Lineare Algebra
Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Fassung vom 7. Oktober 2022

Dies ist ein Vorlesungsskript und kein Lehrbuch.
Mit Fehlern muss gerechnet werden!

Math. Institut
Ernst-Zermelo-Str. 1
79104 Freiburg

0761-203-5560
annette.huber@math.uni-freiburg.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einleitung

Inhalt

In der linearen Algebra geht es um das Lösen von linearen Gleichungssystemen:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 3x + y &= 2 \end{aligned}$$

Das System heißt linear, da kein x^2 oder gar $\sin(x)$ vorkommt. Wir lösen die zweite Gleichung nach y auf und setzen in die erste ein:

$$\begin{aligned} &y = 2 - 3x \\ &4 = 2x + 3(2 - 3x) = -7x + 6 \Rightarrow x = \frac{2}{7}, y = \frac{8}{7} \end{aligned}$$

Eigentlich ist damit das Wesentliche gesagt: mit diesem Verfahren kann man jedes System von linearen Gleichungen in 2, 3 oder auch 29 Variablen lösen - oder feststellen, dass sie unlösbar sind.
Lineare Gleichungssysteme sind so wichtig, weil sie einerseits überall auftauchen und andererseits auch beherrschbar sind. In der allgemeinen Theorie bemühen wir uns oft, die Frage auf lineare Gleichungssysteme zurückzuführen. Das ganze Konzept der Ableitung beruht auf dieser Idee. Spätestens in der Analysis II wird unsere Theorie benutzt.
Für den/die Mathematiker:in stellen sich zwei Arten von Fragen:

- Können wir die Eigenschaften der Gleichungssysteme und ihrer Lösungsräume beschreiben?
- Gibt es effiziente und schnelle Verfahren, die auch real mit 100 oder 1000 Variablen funktionieren? Wie gut sind sie?

Die erste Frage werden wir in der linearen Algebra bearbeiten. Die zweite gehört in das Gebiet der Numerik, die wir nur am Rande betrachten werden.

Eine andere Quelle für die Fragen der linearen Algebra ist die analytische Geometrie: Ebene oder Raum werden mit Koordinaten versehen. Geometrische Objekte wie Geraden werden durch lineare Gleichungen gegeben. Geometrische Fragen (Was ist der Schnitt der folgenden beiden Geraden?) übersetzen sich wieder in lineare Gleichungssysteme. Dies genügt noch nicht, um unsere physikalische Welt zu beschreiben. Wir benötigen zusätzlich einen Abstands- und Winkelbegriff. Die zugehörige Mathematik (Skalarprodukte, bilineare Algebra) werden wir im zweiten Semester studieren.

Was Sie nebenbei lernen werden

Sie lernen in der lineare Algebra die strenge axiomatische Argumentationsweise kennen. Wir definieren Begriffe und formulieren Sätze über die definierten Objekte. Jeder dieser Sätze muss bewiesen werden. Dabei dürfen nur die Definition und bereits bewiesene Sätze verwendet werden.
Sie sollen in dieser Vorlesung nichts glauben, weil es Ihnen gesagt wird - es muss Ihnen logisch einwandfrei bewiesen werden. Wenn Ihnen ein Argument unvollständig oder unklar erscheint, so ist es ihr Recht und ihre Pflicht nachzufragen. Beim Lösen der Übungsaufgaben üben Sie das Formulieren von Beweisen auch ein. Außerdem ist es die Funktion der Übungsaufgaben, Sie bei der Beschäftigung mit dem Stoff anzuleiten. In den Übungsgruppen lernen Sie das Sprechen über Mathematik.

Warum muss ich die Vorlesung hören?

B. Sc. Physic: Weil Ihr Fach sehr viel und sehr schwierige Mathematik benötigt. Sie müssen daher nicht nur Mathematik lernen, sondern auch die Kommunikation mit Mathematikern. Hier legen wir die Grundlagen.
Lehramt: Weil in Deutschland ein Gymnasiallehrer:innen einen akademischen Abschluss in seinem Fach haben soll. Dafür fallen mir mehrere Gründe ein: Damit er/sie kompetent ist, wenn Schüler:innen schwierige Fragen haben. Damit er/sie beraten kann, wenn es um die Wahl eines mathematiklastigen Studienfachs geht. Damit er/sie eine Chance hat in Auseinandersetzungen mit Eltern, die ein solches Fach studiert haben. Wenn Sie im Laufe des Semesters merken, dass es Ihnen keinen Spaß macht, gehen Sie in die Studienberatung, um herauszubekommen, woran es liegt. Wenn es nur Anfangsschwierigkeiten sind: durchhalten. Wenn Sie im falschen Fach sind: schnell wechseln.
B. Sc. Mathematik: Sie haben es so gewollt.

Literatur

Die Verwendung von weiterer Literatur neben der Vorlesungsmitschrift empfiehlt sich sehr! Dieses Skript ist *kein Ersatz* - mit kleinen und größeren Fehlern muss jederzeit gerechnet werden. Es gibt eine Fülle von Lehrbüchern. Die deutschen Texte sind meist sehr ähnlich im Inhalt. Suchen Sie nach einem, dessen Stil Ihnen zusagt. In der Lehrbuchsammlung können Sie sich verschiedene Bücher

ausleihen und testen. Aufpassen sollten Sie nur, dass es wirklich ein Text für Mathematiker und nicht für Ingenieure ist. Kontrolle: Es sollten andere Körper als $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ vorkommen, der Dualraum sollte definiert werden. Bücher, auf denen 100 Seiten lang Matrizenoperationen geübt werden, sind nicht geeignet.
Zum Material der Vorlesung gibt es auch unzählige Youtube-Videos. Je nach Qualität können diese sehr erhellend sein. Die Vorlesung selbst ist auch ein Taktgeber und stellt klar, was wichtig ist.

(i) G. Fischer: Lineare Algebra, Vieweg Verlag 1989. (Eine Standardquelle in Deutschland)

(ii) F. Lorenz: Lineare Algebra I, BI-Wissenschafts-Verlag 1988 (Aufbau entspricht dem Vorgehen der Vorlesung)

(iii) K. Jänich: Lineare Algebra, 10. Auflage, Springer Verlag 2004 (sehr flüssig geschrieben, Teile des Textes gezielt für Physiker)

(iv) S. Lang: Algebra, Addison-Wesley 1993. (alternativer Zugang, Stoff geht weit über die lineare Algebra hinaus - ein treuer Begleiter für ein ganzes Mathematikerleben)

Kapitel 1

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Wir nehmen zunächst einen etwas naiven Standpunkt ein. Wir rechnen in rationalen oder reellen Zahlen. Wir beginnen der Einfachheit halber mit dem Fall von zwei Gleichungen in zwei Variablen.

Definition 1.1. *Seien a, b, c, d, e, f Zahlen. Dann heißt*

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

lineares Gleichungssystem für die Variablen x und y.

Wir machen uns an das Lösen:

(i) Der Fall $a = b = c = d = 0$. Das Gleichungssystem lautet

$$0 = e, 0 = f$$

Ist dies erfüllt, so sind alle Paare (x, y) Lösungen. Andernfalls ist das System unlösbar.

(ii) Der Fall: Einer der Koeffizienten a, b, c, d ist ungleich 0. Durch Vertauschen können wir annehmen, dass $a \neq 0$. Dann lösen wir die erste Gleichung nach x auf:

$$x = \frac{e}{a} - \frac{b}{a}y$$

und setzen in die zweite Gleichung ein:

$$c\left(\frac{e}{a} - \frac{b}{a}y\right) + dy = \frac{ce}{a} + \frac{-cb + ad}{a}y = f$$

bzw.

$$\frac{ad - bc}{a}y = f - \frac{cd}{a}.$$

Wieder sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(a) $ad - bc = 0$. Die Gleichung lautet also

$$\frac{ce}{a} = f \Leftrightarrow ce = af$$

Ist diese Gleichheit nicht erfüllt, so ist das System unlösbar. Ist sie erfüllt, so ist y beliebig und x berechnet sich aus y. Wir sagen: Wir haben einen "Freiheitsgrad". Oder: Der Lösungsraum ist "eindimensional".

(b) $ad - bc \neq 0$. Dann lösen wir weiter:

$$y = \frac{af}{ad-bc} - \frac{ce}{ad-bc}, x = \frac{de}{ad-bc} + \frac{-bf}{ad-bc},$$

Insbesondere gibt es eine Lösung und diese ist eindeutig.

Wir fassen zusammen:

Satz 1.2. *Seien a, b, c, d, e, f Zahlen. Das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

ist genau dann eindeutig lösbar, falls $\delta = ad - bc \neq 0$. In diesem Fall gilt

$$x = \frac{d}{\delta}e + \frac{-b}{\delta}f, y = \frac{-c}{\delta}e + \frac{a}{\delta}f$$

Beweis: Den Beweis haben wir oben geführt. Zu bemerken ist zusätzlich, dass die Aussagen mit dem Vertauschen von a, b, c, d verträglich sind. D.h. der Schritt "ohne Einschränkung ist $a \neq 0$" ist richtig. Auch im trivialen ersten Fall gilt die Aussage. □

Nun wenden wir uns dem allgemeinen Fall zu.

Definition 1.3. *Seien n, m natürliche Zahlen*[1]*. Seien a_{ij} und b_i für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ Zahlen. Dann heißt*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

lineares Gleichungssystem *in den Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$.*

Wir sprechen von m Gleichungen in n Unbekannten.

Definition 1.4. *Zwei lineare Gleichungssysteme mit n Unbekannten heißen* äquivalent*, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.*

[1] In dieser Vorlesung beginnen die natürlichen Zahlen mit 1, also $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$

Lösen eines Gleichungssystems bedeutet die Suche nach besonders einfachen Systemen, die zum gegebenen System äquivalent sind.

Beispiel. Multipliziert man eine Gleichung mit einer Zahl $\alpha \neq 0$, so ändert dies nichts an der Lösungsmenge. Die Gleichung $0 = 0$ kann weggelassen werden.

Definition 1.5. *Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem. Eine* elementare Zeilenumformung *ist der Übergang zu einem neuen System durch eine der Operationen:*

(i) Vertauschen zweier Gleichungen.

(ii) Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl ungleich 0.

(iii) Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Lemma 1.6. *Geht ein Gleichungssystem aus einem anderen durch eine elementare Zeilenumformung hervor, so sind sie äquivalent.*

Beweis: Eigentlich klar. Zur Übung führen wir die Details für (iii) aus. Wir betrachten ein Gleichungssystem von m Gleichungen in n Unbekannten. Die Operation benutzt nur zwei Gleichungen und lässt alle anderen unverändert. Es genügt daher, zur Vereinfachung der Notation, den Fall $m = 2$ zu betrachten. Wir betrachten also ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \end{aligned}$$

Wir addieren das α-fache der ersten Zeile zur zweiten. Das neue Gleichungssystem lautet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ (a_{21} + \alpha a_{11})x_1 + (a_{22} + \alpha a_{12})x_2 + \cdots + (a_{2n} + \alpha a_{1n})x_n &= b_2 + \alpha b_1 \end{aligned}$$

Ist $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung des ersten System, dann erfüllt es automatisch die unveränderte erste Gleichung des neuen Systems. Die Lösung erfüllt auch das System

$$\begin{aligned} \alpha a_{11}x_1 + \alpha a_{12}x_2 + \cdots + \alpha a_{1n}x_n &= \alpha b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \end{aligned}$$

und dann auch die Summe der beiden Gleichungen. Dies ist genau die zweite Gleichung des transformierten Systems.
Ist $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Lösungsvektor des zweiten Systems, so ist umgekehrt zu zeigen, dass alle Gleichungen des ersten Systems erfüllt sind. Das erste System geht aus dem zweiten ebenfalls durch eine elementare Zeilentransformation hervor, nämlich die Addition des $-\alpha$-fachen der ersten Zeile zur zweiten Zeile. Diese Aussage gilt also nach dem bereits betrachteten Fall. $\square$

Bemerkung. Mit etwas Tricksen führt man (i) und (ii) auf (iii) zurück. Das wird z.B. in der Informatik beim Vertauschen von Speicherinhalten benutzt.

Theorem 1.7 (Gauß-Algorithmus)**.** *Gegeben sei ein Gleichungssystem von m Gleichungen in n Unbekannten.*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Dann gibt es eine Zahl $r \leq n, m$, so dass das System bis auf Vertauschen der Unbekannten äquivalent ist zu einem System der Form

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\dots \\ x_r + \cdots + a'_{rn}x_n &= b'_r \\ 0 &= b'_{r+1} \\ &\dots \\ 0 &= b'_m \end{aligned}$$

Das neue System entsteht aus dem alten durch elementare Zeilentransformationen. Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $b'_{r+1} = \cdots = b'_m = 0$. Dann gibt es für jede Wahl von $x_{r+1}, \dots, x_n$ einen eindeutigen Lösungsvektor $(x_1, \dots, x_n)$.

Bemerkung. Genauso wichtig wie die Aussage ist das im Beweis verwendete Lösungsverfahren. Es ist von großer praktischer Bedeutung.

Beweis: Wir bringen der Reihe nach die erste, dann die zweite, dann die dritte Zeile und Spalte usw. in die gewünschte Form. Wir benutzen die Notation a_{ij}, b_i jeweils auch für die neuen Gleichungssysteme. Dies sollte nicht zu Verwirrung führen.

1. Schritt: Durch Vertauschen von Gleichungen erreichen wir, dass die erste Zeile einen Koeffizienten ungleich 0 enthält. (Dies ist unmöglich, wenn alle Koeffizienten $a_{ij} = 0$ sind. Dann gilt der Satz bereits.) Durch Vertauschen von Variablen erhalten wir ein Gleichungsystem mit $a_{11} \neq 0$. Wir dividieren die erste Zeile durch a_{11}. Damit hat die erste Zeile die gewünschte Form. Wir subtrahieren nun für $2 \leq i \leq m$ das a_{i1}-fache der (neuen) ersten Zeile von der i-ten Zeile. Im neuen Gleichungssystem hat die erste Zeile und die erste Spalte die gewünschte Form.

2. Schritt: Durch Vertauschen der Gleichungen 2 bis m erreichen wir, dass die zweite Zeile einen Eintrag ungleich 0 enthält. (Dies ist unmöglich, wenn alle Koeffizienten $a_{ij} = 0$ sind für $i \geq 2$. Dann gilt der Satz bereits.) Durch Vertauschen der Unbekannten 2 bis n erhalten wir ein Gleichungssystem mit

$a_{21} = 0$, $a_{22} \neq 0$. Wir dividieren die zweite Gleichung durch a_{22}. Damit hat die zweite Zeile die gewünschte Form. Wir subtrahieren nun für $3 \leq i \leq m$ das a_{i2}-fache der neuen zweiten Zeile von der i-ten Zeile. Bei der neuen Matrix haben die ersten beiden Zeilen und Spalten die gewünschte Form
3. bis m-ter Schritt: Genauso
Die Ausage über die Lösbarkeit ist klar. Die übrigen r Gleichungen lassen sich jeweils auflösen nach der ersten vorkommenden Variable x_i. Durch Einsetzen von unten nach oben erhält man für jedes $x_{r+1}, \ldots, x_n$ eine eindeutige Lösung $(x_1, \ldots, x_n)$. □

Bemerkung. Ist $r = m$, so ist das System automatisch lösbar. Ist das System eindeutig lösbar, so muss $r = n$ sein, insbesondere also auch $m \geq n$.

Frage. Ist die Zahl r aus dem Theorem eindeutig?

Diese Frage wird uns nun für einige Zeit beschäftigen. Zu ihrer Beantwortung werden wir uns auf die *Struktur* der Lösungsmenge konzentrieren und einiges an abstrakter Begrifflichkeit einführen.

Matrizen

Wir führen gleich eine abkürzende Schreibweise ein, die uns in der gesamten linearen Algebra begleiten wird.

Definition 1.8. *Seien n, m natürliche Zahlen. Seien a_{ij} für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ Zahlen. Dann heißt*

$$A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,n} = (a_{ij})_{m,n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$-Matrix *mit den Einträgen a_{ij}.*
$n \times n$-Matrizen heißen quadratisch*. Eine $m \times 1$-Matrix*

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_m \end{pmatrix}$$

heißt auch Spaltenvektor *der Länge m. Eine $1 \times n$-Matrix*

$$w = (w_1 w_2 \ldots w_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

heißt auch Zeilenvektor *der Länge n.*

Matrizen kann man leicht addieren und mit Zahlen multiplizieren.

Definition 1.9. *Für $m, n \in \mathbb{N}$ seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ $m \times n$-Matrizen, sowie α eine Zahl. Dann heißt*

$$A + B = (c_{ij}) \text{ mit } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ für alle } i, j$$

die Summe *der Matrizen. Weiter heißt*

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,n}$$

skalares Vielfaches *von A. Die* Nullmatrix *ist die $n \times m$-Matrix mit allen Einträgen gleich* 0*. Die* Einheitsmatrix *ist die $n \times n$-Matrix*

$$\begin{aligned} E_n =& (\delta_{ij})_{n,n} \text{ wobei } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung. Eine Variable $x, a, \dots$ kann also sowohl für eine Zahl, einen Zeilen- oder Spaltenvektor oder sogar eine Matrix stehen. Dies muss jeweils im Kontext klar sein bzw. definiert werden. Aus Gründen der Schreibökonomie schreiben wir auch oft $(b_1, \dots, b_n)$ für den *Spaltenvektor* $\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$. Das Symbol 0 kann eine Zahl, ein Nullvektor oder eine Nullmatrix sein - auch hier unterscheiden wir nicht in der Notation.

Matrizen lassen sich multiplizieren:

Definition 1.10. *Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij})_{m,p}$ eine $m \times p$-Matrix und $B = (b_{jk})_{p,n}$ eine $p \times n$-Matrix. Dann ist $AB = (c_{ik})_{m,n}$ die $m \times n$-Matrix mit den Einträgen*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k} + \dots + a_{ip} b_{pk}$$

Merkregel: i-te Zeile mal k-te Spalte für den Eintrag ik.

Beispiel. (i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2 & 1+4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$(1, 0, 1, 9) \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = (2 + 0 + 1 + 36) = (39)$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} (1,0,1,9) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 18 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 9 \\ 4 & 0 & 4 & 36 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist nicht definiert}$$

Zunächst zurück zu unserem Thema.
Das lineare Gleichungssystem aus Definition 1.8 schreiben wir jetzt:

$$Ax = b$$

mit $A = (a_{ij})_{m,n}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ und dem Lösungsvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Die Matrix

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

heißt *erweiterte Koeffizientenmatrix* des Gleichungssystems.

Bemerkung. In Satz 1.2 ging es um die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und die Gleichung

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix}$$

Die Zahl $\delta = ad - bc$ heißt *Determinante* $\det(A)$ von A. Auch die Lösungsformel schreibt sich am einfachsten mit Matrizen. Ist $\det(A) \neq 0$, so gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\det(A)} & \frac{-b}{\det(A)} \\ \frac{-c}{\det(A)} & \frac{a}{\det(A)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Wie für Zahlen vereinbaren wir Punkt vor Strichrechnung.

Satz 1.11 (Rechenregeln für Matrizen)**.** *Seien A, B, C, D, F, G Matrizen, so dass jeweils die Rechenoperationen definiert sind. Seien α, β Zahlen.*

(i) *(Assoziativität der Addition)*

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

(ii) *(Kommutativität der Addition)*

$$A + B = B + A$$

(iii) *(Assoziativität der Multiplikation)*

$$A(BC) = (AB)C$$

(iv) *(neutrales Element der Multiplikation)*

$$E_m A = A, AE_n = A$$

(v) *(Distributivitätsgesetze der Matrixmultiplikation)*

$$\begin{aligned} A(B + C) &= AB + AC \\ (D + F)G &= DG + FG \end{aligned}$$

(vi) *(Assoziativgesetze der skalaren Multiplikation)*

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)A &= \alpha(\beta A) \\ \alpha(AB) &= (\alpha A)B = A(\alpha B) \end{aligned}$$

(vii) *(Distributivgesetze der skalaren Multiplikation)*

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)A &= \alpha A + \beta A \\ \alpha(A + B) &= \alpha A + \alpha B \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Multiplikation ist nicht kommutativ! Meist ist nur eines der beiden Produkte überhaupt definiert.

Beweis: Hinschreiben, nachrechnen mit den Rechenregeln für Zahlen. Wir führen den Beweis für die Regel (iii) aus. Seien

$$A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{jk})_{n,p}, C = (c_{kl})_{p,q}$$

Nach Definition gilt

$$AB = \left(\sum_j a_{ij} b_{jk}\right)_{i=1,k=1}^{m,p}, \qquad (AB)C = \left(\sum_k \left(\sum_j a_{ij} b_{jk}\right) c_{kl}\right)_{i=1,l=1}^{m,q}$$

Und anderseits gilt

$$BC = \left(\sum_k b_{jk} c_{kl}\right)_{j=1,l=1}^{n,q}, \qquad A(BC) = \left(\sum_j a_{ij} \left(\sum_k b_{jk} c_{kl}\right)\right)_{i=1,l=1}^{m,q}$$

Die Behauptung gilt, da für jedes i, l gilt

$$\sum_k \left(\sum_j a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k,j} a_{ij} b_{jk} c_{kl} = \sum_j a_{ij} \left(\sum_k b_{jk} c_{kl} \right)$$

□

Bemerkung. In der Physik kommen viele solche Rechnungen vor. Dort gibt es eine abkürzende Notation: In einem Ausdruck wie $a_{ij}b_{jk}$ oder $a_{ij}b_{jk}c_{kl}$ wird über alle Indizes summiert, die doppelt vorkommen. Damit vereinfacht sich unsere Rechnung zu

$$a_{ij}(b_{jk}c_{kl}) = (a_{ij}b_{jk})c_{kl}$$

a_{ii} steht für $\mathrm{Spur}(a_{ij}) = \sum_i a_{ii}$, die Spur der Matrix. In einer Verfeinerung unterscheidet man noch zwischen Zeilen und Spaltenindizes. a_i^j ist die Matrix $(a_i^j)_{i=1,j=1}^{m,n}$. Damit ist klar, dass b_i ein Spaltenvektor ist, b^i jedoch ein Zeilenvektor. Matrixmultiplikation ist $a_i^j b_j^k$, d.h. es wird summiert über doppelte Indizes, aber das ist nur erlaubt, falls ein Index oben, der andere unten steht ("Kontraktion"). Diese Notation gibt es auch mit mehr als zwei Indizes, dann spricht man von Tensoren. Mathematisch steht dahinter das Tensorprodukt, das wir in der LA I wohl nicht mehr behandeln werden.

Nun wenden wir dies auf unsere Gleichungssysteme an.

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$A'A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da - bc & bd - bd \\ -ca + ac & -cb + da \end{pmatrix} = \det(A)E_2$$

Für $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ rechnen wir also

$$Ax = B \Rightarrow \det(A)x = \det(A)E_2 x = A'Ax = A'B \Rightarrow x = \det(A)^{-1}A'B$$

Genau das hatten wir vorher per Hand hergeleitet.

Definition 1.12. *Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem. Es heißt* homogen, *falls $b = 0$, andernfalls* inhomogen. *$Ax = 0$ heißt zu $Ax = b$ korrespondierendes homogenes Gleichungssystem.*

Lemma 1.13. *Sei $Ax = 0$ ein homogenes Gleichungssystem.*

(i) Sind x, x' Lösungsvektoren des Systems, so auch $x + x'$.

(ii) Ist α eine Zahl, x ein Lösungsvektor, so auch αx.

Beweis: Dieses Lemma ist so wichtig, dass wir den Beweis genau durchgehen. Nach Voraussetzung gilt $Ax = Ax' = 0$. Dann folgt

$$0 = Ax + Ax' \overset{(v)}{=} A(x + x') \qquad 0 = \alpha 0 = \alpha(Ax) \overset{(vi)}{=} A(\alpha x)$$

□

Wir sagen: Die Lösungen eines homogenen Systems bilden einen Vektorraum (nächstes Kapitel).

Lemma 1.14. *Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem. Hat es eine Lösung x_0, so hat jede Lösung eindeutig die Form $x + x_0$, wobei x eine Lösung des korrespondierenden homogenen Systems ist.*

Beweis: Wir setzen $Ax_0 = b$ voraus. Sei x eine Lösung des homogenen Systems, also $Ax = 0$. Dann folgt

$$A(x + x_0) = Ax + Ax_0 = 0 + b = b$$

Sei umgekehrt y eine andere Lösung des inhomogenen Systems. Wir schreiben $y = x + x_0$. Dann folgt

$$Ax = A(y - x_0) = Ay - Ax_0 = b - b = 0$$

□

Wir sagen: Die Lösungen des inhomogenen Systems bilden eine affinen Raum. Alle Operationen mit Gleichungssystemen sind natürlich auch Operationen mit Matrizen.

Definition 1.15. *Sei A eine $m \times n$-Matrix. Eine* elementare Zeilenumformung *ist der Übergang zu einer $m \times n$-Matrix durch eine der Operationen:*

(i) Vertauschen zweier Zeilen.

(ii) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich 0.

(iii) Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Analog definieren wir elementare Spaltenumformungen.

Satz 1.16 (Matrizennormalform)**.** *Sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann kann A durch eine Kette von elementaren Zeilenumformungen und Vertauschen von Spalten überführt werden in eine Matrix A' der Form*

$$A' = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei B eine $r \times r$-Matrix ist der Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2r} \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

und C eine beliebige $r \times (n-r)$-Matrix.
Durch eine Kette von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen kann A überführt werden in eine Matrix A'' der Form

$$A'' = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis: Die erste Aussage erhalten wir durch die Anwendung des Gauß-Algorithmus auf $Ax = 0$.
Danach subtrahieren wir von der ersten Zeile das b_{21}-fache der zweiten Zeile, dann das b_{31}-fache der dritten Zeile usw. Wir subtrahieren das b_{32}-fache der dritten Zeile von der zweiten, dann das b_{42}-fache der vierten Zeile von der zweiten usw. Mit diesem Verfahren erhalten wir eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} E_r & C' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun wenden wir elementare Spaltentransformationen an. Durch Subtraktion von Vielfachen der ersten r Spalten werden alle Einträge von C' gelöscht. $\square$

Frage. Wie oben: Ist r eindeutig?