AlDa UB

03

② Bestimmung von π über Archimedes

a) s. "archimedes.py"

b)
- Zu Beginn Konvergenz gegen π erkennbar
- Ab n=32768, wenn achte auf die 8. Nachkommastelle, bewegen sich beide Zahlen wieder von π weg.

8. Nachkommastelle

π =0,000 265359 und

n	s_n	t_n
16384	0,000 263346	0,000 269 096
32768	0,000 265480	0,000 267557
65536	0,000 264532	0,000 269096

- Erklärung liefert das Phänomen der Auslöschung. Die Ungenauigkeit einer Differenz zweier fast gleich großer Gleitkommazahlen aufgrund von Rundungsfehlern

<u>Hier:</u> $2 - \sqrt{4 - s_n^2}$ bzw. $\sqrt{4 + t_n^2} - 2$

- Die Näherungen werden letztendlich sogar falsch Bsp. $t_{134217728} = 2{,}6198$

c)

Es gilt nach Binomi: $a - b \overset{\circledast}{=} \dfrac{a^2 - b^2}{a+b}$, d.h.

$$s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2} \overset{\circledast}{=} \frac{4 - 4 + s_n^2}{2 + \sqrt{4 - s_n^2}} \Rightarrow s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}$$

$$t_{2n} = \frac{2}{t_n}\left(\sqrt{4 + t_n^2} - 2\right) \overset{\circledast}{=} \frac{2}{t_n} \cdot \frac{4 + t_n^2 - 4}{\sqrt{4 + t_n^2} + 2} = \frac{2 t_n}{\sqrt{4 + t_n^2} + 2}$$

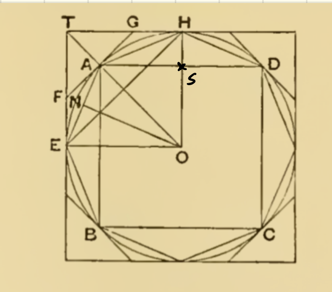
- Neue Formel benutzen, die Addition genutzt wird, statt zwei fast gleich große Gleitkommazahlen zu subtrahieren.

- zusätzliche Dezimalstellen von π: pro Verdopplung ca. 1,75 korrekte Dezimalstelle

```
n = 8, n/2*s_n = 3.0614674589207183, n/2*t_n = 3.3137084989847607, n/2*(t_n - s_n) = -0.25224104006404247
n = 16, n/2*s_n = 3.1214451522580524, n/2*t_n = 3.1825978780745285, n/2*(t_n - s_n) = -0.06115272581647613
n = 32, n/2*s_n = 3.1365484905459393, n/2*t_n = 3.151724907429256, n/2*(t_n - s_n) = -0.01517641688316612
n = 64, n/2*s_n = 3.140331156954753, n/2*t_n = 3.1441183852459047, n/2*(t_n - s_n) = -0.003787228291151745
n = 128, n/2*s_n = 3.141277250932773, n/2*t_n = 3.1422236299424573, n/2*(t_n - s_n) = -0.0009463790096844171
n = 256, n/2*s_n = 3.1415138011443013, n/2*t_n = 3.141750369168967, n/2*(t_n - s_n) = -0.00023656802466565097
n = 512, n/2*s_n = 3.141572940367092, n/2*t_n = 3.141632080703183, n/2*(t_n - s_n) = -5.9140336091001444e-05
n = 1024, n/2*s_n = 3.14158772527716, n/2*t_n = 3.1416025102568104, n/2*(t_n - s_n) = -1.4784979650350749e-05
n = 2048, n/2*s_n = 3.1415914215112, n/2*t_n = 3.1415951177495907, n/2*(t_n - s_n) = -3.696238390471507e-06
```

Die Pfeile markieren die korrekte Nachkommastellen.
Im Schnitt werden $(2\cdot 1+1+1+3)/4 = 1{,}75$ Verdopplungen benötigt.

d)



I Strahlensatz: $\frac{\frac{t_n}{2}}{1} = \frac{\frac{s_n}{2}}{OS}$

II Pythagoras $\overline{OS}^2 = 1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 \Rightarrow OS = \sqrt{1-\left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$

$\xrightarrow[\text{mit 2 erweitern}]{\text{I in II}}$ $t_n = \frac{2 s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}$

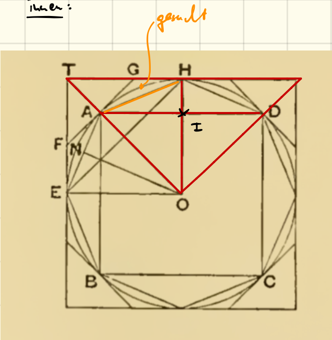
Auch hier kann es auch zu Rundungsfehlern, weshalb wie in a) angewandt den Fehler durch eine truncate Funktion auf die kritische Stellen gelegt hat.
[Definitiv nicht die schönste (bzw. richtige) Lsg.]

So kommt man zu dem Ergebnis, dass bei $n = 65536$ die Werte für archimedes1() im Gegensatz zu archimedes2() nicht mehr mit der Ungleichheitsformel übereinstimmen.

Ohne die Truncate-Funktionalität schlägt der Test bereits bei $n=16$ fehl.

Zusatzaufgabe:

Innen:



Anmerkung: Die ausgewählte Geometrie ist unabh. von Grad des Vielecks

Es gilt:

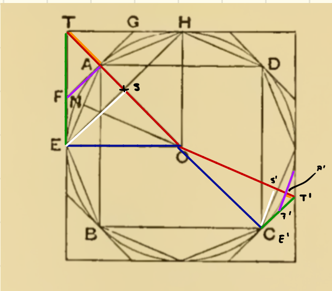
$$\text{I} \quad s_n = \overline{AD} \quad \rightarrow s_{2n} = \overline{AH}$$

$$\text{II} \quad \overline{AH}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{IH}^2 \quad \wedge \quad \overline{OI}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{AI}^2 = 1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad s_{2n}^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + \left(1 - \overline{OI}\right)^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

Außen:



Wir versuchen zu verifizieren, dass die gegebene Formel gilt:

$$\text{gegeben:} \quad t_{2n} = \frac{2}{t_n}\left(\sqrt{4 + t_n^2} - 2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{t_{2n}}{2} = \frac{1}{t_n}\left(2\sqrt{1 + \left(\frac{t_n}{2}\right)^2} - 2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{t_n}{2}\,\frac{t_{2n}}{2} = \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{t_n}{2}\right)^2}}_{=\overline{OT}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad TE\ FA = TA$$

Aus den Strahlensatz folgt $\frac{FA}{SE} = \frac{TA}{TS}$, was bedeutet, dass $TE \overset{!}{=} \frac{TS}{SE}$

- im Falle des Vierecks aufgrund des gleichseitigen Dreiecks (TES) ersichtlich
- ? leider ist dies im Falle d. 8-Ecks (T'E'S') nicht so offensichtlich, weshalb die Beziehung nicht für allg. n-Ecke gezeigt werden konnte