**Aprendizagem**

Instituto Superior Técnico

outubro de 2023

---

# Homework 4 - Report

**Joana Pimenta (103730), Rodrigo Laia (102674)**

# Pen and Paper

1. Fórmulas utilizadas:

$$\gamma_{ki} = p(c_k|\mathbf{x}_i) = \frac{p(c_k)p(\mathbf{x}_i|c_k)}{p(\mathbf{x}_i)} \tag{1}$$

$$p(\mathbf{x}_i) = p(c_1)p(\mathbf{x}_i|c_1) + p(c_2)p(\mathbf{x}_i|c_2) \tag{2}$$

$$p(\mathbf{x}_i|c_k) = \begin{cases} p_k \cdot \mathcal{N}(\mathbf{x}_i|\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) & \text{se } y_1 = 1 \\ (1-p_k) \cdot \mathcal{N}(\mathbf{x}_i|\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) & \text{se } y_1 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

**E-step:**

Cálculo das probabilidades $p(\mathbf{x}_i)$

$$p(\mathbf{x}_1) = 0.05185$$

$$p(\mathbf{x}_2) = 0.02775$$

$$p(\mathbf{x}_3) = 0.04337$$

$$p(\mathbf{x}_4) = 0.05243$$

Cálculos dos $\gamma_{ki}$

$$\gamma_{k=1,i=1} = 0.19259$$

$$\gamma_{k=2,i=1} = 0.80741$$

$$\gamma_{k=1,i=2} = 0.63135$$

$$\gamma_{k=2,i=2} = 0.36865$$

$$\gamma_{k=1,i=3} = 0.55181$$

$$\gamma_{k=2,i=3} = 0.44819$$

$$\gamma_{k=1,i=4} = 0.16892$$

$$\gamma_{k=2,i=4} = 0.83108$$

**M-step:**

Cada observação $\mathbf{x}_i$ permite atualizar os parâmetros com peso $\gamma_{ki}$. Assim calculamos os novos parâmetros atualizados para cada cluster utilizando as seguintes fórmulas.

$$N_k = \sum_{i=1}^{4} \gamma_{ki} \tag{4}$$

$$\pi_k = \frac{N_k}{N} \tag{5}$$

$$P_k(y_1 = 1) = \frac{\sum_{i=1}^{4} \gamma_{ki} \cdot p(y_1 = 1|\mathbf{x}_i)}{\sum_{i=1}^{4} \gamma_{ki}} \tag{6}$$

Nota: A probabilidade $p(y_1 = 1|\mathbf{x}_i)$ é 1 se $y_1$ de $\mathbf{x}_i$ for 1 e 0 caso contrário.

$$\boldsymbol{\mu}_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{4} \gamma_{ki} \mathbf{x}_i \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{4} \gamma_{ki} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T \tag{8}$$

Parâmetros atualizados:

$$\pi_1 = 0.38617$$

$$\pi_2 = 0.61383$$

$$P_{k=1}(y_1 = 1) = 0.23404$$

$$P_{k=2}(y_1 = 1) = 0.66732$$

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 0.02651 \\ 0.50713 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 0.30914 \\ 0.21042 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0.14137 & -0.10541 \\ -0.10541 & 0.09605 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0.10829 & -0.08865 \\ -0.08865 & 0.10412 \end{bmatrix}$$

2. Considerando o critério de *máximo a posteriori* Para decidir a que cluster pertence a observação $\mathbf{x}_{new}$ precisamos de calcular o seu posterior. Para isso utilizamos a seguinte fórmula:

$$p(cluster = k|\mathbf{x}_{new}) = \frac{p(cluster = k)p(\mathbf{x}_{new}|cluster = k)}{p(\mathbf{x}_{new})} \tag{9}$$

Cálculos:

$$p(\mathbf{x}_{new}) = 0.03048$$

$$p(cluster = 1|\mathbf{x}_{new}) = 0.08029$$

$$p(cluster = 2|\mathbf{x}_{new}) = 0.91971$$

Como $p(cluster = 2|\mathbf{x}_{new}) > p(cluster = 1|\mathbf{x}_{new})$, então a observação $\mathbf{x}_{new}$ pertence ao cluster 2.

3. Neste exercício assumimos que o cluster atribuído a cada observação é é escolhido pelo critério de *maximum likelihood*. Assim, o cluster escolhido é dado por:

$$cluster = \arg\max_k p(\mathbf{x}_i|cluster = k) \tag{10}$$

Em que $p(\mathbf{x}_i|cluster = k)$ é dado pela fórmula (3).

Assim,

| Observação | $p(\mathbf{x}_i\|cluster = 1)$ | $p(\mathbf{x}_i\|cluster = 2)$ | Cluster atribuído |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{x_1}$ | 0.59941 | 1.54691 | 2 |
| $\mathbf{x_2}$ | 1.26633 | 0.08874 | 1 |
| $\mathbf{x_3}$ | 1.43811 | 0.45417 | 1 |
| $\mathbf{x_4}$ | 0.02077 | 0.72331 | 2 |

Coeficiente de Silhueta:

$$s_i = 1 - \frac{a(\mathbf{x}_i)}{b(\mathbf{x}_i)} \tag{11}$$

em que $a(\mathbf{x}_i)$ é a distância média entre $\mathbf{x}_i$ e as outras observações no mesmo cluster e $b(\mathbf{x}_i)$ é a distância média entre $\mathbf{x}_i$ e as observações no outro cluster.

A silhueta de um cluster é dada pela média dos coeficientes de silhueta de todas as observações pertencentes a esse cluster.

A silhueta da solução é por sua vez dada pela média das silhuetas de todos os clusters.

Neste caso a distância considerada é a distância de Manhattan, logo:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i| \tag{12}$$

Assim, as silhuetas obtidas foram:

| cluster | $\mathbf{x}_i$ | a($\mathbf{x}_i$) | b($\mathbf{x}_i$) | s($\mathbf{x}_i$) | s(cluster) | s(sol) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\mathbf{x}_2$ | 0.3(9) | 2.25 | 0.(6) | 0.58(3) | 0.702(7) |
| | $\mathbf{x}_3$ | 0.9 | 2.7 | 0.4(9) | | |
| 2 | $\mathbf{x}_1$ | 0.9 | 1.7(9) | 0.8(2) | 0.8(2) | |
| | $\mathbf{x}_4$ | 0.3(9) | 2.25 | 0.8(2) | | |

4. A purity é dada por:

$$\text{purity} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{K} \max_j |c_k \cap t_j| = \frac{1}{N} \left( \max_j |c_1 \cap t_j| + \max_j |c_2 \cap t_j| \right) \tag{13}$$

Uma vez que temos uma purity de 0.75 e um número total de observações de 4, então $\frac{1}{N}\left(\max_j |c_1 \cap t_j| + \max_j |c_2 \cap t_j|\right) = 0.75 \times 4 = 3$

Logo podemos ter os seguintes casos:

(a) $\max_j |c_1 \cap t_j| = 3$ e $\max_j |c_2 \cap t_j| = 0$

(b) $\max_j |c_1 \cap t_j| = 2$ e $\max_j |c_2 \cap t_j| = 1$

(c) $\max_j |c_1 \cap t_j| = 1$ e $\max_j |c_2 \cap t_j| = 2$

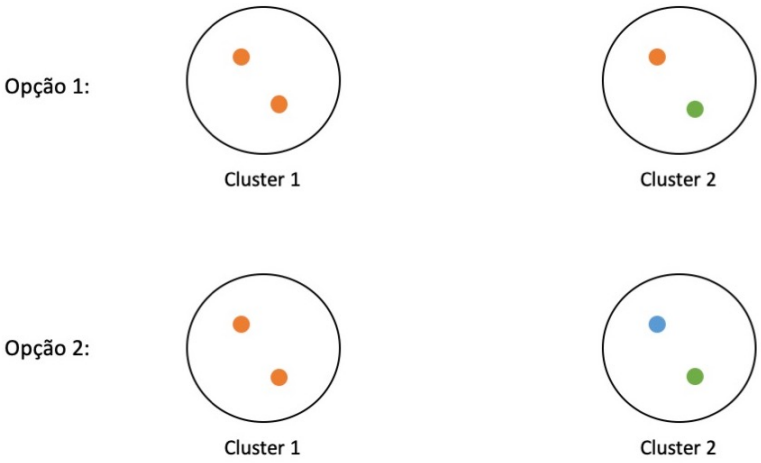
(d) $\max_j |c_1 \cap t_j| = 0$ e $\max_j |c_2 \cap t_j| = 3$

As opções (a) e (d) não são possíveis porque o cluster 2 e 1 só têm 2 observações cada um.

**Opção (b)**

Neste caso, as observações do cluster 1 são as duas classificadas corretamente. No cluster 2 uma é corretamente identificada e a outra não. Assim, as observações no cluster 1 têm a mesma classificação; uma das observações do cluster 2 tem classificação diferente das do cluster 1 e a outra pode ter classificação igual às do cluster 1 (opção 1) ou diferente, sendo que neste caso é também diferente da classificação do outra observação do cluster 2 (opção 2). Assim, conclui-se que o número verdadeiro de classes pode ser 2 ou 3.

Para visualizar melhor as opções possíveis fizemos os seguintes esquemas (bolas de cores diferentes representam classes verdadeiras diferentes):




**Opção (c)**

O raciocínio é semelhante ao da opção (b). Conclui-se que o número verdadeiro de classes pode ser 2 ou 3.

# Programming - Código Python e Resultados Obtidos

1. Código Utilizado:

2. Código Utilizado:

3. Código Utilizado:

4.