q} = 0$ , y reemplazando (64), queda  $\Phi_q(q) \cdot R \cdot \dot{z} = 0$ , de lo cual se puede deducir que  $\dot{z}$  (las velocidades independientes) pueden no ser cero, entonces la única opción posible es:

$$\Phi_q(q) \cdot R = 0 \quad (68)$$

Consecuentemente,

$$R^T M \cdot R \cdot \ddot{z} = R^T (Q - M \cdot \dot{R} \cdot \dot{z}) \quad (69)$$

Y haciendo un cambio de variables:

$$M^* \cdot \ddot{z} = Q^* \quad (70)$$

Para calcular la matriz  $R$  en primer lugar, hay que resolver el problema de la posición para el valor conocido de las coordenadas independientes, a continuación, hay que resolver el problema de la velocidad  $f$  veces.

Y para calcular su derivada, se realiza lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_{var} \\ \ddot{z}_{var} \end{bmatrix} = \ddot{q} = R \cdot \ddot{z} + \dot{R} \cdot \dot{z} \quad (71)$$

De donde  $\dot{R} \cdot \dot{z}$ , son las aceleraciones del mecanismo cuando las aceleraciones independientes son nulas. Por lo tanto, para obtener este término, bastará con efectuar un análisis de aceleraciones con valor nulo de todas las entradas. Si este análisis se lleva a cabo según la sección de Cinemática II.

$$\Phi_q \ddot{q} = -\dot{\Phi}_q \dot{q} \quad (72)$$

Se podrá utilizar la matriz del sistema ya triangularizada para el cálculo de la matriz  $R$ , ya que solo cambia el término independiente.

Una vez resuelto el caso del sistema de ecuaciones ODE y cómo calcular las aceleraciones del mecanismo, se necesita de técnicas numéricas para poder integrar este sistema de ecuaciones diferenciales.

Si se considera el vector,

$$s = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \text{ o } s = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (73)$$

Y la función a integrar es la siguiente

$$s = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = f(s, t) \text{ o } s = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = f(s, t) \quad (74)$$

Dentro de la función a integrar, hay que calcular la aceleración del mecanismo a partir de su posición y su velocidad utilizando cualquiera de las formulaciones anteriores, en la que siempre hay que resolver lo siguiente:

$$Ax = b \quad (75)$$

#### D. Integración Numérica – RK2

Un método de integración numérica permite obtener una solución discreta aproximada de un sistema ODE cuya solución exacta es continua. El error cometido depende del método de integración utilizado y el paso utilizado en la variable (en el tiempo). Las características más relevantes de los integradores son su estabilidad que es la capacidad de converger a una solución para distintos pasos de tiempo; y la precisión que define la exactitud de la solución. Para este caso en particular el integrador a utilizar será un Runge-Kutta de 2º orden (RK2), que es un integrador explícito de paso simple, es decir proporciona la solución en el instante  $i+1$  haciendo uso solamente de la solución en el instante  $i$ ; además, es condicionalmente estable, es decir que converge si

$$\Delta t \leq \frac{T}{factor} \quad (76)$$

En base a lo anterior se describe brevemente el funcionamiento de un RK2

$$s_{i+1} = s_i + (f_1 + f_2) \cdot \frac{\Delta t}{2} \quad (77)$$

$$f_1 = f(t_i, s_i) \quad (78)$$

$$f_2 = f(t_{i+1}, s_i + f_1 \cdot \Delta t) \quad (79)$$

Finalmente, la combinación Matriz  $R$  + RK2, genera un resultado más preciso, ya que presenta menos disipación de energía y tiene menos ecuaciones, aunque hay que calcular la matriz  $R$  y su derivada; además, es un algoritmo de integración con convergencia condicional, esto es, que necesita pasos menores [2].

#### E. Análisis Dinámico Inverso

Existen dos posibilidades a la hora de realizar el análisis dinámico inverso de un mecanismo, la primera es introducir el movimiento deseado en las ecuaciones de restricción; y la segunda utilizada para este manipulador, es aplicar la formulación de matriz  $R$ . Si se aplica una formulación de matriz  $R$ , se puede desacoplar el problema dinámico en dos partes (cinemática y dinámica) que se resuelven secuencialmente. En cada instante temporal se conocen:

$$z = z(t) \quad (80)$$

$$\dot{z} = \dot{z}(t) \quad (81)$$

$$\ddot{z} = \ddot{z}(t) \quad (82)$$

Entonces es posible calcular  $R$  y  $\dot{R} \cdot \dot{z}$ , y con esto sí:

$$Q = Q_{ext} + Q_{motor} \quad (83)$$

Entonces reemplazando (83) en (69) y agrupando se tiene:

$$Q^*_{motor} = R^T Q_{motor} \quad (84)$$

$$Q^*_{motor} = R^T M \cdot R \cdot \ddot{z} + R^T M \cdot \dot{R} \cdot \dot{z} - R^T Q_{ext} \quad (85)$$

$$Q^*_{motor} = R^T (\ddot{q} - Q_{ext}) \quad (86)$$



Concluyendo que en cada instante se calculan los esfuerzos motores, y considerando que no se pueden calcular otras reacciones.

#### IV. CONTROLADOR

Cuando no se consigue que el movimiento siga la referencia de manera exacta, hay que recurrir al control. El control consiste en incluir unas acciones sobre el mecanismo (fuerzas o pares de fuerzas) cuyo valor, dirección y/o sentido son dependientes del error con el que el mecanismo sigue el movimiento tomado como referencia (movimiento deseado) [3].

A continuación, se detallará sobre el control CTC (Computed Torque Control) que es el que se ha implementado para este manipulador.

Con el fin de simplificar la formulación, se recomienda utilizar la formulación de la dinámica con matriz R, la cual describe el movimiento en coordenadas independientes:

$$\mathbf{M}^* \cdot \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}^* + \mathbf{Q}^*_{control} \quad (87)$$

Donde  $\mathbf{M}^*$  es la matriz de masas en coordenadas independientes

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{R}^T \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} \quad (88)$$

$\mathbf{Q}^*$  es el vector de fuerzas generalizadas en coordenadas independientes, excluyendo los actuadores del controlador:

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^*(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \mathbf{R}^T (\mathbf{Q} - \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{z}}) \quad (89)$$

$\mathbf{Q}^*_{control}$  es el vector de fuerzas del controlador en coordenadas independientes. En un caso general, los actuadores no actuarán directamente sobre las coordenadas independientes, así que las fuerzas y pares que dichos actuadores generan deben ser proyectadas sobre dichas coordenadas mediante una matriz B [3].

$$\mathbf{Q}^*_{control} = \mathbf{B} \mathbf{F} \quad (90)$$

El control CTC implica calcular las actuaciones imponiendo una aceleración como se muestra a continuación:

$$\mathbf{Q}^*_{control} = \mathbf{M}^* \cdot (\ddot{\mathbf{z}}_{des} + \mathbf{K}_D \cdot (\dot{\mathbf{z}}_{des} - \dot{\mathbf{z}}) + \mathbf{K}_P \cdot (\mathbf{z}_{des} - \mathbf{z})) - \mathbf{Q}^* \quad (91)$$

Donde,  $\mathbf{K}_D$  y  $\mathbf{K}_P$  son matrices diagonales, en las que si se impone la relación:

$$\mathbf{K}_{Di} = 2 \cdot \sqrt{\mathbf{K}_{Pi}} \quad (92)$$

Siendo,  $\mathbf{K}_{Di}$  y  $\mathbf{K}_{Pi}$  los elementos de la matriz diagonal, y para este manipulador se ha utilizado un valor de 300.

Por lo anterior, el método de control CTC se muestra muy robusto frente a la elección de las ganancias, se puede dar la misma ganancia a todas las coordenadas.

Adicionalmente, El movimiento deseado puede estar definido en unas coordenadas distintas a las coordenadas donde se encuentran los actuadores, en este caso particular las coordenadas del TCP:

$$\mathbf{z}_{des} = \mathbf{z}_{IK} \neq \mathbf{z} = \mathbf{z}_{DK} \quad (93)$$

Entonces, se calcularán los esfuerzos en las coordenadas independientes que definen el movimiento deseado (problema inverso):

$$\mathbf{Q}^*_{control\_IK} = \mathbf{M}^*_{IK} \cdot (\ddot{\mathbf{z}}_{des} + \mathbf{K}_D \cdot (\dot{\mathbf{z}}_{des} - \dot{\mathbf{z}}_{IK}) + \mathbf{K}_P \cdot (\mathbf{z}_{des} - \mathbf{z}_{IK})) - \mathbf{Q}^*_{IK} \quad (94)$$

$$\mathbf{M}^*_{IK} = \mathbf{R}^T_{IK} \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}_{IK} \quad (95)$$

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{R}^T_{IK} (\mathbf{Q} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}_{IK} \cdot \dot{\mathbf{z}}_{IK}) \quad (96)$$

Y a continuación, se calcularán los esfuerzos en las coordenadas independientes donde se encuentran los actuadores haciendo una equivalencia de potencias aplicadas sobre el mecanismo:

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}_{IK} \cdot \mathbf{z}_{IK} \rightarrow \mathbf{z}_{IK} = \mathbf{R}_{IK}^+ \cdot \mathbf{q} \quad (97)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}_{DK} \cdot \mathbf{z}_{DK} \rightarrow \mathbf{z}_{DK} = \mathbf{R}_{DK}^+ \cdot \mathbf{q} \quad (98)$$

Se tiene igualando y reemplazando,

$$\mathbf{z}_{IK}^T \cdot \mathbf{Q}^*_{control\_IK} = \mathbf{z}_{DK}^T \cdot \mathbf{Q}^*_{control\_DK} \quad (99)$$

$$\mathbf{q}^T \cdot (\mathbf{R}_{IK}^+)^T \cdot \mathbf{Q}^*_{control\_IK} = \mathbf{q}^T \cdot (\mathbf{R}_{DK}^+)^T \cdot \mathbf{Q}^*_{control\_DK} \quad (100)$$

$$\mathbf{Q}^*_{control\_DK} = \mathbf{R}_{DK}^T \cdot (\mathbf{R}_{IK}^T)^+ \cdot \mathbf{Q}^*_{control\_IK} \quad (101)$$

#### V. IMPLEMENTACIÓN EN MATLAB

Para ver cuál es la respuesta de nuestro mecanismo, se ha realizado la simulación, programando todas las ecuaciones en funciones en MATLAB. A continuación, se mostrará en diagramas de flujo los programas implementados. Se detallarán en el orden de explicación de las secciones anteriores.

##### A. Simulación Cinemática

Se presenta en la Fig. 10 un diagrama de Flujo de la estructura de resolución de la cinemática del Manipulador.

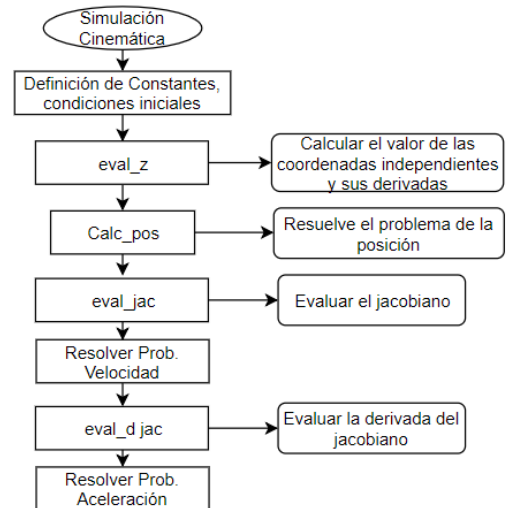


Fig. 10. Diagrama de Flujo Cinemática- Implementación Matlab.

Calc\_pos, es la función que resuelve el problema de la posición del mecanismo mediante el método de Newton, tiene el siguiente diagrama de flujo.

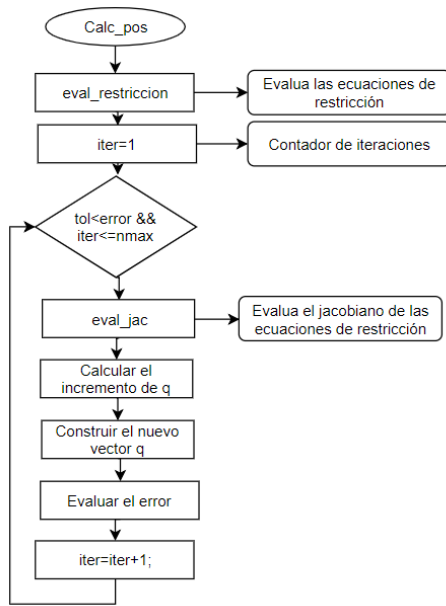


Fig. 11. Diagrama de Flujo Cinemática- Calc\_pos.

## B. Simulación Dinámica

Se presenta a continuación en un diagrama de Flujo de la estructura de resolución de la dinámica del Manipulador:

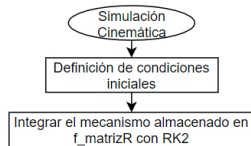


Fig. 12. Diagrama de Flujo Dinámica- Implementación Matlab.

De donde, se detalla a continuación el diagrama de  $f\_matrizR$ :

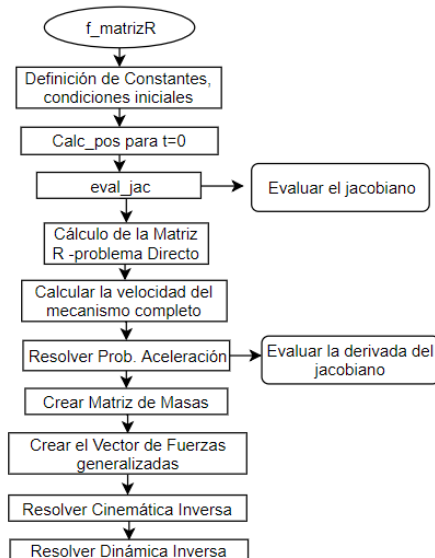


Fig. 13. Diagrama de Flujo Dinámica- $f\_MatrizR$ .

Para la creación de la matriz de Masas y el vector de fuerzas se detalla a continuación sus diagramas de flujo, de los cuales los datos ingresados son todos los explicados en las secciones II y III.

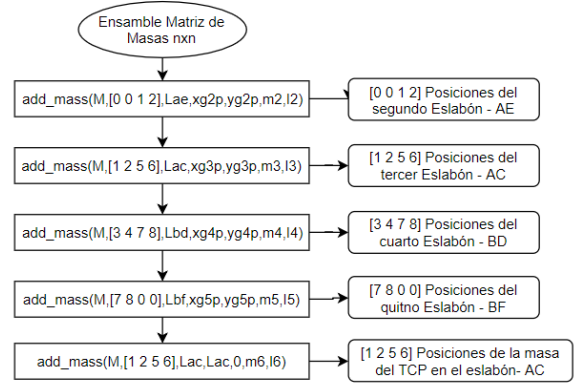


Fig. 14. Ensamble Matriz de Masas.

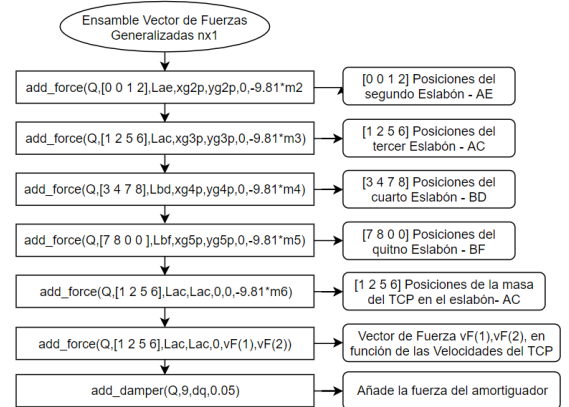


Fig. 15. Ensamble Vector de Fuerzas Generalizadas

## VI. RESULTADOS OBTENIDOS

En primer lugar, se muestra la trayectoria que se describió en II.A, y que el manipulador ha cumplido junto con su simulación cinemática y dinámica.

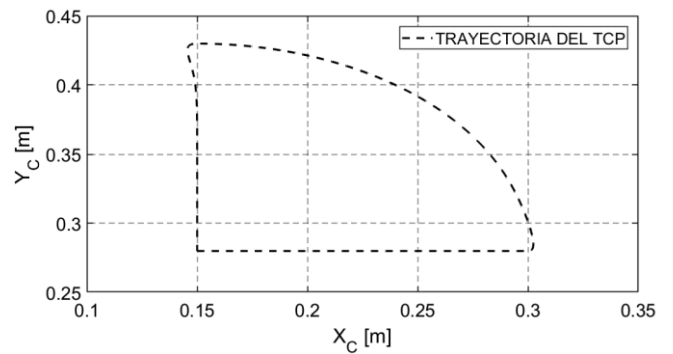


Fig. 16. Trayectoria Realizada por el TCP,  $x=f(y)$ .

Se observa que el manipulador es capaz de seguir sin problema la trayectoria que es un semicírculo, se observa un pequeño sobrepico en la esquina superior, que evidencia la realidad ante un cambio brusco de referencia. A continuación, se muestra la trayectoria del TCP de las posiciones  $x$ ,  $y$  en función del tiempo junto con su referencia.

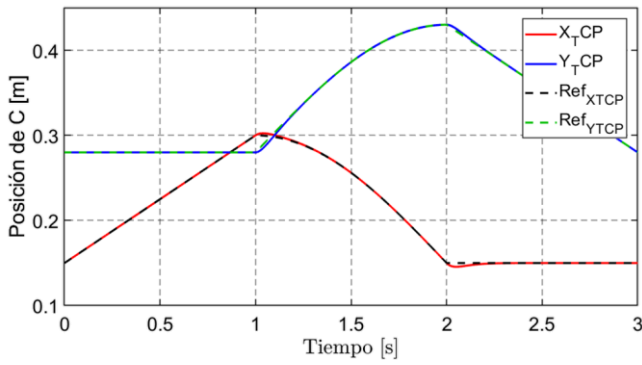


Fig. 17. Trayectoria Realizada por el TCP.  $x=f(t)$ ,  $y=f(t)$ .

Al ver las referencias, se puede apreciar mejor los picos que se presentan en los cambios de dirección que realiza el TCP del manipulador.

A continuación, se muestran las gráficas de velocidad del TCP.

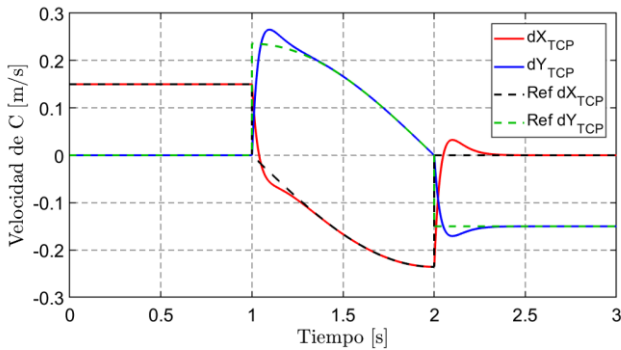


Fig. 18. Velocidades del TCP y sus referencias

Se observa que la velocidad es afectada en mayor proporción que la posición, sin embargo, se puede verificar que efectivamente la velocidad deseada es alcanzada por el manipulador en aproximadamente 0.4 segundos, y el error de posición es cero.

Las curvas de la aceleración se muestran a continuación

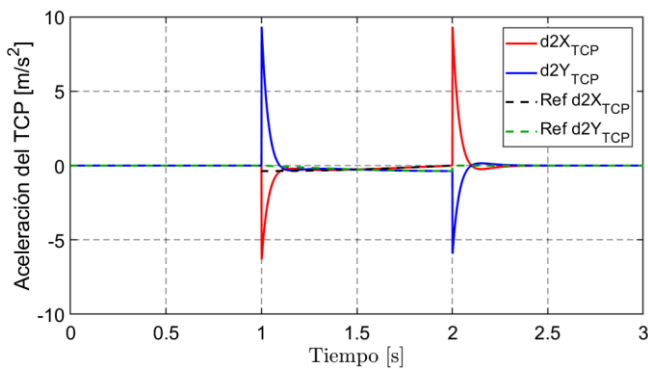


Fig. 19. Aceleraciones del TCP y sus referencias

Y finalmente se tiene en la Fig. 20 el par necesario que se debe aplicar en los actuadores

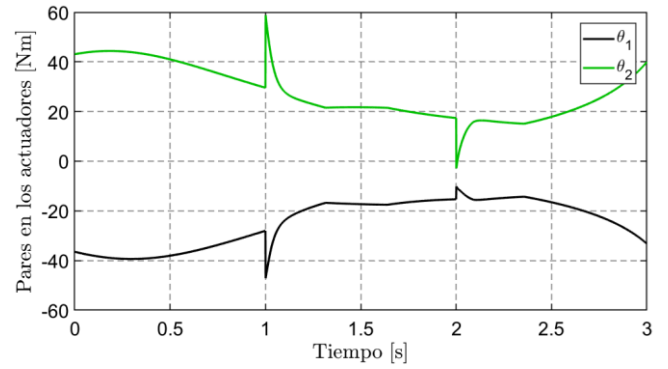


Fig. 20. Aceleraciones del TCP y sus referencias

En este caso particular si se requiere seleccionar un actuador, se necesitaría que cumplan estas condiciones de Par para poder llevar a cabo el movimiento deseado, se tiene el mayor pico de par en aproximadamente 60 [Nm]. El comportamiento de los actuadores es claro según el movimiento que se les ha planteado. Inicialmente se tiene un par que bordea los 40 [Nm] el cual permite vencer las inercias que se tienen de entrada, así como vencer a la fuerza y la masa que están concentradas en el TCP. Y luego en el tiempo 1 y 2 segundos, se observan unos sobrepicos los cuales explican al igual que en la figura de la posición Fig. 17 que hay cambios de referencia y se está respondiendo a este cambio. En la TABLA IX se detallan los máximos picos de cada actuador para hacer una búsqueda comercial de un motor que cumpla estos requerimientos.

TABLA IX. VALORES MÁXIMOS DE PAR DE LOS ACTUADORES

Par máximo	Valor
$T_{\theta_1\_MAX}$	58.83 [Nm]
$T_{\theta_2\_MAX}$	47.13 [Nm]

Con estos datos se ha encontrado un posible actuador de la Fig. 21 para utilizar en las dos articulaciones del manipulador; DOGA, 12 V dc, 50 Nm, Brushed DC Geared Motor, 30 rpm[5].



Fig. 21. Actuador para el manipulador

## VII. CONCLUSIONES

En el modelado cinemático se planteó un conjunto de ecuaciones matemáticas conocidas como ecuaciones de restricción, que describen las relaciones geométricas de los eslabones, para este mecanismo la mejor elección fueron las coordenadas naturales que sitúan la posición y orientación de cada eslabón del mecanismo de manera absoluta a través de sus pares; son simples y sistemáticas, se utilizó además coordenadas mixtas para la coordenada angular del ángulo que

fue utilizado después para el cálculo de la fuerza en el amortiguador.

El modelado dinámico es más complejo que el cinemático, ya que requiere que los problemas cinemáticos se resuelvan antes. La dinámica involucra las fuerzas que actúan en el manipulador y sus características de inercia, para este manipulador se utilizó las ecuaciones de Lagrange que son resultado de aplicar el principio de las potencias virtuales.

Para calcular la matriz de masas fue necesario el uso del teorema de Steiner, ya que el punto de referencia de la Inercia planteada inicialmente era diferente del punto base de la Matriz de Inercias.

La elección de una formulación y un integrador que se ajuste a la dinámica del sistema es muy importante, para este manipulador se ha seleccionado Matriz R + RK2, ya que da la ventaja de ser un sistema pequeño y sólo se necesitaba la variación de las coordenadas independientes. Junto con RK2 generaron un resultado preciso, como se pudo ver en los resultados obtenidos.

En el diseño del control, se eligió el CTC ya que se muestra muy robusto frente a la elección de las ganancias, se pudo dar la misma ganancia a todas las coordenadas, y el movimiento deseado estuvo definido en las coordenadas del TCP distintas a las coordenadas donde se encuentran los actuadores.

El manipulador fue capaz de seguir sin problema la trayectoria deseada, presenta un pequeño sobrepico que evidencia la realidad ante un cambio brusco de referencia, y se pudo ver como el control actúa de forma robusta ante estos cambios.

## RECONOCIMIENTO

Se agradece el apoyo proporcionado a la Universidad de Oviedo para el desarrollo de este trabajo, sobre al docente de esta asignatura “Síntesis y Simulación de Mecanismos” que nos ha dado su tiempo y dedicación para poder llegar a culminar con éxito.

## REFERENCIAS

- [1] A. Noriega, “MUIM SySM - Modelado y simulación cinemática 2018-2019”, Síntesis y simulación de mecanismos- Material de Clase, 2018, pp.1-48.
- [2] A. Noriega, “MUIM SySM - Modelado y simulación dinámica 2018-2019”, Síntesis y simulación de mecanismos- Material de Clase, 2018, pp.1-63.
- [3] A. Noriega, “MUIM SySM - Simulación con control 2018-2019” Síntesis y simulación de mecanismos- Material de Clase, 2018, pp.1-19.
- [4] J. García; E. Bayo, “Kinematic and dynamic simulation of multibody systems”, University of Navarra, San Sebastian, Spain Cap.1-7.
- [5] Rs-Online, DC Geared Motors “DOGA, 12 V dc, 50 Nm, Brushed DC Geared Motor, Output Speed 30 rpm”, Disponible en: <https://uk.rs-online.com/web/p/dc-geared-motors/7736807/>

## ANEXOS

### ANEXO. 1: MODELO CINEMÁTICO

- calc\_pos
- dib\_mec
- eval\_djac\_var

- eval\_djac\_z
- eval\_jac\_var
- eval\_jac\_z
- eval\_restriccion
- eval\_z
- simula\_cinem

### ANEXO. 2: MODELO CON CONTROL

- add\_damper
- add\_force
- add\_mass
- calc\_pos
- calc\_z\_IK
- dib\_mec
- eval\_djac
- eval\_jac
- eval\_restriccion
- f\_matrizR
- Grafico\_aceleraciones
- Grafico\_velocidades
- insert
- RK2
- selec\_row
- selec\_var
- sim\_matrizR
- simular
- Trayectoria

### ANEXO. 3: GRÁFICOS

