多元函数微分学

一、 概念理解部分

内容介绍：这部分内容涵盖了多元函数的极限和连续，偏导数和全微分的概念以及场的方向和梯度的概念。

考核要求：主要是理解概念并且掌握基本的证明过程。

1.1 多元函数的极限和连续

1.1.1 可能不是很重要的概念

多元函数的定义和平面点集

P.62 定义 8.1 设A、B为两个非空实数积集合$\{(x,y): x \in A, y \in B\}$称为$A$与$B$的直积，记作$A \times B$。特别地，$A \times A \triangleq A^2$。

P.62 定义 8.2 设n个R的直积

$$\underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n\text{个}} \triangleq R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_i \in R, i = 1,2, \ldots n.\}$$

（称为R^n为n维欧氏空间），且$D \subseteq R^n$是非空集合。

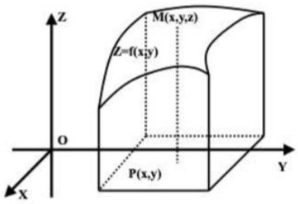
若存在一个对应法则f，对每一个$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$,都有唯一的实数$u$与之对应，则称$f$是$D$上的$n$元函数，记作$u = f(P) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

其中D称为函数f的定义域，$x_1, x_2, \ldots, x_n$称为自变量，u为因变量。

$R(f) = \{u: u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\}$称为函数的值域.

$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, u): u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\} \subset R^{n+1}$

称为$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$的图形.



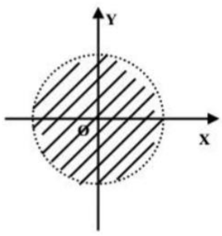
简单地，$f: D \subseteq R^n \longrightarrow R$

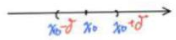
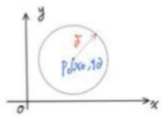
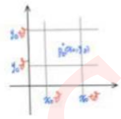
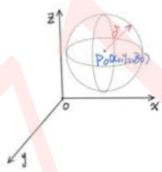
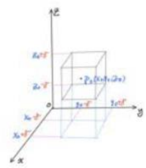
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow u$$

$$u = f(P) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

本章重点研究二元函数，所得的结果可直接推广到更多元函数上去。

P.63 例 1 求 $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ 的定义域.



	一维 $\rho(P_0,P)\triangleq\sqrt{(x-x_0)^2}$	二维 $\rho(P_0,P)\triangleq\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$	三维 $\rho(P_0,P)\triangleq\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$
邻域	$\rho(P_0,P)<\delta$	$\rho(P_0,P)<\delta$	$\rho(P_0,P)<\delta$
空心邻域	$0<\rho(P_0,P)<\delta$	$0<\rho(P_0,P)<\delta$	$0<\rho(P_0,P)<\delta$
方邻域	$\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$\begin{cases}\lvert x-x_0\rvert<\delta\\\lvert y-y_0\rvert<\delta\end{cases}$	$\begin{cases}\lvert x-x_0\rvert<\delta\\\lvert y-y_0\rvert<\delta\\\lvert z-z_0\rvert<\delta\end{cases}$
空心方邻域	$\lvert x-x_0\rvert<\delta$且$x\neq x_0$	$\begin{cases}\lvert x-x_0\rvert<\delta\\\lvert y-y_0\rvert<\delta\end{cases}$且$\begin{cases}x\neq x_0\\y\neq y_0\end{cases}$	$\begin{cases}\lvert x-x_0\rvert<\delta\\\lvert y-y_0\rvert<\delta\\\lvert z-z_0\rvert<\delta\end{cases}$且$\begin{cases}x\neq x_0\\y\neq y_0\\z\neq z_0\end{cases}$
图像		 	 

二、点和点集之间的关系：

任意点$P_0\in R^2$与任意一个点集$E\subset R^2$之间必有以下三种关系之一：

$P_0\in R^2$	内点	外点	界点
$E\subset R^2$	$P_0\in E$	$P_0\notin E$	$P_0\in E$ 或 $P_0\notin E$
$U(P_0)$	$U(P_0)\subset E$	$U(P_0)\cap E=\phi$	$U(P_0,\delta)\cap E\neq\phi$且$U(P_0,\delta)\cap E^C\neq\phi$
	$\operatorname{int}E$		∂E

下面这个东西还挺重要的，但是也是理解就行（主要是给后面的单连通区域……这些概念在积分上的时候做铺垫）

点集

开集——$\text{int}\, E = E$,称E为开集。$(\text{int}\,\phi = \phi, \text{int}\, R^2 = R^2) \Longrightarrow$ 开集

闭集——E^C是开集,称E为闭集。$((R^2)^C = \phi,\ \phi^C = R^2) \Longrightarrow$ 闭集

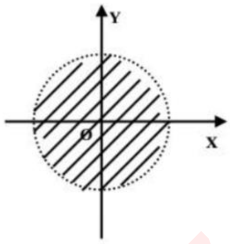
例 $P_0 \in R^2, U(P_0,\delta), U^0(P_0,\delta), R^2, \phi$都是开集，$R^2, \phi$也是闭集.

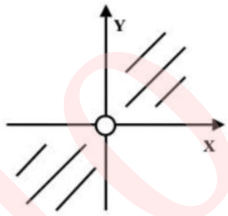
若E中任意两点之间都可用一条完全含于E的有限条折线（由有限条直线连接而成的折线）相连接，称E具有连通性.

若E既是开集又具有连通性，称E为开域.

例如 $\{(x,y): x^2+y^2<1\}$是一个开域。

但$\{(x,y): xy>0\}$不是一个开域。





开域连同其边界所成的点集称为闭域。

开域、闭域或者开域连同其一部分边界点组成的点集统称为区域。

设$E \subset R^2$，若存在常数$r>0$，使$E \subset U(O,r)$，称E是有界点集（有界集）,否则称E是无界集。O是坐标原点，也可以是其它点。

1.1.2 多元函数的极限

多元函数极限的定义和一元函数极限的定义很像。虽然这个极限的定义式我们一般不常用，但是我还是最好清楚怎么使用（考试的时候有的证明题实在没办法了，直接就拿定义水分）

推广：多元函数的极限定义：

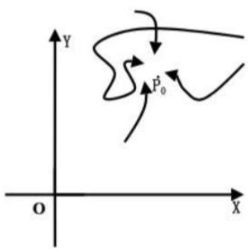
$P_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in R^n, P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U^0(P_0) \subseteq R^n$

设n元函数$f(P)$在$U^0(P_0,\delta_0)$内有定义，若存在一常数A，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ (\delta \le \delta_0)$，当$0 < \rho(P,P_0) < \delta$,都有$|f(P)-A| < \varepsilon$成立，则称$A$为$n$元函数$f(P)$当$P \to P_0$时的极限，记作：

$$\lim_{P \to P_0} f(x) = A \text{ 或 } f(P) \to A\ (P \to P_0)$$

当$n=2$时，为二元函数，二元函数的极限定义见 P.65 定义 8.4。

注意：这个极限与点$P(x,y)$趋于点$P_0(x_0,y_0)$的方式无关，只要P距离P_0充分接近。点P趋于P_0点方式可有无数种，而一元函数仅有左，右两侧极限。



归结原则：

对于一个多元函数，它的极限取值和路径无关（理解的时候想想一元函数的极限

值分左极限和右极限，多元函数不止有左右还有上下等四面八方）

若$f(P)$在$U^0(P_0,\delta_0)$内有定义,则:

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \Leftrightarrow \text{对于}U^0(P_0,\delta_0)\text{的任何子集}E,\lim_{\substack{P\to P_0\\(P\in E)}} f(P)=A$$

多元函数的计算：

省流：使用夹逼定理，使用替换（$x=ky$, $x=ky^2$ ）或者整体换元变为一元函数极限。

[1] 变量替换成已知极限，或者化为一元函数极限（利用极坐标）

[2] 利用不等式，使用夹逼定理求极限

[3] 利用初等函数的连续性，利用极限的四则运算法则

[4] 利用初等变换（特别是指数和对数的转化——指变对）

补充题 4: 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解 $(x^2+y^2)^{x^2y^2}=e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)} \Rightarrow 0\le |x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\le \left|\dfrac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)\right|$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)\overset{\text{令}x^2+y^2=t}{=}\frac{1}{4}\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{t^{-2}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-2t^{-3}}=-\frac{1}{8}\lim_{t\to 0^+}t^2=0.$$

根据夹逼定理知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}x^2y^2\ln(x^2+y^2)=0$, 故原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}=e^0=1.$

[5] 事先看出极限值的，可以考虑使用定义法（和上学期的方法差不多）

补充题 1: 证明： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x+2y-1}{x^2+y^2}=1$

解：不妨设： $-1\le x\le 1, \dfrac{1}{2}\le y\le \dfrac{3}{2}$

$\forall 1>\varepsilon>0, \exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{12}$, 当 $|x-0|<\delta, |y-1|<\delta$ 且 $(x,y)\neq(0,1)$ 时,

$$\left|\frac{x+2y-1}{x^2+y^2}-1\right|=\frac{|x^2-x+(y-1)^2|}{x^2+y^2}\le 4|x^2-x+(y-1)^2|\le 4|x|\cdot|x-1|+4(y-1)^2$$

$$\le 8|x|+4|y-1|<\varepsilon.$$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x+2y-1}{x^2+y^2}=1$

注意：解题规范

证明极限不存在的方法：

证明二元（或多元）极限不存在：

(1) 证明径向路径的极限与幅角（或斜率）有关；

(2) 证明某个特殊路径的极限不存在；

(3) 证明两个特殊极限存在但不相等；

(4) 若二元函数在该点某空心领域里连续，而两个累次极限存在不相等，则该点全面极限不存在。

P.67 例 7 研究函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0)处极限是否存在.

解 由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{2x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{2k}{1+k^2}$, 知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在

类似地： $\lim\limits_{\substack{x=ky^2\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=\dfrac{k}{k^2+1}$ $\quad \lim\limits_{\substack{x=ky^3\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^4}=k$

这个函数的极限很重要!!!

1.1.3 累次极限和二重极限

累次极限本质上是求两次一元函数的极限，二重极限是二元函数的极限

特别注意：两次极限中，只要第一次极限不存在，整个累次极限就不存在了。（不要说 x 趋于 0 极限又存在了，这是和二重极限偷换概念——个人理解罢了，不标准）

两个累次极限存在，二重极限不存在：

P.67 例 7 研究函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点(0,0)处极限是否存在.

解：$\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}}\frac{2kx^2}{(k^2+1)x^2}=\frac{2k}{k^2+1}\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$不存在

而$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=\lim\limits_{y\to 0}0=0,\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}0=0.$

二重极限存在，两个累次极限不存在：

P.67 例 8 $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$，求累次极限$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$、$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$与二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)$。

解：$\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$不存在$\Rightarrow\lim\limits_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$不存在$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$不存在.

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$不存在$\Rightarrow\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$不存在

但$0\leq|f(x,y)|\leq|x|+|y|$, 由$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(|x|+|y|)=0$, 则$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0.$

证明二重极限不存在的定理 8.1：

P.67 定理 8.1　若累次极限$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$和二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$都存在，则三者相等（证明略）.

推论　若$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$　存在但不相等，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$　不存在。

1.1.4 多元函数的连续

定义和一元函数的定义一模一样，我就不搬运了，自行查书吧

P67 定义 8.5

P68 定理 8.2

（这块暂时不难，因为没有和后面的结合……）

1.2 多元函数的偏导数、全微分、连续性

1.2.1 偏导数

1、偏导数的定义

定义不搬运了，P69 定义 8.7

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$f'_x(x_0,y_0)\text{ 或 }\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{ 或 }z'_x|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{ 或 }\left.\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

上面两个式子记住。定义式很重要!!! 很重要!!

简单的偏导数计算方法：

（1）根据定义（一般是证明题会用）

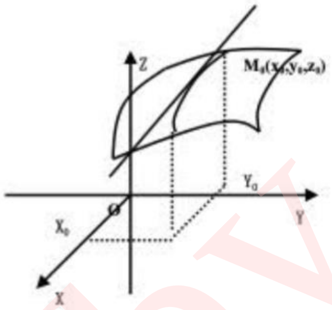
（2）求出导函数 $\frac{d}{dx}f(x,y_0)$，之后把 x_0 代入（毕老师最推荐的做法）

（3）求出 $f'_x(x,y)$，之后把 (x_0,y_0) 代入

注意：指对的交换，以及对数求导法的应用。

2、几何意义（帮助理解，对后面的多个概念的关系理解有帮助）

偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$ 的几何意义是表示 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=y_0\end{cases}$ 在 M_0 处的切线对 Ox 轴的斜率。



3、高阶偏导

高阶（混合）偏导数的定义看看，主要是会算。（谁在前面，先对谁导）

注意：一般情况下，$f''_{xy}(x,y)\neq f''_{yx}(x,y)$

定理 8.3 需要了解证明，而且很重要!! 很重要!! 很重要!!

P.74 定理 8.3　若函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导（函数）$f''_{xy}(x,y),f''_{yx}(x,y)$ 都在 (x_0,y_0) 处连续，则 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

这个证明其实会发现和后面讲的第二类曲线积分的路径无关性以及全微分的条件

是有异曲同工之妙的，它们都采用一个矩形去证明，这个矩形的四个顶点分别是下面的四个点：$(x,y),(x+\Delta x,y),(x,y+\Delta y),(x+\Delta x,y+\Delta y)$，如果有其他方法也行，只不过毕老师是这样讲的。

令 $\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$,

$\psi(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)$,

令 $W=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)$

注：W有两种不同组合形式针，对这两种不同组合形式分别讨论：

1.2.2 全微分

1、全微分的定义

P.76 定义 8.8　若二元函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处的全增量$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

可以表示为　$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$　$(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0)$.

其中A,B与变量的增量$\Delta x,\Delta y$无关，而仅与x,y有关，则称函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处可微.

其中Δz的线性主部$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处的全微分，记作dz，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$

由微分的定义得：可微分的充要条件

函数$z=f(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$处可微的充要条件：$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-[f_x'(x,y)\Delta x+f_y'(x,y)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$

其中可微的充要条件一定要记住

2、可微、可导、连续的关系（主要是不太好理解）

如果您不能很好地理解这三者的关系，请您务必记住这三者证明的等价关系，因为这将使得您在您自己不知道的情况下通过计算完成考试的证明题

可微：$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$

其中，$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

可导：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$存在

连续：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$

（1）可微 => 连续 BUT 连续 => × 可微分（想想一元函数，可导一定连续吗？）

因为 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，$\Delta z$ 趋于 0，即为连续

P.77 例 11 研究 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点的可微性.

可导，连续，但不可微

（2）可微 => 两个偏导存在（和上面的证明一样），反过来，有一个偏导不存在就不可微。

两个偏导连续 => 可微（用定义去证明）

$$\Delta z = f_x'(x_0,y_0)\Delta x + f_y'(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_1 = 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_2 = 0$. 这个等式我们又称为全增量公式.

（3）可导不一定连续

P.73 例 6 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0,0)点

上面的函数偏导存在，但是不连续

连续不一定可导

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处

上面的函数连续，但是不可导

1.3 多元函数的方向导数

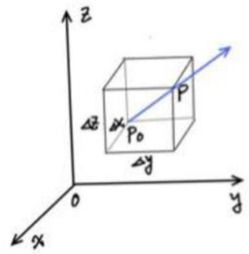
还记得我之前说的那个比喻吗？一元函数中的左右导数，在这里就很类似于方向导数在多元函数的概念。

1.3.1 概念

下面这个定义首先需要理解，

同时这个定义式也是必须记住的，如果你不能理解后续的关系的话，记住定义式，你就可以通过计算来证明一部分题目。

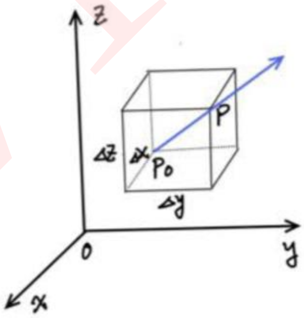
方向导数：$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\dfrac{u(P)-u(P_0)}{\rho}=\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\dfrac{\vec{\Delta}_l u}{\rho}$



P.92 定义 8.9 设三元函数u在$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某邻域$u(P_0)\subset R^3$内有定义，l为从点P_0出发的**射线**，$P(x,y,z)$为l上且含于$u(P_0)$内的任一点，以ρ表示P与P_0两点的距离，若极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{u(P)-u(P_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta_{\vec{l}}u}{\rho}$$

存在，则称此极限为函数u在点P_0沿方向$\vec{l}$的方向导数，记作$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}$.



P.100 定理 8.10 若函数u在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$**可微**，则u在点P_0处沿任一方向$\vec{l}$的方向导数都存在，且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\cos\gamma \quad (1)$$

其中 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

证明是必须掌握的，因为这个牵扯到后面有可能出的证明题

证 $P(x,y,z)$为射线l上任一点，由$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0,y-$

$y_0, z-z_0) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$,

$$\overrightarrow{P_0P}^0 = \left(\frac{\Delta x}{\rho}, \frac{\Delta y}{\rho}, \frac{\Delta z}{\rho}\right) = \vec{l}^0, \text{有} \frac{\Delta x}{\rho} = \cos\alpha, \frac{\Delta y}{\rho} = \cos\beta, \frac{\Delta z}{\rho} = \cos\gamma \qquad (2)$$

由$u(P)$在点P_0可微，则有

$$u(P) - u(P_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} \Delta x + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} \Delta y + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} \Delta z + o(\rho)(\rho \to 0)$$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{u(P) - u(P_0)}{\rho} = \left[\lim_{\rho \to 0} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} \frac{\Delta x}{\rho} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} \frac{\Delta y}{\rho} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} \frac{\Delta z}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho}\right]$$

$$= \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} \cos\gamma$$

则：$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} \cos\gamma.$

$$(2) \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} \cos\gamma$$

$$= \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}, \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\right) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

上面这个式子就显得很重要了，等号左侧是方向导数，等号右侧的第一个因子是函数的梯度，第二个因子是方向单位矢量。

这个证明过程其实就是使用定义法计算方向导数的过程！

但是其中，最重要的一点是：函数u在点$P(x_0, y_0, z_0)$处可微，这个条件不满足是不能用上面的(2)式的

1.3.2 计算方法

(4) 计算方向导数步骤：(在函数u在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$可微条件下，否则直接从方向导数定义来求！)

Step 1 单位化方向$\vec{l}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

Step 2 计算偏导数：$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$

Step 3 计算方向导数：$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

1.3.3 补充一个关系

思考：补充题 1 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

在(0,0)处的任何方向$\vec{l}$的方向导数存在，但是两个偏导数不存在。

证明：函数f在(0,0)处的任何方向$\vec{l}=(\Delta x,\Delta y)$的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=1 \text{ 存在}$$

$$\begin{cases}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x}\\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{\sqrt{(\Delta y)^2}}{\Delta y}\end{cases}\text{偏导数不存在.}$$

⚠函数f在(0,0)处偏导数不存在 ⟹函数f在(0,0)处不可微⟹定理 8.10 条件不满足。

这说明了后面 1.4 的一个内容

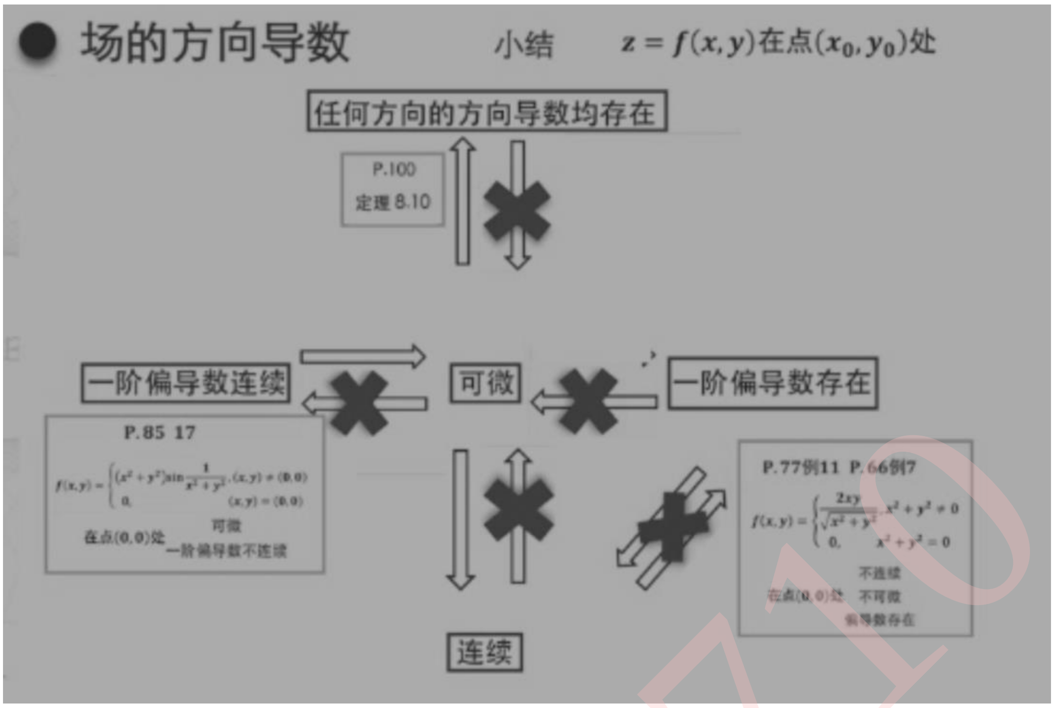
补充题 2 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,

在(0,0)处的某些方向的方向导数不存在，但是两个偏导数存在。

证明：函数f在(0,0)处的任何方向$\vec{l}=(\Delta x,\Delta y)$的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{\frac{\Delta x\Delta y}{\rho^2}}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta x}{\rho}\cdot\frac{\Delta y}{\rho}\cdot\frac{1}{\rho}\text{不存在.}$$

1.4 多元函数连续性、可导、可微、方向导数的关系



下面是念经环节：

对于函数 $z=f(x,y)$，我们说：

函数的一阶偏导连续能推出函数可微，但是函数可微并不能推出一阶偏导连续。

函数可微则一定连续，但是函数连续未必可微。

函数连续不一定可导，函数可导不一定连续。

函数一阶偏导存在未必一定可微，但是函数可微一定能得到偏导数存在。

函数可微能瞬间推出函数的方向导数，函数的方向导数存在不能说明函数可微。

函数的偏导数存在和函数的方向导数存在没有任何关系。

函数连续和方向导数是否存在没有任何关系。

二、 计算部分

2.1 复合函数微分

这一部分多余的话我不想再重复了，首先是搬一些基本的定理概念来看看

1、基本定理（了解即可，后面会说省流版内容）

P.83 定理 8.7 若函数$u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$在点$(x,y)$处偏导数都存在，$z=f(u,v)$在点$(u,v)=(\varphi(x,y),\psi(x,y))$处可微，则复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$.在点$(x,y)$处的偏导数存在，并有下列的求导公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\quad (8.3)$$

定理 8.7 的证明可以不用记忆，证明知道是拿全增量公式推导的就行，考试时有个印象就行。

例 设$z=f(x,y,u),u=u(x,y)$,请问：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$?

答:$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$

注意：这里$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial x}$是两个不同的概念:

不要这样写，最好写成下面这样，这样肯定不会错，而且你一定不会有歧义

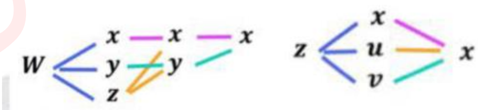
f_1'表示对第一个中间变量求偏导

f_2'表示对第二个中间变量求偏导,

f_{12}''表示先对第一个中间变量求偏导再对第二个中间变量求偏导

2、考试的方法

首先，第一步是明确你想对哪些变量求导（最终变量），然后画出这种图：



之后写出所有的变量都在的形式，为我们的偏导做出准备：

$f(x,y(x),z(x,y(x)))$， $z(x,u(x),v(x))$

最后，使用复合求导的公式，耐心做完，你一定不会错的，如果这样做还能错，呃……那就使用第二种方法吧！毕老师独家推荐，这个方法在后面的函数组的偏导数那里你会感受到什么是一阶微分不变性的伟大！

一阶微分不变性：

若$z=z(x,y)$，x,y是自变量，且$z=z(x,y)$可微，则其全微分为：

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

设$z=z(x,y)$，$x=x(s,t),y=y(s,t)$都是具有连续的偏导数，则

复合函数$z=z(x(s,t),y(s,t))$可微，且$dz=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt$，

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\\ \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\end{cases}\Rightarrow dz=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right)=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

这样的话，你会发现计算偏导数就变得很容易了，直接无脑全微分就行了。最后想要求谁偏谁，就找到两个变量的Δ，相除就是答案。

3、高阶偏导数

这个就很遗憾了，我们不能再使用一阶微分不变性的方法了，只能采用第一种方法，结合高阶偏导的定义慢慢做咯。下面给个例子：

P.86 例 3 设 $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$，其中f有二阶连续偏导数，

求 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

提示：由 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'\cdot 2x$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{11}''+f_{12}''2x+2(f_{21}''+f_{22}''2x)x+2f_2'=f_{11}''+4xf_{12}''+4x^2f_{22}''+2f_2'$$

由对称性得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f_{11}''+4yf_{12}''+4y^2f_{22}''+2f_2'$$

2.2 隐函数微分

1、基本概念

下面是 8.8’是一个一元隐函数的定理，8.8 是二元隐函数的定理

定理 8.8' 若函数$F(x,y)$满足下列条件：

（1）函数F在以$P_0(x_0,y_0)$为内点的某一区域$D\subseteq R^2$上连续；

（2）$F(x_0,y_0)=0$（初始条件）

（3）在D内存在连续的偏导数$F_x'(x,y),F_y'(x,y)$;

$\Rightarrow$ 某邻域$U(P_0)$内$F_y'(x,y)$保号

（4）$F_y'(x_0,y_0)\neq 0$

$\Rightarrow F(x,y)$在某邻域$U(P_0)$内关于y严格单调

则在点P_0的某邻域$U(P_0)$内唯一确定一个具有连续导数的函数

$y=f(x)$, 满足$y_0=f(x_0), F(x,f(x))\equiv 0$, 且有: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$.

P.90 定理 8.8 若函数$F(x,y,z)$满足下列条件：

（1）函数F在以$P_0(x_0,y_0,z_0)$为内点的某一区域$D\subseteq R^3$上连续；

（2）$F(x_0,y_0,z_0)=0$（初始条件）

（3）在D内存在连续的偏导数$F_x'(x,y,z),F_y'(x,y,z),F_z'(x,y,z)$;

（4）$F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则在点P_0的某邻域$U(P_0)$内唯一确定一个具有连续导数的函数

$z=f(x,y)$, 且满足$z_0=f(x_0,y_0), F(x,y,f(x,y))\equiv 0$,

有: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}\left(=-\dfrac{F_x'}{F_z'}\right), \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}\left(=-\dfrac{F_y'}{F_z'}\right)$ (*)

（定理证明不作要求）

注意：有一个条件千万不要忘了，有时候会直接考这个条件$F_z'(x,y,z)\neq 0$

2、考试方法：

你难道真的想记这个公式吗？反正我不想记（doge）……所以，你知道的，一阶微分不变性，结束了。

那你会说高阶呢？和前面一样，我们只能规规矩矩地用第一种方法做咯。

下面给你一个例子体会体会。

P.91 例 1 方程$z^3-3xyz=a^3$确定隐函数$z=z(x,y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：方程$z^3-3xyz=a^3$　$[z=z(x,y)]$两边分别关于x,y求偏导：

$$3z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-3y\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}.$$

$$3z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-3x\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)=\frac{\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)(z^2-xy)-\left(2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)yz}{(z^2-xy)^2},$$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}$代入上式，化简整理有$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$.

注：$F(x,y,z)\triangleq z^3-3xyz-a^3=0$ 满足隐函数存在定理 8.8 的条件

$\Rightarrow F'_z=3z^2-3xy\neq 0\Leftrightarrow z^2-xy\neq 0$

2.3 隐函数组微分

1、基本概念

P.92 定理 8.9 隐函数组存在定理

设函数$F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$在点$P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某邻域内满足：

(1) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$(初始条件)

(2) F,G存在一阶连续偏导数$F'_x,F'_y,F'_u,F'_v,G'_x,G'_y,G'_u,G'_v$,

(3)在点P_0处行列式$J\triangleq\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}\neq 0$(Jacobi行列式)

则方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$在点$P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某邻域内唯一确定一组函数

组的$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$满足：

(1) $u_0=u(x_0,y_0),\ v_0=v(x_0,y_0)$;

(2) $F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0,G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0$;

(3)$u=u(x,y),v=v(x,y)$具有一阶连续偏导数:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x' & F_v'\\ G_x' & G_v'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u' & F_v'\\ G_u' & G_v'\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u' & F_x'\\ G_u' & G_x'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u' & F_v'\\ G_u' & G_v'\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y' & F_v'\\ G_y' & G_v'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u' & F_v'\\ G_u' & G_v'\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u' & F_y'\\ G_u' & G_y'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u' & F_v'\\ G_u' & G_v'\end{vmatrix}}.$$

其中$J=\begin{vmatrix}F_u' & F_v'\\ G_u' & G_v'\end{vmatrix}\triangleq\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0$ 称为函数F,G的Jacobi行列式.

（定理证明不作要求）

2、考试方法

我觉得你也不想记这个 Jacobi 行列式的东西对吧，没错，我们只需要用一阶微分不变性处理，就又不用记公式了。

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F_1'dx+F_2'dy+F_3'du+F_4'dv=0\\ G_1'dx+G_2'dy+G_3'du+G_4'dv=0\end{cases}$$

解这个方程组，得到下面的样子：

$$\begin{cases}du=f_{11}dx+f_{12}dy\\ dv=f_{21}dx+f_{22}dy\end{cases}\text{或}\begin{cases}dx=f_{11}du+f_{12}dv\\ dy=f_{21}du+f_{22}dv\end{cases}$$

其实，如果你知道定理是怎么推导的，你会发现这就是推导定理的最快最好理解的方式。一阶微分不变性又 win 啦！！

有人说，我记公式也能做，但是我要说的是首先这是毕老师反复强调推荐的方法，你为何不用？其次，如果一些导数在求得时候可能有化简的情况，如果你是解方程组得话你会发现这个并体会到它给你计算带来得好处，但你要是带公式，你就只能乖乖算行列式了。

最后，不管你有什么想法，以你自己的意愿为主，不要怼我，我就是个知识的搬运工，跟一个臭打工的较什么劲嘛~~~

2.4 反函数组微分

这块不想多说了，总之一句话，一阶微分不变性能解决，我也不想用 method 1 的方法来处理这个问题了。

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \text{(反函数组)}$$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x(u,v) \equiv 0 \\ y - y(u,v) \equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x[u(x,y), v(x,y)] \equiv 0 \\ y - y[u(x,y), v(x,y)] \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 1 - x'_u u'_x - x'_v v'_x = 0 \\ 0 - y'_u u'_x - y'_v v'_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_u u'_x + x'_v v'_x = 1 \\ y'_u u'_x + y'_v v'_x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 - x'_u u'_y - x'_v v'_y = 0 \\ 1 - y'_u u'_y - y'_v v'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_u u'_y + x'_v v'_y = 0 \\ y'_u u'_y + y'_v v'_y = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} u'_x & v'_x \\ u'_y & v'_y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u'_x x'_u + v'_x x'_v & u'_x y'_u + v'_x y'_v \\ u'_y x'_u + v'_y x'_v & u'_y y'_u + v'_y y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

注：这结果与一元函数的反函数的导数公式 $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$ 一致.

注意：最后的那个式子比较重要，函数组和反函数组的雅可比行列式的积是 1

三、 微分的应用

3.1 梯度

这个内容其实不难 ，我只是简单提一嘴，因为在下一章有它的兄弟们，这些兄弟可不是那么好理解的（散度、旋度）

函数本体 u：数值函数（结果是一个值，不是一个矢量的函数）

符号 grad

P. 102 定义 8.10 矢量 $\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$ 称为

定义： 函数$u(P)$在点P处的梯度，记为grad u,即:

$$\mathrm{grad}u \triangleq \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

一些理解：

(1) u在点P处沿方向$\vec{l}$的方向导数 = 梯度在方向$\vec{l}$上的投影

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=\mathrm{grad}u(P_0)\vec{l}^0=\left(\mathrm{grad}u(P_0)\right)_{\vec{l}^0}$$

(2)当$\theta=0$，即$\vec{l}^0$的方向与梯度方向grad$u(P_0)$一致，取到最大值，等于梯度的模$|\mathrm{grad}u(P_0)|$，即

$$\max\left(\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}\right)=|\mathrm{grad}u(P_0)|.$$

当u在P_0可微时，u在P_0的梯度方向是u值增长最快的方向.

(3)当$\theta=\pi$，即$\vec{l}^0$的方向与梯度方向grad$u(P_0)$相反，方向导数取得最小值为$-|\mathrm{grad}u(P_0)|$.

(4)当$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\vec{l}^0$的方向与梯度方向 grad$u(P_0)$垂直，方向导数为 0.

3.2 极值和最值

这一部分内容比较单一，基础的内容我们只需要掌握两个部分就可以了：求多元函数的极值点（非条件极值）以及拉格朗日乘子法的应用（条件极值）。最后我们对于极值的求解，往往要将两者结合起来——开区间/开域内是非条件极值，边界上是条件

极值。

3.2.1 非条件极值

课本上的定理 8.13 内容我就不在这里列出了，下面是这个基本步骤的使用规范。

同时注意：因此，$f(x,y)$的极值点一定包含在稳定点或偏导数不存在点之中.

这和我们在上册学过的内容是一模一样的。

P.110 例 3 求函数$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$的极值. 注：留意该题解题步骤

解：$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}, \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases} \Rightarrow P_0(0,0), P_1(1,1).$

函数无偏导数不存在的点.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y\end{cases} \Rightarrow \overset{P_0}{\begin{cases}A=0\\B=-3\\C=0\\B^2-AC>0\end{cases}} \quad \overset{P_1}{\begin{cases}A=6\\B=-3\\C=6\\B^2-AC<0, A>0\end{cases}}$$

$\Downarrow$ $f(0,0)$不是极值 $\quad$ $\Downarrow$ $f(1,1)=-1$ 是极小值

（或列表如下，两者取其一 ）

	A	B	C	B^2-AC	
$P_0(0,0)$	0	-3	0	$9>0$	$f(0,0)=0$非极值
$P_1(1,1)$	6	-3	6	$-27<0$	$f(1,1)=-1$极小值

注意一个特殊情况：判定式为 0 时，我们只能通过一些基本的方法来判断是否<u>不是极值</u>。

补充题2 讨论函数$f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$在原点是否有极值?

解：$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=8x^3-6xy=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-3x^2+2y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases} P(0,0) \begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24x^2-6y\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-6x\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\end{cases} \Rightarrow \overset{P}{\begin{cases}A=0\\B=0\\C=2\\B^2-AC=0\end{cases}}$

$$\begin{cases}f(x,y)>0=f(0,0), & y>2x^2\\ f(x,y)<0=f(0,0), & x^2<y<2x^2\end{cases} \Rightarrow f(0,0)\text{不是极值.}$$

注：$f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)=2x^4-3x^2y+y^2$

3.2.2 条件极值

拉格朗日乘数法，这个应该不难记忆：

条件极值问题 $\qquad$ 无条件极值问题

$$\begin{aligned}&u=f(x,y,z)\text{极值}\\ &s.t.\ G(x,y,z)=0\end{aligned} \Rightarrow u=f(x,y,z(x,y))\text{极值}$$

3.2.3 多元函数的最值

这个思路和我们之前提到的思路是一致的。

$f(P)$在有界闭区域G上连续$\Rightarrow f(P)$在G上一定能取到最大(小)值.

$\Leftrightarrow \exists P_1, P_2 \in G, f(P_1)=m, f(P_2)=M, \forall P \in G$，有$m \le f(P) \le M$.

$$\text{最值在}\begin{cases}\text{边界点取到（边界函数值最大值与最小值点）}\\ \text{在内部取到: 一定是极值点}\begin{cases}\text{稳定点}\\ \text{偏导数不存在点}\end{cases}\end{cases}$$

注意：(1) 一元函数的定义域边界$\leftrightarrow$ 区间两个端点

多元函数的闭区域G的边界$\leftrightarrow$有无数个点：$\begin{cases}G \subset R^2\text{边界} \leftrightarrow \text{曲线}\\ G \subset R^3\text{边界} \leftrightarrow \text{曲面}\end{cases}$

3.3 偏导数在几何上的应用

3.3.1 空间曲线的切线和法平面

1. 参数式方程的空间曲线

$$\text{曲线}\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$$

$$\text{切线}: \frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

$$\text{法平面：}\ x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

2. 一般式方程的空间曲线

$$\text{曲线}\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$$

$$\text{切线}\begin{cases}F_x'(x-x_0)+F_y'(y-y_0)+F_z'(z-z_0)=0\\ G_x'(x-x_0)+G_y'(y-y_0)+G_z'(z-z_0)=0\end{cases}$$

$$\text{切矢量：}\quad (1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx})$$

$$\text{法平面：}\quad (x-x_0)+\frac{dy}{dx}(y-y_0)+\frac{dz}{dx}(z-z_0)=0$$

3.3.2 空间平面的切平面和法线

1. 隐式方程的空间曲面

$$\text{曲面方程：}\quad F(x,y,z)=0$$

$$\text{切平面方程：}\quad F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

$$\text{法线：}\quad \frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

2. 显式方程的空间曲面

转化成隐式方程计算：$z=f(x,y)\Rightarrow F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$

3. 参数式方程的曲面切平面与法向量

平面方程：$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \Rightarrow F(x,y,z)=f(u(x,y),v(x,y))-z \\ z=z(u,v) \end{cases}$

法向量：$(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1)$

其中的偏导数根据函数组的偏导求出