多元函数积分学

这部分内容考试中主要是以计算为主和一部分很难的证明题，所以首先需要做的是搞清楚所有的积分类型，以及每种积分的计算方法，这样在后面复杂的第二类曲线曲面积分中也能很好地完成任务。

小小地对积分做一个总结：

积分的计算和证明首先要明确积分类型，所有的积分类型：定积分、二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分、第二类曲线积分、第二类曲面积分，其中第二类曲面积分和二重积分不是很好区分，因为题目里面不会给你很明显地写出积分的微元是不是矢量，所以有时候还要看看被积函数里面有没有$\cos\alpha$之类的东西。

之后就比较清晰了，如果是二重积分，首先看看积分区域，根据积分区域进行分类，之后还可以考虑进行坐标系的转换。如果是三重积分，和二重积分一致，先想办法转化成定积分或者二重积分，如果不好处理也是进行坐标系的转换。如果是第一类曲线或者第一类曲面，首先想的应该是使用投影法进行转换，把这些积分转换成对应的点函数积分。如果是第二类曲线积分，首先是看看区域中有没有缺点，之后再按照顺序考虑格林公式、定理 10.1、积分与路径无关。第二类曲面积分也是一样的。最后就是 Stokes 定理在使用的时候，主要是考虑空间曲线积分与路径无关。

一、 计算内容

1.1 二重积分的计算

1.1.1 概念

定义

P.132 定义 9.2 设二元函数$f(P)=f(x,y)$在平面有界闭区域σ上有界，用曲线网将区域σ任意分成n个（彼此无公共内点的）小区域$T:\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2,\cdots \Delta\sigma_n$,仍以$\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$记为小区域$\Delta\sigma_i$的面积. $\forall P_i(x_0,y_0)\in\sigma_i$， $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$称为积分元,而$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$称为积分和式.设$\lambda_i$是$\Delta\sigma_i$的直径.$\lambda=max\{\lambda_i:1\le i\le n\}$.若极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在且此极限与区域$\sigma_i$的分法及点$P_i$的取法无关，则称这个极限值为函数$f(x,y)$在区域$\sigma$上的二重积分，

记作$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)d\sigma$或$\int\limits_{\sigma} f(P)d\sigma$,即

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \qquad (9.3)$$

这里$f(P)=f(x,y)$称为被积函数，σ称为积分区域，$f(x,y)d\sigma$称为被积表达式，x,y称为积分变量，$d\sigma$称为面积元素（注意：元素是没有大小的），二重积分又称为函数$f(x,y)$在σ上的黎曼积分.若这个积分存在时，称函数$f(x,y)$在σ上黎曼可积，或简称可积.

P.133 定理 9.1 若$f(x,y)$在有界闭区域σ上连续,则$f(x,y)$在σ上可积.

性质：同定积分的八大性质

注：这里会出一些考察定义概念的证明题，需要和上学期的积分证明题那样灵活应用积分的八大性质（其中最常用的是积分中值定理）

1.1.2 计算

在开始之前，我希望我们能够达成一个共识——二重积分计算最难的部分不是积分，而是您可能最瞧不起的一个地方，积分上下限的问题。这个问题在之后的内容中比较重要，我们主要是用 Fubini 定理把二重积分转化成累次积分，上下限问题就是最重要的一部分。

1．基本运算方法（直角坐标系）：

步骤 1：把积分区域σ写成集合的形式，从而确定积分区域的类型（必要时需要画

出积分区域σ的样子）

步骤 2：根据集合形式写出积分的表达式

$$D=\{(x,y):\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),a\le x\le b\}\Rightarrow\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$$ x 型区域

$$D=\{(x,y):\varphi_1(y)\le x\le\varphi_2(y),a\le y\le b\}\Rightarrow\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}f(x,y)dx$$ y 型区域

注意事项：

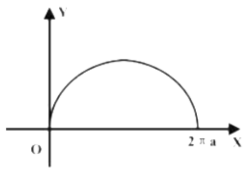
1. 一定记住，二重积分不是硬着头皮积分的，看到积分形势不对要赶紧放掉，换思路。一般是交换积分顺序（题目中如果直接考察一个二重积分，一定是交换积分顺序）
2. 如果σ是一个一般区域，那么我们必须画出图之后分割该区域，分化成 x 型区域或者 y 型区域
3. 善用二重积分的几何意义来计算积分：$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi}{4}a^2$

2. 积分区域的特殊表现形式

（1）积分区域使用参数方程表示：

先正常地按照一般式写出累次积分的表达式，计算的时候把参数的形式一股脑地代入这个积分式就行了。

2、积分区域的边界用参数方程表示



例 4 计算 $\iint\limits_\Omega y^2dxdy$. 设 Ω 是由x轴和摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$的第一拱所围成的区域.

解：$\Omega=\{(x,y):0\le y\le y(x),0\le x\le 2\pi a\}-x$型

$$\iint\limits_\Omega y^2dxdy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}y^2\,dy=\int_0^{2\pi a}\left[\left(\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^{y(x)}\right]dx=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi a}y^3(x)dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3a(1-\cos t)dt=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4dt=\frac{16a^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^8u\cdot 2du$$

$$=\frac{32a^4}{3}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8udu=\frac{64a^4}{3}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{35}{12}\pi a^4$$

（2）积分区域使用隐函数表示：

P.142 例 5　求曲线$(x-y)^2+x^2=a^2(a>0)$所围平面围形的面积.

分析：积分区域σ难以画图

解:$\sigma=\{(x,y): x-\sqrt{a^2-x^2}\le y\le x+\sqrt{a^2-x^2}, -a\le x\le a\}-x$型则:

$$S=\iint_{\sigma} d\sigma=\int_{-a}^{a}dx\int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}}dy=\int_{-a}^{a}2\sqrt{a^2-x^2}dx=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot a^2=\pi a^2.$$

（3）积分区域既是 x 型又是 y 型：

这种时候按照哪个好算就算哪个的思路走，注意交换积分顺序。

Step 1 根据题目，将积分区域σ写成集合表示形式，从而确定区域的类型（可以的话，画出积分区域σ）。

Step 2 若σ是x型区域，按公式（9.3），

若σ是y型区域，按公式（9.4）。

若σ既是x型又是y型区域，选择较方便的一种计算。

Step 3 若σ是一般区域，可以将σ分成几个部分区域，使得每一个部分区域或是x型区域或y型区，然后化成部分区域上积分之和。

3　极坐标下计算二重积分

（1）区域划分

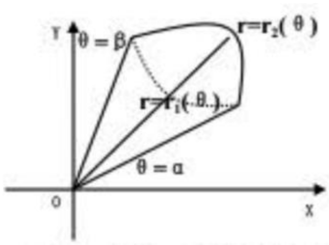
θ 型区域：$\sigma=\{(r,\theta): r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta), \alpha\le\theta\le\beta\}$，　$f(x,y)d\sigma=f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$

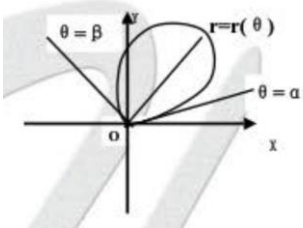
若极点在区域外部：$\iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma=\int_{\alpha}^{\beta}d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

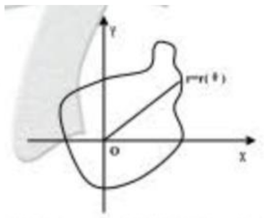
若极点在区域边界：$\iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma=\int_{\alpha}^{\beta}d\theta\int_{0}^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

若极点在区域内部：$\iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma=\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

省流版：在区域范围内，过极点做一个射线，这条射线穿过区域σ，穿入点极径为下限$r_1(\theta)$，传出点极径为上限$r_2(\theta)$，下面的三张图是对上面三种区域的上下限的具体划分，







r 型区域：$\sigma=\{(r,\theta):\theta_1(r)\le\theta\le\theta_2(r), r_1\le r\le r_2\}$

上下限的确定——过极点做一系列半径为 r 的同心圆，同心圆沿着逆时针方向，进入区域的部分随着不同的 r 构成小角曲线 $\theta_1(r)$，穿出点随着不同的 r 构成大角曲线 $\theta_2(r)$，这就是这个区域积分的上下限。

积分公式：$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)d\sigma=\int_{r_1}^{r_2} rdr\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta$

（2）注意事项：

1.最好熟悉一些基本的曲线在直角坐标系和极坐标系下的转换

2.积分区域是圆域的时候要各外小心，不要粗心搞错上下限。

3.经典问题——不要忘记交换积分上下限!!!

4.积分式中稍微有一点区别就是注意有一个 r 的额外乘区。

4　一般曲线坐标系下的计算

积分公式：$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases} \Rightarrow \iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma=\iint f(x,y)\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$

将 (x,y) 转化成 (u,v) 之后，把 (u,v) 看作新的直角坐标系，使用经典方法就行，核心问题还是积分上下限的确定。

注意：

1.考试前需要记忆一些简单的基本的积分因子。

2.还是经典问题：记住使用交换积分上下限。

1.2 三重积分的计算

1.2.1 直角坐标系下的计算

1、投影法（把三重积分转化为二重积分进行计算）

使用条件：积分区域是一个柱体（平行于 oz 轴的直线与边界曲面最多两个交点）

下面我们以轴线是 oz 轴的柱体进行解释：

积分公式：

$$\sigma_{xy}\text{是}x\text{型}:\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dV=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

$$\sigma_{xy}\text{是}y\text{型}:\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dV=\int_c^d dx\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

问题还是怎么确定积分上下限，这时候我们就需要做一条平行于柱体轴线正方向的射线，穿入的点构成的曲面是下限面 $z_1(x,y)$，穿出点构成的曲面是上限面 $z_2(x,y)$。

解题步骤：

Step1 确定上下（前后、左右）曲面得到：$z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)$

Step2 确定投影到坐标平面上投影区域σ_{xy}（σ_{yz}、σ_{zx}）（x、y型、极坐标等）

2、平面切割法（把三重积分转化为定积分计算）

使用条件：积分区域的截面面积很容易计算。

积分公式：$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dV=\int_c^d dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)d\sigma$

温馨提示：不要忘记交换积分顺序，这里在交换的时候可以自己先把积分的区域写成集合的形式之后再进行交换这样不会出错。

1.2.2 球面&柱面坐标系下的计算

柱面坐标变换和积分公式：（你会发现这个其实和投影法的方法是一样的，其中二重积分的部分使用了极坐标系的计算）

$$\text{坐标变换}\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$$

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{V} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdrd\theta dz$$

Step1 求出V在Oxy平面上的投影区域σ_{xy}用r,θ不等式来表示

Step2 确定上、下曲面，并表示成r,θ的函数.

球面坐标变换和积分公式：（这个比较难以理解，主要问题还是上下限难以确定，这也是我们后面要核心讨论的问题）

$$\text{坐标变换}\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$$

积分公式：$\iiint_V f(x,y,z)dV=\iiint_V f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\varphi d\theta d\rho$

现在我们的问题就是处理上下限的问题，首先是角度θ这是经度角，一般都是转一圈，或者是其他的常数上下限，这一般是针对旋转体我们才使用的球坐标系，不然我们干嘛用这个对不对。下面是ρ和φ这两个量，它们的确定是这样做的，首先取出一个旋转的截面，我们一般是取 yoz 平面，之后在这个平面上去找出这两个量的上下限，怎么找其实就和极坐标系上找上下限的方法是一样的了，所以问题的关键是取出这个 YOZ 的截面，之后再处理。

1.2.3 一般坐标系

坐标变换：$\begin{cases} x=x(u,v,w) \\ y=y(u,v,w) \\ z=z(u,v,w) \end{cases}$

雅可比行列式 $J=\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$（注意灵活应用反函数组的雅可比行列式的性质）

积分公式：$\iiint_V f(x,y,z)dV=\iiint_V f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|J\right|dudvdw$

老问题：上下限，这个上下限的确定其实和二重积分里的一样，把新的u,v,w都当作平面直角坐标系的处理就行，对新的区域方程处理即可。

1.3 点函数积分

这部分内容其实没什么东西，因为下面的内容全部都是矢值函数的积分问题了，算是一个分界线和小总结吧。

这节内容告诉我们一个很重要的事情：

在计算点函数积分的时候一定要灵活应用对称性，这一点很重要，尤其是当函数是中心对称或轴对称，积分区域也是有对称性的时候，这一点会使得计算大幅简化。

这个怎么用呢？其实很简单，你看看大学物理静电场求解那块怎么用的对称性，这里就是一模一样的使用方法。

对称性，切记！！好多次都考过。

1.4 第一类曲线积分的计算

1.4.1 理解

什么是第一类曲线积分？数学形式上有什么特点呢？我下面给出了很多第一类曲

线积分的形式，你会发现第一类曲线积分的积分微元是曲线上的弧段，而不是坐标轴上的直线段。

1.4.2 各种曲线方程的计算

1.空间曲线的参数方程

$$\int_{\Omega} f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt$$

2.平面曲线的参数方程

3.平面极坐标方程

$$\int_{\Omega} f(r,\theta)ds=\int_{\alpha}^{\beta} f(r,\theta)\sqrt{r^2 + r'(\theta)^2}d\theta$$

4.一般式方程

把其中的一个元当作参数，即可转化成 1 的形式。

1.5 第一类曲面积分的计算

其实第一类曲面积分也是一样，区别就在于微分元不是二重积分中的坐标平面上的面积元，而是曲面上的曲面元。

处理的思路都是一样的，就是投影到坐标平面上去。

1.空间隐式方程：

$$z = z(x,y)$$

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma = \iint_S f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}d\sigma_{xy}$$

2.空间显式方程：

$$F(x,y,z) = 0$$

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma = \iint_S f(x,y,z)\frac{\sqrt{F'_x + F'_y + F'_z}}{|F'_z|}d\sigma_{xy}$$ （可以不用记公式，用 1 推导就行）

1.6 第二类曲线积分的计算

1.6.1 理解

什么是第二类曲线积分，这个问题我们就需要和第一类曲线积分对比了，第一类曲线积分中积分的式子都是数值，也就是被积函数是点函数，积分元是没有方向而言的线段（弧线段）。但是第二类不一样了，第二类曲线积分的被积函数是一个矢值函数（本质上是一个向量），积分元是一个向量元素，这两者的点积的求和就是第二类曲线积分。

1.6.2、计算方法

1、定义法计算

$$\int_{\Gamma_{AB}} \vec{A}\cdot d\vec{s}(\text{II}) = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{A}\cdot \vec{T}_0 ds(\text{I})$$

$$= \int_{\Gamma_{AB}} Pd\vec{x} + Qd\vec{y} + Rd\vec{z}(\text{II}) = \int_{\Gamma_{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds(\text{I})$$

$\vec{T}_0$是Γ的切矢量

定义法的计算就是把第二类曲线积分手动分段后去掉方向，转化成第一类曲线积分。

如果是第一行的内容，就要先转化成第二行的部分，再处理成第一类曲线积分。

2、使用定理 10.1 进行计算：

P.195 定理 10.1 设光滑曲线Γ_{AB}方程: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $\begin{pmatrix} 点A \leftrightarrow t_A \\ 点B \leftrightarrow t_B \end{pmatrix}$

（t_A、t_B谁大谁小不受限制），$\vec{A}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$中

P, Q, R在Γ上连续,

$$原式 = \int_{t_A}^{t_B} \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t) + R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt$$

3、使用格林公式进行计算：

使用条件：P，Q 一阶偏导连续，D 是闭区域。

格林公式：$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint\limits_\Gamma Pdx + Qdy$

使用技巧：自己补充一条方便计算的路径构成格林公式的使用条件，最后套用公式计算即可。

4、使用定理 10.3 计算（曲线积分与路径无关）

P.204 定理 10.3 设$D \subset R^2$是单连通区域，若函数P, Q在有界闭区域D内连续，且有一阶连续偏导数，则以下四个条件等价:

(1)沿D中任一按段光滑的闭曲线L，有$\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$

(2)对D中任一按段光滑曲线L，曲线积分$\int\limits_L Pdx + Qdy$与路线无关,

只与 L 起点终点有关;

(3)$Pdx + Qdy$是D内某一函数u的全微分,

即在D内有存在一个二元函数$u(x,y)$使$du = Pdx + Qdy$;

(4)在 D 内每一点处,有$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

做题的时候要注意，如果题目里面给你明确说了积分路径，那么记住，先证明一下是不是积分与路径无关，之后尽可能自己换一条积分路径计算；最后再考虑直接用给出的路径计算。

如果积分确实与路径无关，那么我们就可以使用一元函数积分来表示第二类曲线积分：方法是构建路径是平行于坐标轴的，例如(x_0,y_0)到(x_1,y_1)，可以从(x_0,y_0)到(x_1,y_0)，再从(x_1,y_0)到(x_1,y_1)，这样就可以转化成定积分了。

5、特殊情况处理：定理 10.4

如果区域是一个复连通区域——区域中有空洞存在，则有环绕洞的任意两条闭曲线（同方向上）的积分相等。

例如说分母不能为 0 的空洞，我们可以令分母等于一个很小的常数ε，这样就得到了一个新的曲线路径，这个路径就和之前围绕这个洞的路径积分结果一致。

处理了空洞之后重新改写被积函数和积分式，再次计算即可，这个计算应该是新的被积函数在新的路径下的第二类曲线积分。

1.7 第二类曲面积分的计算

1.7.1 理解

下面要说的是第二类曲面积分，这种积分其实和第二类曲线积分一样的理解思路就好。下面是它的四种形式：

$$\begin{aligned}&\iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}_0 d\sigma(\mathrm{I})=\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{\sigma}(\mathrm{II})\\&=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma_{xy}(\mathrm{I})=\iint_S Pd\vec{y}\cdot d\vec{z}+Qd\vec{x}\cdot d\vec{z}+Rd\vec{x}\cdot d\vec{y}(\mathrm{II})\end{aligned}$$

自己在写的时候后面一个式子的元素不是向量，只是一个有正负之分的标量（我写上只是为了和第一类曲面积分区别开来，自己写的时候不要忘了）

1.7.2 计算

1、定义法计算

定义法的思路和之前的一样，就是投影的问题，现在的问题是方向不再像之前的第二类曲线积分那样好看，和坐标轴同向就是正向，反向就是负。它的思路是先转化成最后一行的那种形式$dxdy$，对这个来说，如果面的法向量（内侧 or 外侧）与 z 轴的夹角是锐角，则是正号，反之，则是负号。

这样，我们使用定义法计算的时候，先**根据正负分一下类**，分类之后分别计算就

可以了。

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_S R(x,y,z)\cos\gamma dS = \iint_{\sigma_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\cos\gamma \frac{1}{|\cos\gamma|}d\sigma$$

其中 $\cos\gamma \frac{1}{|\cos\gamma|} = \begin{cases} 1, & \text{指定侧的}\vec{n}^0\text{与}Oz\text{轴夹角}\gamma\text{为锐角时;} \\ -1, & \text{指定侧的}\vec{n}^0\text{与}Oz\text{轴夹角}\gamma\text{为钝角时;} \end{cases}$

于是 $\iint_S R(x,y,z)dxdy = \pm \iint_{\sigma_{xy}} R[x,y,z(x,y)]d\sigma$.

上式右端取“+”号或“–”号要由γ是锐角还是钝角而定.

特别当曲面S上每点拉单位法矢量$\vec{n}^0$与正轴正向的夹角$\gamma = \frac{\pi}{2}$:

2、高斯公式

使用条件：P，Q，R 有一阶连续偏导，S 取外侧为定侧曲面。

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

注意：S 的方向必须是外侧，如果是内侧必须加负号。

这样处理之后可以在实际使用的时候自己补一个面形成封闭区域，之后再用三重积分处理即可。

3、坐标变换下的第二类曲面积分

曲面的参数方程：$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

曲面上的任意点(u_0,v_0)，单位切矢量：$\vec{T}_u, \vec{T}_v$

若$\begin{cases} \vec{A}(x,y,z) \triangleq (P,Q,R) \\ \vec{T}_u = (x'_u, y'_u, z'_u) \\ \vec{T}_v = (x'_v, y'_v, z'_v) \end{cases} \Rightarrow \iint_\Sigma \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv$

注意：曲面 S 的定向和$\vec{T}_u \times \vec{T}_v$方向保持一致。

4、特殊点的处理

和第二类曲线积分保持一致，取特殊曲线消除这个奇异点就可以了。

1.8 第二类空间曲线积分和第二类曲面积分的转换

1.8.1 斯托克斯公式

条件：光滑曲面 S 的边界 L 是按段光滑的，P，Q，R 有一阶连续偏导

公式：

$$\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_S (\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dxdz+(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

这个公式可以把一个第二类曲面积分转化为第二类曲线积分

1.8.2 空间曲线积分与路径无关

P.228 定理 10.7 设$\Omega \subset R^3$为空间线单连通区域，若函数P,Q,R在Ω上连续，且有一阶连续偏导数，则以下四个条件是等价的：

(1) 对于Ω内任一按段光滑的封闭曲线L有 $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=0$

(2) 对于Ω内任一按段光滑的曲线τ，曲线积分$\int_\tau Pdx+Qdy+Rdz$与路线无关；

(3) $Pdx+Qdy+Rdz$是Ω内某一函数$u(x,y,z)$的全微分，即 $du=Pdx+Qdy+Rdz$

(4) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$在$\Omega$内处处成立.

二、 概念部分

在这里，我们首先要回顾一个概念——梯度，这是对数值函数所说的，数值函数求梯度之后，得到了我们常说的矢值函数，下面我们对矢量值函数的相关概念进行深入分析：

2.1 散度场

定义式：

$$div\vec{A}(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{A}$$

$$nabla\text{算子：}\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$$

函数说明：对一个矢值函数求散度后得到了一个数值函数

几何意义（通量密度）：

$$\text{由}Guass:\iiint_V div\vec{A}dV=\oiint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iiint_V\nabla\cdot\vec{A}dV$$

$$\Rightarrow div\vec{A}=\lim_{M\to M_0}\frac{\oiint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

四则运算（不需要记忆，所以只需知道，但是考试可能会考证明）

物理意义：电势函数的散度场是电场强度场

2.2 旋度场

定义式：

$$rot\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})\vec{k}$$

$$=\nabla\times\vec{A}$$

函数说明：对一个矢值函数求旋度得到一个矢值函数

Stokes 公式可以改写为：$\iint_S rot\vec{A}\cdot d\vec{s}=\oint_L\vec{A}\cdot d\vec{S}$

其中，$d\vec{s}=\vec{T}_0 ds=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)ds$

几何意义：环流密度——$\mu=\lim_{S\to M}\frac{\oint_l\vec{A}\cdot d\vec{s}}{D}=\lim_{S\to M}\frac{\iint_S rot\vec{A}\cdot d\vec{s}}{D}=(rot\vec{A}\cdot\vec{n}_0)_M$

物理意义：自己看麦克斯韦方程组吧。。。

三、 历年卷错题

1、在做物理相关的积分题目的时候，不要漏掉相关的物理量

2、（21-22 年 T5）给区域的时候一定要看清楚积分的区域，本题是第一卦限，不要按照上半球面计算。

3、（20-21 年 T5）注意积分的时候不要出错，定积分的基本运算得熟练。

$$-\frac{5}{2}\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx = -\frac{e^x}{4}(5-\cos 2x - 2\sin 2x)\Big|_0^{\pi} = 1-e^{\pi}$$

4、（19-20 年 T6）看题的时候不要想当然，注意 dx 和 dy 的顺序，还有这道题里面的，$\iint\limits_{S^+} xdydz + ydzdx + xydxdy$ 不要看成 $\iint\limits_{S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy$，要认真读题。

5、（18-19 年 T11）抛物面壳 $z=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\le z\le 1)$ 在 oxy 面上的投影为圆，最大半径不是 1 而是 $\sqrt{2}$ 。