

# Síntesis de un mecanismo de dirección para un vehículo

Samaniego Villacrés, Pilar Estefanía  
Máster en Ingeniería Mecatrónica  
Universidad de Oviedo  
Gijón, España  
pilar.samaniego@eu4m.eu

**Resumen** — En este trabajo se presenta la síntesis de un mecanismo plano de dirección de un vehículo, con el cuál se desea cumplir la relación de Ackerman para evitar el desgaste de los neumáticos y maximizar la adherencia, se presenta la metodología que permite resolver la síntesis dimensional cinemática de tipo cero de este mecanismo, imponiendo condiciones de síntesis y mediante la generación de posiciones de síntesis deseadas, con lo cual, se obtiene las dimensiones principales de los eslabones del mecanismo.

**Palabras Clave** — síntesis, Ackerman, Matlab, cinemática, ecuaciones de restricción.

## I. INTRODUCCIÓN

La función básica del sistema de dirección de un vehículo es girar las ruedas en la dirección deseada. Sin embargo, es interesante observar que cuando se gira el vehículo, las ruedas delanteras no apuntan en la misma dirección.

Para un sistema de dirección adecuado, cada una de las ruedas debe seguir un radio de giro diferente y cuando se dibuja una perpendicular desde el centro de cada rueda; todas las perpendiculares se encontrarán en un solo punto, que se conoce como centro instantáneo.

Teniendo en cuenta que las velocidades angulares de las ruedas traseras interiores y exteriores son diferentes, las ruedas internas deben girar en un ángulo más alto y las ruedas externas deben girar en un ángulo más pequeño mientras el vehículo está girando en condición Ackerman. Considerando que el ángulo de deslizamiento es cero [1].

Para cumplir este objetivo existen varias opciones, la más común, y la única autorizada por la normativa en Europa, es disponer de un mecanismo que transmita al movimiento de giro aplicado al volante del vehículo hasta las ruedas directrices, que, habitualmente, son las dos ruedas del eje delantero [2]. Un ejemplo de este mecanismo se puede ver en la Fig. 1.

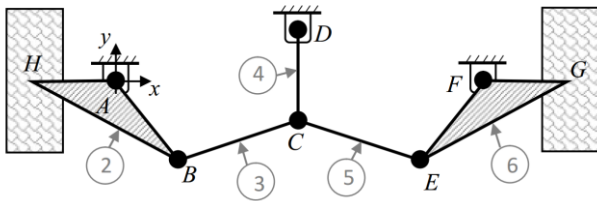


Fig. 1. Mecanismo de Dirección tipo 1.

Si se considera un mecanismo plano, para cumplir el objetivo de minimizar el desgaste de los neumáticos y

maximizar la adherencia, las ruedas directrices de un vehículo deben de tener su centro instantáneo de rotación en el centro de la curva que el vehículo está tomando. Esto implica que el ángulo que debe pivotar la rueda exterior  $\delta_{ext}$  y la interior  $\delta_{int}$  son diferentes como se puede apreciar en la Fig. 2.

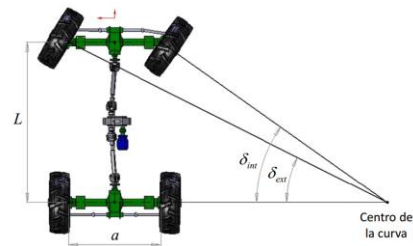


Fig. 2. Ángulos pivotados por los ejes de las ruedas interior y exterior.

Sin embargo, ambos ángulos están relacionados entre sí y con dos dimensiones del vehículo: la distancia entre ejes  $L$  y el ancho entre pivotes de las ruedas  $a$  a través de la conocida como relación de Ackerman (Fig. 2) en (1).

$$\frac{1}{\tan \delta_{ext}} - \frac{1}{\tan \delta_{int}} = \frac{a}{L} \quad (1)$$

Esta relación da lugar a una coordinación entre ángulos de pivotamiento de ruedas como la que se muestra en la Fig. 3, para un valor de  $a = 2000$  y  $L = 5800$ . Esto es imposible de cumplir de manera exacta por un mecanismo plano simple en un rango de giro determinado para las ruedas, pero se pueden conseguir aproximaciones bastante buenas a esta relación teórica con el mecanismo mostrado en la Fig. 1.

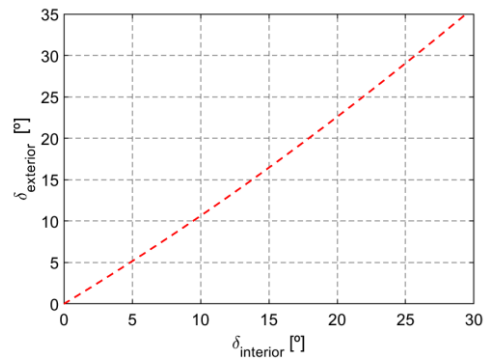


Fig. 3. Relación de Ackerman con  $a=2000\text{mm}$  y  $L=5800\text{ mm}$

Para resolver el problema planteado se utiliza el mecanismo de la Fig. 1, y se procede a realizar el modelado

de síntesis en coordenadas mixtas, considerando explícitamente las constantes dimensionales que definen el mecanismo y ordenándolas en un vector específico.

La organización de este documento tiene el siguiente orden: La sección II define las condiciones de síntesis, tipo, cantidad, variables a las que afectan y restricciones adicionales. La sección III contiene el modelado de la cinemática del mecanismo para síntesis, luego en el apartado IV se presenta la formulación y resolución del problema de síntesis y, finalmente en la sección V se trata la implementación y resultados del problema de síntesis.

## II. CONDICIONES DE SÍNTESIS

Una condición de síntesis es una ecuación de restricción adicional que se impone, habitualmente, sobre las coordenadas que definen la posición del mecanismo. En una posición determinada, se pueden incluir una o varias condiciones de síntesis.

El número de condiciones de síntesis a aplicar en una posición determinada es mayor que el número de coordenadas independientes. Si fuera igual, se estaría ante un problema de análisis cinemático en el que se desconocen las constantes dimensionales. Y si fuera menor, se estaría ante un caso de análisis cinemático de un mecanismo infraactuado y del que, además, se desconocen las constantes dimensionales [2].

En base a lo anterior, se plantea las condiciones de síntesis deseadas  $n_d$  para el mecanismo en estudio (Fig. 1), las cuales se derivan de la relación de Ackerman.

$$\delta_{ext} - \delta_{ext\text{deseado}} = 0 \quad (2)$$

$$\delta_{int} - \delta_{int\text{deseado}} = 0 \quad (3)$$

Entonces,

$$n_d = 2 \quad (4)$$

Y estos datos se conocerán para cinco posiciones de síntesis diferentes del mecanismo, este valor del número de posiciones que se han determinado se explicará más adelante en la sección IV, por facilidad de explicación de este trabajo.

Entonces, el número de posiciones es:

$$n_p = 5 \quad (5)$$

Además, considerando las coordenadas en  $x$ ,  $y$  de los puntos de interés A ( $x_A, y_A$ ), B ( $x_B, y_B$ ), C ( $x_C, y_C$ ), D ( $x_D, y_D$ ), E ( $x_E, y_E$ ), F ( $x_F, y_F$ ) y G ( $x_G, y_G$ ), se definen a continuación las constantes dimensionales del mecanismo; se considera simetría de las longitudes del mecanismo:

$$\mathbf{C} = [x_A \ y_A \ x_F \ y_F \ x_D \ y_D \ L_{AB} \ L_{BC} \ L_{CD} \ \beta]^T \quad (6)$$

De donde se deduce que,

$$n_c = 10 \quad (7)$$

Y, por simetría,

$$L_{AB} = L_{FE} \quad (8)$$

$$L_{BC} = L_{CE} \quad (9)$$

$$L_{AH} = L_{FG} \quad (10)$$

$$L_{HB} = L_{GE} \quad (11)$$

En (6), se observa que  $L_{AH}$  y  $L_{HB}$  que son las distancias entre las ruedas y los pivotes no aparecen como constantes dimensionales, tampoco otras dos de las dimensiones  $L_{HB}$  y  $L_{GE}$ , ya que no intervienen en el cálculo, puesto que es un sólido rígido, del cual únicamente es necesario para el modelado su ángulo denominado como  $\beta$ , que es el ángulo formado entre AH y AB, que se lo utilizará para relacionarlo con las variaciones de  $\delta_{ext}$  y  $\delta_{int}$  esto se puede ver expresado en la Fig. 4.

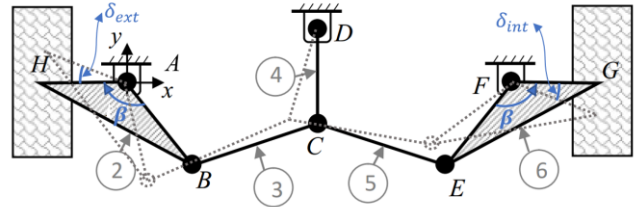


Fig. 4. Mecanismo de Dirección tipo 1 y sus ángulos de interés

De estas constantes dimensionales de la ecuación (6), 5 de ellas son especificaciones y se detallan a continuación en la TABLA I. :

TABLA I. ESPECIFICACIONES DE CONSTANTES

| Parámetro | Valor   |
|-----------|---------|
| $x_A$     | 0 mm    |
| $y_A$     | 0 mm    |
| $x_F$     | 2000 mm |
| $y_F$     | 0 mm    |
| $x_D$     | 1000 mm |

Además, se determina que el ángulo máximo interior a aplicar en la ecuación (1) será de 35 grados

$$\delta_{int\_max} = 35^\circ \quad (12)$$

## III. MODELADO DE LA CINEMÁTICA

El modelado para síntesis es similar al utilizado para análisis cinemático con el matiz de que hay que considerar explícitamente las constantes dimensionales, las cuales son parte de las incógnitas y definen el mecanismo y hay que ordenarlas en un vector específico; para escribir las ecuaciones de restricción que describen las relaciones geométricas invariantes del sistema, se define en (13) un vector en coordenadas mixtas  $\mathbf{q}$ .

$$\mathbf{q} = [x_B \ y_B \ x_C \ y_C \ x_E \ y_E \ \theta_{AB} \ \theta_{BC} \ \theta_{DC} \ \theta_{CE} \ \theta_{FE} \ \delta_{ext} \ \delta_{int}]^T \quad (13)$$

De lo que se determina que,

$$n_q = 13 \quad (14)$$

Una vez declaradas las coordenadas que definen la posición en (13) y las constantes dimensionales en (6), se plantean las ecuaciones de restricción geométrica.

El número de restricciones  $n_r$  es igual a la diferencia entre el número de coordenadas dependientes  $n_q$  y el número de grados de libertad (coordenadas independientes)  $n_g$ .

Para el mecanismo de la Fig.1, se tiene:

$$n_g = 1 \quad (15)$$

$$n_r = n_q - n_g = 12 \quad (16)$$

El número de ecuaciones de restricción a plantear es un total de doce ecuaciones. Para este mecanismo que contiene cinco eslabones se deben cumplir los criterios básicos de la cinemática plana: cada sólido debe contener como mínimo dos puntos básicos, caso contrario, su rotación queda indefinida; en cada par R (revolución) debe situarse un punto básico, entonces, es posible definir un par R con un punto básico en cada eslabón o que ambos eslabones compartan el mismo punto básico [4].

En base a esto, y considerando el giro de cada uno de los ángulos en sentido antihorario, tomando como referencia el plano horizontal, se describen las ecuaciones en (17):

$$\begin{bmatrix} (x_B - x_A) - L_{AB} * \cos \theta_{AB} \\ (y_B - y_A) - L_{AB} * \sin \theta_{AB} \\ (x_C - x_B) - L_{BC} * \cos \theta_{BC} \\ (y_C - y_B) - L_{BC} * \sin \theta_{BC} \\ (x_D - x_C) - L_{DC} * \cos \theta_{CD} \\ (y_D - y_C) - L_{DC} * \sin \theta_{CD} \\ (x_C - x_E) - L_{BC} * \cos \theta_{CE} \\ (y_C - y_E) - L_{BC} * \sin \theta_{CE} \\ (x_F - x_E) - L_{AB} * \cos \theta_{FE} \\ (y_F - y_E) - L_{AB} * \sin \theta_{FE} \\ \theta_{AB} - \delta_{ext} - \beta = 0 \\ \theta_{FE} - \delta_{int} + \beta = 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Una vez definidas estas ecuaciones, ya se puede plantear el problema de Síntesis.

#### IV. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE SÍNTESIS

El problema de síntesis se puede plantear como la resolución del sistema de ecuaciones formado por: las ecuaciones de restricción geométrica (17) y las condiciones de síntesis (2) y (3) en todas las posiciones consideradas del mecanismo. Por esto, esta síntesis dimensional es cinemática y de orden cero ya que únicamente se imponen condiciones en la posición del mecanismo, más no en su velocidad y aceleración.

El número total de ecuaciones considerando (4), (5) y (16) será:

$$(n_r + n_d) * n_p = (12 + 2) * 5 = 70 \quad (18)$$

Dichas ecuaciones se representan en (19) con un subíndice  $i$  que indica cada una de las posiciones, y queda representado cada sistema de ecuaciones de cada posición en un vector  $\Phi_i$ .

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} (x_{B,i} - x_{A,i}) - L_{AB} * \cos \theta_{AB,i} \\ (y_{B,i} - y_{A,i}) - L_{AB} * \sin \theta_{AB,i} \\ (x_{C,i} - x_{B,i}) - L_{BC} * \cos \theta_{BC,i} \\ (y_{C,i} - y_{B,i}) - L_{BC} * \sin \theta_{BC,i} \\ (x_{D,i} - x_{C,i}) - L_{DC} * \cos \theta_{CD,i} \\ (y_{D,i} - y_{C,i}) - L_{DC} * \sin \theta_{CD,i} \\ (x_{C,i} - x_{E,i}) - L_{BC} * \cos \theta_{CE,i} \\ (y_{C,i} - y_{E,i}) - L_{BC} * \sin \theta_{CE,i} \\ (x_{F,i} - x_{E,i}) - L_{AB} * \cos \theta_{FE,i} \\ (y_{F,i} - y_{E,i}) - L_{AB} * \sin \theta_{FE,i} \\ \theta_{AB,i} - \delta_{ext,i} - \beta = 0 \\ \theta_{FE,i} - \delta_{int,i} + \beta = 0 \\ \delta_{ext,i} - \delta_{ext,deseado,i} = 0 \\ \delta_{int,i} - \delta_{int,deseado,i} = 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Siendo  $i$  el valor de cada posición:

$$i = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5] \quad (20)$$

Entonces se define el vector global  $\Phi$  que contiene todas las ecuaciones para todas las posiciones como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

Las incógnitas del sistema de ecuaciones planteado son de dos tipos: coordenadas desconocidas que definen cada posición del mecanismo y constantes dimensionales, ecuaciones descritas en (22).

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $q_1 = \begin{bmatrix} x_{B,1} \\ y_{B,1} \\ x_{C,1} \\ y_{C,1} \\ x_{E,1} \\ y_{E,1} \\ \theta_{AB,1} \\ \theta_{BC,1} \\ \theta_{DC,1} \\ \theta_{CE,1} \\ \theta_{FE,1} \\ \delta_{ext,1} \\ \delta_{int,1} \end{bmatrix}$ | $q_2 = \begin{bmatrix} x_{B,2} \\ y_{B,2} \\ x_{C,2} \\ y_{C,2} \\ x_{E,2} \\ y_{E,2} \\ \theta_{AB,2} \\ \theta_{BC,2} \\ \theta_{DC,2} \\ \theta_{CE,2} \\ \theta_{FE,2} \\ \delta_{ext,2} \\ \delta_{int,2} \end{bmatrix}$ | $q_3 = \begin{bmatrix} x_{B,3} \\ y_{B,3} \\ x_{C,3} \\ y_{C,3} \\ x_{E,3} \\ y_{E,3} \\ \theta_{AB,3} \\ \theta_{BC,3} \\ \theta_{DC,3} \\ \theta_{CE,3} \\ \theta_{FE,3} \\ \delta_{ext,3} \\ \delta_{int,3} \end{bmatrix}$ | $c = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ x_F \\ y_F \\ x_D \\ y_D \\ L_{AB} \\ L_{BC} \\ L_{CD} \\ \beta \end{bmatrix}$ |
| $q_4 = \begin{bmatrix} x_{B,4} \\ y_{B,4} \\ x_{C,4} \\ y_{C,4} \\ x_{E,4} \\ y_{E,4} \\ \theta_{AB,4} \\ \theta_{BC,4} \\ \theta_{DC,4} \\ \theta_{CE,4} \\ \theta_{FE,4} \\ \delta_{ext,4} \\ \delta_{int,4} \end{bmatrix}$ | $q_5 = \begin{bmatrix} x_{B,5} \\ y_{B,5} \\ x_{C,5} \\ y_{C,5} \\ x_{E,5} \\ y_{E,5} \\ \theta_{AB,5} \\ \theta_{BC,5} \\ \theta_{DC,5} \\ \theta_{CE,5} \\ \theta_{FE,5} \\ \delta_{ext,5} \\ \delta_{int,5} \end{bmatrix}$ |   |   |

(22)

Definiendo el vector  $x$  en (23), como la concatenación de todas las ecuaciones de (22):

$$x = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ c]^T \quad (23)$$

Considerando  $\mathbf{x}$  se representa de manera compacta el sistema de ecuaciones como:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (24)$$

Entonces, el número total de incógnitas será el tamaño del vector  $\mathbf{x}$ , y se calcula como:

$$n_q * n_p + n_c = 13 * 5 + 10 = 75 \quad (25)$$

El problema de síntesis planteado tiene las siguientes características, la mayoría de las ecuaciones son de tipo no lineal y es un sistema infradeterminado, puesto que tiene más incógnitas (25) que ecuaciones (18). Para lograr que el sistema sea determinado, y que tenga igual número de ecuaciones que de incógnitas se pueden añadir valores de constantes, sin embargo, se debe considerar que debido a los cinco parámetros mandatorios para este mecanismo, establecidos en la TABLA I. el valor de  $n_c$  queda reducido a  $n_c = 5$ , por lo tanto la única opción que es posible y ya desarrollada en las primeras secciones, es definir el número de posiciones de síntesis, cuyo valor se calculó en base a la siguiente relación, que son las mismas ecuaciones (18) y (25) reordenadas y en igualdad.

$$n_r - n_q = \frac{n_c}{n_p} - n_d \quad (26)$$

$$12 - 13 = \frac{5}{n_p} - 2 \quad (27)$$

El único valor desconocido de la ecuación (26) sería  $n_p$ , el cual, para cumplir la igualdad debe tener un valor de cinco posiciones. Por este motivo y por facilidad de desarrollo de todas las ecuaciones y descripción se empezó ya definiendo inicialmente el número de posiciones de síntesis en la sección II.

Por otro lado, hay que considerar que, aunque el sistema de ecuaciones a resolver sea determinado no quiere decir que tenga solución real ya que se trata de un sistema de ecuaciones no lineal.

Teniendo las ecuaciones, para plantear el problema de síntesis se lo considera muy similar a plantear el problema de la posición, en el cual, se resuelve el problema algebraico utilizando el método iterativo de Newton-Raphson formado por las ecuaciones de restricción geométrica conociendo el valor que toman las coordenadas independientes, el método necesita una aproximación inicial que define el montaje del mecanismo, no suele causar serias dificultades si se comienza con una buena aproximación inicial [3].

Para esto, se define primero a continuación las posiciones de síntesis deseadas en la 0, obtenidas después de evaluar la ecuación de Ackerman (28) para cada ángulo girado por la rueda interior.

$$\delta_{ext} = \tan^{-1} \left( \frac{1}{\frac{a}{L} + \frac{1}{\tan \delta_{int}}} \right) \quad (28)$$

TABLA II. POSICIONES DESEADAS

| $N^\circ$ | $\delta_{ext} [^\circ]$ | $\delta_{int} [^\circ]$ |
|-----------|-------------------------|-------------------------|
| 0         | 0                       | 0                       |
| 1         | 5                       | 4.8543                  |
| 2         | 10                      | 9.4374                  |
| 3         | 15                      | 13.7817                 |
| 4         | 35                      | 29.4240                 |

Estos valores deseados, son en función del giro que queremos para las llantas del vehículo, pero para que todo concuerde con el mecanismo planteado, a los ángulos exteriores se los debe restar de 360 grados y a los interiores, restarlos de 180, para mantener la definición de ángulos desde el plano horizontal en sentido antihorario.

Una vez calculadas las posiciones deseadas, se han encontrado los valores aproximados de las posiciones iniciales para cada una de estas posiciones mediante la ayuda de una herramienta de CAD, todo expresado en milímetros y grados. Y se presenta en la TABLA III.

TABLA III. PARÁMETROS INICIALES PARA CADA POSICIÓN

|                  | P-1     | P-2     | P-3     | P-4     | P-5     |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $x_{B_0}$        | 244.78  | 215.64  | 192.77  | 170.11  | 147.58  |
| $y_{B_0}$        | -250.16 | -275.78 | -292.13 | -305.88 | -317.36 |
| $x_{C_0}$        | 1000    | 975.15  | 948.69  | 921.95  | 894.66  |
| $y_{C_0}$        | -112.49 | -148.97 | -145.54 | -139.67 | -130.90 |
| $x_{E_0}$        | 1755.22 | 1740.36 | 1715.88 | 1690.55 | 1664.12 |
| $y_{E_0}$        | -250.16 | -234.70 | -211.32 | -186.20 | -159.66 |
| $\theta_{AB_0}$  | 312.73° | 308.03  | 303.42° | 299.08° | 294.44° |
| $\theta_{BC_0}$  | 8°      | 9.47°   | 10.97°  | 12.47°  | 14.01°  |
| $\theta_{DC_0}$  | 270°    | 265.25° | 260.15° | 254.92° | 249.44° |
| $\theta_{CE_0}$  | 352°    | 353.61° | 355.10° | 356.54° | 207.14° |
| $\theta_{FE_0}$  | 227.27° | 222.11° | 217.14° | 212.14° | 227.27° |
| $\delta_{ext_0}$ | 0       | 175°    | 170°    | 165°    | 145°    |
| $\delta_{int_0}$ | 0       | 355.15° | 350.57° | 346.22° | 330.58° |

Se puede resolver el problema de síntesis, considerando el número de ecuaciones independientes que hay en cada posición de síntesis, esto se obtiene calculando el rango de la matriz Jacobiano de las ecuaciones de restricción geométrica en cada posición de síntesis. Para esto, se describe a continuación la matriz Jacobiano (adjunta en el Anexo 2).

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} \Phi_{q1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{c1} \\ 0 & \Phi_{q2} & 0 & 0 & 0 & \Phi_{c2} \\ 0 & 0 & \Phi_{q3} & 0 & 0 & \Phi_{c3} \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{q4} & 0 & \Phi_{c4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{q5} & \Phi_{c5} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Entonces, se debe cumplir que:

$$(rango(\mathbf{J}_1) + n_d)_1 + (rango(\mathbf{J}_2) + n_d)_2 + \dots + (rango(\mathbf{J}_5) + n_d)_5 = n_q * n_p + n_c \quad (30)$$

Y considerando la ecuación (24)  $\Phi(x) = 0$ , se puede plantear su resolución expandiendo las ecuaciones en series de Taylor y se despreciando los términos de orden superior, esto es:

$$\Phi(x + \Delta x) = \Phi(x) + J(x) \cdot \Delta x + \varepsilon(O^2) = 0 \quad (31)$$

Despreciando el error de orden superior y premultiplicando por la transpuesta del jacobiano en ambos lados, se obtiene lo siguiente:

$$J^T(x) \cdot (\Phi(x) + J(x) \cdot \Delta x) = 0 \quad (32)$$

$$J^T(x) \cdot \Phi(x) + J^T(x) \cdot J(x) \cdot \Delta x = 0 \quad (33)$$

Y reordenando, se obtiene una expresión iterativa similar a la del método de Newton:

$$\Delta x = -(J^T(x) \cdot J(x))^{-1} J^T(x) \cdot \Phi(x) \quad (34)$$

Y se incluye el subíndice k para indicar la iteración:

$$x_{k+1} = x_k - (J^T(x_k) \cdot J(x_k))^{-1} J^T(x_k) \cdot \Phi(x_k) \quad (35)$$

La matriz para invertir es cuadrada, pero puede dar problemas en configuraciones singulares y con problemas infradeterminados, en ese caso para la resolución se ha utilizado la matriz pseudoinversa.

El proceso de iteración se repite hasta que el error quede por debajo de una tolerancia *tol* definida, siendo para este mecanismo  $1e-8$ .

$$error = \sqrt{\sum_{m=1}^r \dots \Phi_m} < tol \quad (36)$$

Sin embargo, este valor de tolerancia no es muy adecuado, puesto que al ingresar el valor de los ángulos deseados interior y exterior se lo hace en radianes, por lo que una tolerancia de  $1e-8$  es bastante alta o exigente al hablar de un ángulo deseado interior de 35 [grados] / 0.5135 [radianes].

Otra opción, es plantear un problema de minimización, en el cual, es posible que no se pueda conseguir un error nulo en todas las ecuaciones y, por eso, se busca el mínimo

$$\min f(x) \quad (37)$$

Se puede plantear la minimización de la suma cuadrática de los residuos de las ecuaciones del sistema planteado:

$$\min f(x) = \min \frac{1}{2} \cdot \Phi^T(x) \cdot \Phi(x) \quad (38)$$

la obtención del mínimo de esta función de varias variables, bajo el supuesto de que sea continua y derivable, implica buscar el valor para las cuales, el gradiente de la función es nulo:

$$\nabla f(x) = J^T(x) \cdot \Phi(x) = 0 \quad (39)$$

Considerando también que al calcular el gradiente de la función se puede caer en el problema de mínimos locales (5), y el error no es el menor.



Fig. 5. Problema de Mínimos locales.

## V. RESULTADOS E IMPLEMENTACIÓN EN MATLAB

Para ver cuál es la respuesta de nuestro mecanismo y encontrar las constantes dimensionales, se han programado todas las ecuaciones en funciones en MATLAB. A continuación, se mostrará en diagramas de flujo los programas implementados.

### A. Implementación

Se presenta en la Fig. 6 un diagrama de Flujo de la estructura de resolución de la síntesis dimensional del mecanismo.

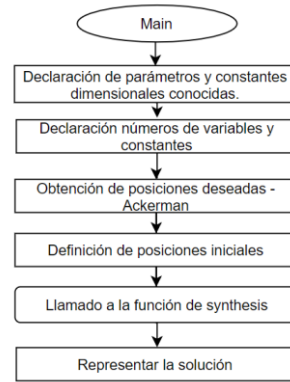


Fig. 6. Diagrama de Flujo - Implementación Matlab - Main.

*Synthesis*, es la función que resuelve la síntesis dimensional del mecanismo mediante el método de Newton, tiene el siguiente diagrama de flujo.

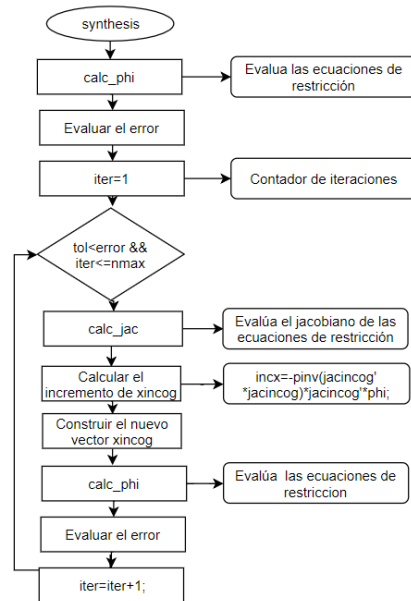


Fig. 7. Diagrama de Flujo - Implementación Matlab - Synthesis.

De lo anterior,  $\text{calc\_phi}$  y  $\text{calc\_jac}$ , son las funciones que contienen el conjunto de ecuaciones de restricción y su respectivo jacobiano.

### B. Resultados Obtenidos

En primer lugar, se muestra a continuación en la TABLA IV. las constantes dimensionales desconocidas que el mecanismo ha calculado.

TABLA IV. CONSTANTES DIMENSIONALES RESULTANTES

| Parámetro | Valor     |
|-----------|-----------|
| $y_D$     | 239.84 mm |
| $L_{AB}$  | 332.76 mm |
| $L_{BC}$  | 930.5 mm  |
| $L_{CD}$  | 389.17 mm |
| $\beta$   | 104.85 °  |

Todas las constantes dimensionales son positivas, sin embargo, se podía haber hecho la introducción de condiciones para limitar el rango de las incógnitas, los valores son aproximados a los que se esperaba obtener según las aproximaciones iniciales dadas.

En la Fig. 8 se representa la primera posición de síntesis para un ángulo interior deseado de cero grados, siendo cero grados también el exterior, cuando se considera que el vehículo está con la dirección sin girar; además, se ha asumido para cuestión del gráfico una distancia  $L_{AH} = L_{FG} = 200 \text{ mm}$ , y se aprecia que el mecanismo cumple sin problema esta primera condición, obteniendo la posición deseada.

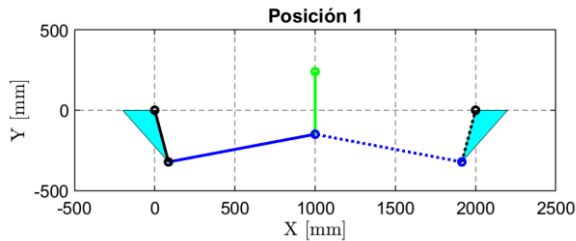


Fig. 8. Primera posición de síntesis.

En la Fig. 9 se representa la segunda posición de síntesis para un ángulo interior deseado de cinco grados.

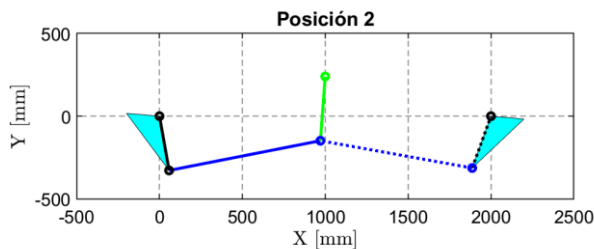


Fig. 9. Segunda posición de síntesis.

En la Fig. 10 se representa la tercera posición de síntesis para un ángulo interior deseado de diez grados.

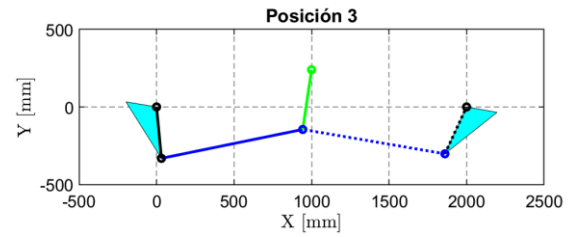


Fig. 10. Tercera posición de síntesis.

En la Fig. 11 se representa la cuarta posición de síntesis para un ángulo interior deseado de quince grados.

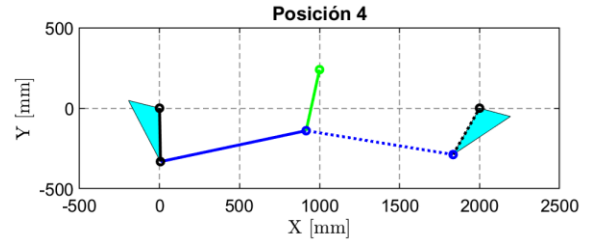


Fig. 11. Cuarta posición de síntesis.

En la Fig. 12 se representa la quinta posición de síntesis para un ángulo interior deseado de treinta y cinco grados.

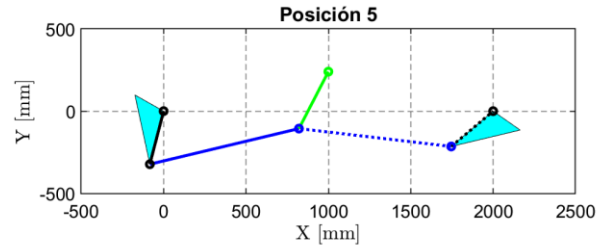


Fig. 12. Quinta posición de síntesis.

Por último, es en la curva de error en donde se puede apreciar lo mencionado en la sección IV, el error no llega totalmente a un valor de cero, se llega a un valor mínimo de 0.00167. Lo que indica que no se cumple de manera exacta la solución, sin embargo, esto se justificó previamente por el valor de tolerancia al trabajar en radianes, y además que es un mecanismo complejo que al tener varias posiciones de síntesis le cuesta cumplirlo.

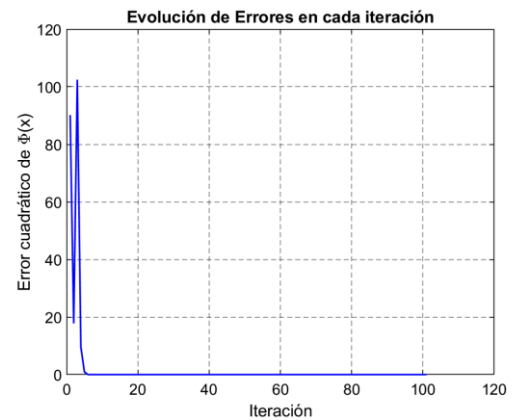


Fig. 13. Error cuadrático de  $\Phi$  en cada iteración.

Por último, se muestra en la Fig. 14, la curva de la referencia de los valores de Ackerman deseados, versus la



curva obtenida por el mecanismo desarrollado en este trabajo, en la cual se determina que el mecanismo cumple adecuadamente el objetivo deseado.

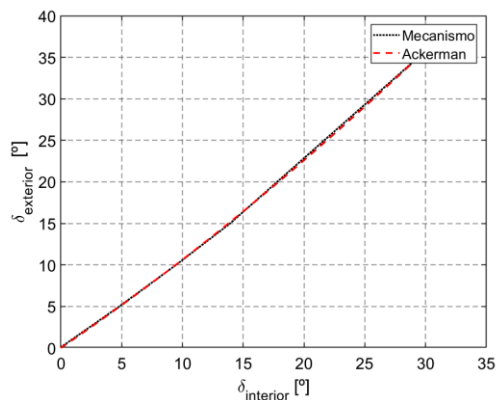


Fig. 14. Ackerman deseado vs Ackerman del Mecanismo.

## VI. CONCLUSIONES

La síntesis dimensional desarrollada en este trabajo es una síntesis cinemática de orden cero ya que únicamente se impusieron condiciones en la posición del mecanismo, más no en su velocidad y aceleración; y en este mecanismo de la dirección al tener un solo grado de libertad y ser un mecanismo plano resultó más fácil actuar sobre sus dimensiones y no como es en el caso del enfoque de la robótica que en sistemas con más grados de libertad, es más fácil actuar sobre los GDL y no sobre sus dimensiones.

En este problema de síntesis dimensional para su modelado fue necesario establecer las coordenadas que definen la posición y las constantes dimensionales, las cuales se volvieron parte de las incógnitas; y además se impusieron las condiciones de síntesis como ecuaciones de restricción adicional sobre las coordenadas que definen la posición.

Cuando se tiene un problema de síntesis cuyo planteamiento es un sistema infradeterminado, y se quiere tener uno determinado, hay dos opciones para solucionarlo, la primera es añadir valores de constantes en la cantidad necesaria para hacerlo determinado, y la otra opción, optada en el desarrollo de este trabajo es plantear el número suficiente de posiciones de síntesis.

Este problema de síntesis es un ejemplo de que no fue posible conseguir un error nulo en todas las ecuaciones, debido a que posiblemente la tolerancia es no es muy adecuada, puesto que al ingresar el valor de los ángulos deseados interior y exterior en radianes, esta tolerancia de  $1e-8$  es bastante alta o exigente al hablar de un ángulo deseado interior máximo de 0.5135 [radianes], e incluso al plantear la minimización y hacer que el gradiente sea cero se puede caer en un problema de mínimos locales.

En este mecanismo de dirección finalmente se cumplió las condiciones de síntesis deseadas, se pudo ver en la sección de resultados, en la comparación con la curva de Ackerman, que

se cumple lo esperado, el error a pesar de que no llega a cero de manera exacta tiene un valor aceptable en orden de 0.00166 radianes, que son 0.0951 grados.

## RECONOCIMIENTO

Se agradece el apoyo proporcionado a la Universidad de Oviedo para el desarrollo de este trabajo, sobre al docente de esta asignatura “Síntesis y Simulación de Mecanismos” que nos ha dado su tiempo y dedicación para poder llegar a culminar con éxito.

## REFERENCIAS

- [1] P.L. Ramalingam, M. Prabhu, S. Subramanian and R. Vigithra, “Implementation of Variable Turning Radius by Combining Ackermann and Reverse Ackermann Mechanism”, Panimalar Institute of Technology, TN, India. Disponible en: [https://www.idosi.org/mejsr/mejsr24\(S1\)16/40.pdf](https://www.idosi.org/mejsr/mejsr24(S1)16/40.pdf)
- [2] A. Noriega, “MUIM SySM 2018-2019 - Síntesis dimensional de mecanismos-v3”, Síntesis y simulación de mecanismos- Material de Clase, 2018, pp.1-50.
- [3] A. Noriega, “MUIM SySM - Modelado y simulación cinemática 2018-2019”, Síntesis y simulación de mecanismos- Material de Clase, 2018, pp.1-48.
- [4] J. García; E. Bayo, “Kinematic and dynamic simulation of multibody systems”, University of Navarra, San Sebastian, Spain Cap.1-7.

## ANEXOS

### ANEXO. 1: SÍNTESIS DE LA DIRECCIÓN

- calc\_jac.m
- calc\_phi.m
- def\_incog .m
- dib\_mec.m
- djacphi\_2D\_2p.m
- djacphi\_2D\_adhoc1.m
- djacphi\_2D\_coord .m
- insert.m
- jacphi\_2D\_2p.m
- jacphi\_2D\_adhoc1.m
- jacphi\_2D\_adhoc2.m
- jacphi\_2D\_coord.m
- main.m
- phi\_2D\_2p.m
- phi\_2D\_adhoc1.m
- phi\_2D\_adhoc2.m
- phi\_2D\_coord.m
- selec\_row.m
- selec\_var.m
- synthesis.m
- Trayectoria.m

### ANEXO. 2: CÁLCULO DEL JACOBIANO EN MATLAB

- Calculo\_del\_Jacobiano.m

### ANEXO. 3: EXTRAS

- Implementation of Variable Turning Radius by Combining Ackermann and Reverse Ackermann.pdf
- Mecanismo en Solidworks.sldprt
- DIAGRAMAS DE FLUJO.drawio