Négykerekű járművek navigációs problémáinak megoldása

Tóth Péter

1. A megoldandó probléma

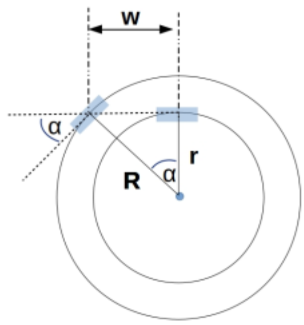
Négykerekű járművek navigálási problémáinak részletes leírása. Feltételezzük, hogy a térkép felülnézetből ismert. Az optimalizálás célja azon navigációs műveleteknek a meghatározása, amely segítségével a jármű adott pozícióból a térkép járható területein keresztül el tud jutni a célként megadott pozícióba. Fel kell írni az optimalizálási feladatokat különböző célfüggvények figyelembevételével. Meg kell jeleníteni az algoritmus által adott útvonalakat. Az optimalizálási probléma megoldása Python programozási nyelven történik a NumPy függvénykönyvtár felhasználásával.

2. Kétkerekű modell kanyarodási íve

A kétkerekű (bicikli) modell kanyarodási ívének meghatározása 2 dologtól függ:

- a tengelytávolságtól (w),
- az első kerék kanyarodási szögétől (α).

Az első és hátsó kerekek is egy-egy körpályát fognak követni azonos középponttal. Az irány mindig merőleges a sugárra.



1. ábra. Kétkerekű jármű kanyarodási íve

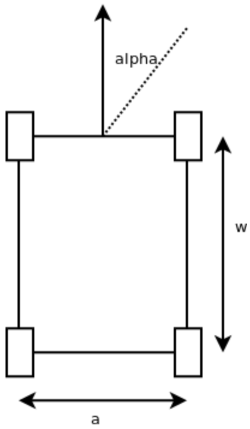
Az ábrán R az első kerékhez tartozó sugár, r pedig a hátsó kerékhez.

Az első kerék pályája: $\sin\alpha = \dfrac{w}{R}$ —> $R = \dfrac{w}{\sin\alpha}$

A hátsó kerék pályája: $\tan\alpha = \dfrac{w}{r}$ —> $r = \dfrac{w}{\tan\alpha}$

3. A jármű matematikai modellje

A négykerekű jármű középpontjának a hátsó tengely középpontját tekintjük. Mivel a kanyarodásnál az első kerekek különböző szögeket zárnak be az első tengellyel, ezért érdemes egy képzeletbeli, az első tengely közepére eső kormányozható kereket megadni. Ennek a jármű irányával bezárt előjeles szögét jelöljük α-val. A jármű tengelytávolságát jelöljük w-vel, a hátsó tengely hosszát pedig a-val (2. ábra).



2. ábra. A jármű matematikai modelljének fő paraméterei

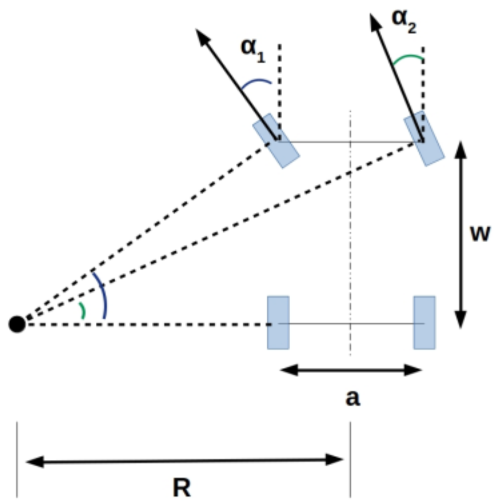
4. Első kerekek elfordulási szögének kiszámítása

Az α szög függvényében külön ki kell számítanunk a jármű bal és jobb első kerekének elfordulási szögét. Tehát első lépésben határozzuk meg az adott α szög ismeretében a további számításokhoz szükséges sugarat, melyet a 3. ábrán R jelöl. Ez a kanyarodási sugár, melyet a jármű középvonalához mérünk. Az ehhez szükséges képlet:

$$R = \frac{w}{\mathrm{tg}\alpha}$$

Továbbiakban a jelölések ugyanazok, az első kerekeket tekintve pedig α_1 a belső, α_2 pedig a külső kerék elfordulási szögét jelöli. A jármű tengelytávolsága, valamint szélessége, és a sugár ismeretében ezen két szög a következőképpen számítható ki:

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{w}{R - \frac{a}{2}}\right) \qquad \alpha_2 = \arctan\left(\frac{w}{R + \frac{a}{2}}\right)$$



3. ábra. Első kerekek elfordulási szögei

5. Pozíció számítása rögzített α mellett

A rögzített α szög, és adott sebesség mellett ki kell tudnunk számolni, hogy adott (x_0, y_0) kiindulópontból indulva a jármű milyen pozícióba fog kerülni t idő elteltével. Az α szög függvényében az alábbi módon számolhatjuk ki annak a képzeletbeli körnek a sugarát (R), amelyen a jármű majd kanyarodni fog:

$$R = \frac{w}{\mathrm{tg}\alpha},$$

ahol a w a jármű tengelyei közötti távolságot jelöli.

Tegyük fel, hogy a jármű sebessége v. Ekkor t idő függvényében a jármű pozícióját az alábbi formában számolhatjuk:

$$x(t) = x_0 + R - R \cdot \cos \frac{v \cdot t}{|R|},$$

$$y(t) = y_0 + |R| \cdot \sin \frac{v \cdot t}{|R|}.$$

6. Útvonal meghatározása az eltelt idő függvényében

$\vec{v} \in \mathbb{R} \quad -> \quad \vec{v}(t) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

Elfőrdulás: $\varphi(t) \quad -> \quad \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{bmatrix}$

$\vec{x_0}$: kezdőpozíció

Egy egységnyi idő elteltével az irány: $\vec{x}(t_1) = \vec{x_0} + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)dt$

Általános alak: $\vec{x}(t) = \vec{x_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(u)du$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{bmatrix} dt$$

Külön a két vektort leintegráljuk:

$$x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \cos(\varphi(t))dt$$

$$y_1 = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \cos(\varphi(t))dt$$