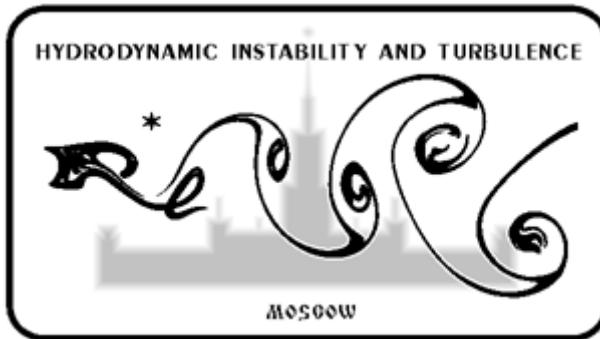


**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
НИИ МЕХАНИКИ МГУ**



МАТЕРИАЛЫ

**XXII МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ТУРБУЛЕНТ-
НОСТЬ»**

14—21 февраля 2016 г.

**Московская область, г. Звенигород,
пансионат «Звенигородский» РАН**

УДК 532.516.532.517

ББК 35.114

М 43

Материалы международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность»

14 – 21 февраля 2016 г. Московская область, пансионат «Звенигородский» РАН. – М.: Издательство Московского университета, 2016. – 310 с.

Ответственный редактор – Никитин Н.В.

Технический редактор – Попеленская Н.В.

В материалах отражено современное состояние теории гидродинамической устойчивости и турбулентности. Представлены экспериментальные и теоретические работы по прямому численному моделированию турбулентности и по переходу к турбулентности. Сборник будет полезен аспирантам, студентам и научным сотрудникам.

СПИСОК ДОКЛАДОВ

1. **Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В.** Одномодовый флаттер пластин, имеющих форму прямоугольника, трапеции и параллелограмма.
2. **Агеев А.И., Осипцов А.Н.** Параметрическое исследование осредненного скольжения на текстурированной супергидрофобной поверхности методом граничных интегральных уравнений.
3. **Азанов Г.М., Осипцов А.Н.** Исследование безмашинного энергоразделения потока сжимаемого газа.
4. **Аллилуева А.И., Шафаревич А.И.** Асимптотические уравнения системы магнитной гидродинамики, описывающие сглаженные разрывы.
5. **Андронов П.Р., Гувернюк С.В.** Обтекание проницаемой круговой дужки вязкой несжимаемой средой под углом атаки.
6. **Афанасьев А.А., Беляева Е.А.** Линейный анализ устойчивости серпентинизации в кимберлитовых трубках.
7. **Бессонов О.А.** Влияние вращения кристалла на устойчивость течения в модели метода Чохральского при различных числах Прандтля.
8. **Богданов А.Н., Диесперов В.Н., Жук В.И.** Асимптотики дисперсионных кривых в задачах нестационарного свободного вязко-невязкого взаимодействия на трансзвуковых скоростях.
9. **Бондарев В.О., Веденеев В.В.** Устойчивость конечных и бесконечных пластин при наличии пограничного слоя.
10. **Бородулин В.И., Иванов А.В., Качанов Ю.С., Мищенко Д.А., Феденкова А.А.** Количественное исследование механизма распределенного порождения трёхмерных волн ТШ при рассеянии вихрей потока на неоднородной стенке в тормозящемся пограничном слое.
11. **Буркова Л.Н., Буркова Е.Н., Кондрашов А.Н., Рыбкин К.А.** Исследование дрейфа всплывающих эйлеровых многогранников.
12. **Власов К.О., Долинский В.Ю., Мешков Е.Е., Новикова И.А.** Разработка метода исследования двумерного течения около всплывающего полого цилиндра.
13. **Власова О.А., Козлов Н.В.** Динамика тяжелого тела во вращающейся цилиндрической полости с жидкостью.

14. **Вяткин А.А., Козлов В.Г., Сираев Р.Р.** Конвективная устойчивость неизотермической жидкости во вращающемся горизонтальном цилиндрическом слое.
15. **Гембаржевский Г.В., Леднев А.К., Осипенко К.Ю.** Обобщение модели следа от двух цилиндров в форме нелинейно-связанных осцилляторов.
16. **Глиннов А.П., Головин А.П., Козлов П.В.** Некоторые особенности конвективных течений, обусловленных развитием перегревной неустойчивости дугового разряда между проницаемыми электродами.
17. **Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.** Устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа.
18. **Джалалова М.В.** Компьютерное моделирование процесса формообразования купола квадратного парашюта.
19. **Дрюма В.С.** Об интегрировании уравнений течения несжимаемой жидкости.

english version

20. **Дунаев П.Д., Кондрашов А.Н., Сбоев И.О.** Экспериментальное исследование влияния формы и размеров нагревателя на формирование конвективного факела.
21. **Дьякова В.В., Полежаев Д.А.** Динамика сыпучей среды в неравномерно вращающемся горизонтальном цилиндре.
22. **Ермаков М.К.** Исследование устойчивости термокапиллярной конвекции в жидких мостах при больших числах Прандтля.
23. **Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.** Воспроизведение некоторых свойств атмосферной турбулентности в численном и лабораторном экспериментах.
24. **Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.** Переход к турбулентности в ограниченной части сферического слоя в случае встречных вращательных колебаний границ.
25. **Жуков К.А., Попов А.В.** Численное моделирование течений вязкого баротропного газа, используя новые разностные схемы.
26. **Здитовец А.Г., Виноградов Ю.А., Стронгин М.М.** Экспериментальное исследование безмашинного энергоразделения в трубе Леонтьева.
27. **Зыбин К.П., Сирота В.А.** Модель вытягивающихся вихрей и обоснование статистических свойств турбулентности.

28. **Исаев С.А., Баранов П.А., Судаков А.Г., Усачов А.Е., Гувернюк С.В., Дектерев А.А., Гаврилов А.А.** Тестирование дифференциальных полу-эмпирических моделей турбулентности, в том числе модифицированных с учетом кривизны линий тока, на примере обтекания полукругового профиля при нулевом угле атаки, включая влияние вихревой ячейки со щелевым отсосом вентилятором и истечением струи в ближний след.
29. **Карелин А.Н.** Натурное моделирование межмашинного руслового канала для проведения исследований аэродинамики турбулентного воздушного потока.
30. **Качанов Ю.С., Бородулин В.И., Иванов А.В.** Универсальный критерий турбулизации трёхмерного пограничного слоя и его расчёт.
31. **Кирий В.А., Ганченко Н.Ю.** Численное моделирование неустойчивости около мембран с дефектами проводимости.
32. **Киселёв Н.А., Бурцев С.А., Стронгин М.М., Виноградов Ю.А.** Экспериментальное исследование процессов теплопередачи и сопротивления на облуненных поверхностях.
33. **Козлов В.В., Грек Г.Р., Коробейничев О.П., Литвиненко Ю.А., Шмаков А.Г.** Горение истекающей в воздух высокоскоростной микроструи водорода.
34. **Козлов В.В., Толкачев С.Н.** Исследование продольных вихрей за шероховатостью и их вторичной неустойчивости на передней кромке скользящего крыла.
35. **Козлов Н.В., Шувалова Д.А.** Волны на центрифугированной границе раздела жидкостей во вращающейся полости при поперечных вибрациях.
36. **Колдoba Е.В., Романова А.Ю.** Использование принципа соответственных состояний для вычисления вязкости многокомпонентного раствора.
37. **Коновалов В.С., Козлов А.Н., Колдoba Е.В., Коробицин Д.А., Приходько Л.А.** Неустойчивость течений ионизующегося газа в канале коаксиального плазменного ускорителя.
38. **Копьев А.В., Зыбин К.П.** Псевдо-Гауссово распределение: обратимый аналог реального распределения градиентов скоростей в развитом турбулентном потоке.

39. **Копьев В.Ф., Чернышев С.А.** Механизмы длинноволновой неустойчивости в локализованных трехмерных вихрях и переход к турбулентности.
40. **Косинов А.Д., Ермолаев Ю.Г., Колосов Г.Л., Панина А.В., Семенов Н.В., Яцких А.А.** К механизму воздействия слабых ударных волн на ламинарно-турбулентный переход в сверхзвуковом пограничном слое.
41. **Краснопольский Б.И., Парамонов В.П., Никитин Н.В.** О влиянии геометрии змеевика на гидравлическое сопротивление трубы.
42. **Кривоносова О.Э., Жиленко Д.Ю.** Волновые структуры течений, определяемые по пространственному распределению мгновенной разности фаз.
43. **Куропаткин М.В., Спесивцев П.Е.** Численное моделирование многофазных течений через трубы с переменным поперечным сечением.
44. **Лопато А.И., Уткин П.С.** Исследование устойчивости распространения волны газовой детонации в двух постановках.
45. **Люшнин А.В., Гордеева В.Ю.** Использование прекурсационной модели для описания испарения тонкого слоя полярной жидкости при наличии на свободной поверхности растворимого сурфактанта.
46. **Макарова М.С., Лущик В.Г.** Численное исследование турбулентного числа Прандтля для газовых смесей при течении в трубе с проницаемыми стенками.
47. **Монахов А.А.** Кавитационное свечение слабопроводящей жидкости в тонком диэлектрическом канале.
48. **Моршнева И.В.** О периодических конвективных течениях в горизонтальном слое бинарной смеси.
49. **Никитин Н.В.** Исследование структуры и динамики пристенной турбулентности методом анализа расхождения турбулентных полей.
50. **Осипцов А.А., Екатерина Зилонова, Сергей Боронин, Наталья Лебедева, Дин Виллберг, Жан Дерош** Взаимодействие эффектов пальцевой неустойчивости и гравитационной конвекции при вытеснении жидкостей с пределом текучести в ячейке Хеле-Шоу.

english version

51. **Ощепков В.О., Бабушкин И.А.** Экспериментальное исследование влияния наклона в плоскости широких граней ячейки Хеле-Шоу на конвективное течение бинарной смеси.

52. **Переходцева Э.В.** Гидродинамико-статистическая модель прогноза сильных шквалов и смерчей умеренных широт при неустойчиво стратифицированной атмосфере и результаты независимых испытаний этого прогноза для территории ЕТР.
53. **Петрова Е.И., Моршнева И.В.** Ветвление и устойчивость автоколебаний в вертикальном слое бинарной смеси при наличии термодиффузии.
54. **Петрова Л.И.** Свойства решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса. Особенности численного моделирования.
55. **Петрова Т.А., Шугаев Ф.В.** Частота акустического излучения цилиндрического вихря на плоскости.
56. **Пивоваров Д.Е.** Численное моделирование турбулентных всплесков в конвекции Рэлея-Бенара.
57. **Пиманов В.О., Никитин Н.В.** Исследование локализованных турбулентных структур в круглых трубах при переходных числах Рейнольдса.
58. **Попеленская Н.В., Никитин Н.В.** Численный алгоритм расчета турбулентных вторичных течений вдоль двугранного угла произвольной величины.
59. **Попович С.С., Виноградов Ю.А., Здитовец А.Г., Стронгин М.М.** Экспериментальное исследование влияния скачков уплотнения на эффективность процесса газодинамической температурной стратификации.
60. **Прокофьев В.В., Козлов И.И., С.А. Очеретяный** Нестационарные эффекты в течениях с образованием каверн с отрицательным числом кавитации.
61. **Просвиряков Е.Ю.** О новом классе точных решений уравнений термодиффузии.
62. **Решмин А.И., Тепловодский С.Х., Трифонов В.В., Сударикова А.Д.** Безотрывное турбулентное течение в прямом круглом диффузоре при положительном градиенте давления.
63. **Решмин А.И., Зайко Ю.С., Навознов О.И, Сударикова А.Д., Тепловодский С.Х.** Разработка технологии формирования круглых затопленных струй с увеличенной длиной начального участка.
64. **Романова Д. И.** Численное моделирование склоновых потоков в пакете OpenFOAM.

65. **Рысин К.Ю., Вяткин А.А., Козлов В.Г.** Влияние вибраций круговой поляризации на тепловую конвекцию во вращающемся горизонтальном плоском слое.
66. **Сафонов А.А.** Особенности капиллярного распада струи жидкости при числах Онезорга больше единицы.
67. **Сбоев И.О., Кондрашов А.Н., Дунаев П.Д.** Формирование конвективного течения вблизи локального источника тепла различной формы.
68. **Семенов Н.В., Дрясов А.Д., Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Семенов А.Н., Яцких А.А.** О ламинарно-турбулентном переходе в сверхзвуковом пограничном слое на скользящем крыле.
69. **Сибгатуллин И.Н., Е. Ерманюк, С. Brouzet, Т. Dauxois, S. Joubaud**
Каскадные процессы в стратифицированных средах: эксперимент и прямое численное моделирование.
70. **Симоненко М.М., Гувернюк С.В., Зубков А.Ф., Синявин А.А.** Особенности сверхзвукового обтекания кольцевых каверн.
71. **Смородский Б.В., Гапонов С.А., Ермолаев Ю.Г., Колесов Г.Л., Косинов А.Д., Семенов Н.В.** О трехволновом взаимодействии возмущений в сверхзвуковом пограничном слое скользящего крыла.
72. **Смородский Б.В., Гапонов С.А.** Об устойчивости сжимаемого пограничного слоя бинарной смеси газов.
73. **Соромотин А.А., Бабушкин И.А.** Экспериментальное исследование влияния алюминиевой пудры на конвекцию в плоском слое при воздействии поляризованных по кругу вибраций.
74. **Стрижак С.В., Сибгатуллин И.Н.** Моделирование распыла струи жидкого топлива с учетом моделей неустойчивости Релея-Тейлора и Кельвина-Гельмгольца.
75. **Субботин С.В., Козлов Н.В., Козлов В.Г.** Зональное течение, генерируемое колеблющимся ядром во вращающейся сферической полости.
76. **Сударикова А.Д., Зайко Ю.С., Навознов О.И., Решмин А.И., Тепловодский С.Х., Трифонов В.В.** Экспериментальное исследование течения в сверхкоротких диффузорах.
77. **Суэтнова Е.И.** Фильтрация в окрестности подводных грязевых вулканов как механизм накопления газовых гидратов.
78. **Суркова Д.В., Пименов В.П.** Теоретическое исследование неизотермических эффектов в многофазных потоках.

79. **Такмазьян А.К., Прокофьев В.В.** Гидростатические эффекты в механизме создания тяги против волн у плавучей наклонной пластины.
80. **Тепловодский С.Х., Лущик В.Г., Решмин А.И.** Ламинаризация турбулентного течения в плоском канале с конфузором.
81. **Устинов М.В.** Амплитудный метод предсказания ламинарно-турбулентного перехода на стреловидном крыле.
82. **Хатунцева О.Н.** О возможности описания турбулентности с помощью уравнений Навье-Стокса с модифицированными левыми частями - полными производными по времени.
83. **Чефранов С.Г., Чефранов А.Г.** Линейная неустойчивость течений Хагена-Пуазейля, плоского течения Куэтта и плоского течения Пуазейля.
84. **Шалаев В.И.** О решениях уравнений трехмерного пограничного слоя в пристеночной области около плоскости симметрии.
85. **Шалаев В.И., Александров С.В., Ваганов А.В.** Особенности гиперзвукового течения вязкого газа около треугольного крыла с затупленными передними кромками.
86. **Шепелев В.В., Фортова С.В., Пронина А.П.** Применение пакета прикладных программ Turbo Problem Solver (TPS) для численного моделированию развития неустойчивости Рэлея-Тейлора.
87. **Шугаев Ф.В., Терентьев Е.Н., Докукина О.И., Штеменко Л.С.** Пульсации плотности в турбулентном течении воздуха и аргона и их взаимодействие с ударной волной.
88. **Щипицын В.Д., Козлов Н.В.** Экспериментальное исследование осредненных течений в осциллирующем контейнере с упругой деформируемой границей.
89. **Эглит М.Э., Якубенко А.Е., Якубенко Т.А.** Турбулентные склоновые потоки.
90. **Borodulin V.I., Ivanov A.V., Kachanov Y.S., Roschektaev A.P., Crouch J.D.** Laminar-turbulent transition of a swept-wing boundary layer under the influence of cylindrical trip devices.
91. **Kasimov A.R., Faria L.M., Rosales R.R.** Chaos and pattern formation in weakly nonlinear detonations.
92. **Shapakidze L.** On the oscillatory modes in the dean flow between porous cylinders with radial flow and radial temperature gradient.

ОДНОМОДОВЫЙ ФЛАТТЕР ПЛАСТИН, ИМЕЮЩИХ ФОРМУ ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ТРАПЕЦИИ И ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Исследуется устойчивость тонкой упругой пластины в однородном сверхзвуковом потоке идеального совершенного газа. Рассматриваются одиночные пластины, имеющие в плане форму прямоугольника, трапеции и параллелограмма, шарнирно опертые по всем краям. Также рассматриваются бесконечные серии прямоугольных пластин, шарнирно связанных друг с другом, передние и задние которых также шарнирно оперты. Источник этой задачи лежит в явлении «панельного флаттера» интенсивных вибраций панелей обшивки самолетов и ракет, возбуждаемых набегающим потоком воздуха.

В докладе описывается метод расчета [1, 2] одномодового флаттера, при котором влияние потока газа на колебание пластины мало и сводится лишь к аэродинамическому демпфированию (положительному или отрицательному). Так как вещественная часть частоты и форма известна из расчета пластины в пустоте, то колебание пластины можно принудительно задать по собственной моде:

$$w(x, z, t) = W(x, z) \cdot \sin(\omega t),$$

где w – прогиб пластины, $W(x, z)$ – собственная форма колебания пластины, ω – собственная частота колебания пластины, и рассчитать нестационарное обтекание при заданных колебаниях пластины. В результате решения вычисляется работа сил давления:

$$U = \int_0^T \int_S \vec{p}(x, y, z, t) \cdot \vec{v}(x, z, t) ds dt$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период колебаний, S – поверхность пластины, $\vec{p} = -p\vec{n}$, p – давление, действующее на поверхность пластины, \vec{n} – нормаль к поверхности пластины, \vec{v} – скорость движения точек пластины.

Расчеты работы осуществляются с помощью программного обеспечения [1, 2]. Критерием флаттера при таком методе будет положительность работы: $U > 0$, что соответствует отрицательному аэродинамическому демпфированию пластины.

Аэродинамический расчет проводится в Ansys CFX. Собственные частоты и формы для трапециевидных пластин и пластин в форме параллелограмма рассчитываются в Abaqus методом конечных элементов. Рассчитанные формы колебания передаются в Ansys CFX с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа, построенных с использованием программного обеспечения [1, 2]. Собственная форма для прямоугольных пластин, учитывая шарнирное опирание, имеет вид:

$$W(x, z) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{X}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{Z}\right), \quad (4.2)$$

где $|A| \ll 1$ – амплитуда колебаний, n и m – количество полуволн в направлении и поперек потока, X – длина пластины, Z – ширина пластины. Собственная частота ω рассчитана по формуле, которая может быть выведена из уравнение движения пластины [3]:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\left(\frac{n\pi}{X} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{Z} \right)^2 \right),$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина пластины, ρ – плотность материала пластины.

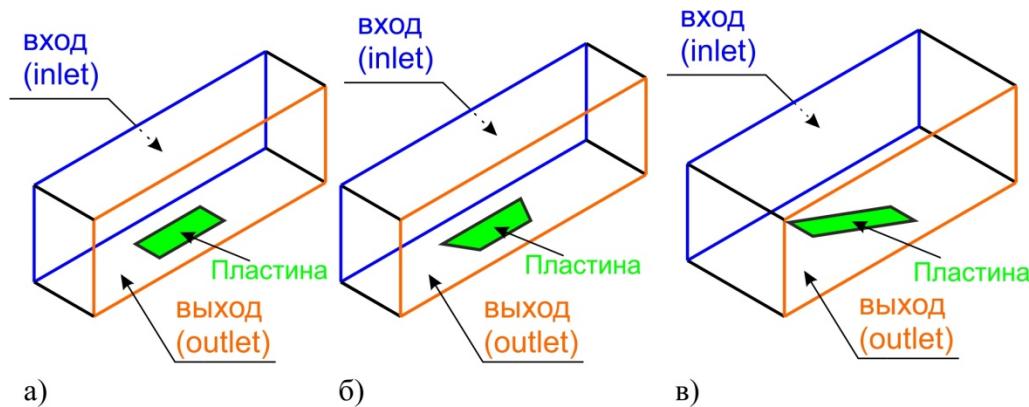


Рис. 1. Расчетная область: а) прямоугольная пластина б) трапециевидная пластина в) пластина, имеющая форму параллелограмма

Размер расчетной области (рис. 1) при газодинамическом расчете поперек потока и по высоте выбран так, чтобы характеристики после отражения от стенок не попадали на пластину. Внутри области решаются уравнения Навье-Стокса. На входе задаются скорость, давление и температура газа. На выходе граничных условий не ставится. На остальных стенках расчетной области (включая пластину) равно нулю касательное напряжение и нормальная скорость, что эквивалентно моделированию течения невязкого газа (пограничный слой не учитывается). Начальное условие – невозмущенное однородное течение.

Проведено сравнение результатов расчетов с результатами работы [4], где решалась связанный задача устойчивости колебаний пластины в потоке идеального совершенного газа. В результате получено удовлетворительное совпадение, что верифицирует предложенный метод расчета. Результаты расчетов для пластин других форм показали, что границы флаттера трапециевидных пластин близки к границам флаттера прямоугольных пластин и что границы флаттера пластин в форме параллелограмма при уменьшении острого угла начинают резко отличаться от границ флаттера прямоугольных пластин. Полученные результаты показывают, что приданье панелям обшивок летательного аппарата форм параллелограмма может быть эффективным методом подавления одномодового флаттера.

Литература

1. Vasily V. Vedeneev, Mikhail Kolotnikov, Pavel Makarov. Experimental Validation of Numerical Blade Flutter Prediction// Journal of propulsion and power. Vol. 31, No. 5, 2015.
2. В.В. Веденеев, М.Е. Колотников, П.В. Макаров, В.В. Фирсанов. Трехмерное моделирование флаттера лопаток компрессоров современных ГТД // Вестник СГАУ. 2011. №3(27). С.47-56.
3. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 420с.
4. Шитов С.В., Веденеев В.В. Флаттер периодически подкрепленной упругой полосы в потоке газа с малой сверхзвуковой скоростью // Известия РАН. Механика твердого тела. 2015. №3. С. 105-126.

**ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСРЕДНЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ НА
ТЕКСТУРИРОВАННОЙ СУПЕРГИДРОФОБНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

А.И. Агеев, А.Н. Осипцов
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова

Объектом исследования являются текстурированные супергидрофобные поверхности, имеющие прямоугольные периодически расположенные микрокаверны, в которых силой поверхностного натяжения статически удерживаются газовые пузырьки [1]. При течении жидкости на масштабе микрокаверны между жидкостью и газовыми пузырьками образуется устойчивая межфазная граница (рис. 1).

ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

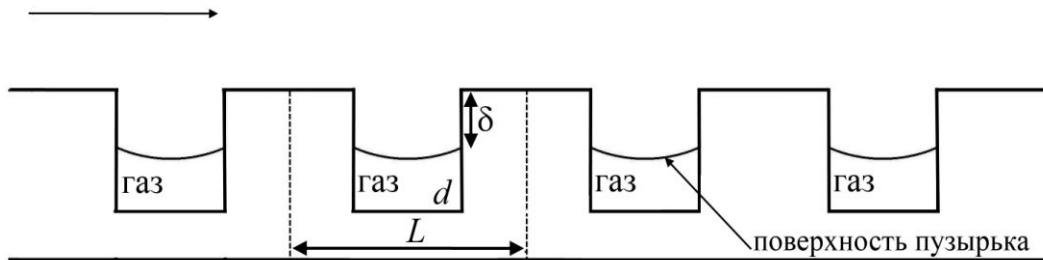


Рис. 1. Область течения жидкости над периодической текстурой супергидрофобной поверхности

На масштабе микрокаверны жидкость контактирует как с участками твердой стенки с условием прилипания, так и с поверхностями пузырьков, на которых трение практически отсутствует. Пониженное трение между жидкостью и газом создает макроскопическое проскальзывание жидкости. Интенсивность проскальзывания на текстурированной поверхности в литературе принято характеризовать коэффициентом эффективного (осредненного) скольжения b_{eff} . Цель решения задачи о течении вязкой жидкости вблизи текстурированной супергидрофобной поверхности состоит в вычислении для заданного режима течения и геометрии текстуры эффективного скольжения из локального условия Навье: $\langle u_w \rangle = b_{\text{eff}} \langle (\partial u / \partial y)_w \rangle$, в котором $\langle \cdot \rangle$ обозначает осреднение по периоду текстуры, а индекс w соответствует величинам, вычисленным на стенке. Найденное числовое значение b_{eff} затем может быть использовано в эффективном граничном условии Навье при решении макроскопических задач. Из экспериментов известно [1], что форма межфазной границы искривлена, а ее краевые точки в общем случае не совпадают с углами микрокаверны, удерживающей газовые пузырьки. Вычисление осредненного скольжения из решения задачи обтекания текстуры конечно-разностными методами приводит к известным трудностям, связанным с необходимостью аппроксимации уравнений движения и неоднородных граничных условий в области сложной формы, поэтому имеется необходимость в развитии альтернативных методов вычисления осредненного скольжения для периодических текстурированных супергидрофобных поверхностей.

Характерный размер неоднородности текстуры используемых на практике супергидрофобных поверхностей имеет порядок $L \sim 10^{-4} - 10^{-2}$ см, поэтому числа Рейнольдса малы, а течение жидкости в области над межфазной границей можно описывать уравнениями Стокса (в безразмерной форме):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \Delta \mathbf{u} - \nabla p = 0.$$

В проведенном исследовании для решения двумерных уравнений Стокса применялся метод граничных интегральных уравнений. Исходные уравнения заменяются системой эквивалентных интегральных уравнений на границе для неизвестных "плотностей" фундаментальных решений (стокслетов и стресслетов), распределенных по границе [2, 3]:

$$\Lambda u_j(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} f_i(\mathbf{x}) G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dl(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}).$$

Интегрирование ведется по всей границе области Γ ; $\Lambda=1$ или $1/2$ для точек внутри области и на границе; $\mathbf{f} = p_{ij} n_j \mathbf{e}_i$. В уравнении $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ и $T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ – двумерные стокслет и стресслет. "Плотности" вычисляются из условия удовлетворения заданным граничным условиям: прилипания на твердых участках, периодичности профиля скорости на входе и выходе из расчетной области (рассматривается обтекание текстуры сдвиговым потоком, вдали от поверхности задается градиент продольной скорости и нулевая нормальная скорость), а также условиям непротекания $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ и отсутствия касательных напряжений $p_{ij} n_j \tau_i = 0$ на межфазной границе. Более детальное описание постановки задачи можно найти в [4]. Методом

коллокаций интегральные уравнения для граничных точек сводятся к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), из которой находятся плотности распределений фундаментальных решений. К СЛАУ необходимо добавить условия непротекания $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ и отсутствия касательных напряжений на межфазной границе, реализуемые в виде уравнений, записанных для точек на межфазной границе:

$$\mathbf{f} = p_{ij} n_j \mathbf{e}_i = f_i \mathbf{e}_i, \quad p_{ij} n_j \tau_i = \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} = f_i \tau_i = 0.$$

Найденные распределения стокслетов и стресслетов затем используются для вычисления поля в области над межфазной границей. С помощью разработанного численного алгоритма проведено параметрическое численное исследование влияния радиуса мениска, образованного искривленной поверхностью пузырька, а также положения поверхности пузырька относительно стенок каверны на величину эффективного скольжения. Форма межфазной границы считается заданной и определяется из условия непрерывности нормальных напряжений на межфазной границе с учетом поверхностного натяжения. Для рассматриваемого режима течения форма межфазной границы – сегмент окружности, безразмерный (отнесененный к L) радиус R которой определяется статическим углом смачивания. Получены зависимости безразмерного (отнесененного к L) коэффициента эффективного скольжения от формы межфазной границы R/c , где $c=d/2L$ – половина ширины каверны, и от положения $s=\delta/L$ межфазной границы относительной углов каверны (рис. 2).

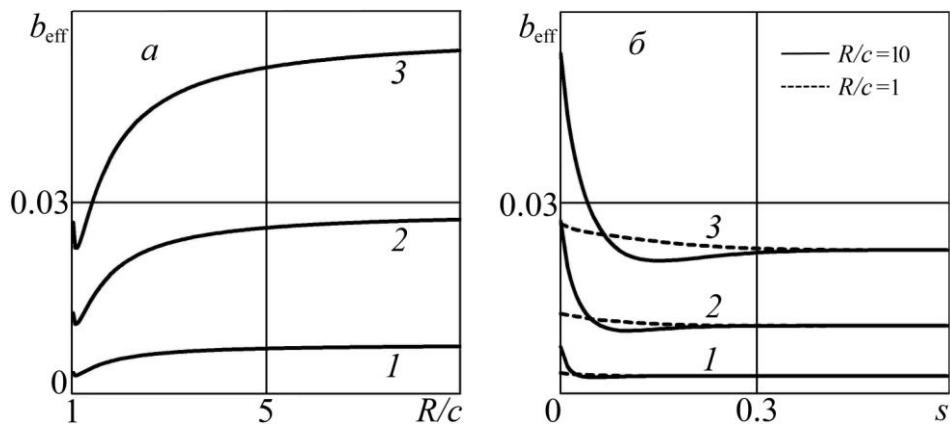


Рис. 2. Эффективная длина скольжения: (а) – $s = 0$, (б) – $s \neq 0$; 1-3 – $d/L = 0.2, 0.4, 0.6$

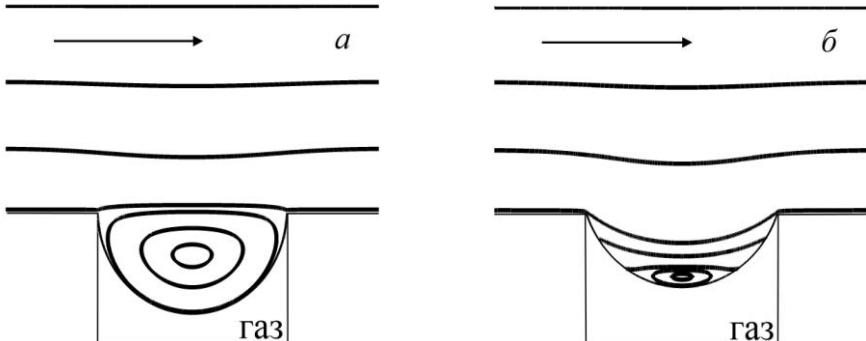


Рис. 3. Картина линий тока над межфазной границей: $d/L=0.5$, $R/c=1$ (а), 1.06 (б)

Минимум эффективного скольжения в окрестности $R/c \sim 1$ соответствует режиму схлопывания вихря в жидкости над межфазной границей и исчезновения областей с противотоками (рис. 3); максимальное значение эффективного проскальзывания достигается на текстурах с идеализированной плоской межфазной границей. Зависимость эффективного скольжения для других долей газового участка качественно повторяют представленные на рис. 2 кривые. Из полученных результатов следует, что учет кривизны мениска приводит к значительному уменьшению эффективного (осредненного) скольжения; погружение межфазной границы внутрь каверны также приводит к снижению осредненного скольжения. Влиянием формы мениска на величину осредненного скольжения можно пренебречь лишь в случаях, когда радиус кривизны мениска на порядок превышает размер газового участка. Разработанный численный алгоритм и полученные результаты могут быть использованы для определения величины осредненного скольжения над периодическими текстурами, образованными кавернами различной формы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-31-00069 мол-а.

ЛИТЕРАТУРА.

- Bolognesi G., Cottin-Bizonne C., Pirat C. Experimental evidence of slippage breakdown for a superhydrophobic surface in a microfluidic device // Phys. Fluids. 2014. V. 26. P. 082004.

2. Pozrikidis C. Boundary and singularity methods for linearized viscous flows. New York: Cambridge University press. – 1992. – 272 p.
3. Абрамова О.А., Иткулова Ю.А., Гумеров Н.А., Ахатов И.Ш.. Эффективный метод расчета динамики большого количества деформируемых капель в стоксовом режиме // ДАН. 2014. Т. 456. N 2. С. 166-170.
- 4.Агеев А.И., Осипцов А.Н. Стоково течение над каверной супергидрофобной поверхности, содержащей пузырек газа // Изв. РАН. МЖГ. 2015. N 6. С. 35-49.

ИССЛЕДОВАНИЕ БЕЗМАШИННОГО ЭНЕРГОРАЗДЕЛЕНИЯ ПОТОКА СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Г.М. Азанов, А.Н. Осипцов

Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Исследуется один из методов энергетической стратификации потока газа, предложенный в работе [1]. Эффект энергоразделения в схеме [1] возникает за счет теплообмена между до- и сверхзвуковым потоками газа, разделенными тонкой перегородкой, вследствие того, что температуры адиабатической стенки (температуры восстановления) в до- и сверхзвуковых пограничных слоях могут существенно различаться. Рассматривается модельная задача о теплообмене между течениями в до- и сверхзвуковом пограничных слоях, разделенными полубесконечной пластиной, идеально пропускающей тепло. Основная цель работы - определение исходных параметров системы, при которых величина энергоразделения (разность между средними температурами торможения потоков газа в пограничных слоях) максимальна.

В первой части работы рассматривается однофазное течение с обеих сторон пластины. Проведено параметрическое численное исследование и определены диапазоны определяющих параметров (чисел Маха и Прандтля), при которых достигается заметная величина энергоразделения потока (порядка 7% для газов с низкими значениями числа Прандтля, см. рис. 1). Оказалось, что для воздуха разница между средними температурами торможения потоков не превышает 1% (рис. 1).

Во второй части работы рассматривается теплообмен между сверхзвуковым двухфазным и дозвуковым однофазным потоками. В качестве дисперской фазы выступают сферические капли жидкости переменного радиуса, которые испаряются в пограничном слое, не успевая осесть на поверхность пластины, или выпадающие на неё под действием подъемной силы Сэффмана (рис. 2). Проведенные численные параметрические расчеты течения в двухфазном сверхзвуковом пограничном слое на теплоизолированной стенке показали, что основными определяющими параметрами системы, существенно влияющими на температуру торможения газа, являются числа Маха и Прандтля, массовая концентрация и скорость испарения капель, а также безразмерный коэффициент при подъемной силе Сэффмана. Оказалось, что даже небольшая (порядка 1%) концентрация капель в набегающем потоке приводит к заметному (десяткам процентов) снижению температуры восстановления газа. Показано существование характерной для такого течения области чистого газа, где частицы жидкости полностью испарились (рис. 2). Толщина и форма границы, а также координата начала этой области существенно изменяются в зависимости от основных определяющих параметров системы. В том случае, когда частицы дисперской фазы успевают испариться в пограничном слое, не оседая на поверхность пластины, температура восстановления газа в области, где скоростная релаксация фаз завершена (вдали от начала пластины), при фиксированных числах Маха и Прандтля зависит только от отношения массовой концентрации и скорости испарения капель.

Численные расчеты показали, что в случае теплопроводной стенки интенсивность теплообмена сверхзвукового двухфазного течения с дозвуковым течением чистого газа заметно возрастает, а профили температуры торможения существенно отличаются от профилей в случае теплообмена между однофазными потоками газа (рис. 3). Это делает перспективным возможное использование мелкодисперской конденсированной фазы для повышения эффективности энергоразделения газовых потоков по схеме [1].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-19-00699).

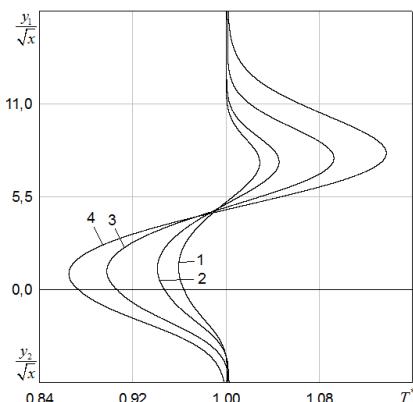


Рис. 1. Автомодельные профили безразмерной температуры торможения в контактирующих пограничных слоях (снизу – дозвуковой поток) при числах Прандтля $Pr = 0.72, 0.6, 0.35, 0.2$ (кривые 1-4).

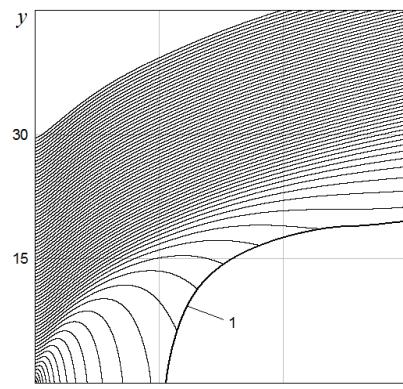


Рис. 2. Траектории капель и граница области чистого газа (кривая 1) с учетом подъемной силы Сэффмана.

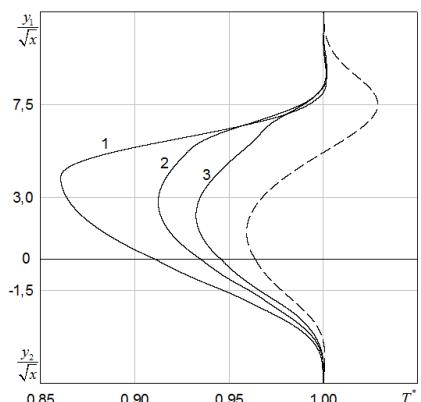


Рис. 3. Профили безразмерной температуры торможения в сечении $x = 30$ при увеличении скорости испарения капель (кривые 1-3). Пунктир – безразмерная температура торможения в чистом газе.

ЛИТЕРАТУРА

- Леонтьев А.И. Газодинамический метод энергоразделения газовых потоков// Термофизика высоких температур. 1997. Т. 35, № 1. С. 157-159.

Асимптотические уравнения системы магнитной гидродинамики, описывающие сглаженные разрывы.

А.И. Аллилуева, А.И. Шафаревич

31 декабря 2015 г.

Система уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой жидкости состоит из уравнений Навье — Стокса, содержащих в правой части силу Лоренца, и части уравнений Максвелла. Эти уравнения описывают эволюцию магнитного поля и поля скоростей проводящей жидкости; в частности, они применяются в физике плазмы и в астрофизике при исследовании магнитных полей планет, звезд и галактик. Во многих случаях вязкость и сопротивление в жидкости можно считать малыми; тем самым возникает вопрос о структуре асимптотических решений системы магнитной гидродинамики. Этому вопросу посвящено огромное количество работ; в частности, в линейном приближении (т.е. при заданном поле скоростей жидкости) асимптотика решений при малом сопротивлении связана со знаменитой проблемой гидромагнитного динамо (см., например [3], [4], [5], [6], [8], [9], [11], [13], [14], [15], [16]). Проблема (не решенная к настоящему времени) состоит в описании полей скоростей, для которых магнитное поле растет экспоненциально на больших временах; имеющиеся результаты показывают, что такой рост связан со сложным поведением траекторий поля скоростей жидкости.

В работе [1] (также в линейном приближении) изучался похожий эффект — рост магнитного поля, индуцированный скачком поля скоростей; другими словами, была описана асимптотика решения задачи Коши для линейной системы уравнений индукции в предположении, что поле скоростей нерегулярно зависит от малого параметра и быстро меняется в малой окрестности заданной поверхности. Оказалось, что в этом случае поле растет за малое время и образует дельтаобразную особенность на поверхности скачка поля скоростей.

В настоящей работе аналогичный вопрос изучается для полной нелинейной системы. Мы описываем формальное асимптотическое решение этой системы, меняющееся скачком в окрестности двумерной поверхности; эта поверхность теперь не может считаться заданной — она меняется во времени вместе с решением в силу специальной задачи со свободной границей. Рост магнитного поля наблюдается в этом случае наблюдается для т.н. вырожденных альфвеновских мод — они выделяются условием касания старшей части магнитного поля поверхности скачка.

Список литературы

- [1] A. I. Allilueva and A. I. Shafarevich, "Delta-type solutions for the non-Hermitian system of induction equations" International Journal of Theoretical Physics, 2015, v.15, No 11, 3932 - 3944.
- [2] V.I. Arnold, B.A. Khesin, Topological methods in hydrodynamics// Springer, 1998.
- [3] V.I. Arnold, Several remarks about antidynamo theorem// Messenger MSU. ser. 1- 1982-5-50-57.
- [4] V.I. Arnold, V.I. Korkina, The growth of the magnetic field in three dimensional steady flow of incompressible fluid//Messenger MSU. ser. 1, - 1983- 3- 43-46.

- [5] V.I. Arnold, Yu. B. Zeldovich, A.A. Ruzmaikin, D.D. Sokolov, Magnetic field in steady flow with sprains in Riemann spaces// Journal of experimental and theoretical physics- 1981- 81, ε 26 - 2052-2058.
- [6] Yu. B. Zeldovich, and A.A. Ruzmaikin, Hydromagnetic Dynamo as a source of planetary, solar and galactic magnetism. // Advances in Physical Sciences, 1987-(152), 2- 263-284.
- [7] A.I. Shafarevich The behavior of the magnetic field in the conductive liquid with rapidly changing velocity fields. // Reports of the Academy of Sciences, 1998-**360** (1), 31-33.
- [8] Childress S. Fast dynamo theory. Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas (Eds: H. K. Moffatt, G. M. Zaslavsky, M. Tabor and P. Comte).- Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.- 111-147.
- [9] S. Yu. Dobrokhotov, A. A. Ruzmaikin, V.M. Olive, A.I. Shafarevich. Magnetic field asymptotics in a well conducting fluid// Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 1996, 82 (3-4), 255-280.
- [10] A. I. Esina and A. I. Shafarevich, "Delta-type Solutions for the system of induction equations with discontinuous velocity field"Methods of Functional Analysis and Topology, 2014, N 1.
- [11] Friedlander S. and Vishik M. M. On stability and instability criteria for magnetohydrodynamics // Chaos.- 1995.- 5 (2).- 416-423.
- [12] Kucherenko V. V., Waves in the Linearized System of Magnetohydrodynamics// Russ. J. Math. Phys.- 2010.- 17 (3).- 272-279.
- [13] H.K. Moffatt Magnetic field generation in electrically conducting fluid.- Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
- [14] Roberts G.O. and Soward A.M. Dynamo theory // Annual Review in Fluid Mechanics - 1992 - 24 - 459-512.
- [15] M.M. Vishik, Magnetic field generation by the motion of a highly conducting fluid./ Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 1989, 48, 151-167.
- [16] Yu. B. Zeldovich, A.A. Ruzmaikin and D. Sokolov, // Magnetic fields in astrophysics. - Gordon Breach, 1983.

УДК 539.217

ОБТЕКАНИЕ ПРОНИЦАЕМОЙ КРУГОВОЙ ДУЖКИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДОЙ ПОД УГЛОМ АТАКИ

П.Р. Андронов, С.В. Гувернюк
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Решается задача об обтекании движущейся с постоянной скоростью жёсткой проницаемой дужки в форме полуокружности нулевой толщины, расположенной под заданным углом атаки, в неограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой средой. Предполагается, что течение среды нестационарное и плоское двумерное.

Уравнения Навье-Стокса для движения среды преобразуются к уравнению эволюции завихренности, согласно которому вихри, двигаясь совместно со средой [1,2], дополнительно перемещаются относительно этой среды с диффузионной скоростью, которая прямо пропорциональна коэффициенту её вязкости.

В качестве граничного условия накладывается условие непротекания, которое дополняется условием равенства нулю величины присоединённой завихренности на поверхности обтекаемого тела. Последнее означает, что вся вновь образовавшаяся завихренность сходит в поток. Отсутствие скачка присоединённой завихренности равносильно тому, что на поверхности обтекаемого тела выполняется условие прилипания [3].

Для численного моделирования эволюции вихрей как в идеальных, так и в вязких жидкостях целесообразно использование лагранжевого подхода [2] при дискретном описании поля завихренности.

В настоящей работе используется развитый для случая вязкой и несжимаемой среды метод вихрей [2], а именно, метод двумерных вязких вихревых доменов [3,4]. Силы и моменты выражаются через вращательный и гидродинамический импульсы жидкости, которые определяются как функции от распределения завихренности [4].

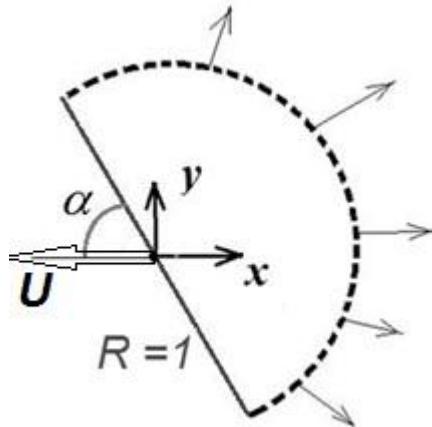


Рис. 1. Начальное положение проницаемой дужки

Бесконечно тонкая равномерно проницаемая недеформируемая дужка имеет форму полуокружности радиуса R и расположена под углом атаки α , см. рис. 1. Предполагается, что число Рейнольдса вычислено по диаметру полуокружности $2R$ и по заданной постоянной скорости дужки U .

Проницаемая граница моделируется поверхностью гидродинамического разрыва с граничными условиями [5], выражающими законы сохранения массы и изменения импульса:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_2 = V_n, \rho V_n (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) = (p_2 - p_1) \mathbf{n} - \mathbf{P}_n$$

которые должны дополняться частными соотношениями, определяющими зависимость напряжения P_n (со стороны жидкости на единичную площадку границы с нормалью n) от параметров просачивающейся среды и локальных физических свойств проницаемой границы. В качестве таких соотношений используются линейный закон Дарси и связь между касательными составляющими скорости $V_{\tau 1}$ и $V_{\tau 2}$ на поверхности разрыва [5]: $V_n = k \cdot (p_1 - p_2)$, $V_{\tau 2} = T \cdot V_{\tau 1}$. Здесь p – давление, V_n , V_{τ} – нормальная и касательная составляющие вектора скорости V на разрыве; индексы 1 и 2 выделяют локально наветренную и подветренную стороны проницаемой границы.

В момент времени $t = 0$ дужка начинает равномерно-ускоренное прямолинейное поступательное движение в неограниченном пространстве покоящейся жидкости в направлении против оси x , рис 1.

В момент достижения заданной скорости U ускорение обращается в 0.

Для наблюдателя, движущегося вместе с дужкой, получаем обтекание дужки постоянным потоком слева направо со скоростью U .

Двумерные плоские уравнения Навье-Стокса при отсутствии массовых сил преобразуются в интегро-дифференциальное уравнение для эволюции поля завихренности:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{div}(\Omega \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{V}_d)) = 0, \quad \mathbf{V}_d = -\nu \cdot \frac{\nabla \Omega}{\Omega}, \quad \Omega = \nabla \times \mathbf{V} = \Omega \cdot e_z$$

Здесь \mathbf{V}_d - векторное поле диффузионной скорости [3], с которой все вихри перемещаются относительно среды.

При этом вектор скорости потока \mathbf{V} выражается через вектор завихренности Ω с помощью известной интегральной формулы Био-Савара: $\mathbf{V} = f(\Omega)$. Данное представление является необходимым элементом бессеточного метода вязких вихревых доменов (ВВД) [2, 3], который в настоящей работе используется для численного решения поставленной задачи обтекания проницаемой дужки. Далее используются безразмерные величины, в качестве характерных масштабов принятые: радиус дужки R , скорость U и плотность жидкости ρ ; давление отнесено к ρU^2 , время - к $R U^{-1}$, погонные значения суммарной гидродинамической силы F и результирующего момента M на единицу размаха дужки нормированы на $\rho R U^2$ и $\rho R^2 U^2$ соответственно.

В задаче имеется четыре независимых безразмерных параметра: коэффициент направляющего действия T и коэффициент степени проницаемости дужки $a = \rho U / k$, угол атаки α (рис. 1) и число Рейнольдса $Re = 2RU/v$. Все расчёты выполняются при $T = 0$, при $Re = 200$ и при различных углах атаки α в диапазоне от 0 до 60 градусов.

Основной интерес представляет вопрос о влиянии степени проницаемости на сопротивление и статическую устойчивость дужки. С этой целью выполнен цикл расчётов обтекания проницаемой дужки под углами атаки. На рис. 2 представлено сравнение гидроаэродинамических характеристик для дужек с малой, с умеренной и с большой проницаемостью (при указанной выше нормировке параметров величина F_x имеет смысл коэффициента лобового сопротивления, величина F_N – коэффициента нормальной силы, направленной перпендикулярно к оси симметрии дужки). В случае малой проницаемости ($a = 10$) максимум коэффициента сопротивления F_x достигается не при нулевом угле атаки, а при α около 15° и превышает значение F_x при $\alpha=0^\circ$ почти на 30%. При увеличении проницаемости максимум $F_x(a)$ смещается в сторону нулевого угла атаки и при $a = 0.1$ практически равен $F_x(0)$. При этом наблюдается принципиальное качественное изменение поведения нормальной силы $F_N(\alpha)$. В случае малой проницаемости нормальная сила F_N обращается в ноль не только для положения симметрии, когда $\alpha=0^\circ$, но и при некотором ненулевом угле балансировки $\alpha=\alpha_b \approx 30^\circ$, рис. 2. Причём симметричное положение $\alpha=0^\circ$ малопроницаемой дужки статически неустойчиво, в то время как несимметричное положение под углом балансировки $\alpha=\alpha_b$ – оказывается устойчивым. Следует отметить, что расчётные значения момента аэрогидродинамических сил относительно центра входного сечения дужки $m_{z0} = f(a, \alpha)$ по безразмерной абсолютной величине не превышают 0.02, что указывает на расположение центра давления вблизи указанной точки. Как видно из рис. 2, с помощью увеличения степени проницаемости (уменьшения параметра проницаемости a) можно добиться стабилизации равновесия дужки в симметричном положении $\alpha=0^\circ$. Это коррелирует с известными фактами из аэrodинамики парашютов.

На рисунках с номерами 3, 5, 7, 9, 11 показаны зависимости безразмерных величин: силы сопротивления (1), подъёмной силы (2) и гидродинамического момента (3) при обтекании проницаемой жёсткой дужки, расположенной под различными углами атаки, от безразмерного времени t .

На рисунках с номерами 4, 6, 8, 10, 12 изображены соответствующие рисункам 3, 5, 7, 9, 11 и построенные средствами графического редактора (Tecplot 9.0) мгновенные линии тока при нестационарном обтекании полукруглой проницаемой жёсткой дужки, расположенной под различными углами атаки и движущейся с постоянной скоростью справа налево (в системе координат, связанной с дужкой), для одного и того же момента безразмерного времени $t = 10$.

Коэффициент проницаемости для рисунков с номерами 3 и 5; 4 и 6 (соответственно) равен $a = 0.1$ (большая проницаемость), а для рисунков с номерами 7, 9 и 11; 8, 10 и 12 (соответственно) равен $a = 1$ (средняя по величине проницаемость).

Степень затенённости фона на рисунках 4, 6, 8, 10, 12 (где изображены расчётные мгновенные линии тока) прямо пропорциональна величине модуля поперечной скорости потока вязкой несжимаемой среды.

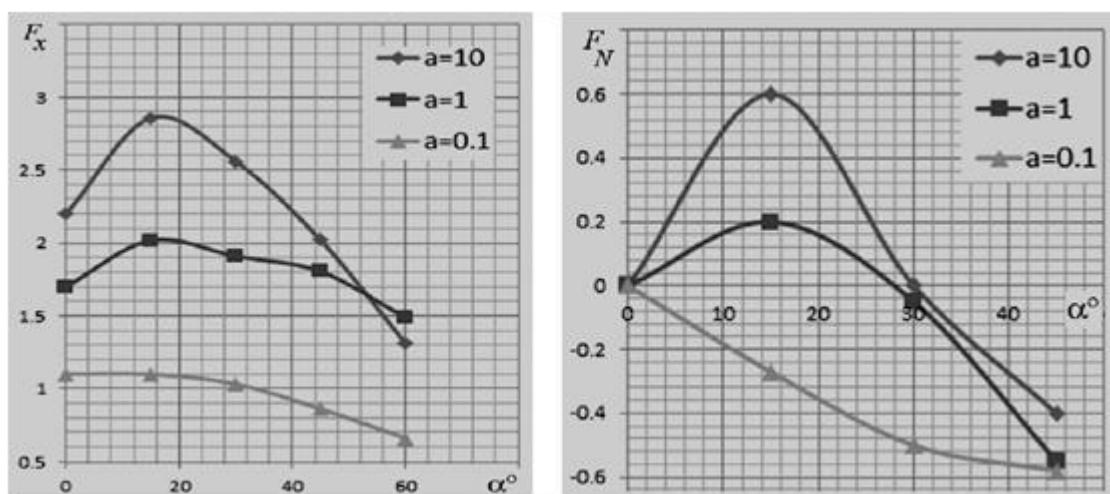


Рис. 2. Лобовое сопротивление (слева) и нормальная сила (справа) при обтекании проницаемой дужки под углом атаки (варьируется степень проницаемости)

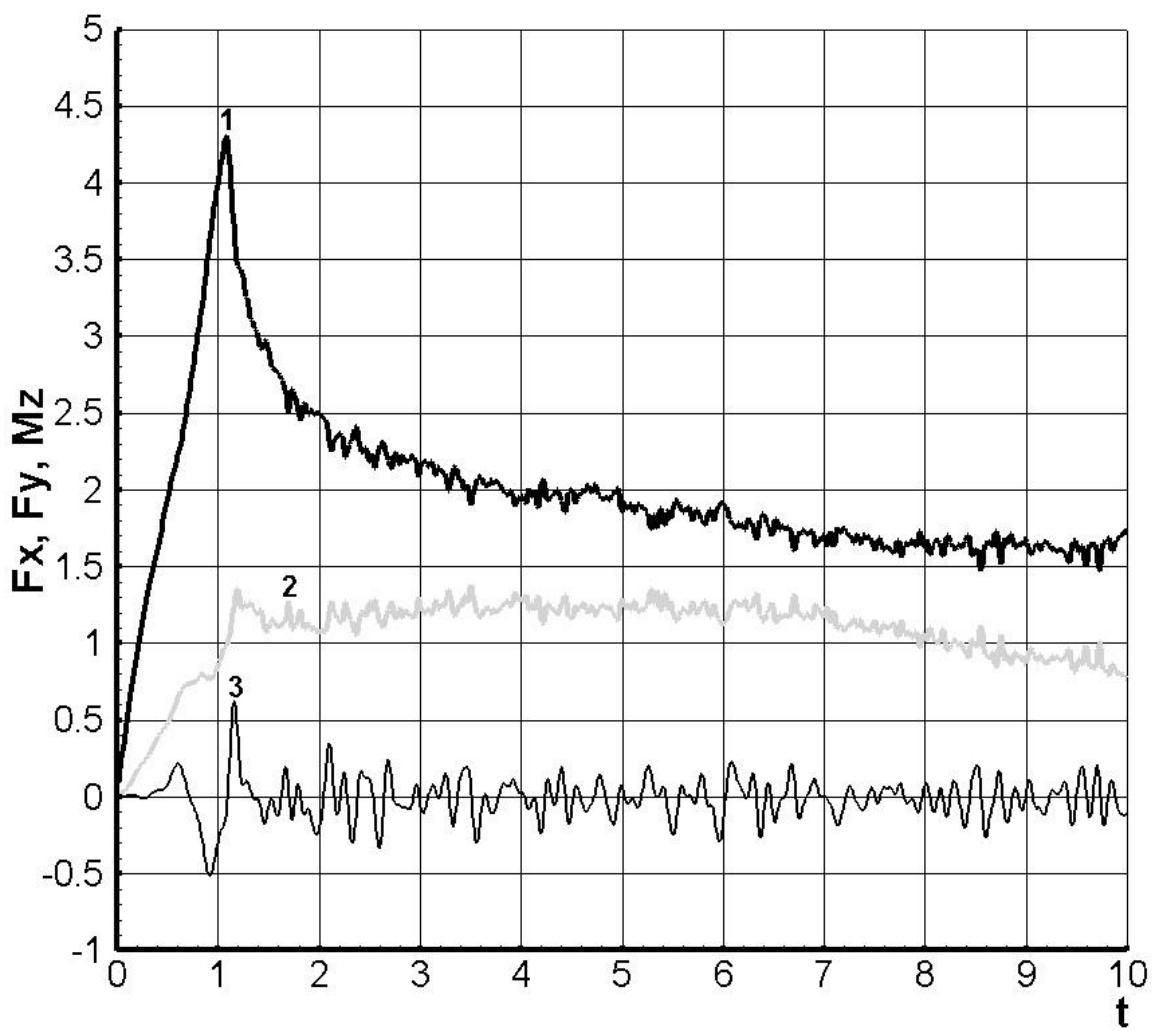


Рис. 3. Зависимость безразмерной силы сопротивления (1), подъёмной силы (2) и гидродинамического момента (3) при обтекании проницаемой жёсткой дужки, расположенной под углом атаки 30 градусов, от безразмерного времени. Коэффициент проницаемости $a = 0.1$.

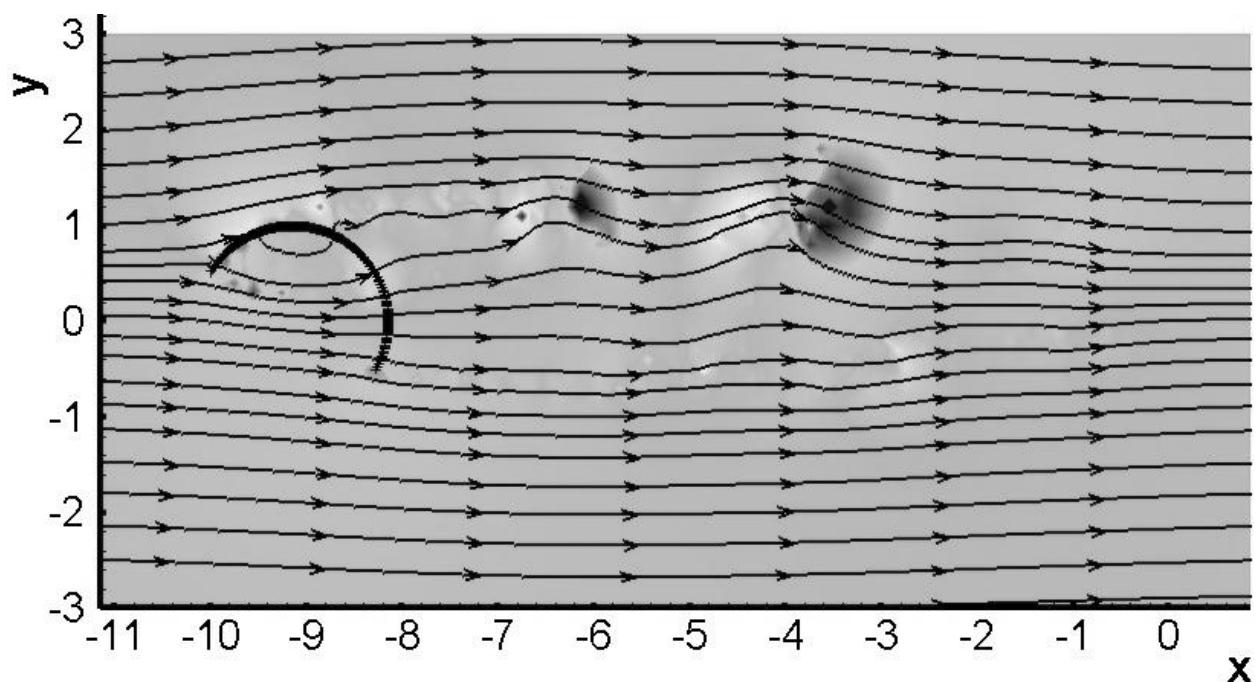


Рис. 4. Мгновенные линии тока при нестационарном обтекании проницаемой жёсткой дужки, расположенной под углом 30 градусов и движущейся с постоянной скоростью справа налево (в системе координат, связанной с телом), для момента безразмерного времени $t = 10$. Коэффициент проницаемости $a = 0.1$.

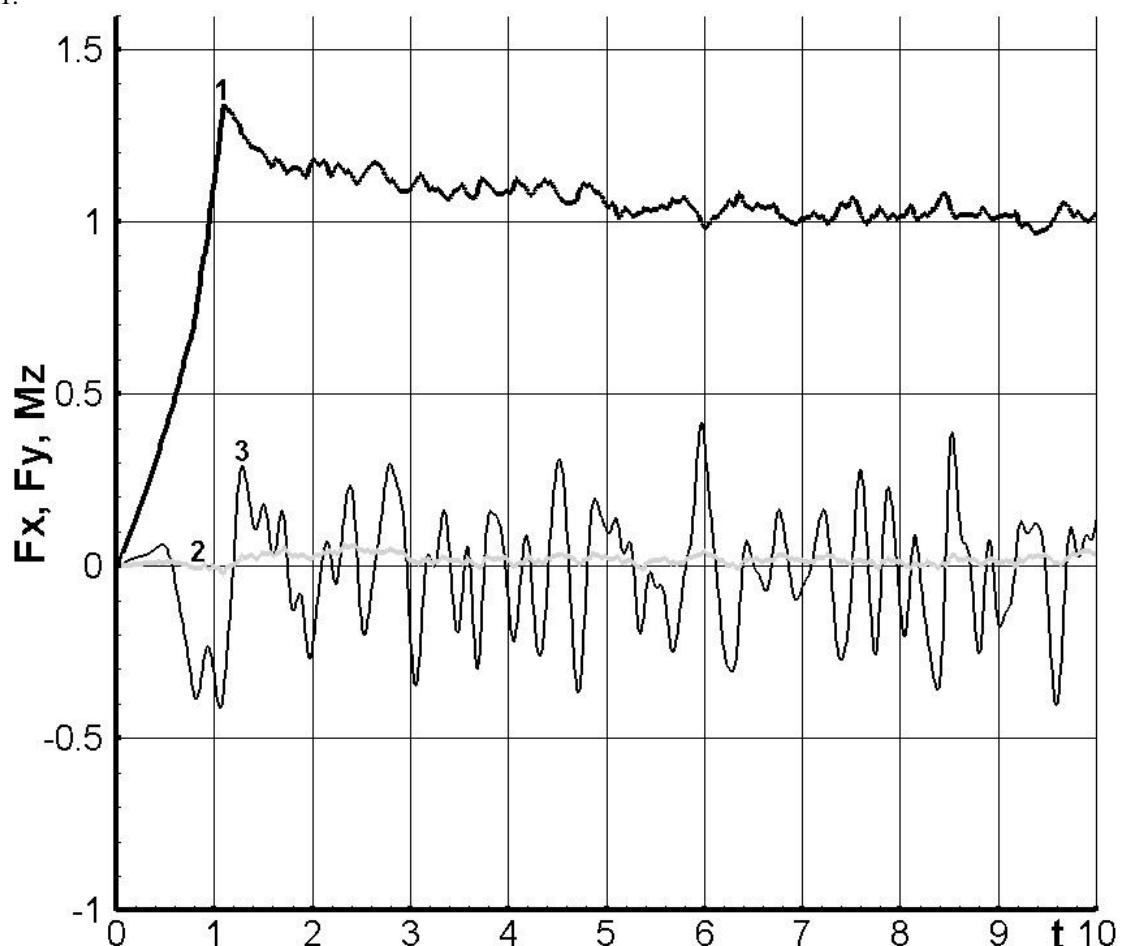


Рис. 5. Зависимость безразмерной силы сопротивления (1), подъёмной силы (2) и гидродинамического момента (3) при обтекании проницаемой жёсткой дужки, расположенной под углом атаки 60 градусов, от безразмерного времени. Коэффициент проницаемости $a = 0.1$.

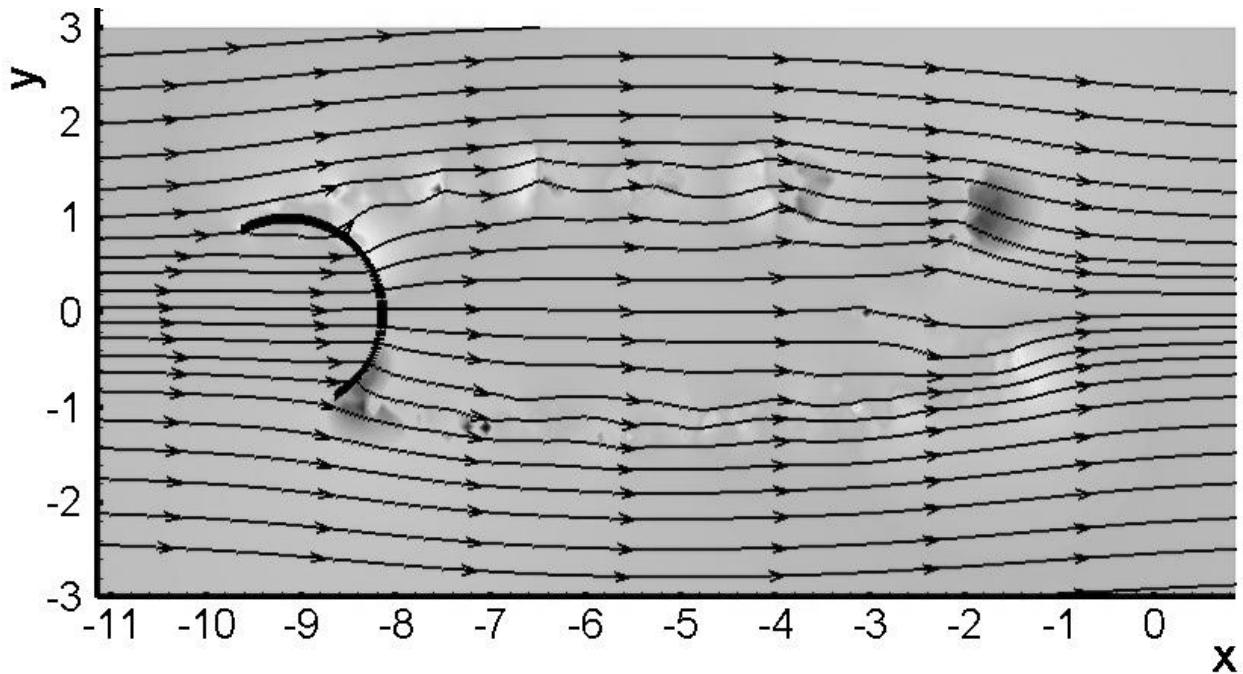


Рис. 6. Мгновенные линии тока при нестационарном обтекании проницаемой жёсткой дужки, расположенной под углом атаки 60 градусов и движущейся с постоянной скоростью справа налево (в системе координат, связанной с телом), для момента безразмерного времени $t = 10$. Коэффициент проницаемости $a = 0.1$.

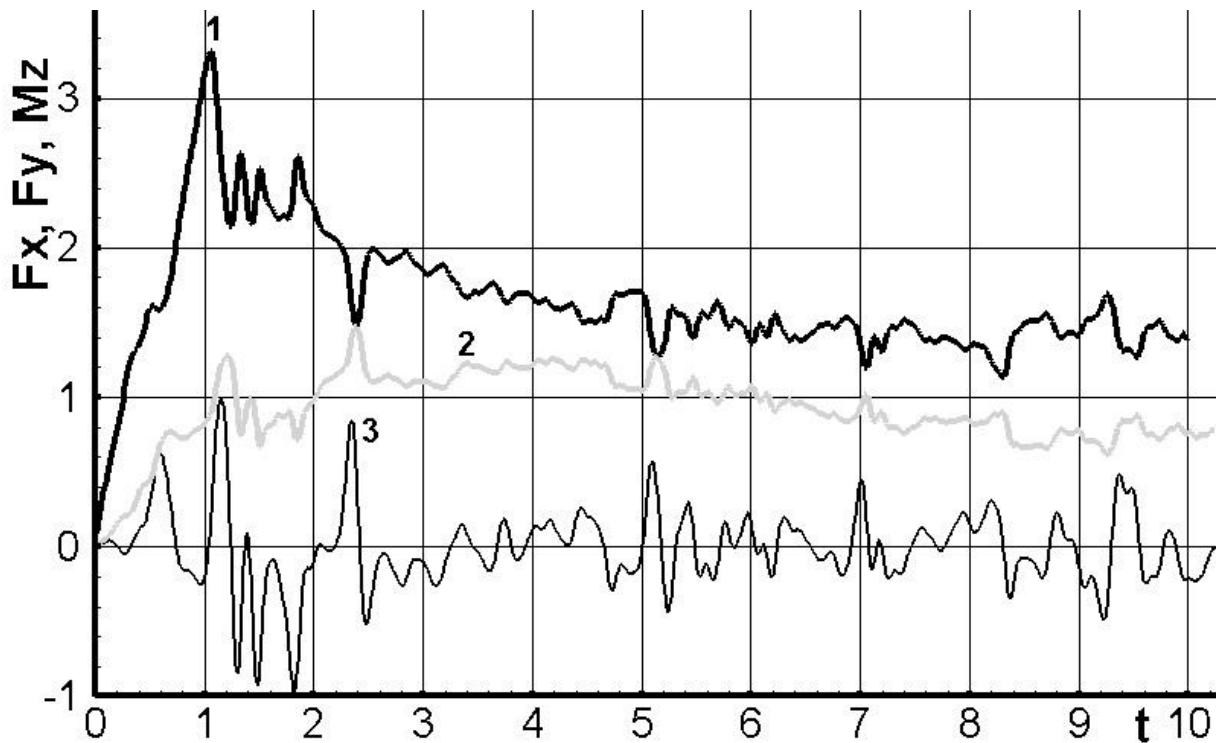


Рис. 7. Зависимость безразмерной силы сопротивления (1), подъёмной силы (2) и гидродинамического момента (3) при обтекании проницаемой жёсткой дужки, расположенной под углом атаки 30 градусов, от безразмерного времени. Коэффициент проницаемости $a = 1$.

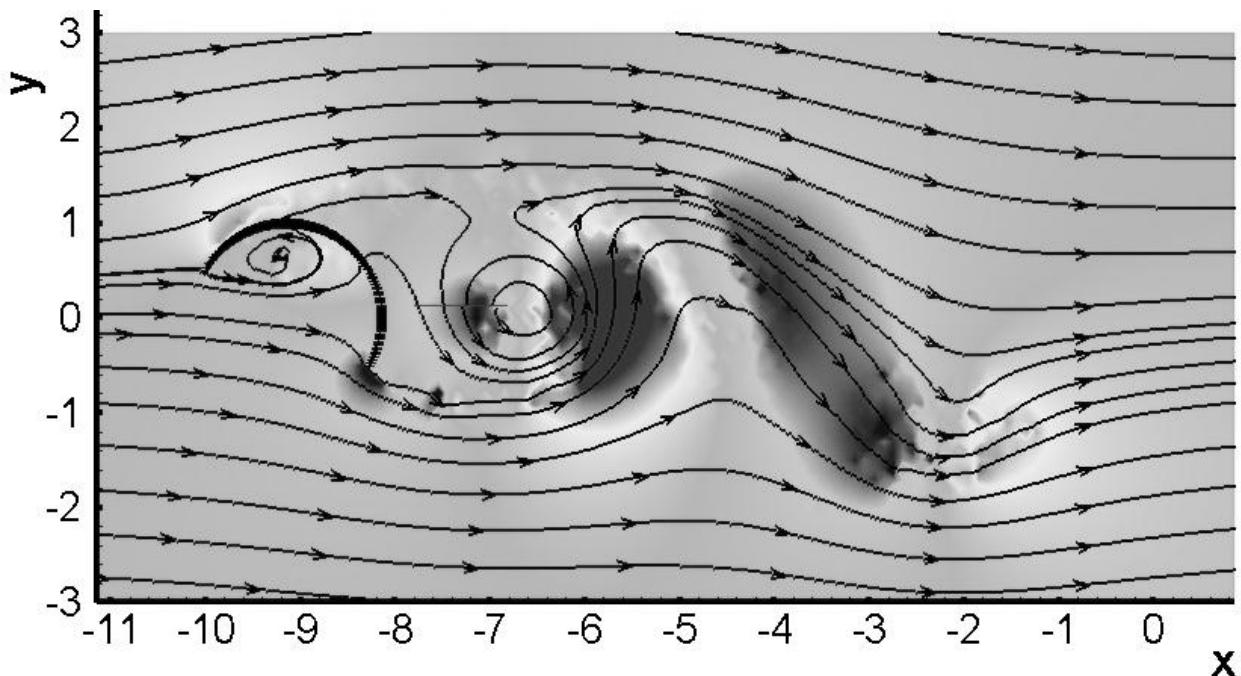


Рис. 8. Мгновенные линии тока при нестационарном обтекании проницаемой жёсткой дужки, расположенной под углом 30 градусов и движущейся с постоянной скоростью справа налево (в системе координат, связанной с телом), для момента безразмерного времени $t = 10$. Коэффициент проницаемости $a = 1$.

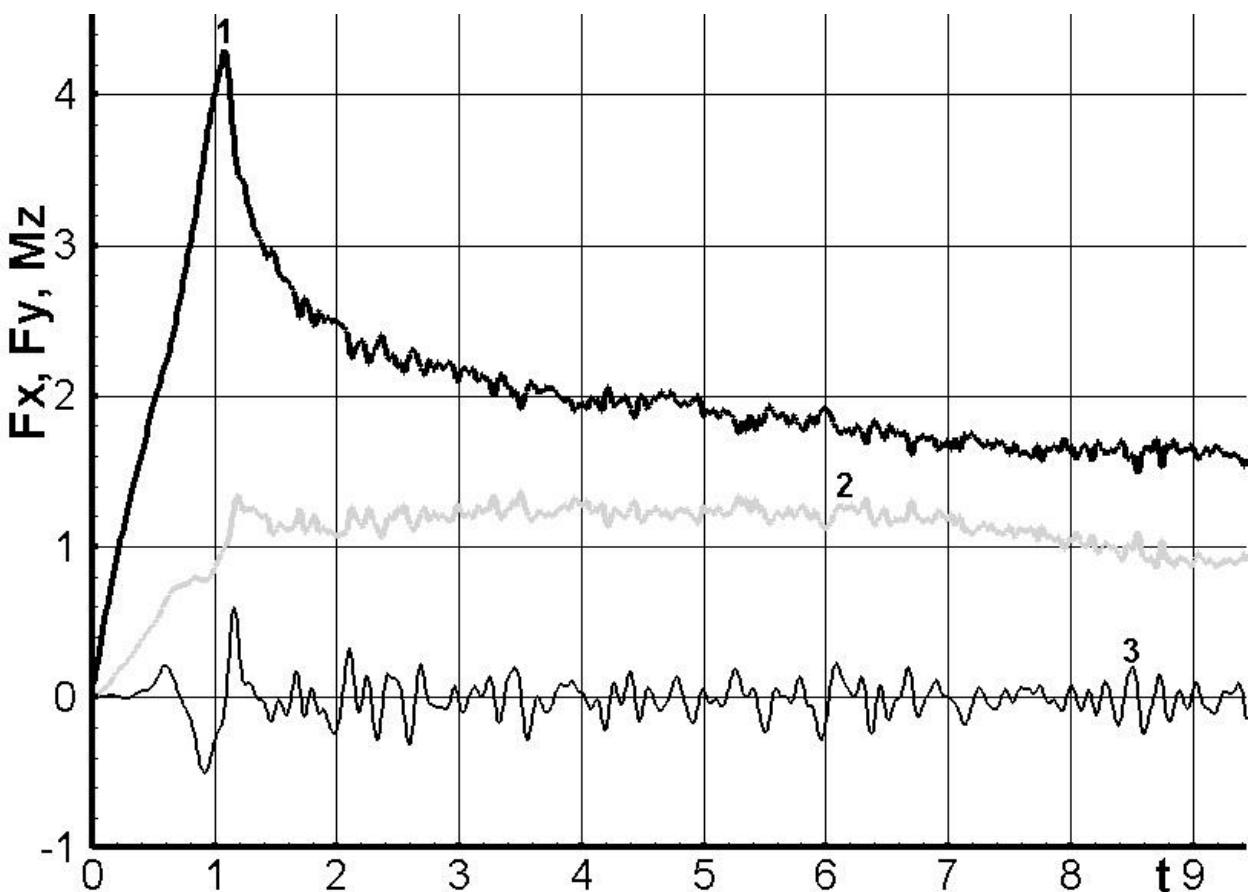


Рис. 9. Зависимость безразмерной силы сопротивления (1), подъёмной силы (2) и гидродинамического момента (3) при обтекании проницаемой жёсткой дужки, расположенной под углом атаки 45 градусов, от безразмерного времени. Коэффициент проницаемости $a = 1$.

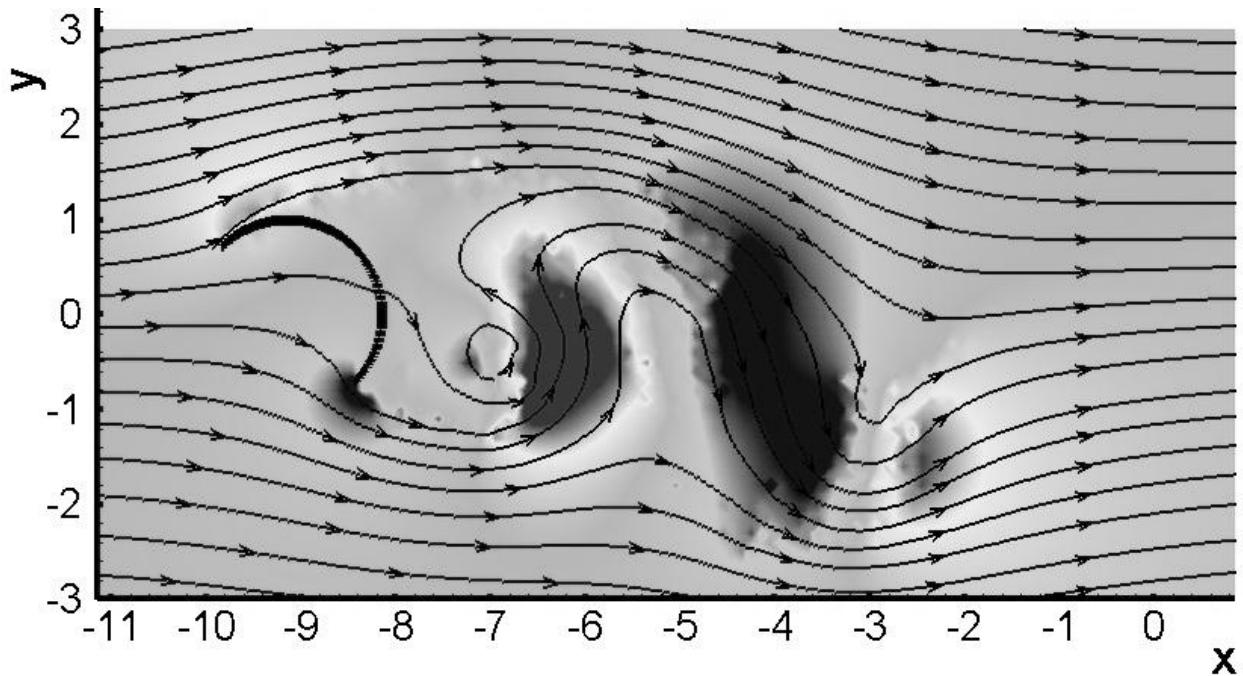


Рис. 10. Мгновенные линии тока при нестационарном обтекании проницаемой жёсткой дужки, расположенной под углом 45 градусов и движущейся с постоянной скоростью справа налево (в системе координат, связанной с телом), для момента безразмерного времени $t = 10$. Коэффициент проницаемости $a = 1$.

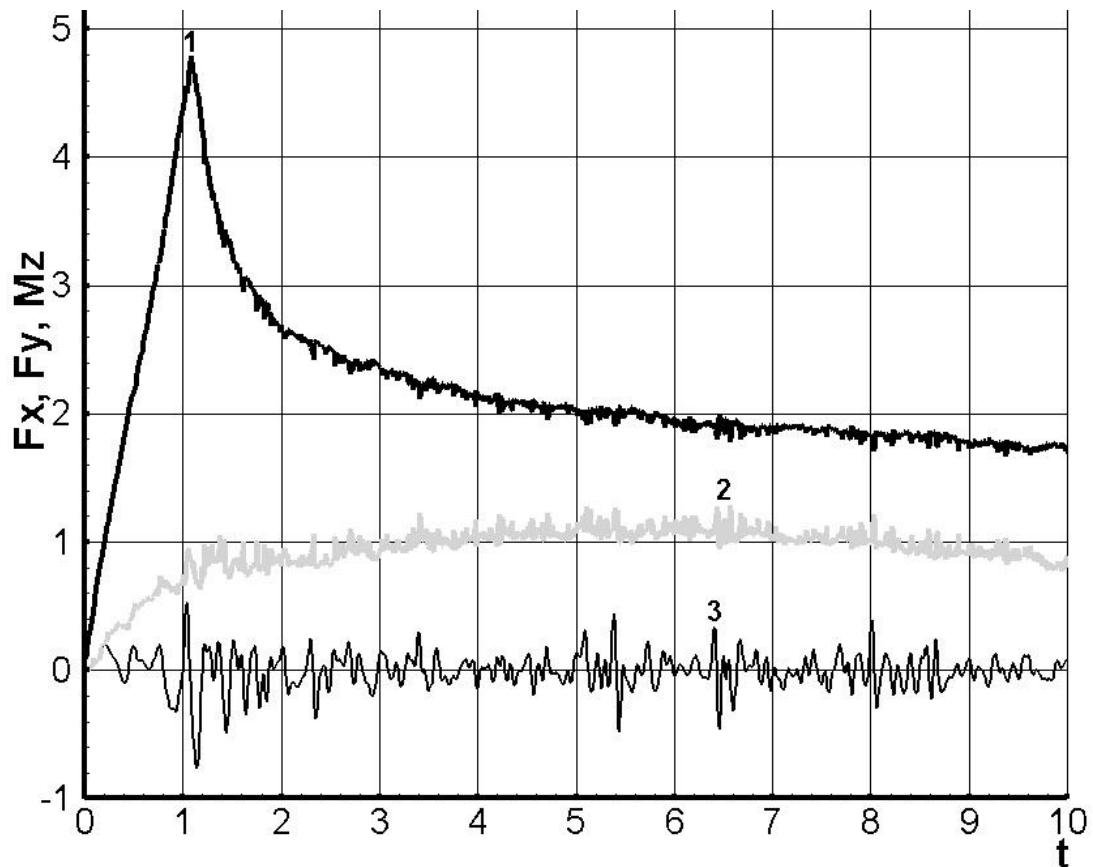


Рис. 11. Зависимость безразмерной силы сопротивления (1), подъёмной силы (2) и гидродинамического момента (3) при обтекании проницаемой жёсткой дужки, расположенной под углом атаки 60 градусов, от безразмерного времени. Коэффициент проницаемости $a = 1$.

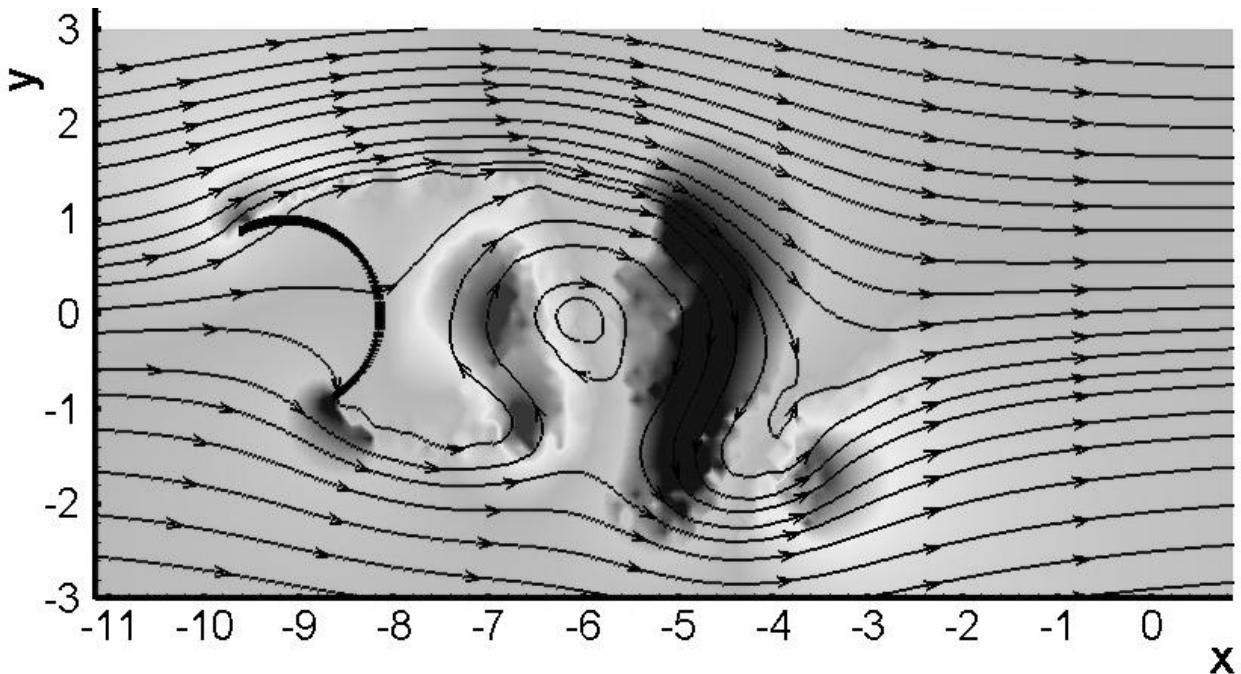


Рис. 12. Мгновенные линии тока при нестационарном обтекании проницаемой жёсткой дужки, расположенной под углом 60 градусов и движущейся с постоянной скоростью справа налево (в системе координат, связанной с телом), для момента безразмерного времени $t = 10$. Коэффициент проницаемости $a = 1$.

На основании анализа рисунков №№ 3-12 можно сделать вывод о том, что с уменьшением углов атаки модельного тела (полукруглой дужки) при относительно меньших значениях степени проницаемости ($a = 1$) безразмерное сопротивление (F_x), как пиковое (достигаемое при окончании периода разгона), так и его предельное значение снижается. Это можно объяснить тем, что, как видно из рис. 8, для малых углов атаки (30 градусов) с подветренной стороны (справа) от верхней левой кромки дужки с течением времени формируется локальный вихрь, а значит, уменьшается давление на тело в целом с наветренной стороны от тела. Однако, как можно видеть из соответствующей картины мгновенных линий тока для большого значения проницаемости ($a = 0.1$) и для аналогичного угла атаки (30 градусов) на рис. 4, наличие сильной проницаемости приводит к интенсификации процесса просачивания среды сквозь левую верхнюю часть наклонной полукруглой дуги. Поэтому (в отличие от рис. 8) нет предпосылок для существования устойчивого локального вихря. В результате основной вклад в силу лобового сопротивления вносят не вихри, а перепад давления при ламинарном обтекании проницаемой полукруглой дуги с искривлёнными линиями тока (см. рис. 4). А, как видно из сравнения рис. 4 и рис. 6, степень деформации линий тока, усиливающая перепад давлений, при уменьшении угла атаки (от 60 до 30 градусов) заметно увеличивается. Этим обстоятельством возможно объяснить рост предельных и пиковых нагрузок при угле атаки 30 градусов (рис. 3 по сравнению с рис. 5) для случая большой степени проницаемости ($a = 0.1$).

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП Министерства образования и науки РФ (соглашение 14.576.21.0079, проект RFMEFI57614X0079) и РФФИ (гранты № 15-01-99623-а и № 14-08-01130-а).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Ф.Дж. Сэффмэн. Динамика вихрей. М.: Науч. мир, 2000, 376 с.
2. С.М. Белоцерковский. Основные идеи методов дискретных вихрей и дискретных особенностей. Вопросы кибернетики: Сборник научных трудов, АН СССР, 1986.
3. Дынникова, Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье-Стокса. Доклады РАН, 2004, т. 399, № 1.
4. Андронов, П.Р. Вихревые методы расчёта нестационарных гидродинамических нагрузок. П.Р. Андронов, С.В. Гувернюк, Г.Я. Дынникова. Научное издание. – М.: Издательство МГУ, 2006, 184 с.
5. Рахматулин, Х.А. О постановке задач обтекания проницаемых тел несжимаемой средой. Парашюты и проницаемые тела. Х.А. Рахматулин, С.В. Гувернюк. Сборник научных трудов. М.: Издательство МГУ, 1987, с. 5-24.

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЧИВОСТИ СЕРПЕНТИНИЗАЦИИ В КИМБЕРЛИТОВЫХ ТРУБКАХ

A.A. Афанасьев, Е.А. Беляева

Кимберлитовая трубка – вертикальное геологическое тело, образовавшееся при прорыве магматического расплава сквозь земную кору (рис. 1, а). Она представляет собой гигантских размеров столб, который оканчивается в верхней части расширением конической формы. С глубиной коническое тело сужается, переходя в жилу. В кимберлитовых трубках сосредоточены основные запасы алмазов на Земле.

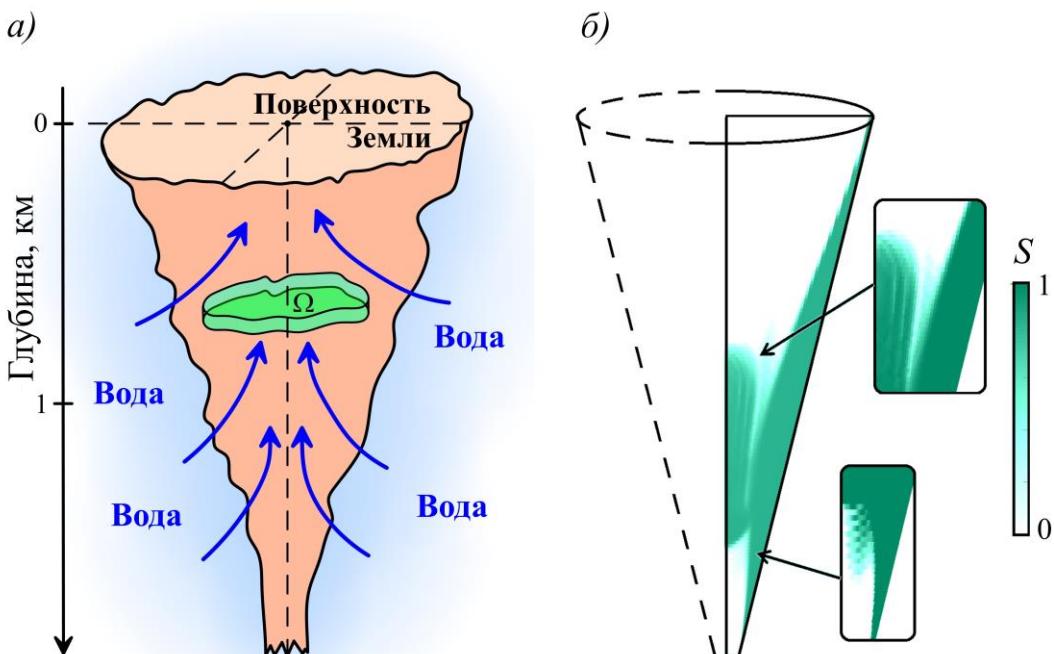


Рис. 1. (а) – Схематическое изображение кимберлитовой трубы; (б) – Пример расчёта с неоднородным распределением степени серпентинизации S ; увеличены области с «полосчатыми» и «решётчатыми» структурами; в увеличенных областях цветовая шкала изменена.

После формирования трубка наполнена нагретыми проникаемыми породами, насыщенными магматическими газами, а одним из основных пордообразующих минералов является оливин. В процессе остывания оливин вступает в минеральную реакцию (серпентинизуется), приводя к образованию нового минерала – серпентинита:



Для процесса серпентинизации необходимо, чтобы оливиносодержащие породы были насыщены водой в относительно узком диапазоне температур. Таким образом, наличие серпентинита в трубках служит индикатором того, что при остывании кимберлит был насыщен водой.

В работе [1] предложена неизотермическая модель, описывающая многофазную фильтрацию в кимберлитовых трубках с учётом серпентинизации оливина. В рамках данной модели проведены двухмерные расчёты остывания трубы. Показано, что вода, необходимая для серпентинизации, может поступать в нагретый кимберлит из окружающих водонасыщенных пластов (рис. 1, а). Предполагалось, что трубка представляет собой правильный усечённый конус (рис. 1, б), поэтому расчёты проводились в осесимметричной постановке. При определённых начальных и граничных

условиях в расчётах наблюдалось неоднородное распределение серпентинита, локализованное в отдельных областях трубы. На рис. 1, б приведён пример подобного расчёта; показано распределение степени серпентинизации оливиносодержащих пород S ($S = 0$ – серпентинит отсутствует, $S = 1$ – весь оливин прореагировал, перейдя в серпентинит). В расчёте наблюдаются «полосчатые» структуры, т.е. полосы с повышенным содержанием серпентинита. Также наблюдаются «решётчатые» структуры, т.е. расположенные в шахматном порядке пятна с повышенным содержанием серпентинита. Причём в случае «решётчатых» структур разрешения расчётной сетки часто было недостаточным – на отдельное пятно приходилось не более двух расчётных ячеек (рис. 1, б).

В настоящей работе объясняется физический механизм формирования подобных «решётчатых» и «полосчатых» структур. Проведён линейный анализ устойчивости серентинизации оливина в изолированном объёме Ω (рис. 1, а), наполненном проницаемыми оливиносодержащими породами, водой и инертным газом (использовался углекислый газ). В результате реакции образуется серпентинит и выделяется скрытое тепло реакции. Повышение температуры, связанное с выделением тепла, увеличивает скорость реакции, что в свою очередь приводит к ещё большему выделению тепла, т.е. реакция сама себя разгоняет. Показано, что при определённых условиях описанное самоускорение реакции может приводить к неустойчивости, связанной со значительно большим количеством серпентинита в чуть более нагретых, в начальный момент времени, областях кимберлитовой трубы. Демонстрируется, что серентинизация контролируется конкурирующим воздействием двух механизмов: выделением тепла при реакции, способствующим дестабилизации однородного распределения параметров, и теплопроводностью, способствующей стабилизации за счёт сглаживания возмущений температуры. Определена критическая длина волны возмущения, разделяющая области параметров, при которых один механизм доминирует над другим. Возмущения закритической длины волны нарастают (длинные волны), а возмущения докритической длины волны затухают (короткие волны). Определён безразмерный параметр, характеризующий инкремент нарастания неустойчивых возмущений. Показано, что линейная теория не применима, если длина волны возмущения близка к критической. Таким образом, линейная теория позволяет определить только интервал длин волн, к которым принадлежит критическая длина волны, однако точное значение критической длины волны должно определяться в рамках более полной нелинейной теории [2].

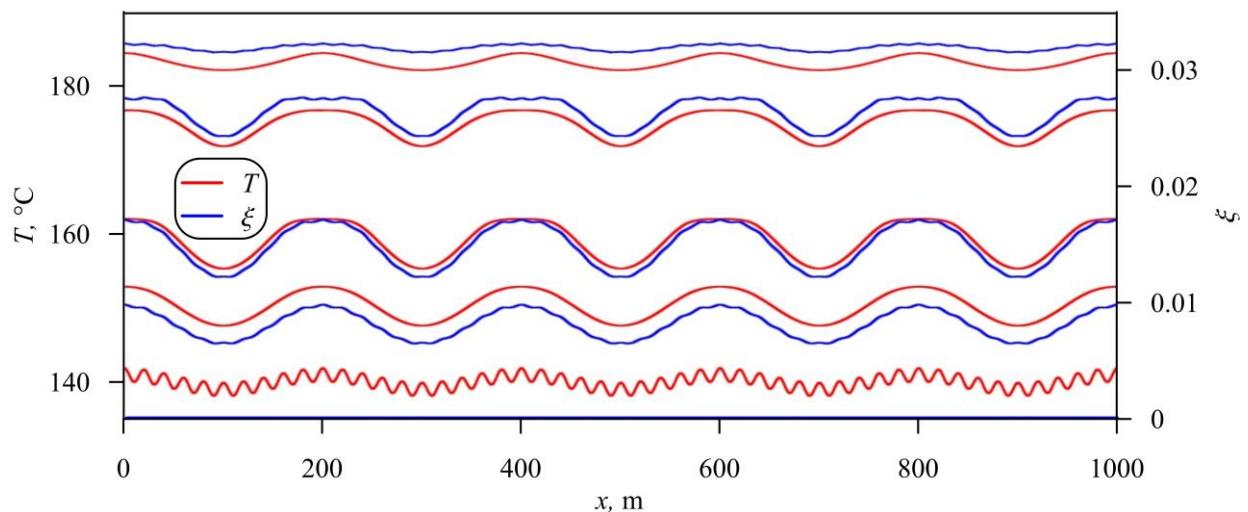


Рис. 2. Распределение температуры, T , и количества серпентинита, ξ , в последовательные моменты времени 0, 2500, 3500, 5000 и 10000 дней. Увеличение количества серпентинита приводит к возрастанию температуры. Короткая волна – докритическая, длинная – закритическая.

Аналитические результаты работы подтверждены прямым численным моделированием серпентинизации оливина в рамках полной нелинейной модели. Проведены одномерные и двухмерные расчёты развития неустойчивости в изолированном объёме Ω . В рамках одномерной задачи возмущались две длины волн, первая из которых (короткая волна) являлась докритической, а вторая (длинная волна) закритической (рис. 2). Показано, что в соответствии с разработанной линейной теорией амплитуда закритического возмущения с течением времени нарастает, а амплитуда докритического возмущения затухает.

В двухмерной задаче рассмотрен плоский горизонтальный объём Ω прямоугольной формы (рис. 3). В начальный момент времени задавались возмущения температуры всех длин волн, как докритических, так и закритических (белый шум). Таким образом, моделировались возмущения, всегда присутствующие в реальной геологической системе. Эволюция подобного начального распределения приводит к развитию неоднородного распределения параметров в более поздние моменты времени (рис. 3). При этом докритические возмущения затухают, а закритические растут. Показано, что на нелинейной стадии развития неустойчивости наиболее быстро растёт возмущение с длиной волны, незначительно превосходящей критическое значение.

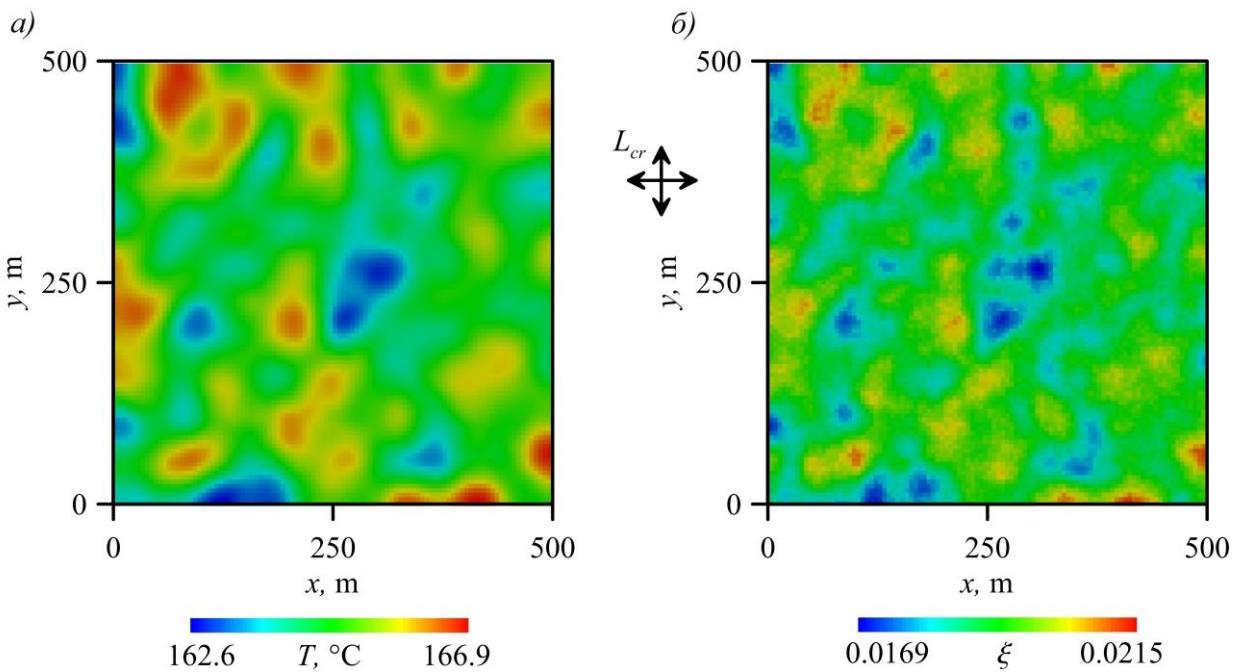


Рис. 3. Распределение температуры (а) и количества серпентинита (б) в объёме Ω в выбранный момент времени (двухмерная задача). Жирными стрелками показана критическая длина волны, L_{cr} , определяемая в рамках линейной теории.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-31-20585).

1. Afanasyev A., Melnik O., Porritt L., Schumacher J., Sparks S.J. Hydrothermal alteration of kimberlite by convective flows of external water // Contributions to Mineralogy and Petrology. 2014. Vol. 168:1038. DOI: 10.1007/s00410-014-1038-y
2. Afanasyev A., Belyaeva E. Linear stability analysis for hydrothermal alteration of kimberlitic rocks// Geophys. J. Int. 2016. In press.

ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ КРИСТАЛЛА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ В МОДЕЛИ МЕТОДА ЧОХРАЛЬСКОГО ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЧИСЛАХ ПРАНДТЛЯ

О.А. Бессонов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

В работе представлены результаты численного моделирования пространственных течений в гидродинамической модели метода Чохральского [1-4] с учетом влияния вращения кристалла в широком диапазоне значений числа Прандтля (Pr). Для изучения влияния вращения кристалла (Re_x) на устойчивость течения на сводной карте режимов и критических чисел Грасгофа Gr_c (рис. 1) выбраны 4 позиции, характеризующие различные типы течений: $Pr=0.03$ – типичное течение с глобальным механизмом конвекции; $Pr=0.15$ – точка стабилизации, соответствующая локальному максимуму критического числа Gr_c ; $Pr=1$ – смена моды потери устойчивости течения с трехмерной на двумерную и переход к режиму неустойчивости типа Рэлея-Бенара; $Pr=6.5$ – типичное течение с неустойчивостью типа Рэлея-Бенара. В качестве характеристики взаимодействия вращения кристалла и тепловой конвекции используется параметр Re_x^2/Gr , определяющий соотношение интенсивностей этих механизмов. Как правило, рассматриваются умеренные значения параметра, при которых вклад вращения кристалла ниже вклада тепловой конвекции или сопоставим с ним.

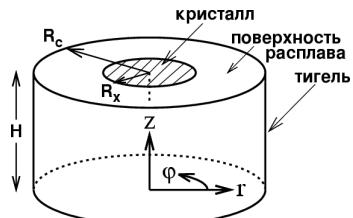
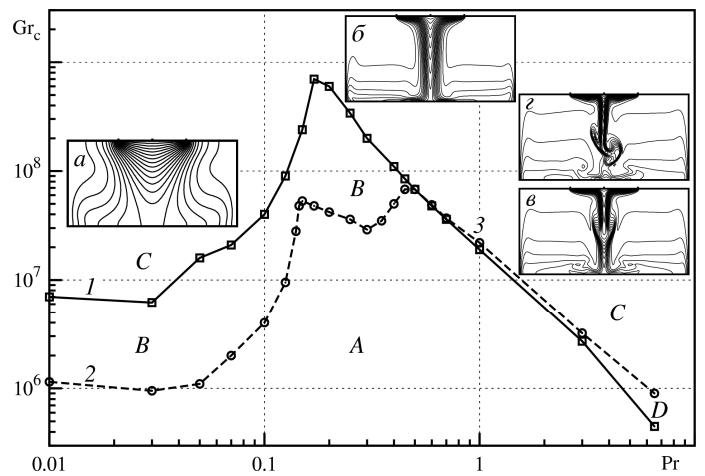


Рис. 1. Иллюстрация метода Чохральского и сводная карта режимов течения без вращения. Критические числа: 1 – 2D, 2 – 3D, 3 – смена мод колебаний. Режимы: A – всегда стационар, B – нестационар в 3D без осевой симметрии, C – всегда нестационар, D – нестационар в 3D с осевой симметрией. Картинки течения: a – глобальный механизм, б – зона стабилизации, в и г – неустойчивость типа Рэлея-Бенара



Наибольший интерес представляет изучение режима $Pr=0.15$, который соответствует точке стабилизации течения с неподвижным кристаллом. В этом режиме за счет вращения кристалла удалось повысить критическое значение числа Грасгофа более чем в два раза, с $5.3 \cdot 10^7$ до $1.2 \cdot 10^8$. Это достигается при $Re_x = 3500$, а для остальных исследованных значений Re_x в диапазоне от 2500 до 4000 критическое число Gr_c равно $1.15 \cdot 10^8$. Значения параметра конвективных взаимодействий Re_x^2/Gr в этом диапазоне составляют от 0.055 до 0.14. За пределами диапазона значения Gr_c снижаются.

Данный режим характеризуется наличием интенсивного спирального течения вблизи оси цилиндра, при этом максимальное значение азимутальной компоненты скорости V_ϕ в несколько раз превышает значение на ребре вращающегося кристалла. Такой рост V_ϕ происходит из-за того, что интенсивный поток, идущий от края полости, подталкивает вращающуюся в подкристальной области жидкость к оси цилиндра, и в соответствии с законом сохранения момента импульса скорость вращения увеличивается.

В режиме $Pr=0.03$, характеризующемся невысоким значением критического числа Грасгофа $Gr_c = 9.5 \cdot 10^5$ при $Re_x = 0$, также наблюдается стабилизация течения за счет вращения кристалла. Наибольшее значение $Gr_c = 1.2 \cdot 10^6$ достигается при $Re_x = 1100$. При $Re_x = 1000$ значение Gr_c снижается до $1.15 \cdot 10^6$, а при $Re_x = 850$ и 1200 – до $1.1 \cdot 10^6$. Таким образом, область стабилизации для $Pr=0.03$ довольно узкая. При этом значения параметра конвективных взаимодействий Re_x^2/Gr находятся в интервале от 0.65 до 1.1.

Режим $Pr=1$ характеризуется сменой моды потери устойчивости с трехмерной на двумерную и переходом к неустойчивости типа Рэлея-Бенара с периодическим отделением термиков от холодной нижней границы кристалла. В этом режиме течение в отсутствие вращения кристалла становится колебательным при $Gr > 1.9 \cdot 10^7$, а потеря осевой симметрии происходит при более высоких значениях $Gr > 2.2 \cdot 10^7$.

В табл. 1 представлены характеристики течения при различных значениях числа Грасгофа в зависимости от скорости вращения кристалла Re_x . Для предкритических значений $Gr < 1.9 \cdot 10^7$ относительно медленное вращение кристалла не приводит к колебаниям, но при повышении Re_x происходит переход к неустойчивости типа Рэлея-Бенара и, в дальнейшем, к нарушению осевой симметрии. В определенном диапазоне значений Re_x наблюдается геометрическая симметрия с волновым числом $\kappa=2$ для большинства режимов. Для значений $Gr = 1 \cdot 10^7$, $Re_x = 1250$ и 1300 волновое число $\kappa=3$, при этом имеет место некоторое ослабление вихревых структур и снижение амплитуды отклонений температуры $\delta\theta$ от среднего значения.

Таблица 1

Режим течения	$Gr = 1 \cdot 10^7$	$Gr = 1.4 \cdot 10^7$	$Gr = 1.8 \cdot 10^7$	$Gr = 2 \cdot 10^7$
Оссесимметричный стационарный	0 – 850	0 – 750	0 – 500	—
Оссесимметричный колебательный	900	800 – 900	550 – 950	0 – 250
Неосесимметричный с геометрической симметрией	950 – 1300	950 – 1100	1000 – 1100	—
Неосесимметричный без геометрической симметрии	≥ 1400	≥ 1200	≥ 1200	≥ 300

Для сверхкритического значения $Gr=2 \cdot 10^7$ стационарного режима течения не наблюдается, а нарушение осевой симметрии происходит уже при достаточно низких значениях $Re_x \geq 300$. Таким образом, при $Pr=1$ вращение кристалла не оказывает стабилизирующего влияния на течение. При этом характер течения при низких значениях Re_x не нарушается.

На рис. 2 представлены динамические картины течений для двух режимов с геометрической симметрией в горизонтальных сечениях с волновыми числами $\kappa=3$ и 2, соответственно. Оба режима характеризуются периодическим образованием термиков.

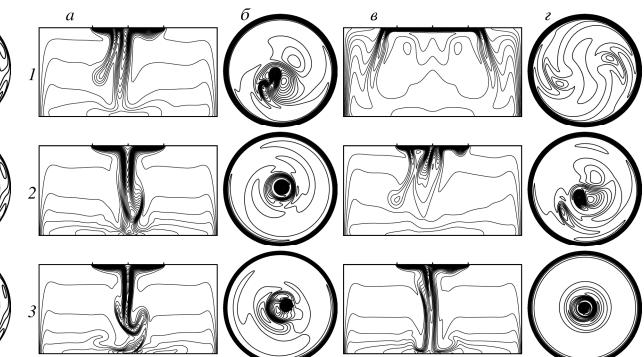
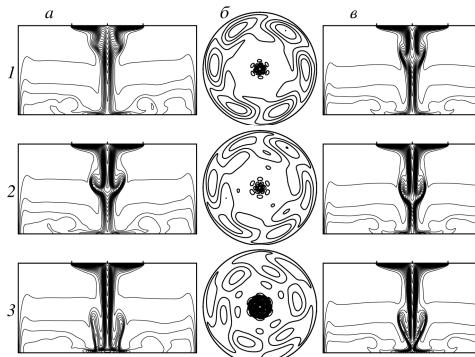


Рис. 2. Изотермы в вертикальном сечении (a, в) и изолинии отклонения температуры от среднего значения $\delta\theta$ в горизонтальном сечении $z=0.5$ (б, г) в моменты времени (1–3) для режимов $Pr=1$, $Gr=1 \cdot 10^7$, $Re_x=1250$ (а, б) и $Gr=1.8 \cdot 10^7$, $Re_x=1000$ (в, г)

Рис. 3. Изотермы в вертикальном (а, в) и горизонтальном ($z=0.2$, б, г) сечениях для $Pr=6.5$: 1 – $Gr=2 \cdot 10^5$, $Re_x=200$ (а, б) и 1000 (в, г); 2 – $Gr=4 \cdot 10^5$, $Re_x=150$ (а, б) и 400 (в, г); 3 – $Gr=8 \cdot 10^5$, $Re_x=150$ (а, б) и 200 (в, г)

При $Pr=6.5$ неустойчивость типа Рэлея-Бенара при неподвижном кристалле выражена более явно, а осесимметричный колебательный режим наблюдается в диапазоне $4.5 \cdot 10^5 < Gr \leq 9 \cdot 10^5$. В табл. 2 представлены характеристики течения в зависимости от скорости вращения кристалла Re_x для нескольких характерных значений числа Грасгофа: предкритических $Gr < Gr_c$ и сверхкритических $Gr > Gr_c$, где $Gr_c = 4.5 \cdot 10^5$ – позиция смены стационарного режима на колебательный при неподвижном кристалле. Для предкритических значений Gr при медленном вращении кристалла сохраняется стационарный режим течения. При повышении скорости вращения происходит переход в колебательный режим с последующей потерей осевой симметрии. При дальнейшем повышении Re_x наблюдается режим спирального течения, имеющего стационарный характер во вращающейся системе отсчета. Наконец, при высоких значениях Re_x течение снова становится нестационарным, с переходом от регулярных периодических колебаний к нерегулярным.

Таблица 2

Режим течения	$Gr = 2 \cdot 10^5$	$Gr = 4 \cdot 10^5$	$Gr = 5 \cdot 10^5$	$Gr = 8 \cdot 10^5$
Оссесимметричный стационарный	0 – 140	0 – 75	—	—
Оссесимметричный колебательный	—	100 – 125	0 – 125	0 – 100
Неосесимметричный колебательный	—	150 – 175	150 – 200	125 – 180
Неосесимметричный стационарный	150 – 400	200 – 550	225 – 600	190 – 220
Неосесимметричный колебательный	≥ 450	≥ 600	≥ 650	≥ 225

На рис. 2 представлены мгновенные картины течения в нескольких режимах для трех основных значений числа Грасгофа – низкого, среднего (околокритического) и высокого. Для наглядности выбраны такие моменты времени, когда нестационарные и неосесимметричные эффекты колебательного течения выражены наиболее отчетливо.

Для $Gr=2\cdot10^5$ при медленном вращении кристалла $Re_x=200$ (1, а, б) наблюдается эффект устойчивого спирального течения, когда во вращающейся системе отсчета структуры полей скорости и температуры имеют стационарный характер, а поведение локальных характеристик в каждой точке полости колебательное. Этот эффект был подробно рассмотрен для похожего режима $Gr=1\cdot10^5$, $Re_x=250$ в [3]. Интересно, что для обоих режимов медленное вращение структуры полей скорости и температуры происходит в направлении, противоположном направлению вращения кристалла. Такой же эффект противоворота наблюдался в статье [5] при определенных сочетаниях параметров Pr , Gr , Re_x и Mn .

Для $Gr=4\cdot10^5$ при $Re_x=150$ (2, а, б) течение является колебательным, с образованием небольшого неосесимметричного термика. При более высоком $Re_x=400$ (2, в, г) течение становится стационарным во вращающейся системе отсчета, подобным рассмотренному выше для $Gr=2\cdot10^5$, $Re_x=200$. Из табл. 2 можно определить диапазон значений параметра конвективных взаимодействий, при которых реализуется такое течение: $0.1 < Re_x^2 / Gr < 0.8$ (для $2\cdot10^5 \leq Gr \leq 5\cdot10^5$).

Для $Gr=8\cdot10^5$ при $Re_x=150$ (3, а, б) тоже имеет место колебательное течение с неосесимметричным термиком. Форма термика и характер течения очень близки к наблюдаемым в отсутствие вращения кристалла в режиме потери осевой симметрии $Gr=1\cdot10^6$.

При $Gr=8\cdot10^5$ и $Re_x=200$ (3, в, г) течение становится стационарным во вращающейся системе отсчета, однако его характер отличается от такого течения при меньшем Gr . Здесь ядро течения представляет собой узкую струю с небольшим искривлением, а вращение полей скорости и температуры происходит в том же направлении, что и вращение кристалла. Локальные характеристики течения меняются слабо, а глобальные остаются постоянными, поэтому можно говорить о частичной стабилизации течения. Похожая картина течения с вращающейся искривленной струей была получена в эксперименте [6] для $Re_x=190$ (показана на рис. 4). По результатам сравнения картин течения можно говорить о качественном подобии результатов.

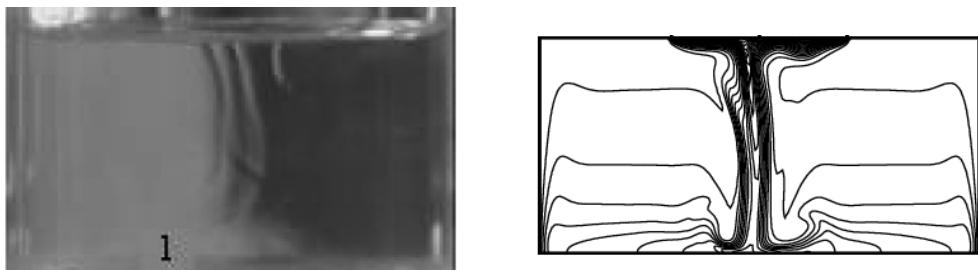


Рис. 4. Экспериментальная (слева) и расчетная (справа) картины течения с узкой искривленной струей, вызванной вращением кристалла при высоких Pr

Таким образом, при низких значениях Pr вращение кристалла позволяет стабилизировать течение и повысить критическое число Грасгофа. В свою очередь, при средних и высоких Pr вращение кристалла не приводит к повышению порога устойчивости течения. При этом в определенном диапазоне чисел Gr и Re_x наблюдается устойчивое спиральное течение, которое в одной из форм может приводить к частичной стабилизации при повышенном значении числа Грасгофа. С другой стороны, медленное вращение кристалла не снижает порог устойчивости, что может быть важным в технологических применениях.

Полученные результаты будут использоваться на последующем этапе работы при изучении влияния на устойчивость течений совместного вращения кристалла и тигля.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 15-01-06363. Расчеты выполнялись на компьютерах вычислительного центра “Mésocentre”, Университет Экс-Марсель, Франция.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.В. Никитин, С.А. Никитин, В.И. Полежаев. Конвективные неустойчивости в гидродинамической модели роста кристаллов методом Чохральского. Успехи механики, 2003, т.2, №4, с.63–105.
2. О.А. Бессонов, В.И. Полежаев. Неустойчивости тепловой гравитационной конвекции и теплообмен в модели метода Чохральского при различных числах Прандтля. Изв. РАН. МЖГ, 2013, №1, с.27–40.
3. О.А. Бессонов, В.И. Полежаев. Карта режимов и пространственные эффекты конвективных взаимодействий в гидродинамической модели метода Чохральского. Изв. РАН. МЖГ, 2014, №2, с.16–28.
4. О.А. Бессонов. Конвективные взаимодействия и устойчивость течений в модели метода Чохральского при вращении кристалла. Изв. РАН. МЖГ, 2015, №3, с.44–55.
5. Z. Zeng, J. Chen, H. Mizuseki, F. Shimamura, T. Fukuda, Y. Kawazoe. Three-dimensional oscillatory convection of LiCaAlF₆ melts in Czochralski crystal growth. J. Crystal Growth, 2003, v.252, №4, pp.538–549.
6. M. Teitel, D. Schwabe, A. Yu. Gelfgat. Experimental and computational study of flow instabilities in a model of Czochralski growth. J. Crystal Growth, 2008, v.310, №7–9, pp.1343–1348.

**А.Н. Богданов, В.Н. Диесперов, В.И. Жук
АСИМПТОТИКИ ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ
В ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНОГО СВОБОДНОГО ВЯЗКО-НЕВЯЗКОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ТРАНСЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ**

Обсуждается асимптотическое поведение дисперсионных кривых при исследовании устойчивости неклассических пограничных слоев при трансзвуковом обтекании. Проводится сравнение результатов, полученных при использовании классической [1] и модифицированной [2] моделей. Показано, что модифицированная модель дает дополнительное возмущение, выпадающее из рассмотрения при использовании классической модели, и позволяет определить его поведение.

Литература

1. Рыжов О.С., Савенков И.В. Об устойчивости пограничного слоя при трансзвуковых скоростях внешнего потока// ПМТФ. 1990. № 2.С. 65-71.
2. Богданов А.Н., Диесперов В.Н. Моделирование нестационарного трансзвукового течения и устойчивость трансзвукового пограничного слоя// ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 3. С. 394-403.

К списку докладов

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ ПЛАСТИН ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Бондарев В.О.¹, Веденеев В.В.¹

(¹МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

Изучается устойчивость упругой пластины в сверхзвуковом потоке газа. Эта задача изучалась в ряде работ по панельному флаттеру, где поток считается однородным без пограничного слоя. В данной работе исследуется влияние пограничного слоя.

В первой части работы изучается устойчивость упругой пластины, обтекаемой с одной стороны плоскопараллельным сверхзвуковым потоком сверхзвукового вязкого совершенного газа. Пластина имеет форму безграничной плоскости, на её поверхности имеется пограничный слой с полем скорости и температуры, которые считаются заданными. На систему накладываются малые возмущения в виде бегущих волн: пластина имеет прогиб $z = Ae^{i\alpha(x-ct)}$, возмущение параметров потока $\psi'(x, z, t) = \hat{\psi}(z)e^{i\alpha(x-ct)}$. Задача решается в плоской постановке. Течение считается ламинарным.

Исследуются невязкие возмущения, т.е. число Рейнольдса бесконечно большое. Такие возмущения описываются уравнением Рэлея. Уравнение движения пластины описывается уравнением Кирхгофа-Лява [1].

Во второй части работы исследуется глобальная устойчивость длинной (но конечной) упругой пластины, обтекаемой с одной стороны плоскопараллельным потоком вязкого совершенного газа с использованием критерия А.Г. Куликовского [3]. Для поиска удовлетворяющих ему частот численно решается дисперсионное уравнение, связанное с данной задачей. Его можно переписать так [4]:

$$Imk_2(\omega) = Imk_3(\omega)$$

где k_2 и k_3 – ветви решений дисперсионного уравнения, которые отвечают волнам, распространяющимся вниз по потоку (k_2) и вверх по потоку (k_3).

Вычислены зависимости скорости роста возмущений от толщины пограничного слоя для различных длин волн для выпуклого профиля скорости и для профиля скорости с точкой перегиба. Проведено сравнение с аналитическим решением для длинных волн [2], найден диапазон длин волн, при котором эти решения совпадают. Расчеты показывают, что при коротких волнах результаты вычислений дают инкременты роста, превышающие полученные в длинноволновом приближении.

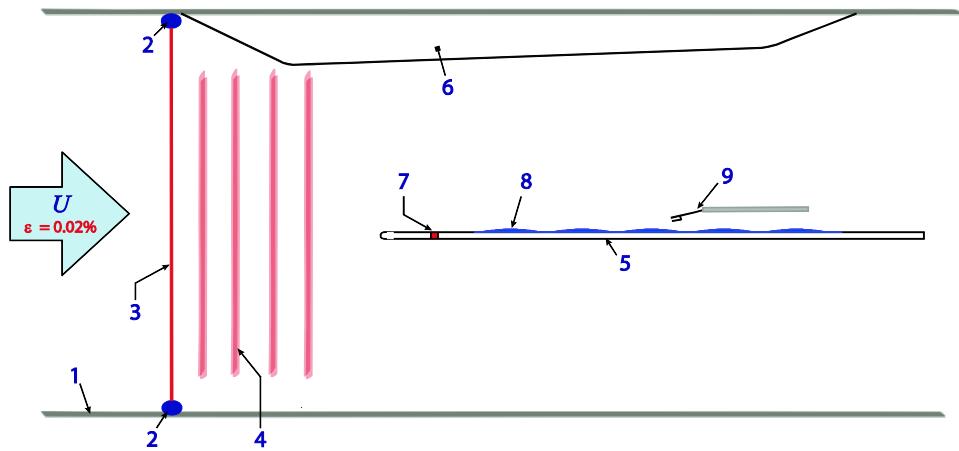
Вычислены частоты конечной пластины, удовлетворяющие критерию А.Г. Куликовского для различных толщин пограничного слоя для выпуклого профиля и профиля с точкой перегиба. По аналогии с первой частью работы получены аналитические (для длинных волн) и численные (в общем случае) решения. Сделано сравнение полученных решений. В частности, результаты расчетов для выпуклого профиля скорости показывают, что для достаточно толстого пограничного слоя численное решение указывает на устойчивость, тогда как аналитическое решение дает область неустойчивости.

Работа поддержана грантом МД-4544.2015.1.

Литература

1. *Вольмир А.С.* Гибкие пластины и оболочки. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 472 с.
2. *Веденеев В.В.* Одномодовый флаттер пластины с учетом пограничного слоя// Известия РАН. МЖГ. 2012. № 3. С. 147-160.
3. *Куликовский А.Г.* Об устойчивости однородных состояний// ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 148-153.
4. *Vedeneev V.V.* Interaction of panel flutter with inviscid boundary layer instability in supersonic flow. 2013. J. Fluid Mech. 736, 216 – 249.

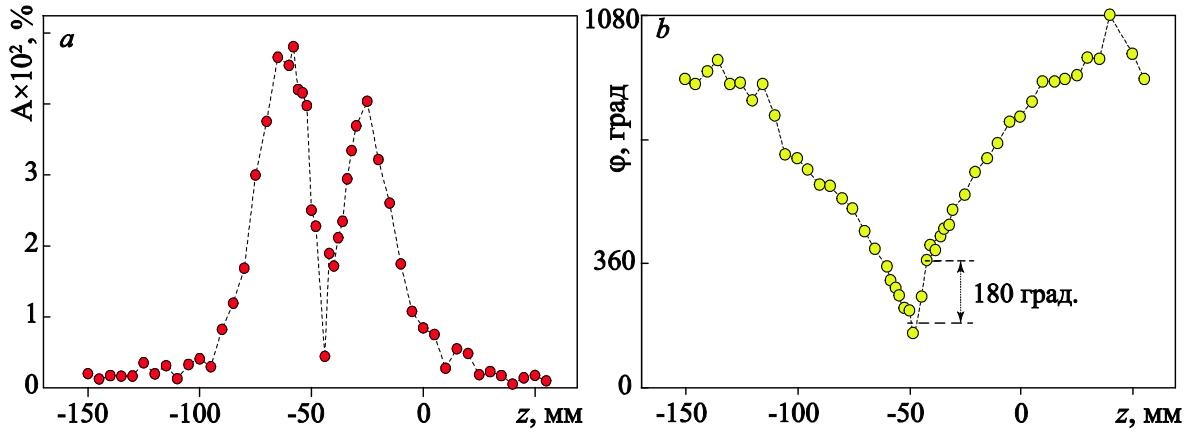
),
 - () - (),
 , ,
 , ,
 () [1],
 [1],
 , ,
 ().



, 1, , 2 – , 3
 – , 4 – , 1 – , 5 – , 6 – ,
 , 7 – , 8 – , 9 – ,
 . 1. (8), (5) (1485×1000×10⁻³²⁴) () ()
 , λ_{sx}) () () ()
 [1].
 (6), β_H = -0,115.
 8,9 / 8,6 / , (3), ()
 , , ,
 ().
 (9).
 0,02%
 x (), z –
 , y –
 ,
 ,
 ,
 ,
 ,

(7) (, /),
(3) (,).

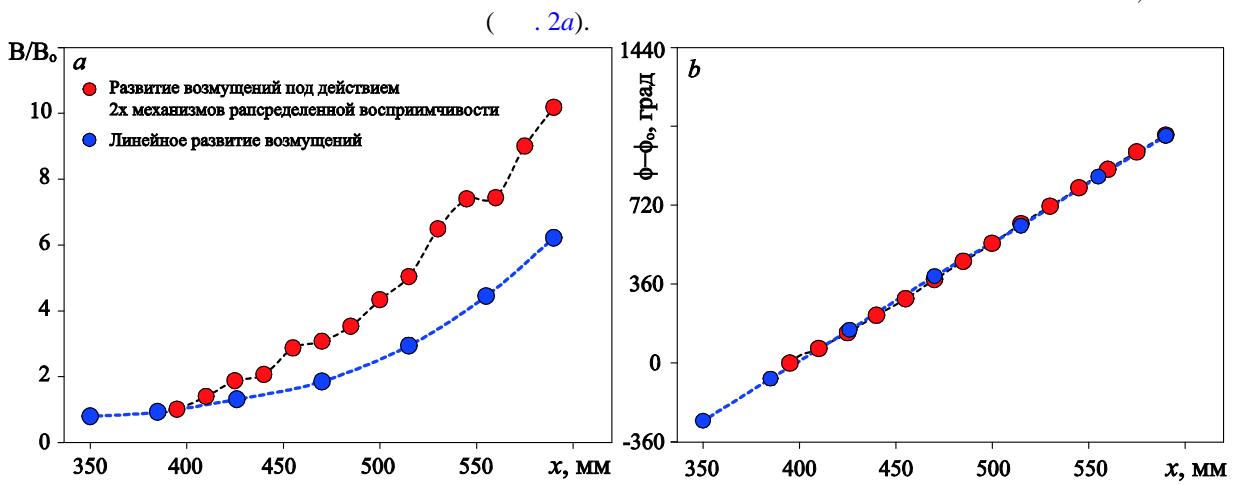
. 2 . (, ,
, ($U(y)/U_e = 0,45.$).



. 2
 $U/U_e = 0,45, h_1 = 177, \lambda_{sx} = 86,7, f = 53,7$, $x = 560$

$\theta = 61$

(. 3a).



. 3 (a) ()

(). $\theta = 61$, $h_1 = 177, \lambda_{sx} = 86,7, f = 53,7$, $U/U_e = 0,45.$

[1],

$$\frac{d\overline{B}^d(x, y_m)}{dx} = i\overline{\alpha}(x)\overline{B}^d(x, y_m) + \overline{B}_v(x, y)|_{y=\delta}\overline{G}_v^d(x) + \overline{B}_v(x, y)|_{y=\delta}\overline{G}_{vs}^d(x)(\overline{H}(x) + \overline{\overline{H}}(x))/2$$

):

$$I, II - III : (I)$$

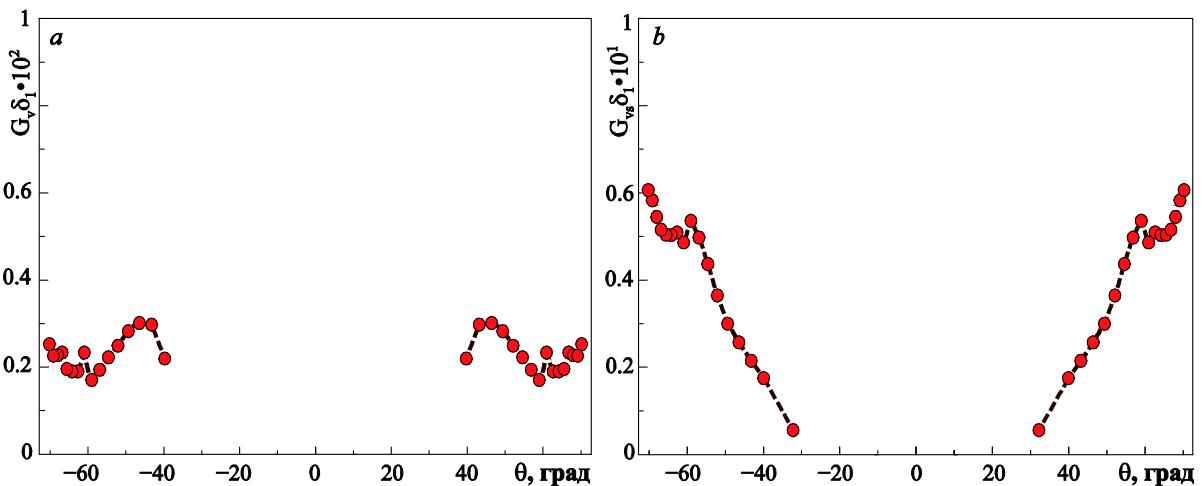
, (II)

$$\overline{B}^d - (III)$$

, $\overline{\alpha} -$

(. 4) . 4a) . 4b)

), \bar{B}_v –
 $\bar{H}(x)$ –
 $\bar{G}_v^d(x)$ $\bar{G}_{vs}^d(x)$ –
 \bar{B}_0^d –
 \bar{G}_v , \bar{G}_{vs} \bar{B}_0^d
 $\bar{B}^d(x)$ –
 θ .
 \bar{G}_v \bar{G}_{vs} ,
 h/δ_1 $\sim 4\%$ \bar{G}_v
 \bar{G}_{vs} ,
 $h_1 = 177$,



. 4
 $\lambda_{sx} = 86,7, f=53,7$

[1]
[1]

[1]

(15-08-07818)

- Borodulin V.I., Ivanov A.V., Kachanov Y.S., Fedenkova A.A. Three-dimensional distributed receptivity of a boundary layer to unsteady vortex disturbances // XIII International Conference on Methods of Aerophysical Re-search. Proceedings. Part III. – Novosibirsk: Publ. House “Parallel”, 2007, p. 45–50.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДРЕЙФА ВСПЛЫВАЮЩИХ ЭЙЛЕРОВЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Л.Н. Буркова, Е.Н. Буркова, А.Н. Кондрашов, К.А. Рыбкин

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Работы по исследованию обтекания твердого тела проводятся на протяжении долгого времени. Рассмотрено множество задач, когда на закрепленное тело набегает поток жидкости. Обтекаемые тела имели самую различную форму, начиная с цилиндра в плоской тонкой ячейке, заканчивая обтеканием куба, покоящегося на плоской поверхности [1-3]. Но, в случае всплытия тел, ситуация иная. К примеру, в работе [4] экспериментально исследовался дрейф твердых тел, таких как: сфера, двухосные и трехосные эллипсоиды.

Целью данной работы является изучение влияния формы и размера объекта на процесс всплытия. В качестве экспериментальных объектов использовались: куб, тетраэдр и додекаэдр. Задача решалась численно и экспериментально. В ходе экспериментального исследования изучались траектории движения и их спектральные характеристики. В ходе численного исследования тела жестко закреплялись, и изучалось их обтекание, при этом рассматривались спектры скоростей в точке, а так же спектры подъемных сил и сил сопротивления, действующих на неподвижное в жидкости тело. Далее тело освобождалось - добавлялась вращательная степень свободы, и вновь изучались спектры скорости и сил, т.е. изучалось влияние возможности вращения на сложившиеся спектральные характеристики. В дальнейшем было произведено сравнение с экспериментальными значениями. По итогам вычисленных чисел Рейнольдса для переходов определена роль вращений на спектральные характеристики: частоты, их количество, значения в спектре скорости и сил.

В численной постановке изучалась двумерная модель задачи, рассматривалось обтекание треугольника, квадрата и пятиугольника. Для каждого случая были получены характеристики пульсации скорости в точке. В эксперименте изучалось свободное всплытие многогранника, фиксировалась траектория, и проводился ее анализ. В расчете проводился анализ обтекания при свободном и закрепленном теле. Также тело фиксировалось при различных значениях угла атаки. Отмечено изменение подъемной силы и силы сопротивления, действующих на неподвижный и подвижный объект. Определены критические значения числа Рейнольдса, отвечающие за последовательную смену ламинарного, переходного и турбулентного режимов при обтекании треугольника, квадрата и пятиугольника. Проведена оценка влияния угла атаки на среднюю силу сопротивления, проведено сравнение со скоростями полученными экспериментально.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Федяев В.Л., Моренко И.В., Серазетдинов Н.З. Обтекание кругового цилиндра вязкой жидкостью с примесями // Наука. — 2006. — Вып. 1, С. 23–34.
2. Чумакова А.Т. Расчёт отрывных течений за плохо обтекаемым телом // 10-я между-нар. научно-техн. конф. ОМИП.— 2008.— Вып. 2, С. 32–37.
3. Сенницкий В. О. О поведении пульсирующего твердого тела в вязкой жидкости с отсутствием силы тяжести // ПМТФ.— 1997.—Вып. 4, С. 19–23.
4. Братухин Ю. К., Рыбкин К. А., Юдин Р. С. Хаотическая динамика дрейфа сферических тел в вязкой жидкости // Вестник Пермского университета.— 2012.— Вып. 4, С. 15–18.

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ ДВУМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ОКОЛО ВСПЛЫВАЮЩЕГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

К.О.Власов¹, В.Ю.Долинский¹, Е.Е.Мешков², И.А.Новикова²

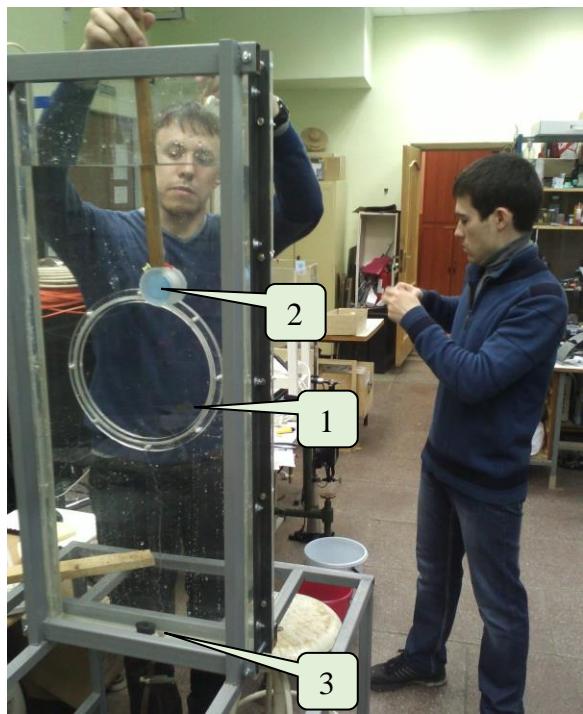
¹*РФЯЦ-ВНИИЭФ, г.Саров, Нижегородская обл.*

²*СарФТИ НИЯУ МИФИ, г.Саров, Нижегородская обл.*

E-mail: eemeshkov@gmail.com

1. Задача об обтекании тел потоком жидкости является одной из фундаментальных проблем газо-гидродинамики. Исследованиям обтекания цилиндра посвящено большое количество работ (см. напр. альбом течений жидкости Ван-Дайка [1]). В большинстве этих работ исследуется течение жидкости около неподвижного цилиндра. В нашей работе приводятся результаты разработки методики экспериментального исследования двумерного течения около цилиндра, свободно всплывающего из состояния покоя в целом покоящейся воде [2,3]. Интерес к этой проблеме связан с растущим в последнее время интересом к задаче о гидродинамической неустойчивости сдвиговых течений [4,5] и, в частности, к задаче о природе спирального характера подъема в воде маленьких пузырьков [6].

2. Эксперименты с полым цилиндром проводились в гидродинамической лаборатории СарФТИ НИЯУ МИФИ на гидродинамическом стенде [7] с прямоугольным сечением канала $6 \times 36 \text{ см}^2$ и высотой 1 м (фиг.1). Эксперимент проводился следующим образом: вначале сосуд заполнялся водой температурой $20-25^\circ\text{C}$, затем полый цилиндр из оргстекла помещался по центру сосуда на расстоянии 18 см от вертикальных стенок и на расстоянии 5 см от дна и удерживался в этом положении вакуумным присосом. Диаметр цилиндра 6 см, высота цилиндра равнялась 6 см, толщина стенок 0.8 см, масса цилиндра - 101 г.



Фиг. 1. Подготовка к проведению эксперимента на гидродинамическом стенде. Обозначения: 1-съемное окно на стенке стенда; 2-полый цилиндр; 3-место для установки и удержания цилиндра перед проведением опыта.

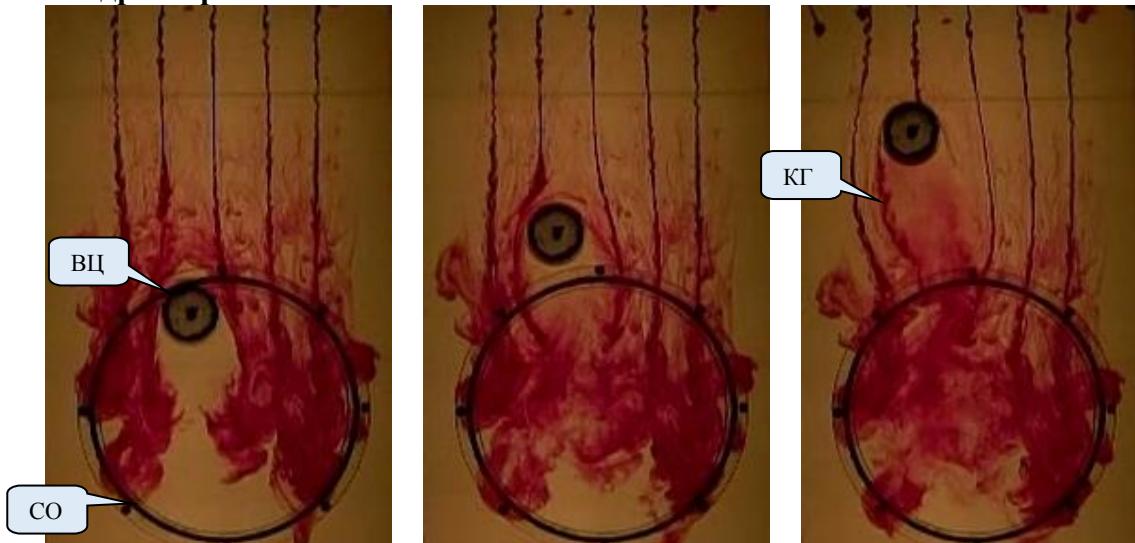
Визуализация течения около цилиндра осуществлялась при помощи струек, окрашенных марганцевокислым калием и создаваемых в воде перед началом подъема цилиндра [7]. Для этого к шарику из пластилина прикреплялись кристаллы марганцевокислого калия и эти шарики на концах тонких палочек опускались в покояющуюся воду; образующийся при этом в воде раствор марганцовки имеет плотность выше плотности воды и в результате он стекает с поверхности шарика и опускается вниз в виде ламинарной струйки. В результате за время порядка 1-2 минут в стенде образуется система вертикально расположенных и медленно опускающихся окрашенных струек; после этого производится разгерметизация удерживающей системы и цилиндр начинает всплытие из состояния покоя.

Регистрация возникающего при этом течения производилась фотокамерой Casio Exilim EX-F1 в режиме скоростной видеосъемки с частотой 300 кадров в секунду.

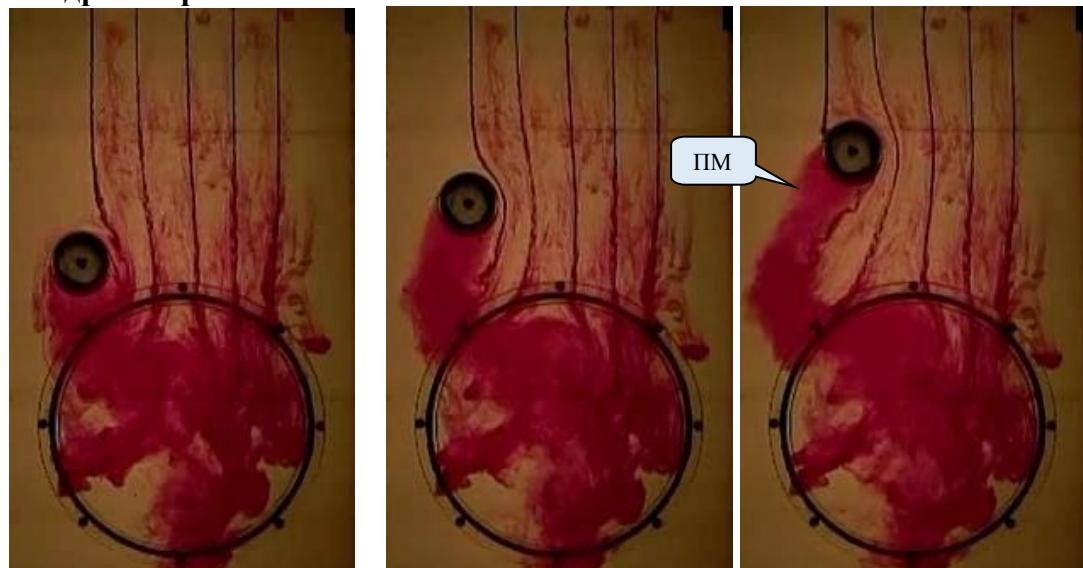
3. На figure 2 приведены кадры

видеограмм всплывающего цилиндра в двух опытах. Из экспериментов следует, что течение воды в окрестности цилиндра неустойчиво и всплытие цилиндра носит неустойчивый (виляющий) характер. Это связано с взаимодействием вихрей, возникающих попеременно по обе стороны в потоке за цилиндром, с присоединенной массой воды, увлекаемой цилиндром. На границе покоящейся воды и движущейся присоединенной массы за всплывающим цилиндром наблюдается развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца.

a) Кадры первого опыта

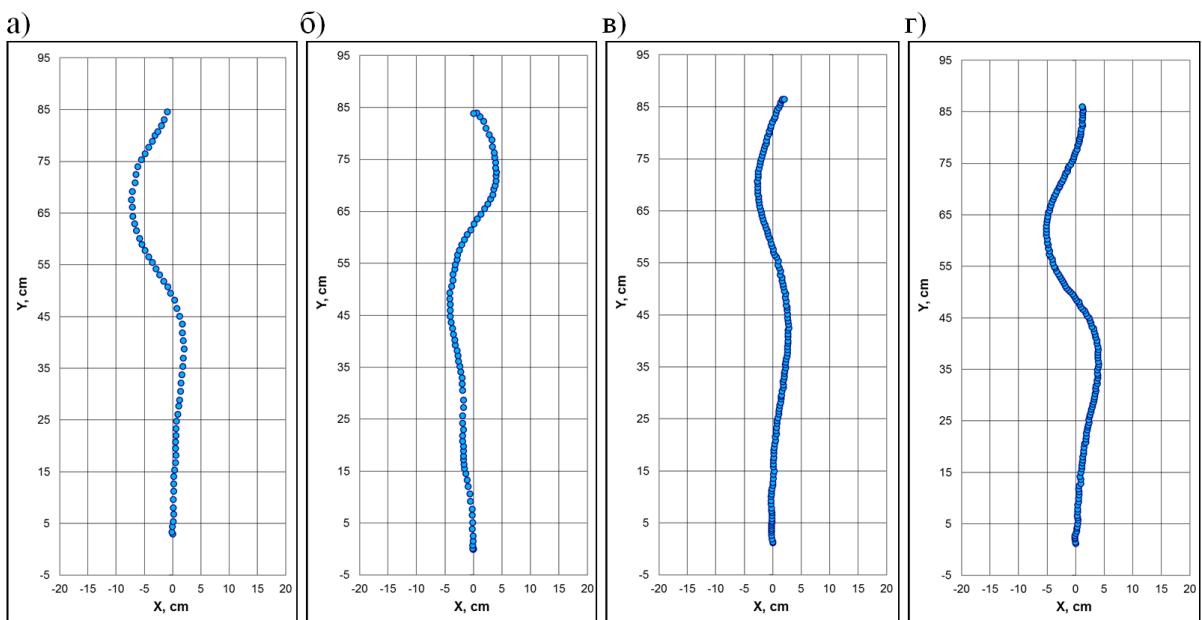


б) Кадры второго опыта



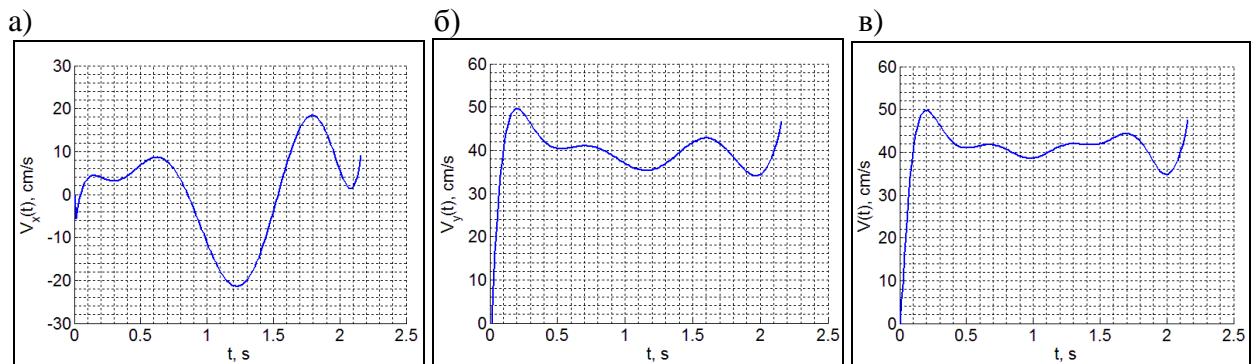
Фиг. 2. Результаты двух опытов со всплывающим цилиндром. Обозначения: ВЦ – сплывающий цилиндр; СО – съемное окно на стенке стенда; ПМ – присоединенная масса; КГ – развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на границе покояющейся воды и движущейся присоединенной массы за всплывающим цилиндром.

На фигуре 3 представлены экспериментальные траектории всплывающего цилиндра, которые были получены путем обработки видеозаписей с помощью программы Tracker 4.8. Видно, что всплытие цилиндра имеет колебательный характер. Амплитуда отклонения цилиндра от вертикальной траектории составляет порядка 5 – 10 см.



Фиг. 3. Траектории всплывающего цилиндра для четырех опытов

По полученным зависимостям $x(t)$ и $y(t)$ были рассчитаны проекции скорости на горизонтальную и вертикальную оси, а также модуль скорости всплытия. На фигуре 4 приведены проекции скорости на ось X и Y, соответствующие траектории всплытия, приведенной на фигуре 3г.



Фиг. 4. а) зависимость X-компоненты скорости от времени; б) зависимость Y-компоненты скорости от времени; в) зависимость модуля скорости от времени

Начата разработка расчетной методики исследования описанной задачи.

1. **М.Ван-Дайк.** Альбом течения жидкости и газа. Под редакцией Г.И. Баренблатта и В.П. Шидловского. Москва, Мир, 1986.
2. **M.Horowitz, C.H.K. Williamson.** Dynamics of a rising and falling cylinder.// Journal of Fluids and Structures 22 (2006) 837–843.
3. **M.Horowitz, C.H.K. Williamson** Vortex-induced vibration of a rising and falling cylinder. //J. Fluid Mech. (2010), vol. 662, pp. 352–383.
4. **С.В.Фортова** Численное моделирование вихревых каскадов для сдвигового слоя. // Известия кабардино-балкарского государственного университета. 2014. Т. IV, №1. С. 34-39.
5. **А.И.Алексюк, В.П.Шкадова, В.Я.Шкадов** Гидродинамическая неустойчивость и процессы развития отрывных течений вязкого сжимаемого газа. // Сб. анн. докл. на XI Всероссийском Съезде по проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20-24 августа 2015 г. , с.15
6. **Е.Е.Мешков.**//Корпоративная газета РФЯЦ-ВНИИЭФ «Страна РОСАТОМ ВНИИЭФ», №41, ноябрь 2015, с.3.
7. **В.П.Башурин, И.Н.Будников, В.А.Клевцов, Л.В.Ктиторов, А.Лазарева, Е.Е.Мешков, И.А.Новикова, Ф.Плетенев, Я.В.Федоренко, Г.М.Янбаев.** Гидродинамический стенд // ЖТФ, m.85, №7, с.149-150, 2015

Динамика тяжелого тела во вращающейся цилиндрической полости с жидкостью

О.А. Власова, Н.В. Козлов

Лаборатория вибрационной гидромеханики,
Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь

Экспериментально изучается поведение тяжёлого цилиндрического тела в горизонтальной цилиндрической полости. Кювета заполняется вязкой жидкостью (индустриальное масло, водный раствор глицерина). Тела изготавливаются из оргстекла или алюминия, так что их плотность больше плотности жидкости. Используются два режима вращения полости: равномерное и модулированное. Во втором случае кювета вращается по закону $\Omega = \Omega_{rot} (1 + \varepsilon \cos \Omega_{lib} t)$, где Ω_{rot} – частота равномерного вращения, которое модулируется либрациями частоты Ω_{lib} и амплитуды ε .

В покоящейся полости тело находится у нижней границы кюветы. При плавном повышении скорости вращения Ω тело увлекается стенкой полости и поднимается на некоторый угол. При этом относительно этого угла тело совершает периодические колебания вдоль стенки. Угол подъёма тела увеличивается с ростом Ω , и по достижении критической скорости вращения тело переходит в подвешенное состояние, аналогичное описанному в [1]. Обнаружено, что в подвешенном состоянии тело совершает нутационные колебания, амплитуда которых возрастает с увеличением Ω . Обнаружено, что до порога полного отрыва тела существует неустойчивое состояние, в котором цилиндр поочередно отрывается то один, то другой край.

Изучена динамика тела в центрифугированном состоянии, которое существует выше определённого порогового значения скорости вращения полости. Обнаружено, что при небольшом понижении Ω тело на части периода вращения отрывается от стенки в верхней части полости, продолжая азимутальное движение. Дальнейшее понижение скорости увеличивает длительность подвешенного состояния тела. Обнаружено, что при модулированном вращении тело отталкивается от стенки полости по достижении критического значения ε , при заданных Ω_{lib} и Ω_{rot} (рис.1). В обоих случаях отталкивания тела, угловая скорость его движения не постоянна. Под действием силы тяжести тело в среднем дрейфует в направлении обратном направлению вращения полости.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00476).

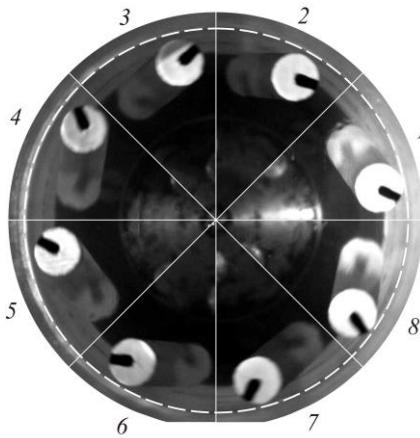


Рис.1. Положение тела в полости в течение одного оборота

ЛИТЕРАТУРА.

1. Sun C. Mullin T., Wijngaarden L. van, Lohse D. Drag and lift forces on a counter-rotating cylinder in rotating flow // J. Fluid Mech. 2010. Vol. 664. P. 150–173.

КОНВЕКТИВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ

A.A. Вяткин¹, В.Г. Козлов¹, Р.Р. Сираев²
vjatkin_aa@pspu.ru kozlov@pspu.ru romauld@mail.ru

¹Лаборатория вибрационной гидромеханики,
Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет

²Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Исследуется тепловая конвекция во вращающемся вокруг горизонтальной оси цилиндрическом слое, заполненном жидкостью. Границы слоя поддерживаются при различных температурах. Ранее, экспериментально было обнаружено, что конвекция возникает вне зависимости от того, внутренняя или внешняя граница слоя имеет более высокую температуру [1]. В случае горячей внутренней границы жидкость находится в устойчивом состоянии, но это лишь, при достаточно быстром вращении кюветы. С понижением скорости вращения в слое пороговым образом развивается конвективное течение в виде длинноволновых двумерных вихрей, вытянутых вдоль образующей слоя. Вихревые структуры медленно дрейфуют в направлении, противоположном направлению вращения кюветы [2]. Осредненная конвекция при этом имеет вибрационную природу и вызывается колебаниями неизотермической жидкости относительно полости под действием силы тяжести. Если внешняя граница имеет более высокую температуру, в слое развивается интенсивная центробежная конвекция в виде вытянутых вдоль оси вращения конвективных валов; поперечный размер валов близок к толщине слоя. В настоящей работе изучена зависимость структуры осредненной конвекции от разности температуры границ слоя в надкритической области параметров.

На основе уравнений тепловой конвекции [3], полученных методом осреднения, теоретически исследована устойчивость квазиравновесия во вращающемся тонком слое с границами разной температуры [4]. Устойчивость рассмотрена по отношению к монотонным плоским возмущениям типа вытянутых вдоль оси вращения конвективных валов. Изучены условия возникновения осредненной конвекции в плоском слое толщины h , равномерно вращающемся вокруг горизонтальной оси, параллельной слою и проходящей на расстоянии $L \gg h$ от него. В этом случае, плоский слой можно рассматривать как предельный случай цилиндрического слоя при отношении радиусов, стремящемся к единице. Результаты хорошо согласуются с экспериментальными исследованиями осредненной конвекции в горизонтальном тонком цилиндрическом слое, равномерно вращающемся вокруг собственной оси [1,2].

Работа выполнена в рамках задания Минобрнауки РФ 2014/372 (проект 2176).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Вяткин А.А., Иванова А.А., Козлов В.Г. Конвективная устойчивость неизотермической жидкости во вращающемся горизонтальном коаксиальном зазоре // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 1. С. 12-21.
2. Ivanova A., Kozlov V., Vjatkin A., Sabirov R. New type of thermal convection in the rotating annulus // Proc. 61st Intern. Astronautical Congress, IAC2010, Prague, Czech Republic, Vol. 4, P. 2880-2886.
3. Козлов В.Г. Вибрационная конвекция во вращающихся полостях // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 5–14.
4. Козлов В.Г., Сираев Р.Р. О возникновении тепловой конвекции во вращающемся плоском слое // Конвективные течения... Вып. 7. Пермь: Перм. гос. гум.-пед. ун-т, 2015. С. 16-23.

ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ СЛЕДА ОТ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ В ФОРМЕ НЕЛИНЕЙНО-СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Г.В. Гембаржевский^{1,2,*}, А.К. Леднев¹ и К.Ю. Осипенко^{1,3}

1. Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
 2. МАТИ-Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского
 3. Национальный исследовательский московский государственный строительный университет
- * E-mail: gvgemb@ipmnet.ru

Абстракт: Ранее нами был обнаружен эффект перестройки режима турбулентного плазменного следа от двух цилиндров ($Re \sim 1000$) под действием тлеющего разряда. Для интерпретации и объяснения эффекта была построена простая двухпараметрическая модель, в которой следовое течение двух дорожек Кармана пары цилиндров моделировалось в форме двух взаимодействующих осцилляторов Ван-дер-Поля. Взаимное влияние близкорасположенных дорожек учитывалось соответствующим слагаемым в уравнениях осцилляторов, нелинейным в целях большей общности модели. В первоначальном варианте спектр колективных мод следа получился тотально вырожденным, что не согласуется с известными фактами. Соответственно, не удалось однозначно интерпретировать получаемые в эксперименте режимы плазменного следа в рамках построенной схемы. Модель была обобщена путем учета зависимости частоты осцилляций в дорожках Кармана от их амплитуды. В результате спектр мод следа, реализуемых в рамках модели, увеличился на одну моду и принципиально расширился набор режимов перемежающегося следа: с одного до шести различных режимов. При этом вырождение мод по частоте было (фактически) полностью снято.

Ключевые слова: перемежающийся след, дорожки Кармана, осциллятор Ван-дер-Поля, глобальные моды, тлеющий разряд

Следовые течения за группой плохо обтекаемых тел неизменно представляют интерес во многих отраслях техники, например, в плане оптимизации тепло- и массообмена в теплообменниках, камерах сгорания, в задачах, связанных с генерацией звука потоком. Актуальна проблема управления течением с помощью актиuatorов, в качестве которых перспективно использование тех или иных устройств на основе импульсных электрических разрядов: диэлектрического барьера, коронного (см., например [1, 2]). Авторы соприкоснулись с подобной проблематикой при исследовании течения инверсно заселенной среды в быстро-проточных электроразрядных лазерах [3]. В подобных мощных непрерывных технологических лазерах неравновесная плазма имеется изначально (в соответствии с принципом действия устройства), а гидродинамические характеристики турбулентного потока необходимо оптимально настроить в рамках

многофакторного критерия, с учетом оптических свойств активной среды [4]. Как правило, в этих лазерах турбулентный след образуется за секционированным электродом и/или за специальным турбулизирующим устройством. В случае применения широкоапertureных потоков плазмы, следует рассматривать схему течения за рядом цилиндрических тел. Аналогичная ситуация реализуется при смешении потоков в химических лазерах. Здесь уместно отметить, что задачам применения разрядов с целью модификации течения в лазерах или на несущей поверхности присущи общие черты, но имеются и принципиальные отличия. В частности, в случае применения актоаторов оптимальным является использование резко неоднородных форм разряда [5], а в непрерывных лазерах, напротив, желательно максимально однородное пространственное распределение разрядных параметров в соответствии с принципом действия лазера.

Турбулентный след за группой тел представляет собой неустойчивое, перемежающееся с режима на режим течение. Ранее для следа за параллельными цилиндрами нами был обнаружен (с помощью одноточечного датчика) эффект перестройки следа под действием тлеющего разряда [6]. Соответственно, в ходе работ по проекту РФФИ 13-01-00742 основное внимание было сосредоточено на наиболее простом, основополагающем варианте течения за двумя параллельными круговыми цилиндрами. Для комплексного экспериментально-теоретического изучения ближнего следа за двумя цилиндрами была выработана согласованная методика исследования. Изучалось турбулентное несжимаемое течение при числе Рейнольдса $Re \sim 1000$, определенном по невозмущенной скорости течения и диаметру цилиндров, при числе Маха не превышающем величины $M < 0,15$, при этом аспектное отношение параметров цилиндров (отношение высоты к диаметру) было достаточно малым $H / D \sim 3,5$. Соответственно, ближний след за цилиндрами представлял собой структуру типа взаимодействующих дорожек Кармана. В сформулированной задаче требовались синхронные экспериментальные данные об обеих дорожках. В качестве таких данных были выбраны сигналы пульсаций скорости в характерных точках двух дорожек Кармана. Точки располагались за зоной формирования дорожек на относительном расстоянии $L / D \sim 12$ вниз по течению, за осями цилиндров. Проведение этих экспериментов потребовало создания специального двухточечного датчика поперечной составляющей скорости, работоспособного как для потоков плазмы несамостоятельного тлеющего разряда, так и для потоков нейтрального газа. Такой датчик был успешно разработан и создан в ходе работ по проекту РФФИ № 13-01-00742 [7]. Его принцип работы аналогичен таковому для ранее использовавшегося авторами одноточечного датчика: конструкция типа Siddon-Ribner, но с оптическим выводом сигнала (для обеспечения работоспособности в

присутствии электрических полей напряженностью ~ 10 кВ / м).

Для обеспечения работ по проекту в теоретическом плане, была разработана простейшая осцилляторная модель ближнего следа за цилиндрами [8, 9]. Соответственно, было проведено сопоставление данных, полученных с помощью двухточечного датчика с выводами описанной выше первоначальной модели следа [7, 10]. К сожалению, результаты такого сопоставления данных по скорости не дали полностью однозначного результата по идентификации наблюдаемых режимов течения. Дело в том, что полученные записи сигналов скорости оказались существенно зашумленными широкополосными турбулентными пульсациями, что затрудняло их непосредственное сопоставление с модельными данными (во временной развертке). Естественный в таком случае вариант действий - сопоставление данных в форме спектральных распределений сигналов с модельными результатами также затруднен для первоначальной модели следа, поскольку в этой простейшей модели все моды вырождены по частоте осцилляций. Поэтому в 2015 году разрабатываемая модель была усложнена за счет прямого учета зависимости частоты осцилляций дорожек Кармана от их амплитуды. В свою очередь, экспериментальная установка была модернизирована с целью максимального успокоения и выравнивания потока газа, поступающего в разрядную камеру.

Для компактности изложения, ниже сразу идет описание обобщенной модели, причем первоначальная модель является ее частным случаем, когда один из параметров модели выпадает из рассмотрения: $\Delta = 0$.

$$\left[1 + \Delta (\rho^2 - 4) \right] \frac{d^2 X_1}{dt^2} + X_1 - \varepsilon \left[1 - X_1^2 - \lambda X_2^2 - l X_1 X_2 \right] \frac{d X_1}{dt} = h_1 \quad (1)$$

$$\left[1 + \Delta (r^2 - 4) \right] \frac{d^2 X_2}{dt^2} + X_2 - \varepsilon \left[1 - X_2^2 - \lambda X_1^2 - l X_1 X_2 \right] \frac{d X_2}{dt} = h_2 \quad (2)$$

Две вихревые дорожки, составляющие след, моделировались, соответственно, двумя нелинейно взаимодействующими осцилляторами Ван-дер-Поля. Независимая переменная X_i в уравнениях осцилляторов (1), (2) отождествлялась с поперечной составляющей скорости в характерной точке соответствующей сформировавшейся дорожки Кармана. Взаимодействие между дорожками учитывалось квадратичным, общего вида членом во вторых квадратных скобках уравнений модели, содержащим два параметра. Отметим, что учет нелинейности взаимодействия осцилляторов-дорожек представляется

принципиальным, поскольку расширяет область применимости модели. Правые части уравнений h_i - случайные процессы, моделирующие возникновение стохастичности в следе. Система уравнений (1), (2) содержит четыре параметра $\lambda, l, \varepsilon, \Delta$. Последний параметр Δ отвечает за прямой учет зависимости частоты осцилляций от их амплитуды, в первоначальном варианте модели [8, 9] такой учет отсутствовал $\Delta = 0$. Наследуемый параметр Ван-дер-Поля считаем малым согласно имеющимся экспериментальным данным [11]

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad (3)$$

В соответствии с (3), обобщенная модель (1-2) становится эффективно трехпараметрической, а первоначальная - эффективно двухпараметрической.

Следующий шаг - это определение спектра мод следа, реализующихся в рамках модели. Глобальные коллективные моды соответствуют стационарным решениям системы (1), (2) при нулевых правых частях уравнений. С учетом условия (3), согласно метода Крылова-Боголюбова ищем решение системы (1), (2) в виде осцилляций с медленно меняющимися амплитудой и фазой:

$$X_1 = \rho \cos \left(\int \frac{d\tau}{\sqrt{1 + \Delta(\rho^2 - 4)}} + \theta \right) \quad (4)$$

$$X_2 = r \cos \left(\int \frac{d\tau}{\sqrt{1 + \Delta(r^2 - 4)}} + \Psi \right) \quad (5)$$

При этом удобно ввести в рассмотрение разность фаз осцилляций в дорожках

$$P = \theta - \Psi \quad (6)$$

В результате получаем следующий набор коллективных мод следа двух цилиндров:

I. Мода симметричного следа синфазно синхронизованных дорожек Кармана - S_0

$$\rho^2 = r^2 = 4 / (1 + \lambda + l) ; \quad P = 0$$

II. Мода симметричного следа противофазно синхронизированных дорожек - S_π

$$\rho^2 = r^2 = 4/(1 + \lambda - l) ; \quad P = \pi$$

III. Мода (вырожденная) симметричного следа дорожек, синхронизированных на варьируемый угол - S_P

$$\rho^2 = r^2 = 4/(1 + 3\lambda - l^2/\lambda) ; \quad P = (+/-)\arccos(-l/2\lambda)$$

IV. Мода (вырожденная) асимметричного следа AS , когда одна из дорожек Кармана полностью подавлена

$$\rho = 4; \quad r = 0 \quad \text{или} \quad r = 4; \quad \rho = 0$$

V. Мода асимметричного следа, состоящая из дорожек различной «амплитуды»

$$AS_{\rho r}$$

$$R^2 \approx 8/(2 - |l \cos(P)|) ; \quad P = (-l/|l|) \arccos((-l/|l|)\sqrt{1,5 - 0,5/\lambda}) ;$$

$$\sqrt{D(1-D)} \approx \frac{\varepsilon \left(1 - 4\Delta + 0,5\Delta R^2\right)^{3/2}}{8\Delta \left(1 - 4\Delta + 0,25\Delta R^2\right)} \sqrt{\frac{(1/\lambda) - 1}{2}} \left(|l| - \sqrt{6\lambda^2 - 2\lambda}\right) ;$$

$$\rho^2 = R^2 \left(0,5 + \sqrt{D(1-D)}\right) ; \quad r^2 = R^2 \left(0,5 - \sqrt{D(1-D)}\right)$$

Глобальная мода $AS_{\rho r}$ реализуется только в рамках расширенной модели $\Delta \neq 0$, тогда как моды I - IV имеют место в обоих вариантах модели следа двух цилиндров.

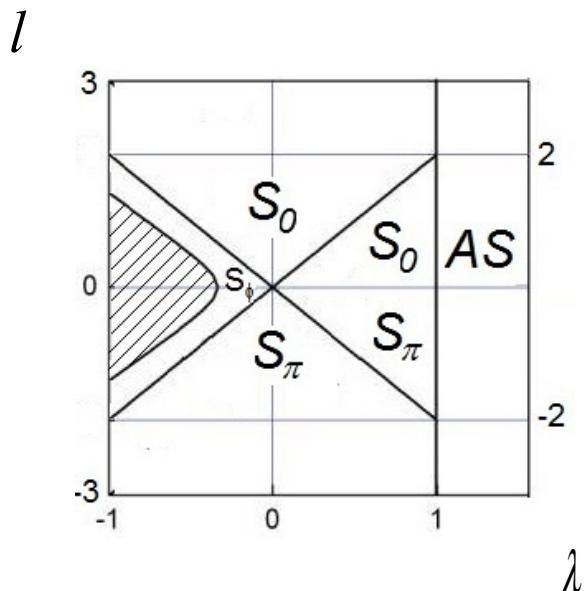


Рис. 1. Карта режимов следа,

реализуемых в рамках первоначальной модели следа цилиндров: $\Delta = 0$.

Символические обозначения коллективных мод нанесены на областях их существования.

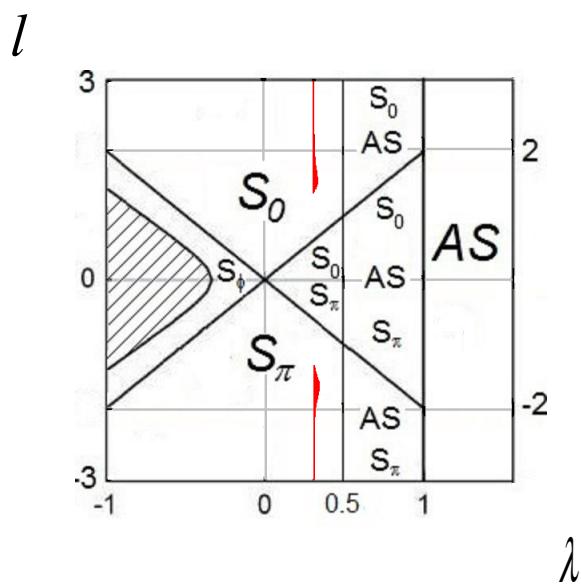


Рис. 2. Карта режимов следа,

реализуемых в рамках обобщенной модели следа цилиндров: $\Delta \neq 0$.

Область существования моды AS_{ρ_r} закрашена красным цветом.

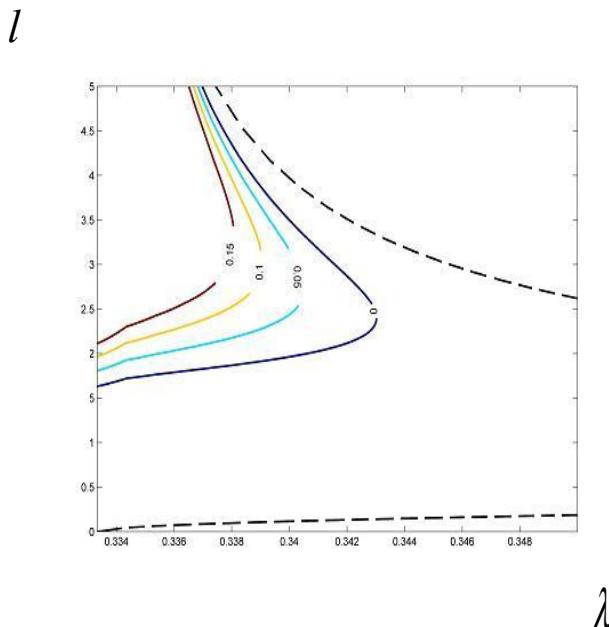


Рис. 3. Граница области существования моды $AS_{\rho r}$ на плоскости параметров модели l, λ для случая $\Delta = 0,125$, $l > 0$. Сплошные кривые - линии уровня левой стороны критерия Рассса-Гурвица $a_1 a_2 - a_3 > 0$ (в обозначениях [12]); пунктир – границы формального существования моды, без учета устойчивости.

ВЫВОДЫ:

1. Выработаны основные принципы согласованной прямой методики исследования плазменного турбулентного ближнего следа за двумя параллельными цилиндрами – и в эксперименте и в теории рассматривается два одноименных скалярных процесса.
2. Под выработанную методику изучения следа создан двухточечный датчик поперечной составляющей скорости плазмы.
3. Осцилляторная модель следа двух параллельных цилиндров разрабатывается. Имеющийся вариант модели охватывает пять коллективных стационарных мод и шесть перемежающихся режимов следа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 13-01-00742-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исаев С.А., Баранов П.А., Судаков А.Г., Ермаков А.М. // Письма в ЖТФ 2015, Т. 41, Вып. 2, С. 49-57.
2. Терешонок Д.В. // Письма в ЖТФ 2014, Т. 40, Вып. 3, С. 83-89.
3. Гембаржевский Г.В., Генералов Н.А. // Мат. моделирование 2001, Т. 13, № 7, С. 11-16.

4. *Huang H., Wang Y.* // Optical Engineering 2011, V. 49, N 11, 114201.
5. *Sosa R., Artana G., Benard N., Moreau E.* // Exp. Fluids 2011, V.51, P. 853-860.
6. *Гембаржевский Г.В.* // Письма в ЖТФ 2009, Т. 35, Вып . 5, С. 95-102.
7. *Гембаржевский Г.В., Сиротин А.А.* // В Материалах X Международной конференции по Неравновесным процессам в соплах и струях 25-31 мая 2014 г., Алушта, С. 212-214.
8. *Gembarzhevskii G.V., Lednev A.K.* // Proceedings of 12-th Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics, Ed. V.A. Bityurin, Moscow, JIHT RAS, 26-28 March 2013. P. 67-70.
9. *Gembarzhevskii G.V.* // Journal of Modern Physics 2015, V. 6, No 1, P. 46-57.
10. *Гембаржевский Г.В., Осипенко К.Ю.* // В Материалах X Международной конференции по Неравновесным процессам в соплах и струях 25-31 мая 2014 г., Алушта, С. 255-257.
11. *Gembarzhevskii G.V.* // Contributed papers of VI Int. Conference on Plasma Physics and Plasma Technology, Minsk, Belarus, September 29 - October 2, 2009. V. 1. P. 27-30.
12. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике, Москва, Наука, 1973.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ РАЗВИТИЕМ ПЕРЕГРЕВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДУГОВОГО РАЗРЯДА МЕЖДУ ПРОНИЦАЕМЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

А.П. Глинov, А.П. Головин, П.В. Козлов
 НИИ механики МГУ, Москва
 Email: krestytroitsk@mail.ru

Ранее линейный анализ устойчивости течений электропроводной сплошной среды, обусловленных джоулевым тепловыделением разряда в наклонном плоском слое в поле силы тяжести, как со сплошными, так и проницаемыми электродами, проводился в работах [1, 2]. При произвольных углах наклона электродов к горизонту было построено одномерное стационарное фоновое решение. Исследование проведено с учетом проницаемости электродов для электропроводящей среды при наличии вдува через один электрод и отсоса через другой. Построены и исследованы вольт-амперные характеристики (ВАХ). В электротехническом приближении проведен анализ устойчивости к одномерным возмущениям. Показано, что при определенных условиях существуют S-образные зависимости плотности тока от напряжения $j(U)$, когда при заданном напряжении возможно три решения с разными плотностями тока. Решение со средней плотностью тока, соответствующее участку ВАХ с отрицательным дифференциальным сопротивлением, неустойчиво. Была использована модель анализа двумерных возмущений на основе уравнений Обербека-Буссинеска и тепловой модели разряда. В электротермическом приближении, когда отсутствуют возмущения скорости, были получены результаты расчетов инкрементов неустойчивости горизонтального слоя.

Нелинейный анализ устойчивости стационарного электродугового разряда между плоскими электродами в поле силы тяжести проводился на основе прямого численного моделирования в двумерном приближении. Рассмотрены как режимы протекания тока между сплошными электродами с конечным электрическим сопротивлением, так и режимы с прокачкой электропроводной среды через проницаемые электроды. Результаты численного моделирования подтвердили полученные ранее на основе линейной теории устойчивости выводы и показали, что на падающих участках вольт-амперных характеристик одномерного (фонового) разряда возможно развитие пространственно периодических токовых структур.

Многоканальные дуговые разряды при вертикальной и горизонтальной ориентации электродов изучались ранее подробно в [3 - 7]. В воздушных дугах атмосферного давления многоканальность возникает при шунтировании и расслоении. Другим примером образования неоднородности разряда является его контракция. В экспериментах [8] показано, что многоканальность локализации токов возможна также и в разрядах между пористыми электродами при прокачке через них электролита при давлениях, меньших атмосферного и зазорах, меньших 5 мм.

Для численного моделирования разрядных неоднородностей жидкой или газообразной сплошной среды можно использовать тепловую модель разряда и модель конвекции в приближении Буссинеска. Структурная картина одномерных стационарных (фоновых) решений дана на рис. 1 [1, 2]. В этих же работах проведен анализ спектров малых возмущений фона и показано, что на падающих участках вольт-амперных характеристик разряда возможно развитие пространственно периодических структур со многими токовыми каналами.

Анализ проведенных ранее экспериментов с дугами между графитовыми электродами ([8, 10-12]) показал, что многоканальность возможна не только в зоне столба разряда, но и в приэлектродных областях. В частности, в проведенных экспериментах найдены единичные данные с образованием токовых неоднородностей в узких (1-3 мм) межэлектродных зазорах на электродах с высоким тепловым сопротивлением (длинных (5-10 см) графитовых стержнях), что качественно подтверждает выводы линейной теории устойчивости о характере и структуре токовых неоднородностей в таких разрядах.

На рис. 2 видно образование двух шнуров и их последующее слияние под действием электромагнитных сил в один токовый канал.

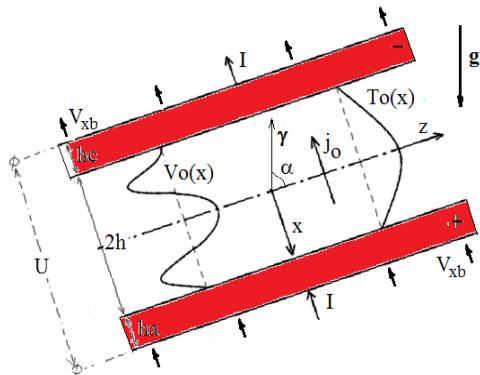


Рис. 1. Разрядная система с проницаемыми электродами [9].

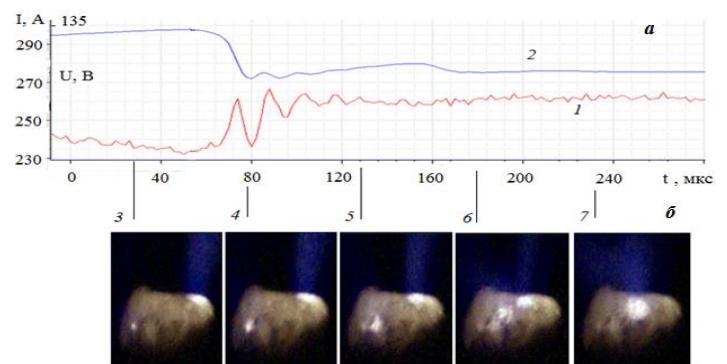


Рис. 2. Развитие токовых неоднородностей в прианодной области разряда в воздушной атмосфере между стержневыми графитовыми электродами $\varnothing = 16$ мм. Осциллограммы тока и напряжения (а) и видеокадры (б) в последовательные моменты времени (3-7) с временным интервалом 41,6 мкс: 1 – ток, 2 – напряжение; частота регистрации 24000 к/с, выдержка 1 мкс; установка П2000. Катод – выше (вне кадра) [9].

Однако использование тепловой модели разряда, дополненной уравнениями гидродинамики в приближении Буссинеска, может быть недостаточно, например, в тех случаях, когда электроды пористые и эти поры имеют выход на их внешние поверхности. Такая структура электродов (наряду с часто используемыми при изготовлении графитовых электродов примесями) иногда позволяет при возникновении внутри них тепловых неоднородностей формировать газоплазменные струи [5, 6], способные вызывать образование более одного канала привязки тока к электроду. Это возможно, например, за счет перемещения опорных пятен и плазмохимических процессов (горения углерода, испарения и даже ионизации присадок).

На рис. 3 приведены экспериментальные результаты, показывающие образование двух токовых привязок столба дуги к электроду.

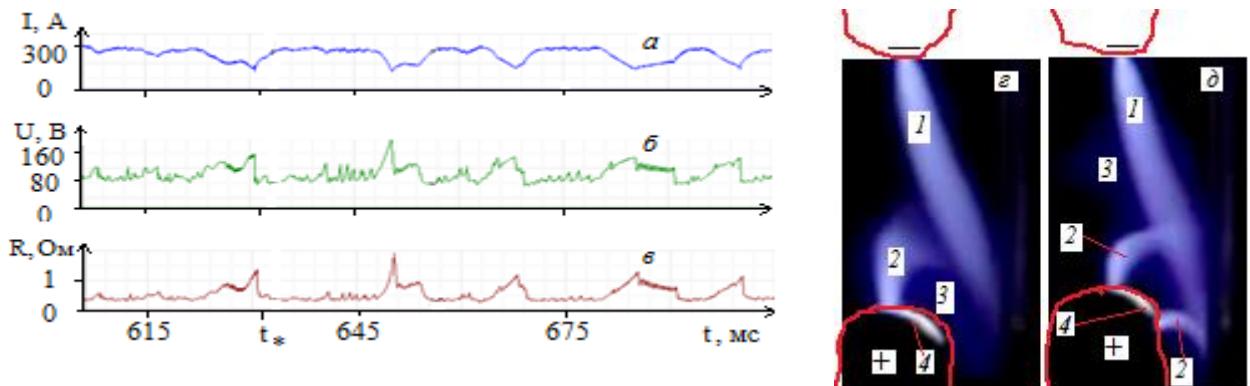


Рис. 3. Осциллограммы тока (а), напряжения (б), электрического сопротивления (в) разряда. Видеокадры с одним (г) и двумя (д) анодными факелами в моменты времени $t = t_*$ и $t = t_* + \delta t_v$: 1, 2 – катодный и анодный факелы; 3 – нагретый газ (воздух); 4 – нагретая светящаяся поверхность анода; $t_* = 656,4$ мс; $\delta t_v = 0,833$ мс – интервал времени между двумя последовательными кадрами; выдержка - 24 мкс; материал электродов – графит с открытой пористостью ЗОПГ; красными кривыми отмечены примерные контуры поверхностей электродов; межэлектродное расстояние – 40 мм.

Анализ проведенных экспериментальных данных показал, что вероятность возникновения и реализации многоканальных разрядов (многофакельных режимов анода) можно оценить примерно в 4%. На 96% видеокадров анодный факел был один.

Применение стабилизирующей (обжимающей) разряд магнитной системы [10-12] позволило вероятность многофакельных режимов существенно (до $\sim 0,01\%$) снизить.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Экспериментально и теоретически показано, что в электродуговых разрядах атмосферного давления возможны многоканальные режимы, например, в достаточно узких (несколько мм) зазорах между графитовыми электродами.

Проведено расчетно-теоретическое исследование конвективных течений, обусловленных джоулевым нагревом, в наклонном плоском слое разрядного промежутка с учетом теплового и электрического сопротивления электродов и вдува (отсоса) электропроводной среды через них. Определены условия развития разряда с однородной плотностью тока в разряд неоднородный. Обобщение ранее проведенных экспериментов с квазистационарными дугами показало, что неоднородности структуры разряда возможны как в его столбе, так и в опорных пятнах.

Показана необходимость развития моделей разряда на пористых электродах с учетом фильтрационных и плазмохимических процессов в них.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты: № 13-01-00305, № 14-01-00399).

ЛИТЕРАТУРА.

1. А.П. Глинов. Устойчивость течений электропроводной среды между сплошными плоскими электродами, наклоненными к горизонту. // Известия РАН. МЖГ 2015, №3, с. 25-34.
2. А.П. Глинов. Двумерный анализ устойчивости течений электропроводящей среды между проницаемыми плоскими электродами. // Известия РАН. МЖГ 2015, №4, с. 25-36.
3. В.О. Герман, А.П. Глинов, П.В. Козлов, Г.А. Любимов. Влияние конструкционных параметров и состава атмосферы на форму электрического разряда. // Изв. РАН МЖГ, 2011, № 6, С. 136-145.
4. В.О. Герман, А.П. Глинов, П.В. Козлов, Г.А. Любимов. Спектральные свойства диффузно-шнурового дугового разряда. // ТВТ, 2012, Т. 50, № 2, С. 185-195.
5. В.О. Герман, А.П. Глинов, А.П. Головин, П.В. Козлов, Г.А. Любимов. О некоторых особенностях визуализации процессов в протяженном дуговом разряде в свободной атмосфере воздуха. // Прикладная физика, 2012, №6, С. 108-115.
6. V.O. German, A.P. Glinov, A.P. Golovin, P.V. Kozlov, and G.A. Lyubimov. Some Features of Imaging of the Processes Occuring in an Extended ARC Discharge in Atmospheric-Pressure Air. // Plasma Physics Reports 2013, vol. 39, No. 13, pp. 1124-1130.
7. В.О. Герман, А.П. Глинов, А.П. Головин, П.В. Козлов, Г.А. Любимов. О некоторых возможностях использования изображений в инфракрасном диапазоне длин волн для исследования процессов в дуговом разряде. // Успехи прикладной физики, 2013, Т. 1, №4, С. 459-466.
8. И.И. Галимзянов, А.Ф. Гайсин. Многоканальные разряды между пористыми электродами. // XLII Международная конференция по физике плазмы и УТС, 9-13 февраля 2015 г., С. 287.
9. Глинов А.П., Герман В.О., Головин А.П., Козлов П.В., Любимов Г.А. Неустойчивость электродугового разряда и анализ возможностей его стабилизации. // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань 20-24 августа). Сборник трудов, г. Казань, Изд-во Казанского (Приволжского) федерального университета, С. 950-952.
10. В.О. Герман, А.П. Глинов, А.П. Головин, П.В. Козлов. О влиянии внешнего магнитного поля на устойчивость электродугового разряда. // Прикладная физика 2014, №4, С. 35-39.
11. В.О. Герман, А.П. Глинов, А.П. Головин, П.В. Козлов. Изучение воздействия внешнего магнитного поля на устойчивость электродугового разряда. // Успехи прикладной физики 2014, том 2, №5, С. 498-504.
12. В.О. Герман, А.П. Глинов, А.П. Головин, П.В. Козлов. О динамике и особенностях структуры анодных пятен в электродуговом разряде на графитовых электродах во внешнем магнитном поле. // Прикладная физика 2015, №5, с. 33-38.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОГО МОЛЕКУЛЯРНОГО ГАЗА

Ю.Н. Григорьев¹, И.В. Ершов²

¹ Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск,

² Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), Новосибирск

В докладе рассматривается устойчивость плоского течения Куэтта колебательно-возбужденного газа в сверхзвуковом режиме. Исходной математической моделью служила система уравнений двухтемпературной аэрогазодинамики. В соответствии с физическими представлениями эта система описывает течения колебательно-возбужденного молекулярного газа, когда диссоциацией и возбуждением верхних колебательных уровней молекул, а также поправками на ангармонизм колебаний можно пренебречь. Расчеты проводились в рамках классической линейной теории устойчивости.

В результате было подтверждено повышение линейной устойчивости сверхзвукового течения Куэтта на фоне колебательной релаксации, показанное в [1] работе для невязких мод I, II, и для конечных чисел Рейнольдса. Показано, что множество собственных значений линейной задачи устойчивости сверхзвукового вязкого течения Куэтта термически возбужденного молекулярного газа, как и в случае совершенного газа, делится на два непересекающихся множества N_a и N_v . Собственные значения из множества N_a сходятся в пределе $Re \rightarrow \infty$ к собственным значениям для невязких акустических мод I, II, III и т.д. Собственные значения из N_v не имеют асимптотической связи с невязкой задачей и характеризуются большими декрементами затухания.

Показано, что наиболее неустойчивыми являются вязкие моды I и II множества N_a . Влияние вязкости на их поведение носит неоднозначный характер. Мода I, невязкий предел которой является устойчивым во всем диапазоне чисел Маха и k , при конечных числах Рейнольдса $Re > 3 \cdot 10^4$ становится неустойчивой в узкой области чисел $2,5 < k < 2,75$ и $M \approx 3$. При других значениях параметров вязкость усиливает устойчивость моды I по сравнению с невязким пределом. Вязкая мода II, неустойчивая в невязком пределе при всех значениях чисел Маха и k , для которых $0 < c_r < 1$, становится устойчивой при $M < 3$ и конечных числах Рейнольдса. Тем не менее, на плоскости параметров (Re, k) при всех числах $M \geq 3$ имеется область неустойчивости моды II. Параметрические расчеты кривых нейтральной устойчивости моды II в диапазоне чисел $M = [3, 15]$ показывают, что зависимость $Re_c(M)$ носит немонотонный характер, аналогичный течению в сверхзвуковом пограничном слое. При этом во всем диапазоне термическая релаксация оказывает стабилизирующее воздействие на течение. Возрастание критических чисел Рейнольдса с повышением уровня термической неравновесности может достигать 12 % по сравнению с совершенным газом.

Для плоских сдвиговых течений колебательно-возбужденного газа построена асимптотическая теория линейной теории устойчивости. Исходной математической моделью служили линеаризованные уравнения двухтемпературной вязкой газовой динамики, из которых в рамках классической линейной теории устойчивости получена спектральная задача для линейной системы восьмого порядка.

Единые для всех сдвиговых течений преобразования системы выполнялись по классической схеме, впервые использованной в известной работе [2]. Два линейно независимых «невязких» решения при $Re \rightarrow \infty$ были построены методом Фробениуса на основе асимптотического разложения в окрестности критического слоя. Для «вязких» решений система после ряда упрощений, позволивших, в частности, отщепить уравнение Ландау-Теллера, была приведена к системе Дан-Линя шестого порядка [2]. Входящие в нее уравнения импульсов и энергии сводились к уравнениям Эйри. В результате «вязкие» решения были представлены через обобщенные функции Эйри нулевого, первого и второго порядков.

Собственно спектральная задача рассматривалась для плоского течения Куэтта с двумя краевыми условиями, устойчивость которого в рамках асимптотической теории ранее не исследовалась даже для случая совершенного газа. Структура полученного уравнения совпадает со структурой соответствующего уравнения для течения в пограничном слое [2]. В частности, использование функций Эйри позволило выразить «вязкую» часть уравнения через функцию Титтенса и ее производную [2]. Следует отметить, что при числах Маха $M \leq 4$ влияние возбуждения, как и температуры (сжимаемости), определяется «невязкой» частью секулярного уравнения.

Алгебраическое секулярное уравнение решалось численно с использованием таблиц для функции Титтенса и ее производной [3]. Для значений аргумента за пределами таблиц использовалась асимптотика «вязкой» части. Рассчитанные таким образом кривые нейтральной устойчивости находятся в хорошем соответствии с нашими результатами прямого численного решения исходной спектральной задачи. В частности, с возрастанием возбуждения критическое число Рейнольдса возрастает, а нейтральная кривая смещается в область больших волновых чисел. Эта тенденция подтверждается также полученным асимптотическим выражением для критического числа Рейнольдса в пределе $M \leq 4$ и малых значений фазовых скоростей и волновых чисел.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00064а).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Линейная устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. 1. Невязкая задача // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 57-73/
2. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ.1958.
3. Miles J.W. The hydrodynamic stability of a thin film of liquid in uniform shearing motion // J. Fluid Mech. 1960. Vol. 8. P. 593-610.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФОРМООБРАЗОВАНИЯ КУПОЛА КВАДРАТНОГО ПАРАШЮТА

М.В. Джалаева
НИИ механики МГУ, Москва

Известно, что главным фактором, влияющим на вид распределения перепада давления по поверхности купола парашюта, является форма купола. В работах [1, 2] исследовались модели квадратного парашюта с различным набором длин строп, вследствие которых парашют принимал разные формы в потоке, и имел не одинаковый вид распределения перепада давления вдоль радиальных лент на куполе. В данной работе предлагается к рассмотрению квадратный парашют (плоский в раскрытии), с 28-ю равными по длине стропами и полюсным отверстием – рис. 1. Группа симметрии у парашюта такой конструкции состоит из четырех секторов.

В работе рассматриваются возможные подходы для исследования формообразования купола квадратного парашюта: экспериментальный – с продувкой моделей парашюта в аэродинамической трубе, аналитический – основанный на решении системы дифференциальных уравнений и численный – с использованием компьютерного моделирования.

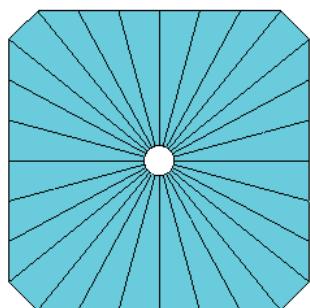


Рис. 1. Купол квадратного парашюта в раскрытии

$$\Delta \bar{p} = \frac{\Delta p}{(\rho v^2 / 2)}$$

давления вдоль 1-ой (срединной) и 4-ой

Экспериментальные исследования по определению аэrodинамической нагрузки, действующей на купол, а также распределения давления по внутренней и внешней поверхностям моделей квадратного парашюта, проводились в аэродинамической трубе А-6 НИИ механики МГУ.

На рис. 2 представлено распределение безразмерного перепада

(угловой) радиальных лент при скоростях набегающего потока $v = 10, 15, 20, 25, 30$ м/с. Заштрихованными значками в соответствии со скоростью обозначены значения перепада давления по первой радиальной ленте купола, а незаштрихованными – по четвертой, причем, можно считать значения $\Delta \bar{p}$ практически постоянными от полюса к кромке и одинаковыми по 1-ой и 4-ой лентам. Небольшой разброс экспериментальных точек на рис. 2 можно объяснить, во-первых, тем, что испытания проводились с мягкими моделями (не каркасированными), которые совершали небольшие колебательные движения, и во-вторых, как следствие погрешности измерений.

При проведении эксперимента одновременно с замерами давления записывалась нагрузка, действующая на купол, а также производилось фотографирование моделей парашюта.

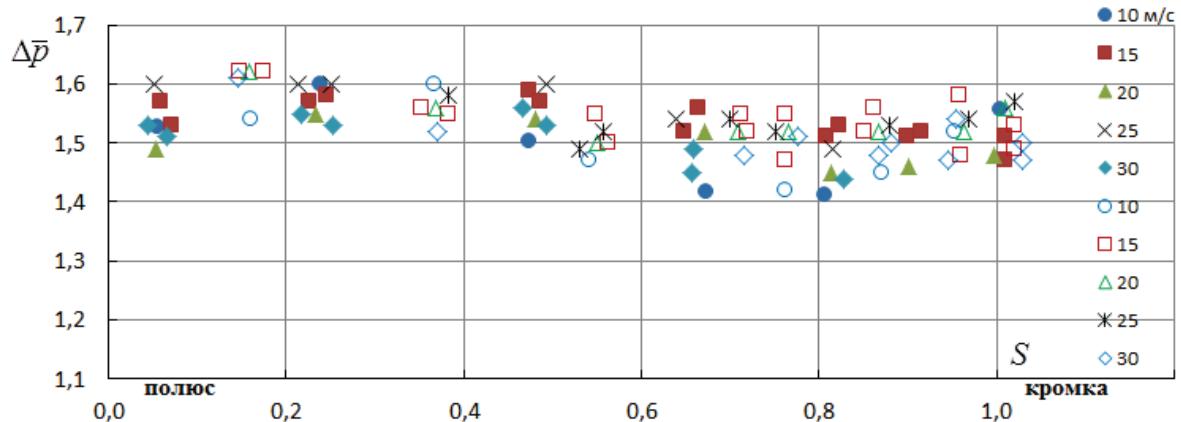


Рис. 2. Распределение безразмерного перепада давления вдоль 1-й и 4-й радиальных лент

Аналитический метод решения задачи о формообразовании купола основывается на системе обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия купола квадратного парашюта [1], описывающей распределение параметров формы, натяжения и аэродинамического сопротивления парашюта для режима установившегося движения.

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dS} &= 2\Delta p_1(S)A_{11}[\cos v_{11}\cos\gamma_1\sin\theta_1 - \sin\gamma_1\cos\theta_1] \\ T_1 \frac{d\theta_1}{dS} &= 2\Delta p_1(S)A_{11}\left[\cos v_{11}\cos\gamma_1\cos\theta_1 - \sin\gamma_1\sin\theta_1 - \frac{\sin\psi_1}{\sin(\psi_1 + \kappa_{11})}\right] \end{aligned} \quad (1)$$

Для $i = 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{dS} &= \left[\Delta p_{i-1}(S)A_{i-1,i}\cos\gamma_{i-1}\cos v_{i-1,i} + \Delta p_i(S)A_{ii}\cos\gamma_i\cos v_{ii} \right]\sin\theta_i + \\ &+ \left[\Delta p_{i-1}(S)A_{i-1,i}\sin\gamma_{i-1} - \Delta p_i(S)A_{ii}\sin\gamma_i \right]\cos\theta_i \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} T_i \frac{d\theta_i}{dS} &= \left[\Delta p_{i-1}(S)A_{i-1,i}\cos\gamma_{i-1}\cos v_{i-1,i} + \Delta p_i(S)A_{ii}\cos\gamma_i\cos v_{ii} \right]\cos\theta_i + \\ &+ \left[\Delta p_{i-1}(S)A_{i-1,i}\sin\gamma_{i-1} - \Delta p_i(S)A_{ii}\sin\gamma_i \right]\sin\theta_i - \\ &- R_{x_{i-1}}\Delta p_{i-1}(S)\frac{\sin\psi_{i-1}}{\sin\kappa_{i-1,i}} - R_{x_i}\Delta p_i(S)\frac{\sin\psi_i}{\sin\kappa_{ii}}; \end{aligned}$$

Для $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\frac{dR_i}{dS} = \sin\theta_i; \quad \frac{dr_i}{dS} = \cos\theta_i \quad (3)$$

где $A_{i-1,i} = R_{x_{i-1}} \frac{\sin(\psi_{i-1} + \kappa_{i-1})}{\sin\kappa_{i-1,i}}$, $i = 2, 3, 4$

и $A_{ii} = R_{x_i} \frac{\sin(\psi_i + \kappa_{ii})}{\sin\kappa_{ii}}$, $i = 1, 2, 3, 4$

$\theta_i(0) = \pi/2$, $R_i(0) = 0$, $r_i(0) = 0$, $T_i(0)$ – на полюсе неизвестны,

$L\sin(\theta) + R = 0$,

$\varphi = \pi/2$, $R\sin(\varphi) = R_x\sin(\psi)$, $\varphi S = \psi R_x$, $\sin(\xi) = \sin(\varphi)\cos(\theta)$.

Для осесимметричных парашютов условия совмещения всех строп в коуше выполняется автоматически, так как уравнения равновесия составляются для элемента только одной радиальной ленты. В случае неосесимметричного парашюта совмещение строп соответствует $i - 1$ условиям:

$$OQ = r_1(S) + R_1(S) \operatorname{ctg} \theta_1(S) = r_2(S) + R_2(S) \operatorname{ctg} \theta_2(S) = r_3(S) + R_3(S) \operatorname{ctg} \theta_3(S) = \\ = r_4(S) + R_4(S) \operatorname{ctg} \theta_4(S) \quad \text{на кромке } S = 1.$$

OQ – расстояние от полюса до коуша.

Все величины даны в безразмерных единицах. Здесь индекс i – число радиальных лент.

8 уравнений (1) и (2) равновесия элемента радиальных лент и 8 других (3) определяют форму радиальных лент раскрытоого купола. Поскольку первая радиальная лента перпендикулярна кромке купола, то силы, действующие на элементы слева и справа, равны. Таким образом, эти уравнения записываются отдельно и имеют индекс 1 (1). Уравнения для лент с числом 2, 3, 4 имеют иной вид (2). Ещё восемь уравнений (3), по аналогии с круглым парашютом, определяют форму каждой из четырех лент: итого, 16 дифференциальных уравнений. Эта система дополняется большим количеством алгебраических соотношений, определяющих неизвестные углы. В отличие от круглого парашюта эта система имеет более сложное решение и граничные условия, включает в себя $4i$ дифференциальных уравнений для $4i$ функций T_i , θ_i , R_i , и r_i .

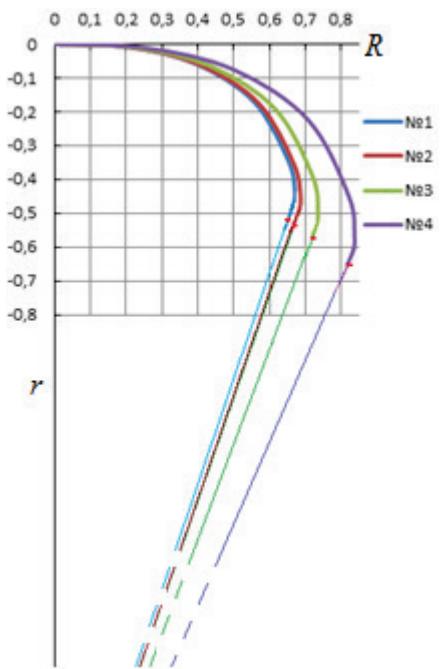


Рис. 3. Формы радиальных сечений, полученные из решения уравнений (1), (2), (3)

Для численного интегрирования построенной системы необходимы $4i$ граничных условий. В начале координат, то есть в полюсе купола, где $S = 0$, можно указать $3i$ значения функций:

$$R_i(0) = 0, \quad r_i(0) = 0, \quad \theta_i(0) = \pi/2, \quad (4)$$

значения натяжений $T_i(0)$ на полюсе неизвестны. На кромке купола (при $S = 1$) выполняются условия $L_i + R_i(1)/\sin \theta_i(1) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$ (5)

где L_i – длины строп; R_{xi} – радиус окружности, лежащей в “усредненной” плоскости нормалей, проведенных в соответствующих точках двух соседних радиальных сечений; T_i – натяжения в радиальных лентах; θ_i – угол между касательной, проведенной в точке радиального сечения, и осью парашюта. Эта краевая 4-х параметрическая задача имеет решение, т.е. можно найти 4 значения $T_i(0)$ в полюсе, при которых выполняются граничные условия на кромке.

На рис. 3 показаны формы меридиональных сечений купола квадратного парашюта, полученные из решения системы дифференциальных уравнений (1), (2), (3) с граничными условиями (4), (5). Как и следовало ожидать, максимальные координаты по горизонтали и по вертикали – у 4-ой (угловой, самой длинной) ленты, а минимальные координаты – у 1-ой ленты; 2-ая и 3-я формы радиальных лент располагаются между 1-ой и 4-ой лентами соответственно.

В настоящее время задача о формообразовании купола парашюта в основном решается методом компьютерного моделирования с использованием совмещенного лагранжево-эйлерового описания движения парашюта в потоке воздуха (Fluid Structure Interaction, FSI) [3]. Применение такого подхода для решения оптимизационных проблем (к которым, в частности, относится данная задача) ограничено, так как требует значительных вычислительных и временных ресурсов и, как правило, неэффективно.

Альтернативой этому методу решения является численно-экспериментальная процедура, в соответствие с которой форма и напряженно-деформированное состояние (НДС) купола парашюта определяется численно в лагранжевой постановке (без учета взаимодействия с воздухом) с заданным распределением давления на куполе, определяемым либо из непосредственного натурного эксперимента, либо из однократного FSI расчета. В настоящей работе для решения задачи эта схема реализована в виде пошаговой процедуры, сходимость которой обеспечивается чередованием квазистатических и динамических шагов. Применение этого подхода в задаче о формообразовании купола круглого парашюта рассмотрено в [4]. С использованием определенных упрощений решение подобной задачи было получено в [5] для квадратного парашюта с четырьмя стропами.

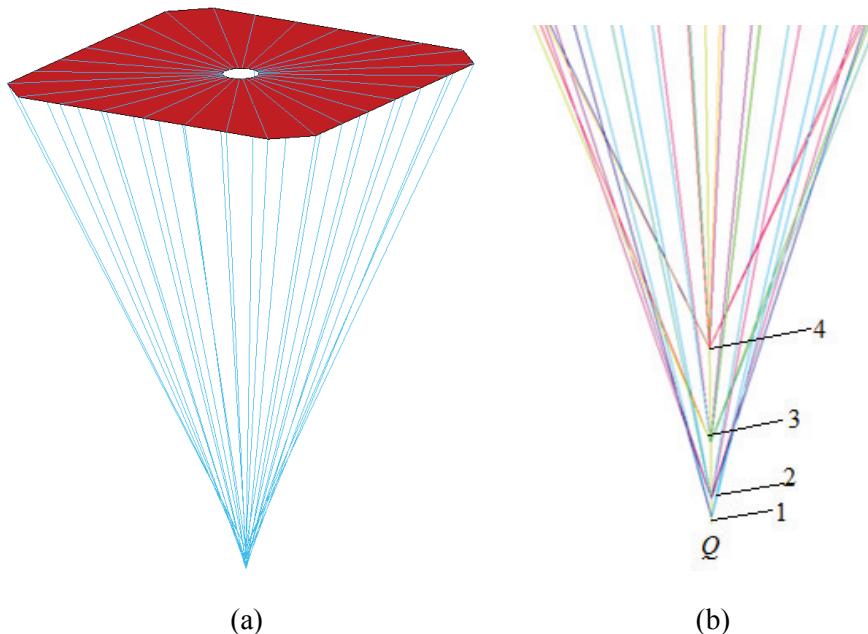


Рис. 4. (а) Вид плоского квадратного парашюта с полюсным отверстием;

(б) стропы не сходятся в одной точке-коусе из-за равенства длин строп – в увеличенном масштабе показаны стропы, сходящиеся в коуш (в нем должны совмещаться все стропы – в точке Q), но, так как длины всех строп равны, то при такой схеме они не могут собраться в одной точке-коусе. Угловые стропы собираются на центральной (мнимой) оси в коуш 1 ниже по сравнению со стропами, прикрепленными к срединным радиальным лентам. Таким образом, получается 4 виртуальных коуша (1,2,3,4).

Начальная форма квадратного парашюта предполагалась плоской – рис. 4(а). Материалы строп и ткани полагались линейно упругими и изотропными. Давление на поверхность купола и вертикальные перемещения виртуальных коушей (2, 3, 4) задавались по линейному закону от времени. Коуш 1 закреплялся по всем степеням свободы. Решение задачи проводилось по следующей схеме. На первом и последующих промежуточных шагах сначала решение определялось в динамической постановке с использованием неявного решателя. В случае проблем со сходимостью допускалось кратковременное применение явного решателя. На заключительном шаге решалась квазистатическая задача с использованием неявной схемы интегрирования по времени с конфигурацией купола, полученной в результате динамического расчета.

На рис. 6 и 7 приведены формы купола квадратного парашюта, полученные численным расчетом (для сравнения на рис. 5 показана форма точно такой же модели парашюта из эксперимента в аэродинамической трубе А-6).

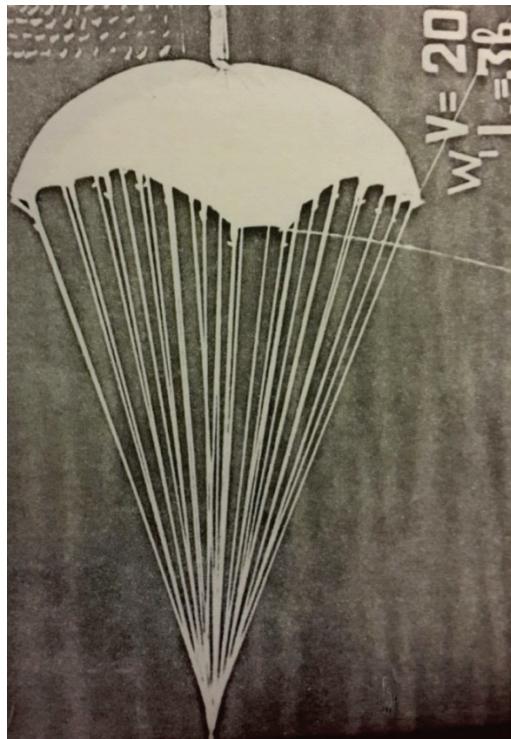


Рис. 5. Фотография модели квадратного парашюта в аэродинамической трубе А-6

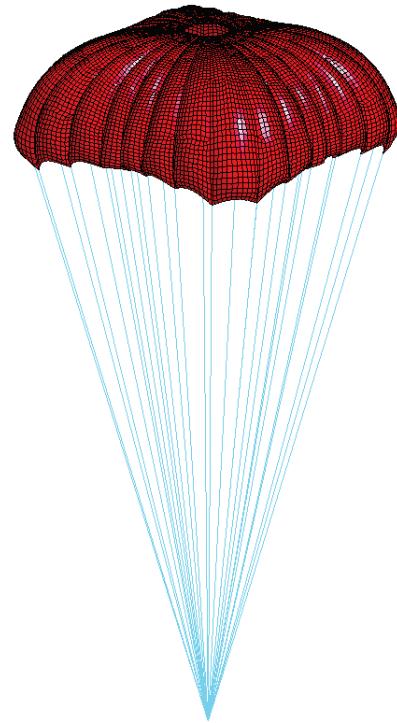


Рис. 6. Форма купола квадратного парашюта – численный эксперимент

Сравнение формы квадратного парашюта (эксперимент в аэродинамической трубе А-6, рис. 5) и формы, полученной в результате численного расчета (рис. 6), убедительно показывает практически одинаковые формы купола, а также почти одинаковый угол раствора строп: 38^0 и 36^0 .

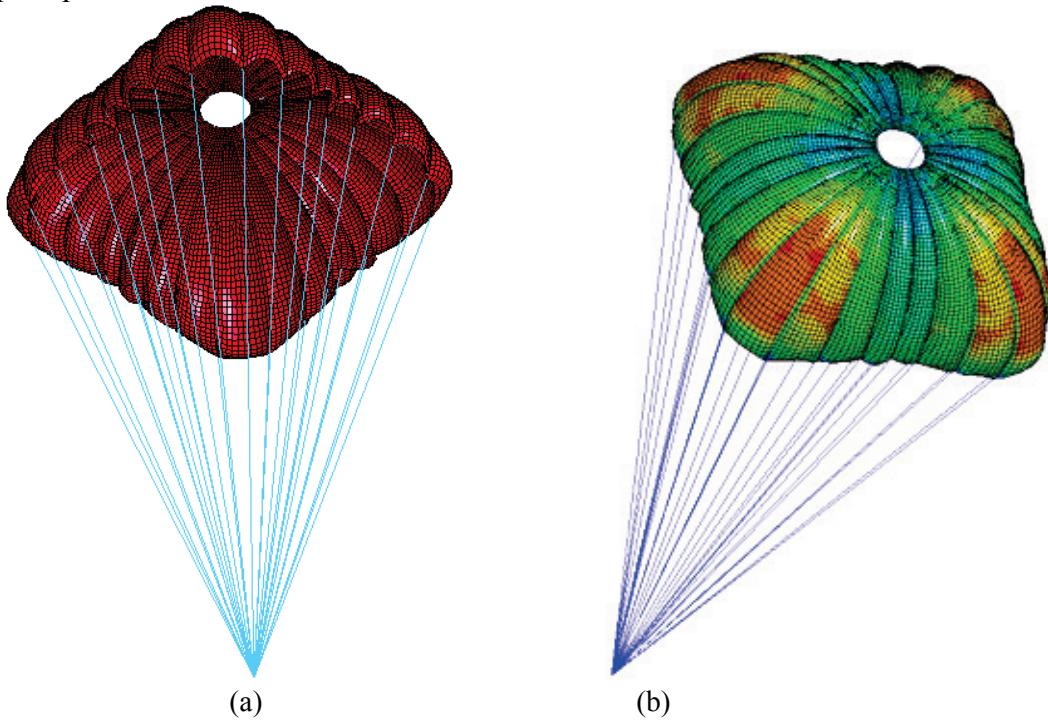


Рис. 7. Формы квадратных парашютов, полученные численным экспериментом:

(a) – вид квадратного купола со стропами изнутри;

(b) – распределение максимального главного напряжения – красным цветом обозначены максимальные значения напряжения, находящиеся в угловых секторах – отсюда следует, что основная нагрузка приходится на угловые сектора.

Предложенная численно-экспериментальная процедура решения задачи об определении формы купола парашюта и его НДС, имея сопоставимую точность, существенно более эффективна по сравнению с FSI подходом с точки зрения вычислительных и временных ресурсов, а в сравнении с аналитическим методом демонстрирует лучшее согласование с экспериментом и имеет лучшую наглядность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х.А., Джалаева М.В. Исследование параметров формы и напряженного состояния купола квадратного парашюта численным методом. Парашюты и проницаемые тела. Изд. МГУ. М., 1987, с. 63-79.
2. Джалаева М.В., Ульянов Г.С. Особенности распределения перепада давления по куполу квадратного парашюта. Парашюты и проницаемые тела. Изд. МГУ. М., 1987, с. 58-62.
3. S. Sathe, R. Benney, R. Charles, E. Doucette, J. Milette, M. Senga, K. Stein and T.E. Tezduyar, “Fluid-Structure Interaction Modeling of Complex Parachute Designs with the Space-Time Finite Element Techniques”, Computers & Fluids, 36 (2007), pp. 127-135.
4. Джалаева М.В. Численное исследование задачи о раскрытии купола парашюта. Материалы Международной конференции “Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность”. 2014, панс. Звенигородский РАН. Изд. НИИ механики МГУ, с. 65-68.
5. Dzhalalova M.V., Leonov S.V. Effect of Structural Permeability on the Stability of a Parachute with Four Suspension Lines. Moscow University Mechanics Bulletin – Springer. 2013. Vol. 68, № 1, с. 28-31.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ
ЖИДКОСТИ

В.С.Дрюма

Институт Математики и Информатики АН РМ, Кишинев

Theorem 1 Система уравнений Навье-Стокса, описывающая течения вязкой несжимаемой жидкости

$$\vec{V}_t + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} - \mu \Delta \vec{V} + \vec{\nabla}P = 0, \quad (\nabla \cdot \vec{V}) = 0, \quad (1)$$

где $\vec{V} = [U(\vec{x}, t), V(\vec{x}, t), W(\vec{x}, t)]$ -компоненты вектора скорости, $P = P(\vec{x}, t)$ -функция давления и μ -вязкость жидкости, приводится к системе однородных уравнений путем представления компонент скорости течения в виде

$$U(\vec{x}, t) = -N_y + M_{yz} - K_z + R_y - Q_z, \quad V(\vec{x}, t) = -1/2 L_z + N_x - 1/2 M_{xz} + S_z - R_x,$$

$$W(\vec{x}, t) = -1/2 M_{xy} + 1/2 L_y + K_x + Q_x - S_y,$$

где K, L, M, N и S, Q, R - функции от координат $(\vec{x}, t) = (x, y, z, t)$, определяемых из системы уравнений

$$\begin{aligned} P_x &= -M_{yzt} + N_{yt} + K_{zt}, \quad P_y = 1/2 L_{zt} - N_{xt} + 1/2 M_{xzt}, \\ P_z &= -1/2 L_{yt} + 1/2 M_{xyt} - K_{xt}. \end{aligned} \quad (2)$$

Условия совместности системы (2) приводят к линейному соотношению

$$\alpha_{xz} + \beta_z + \gamma_x + \delta_x + \epsilon_z = 0,$$

между функциями

$$\alpha = (M_{xxyy} + 1/2 M_{zzzz} + 1/2 M_{xxxx} + M_{xxzz} + 1/2 M_{yyyy} + M_{yyzzz}) \mu - 1/2 M_{xxt} - 1/2 M_{yyt} - 1/2 M_{zzt},$$

$$\beta = (-3/2 S_{yyzz} - S_{zzzz} - S_{yyyy} - 2 S_{xxyy} - 3/2 S_{xxzz} - 1/2 S_{xxxx}) \mu + S_{zzt} + S_{xxt} + S_{yyt},$$

$$\gamma = (2 R_{xxyy} + R_{zzzz} + 2 R_{xxzz} + R_{yyyy} + R_{xxxx} + 2 R_{yyzz}) \mu - R_{yyt} - R_{xxt} - R_{zzt},$$

$$\delta = (-N_{zzzz} - 2 N_{xxzz} - N_{xxxx} - 2 N_{xxyy} - 2 N_{yyzz} - N_{yyyy}) \mu + N_{xxt} + N_{yyt} + N_{zzt},$$

$$\epsilon = (1/2 L_{yyyy} + 3/2 L_{yyzz} - 1/2 L_{xxxx} + 1/2 L_{zzzz} + 3/2 L_{xxyy}) \mu - 1/2 L_{xxt} - 1/2 L_{yyt} - 1/2 L_{zzt},$$

к определению функции $K = K(x, y, z, t)$ и к набору однородных соотношений степени 3 между функциями и их производными.

При помощью однородного представления системы уравнений Навье-Стокса (и уравнений Эйлера для идеальной жидкости $\mu = 0$) строятся примеры точных решений и обсуждаются их возможные приложения.

Литература

V.Dryuma. The Ricci-flat spaces related to the Navier-Stokes Equations. Buletinul AS RM (mathematica), 2012, v.2(69), p.99-102.

ON THE INTEGRATION OF INCOMPRESSIBLE FLUID FLOWS
EQUATIONS
V.Dryuma

Institute of Mathematics and Informatics AS RM, Kishinev

Theorem 1 *The Navier-Stokes equations describing the flow of a viscous incompressible fluid*

$$\vec{V}_t + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} - \mu \Delta \vec{V} + \vec{\nabla}P = 0, \quad (\nabla \cdot \vec{V}) = 0, \quad (1)$$

where $\vec{V} = [U(\vec{x}, t), V(\vec{x}, t), W(\vec{x}, t)]$ are the components of velocity, $P = P(\vec{x}, t)$ is the pressure and μ -viscosity of fluid, can be reduced to a system of homogeneous equations with the help of presentation of the components of the flow velocity in the form

$$U(\vec{x}, t) = -N_y + M_{yz} - K_z + R_y - Q_z, \quad V(\vec{x}, t) = -1/2 L_z + N_x - 1/2 M_{xz} + S_z - R_x, \\ W(\vec{x}, t) = -1/2 M_{xy} + 1/2 L_y + K_x + Q_x - S_y,$$

where K, L, M, N u S, Q, R are the functions of coordinates (x, y, z, t) , which are determined from the system of equations

$$P_x = -M_{yzt} + N_{yt} + K_{zt}, \quad P_y = 1/2 L_{zt} - N_{xt} + 1/2 M_{xzt}, \\ P_z = -1/2 L_{yt} + 1/2 M_{xyt} - K_{xt}. \quad (2)$$

Conditions of compatibility of the system (2) lead us to the linear relation $\alpha_{xz} + \beta_z + \gamma_x + \delta_x + \epsilon_z = 0$, between the functions

$$\begin{aligned} \alpha &= (M_{xxyy} + 1/2 M_{zzzz} + 1/2 M_{xxxx} + M_{xxzz} + 1/2 M_{yyyy} + M_{yyzzz}) \mu - \\ &\quad - 1/2 M_{xxt} - 1/2 M_{yyt} - 1/2 M_{zzt}, \\ \beta &= (-3/2 S_{yyzz} - S_{zzzz} - S_{yyyy} - 2 S_{xxyy} - 3/2 S_{xxzz} - 1/2 S_{xxxx}) \mu + \\ &\quad + S_{zzt} + S_{xxt} + S_{yyt}, \\ \gamma &= (2 R_{xxyy} + R_{zzzz} + 2 R_{xxzz} + R_{yyyy} + R_{xxxx} + 2 R_{yyzz}) \mu - \\ &\quad - R_{yyt} - R_{xxt} - R_{zzt}, \\ \delta &= (-N_{zzzz} - 2 N_{xxzz} - N_{xxxx} - 2 N_{xxyy} - 2 N_{yyzz} - N_{yyyy}) \mu + \\ &\quad + N_{xxt} + N_{yyt} + N_{zzt}, \\ \epsilon &= (1/2 L_{yyyy} + 3/2 L_{yyzz} - 1/2 L_{xxxx} + 1/2 L_{zzzz} + 3/2 L_{xxyy}) \mu - \\ &\quad - 1/2 L_{xxt} - 1/2 L_{yyt} - 1/2 L_{zzt}, \end{aligned}$$

to determination of the function $K = K(\vec{x}, t)$ and to the set of homogeneous relations of degree 3 between the functions and their derivatives.

On base of homogeneous presentation of the system of the Navier-Stokes equations (and also of the Euler equations of ideal fluid $\mu = 0$) the examples of exact solutions are constructed and their applications are discussed.

References

V.Dryuma.The Ricci-flat spaces related to the Navier-Stokes Equations, Buletinul AS RM (mathematica), 2012, v.2(69), p.99-102.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФОРМЫ И РАЗМЕРОВ НАГРЕВАТЕЛЯ НА ФОРМИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ФАКЕЛА

П.Д. Дунаев, А.Н. Кондрашов, И.О. Сбоев
Пермский государственный национальный исследовательский университет

Работа посвящена исследованию начального этапа формирования течения вблизи локального источника тепла различной формы. Нагреватель выполнен из медной пластины, соединённой с резистором. Управление температурой нагревателя осуществляется с помощью ПИД-регулятора. В работе используются нагреватели трех различных форм: круглой, квадратной и треугольной. Размеры фигур выбраны таким образом, чтобы описанная около них окружность имела одинаковый радиус $r = 5.5$ мм. Рабочая полость имеет форму куба со стороной $a = 200$ мм, ограниченного стенками из оптического стекла. Для визуализации течения в жидкость добавляется растворенный в воде флуоресцентный краситель родамин. Для возбуждения флуоресценции используется лазерный нож. С целью наблюдения за распределением температуры на свободной поверхности жидкости используется тепловизор.

На основании проведенных экспериментов выявлено два различных режима развития конвективного факела. В зависимости от температуры и размеров, течение организуется либо в центре, либо у границ нагревателя. В качестве иллюстрации, на рисунке 1 приведено мгновенное распределение температуры, соответствующее первому и второму сценарию организации конвективного течения вблизи нагревателя треугольной формы. По совокупности полученных результатов определена граница обсуждаемых режимов, в параметрах температуры нагревателя и числа Прандтля. Стоит отметить, что при построении критической кривой в двойном логарифмическом масштабе, для разных форм источников тепла, оказываются линейными с одинаковыми коэффициентами угла наклона, на разном смещении по вертикали. При этом устойчивость треугольного нагревателя оказывается наибольшей, а круглого наименьшей.

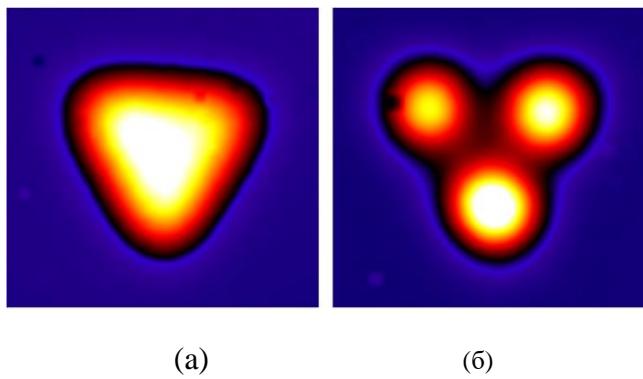


Рис. 1 Мгновенное распределение температуры

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №14-01-31430 мол_a).

1. Husar R. B., Sparrow E. M. Patterns of free convection flow adjacent to horizontal heated surfaces //International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1968. – Т. 11. – №. 7. – С. 1206-1208.
2. Развитие теплового плюма в узком вертикальном слое /Бабушкин И. А., Кондрашов А. Н., Рыбкин К. А., Сбоев И. О. //Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2015. – №. 2 (34). – С. 41-51.
3. Bahl S., Liburdy J. A. Measurement of local convective heat transfer coefficients using three-dimensional interferometry //International journal of heat and mass transfer. – 1991. – Т. 34. – №. 4. – С. 949-960.
4. Sezai I., Mohamad A. A. Natural convection from a discrete heat source on the bottom of a horizontal enclosure //International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2000. – Т. 43. – №. 13. – С. 2257-2266.
5. Kondrashov A., Sboev I., Rybkin K. Effect of boundary conditions on thermal plume growth //Heat and Mass Transfer. – 2015. – Т. 1. – С. 175.

ДИНАМИКА СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ В НЕРАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ

В.В. Дьякова, Д.А. Полежаев

Пермский государственный гуманитарно – педагогический университет, Пермь

Экспериментально изучается поведение двухфазной системы сыпучая среда – жидкость в неравномерно вращающемся (либррирующем) горизонтальном цилиндре. В отсутствие либраций в быстро вращающемся горизонтальном цилиндре тяжелые частицы сыпучей среды образуют кольцевой слой вблизи цилиндрической стенки. При включении либраций изначально осесимметричная граница раздела становится неустойчивой к появлению регулярного квазистационарного рельефа в форме дюн. Изучается надкритическая динамика рельефа в полостях различного радиуса R и длины L в зависимости от вязкости жидкости ν , диаметра частиц сыпучей среды d , угловой скорости вращения полости Ω_r , циклической частоты Ω_l и амплитуды ϕ_0 .

В либррирующем горизонтальном вращении цилиндре жидкость участвует одновременно в двух видах движения: равномерном вращении и азимутальном колебательном движении. Динамика гранулы на границе раздела двух фаз определяется действием вязкой (сдвиговой) силы и центробежной (прижимающей) силы инерции. При достижении критической интенсивности движения жидкости, когда вязкая сила становится способной сдвинуть гранулы вдоль поверхности сыпучей среды, возникают условия для возникновения квазистационарного рельефа.

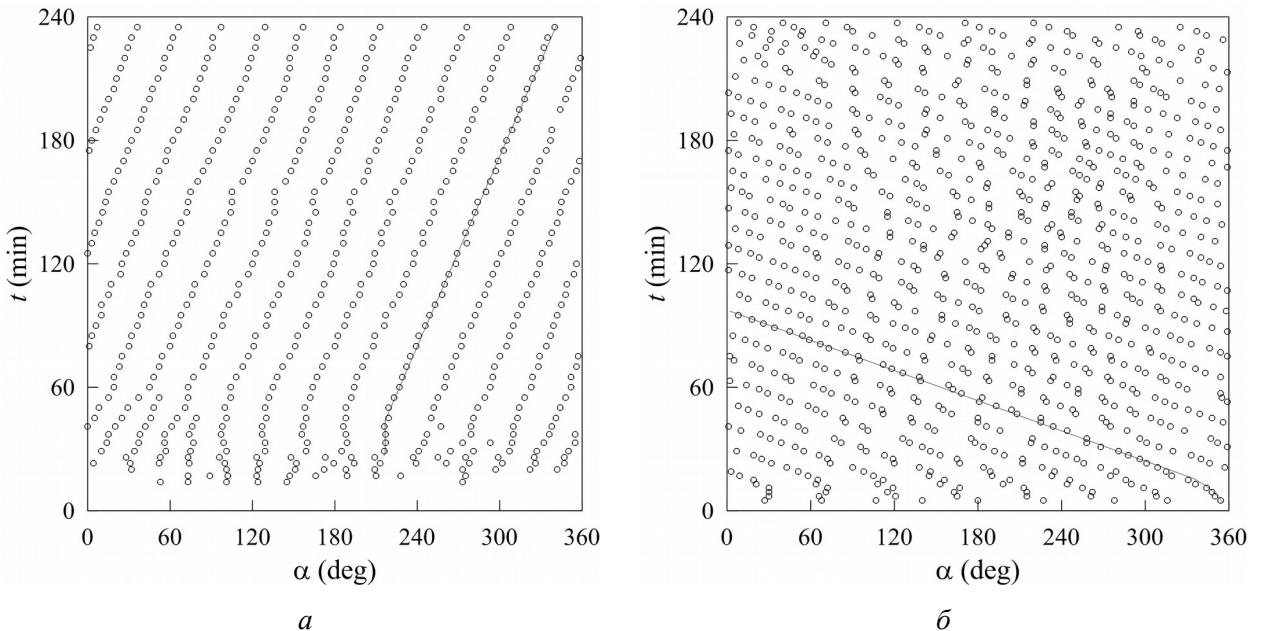


Рис. 1. Эволюция квазистационарного рельефа на границе раздела жидкость – песок: точки соответствуют положению вершин дюн: $R = 6.3$ см, $L = 7.8$ см, $\nu = 10$ сСт, $d = 0.2$ мм, $\Omega_r = 31.4$ рад/с, $\Omega_l = 6.28$ рад/с, $\phi_0 = 0.32$ (а) и 0.60 (б) рад

Наличие переменной составляющей скорости вращения приводит к тому, что центробежная сила инерции изменяется в течение периода колебаний. В результате частицы в различные фазы колебаний могут быть подвижными или прижатыми к границе раздела. Если частицы способны перемещаться только в фазе торможения, то частицы переносятся в направления среднего вращения. При повышении интенсивности либраций могут возникнуть условия, когда гранулы перемещаются и в фазе торможения, и в фазе разгона. В таком случае становится возможным перенос гранул в направлении, противоположном вращению цилиндра. На рис. 1 показана временная эволюция положения вершин дюн. В зависимости от амплитуды колебаний дюны мигрируют с почти постоянной скоростью в направлении вращения цилиндра (рис. 1а) и против вращения (рис. 1б) в течение нескольких эксперимента. Пространственный период рельефа остается неизменным в течение нескольких часов с момента начала эксперимента, исключая начальную fazу.

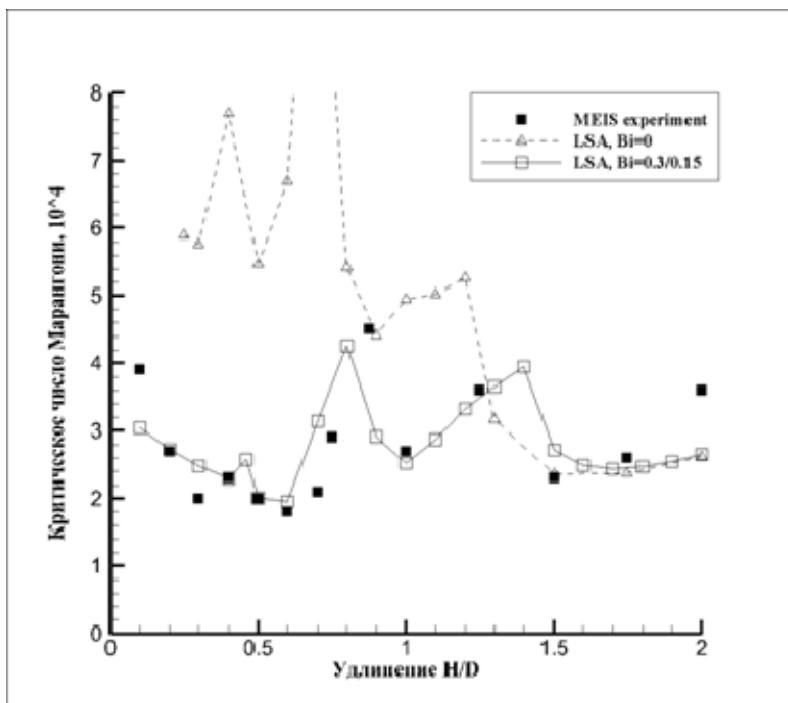
Работа выполнена в рамках проекта 14-11-00476 Российского Научного Фонда.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ЖИДКИХ МОСТАХ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПРАНДТЛЯ

М.К. Ермаков

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Изучение термокапиллярной конвекции (ТК), относящейся к негравитационным типам естественной конвекции, в условиях микрогравитации связано с определяющей ролью конвекции Марангони при росте кристаллов в условиях космического полета. Потеря устойчивости ТК в бесконечном жидким цилиндре происходит колебательным образом в виде гидротепловых волн [1], существенно отличаясь от потери устойчивости термогравитационной конвекции. В рамках экспериментов MEIS на МКС [2] исследовалась потеря устойчивости ТК в конфигурации жидкого мостика для силиконового масла вязкостью 5 сСт в диапазоне удлинений H/D (H-длина, D-диаметр) от 0.1 до 2. Теоретически границы устойчивости течения исследовались методом анализа линейной устойчивости (LSA) для уравнений Навье-Стокса и уравнения притока тепла с динамическим граничным условием баланса вязких и термокапиллярных напряжений на свободной поверхности жидкого моста.



На рис. представлены результаты сравнения точек нейтральной кривой, полученных в эксперименте MEIS [2] и численно методом LSA [3] для числа Прандтля ($Pr=v/a$) 67 в виде зависимости критического числа Марангони ($Ma=\gamma\Delta TH/\rho va$) от удлинения с учетом и без учета теплопотерь через свободную поверхность. Поток тепла через свободную поверхность определяется безразмерным параметром – числом Био ($Bi=\alpha H/\lambda$). Теоретическая оценка параметра Био делалась по соотношению $Ma_{cr}=2000Pr^{0.6}$ [4], полученному по массиву экспериментов, и при сопоставлении с расчетами LSA дала $Bi \approx 0.2$. Кривая нейтральной устойчивости при отсутствии теплообмена через свободную поверхность ($Bi=0$) соответствует эксперименту только для удлинений больших 1.3.

Наилучшее соответствие экс-периментальным данным дают значения числа Био 0.3 для $H/D < 1$ и 0.15 для $H/D \geq 1$. Нейтральная кривая, полученная LSA, имеет две различные ветви с азимутальным волновым числом $m=1$, которым соответствуют различные направления распространения гидротепловых волн в аксиальном направлении. Наличие таких волн для бесконечного жидкого цилиндра при больших числах Прандтля, было ранее предсказано в [5]. Интересно, что влияние теплообмена различно при разных ветвях нейтральной кривой.

ЛИТЕРАТУРА.

1. J.J. Xu, S.H. Davis. Phys. Fluids 27 (1984) 1102.
2. H. Kawamura, K. Nishino, S. Matsumoto, I. Ueno. J. Heat Transfer 134, 031005, 2012.
3. M.K. Ermakov, M.S. Ermakova. J. Cryst. Growth 266 (2004) 161-166.
4. Y.K. Yang, S. Kou. J. Cryst. Growth 222 (2001) 135-143.
5. I.I. Ryzhkov. Phys. Fluids 23 082103, 2011

ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЧИСЛЕННОМ И ЛАБОРАТОРНОМ ЭКСПЕРИМЕНТАХ

Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова

Институт механики МГУ, Москва

Экспериментально и численно установлена зависимость вида турбулентных спектров азимутальной скорости от частоты и амплитуды модуляции скорости вращения одной из сфер. Показана возможность формирования в сферическом слое турбулентных течений, спектры которых качественно подобны спектрам, полученным ранее при натурных измерениях в верхних слоях атмосферы Земли.

1. Цель работы – установление возможности получения турбулентных течений, свойства которых соответствуют свойствам атмосферной турбулентности. Свойства крупномасштабных атмосферных течений принято объяснять концепцией «двумерной турбулентности», в которой выделяется два инерционных интервала, соответствующих переносу энергии при меньших волновых числах и переносу энстрофии при больших волновых числах. Инерционный интервал переноса энергии от больших к меньшим волновым числам (обратный каскад) описывается таким же, как и в трехмерной турбулентности, соотношением Колмогорова для зависимости энергетического спектра $E(k)$ от волнового числа k : $E(k) \sim k^{-5/3}$. В инерционном интервале переноса энстрофии от меньших к большим волновым числам (прямой каскад) вид такой зависимости следующий: $E(k) \sim k^{-3}$. Направление каскада определяется знаком продольной структурной функции скорости третьего порядка, определяемой как $D_{LLL} = \langle (u(l)-u(l'))^3 \rangle$, где u - скорость в пространственно разнесенных точках l и l' , угловые скобки означают осреднение по ансамблю реализаций. $D_{LLL} < 0$ соответствует прямому каскаду, $D_{LLL} > 0$ - обратному. В то же время данные измерений в верхних слоях атмосферы Земли не соответствуют теории двумерной турбулентности. Так, спектры с наклоном «-5/3» выявлены на малых масштабах, менее 500 км, а спектры турбулентности с наклоном «-3» начинаются на масштабах более 700 км. Для установления возможности воспроизведения таких явлений и экспериментально в лабораторных условиях, и численно исследованы турбулентные течения вязкой несжимаемой жидкости, развивающиеся во вращающемся сферическом слое под действием модуляции скорости одной из сфер. В эксперименте проводилось измерение скорости течения лазерным Доплеровским анемометром. Численное исследование проводилось в сферической системе координат с граничными условиями непротекания и прилипания с использованием алгоритма [1], основанного на консервативной конечно-разностной схеме дискретизации уравнений Навье-Стокса по пространству и полуяевской схеме Рунге-Кутты 3-го порядка точности интегрирования по времени.

2. Установлено, что при уменьшении частоты модуляции увеличиваются различия в характере поведения азимутальной и меридиональной составляющих кинетической энергии течения. Первая составляющая остается периодической, тогда как у второй наблюдается смена периодического поведения на хаотическое. Подавление турбулентных пульсаций скорости в азимутальном направлении создает предпосылки для формирования квазидвумерной турбулентности, характеризующейся наличием обратного каскада передачи энергии, которому соответствуют положительные значения продольной структурной функции скорости третьего порядка ($D_{LLL} > 0$). Показано, что вид спектров турбулентных пульсаций скорости зависит от того, скорость вращения какой из сфер подвергается модуляции, а также от ее амплитуды и частоты. При модуляции скорости внутренней сферы в эксперименте и расчете получены спектры, характерные для двумерной турбулентности: с постоянным наклоном $-5/3$ и обратным каскадом на меньших частотах, а также наклоном -3 и прямым каскадом ($D_{LLL} < 0$) на больших частотах. При модуляции внешней сферы вид спектров неоднороден по пространству (рис. 1). Так, вблизи внутренней сферы

наблюдаются спектры, характерные для трехмерной турбулентности: с постоянным наклоном $-5/3$ и $D_{LLL} < 0$. Вблизи внешней сферы наблюдаются спектры, качественный вид которых соответствует результатам натурных измерений в верхних слоях атмосферы: с постоянным наклоном -3 на меньших частотах и наклоном $-5/3$ на больших частотах. Для обоих участков $D_{LLL} < 0$, что также соответствует результатам обработки натурных измерений.

Установлено, что во всех рассмотренных выше случаях уровень синхронизации между скоростью вращения границы и скоростью течения различен. Наименьшая синхронизация наблюдается там, где спектры подобны спектрам трехмерной турбулентности, наибольшая – там, где они подобны спектрам атмосферной турбулентности. Полученные результаты [2] позволяют предположить, что вид спектров

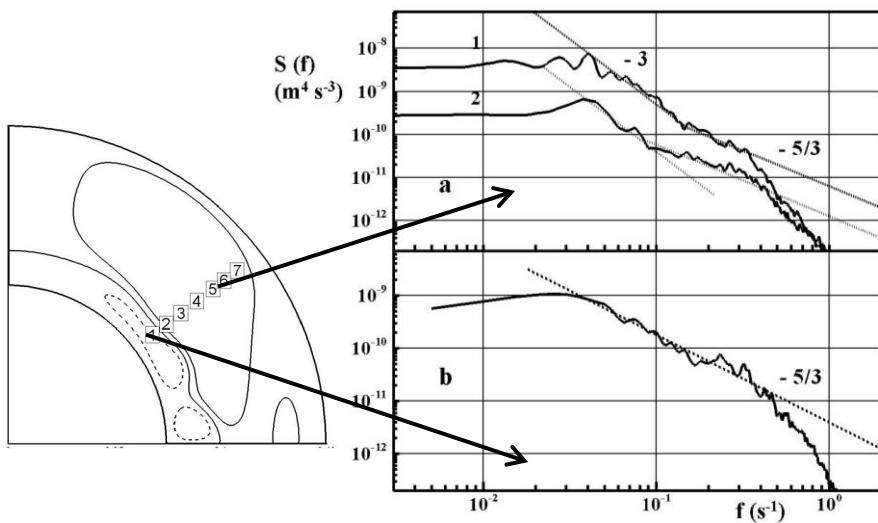


Рис. 1 Спектры азимутальной составляющей скорости при модуляции скорости вращения внешней сферы, 1а - эксперимент, б, 2а – расчет, а - наклон и взаимное расположение участков спектра соответствуют атмосферной турбулентности, б – трехмерная турбулентность.

турбулентности в верхних слоях атмосферы может объясняться вынужденной синхронизацией атмосферных течений внешним периодическим воздействием – сезонными вариациями притока солнечного тепла.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 14-08-00204.

ЛИТЕРАТУРА.

1. N. Nikitin, J. Comp. Phys., 217, 2, 759 (2006).
2. Д.Ю. Жиленко, О.Э.Кривоносова, Письма в ЖЭТФ, т. 101, 8, 583 (2015).

ПЕРЕХОД К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЧАСТИ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ В СЛУЧАЕ ВСТРЕЧНЫХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГРАНИЦ

Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова

Институт механики МГУ, Москва

Численно исследован переход к турбулентности в течениях вязкой несжимаемой жидкости, вызванный вращательными колебаниями двух границ сферического слоя относительно состояния покоя. С использованием понятия мгновенной фазы/частоты течения установлено появление перемежаемости «хаос-хаос» в турбулентной части течения, за пределами которой течение остается ламинарным.

1. Цель настоящей работы - численное исследование возможности формирования турбулентности и изучение ее свойств при вращательных колебаниях двух сферических границ относительно состояния покоя. Скорости сфер изменялись периодически $\Omega_1(t) = A\sin(2\pi ft + \psi_1)$, $\Omega_2(t) = A\sin(2\pi ft + \psi_2)$, причем частоты f и амплитуды A модуляции были равны, а сдвиг фаз $\psi_1 - \psi_2$ составлял π , здесь ψ_1, ψ_2 - начальные значения фаз, индекс 1 относится к внутренней границе, 2 - к внешней. Течение описывается уравнениями Навье-Стокса и неразрывности с условиями прилипания и непротекания на границах. Расчеты проводились в сферической системе координат с использованием алгоритма [1], основанного на консервативной конечно-разностной схеме дискретизации уравнений Навье-Стокса по пространству и полунеявной схеме Рунге-Кутты 3-го порядка точности интегрирования по времени. В качестве параметров подобия рассматриваются числа Рейнольдса для внутренней и внешней сфер, $Re_1 = 2Ar_1 / 2\pi f\delta$, $Re_2 = 2Ar_2 / 2\pi f\delta$, где $\delta = (2v/2\pi f)^{1/2}$, а также относительная толщина слоя $\beta = (r_2 - r_1)/r_1 = 1$. Временные ряды скорости течения записывались в двух точках, первая расположена вблизи внутренней сферы и экватора, вторая – вблизи внешней сферы на средних широтах.

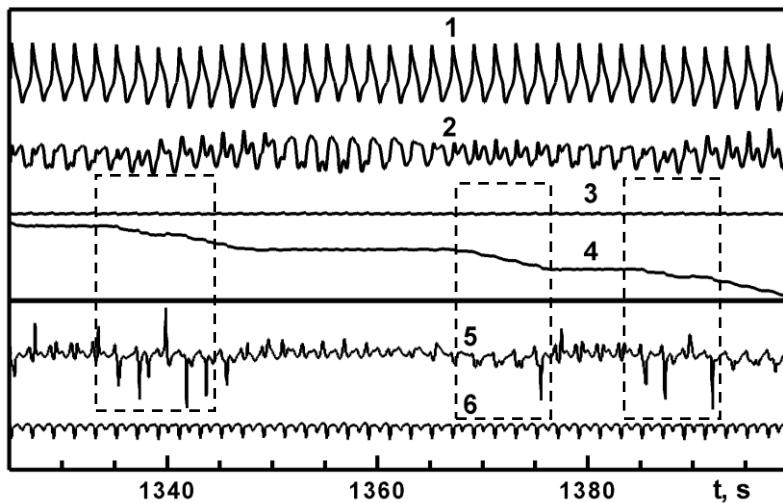


Рис.1 Азимутальная скорость течения (1,2), разница мгновенных значений фаз (3,4) и частот (5,6) между скоростью вращения внутренней сферы и скоростью течения, вблизи внутренней (1,3,6) и внешней (2,4,5) сфер в зависимости от времени t при $Re_1 = 72$. Пунктиром отмечены участки более сильной турбулентности.

2. По величинам корреляционной размерности в различных областях течения и по временной эволюции его пространственной структуры установлено, что вблизи внутренней сферы и экватора течение близко к периодическому, а на средних широтах вблизи внешней сферы течение турбулентное. Для

определения свойств турбулентности использовался метод мгновенной разности фаз между скоростью сферы и скоростью течения [2]. Мгновенное значение фазы $\Psi(t)$ сигнала скорости $x(t)$ определяется как $\Psi(t) = \arctg(y(t)/x(t))$. $y(t)$ - ортогональное дополнение к $x(t)$, которое вычисляется как преобразование Гильберта ряда $x(t)$. Тогда $\chi(t) = \partial(\Psi(t))/\partial t$ - мгновенная частота. Установлено, что в ламинарных областях течение полностью синхронизируется с вращением границы – разность фаз постоянна во времени, а разность частот изменяется во времени регулярным образом (рис. 1). В турбулентной области слоя обнаружены временные участки с сильной и слабой турбулентностью, отличающиеся уровнем синхронизации. На участках с сильной турбулентностью и слабой синхронизацией разница фаз изменяется во времени, а разница частот сильно отклоняется от средних значений. Произвольное чередование во времени участков со слабой и сильной турбулентностью позволило сделать вывод о появлении перемежаемости типа «хаос-хаос» в турбулентной части течения [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 14-08-00204.

ЛИТЕРАТУРА.

1. N. Nikitin, J. Comp. Phys., 217, 2, 759 (2006).
2. Д.Ю. Жиленко, О.Э.Кривоносова, Докл. РАН, т.454, №4, 278 (2014).
3. Д.Ю. Жиленко, О.Э.Кривоносова, Письма в ЖТФ, т. 41, 1, 12 (2015).

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО БАРОТРОНОГО ГАЗА, ИСПОЛЬЗУЯ
НОВЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ**

К.А.Жуков¹, А.В.Попов²
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

В настоящей работе рассматриваются две новые неявные разностные схемы для системы уравнений, описывающие движение вязкого баротропного газа в переменных Эйлера в случае одной, двух и трех пространственных переменных. Дискретизация первой схемы по пространственным переменным построена методом конечных разностей, а второй схемы - методом конечных элементов. Особенностью обеих предлагаемых разностных схем является то, что ищутся не сами значения функции плотности, а логарифмы этих величин. Тем самым автоматически достигается выполнение условия положительности функции плотности. Для каждой из представленных разностных схем доказаны теорема существования и единственности при любых соотношениях временного и пространственных параметров дискретизации. В предположении гладкости точного решения исследуются погрешности численного интегрирования и проводится сравнение с численным экспериментом. Проведено сравнение предложенных схем на задачах с негладкими начальными данными и на задачах, рассмотренных в областях с негладкой границей. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-08023).

¹ МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики

² МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БЕЗМАШИННОГО ЭНЕРГОРАЗДЕЛЕНИЯ В ТРУБЕ ЛЕОНТЬЕВА

А.Г. Здитовец, Ю.А. Виноградов, М.М. Стронгин

НИИ Механики МГУ, г. Москва, Россия

К настоящему времени предложено несколько методов безмашинного энергоразделения газового потока [1-4]. На их основе созданы устройства безмашинного энергоразделения потоков или газодинамической температурной стратификации. Основной особенностью безмашинных методов является то, что в устройствах для их осуществления отсутствуют механизмы, приводимые в движение газовым потоком (поршень, лопатки и т.п.), т.е. газ не совершает внешней технической работы. Также газ не участвует в теплообмене с окружающей средой. Количественной мерой энергоразделения потоков служит разность между энталпиями торможения газового потока на входе и на выходе из устройства. В случае постоянной теплоемкости энергоразделение измеряется по соответствующей разнице температур торможения. Другими словами сжатый газ с температурой торможения - $T_{0\infty}$ на входе в устройство, пройдя через него, разделяется как минимум на два потока «холодный» и «горячий» с температурами торможения $T_{01} < T_{0\infty}$ и $T_{02} > T_{0\infty}$, соответственно.

К наиболее распространенным методам безмашинного энергоразделения можно отнести вихревой и резонансный методы, а устройства для их осуществления - вихревые трубы Ранка - Хилша и резонансные трубы Гартмана - Шпренгера, соответственно.

В работе [1] предложен и теоретически обоснован новый метод безмашинного энергоразделения газового потока. Главной его особенностью является возможность существенного снижения потерь полного давления у одного из потоков. Принципиальная схема устройства для его реализации показана на рис.1. Сжатый газ (воздух, пар, смесь газов и т.п.) поступает из ресивера 1 с параметрами торможения $T_{0\infty}, P_{0\infty}$ в рабочий участок, где разделяется перегородкой 2 на два потока 3, 4. Поток 3 не испытывает геометрического воздействия и остается дозвуковым, поток 4 разгоняется в сопле 5 до сверхзвуковой скорости.

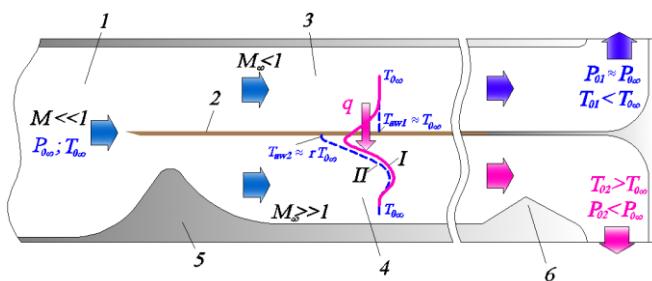


Рис.1 Принципиальная схема устройства для безмашинного энергоразделения потока по методу Леонтьева: 1 - ресивер, 2 - разделительная перегородка, 3 - дозвуковой поток, 4 - сверхзвуковой поток, 5 - сверхзвуковое сопло, 6 - сверхзвуковой диффузор. Распределение температуры торможения в пограничном слое в случае теплопроводной разделительной перегородки (I), в случае теплоизолированной перегородки (II)

Как известно, температура поверхности теплоизолированной плоской стенки, обтекаемой газовым потоком, для неразреженных сред равна температуре газа непосредственно у поверхности этой стенки и определяется выражением:

$$T_{aw} = \frac{T_{0\infty} \left(1 + r \frac{(k-1)}{2} M^2 \right)}{1 + \frac{(k-1)}{2} M^2} \quad (1)$$

В случае дозвукового потока ($M \ll 1$), из (1) $T_{aw} \approx T_{0\infty}$, а в случае сверхзвукового потока ($M \gg 1$), можно принять $T_{aw} \approx rT_{0\infty}$. На рис. 1 штриховой линией показаны профили

температуры торможения в пограничном слое сверхзвукового и дозвукового потоков, если перегородка 2 – плоская теплоизолированная пластина и $r < 1$. Температуры поверхностей перегородки со стороны дозвукового потока - T_{aw1} и сверхзвукового потока - T_{aw2} отличаются друг от друга. Следовательно, если перегородку сделать теплопроводной, то между потоками начнется теплообмен. В таком случае сверхзвуковой поток будет нагреваться, а дозвуковой – охлаждаться (для этого случая профиль температуры торможения показан на рис. 1 сплошной линией). При этом $T_{aw} \approx rT_{\infty}$ – максимальная теоретически возможная температура охлаждения дозвукового потока в данном устройстве. Если $r > 1$, то тепловой поток будет направлен в другую сторону. При $r = 1$ теплообмен между потоками отсутствует и энергоразделения в данном устройстве не происходит.

Из многочисленных экспериментальных данных, полученных на воздухе, известно, что на плоской пластине в случае турбулентного пограничного слоя коэффициент восстановления температуры определяется следующим выражением $r=Pr^{1/3}$. У однородных газов (водород, гелий, аргон, ксенон и т.п.) и воздуха критерий Прандтля лежит в пределах $Pr \approx 0.65 \div 0.73$ в широком диапазоне температур $250 \div 1000$ К. В инженерных расчетах при обтекании плоской пластины чистыми газами обычно принимают $r \approx 0.9$. Следовательно, максимальное охлаждение дозвукового воздушного потока в плоском канале по данной схеме (рис. 1) составляет:

$$\Delta T_{Cmax} = T_{\infty} - rT_{\infty} \approx 0.1 T_{\infty}. \quad (1.2)$$

В литературе можно найти работы, посвященные численному и аналитическому исследованию энергоразделения потоков с использованием данного метода [1,2,4]. Экспериментальные результаты ограничены [2,5,6].

Цель настоящей работы - экспериментально исследовать процесс безмашинного энергоразделения по методу Леонтьева для разных начальных чисел Маха сверхзвукового потока.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ СТЕНД. Схема рабочей части представлена на рис.2. Ее основа – исследуемое устройство для безмашинного энергоразделения газового потока (труба Леонтьева), которое напоминает теплообменный аппарат «труба в трубе». Отличие состоит в том, что по внутреннему каналу движется сверхзвуковой поток, а по внешнему кольцевому каналу – дозвуковой поток. Сверхзвуковой канал образован сменными коническими соплами 2 (угол раскрытия 6° , диаметр критического сечения 5 и 3.7 мм, число Маха на срезе при изоэнтропическом течении воздуха $Mg=1.8, 2.5$, соответственно) и коническо-цилиндрическим каналом (конусность 1:50), изготовленном в латунном стержне 3. Длина конического участка 400 мм, цилиндрического 300 мм. Дозвуковой канал представлял кольцевой зазор, образованный между двумя цилиндрическими поверхностями деталей 3 и 4. В итоге два канала сверхзвуковой и дозвуковой разделены теплопроводящим материалом (теплопроводность латуни $\lambda \approx 110$ Вт/м К). Внешняя стальная труба 4 была покрыта 5-ти мм. слоем теплоизолятора – вспененный полиэтиленом $\lambda \approx 0.04$ Вт/м К.

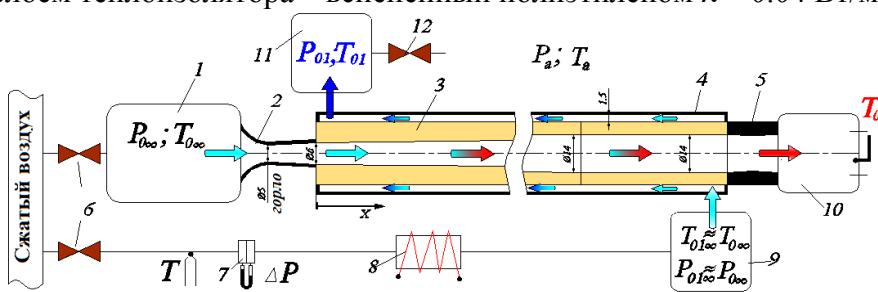


Рис.2 Схема рабочей части экспериментального стенда: 1,9,10,11 – ресиверы; 2 – сверхзвуковое коническое сопло; 3 – латунный стержень с внутренним коническо-цилиндрическим каналом; 4 – труба с теплоизоляцией; 5 – выходной диффузор; 6 – регуляторы давления; 7 – расходомерное устройство; 8 – электрический нагреватель; 12 – вентиль

Сжатый воздух поступал на установку из трассы высокого давления. Электрическим нагревателем (не показан на рис.2), расположенным в ресивере 1, обеспечивалась заданная по

условиям эксперимента начальная температура торможения сверхзвукового потока $T_{0\infty}$. Начальные параметры сверхзвукового потока $P_{0\infty}$ и $T_{0\infty}$ в ресивере 1 поддерживались неизменными на протяжении всего времени проведения эксперимента. В дозвуковой канал воздух поступал из ресивера 9. Начальные параметры дозвукового потока $P_{01\infty}$ и $T_{01\infty}$ поддерживались равными начальным параметрам сверхзвукового потока $P_{0\infty}$ и $T_{0\infty}$. Различным режимам работы стенда соответствовал разный массовый расход через дозвуковой канал, который регулировался вентилем 12 и регулятором 6. Массовый расход воздуха через сверхзвуковой канал оставался неизменным. При этом на всех режимах выдерживалось главное условие безмашинного метода энергоразделения – равенство начальных температур торможения потоков на входе в дозвуковую и сверхзвуковую части устройства.

Зондами фиксировались профили температуры торможения на выходе из дозвукового T_{01i} и сверхзвукового T_{02i} каналов для разных значений массового расхода воздуха через дозвуковой канал. Также фиксировалось полное давление потока на выходе из дозвукового канала P_{01} . Измерение температуры проводилось хромель – алюмелевыми термопарами с погрешностью ± 0.3 К. Массовый расход через дозвуковой канал рассчитывался по падению давления на мерной шайбе 7, через сверхзвуковой канал - по параметрам торможения в ресивере 1 и площади критического сверхзвукового сопла. Мерная шайба и сопла предварительно тарировались на лабораторных ротаметрах с погрешностью 1.5%.

Все измерения проводились после достижения параметрами потоков квазистационарного режима.

РЕЗУЛЬТАТЫ Измерения распределения статического давления вдоль конического-цилиндрического канала при отсутствии теплообмена с дозвуковым потоком показали рис.3 (слева), что, например, при сопле $Mr=1.8$ число Маха изменяется на коническом участке от 1.7 до 2.4, а на цилиндрическом от 2.4 до 2.1. Одновременно при помощи тепловизора было измерено температурное поле внешней поверхности стержня 3 (труба 4 была убрана) рис.3 (справа). Эти данные позволили экспериментально оценить минимальную температуру T_{aw} (если пренебречь теплообменом с окружающей средой и продольными перетечками тепла по стержню) до которой может быть охлажден дозвуковой поток в данном устройстве с теми же начальными параметрами что и в ресивере 1. Для начальных параметров воздуха $T_{0\infty} = 25.5 \pm 0.3$ С и $P_{0\infty} = 1.05 \pm 0.01$ МПа минимальная температура стенки составила 4.0 ± 1.0 К. Следовательно, максимальный эффект охлаждения на данной установке при данных начальных параметрах потока может составить $25.5 - 4 = 21.5 \pm 1.3$ С. Массовый расход воздуха через сверхзвуковой канал составил $G_2 = 0.049 \pm 0.0005$ кг/с. Массовая доля дозвукового потока изменилась в диапазоне от 0.1 до 0.8.

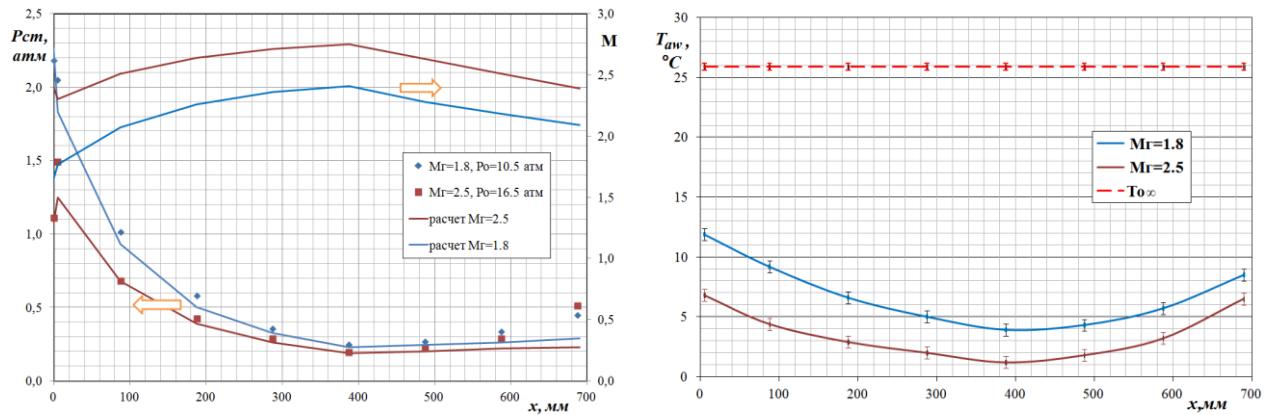


Рис.3

На рис. 4 (слева) показаны величины абсолютного нагрева сверхзвукового потока $\Delta T_{0h} = T_{02}-T_{0\infty}$ и охлаждения дозвукового потока $\Delta T_{0c} = T_{01}-T_{01\infty}$ измеренные на данном стенде при различных значениях массовой доли дозвукового потока. Как видно, режим с максимальным

охлаждением дозвукового потока достигается при минимальном его расходе через установку. Полученный результат 15 ± 0.6 К отличается от максимально возможного, определенного выше 21.5 ± 1.3 К. На рис. 4 (справа) приведены потери полного давления в двух каналах, которые определялись как $P_{01} / P_{01\infty}$ для дозвукового потока и $P_a / P_{0\infty}$ для сверхзвукового потока.

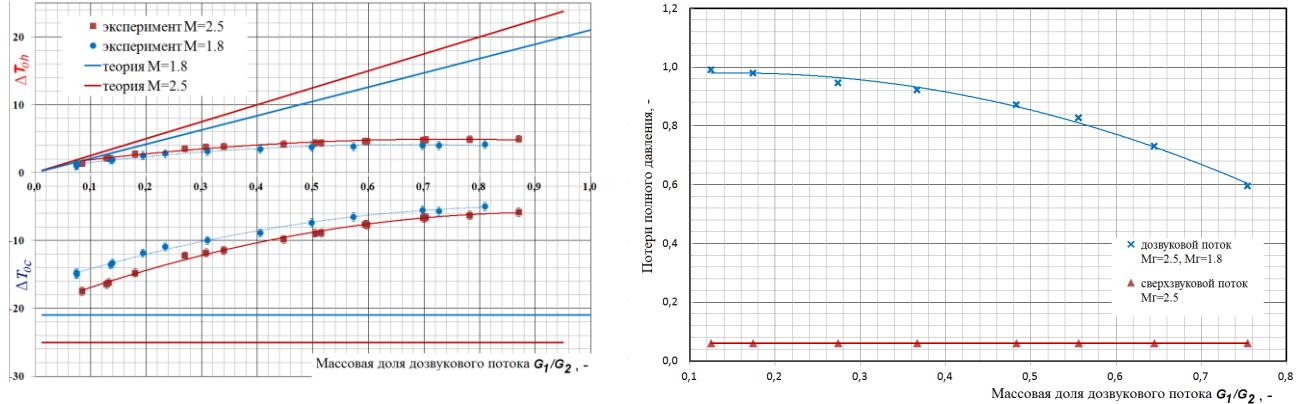


Рис.4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ Получены новые экспериментальные данные по температурному разделению воздушного потока по методу, предложенному в [1]. Из результатов следует, что эффективность охлаждения дозвукового потока тем выше, чем меньше его относительная массовая доля. Для увеличения данного эффекта следует повышать коэффициент теплоотдачи по дозвуковой части, используя известные методы интенсификации теплообмена в каналах.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №14-19-0069

Литература

1. Леонтьев А.И. Температурная стратификация сверхзвукового газового потока // Докл. РАН. 1997. Т.354. №4. С.475-477.
2. Леонтьев А.И. Газодинамические методы температурной стратификации // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2002. №4. С.6-26.
3. Eckert, E.R.G., "Energy separation in fluid streams," International Communications in Heat and Mass Transfer, 1986 V.13 (2), pp. 127-143.
4. Бурцев С.А., Леонтьев А.И. Исследование влияния диссипативных эффектов на температурную стратификацию в потоках газа (обзор) // Теплофизика высоких температур. 2014. Т. 52. № 2. С. 310-322.
5. Здитовец А.Г., Титов А.А.. Экспериментальное исследование газодинамического метода безмашинного энергоразделения воздушных потоков // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5. №9. С. 391-397.
6. Zditovets A.G., Vinogradov U. A., Titov A. A. Experimental investigation of the heat transfer process at a gas-dynamic method of energy separation. In Proceedings of the 15th International Heat Transfer Conference, IHTC-15-89652, 2014

МОДЕЛЬ ВЫТЯГИВАЮЩИХСЯ ВИХРЕЙ И ОБОСНОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

К.П. Зыбин (1,2), В.А. Сирота (1)
 (1) Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва
 (2) Высшая школа экономики, Москва

Статистические свойства мелкомасштабных возмущений скорости в однородной и изотропной гидродинамической турбулентности хорошо изучены экспериментально и методами численного моделирования, но они до сих пор не имеют однозначного теоретического объяснения. Общепринятая концепция дробления вихрей как главного механизма турбулентности не только не может объяснить ряд наблюдаемых фактов, но и содержит внутренние противоречия. Доклад посвящен альтернативной концепции, согласно которой определяющим процессом является не распад, а растяжение вихрей. Эволюция растягивающихся вихревых нитей — филаментов — и их свойства выводятся из уравнения Навье—Стокса. Модель растягивающихся вихревых филаментов позволяет объяснить степенную зависимость структурных функций скорости и перемежаемость их показателей, придавая конкретный физический смысл основанной на размерных соображениях мультифрактальной теории. Модель вихревых филаментов — единственная модель, объясняющая наблюдаемые различия показателей продольных и поперечных структурных функций.

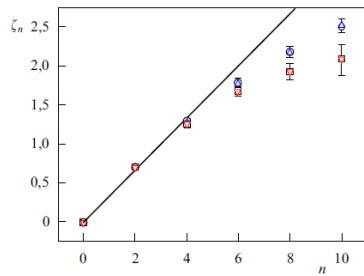


Рис. 1а

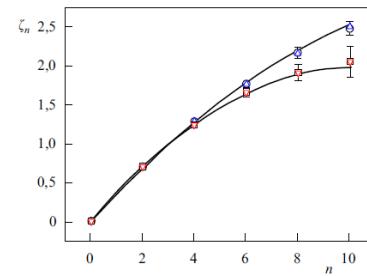


Рис. 1б

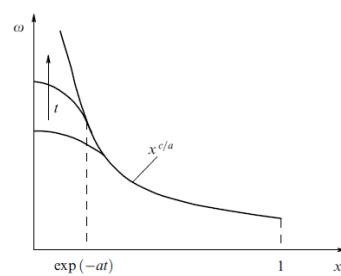


Рис. 2

На рисунке 1а изображены показатели степени продольных и поперечных структурных функций скорости по результатам численного моделирования [1] (кружки и квадраты соответственно) и [2] (треугольники вершиной вверх и вниз соответственно). Прямая, имеющая наклон $1/3$, соответствует результатам Колмогорова для структурных функций [3] и [4]. На рисунке 1б показаны показатели продольной (верхняя кривая) и поперечной (нижняя кривая) структурных функций скорости, которые следуют из результатов модели, наложенные на те же результаты. На рисунке 2 показана иллюстрация вытягивающихся вихрей, получаемых как точные решения уравнений Навье—Стокса со случайной крупномасштабной силой. Данный анализ основан на результатах многолетней работы (см. обзор [5]).

Работа выполнена при поддержке Программы президиума РАН «Нелинейная динамика в математических науках»

ЛИТЕРАТУРА.

1. Benzi R. et al J. Fluid Mech. 653 221 (2010)
2. Gotoh T., Fukayama D., Nakano T., Phys. Fluids 14 1065 (2002)
3. Колмогоров А.Н. ДАН СССР 32 (1) 19 (1941)
4. Колмогоров А.Н. ДАН СССР 30 (4) 299 (1941)
5. Зыбин К.П., Сирота В.А. УФН 185 6 (2015)

**ТЕСТИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ТУРБУЛЕНТНОСТИ, В ТОМ ЧИСЛЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ С УЧЕТОМ КРИВИЗНЫ ЛИНИЙ
ТОКА, НА ПРИМЕРЕ ОБТЕКАНИЯ ПОЛУКРУГОВОГО ПРОФИЛЯ ПРИ НУЛЕВОМ УГЛЕ
АТАКИ, ВКЛЮЧАЯ ВЛИЯНИЕ ВИХРЕВОЙ ЯЧЕЙКИ СО ЩЕЛЕВЫМ ОТСОСОМ
ВЕНТИЛЯТОРОМ И ИСТЕЧЕНИЕМ СТРУИ В БЛИЖНИЙ СЛЕД**

С.А. Исаев^{1,2}, П.А. Баранов², А.Г. Судаков², А.Е. Усачов³, С.В. Гувернюк⁴, А.А. Дектерев⁵, А.А. Гаврилов⁵

¹Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – Казанский авиационный институт, Казань

²Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, Санкт-Петербург

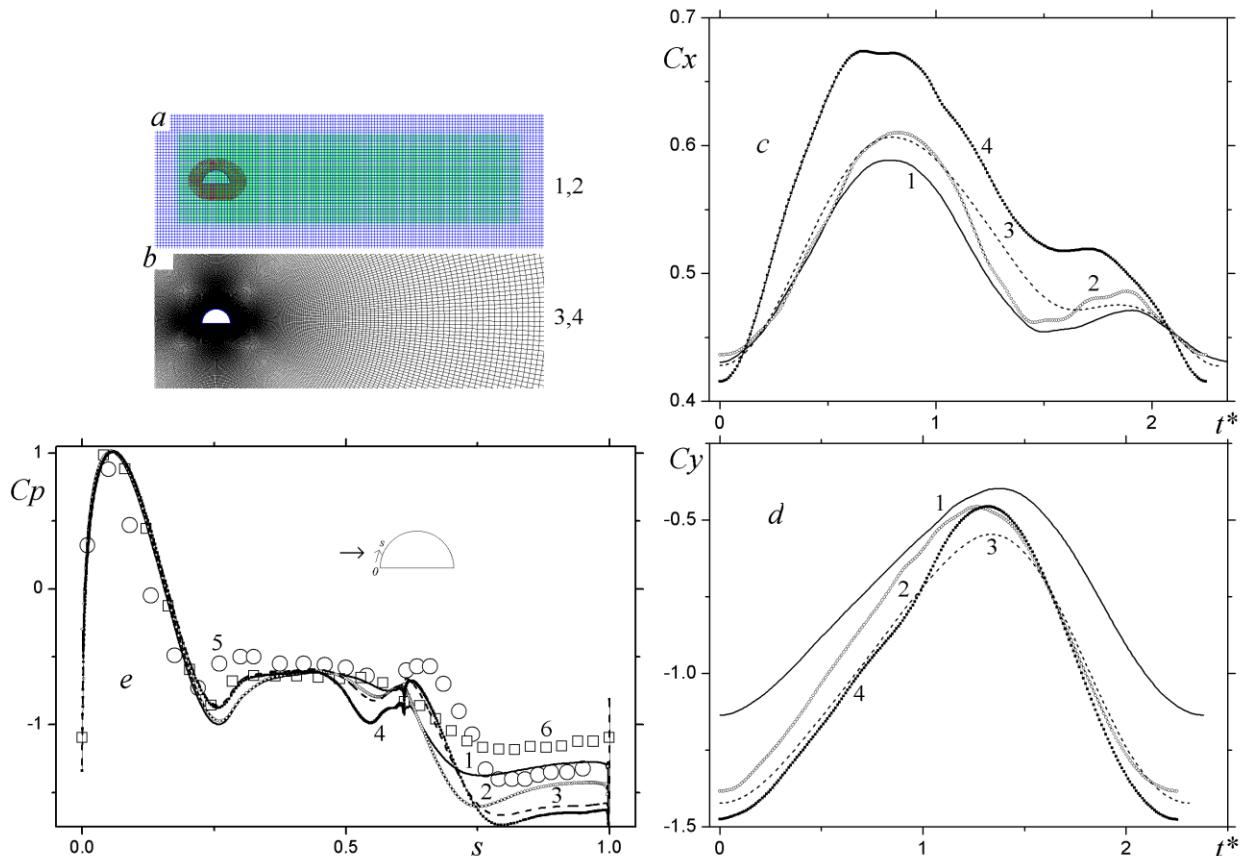
³Московский комплекс ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, Москва

⁴Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

⁵Институт теплофизики им. С.С.Кутателадзе СО РАН

Известно, что полуэмпирические модели турбулентности калибруются, в основном, по течениям пристеночного типа, в то время как значительный интерес представляют задачи управления обтеканием тел с помощью генерации высокointенсивных крупномасштабных вихрей [1]. Поэтому продолжается тестирование различных версий полуэмпирических моделей, в том числе модифицированных с учетом влияния кривизны линий тока на характеристики турбулентности [2]. Один из перспективных подходов основывается на коррекции SST-модели в рамках подхода Роди-Лещинера-Исаева с введением обратной линейной функции от турбулентного числа Ричардсона в формулу для определения вихревой вязкости [3]. В данной работе сравниваются пакеты (VP2/3 и sigma-flow), различные по сложности модели турбулентности (MSST, Zf, RSM), расчетные методологии, в том числе базирующиеся на многоблочных вычислительных технологиях, численные решения на сетках разной топологии, полученные по схемам различного порядка точности. В качестве базовой задачи рассматривается нестационарное плоское обтекание полукругового профиля вязкой несжимаемой жидкости при числе Рейнольдса порядка 50000.

Интерес к полукруговому профилю, прежде всего, обусловливается тем обстоятельством, что это классическая форма строительных конструкций [4], а также он является максимально толстым 50% аэродинамическим профилем, представляющим аналог профиля аппарата ЭКИП [5]. К тому же в Институте механики в разное время проведены трубные испытания моделей такого профиля, причем в экспериментах З.Случановской [6] обнаружен эффект ультранизкого коэффициента подъемной силы (Су порядка -1), который получил объяснение в численном моделировании [7].



На рисунке приведено сравнение численных прогнозов, полученных с использованием модифицированной SST-модели на многоблочных пересекающихся сетках H (*a*) и O(*b*) типа для различных схем интегрирования по времени – схемы Эйлера (кривые 1,3) и Пейре (кривые 2,4), с экспериментальными данными (5) З.Случановской и (6) С.Гувернюка. Показано существенное влияние указанных факторов на интегральные силовые характеристики $Cx(t^*)(c)$ и $Cy(t^*)(d)$ на временном периоде при достижении режима автоколебаний, а также на поверхностные распределения коэффициента давления (*e*) по контуру профиля. Здесь t^* - приведенное время. Некоторые данные по осредненным интегральным характеристикам приведены в таблице.

Таблица

Влияние типа сетки и порядка точности схемы интегрирования по времени на осредненные интегральные характеристики полукругового профиля при нулевом угле атаки и $Re=50000$

	Сетка H-типа Схема Эйлера	Сетка H-типа Схема Пейре	Сетка O-типа Схема Эйлера	Сетка O-типа Схема Пейре	Эксперимент Случановской
Cx	0.494	0.508	0.510	0.553	0.5
Cy	-0.766	-0.992	-0.996	-1.00	-1.1
St	0.427	0.444	0.417	0.444	-

Заключительная часть работы посвящена численному моделированию управления отрывным обтеканием толстого профиля с помощью малоразмерной круговой вихревой ячейки на спинке отсосом, в том числе с помощью вентилятора и выбросом струи в ближний след. Включение вихревой ячейки приводит к смене режима обтекания, к появлению положительного качества. Развивается концепция переменного отсоса в продолжение исследований европейской программы VortexCell2050 [8,9].

Работа выполнена при поддержке РНФ по проекту 14-19-00003 с части экспериментальных исследований и государственной поддержке научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах (ведущий ученый — С. Исаев, КНИТУ-КАИ, г. Казань) по гранту Правительства России № 14.Z50.31.0003.

ЛИТЕРАТУРА.

1. И.А. Белов, С.А. Исаев, В.А. Коробков Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1989. 256с.
2. С.А. Исаев. Верификация модифицированной MSST с учетом влияния кривизны линий тока в рамках подхода Роди-Лещинера-Исаева при расчете стационарных и периодических течений. Труды XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 2015, с.1629-1631.
3. S. Isaev, P. Baranov, Yu. Zhukova, A. Usachov, V. Kharchenko. Correction of the shear-stress-transfer model with account of the curvature of streamlines in calculating separated flows of an incompressible viscous fluid. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2014, 87(4), 1002-1015.
4. S. Isaev, P. Baranov, Yu. Zhukova, A. Tereshkin, A. Usachov. Simulation of the wind effect on an ensemble of high-rise buildings by means of multiblock computational technologies. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2014, 87(1), 112-123.
5. S. Isaev, P. Baranov, A. Sudakov, A. Ermakov. Modeling the increase in aerodynamic efficiency for a thick (37.5% chord) airfoil with slot suction in vortex cells with allowance for the compressibility effect. Technical Physics Letters, 2015, 41(1), 76-79.
6. З.П. Случановская. Распределение давления на поверхности прямоугольного, трехгранных и полукруглого цилиндров и их аэродинамические коэффициенты. М.: Изд-во Моск. Ун-та. Научн. Труды Института механики, 1973, № 24, с.52-60.
7. S. Isaev, J.-J. Miao, A. Sudakov, A. Usachov. Analysis of extremal lift behavior of a semicircular airfoil in a turbulent airfoil at a near-zero angle of attack. Technical Physics Letters, 2015, 41(8), 737-739.
8. D. Lasagna, R. Donelli, F. De Gregorio, G. Iuso. Effects of a trapped vortex cell on thick wing profile. Experiments in Fluids, 2011, 51(5), 1369-1384.
9. S. Isaev, P. Baranov, A. Sudakov, A. Usachov. Expansion of the range of critical Mach numbers during control of transonic flow past a thick (20% Chord) MQ airfoil with slot suction in a circular vortex flow. Technical Physics Letters, 2014, 40(5), 417–420.

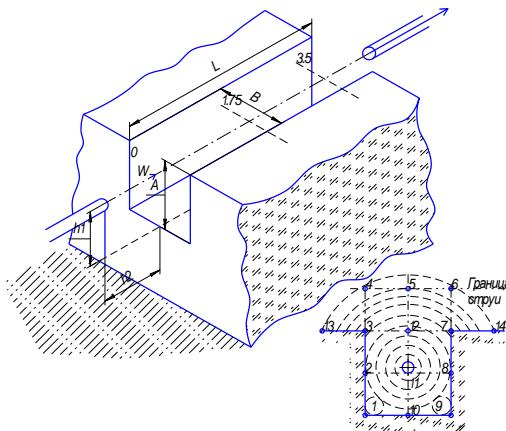
НАТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕЖМАШИННОГО РУСЛОВОГО КАНАЛА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ АЭРОДИНАМИКИ ТУРБУЛЕНТНОГО ВОЗДУШНОГО ПОТОКА

А.Н.Карелин

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург

Для натурного и математического моделирования предлагается использовать метод теории подобия. Модель содержит межмашинный (русловый) канал типового машинного отделения, в котором расположены продольно расположенные двигатели [1].

Пространственная геометрия машинного отделения между двигателями формируется в виде русловых каналов. Схема пространственной модели такого канала может быть представлена в следующем виде.



Геометрия машинного отделения образует пространство для обеспечения возможности перемещения обслуживающего персонала и подхода к элементам двигателей. Для этих же целей между машинами образуются проходы, с размещенными в них местными постами управления, где длительное время размещаются вахтенные мотористы [1, 2].

Цели исследования аэродинамики распределения воздушных потоков в затесненных объемах представляется актуальной задачей, обеспечивающей оптимизацию распределения активности скоростей воздушного потока, в точках поперечного сечения исследуемой геометрии пространства.

Межмашинный канал смоделирован в масштабе 1:2. За основу построения модели принят метод на основе безразмерного критерия подобия Рейнольдса при движении в газе или несжимаемой вязкой жидкости тела размером L , звуковой установившейся скоростью V невозмущённого потока далеко впереди тела и кинематическим коэффициентом вязкости жидкости ν , на основе соотношения сил инерции, тяжести в потоке и связанное с переносом импульса: $Re = VL/\nu = idem$ [3 - 5], где $idem$ – безразмерный комплекс или

$$Re = \frac{V * l}{\nu} = \frac{\text{сила инерции}}{\text{сила вязкого трения}} - \text{число Рейнольдса}$$

Этот метод можно применить и при обтекании тела произвольной геометрии потоком жидкости [6].

Другие безразмерные параметры (например, аэродинамические коэффициенты), характеризуют обтекание тела и являются функционально производными от этого критерия.

Как известно, данные коэффициенты определяются опытным путём из лабораторного испытания моделей в гидро- и аэродинамических трубах.

Теоретической основой моделирования по критерию геометрического подобия Re является определение величины геометрического подобия Re , при котором соблюдаются равенства значений коэффициентов Re подобного и натурного объекта.

Аналогичным способом определяются свойства и физического подобия, используя пересчетные пропорциональные коэффициенты подобия - "переходные масштабы". Основой моделирования является равенство параметров безразмерных критериев подобия [7-12].

В гидравлике рассматриваются критерии подобия Ньютона, Рейнольдса, Эйлера и др.

В данной работе критерий подобия Рейнольдса принимается за основу моделирования и выбранный гидродинамический режим потока отражает критерий Рейнольдса:

$$Re = \frac{V * l * \rho_{ж}}{\mu_{ж}} = \frac{V * l}{\nu}$$

- коэффициент динамической вязкости жидкости; - плотность жидкости (газа, пара).

Таким образом, моделирование выполняется на основе критерия подобия Рейнольдса, характеризующий гидродинамическое подобие при обтекании объекта жидкостью:

$$\frac{V * l}{\nu}$$

где ν - коэффициент кинематической вязкости.

Критерий Рейнольдса – это основной критерий, определяющий процесс течения. Для построения теоретической модели на основе теории подобия необходимо соблюдать так называемые условия однозначности модели. В теории подобия условия однозначности определяются как [7-12]:

- геометрические, характеризующие форму и размеры системы;
- физические, характеризующие физические свойства среды и тела;
- граничные, характеризующие особенности протекания процессов на границах тела;
- временные, характеризующие особенности протекания процесса времени.

Для создания математической модели на основе теории подобия был произведен анализ размеров машинного отделения (МО) и двигателя внутреннего сгорания (ДВС) применяемых в качестве главных и вспомогательных машин, а также особенности их размещения:

-верхняя точка двигателя обычно возвышается над палубным настилом на высоте среднего роста человека, т.е. порядка 1.55 – 1.65 м, такая геометрия обеспечивается для визуального и тактильного контроля за работой двигателя;

-расстояние между двумя соседними двигателями составляет порядка 1.2 – 1.4 м, для обеспечения беспрепятственного доступа во время обслуживания.

Таким образом, моделируется типичный для многих судов межмашинный канал руслового типа с поперечным сечением порядка 1.6 * 1.3 м².

Для изучения аэrodинамики межмашинного канала в лабораторных условиях может создана натурная модель в масштабе (1:2) по критерию коэффициента подобия Рейнольдса.

Выполним расчет размеров сечения модели межмашинного канала по исходным данным: $h_n = 1.6$ м - натурная высота; $b_n = 1.3$ м - натурное расстояние в плоскости шпангоута; $Re = V_0 L / \nu = idem$, где характерный размер для расчета по критерию Re : $L = D_{экв} = 4F / \Pi$ – эквивалентный диаметр канала, м, $D_{экв}$ – эквивалентный диаметр; L – длина участка руслового канала; F – площадь проходного сечения, м²; Π – периметр сечения, м.

Таким образом, $Re = V_n A F_n / (\Pi_n \nu) = V_m A F_m / (\Pi_m \nu) = idem$. Приняв $h_m = 1$ м, получаем $b_m = 0.6$ (м) и модель руслового канала с площадью поперечного сечения (1*0,6) м².

При этом соблюдаются условия подобия:

- подобные между собой процессы имеют одинаковые критерии подобия;
- зависимость между переменными характеристиками в любом процессе, может быть представлена в виде зависимости между критериями подобия;
- подобны те процессы, условия однозначности которых подобны, и критерии, составленные из величин, входящих в условия однозначности, численно одинаковы [7 - 12].

ЛИТЕРАТУРА.

1. Ванштейн В.А., Гордеев П.А., Захаренко Б.А. и др. Судовые установки с двигателями внутреннего сгорания. - Л.: Судостроение, 1978. - 360 с.
2. Инструкция по эксплуатации дизелей типа М-507П-1.
3. Щукин В.К. Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил. - М.: Машиностроение, 1970. - 331 с., ил.
4. Михеев М.А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. - М.: Энергия, 1973.
5. Кутателадзе С.С. Анализ подобия и физические модели. - Новосибирск: Наука, 1986. - 295 с.
6. Карелин А.Н. Гидродинамика и интенсификация теплообмена в сборках ядерных реакторов// Материалы международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность». 25 февраля – 4 марта 2014 г. Моск. обл., панс. «Звенигородский» РАН. – М.: Издательство Московского университета. 2014. – 270 с.
7. Веников В.А. Теория подобия и моделирования/ В.А. Веников. – М.: Высшая школа, 1976.
8. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике (10-е издание). - М.: Наука, 1987.
9. Дьяконов Г.К. Вопросы теории подобия в области физико-химических процессов. – М.: Изд-во Академии наук СССР, 1956. – 206 с.
10. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. — М.: Иностранная литература, 1963.
11. Гухман А.А. Введение в теорию подобия. – М.: издательство «Высшая школа», 1966. - с. 405.
12. Баренблatt Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. - Л.: Гидрометеоиздат, 1982. - 255 с. - Монография.

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ТУРБУЛИЗАЦИИ ТРЕХМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ И ЕГО РАСЧЁТ

Ю.С. Качанов, В.И. Бородулин, А.В. Иванов

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Доклад посвящён обзору результатов недавних исследований, посвящённых проблеме возникновения турбулентности в трёхмерных пограничных слоях на примере пограничных слоёв на скользящих крыльях. Обсуждаются два основных типа перехода к турбулентности: внезапный и эволюционный. Приводятся их основные характеристики, обсуждается отличие.

Формулируется и обосновывается утверждение о существовании универсального механизма начала турбулизации трёхмерных погранслоёв, единого для всех сценариев эволюционного типа перехода в условиях присутствия (или отсутствия) различного типа неровностей поверхности и различного рода вихревых возмущений набегающего потока. В отличие от двумерных погранслоёв, таким универсальным механизмом является локальная вторичная неустойчивость исходного течения, искажённого развитием первичных возмущений.

Основное внимание в докладе уделено проблеме нахождения простых критериев начала турбулизации, удобных для выполнения расчётов. Анализируются несколько таких критериев. Показана ограниченная применимость некоторых из них. Формулируется и обосновывается утверждение о существовании универсального критерия начала турбулизации трёхмерного пограничного слоя, ассоциируемого с пороговым значением комбинированных амплитуд возмущений скорости потока. Обсуждается проблема расчёта пороговых величин комбинированных амплитуд мод неустойчивости трёхмерного пограничного слоя. Приводятся два принципиальных пути их вычисления. Один из путей находится в рамках линейных теорий устойчивости и основан на введении понятия комбинированного n -фактора возмущений. Приводятся соотношения для его расчёта на основе n -факторов стационарных и бегущих мод неустойчивости. Обсуждаются проблемы этого способа расчёта. Кратко обсуждается второй возможный путь расчёта пороговых комбинированных амплитуд возмущений, лежащий в области слабонелинейной теории устойчивости. Отмечается более точное соответствие этого подхода физической природе процесса перехода.

В заключение формулируются основные выводы приведённого обзора и анализа.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОКОЛО МЕМБРАН
С ДЕФЕКТАМИ ПРОВОДИМОСТИ**

В.А. Кирий, Н.Ю. Ганченко
ФГБОУ ВПО КубГУ, Краснодар

Известно, что реальные мембранны имеют на поверхности области естественного происхождения, физические свойства (заряд, проводимость, трение и т. п.) которых отличаются от окружающих их участков. Подобные области могут образовываться и в процессе эксплуатации мембран в случае осаждения на их поверхность крупных заряженных молекул. Экспериментально установлено [1, 2], что наличие указанных областей резко меняет свойства мембраны, в том числе её вольт-амперную характеристику. Кроме того, с точки зрения теории устойчивости, наличие заряженных областей может как стабилизировать, так и дестабилизировать течение около мембраны.

В настоящей работе ставится задача исследования влияния областей с изменённой проводимостью на динамику системы. Рассматривается раствор симметричного бинарного электролита, помещённого между плоскими катионообменными мембранами. Его поведение описывается системой уравнений Нернста-Планка-Пуассона-Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^\pm}{\partial t} + u \frac{\partial c^\pm}{\partial x} + v \frac{\partial c^\pm}{\partial y} &= \pm \frac{\partial}{\partial x} \left(c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \pm \frac{\partial}{\partial y} \left(c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 c^\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^\pm}{\partial y^2}; \\ \nu^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) &= c^- - c^+ \equiv -\rho; \\ \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} &= \frac{\varkappa}{\nu^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь c^\pm — концентрации ионов, $u = \partial \Psi / \partial y$ и $v = -\partial \Psi / \partial x$ — компоненты скорости, Ψ — функция тока, Φ — электрический потенциал, $\rho = c^+ - c^-$ — плотность заряда, $\nu = \tilde{\lambda}_D / \tilde{h}_0$ — число Дебая (где $\tilde{\lambda}_D$ — размерная длина Дебая), $\varkappa = \tilde{\varepsilon} \tilde{\Phi}_0^2 / \tilde{\mu} \tilde{D}$ — коэффициент сцепления между гидродинамикой и электростатикой.

На верхней мемbrane ($y = 1$) задаются следующие условия :

$$y = 1 : \quad c^+ = p, \quad -c^- \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial c^-}{\partial y} = 0, \quad \Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0.$$

Электрический ток через мембрану определяется исключительно плотностью тока катионов:

$$j(x) = \frac{1}{4} \left(c^+ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial c^+}{\partial y} \right).$$

Коэффициент $1/4$ выбран с расчётом, чтобы плотность предельного тока, находящаяся из одномерной постановки, равнялась единице.

На нижней мембране предполагается наличие областей, непроницаемых для ионов. Для упрощения постановки эти области полагаются равного размера и расположенными через равные промежутки (рисунок слева, вставка), для которых задано волновое число k_0 и коэффициент покрытия γ . В таком случае условия на нижней мембране примут вид

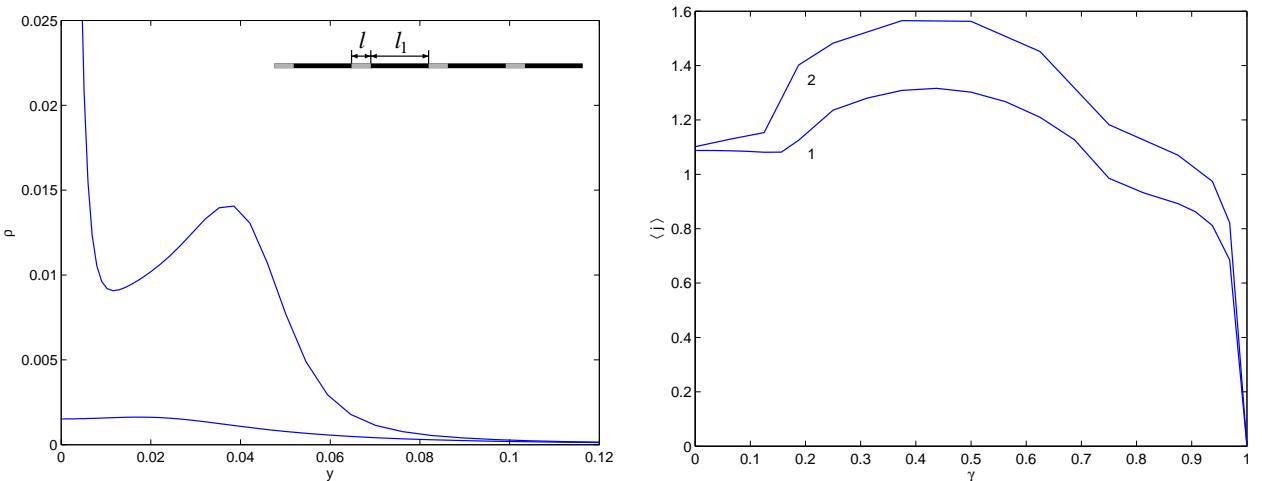
$$y = 0 : \begin{cases} c^+ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial c^+}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \sigma, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \beta \bar{y}_m \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, & \left\{ k_0 \frac{x}{L} \right\} \leq \gamma; \\ c^+ = p, \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, & \left\{ k_0 \frac{x}{L} \right\} > \gamma, \end{cases}$$

где $\bar{y}_m = \sqrt[3]{9\nu^2 \Delta V^2} / 2$ — масштабный коэффициент, а фигурные скобки означают дробную часть выражения в них. Параметр σ задаёт напряжённость поля на непроводящем участке, а параметр β — коэффициент проскальзывания жидкости (см. [4]). Условия на c^- и Ψ остаются без изменений.

Для численного моделирования поставленной задачи был разработан специальный алгоритм, основанный на методе, предложенном в [3]. В расчётах брались следующие значения параметров: $\nu = 10^{-3}$, $\varkappa = 0,1$, $p = 5$, $\beta = 1$, $k_0 = 4$. Зависимость результатов от значения σ оказалась слабой (расхождение порядка 1,5%), поэтому в большинстве расчётов полагалось $\sigma = 0$.

На рисунке слева приведена зависимость плотности заряда ρ от нормальной координаты y . Отсутствие оттока катионов в непроводящей области вызывает их накопление и, как следствие, препятствует оттоку анионов. В результате плотность заряда в этой области не претерпевает резкого нарастания в окрестности мембраны, как это происходит для идеальной мембраны. Отметим также, что зона пространственного заряда (локальное возрастание ρ) здесь выражена крайне слабо.

Основной причиной возрастания электрического тока через мембрану по сравнению с предельным режимом является вихреобразование. Наличие непроводящих областей уменьшает проводимость мембранны, однако в случае, когда непроводящий участок является гидрофобным, увеличение его длины может способствовать интенсификации вихреобразования. Конкуренцию этих механизмов иллюстрирует рисунок справа. При малых и больших значениях γ прослеживается общая тенденция уменьшения тока при увеличении скважности непроводящих участков. При $\gamma < 0,2$ эта тенденция выражена довольно слабо, поскольку её эффект компенсируется вихреобразованием. Вклад последнего эффекта поначалу мал и способен лишь сдержать падение проводимости в докритическом режиме (кривая 1). Эта тенденция нарушается при $\gamma = 0,2 \div 0,7$. Интенсификация тока показывает, что вклад сопротивления зоны обессоливания в общее сопротивление системы превышает вклад проводимости мембранны. Тем не менее, при дальнейшем увеличении γ это соотношение меняется в пользу последнего.



Распределение плотности заряда ρ между мембранами. На непроводящем участке область пространственного заряда не образуется. На вставке приведена модель реальной мембранны длины L , состоящая из чередующихся непроводящих и проводящих областей длиной l и l_1 соответственно.

Зависимость плотности тока через мембрану от коэффициента покрытия γ . $k_0 = 4$. 1 — $\Delta V = 26$, 2 — $\Delta V = 30$ (электрокинетическая неустойчивость ещё не развита).

Таким образом, были численно исследованы электрокинетические эффекты вблизи неидеальной мембранны, имеющей периодические гидрофобные участки, непроницаемые для ионов. Выявлено, что при малом размере непроницаемых участков основной вклад в импеданс системы вносит сопротивление электролита, а при большом — проводимость мембранны. Обнаружен максимум тока через мембрану в зависимости от коэффициента покрытия. Наличие максимума может быть использовано для оптимизации мембранных установок.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-58-45123-Инд_a, гранты 15-08-02483 А, 16-08-00643 А).

Список литературы

- [1] E. I. Belova, G. Yu. Lopatkova, N. D. Pismenskaya, V. V. Nikonenko, C. Larchet, G. Pourcelly. Effect of anion-exchange membrane surface properties on mechanisms of overlimiting mass transfer // J. Phys. Chem. B. 2006. Vol. 110. Pp. 13458–13469.
- [2] Z. Slouka, S. Senapati, Y. Yan, H.-C. Chang. Charge inversion, water splitting and vortex suppression due to DNA sorption on ion-selective membranes and their ion-current signatures // Langmuir. 2013. Vol. 29. Pp. 8275–8283.
- [3] E. A. Demekhin, N. V. Nikitin, V. S. Shelistov. Direct numerical simulation of electrokinetic instability and transition to chaotic motion // Phys. Fluids. 2013. Vol. 25. 122001.
- [4] V. S. Shelistov, E. A. Demekhin, G. S. Ganchenko. Electrokinetic instability near charge-selective hydrophobic surfaces // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 90. 013001.

Н.А.Киселёв^{1, 2}, С.А. Бурцев², М.М. Стронгин¹, Ю.А. Виноградов¹

¹ Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,
Москва, 119192, Мичуринский проспект, 1

² Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, 105005, 2-ая Бауманская, 5

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООТДАЧИ И СОПРОТИВЛЕНИЯ НА ОБЛУНЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Известно, что обычные интенсификаторы теплообмена, такие как ребра, штырьки, турбулизаторы и др., или увеличивают поверхность теплообмена, или степень турбулентности потока, или и то и другое, что приводит к интенсификации теплообмена. Однако такие процессы сопровождаются значительными увеличениями потерь давления. В свою очередь, поверхности, покрытые лунками, обеспечивают интенсификацию теплообмена, зачастую превышающую увеличение гидродинамического сопротивления. При этом, анализ опубликованных работ показывает, что результаты исследований весьма противоречивы (как результаты экспериментальных, так и численных работ). В связи с этим возникает потребность в проведении достоверных экспериментальных исследований влияния геометрии облуненного рельефа на процессы переноса импульса и теплоты в широком диапазоне параметров набегающего потока.

Экспериментальные исследования проводились на дозвуковой аэродинамической установке [1, 2]. Рабочий канал установки для определения теплогидравлических характеристик поверхностей имеет длину 1080 мм; его верхняя и нижняя стенки выполнены секционными, что позволяет варьировать длины динамического и теплового пограничных слоев путем установки рабочей модели в нескольких положениях. В ходе исследований скорость ядра потока варьировалась в диапазоне от 20 м/с до 125 м/с, температура ядра потока – от 18 °C до 35 °C, длина невозмущенного пограничного (до передней кромки пластины) слоя – от 0.15 м до 0.96 м, а число Рейнольдса Re_x , определенное по длине пограничного слоя – от $Re_x = 0.2 \cdot 10^6$ до $Re_x = 7 \cdot 10^6$. Толщина пограничного слоя менялась в экспериментах от 0.5 мм до 15 мм.

Коэффициент сопротивления определяется путем непосредственного взвешивания моделей на однокомпонентных тензометрических весах с учетом падения статического давления на длине пластин. Для определения коэффициента теплоотдачи применяется метод нестационарного теплообмена: регистрируется начальное тепловое состояние поверхностей моделей и, далее происходит регистрация теплового поля и температуры ядра потока в процессе охлаждения поверхности исследуемой пластины с помощью тепловизионной камеры и термопарами [3].

В данной работе рассматривались 10 шахматных компоновок лунок с различными продольными и поперечными шагами. Все модели получены путем фрезерования сферического углубления глубиной $h = 1$ мм на изначально гладкой поверхности. Геометрия лунки оставалась неизменной для всех моделей – диаметр сферы $D = 15.6$ мм, диаметр пятна $D_p = 7.6$ мм. В моделях 1-6 варьировался поперечный шаг массива лунок t_y от 12 до 24 мм ($\bar{t}_y = t_y / D_p = 1.58 \dots 3.16$) при продольном шаге $t_x = 20$ мм, в моделях 7-10 варьировался продольный шаг массива лунок t_x от 16 до 24 мм при продольном шаге $t_y = 18$ мм ($\bar{t}_x = t_x / D_p = 2.11 \dots 3.16$). Длина модели по потоку – 125 мм, поперек -100 мм. В качестве основного варьируемого параметра была принята плотность лунок - отношение проекции площади лунки к площади сектора, $\bar{S} = 2 \cdot \pi d_p^2 / 4 \cdot t_x \cdot t_y$.

Зависимость теплогидравлической эффективности, определенной как фактор аналогии Рейнольдса $FAR = (St/St_0) / (c_f/c_{f0})$ от числа Рейнольдса Re_x представлена на рис. 1. Для моделей № 1, 2, 4, 7-10 эта зависимость носит немонотонный характер, достигая своего максимума при $Re_x = 0.8 \cdot 10^6 \dots 2.0 \cdot 10^6$, для остальных моделей FAR монотонно снижается с увеличением числа Re_x .

Так все экспериментальные величины определены как зависимости от числа Рейнольдса Re_x , определенного по длине пограничного слоя, то осреднение локальных величин c_f/c_{f0} , St/St_0 , а также FAR по числу Re_x будет определять осредненные по длине облуненной пластины величины увеличения сопротивления, интенсификации теплообмена и фактора аналогии Рейнольдса соответственно. На рис. 2 представлены зависимости осредненных указанных величин, а также различных критериев теплогидравлической эффективности от плотности расположения лунок.

При рассмотрении влияния поперечного шага (рис. 2,а) на процессы переноса импульса, видно, что минимальное значение относительного коэффициента сопротивления $c_f/c_{f0} = 1.18$ достигается при поперечном шаге $t_y = 18$ мм ($\bar{t}_y = 2.37$). Эта модель наиболее выгодна (среди моделей с различными поперечными шагами), при этом FAR = 1.02. Эта величина поперечного шага была принята в дальнейшем при исследовании влияния продольного шага. При рассмотрении влияния продольного шага видно (рис. 2,б), что при уменьшении продольного шага (модели № 4, 7-9) относительный коэффициент сопротивления уменьшается от величины $c_f/c_{f0} = 1.3$ при $t_x = 22$ мм ($\bar{t}_x = 2.89$) до величины $c_f/c_{f0} = 1.10$ при $t_x = 16$ мм ($\bar{t}_x = 2.11$) при практически неизменной величине интенсификации теплоотдачи ($St/St_0 = 1.20$). Это приводит к увеличению теплогидравлической эффективности указанных поверхностей. Величина FAR при уменьшении продольного шага увеличивается от FAR = 0.92 при $t_x = 22$ мм до максимального значения FAR = 1.10 при $t_x = 16$ мм, что является максимальным значением теплогидравлической эффективности среди рассмотренных моделей.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 15-08-08428 и СП-1169.2015.1.

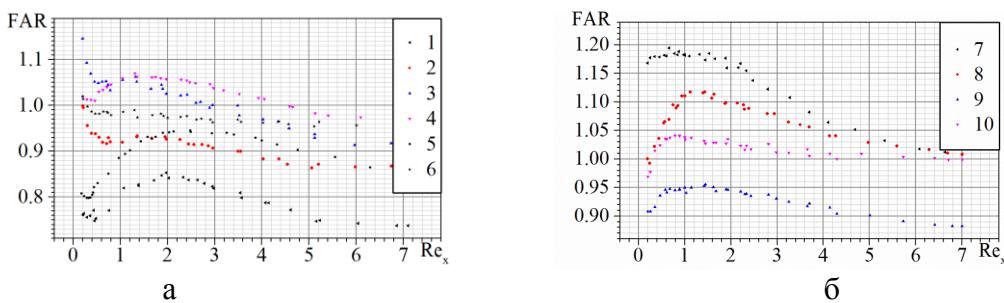


Рис. 1. Зависимость FAR от числа Re_x для моделей с различным поперечным (а) и продольным (б) шагом

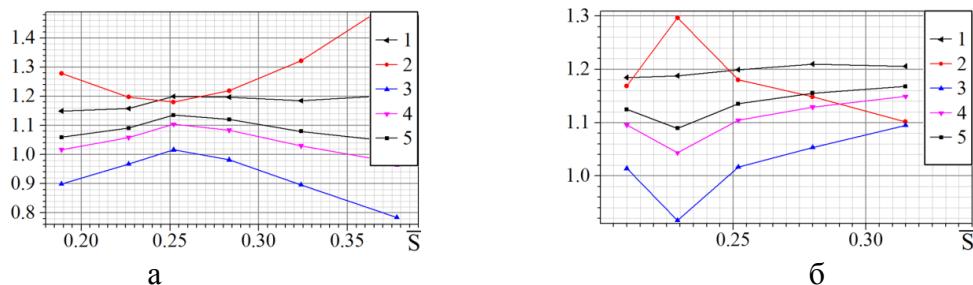


Рис. 2. Зависимости относительных коэффициентов теплообмена St/St_0 (1) и трения c_f/c_{f0} (2), фактора аналогии Рейнольдса FAR (3) и выражений $(St/St_0) / (c_f/c_{f0})^{1/2}$ (4) и $(St/St_0) / (c_f/c_{f0})^{1/3}$ (5)

Список литературы

- 1) Бурцев С.А., Киселёв Н.А., Леонтьев А.И. Особенности исследования теплогидравлических характеристик рельефных поверхностей, Теплофизика высоких температур, том 52, № 6, с. 895-898.
- 2) Бурцев С.А., Виноградов Ю.А., Киселёв Н.А., Стронгин М.М., Экспериментальное исследование теплогидравлических характеристик поверхности с коридорным расположением лунок, Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. № 5. С. 348-369.
- 3) Н. А. Киселёв, С. А. Бурцев, М. М. Стронгин, Методика определения значения коэффициентов теплоотдачи на поверхностях с регулярным рельефом, Метрология, 2015, № 3, с. 34-45.

ГОРЕНИЕ ИСТЕКАЮЩЕЙ В ВОЗДУХ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ МИКРОСТРУИ ВОДОРОДА

¹Козлов В.В., ¹Грек Г.Р., ²Коробейничев О.П., ¹Литвиненко Ю.А., ²Шмаков А.Г.

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
Сибирского отделения Российской Академии Наук, Новосибирск

²Институт химической кинетики и горения им. В.В. Воеводского
Сибирского отделения Российской Академии Наук, Новосибирск

В работе представлены результаты экспериментальных исследований режимов горения и структуры диффузионного пламени водорода, образующегося при истечении с высокой скоростью водорода в воздух через круглые и плоские отверстия различных диаметров. Найден диапазон скоростей истечения водородной струи и размер сопловых отверстий, при котором пламя разделяется на две зоны: с ламинарным и турбулентным течением. Зона с ламинарным течением является стабилизатором горения всего пламени в целом, а в зоне с турбулентным течением происходит интенсивное смешение горючего с окислителем. Горение в этих двух зонах может происходить независимо друг от друга, но наиболее устойчивый режим наблюдается только при существовании пламени в зоне с ламинарным течением. Полученные знания позволяют более глубоко понять особенности режимов микроструйного горения водорода, перспективного для различных горелочных устройств.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВИХРЕЙ
ЗА ШЕРОХОВАТОСТЬЮ И ИХ ВТОРИЧНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
НА ПЕРЕДНЕЙ КРОМКЕ СКОЛЬЗЯЩЕГО КРЫЛА**
В. В. Козлов, С. Н. Толкачев

В данной докладе приведены результаты исследования продольных возмущений, возбуждаемых элементами шероховатости, в области благоприятного градиента давления скользящего крыла, а также вторичных возмущений, генерируемых на них.

Отработана и предложена методика обнаружения области максимальной восприимчивости продольных структур к шероховатости на передней кромке скользящего крыла (вскрыты физические механизмы), получены количественные данные о развитии вторичных возмущений в естественном случае и с возбуждением акустическим полем.

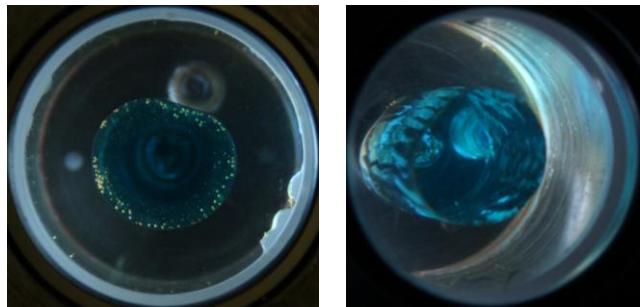
Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ (НШ_2924_2014.1) и гранта РФФИ № 15-08-01945.

ВОЛНЫ НА ЦЕНТРИФУГИРОВАННОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОЛОСТИ ПРИ ПОПЕРЕЧНЫХ ВИБРАЦИЯХ

Н.В. Козлов, Д.А. Шувалова

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет
Лаборатория вибрационной гидромеханики, Пермь

Экспериментально изучается динамика двух несмешивающихся жидкостей разной плотности во вращающемся горизонтальном цилиндре в вибрационном поле, перпендикулярном оси вращения полости. Жидкости находятся в центрифужированном состоянии под действием центробежных сил и занимают устойчивое положение в лабораторной системе отсчета. Под действием вращающегося в системе отсчета полости вектора силы тяжести легкая жидкость совершает круговые поступательные колебания малой амплитуды, которые приводят к генерации медленного отстающего движения жидкости [1]. В отсутствие вибраций скорость границы раздела характеризуется отрицательным значением $\Delta f \equiv f_i - f_r$, где f_r - скорость вращения полости, а f_i - скорость границы раздела в лабораторной системе отсчета. Под действием вибраций поведение системы изменяется: обнаружены две резонансные области, в которых граница раздела опережает стенку полости ($\Delta f > 0$) либо существенно отстает от неё ($\Delta f < 0$). Область опережающего резонансного движения наблюдается при $n \equiv f_v/f_r > 1$, где f_v - частота вибрации, тогда как отстающее резонансное движение наблюдается при $n < 1$. С увеличением амплитуды вибрации абсолютное значение дифференциальной скорости границы раздела увеличивается в обеих резонансных областях.



Под действием вибраций столб лёгкой жидкости совершает круговые колебания как единое целое с частотой вибраций. Направление этих колебаний совпадает с направлением вращения вибрационного поля в системе отсчета полости. По мере приближения частоты вибрации к собственной частоте колебаний жидкости, граница раздела, которая исходно представляет в своем сечении окружность, деформируется, как показано на фотографии слева. На поверхности раздела жидкостей возбуждается волна с азимутальным числом $m = 1$, граница раздела при этом в сечении представляет усеченную окружность. Фазовая скорость гребня в лабораторной системе отсчета совпадает с частотой вибрации и не зависит от частоты вращения полости. Деформация границы раздела данного вида вызвана круговыми колебаниями столба лёгкой жидкости.

С увеличением гребня деформации и одновременным ростом Δf , уплощенная сторона столба лёгкой жидкости подвержена возникновению коротковолновых возмущений малой амплитуды (фотография справа). Анализ длины волны для различных пар жидкостей (с различным отношением плотностей внешней и внутренней жидкости и коэффициентами поверхностного натяжения σ) показывает, что безразмерное волновое число $k = 2\pi l_{cap}/\lambda$ имеет близкие значения, где l_{cap} - это капиллярная длина. Проведенные исследования свидетельствуют об определяющей роли капиллярных сил в формировании коротковолновой неустойчивости на границе раздела жидкостей.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00476).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Н.В. Козлов, А.Н. Козлова, С.В. Пичкалёв. Динамика центрифужированной двухжидкостной системы во вращающемся горизонтальном цилиндре // Конвективные течения... Вып. 6 / Пермь: Перм. пед. Ун-т, 2013. С. 168–184.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА СООТВЕТСТВЕННЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЯЗКОСТИ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РАСТВОРА

Е.В. Колодба¹, А.Ю. Романова¹

¹ МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет,
кафедра вычислительной механики

Принцип соответственных состояний впервые был сформулирован для уравнений состояний Ван-дер-Ваальсовского типа: PVT- свойства разных веществ описываются одним уравнением состояния, записанным через приведённые переменные.

Приведённые переменные p_r, V_r, T_r выражаются через значения соответствующих

$$\text{переменных в критической точке } p_c, V_c, T_c: p_r = \frac{p}{p_c}, \quad T_r = \frac{T}{T_c}, \quad V_r = \frac{V}{V_c}.$$

Принцип является приближённым, но позволяет просто и достаточно точно ($\partial \leq 20\%$) оценивать плотности газа и жидкости. Точность метода повышается, когда известные свойства одного опорного эталонного вещества используются для вычисления свойств похожих на него веществ. Например, одни уравнения состояния используются для веществ с водородными связями, другие для полярных веществ (вода).

Подход, развитый для уравнений состояний, используется также иногда для вычисления вязкости чистых веществ и растворов. Приведенная вязкость $\mu_r = \mu / \mu_c$, согласно принципу состояния, выражается через приведенные давление и температуру p_r, T_r :

$$\mu_r = f(p_r, T_r),$$

Если точных данных о значении вязкости в критической точке μ_c нет, то она может быть

$$\text{приблизительно вычислена по формуле (Hirschfelder et al, 1954): } \mu_c \approx \frac{p_c^{2/3} M^{1/2}}{T_c^{1/6}}$$

где M -молекулярный вес вещества.

$$\text{Таким образом имеем: } \mu_r(p_r, T_r) \approx \mu(p, T) \frac{T_c^{1/6}}{p_c^{2/3} M^{1/2}}$$

Если функция $\mu_o = f(p_o, T_o)$ известна для одного вещества, такое вещество в дальнейшем называется опорным (величины с индексом "o"), то приведенная вязкость вычисляется по

$$\text{формуле: } \mu_r(p_r, T_r) \approx \mu_o(p_o, T_o) \frac{T_{co}^{1/6}}{p_{co}^{2/3} M_o^{1/2}}$$

Тогда искомая вязкость вещества:

$$\mu_x(p, T) = (T_{cx}/T_{co})^{-1/6} (p_{cx}/p_{co})^{2/3} (M_x/M_o)^{1/2} \cdot \mu_o(p_o, T_o)$$

$$\text{где } p_o = p \frac{p_{co}}{p_{cx}}, \quad T_o = T \frac{T_{co}}{T_{cx}}$$

Принцип соответственных состояний в таком виде дает иногда значительные ошибки ($\partial > 50\%$), поэтому предпринимаются попытки улучшить метод. В данной работе изучаются способы повышения надежности и точности метода.

В качестве опорного вещества для вычисления вязкости углеводородов часто используется хорошо изученный метан. Вязкость газовой и жидкой фазы метана можно вычислить с высокой точностью по формуле (Hanley et al., 1975). Значения вязкости в некоторых диапазонах давлений и температур сильно зависят от плотности, поэтому для вычисления вязкости часто использует УРС BWR, в виде предложенном McCarty,

которое с высокой точностью задает плотность жидкой и газовой фазы (две ветви уравнения, имеющие физический смысл).

Во многих современных гидродинамических симуляторах для вычисления вязкости газовой и жидкой фазы углеводородных растворов используется метод соответственных состояний, предложенный Педерсеном. Для уменьшения средней статистической ошибки на всей базе данных, рассмотренных автором, Педерсен ввела некоторые корректирующие функции и уточнения. Введены два пересчета величин p, T . Сначала вычисляется p_1, T_1 , затем p_o, T_o :

$$p_1 = p \frac{P_{co}}{P_{cm}}; \quad T_1 = T \frac{T_{co}}{T_{cm}}; \quad p_o = p \frac{P_{co} \alpha_o}{P_{cm} \alpha_m}; \quad T_o = T \frac{T_{co} \alpha_o}{T_{cm} \alpha_m};$$

Педерсен ввела некоторые корректирующие функции, зависящие от плотности и молярного веса: $\alpha_m = 1 + 7.378 \cdot 10^{-3} \cdot \rho_r^{1.847} \cdot M_m^{0.5173}$, $\alpha_o = 1 + 7.378 \cdot 10^{-3} \cdot \rho_r^{1.847} \cdot M_o^{0.5173}$

где $\rho_r = \rho_o(p_1, T_1) / \rho_{co}$ - приведенная плотность опорного вещества (например, метана).

А также Педерсен ввела корректирующие функции в формулу для вычисления вязкости опорного вещества. И тем не менее модель Педерсен дает в некоторых важных диапазонах давления и температур значительную ошибку. При расчете вязкости жидкой фазы значения p_o, T_o получаются такие, что опорное вещество уже находится в твердом состоянии, т.е. принцип соответствия нарушается.

В данной работе предлагаются приведенные переменные вводить, учитывая не только значения критических параметров, но также и значения тройных точек p_{tx}, T_{tx} и p_{to}, T_{to} расчетного и опорного вещества. Таким образом, пересчитывать p_o, T_o по следующей формуле:

$$p_o = p_{co} \frac{p - p_{tm}}{p_{cm} - p_{tm}} + p_{to} \frac{p - p_{cm}}{p_{tm} - p_{cm}}$$

$$T_o = T_{co} \frac{T - T_{tm}}{T_{cm} - T_{tm}} + T_{to} \frac{T - T_{cm}}{T_{tm} - T_{cm}},$$

Подобное нахождение точки соответствия позволяет избежать ситуаций когда, например, при расчете жидкого состояния вещества точка оказывается в твердом или газовом состоянии опорного вещества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pedersen, K.S. and Fredenslund, Aa., An improved corresponding states model for the prediction of oil and gas viscosities and thermal conductivities, Chem. Eng. Sci. 42, 182-186, 1987.
2. Pedersen, K.S. and Fredenslund, Aa., Phase behavior of petroleum reservoir fluids, CRC Press, 2006, p.422.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ ИОНИЗУЮЩЕГО ГАЗА В КАНАЛЕ КОАКСИАЛЬНОГО ПЛАЗМЕННОГО УСКОРИТЕЛЯ

В.С. Коновалов¹, А.Н. Козлов¹, Е.В. Колдoba², Д.А. Коробицин², Л.А. Приходько²

¹ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,

² МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, кафедра вычислительной механики

Потребности науки и техники диктуют необходимость дальнейшего изучения динамики потоков ионизующегося газа и плазмы. Соответствующие теоретические, численные и экспериментальные исследования составляют одно из научных направлений и связаны, в частности, с квазистационарными плазменными ускорителями (КСПУ) и магнитоплазменными компрессорами (МПК) [1-3]. Для данных систем речь идет об организации трансзвуковых потоков плазмы, в том числе при наличии дополнительного продольного магнитного поля [4], об изучении приэлектродных процессов, обусловленных эффектом Холла и предшествующих явлению кризиса тока [5], компрессионных потоков, переносе излучения [6], динамике примесей, а также о моделировании процесса ионизации [7,8].

Простейшие плазменные ускорители состоят из двух коаксиальных электродов, подключенных к электрической цепи. В результате пробоя между электродами формируется фронт ионизации, отвечающий фазовому переходу от одного состояния материи к другому. Процессы происходят при наличии основной азимутальной компоненты магнитного поля. Азимутальное поле генерируется электрическим током, проходящим вдоль внутреннего электрода. В свою очередь радиальный плазменный ток, протекающий между электродами, и азимутальное магнитное поле обеспечивают ускорение плазмы за фронтом ионизации благодаря силе Ампера $\frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}$, где \mathbf{j} - ток в плазме. Процесс ионизации и предварительного ускорения плазмы происходит, в частности, в первой ступени двухступенчатого КСПУ [1-3]. Данные многофункциональные системы предназначены для различных технологических приложений и термоядерных исследований, а также представляют интерес для разработки перспективных мощных электрореактивных плазменных двигателей (ЭРПД). Известно, что в обычных ракетных двигателях скорость истечения топлива не превышает 3-5 км/с. В то же время в простейших плазменных ускорителях скорость истечения плазмы более 20-30 км/с. Рекордные значения 400 км/с получены в двухступенчатом КСПУ. Плазменные ускорители являются системами проточного типа, в которых на входе непрерывно подается газ. Топливом в ЭРПД на основе ускорителей может служить любой окружающий газ.

Процесс ионизации газа в каналах КСПУ и МПК относится к малоизученным явлениям, отвечающим переходам от газообразного состояния к плазме с образованием фронта ионизации. Исследование фундаментальных свойств потоков ионизующегося газа проводилось главным образом на основе стационарных, точнее квазистационарных течений, рассчитанных методом установления. Для стационарных течений разработаны также основы теории процессов на фронте ионизации [9].

Ранее течение ионизующегося газа было рассмотрено в рамках квазидномерного приближения (см., например, [2,7,8]) в узкой цилиндрической трубке канала заданного сечения Δr . При этом искомые функции усредняются по поперечному сечению канала и удовлетворяют уравнениям, которые содержат две независимые переменные: время t и пространственную координату z вдоль канала, а также площадь поперечного сечения канала. В экспериментах и на основе квазидномерных моделей наблюдалась стационарные и пульсирующие режимы течения в зависимости от значений разрядного тока и расхода газа. Течение ионизующегося газа характеризуется, с одной стороны, резким возрастанием температуры, скорости и степени ионизации, с другой стороны, резким падением плотности и магнитного поля на фронте ионизации. С помощью квазидномерной модели [8], было установлено, что в процессе ионизации в окрестности фронта происходит последовательный переход скорости потока сначала через газодинамическую скорость звука $V_g = \sqrt{\gamma P / \rho}$, а потом и магнитогазодинамическую скорость $V_s = \sqrt{V_g^2 + H^2 / \rho}$. В стационарных течениях ионизующегося газа переход через V_g происходит в сужающейся части канала ($z < 0.5$), а через V_s в наиболее узкой части канала, отвечающей значению $z = 0.5$. В то же время в нестационарных потоках переход через V_g и V_s происходит в расширяющейся части канала при $z \geq 0.5$. Это, в частности, объясняет возникновение пульсирующих режимов, но не дает исчерпывающего ответа на вопрос о природе нестационарных течений. В результате серии численных экспериментов на основе квазидномерной модели была определена граница перехода от пульсирующих режимов к стационарным течениям ионизующегося газа [8]. Условие стационарности процесса ионизации газа было formalизовано с помощью неравенства:

$$J_p^2 / J_{\dot{m}} > K,$$

где J_p - разрядный ток, $J_{\dot{m}} = e \dot{m} / m_i$ (kA) - расход, выраженный в токовых единицах, а константа K в общем случае зависит от геометрии канала ускорителя.

Данная работа продолжает цикл исследований течений ионизующегося газа. В ней представлены исследования двумерных осесимметричных нестационарных течений ионизующегося газа в приближение локального термодинамического равновесия.

МГД-модель течения ионизующегося газа основана на уравнениях переноса трехкомпонентной среды, состоящей из атомов, ионов и электронов, а также уравнении диффузии магнитного поля, которое следует из уравнений Максвелла и закона Ома при условии пренебрежения инерцией электронов и током смещения. Процесс ионизации исследуется для водорода, часто используемого в экспериментах. Массы атомов и ионов равны $m_a = m_i = m$. Согласно экспериментальным данным, на фронте ионизации температура возрастает до уровня $1 \div 3 \text{ эВ}$. Концентрация газа, поступающего в канал, предполагается достаточно высокой $n = 10^{16} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Учитывая параметры, среда является квазинейтральной $n_i = n_e$. Скорости компонент среды можно считать равными между собой $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_a = \mathbf{V}$. Эксперименты и оценки показывают также, что можно ограничиться случаем однотемпературной смеси. В результате преобразований исходных уравнений с учетом указанных предположений получим следующую модифицированную систему МГД-уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) &= 0; \quad \rho \frac{d \mathbf{V}}{d t} + \nabla P = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}; \quad \rho \frac{d \varepsilon}{d t} + P \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - \operatorname{div} \mathbf{q} - \operatorname{div} \mathbf{W} \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - c \operatorname{rot} \frac{\mathbf{j}}{\sigma}; \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}; \quad \frac{d}{d t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla)\end{aligned}$$

$$P = P_a + P_i + P_e = (1 + \alpha)(c_P - c_V)\rho T; \quad \varepsilon = (1 + \alpha)c_V T + \varepsilon_I; \quad \alpha = \frac{n_e}{n_a + n_i}; \quad \mathbf{q} = -\kappa_{e \rightarrow a} \nabla T; \quad \mathbf{W} = -\kappa_{\text{луч}} \nabla T$$

Здесь $\rho = m(n_a + n_i)$ - плотность тяжелых частиц, α - степень ионизации, \mathbf{q} - тепловой поток, $\kappa_{e \rightarrow a}$ - электрон-атомарная теплопроводность, \mathbf{W} - поток энергии излучения, $\kappa_{\text{луч}}$ - лучистая теплопроводность, P - суммарное давление. В уравнении для внутренней энергии джоулев нагрев $Q_{ei} = \mathbf{j}^2 / \sigma$ существенно превосходит тепло, выделяемое при трении с остальными компонентами. В понятие внутренней энергии на единицу массы ε включается дополнительное слагаемое $\varepsilon_I = \zeta \alpha I / m_i$, ответственное за потери энергии на ионизацию, где I - энергия ионизации атома.

В предположении локального термодинамического равновесия (ЛТР) концентрации всех трех компонент среды и электронной температуры связаны уравнением Саха

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = K_1(T) = \frac{2 \Sigma_i}{\Sigma_a} \left(\frac{m_e k_B T}{2 \pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{I}{k_B T}\right)$$

где Σ_a и Σ_i - статистические суммы атома и иона. Величина K_1 называется константой ионизационного состояния. Данное уравнение по существу означает, что в любом локальном объеме достаточно плотной плазмы с известными значениями температуры и плотности происходит два взаимно уравновешенных процесса: прямой процесс ионизации атома из основного состояния в результате электронного удара и обратный процесс рекомбинации при столкновении иона с электронами $A + e \leftrightarrow A^+ + e + e$. В трехкомпонентной плазме при условии квазинейтральности уравнение Саха определяет состав плазмы. Учитывая, что $n_e = n_i = \alpha n$ и $n_a = n - n_i = (1 - \alpha)n$, где $n = n_a + n_i$, для вычисления степени ионизации имеем соотношение $\alpha = -K_1(T) / 2n + \sqrt{(K_1(T) / 2n)^2 + K_1(T) / n}$.

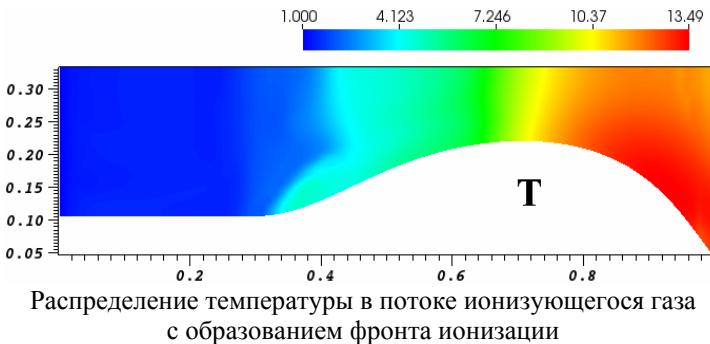
Электропроводность среды в уравнениях равна $\sigma = e^2 n_e / m_e v_e$, где средняя частота столкновений электрона с другими частицами v_e складывается из частот столкновений с атомами и ионами: $v_e = v_{ea} + v_{ei}$, $v_{ea} = n_a \langle V_e \rangle S_{ea}$, $v_{ei} = n_i \langle V_e \rangle S_{ei}$. Здесь S_{ea} , S_{ei} - эффективные сечения столкновений. Основные механизмы теплопередачи зависят от состояния среды. При больших степенях ионизации заметную роль в суммарном теплопереносе играет классическая электронная теплопроводность поперек магнитного поля. При малых степенях ионизации определенный вклад вносит атомарная теплопроводность. Постановка задачи включает граничные условия на эквипотенциальных и непроницаемых электродах, входе и выходе из канала ускорителя.

Исследование потоков ионизующегося газа предполагает учет лучистого теплообмена. Влияние переноса излучения на процесс ионизации в ускорителе рассмотрено с помощью моделей различного уровня сложности [6], включая решение уравнения переноса излучения с различными механизмами уширения спектральных линий. В простейшем случае используется лучистая теплопроводность, ответственная за лучистый теплоперенос в достаточно плотном слабоионизованном газе.

В безразмерных переменных система МГД-уравнений содержит такие безразмерные параметры, как отношение характерного газового давления к магнитному $\beta = 8\pi P_o / H_o^2$ ($P_o = k_B n_o T_o$) и магнитная вязкость ν , обратно пропорциональная магнитному числу Рейнольдса Re_m , $\nu = 1 / Re_m = c^2 / 4\pi L V_o \sigma$. При этом магнитная вязкость ν , содержит величины σ_{10} и σ_{20} , которые выражаются через исходные размезрные параметры и физические константы: $\nu = \frac{1}{Re_m} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}$, $\sigma_1 = \frac{\alpha \sigma_{10}}{(1-\alpha)\sqrt{T}}$, $\sigma_2 = \sigma_{20} T^{3/2}$.

Численная модель двумерных течений ионизующегося газа предполагает расщепление по физическим факторам и координатным направлениям. Для расчета гиперболической части МГД-уравнений используется разностная схема с коррекцией потоков. Магнитная вязкость и теплопроводность учитываются с помощью метода потоковой прогонки.

Для достаточно больших значений разрядного тока наблюдаются стационарные течения ионизующегося газа. Например, для характерных параметров задачи $n_o = 1.0 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $T_o = 2000 \text{ }^{\circ}\text{K}$, $L = 10 \text{ см}$, $J_p = 50 \text{ kA}$ и соответствующих безразмерных параметров $\beta = 0.01$, $\sigma_{10} = 3503.1$, $\sigma_{20} = 0.82$ на рисунке представлено распределение температуры в установившемся потоке ионизующегося газа. Видно, что в окрестности фронта ионизации основные процессы происходят в продольном направлении, включая резкое увеличение температуры. Это подтверждает применимость ранее использованной МГД-модели в квазиодномерном приближении.



Кроме того, при уменьшении разрядного тока происходит переход от стационарного процесса ионизации к пульсирующему режиму течения в соответствие с ранее полученными результатами на основе квазиодномерной модели и представленным выше условием стационарности процесса ионизации газа. Пульсирующие течения ионизующегося газа сопровождаются колебаниями всех величин, но наиболее значительные изменения связаны с температурой и степенью ионизации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований: проекты 13-01-12043-офи-м (рук. – академик В.А.Левин) и 15-01-03085-а (рук. – профессор А.Н.Козлов).

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2008. 613 с.
2. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. 200 с.
3. Брушлинский К.В., Зaborов А.М., Козлов А.Н., Морозов А.И., Савельев В.В. // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 147-157.
4. Козлов А.Н. // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 3. С. 44-55.
5. Козлов А.Н. // Физика плазмы. 2012. Т. 38, № 1. С. 15-25.
6. Kozlov A.N., Garkusha I.E., Konovalov V.S., Novikov V.G. // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics. 2013, No.1. P.128-130.
7. Козлов А.Н. // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 181-188.
8. Брушлинский К.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С. // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55, № 8. С. 1405-1416.
9. Бармин А.А., Козлов А.Н. // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 4. С. 155-167.

**ПСЕВДО-ГАУССОВО РАСПРЕДЕЛЕНИЕ:
ОБРАТИМЫЙ АНАЛОГ РЕАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАДИЕНТОВ СКОРОСТЕЙ
В РАЗВИТОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ**

А.В. Копьев (1), К.П. Зыбин (1, 2)
 (1) Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва
 (2) Высшая школа экономики, Москва

На основании анализа широко известных экспериментальных фактов о статистических свойствах тензора скоростей деформации в развитом турбулентном потоке несжимаемой жидкости и полученных нами интегральных преобразований, связывающих между собой известные ранее функции распределения и введенную нами совместную двухпараметрическую функцию распределения собственных значений тензора, показано, что некоторые статистические свойства потока, считавшиеся ранее кинематическими, являются динамическими, то есть присущи исключительно турбулентному движению жидкости и накладывают серьезные ограничения на исследуемые функции распределения. Показано, что отсюда следует неизвестное ранее существенное отличие распределения скоростей в турбулентном потоке от нормального. Найден аналог нормального распределения – псевдо-гауссово распределение, которое также, как и гауссово отвечает стационарному обратимому процессу, но при этом удовлетворяет характерным результатам эксперимента.

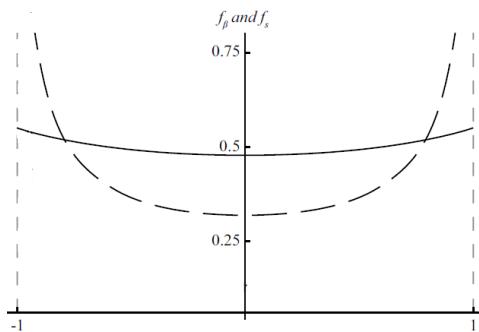


Рис. 1а

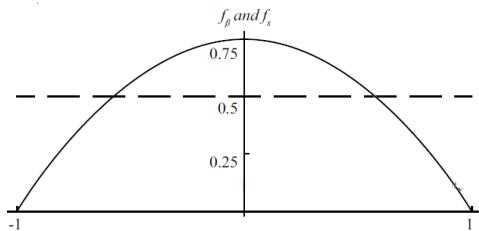


Рис. 1б

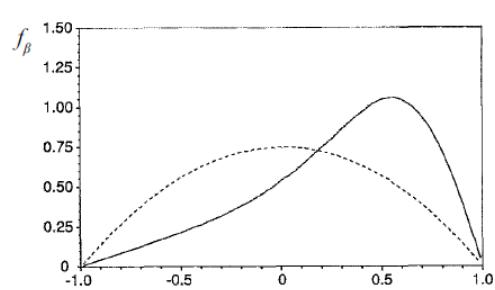


Рис. 2

На рис. 1а представлены функции распределения двух безразмерных параметров турбулентного течения, определенные в статьях [1] и [2], для гауссового распределения (сплошная кривая и пунктирная кривая с пунктирными асимптотами соответственно), а на рис. 1б соответствующие функции распределения для псевдо-гауссового распределения. Для сравнения на рис. 2 изображены соответственные функции распределения по результатам численного моделирования [2] (сплошная кривая на верхнем графике для параметра из [1] и сплошная кривая на нижнем графике для параметра [2]). На ней же приведены функции распределения этих параметров в псевдо-гауссовом случае (пунктирные линии).

Долгое время в ряде статей (см., например, обзор [3]) считалось, что распределения параметров в случае псевдо-гауссовой статистики получаются в гауссовом случае. Как оказалось, это было связано с отсутствием учета якобиана перехода и потерей предэкспоненциального множителя в расчетах. Соответствующий учет был произведен в [4]. Результаты и выводы этой работы и являются предметом доклада.

ЛИТЕРАТУРА.

- [1] W. T. Ashurst et al, *Phys. Fluids*, t. 30(8), pp. 2343-2353.
- [2] T. S. Lund, M. M. Rogers, *Phys. Fluids*, 6(5), pp. 1839-1847.
- [3] C. Meneveau, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 43, pp. 219-245, 24.
- [4] A.V. Kopyev, K.P. Zybin, *Jour. of Turb.*, Under review, Manuscript ID JOT-2015-0101 01-Dec-2015

Механизмы длинноволновой неустойчивости в локализованных трехмерных вихрях и переход к турбулентности

В.Ф. Копьев, С.А. Чернышев

ФГУП «ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского», Московский комплекс, Москва, ул. Радио, 17,
aeroacoustics@tsagi.ru

Рассмотрены механизмы возникновения неустойчивости в исходно устойчивой вихревой структуре при учете слабой неконсервативности с точки зрения баланса энергии в системе. Исследована сдвиговая неустойчивость вихревых колец, которая может оказаться причиной генерации множества нестационарных высокочастотных пульсаций в трехмерных вихрях, перехода к турбулентности, а также главной причиной излучения аэродинамического шума вихревыми структурами. Показано, что неустойчивость такого типа является существенно трехмерной и не может развиваться в двумерных вихрях. Механизм такой неустойчивости сравнивается с другим механизмом, возникающим в слабосжимаемой жидкости за счет уноса энергии из системы на бесконечность звуковыми волнами

К МЕХАНИЗМУ ВОЗДЕЙСТВИЯ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН НА ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕХОД В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

А.Д. Косинов^{1, 2}, Ю.Г. Ермолаев¹, Г.Л. Колесов^{1, 2}, А.В. Панина¹, Н.В. Семенов¹, А.А. Яцких^{1, 2}.

¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

² Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Новосибирский государственный университет, Новосибирск,

E-mail: kosinov@itam.nsc.ru

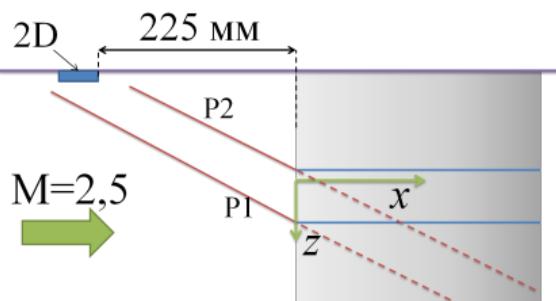
Как известно, сценарий перехода в трехмерных пограничных слоях в значительной степени зависит от уровня возмущений в свободном потоке. Например, в большинстве сверхзвуковых аэродинамических труб существует высокий уровень акустических пульсаций в рабочей части [1, 2], вызывающий возбуждение собственных возмущений пограничного слоя, развитие которых приводит к раннему ламинарно-турбулентному переходу. Исследования по влиянию акустических пульсаций на возникновение турбулентности в сверхзвуковом пограничном слое проводилось в основном для случая плоской пластины или конуса [3, 4]. Кроме акустических пульсаций в рабочей части аэродинамической трубы на модели летательных аппаратов могут воздействовать квазистационарные возмущения в виде слабых ударных волн. Так, в экспериментах [5] обнаружены аномально высокие уровни пульсаций массового расхода (до 20 % от локальной величины среднего массового расхода) в пограничном слое плоского треугольного крыла. Причина возникновения этих высоконтенсивных возмущений можно было связать, либо с воздействием внешней волны Маха на пограничный слой (с возможным образованием локальной зоны отрыва) вдоль линии растекания на скользящей передней кромке крыла, либо с её взаимодействием с боковым головным скачком. Для проверки этого в работе [6] экспериментально исследовалось возбуждение высоконтенсивных возмущений внешней слабой волной в пограничном слое модели дельта-крыла с в несколько раз большим по сравнению с [5] радиусом боковых кромок при числах Маха $M_\infty = 2, 2,5, 4$, что соответствовало дозвуковой, около звуковой и сверхзвуковой передней кромке соответственно. Обнаружено, что максимальная величина пульсаций массового расхода достигает 12–15 % и слабо изменяется от условий обтекания дельта-крыла. Таким образом, эффект от взаимодействия падающей внешней слабой волны с боковым головным скачком может быть несущественным.

Поскольку подтвержденным фактом возбуждения высоконтенсивных пульсаций внешними волнами Маха являются только результаты, представленные в [5, 6], необходимо детально исследовать и другие актуальные случаи. Наиболее простой – соответствует обтеканию плоской пластины сверхзвуковым потоком. В экспериментах [7-9] использованы модели плоских пластин с острой и затупленной передними кромками при $M=2,5$. Получено, что на затупленной пластине интенсивность порождения пульсаций внешними волнами Маха в несколько раз выше, чем на модели с острой передней кромкой. В данной работе получены новые результаты в пограничном слое затупленной пластины с использованием термоанемометрии и пневмометрии при $M=2,5$.

Постановка экспериментов

Эксперименты выполнены в сверхзвуковой малотурбулентной аэродинамической трубе Т-325 Института теоретической и прикладной механики СО РАН при числе Маха $M_\infty = 2,5$ и единичном числе Рейнольдса $Re_1=5\times 10^6 \text{ м}^{-1}$. В измерениях использовалась модель плоской пластины, которая имела цилиндрическую переднюю кромку с радиусом притупления 2,5 мм. Для создания пары слабых волн использовалась неоднородность (наклейка) на поверхности боковой стенки рабочей части в виде плоского выступа/уступа вверх по потоку от модели. Примерные размеры наклейки были: толщина 0,13 мм, ширина 15 мм и длина около 150 мм. В этом случае в поток вводилась пара квазистационарных волн конечной амплитуды, порождаемых передним и задним краями 2D неоднородности поверхности [6], как показано на рисунке.

Для измерения пульсаций и характеристик среднего течения использовался термоанемометр постоянного сопротивления. Датчики термоанемометра изготавливались из вольфрамовой нити диаметром

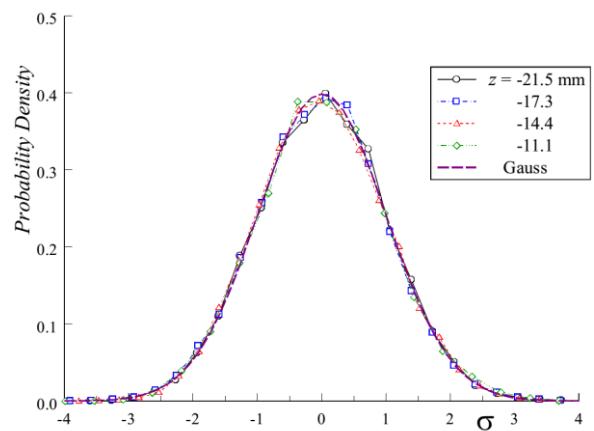
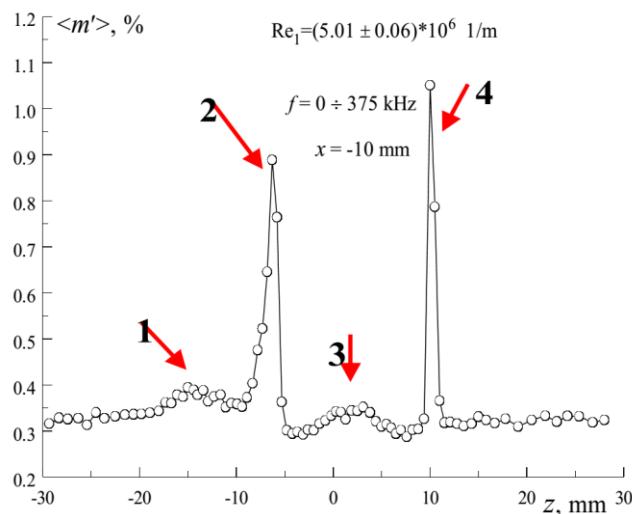


10 мкм и длиной около 1,5 мм. Величина перегрева нити датчика устанавливалась 0,8, а измеренные возмущения на 95 % состояли из пульсаций массового расхода. Измерения пульсационных и средних характеристик потока проводились автоматизированной измерительной системой. С помощью термоанемометра были измерены значения среднего напряжения E и осциллограммы пульсационного сигнала $e'(t)$, которые позволили получить данные о средней величине массового расхода и его пульсаций в каждой точке измерения. Для определения частотных спектров возмущений

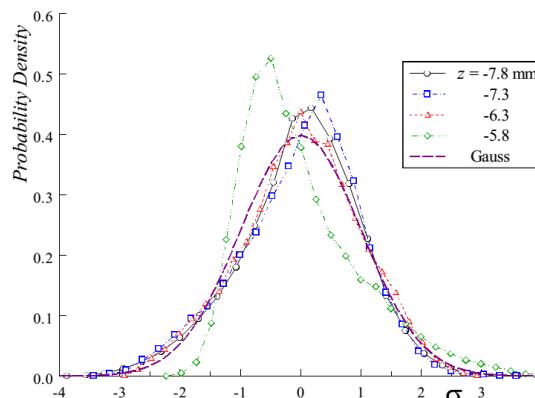
использовалось дискретное преобразование Фурье. С помощью трубы Престона измерены распределения давления по поверхности модели. Для перемещения датчиков по пространству использовался координатник АДТ-325 [6].

Результаты и их анализ

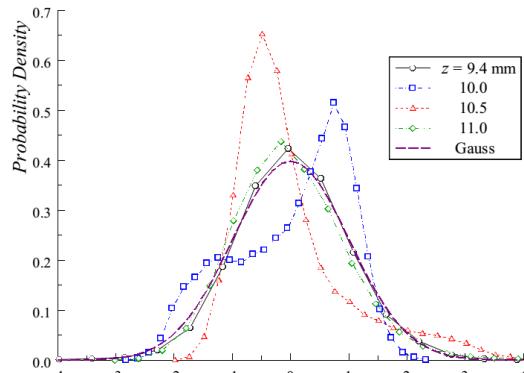
Согласно результатам [10] пульсации сверхзвукового потока в рабочей части Т-325 имеют нормальное распределение для амплитуды, что соответствует их не взаимодействию в свободном потоке. Порождаемые двумерной неоднородностью возмущения в свободном потоке имеют локальные нелинейные свойства, которые характеризуются разной степенью отклонения распределений амплитуды от нормального закона. Это иллюстрируется следующими данными измерений в свободном потоке при $x = -10$ mm от передней кромки. Здесь острые пики в распределении по z – возмущения потока в окрестности слабых косых скачков, порожденных неоднородностью поверхности на стенке.



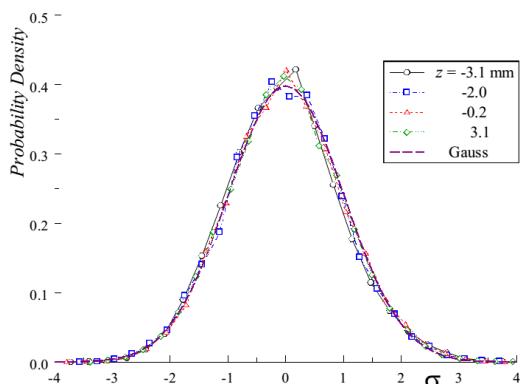
Распределения плотности вероятности приведены для области 1.



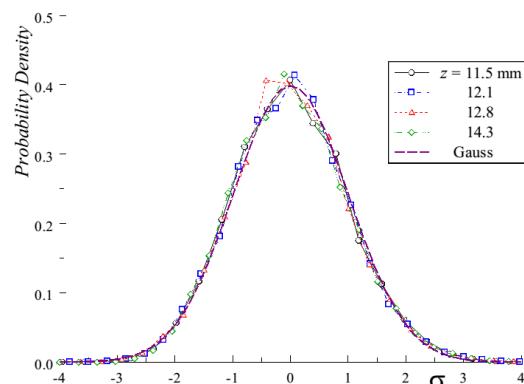
Распределения плотности вероятности приведены для области 2.



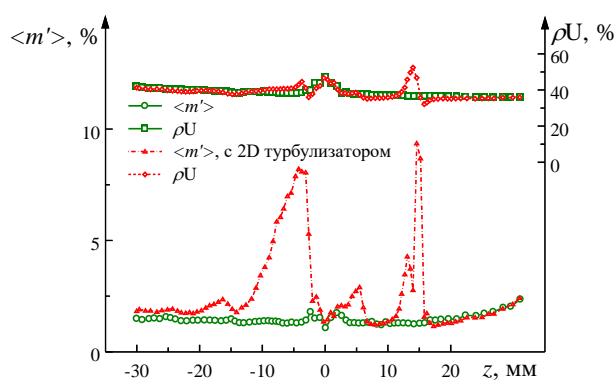
Распределения плотности вероятности приведены для области 4.



Распределения плотности вероятности приведены для области 3.



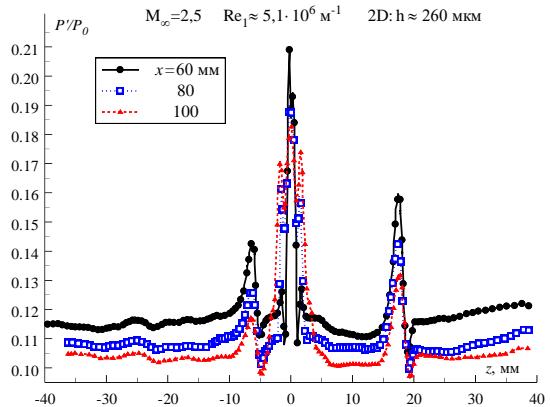
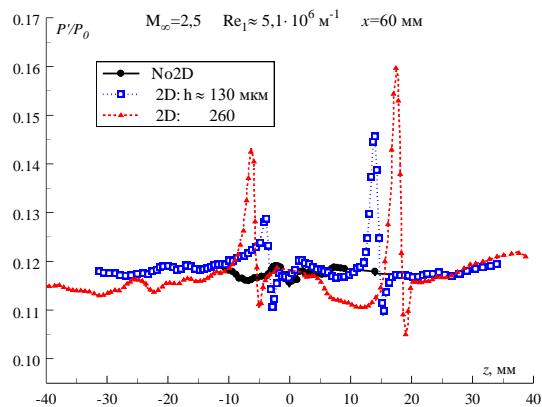
Таким образом, количественно исследовано поле излучения от двухмерной неоднородности, установленной на боковой стенке рабочей части аэродинамической трубы. Лента шириной 15 мм и толщиной 0,13 мм наклеивалась вверх по потоку от передней кромки пластины. (По условиям экспериментов пограничный слой на боковой стенке был турбулентным и толщиной около 12 мм). Измерения выполнены в свободном потоке перед передней кромкой модели на расстоянии -10 мм. Результаты измерений представлены на рисунке в виде зависимостей пульсаций массового расхода $\langle m' \rangle$ от поперечной координаты z . Максимум в пульсационном сигнале при $z=10$ мм соответствует волне от переднего уступа двухмерной неоднородности. Оба края наклейки увеличивают уровень пульсаций в свободном потоке, однако интенсивность пульсаций от неоднородности типа «выступ» приблизительно в 1,3 раза выше, чем от заднего края («уступ»). По распределениям $\rho U(z)$ излучение от наклейки напоминает известную N волну [8, 9], амплитуда которой $\pm 3\%$ относительно среднего массового расхода.



Результаты измерений в пограничном слое плоской пластины с затупленной передней кромкой при $M=2,5$ ($x=60$ мм, $y=0,6$ мм) представлены на данном рисунке. Область возмущенного течения по пульсациям содержит два интенсивных пика, амплитуда которых достигает приблизительно 8–10 %. При сравнении статистических диаграмм для возмущенного внешними слабыми волнами пограничного слоя и не возмущенного пограничного слоя обнаружено, что внешние волны Маха приводят к появлению дополнительной области нелинейности пульсаций, а в спектрах – к возбуждению низкочастотных возмущений. Дефект среднего течения в поперечном направлении указывает на

существование пары вихрей в пограничном слое, в окрестности которых и сосредоточены максимумы пульсаций. Вопрос о том связана ли нелинейность внешних возмущений и возмущений в пограничном слое пока остаётся открытым. Рассмотрим, каким образом такие возмущения влияют на поверхностное трение.

Распределения давления на поверхности модели, полученные в измерениях трубкой Престона при двух разных толщинах наклеек (и без них, т.е. при разной интенсивности слабых ударных волн) на боковой стенке рабочей части фактически характеризуют величину трения на стенке. Обнаружено, что в области измерения от 60 до 100 мм вниз по потоку течение в пограничном слое остается ламинарным, несмотря на наличие стационарных вихрей и их существенного влияния на трение. Для сравнения величины полученного эффекта справа на рисунке приведены распределения давления характерных для структуры вихрей и слабой спутной затупленной струи в пограничном слое, которая вдувалась неконтролируемо (но намеренно!) в пограничный слой из отверстия диаметром 0,42 мм в поверхности модели при $z=0$ и $x=35$ мм. Эти данные подтверждают одну из особенностей эволюции порождаемых возмущений, отмеченных в работах [6 – 9]: их не расплывание по перечной координате вниз по потоку. Подтверждение этих результатов получено в данной работе для более интенсивной внешней пары волн. Видно, что ширина области стационарных возмущений (и само распределение), порожденных внешними волнами, не зависит от продольной координаты. Более сложный характер распределения имеет спутная струя, которое изменяется вниз по потоку. Расплывания возмущений с увеличением расстояния от передней кромки (характерного для волновых пакетов) не зафиксировано.



Таким образом, в ряде экспериментов при обтекании сверхзвуковым потоком различных моделей с внешними слабыми ударными волнами обнаруживается ряд общих явлений в пограничном слое.

В заключение в докладе дается сравнительный анализ особенностей воздействия пары слабых ударных волн на течение в сверхзвуковом пограничном слое различных моделей по результатам [5 – 9].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00743).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Laufer J. // Aerospase Sci., 1961, V. 28, № 9, P. 685-692.
2. Kendall J.M. // AIAA J., 1975, V. 13, N 3, P. 290-299.
3. Косинов А.Д., Маслов А.А., Семенов Н.В. // ПМТФ, 1997, Т.38, №.1, С. 53-57.
4. Schneider S.P. // J. of Spacecraft and Rockets, 2001, V. 38, N 3, P. 323-333.
5. Ваганов А.В. Ермоляев Ю.Г. Косинов А.Д. Семенов Н.В., Шалаев В.И. Экспериментальное исследование структуры течения и перехода в пограничном слое треугольного крыла с затупленными передними кромками при числах Maxa 2, 2,5 и 4. // Труды МФТИ . – 2013.- Т.5, №3. - С. 164-173.
6. Ваганов А.В., Ермоляев Ю.Г., Колосов Г.Л., Косинов А.Д., Панина А.В., Семёнов Н.В. О воздействии падающей волны маха на поле пульсаций в пограничном слое при обтекании плоского дельта-крыла // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Физика. 2014. Т. 9. № 1. С. 29-38.
7. А.В. Ваганов, Ю.Г. Ермоляев, Г.Л. Колосов, А.Д. Косинов, А.В. Панина, Н.В. Семенов, А.А. Яцких. К воздействию падающей волны Maxa на сверхзвуковой пограничный слой // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23. № 1. (в печати)
8. Косинов А.Д., Панина А.В., Ваганов А.В. О воздействии падающей волны маха на переход в сверхзвуковом пограничном слое // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 20 – 24 авг. 2015 г.):[сборник трудов]. -Казань, 2015. -С. 1998-2000.- CD-ROM.
9. Kosinov A.D., Kolosov G.L., Panina A.V., Semionov N.V. On the effect of weak shock waves on the pulsations and flow in supersonic boundary layer // Book of abstracts 11th ERCOFTAC SIG33 Workshop Progress in Transition Modelling and Control St Helier, Jersey, April 15-17, 2015.
10. Семисынов А.И., Косинов А.Д. Применение спектров высокого порядка и статистических методов для изучения нелинейной стадии перехода в сверхзвуковом пограничном слое// Препринт/Институт теоретической и прикладной механики СО РАН. Новосибирск.2002.

О влиянии геометрии змеевика на гидравлическое сопротивление трубы

Б.И. Краснопольский¹, В.П. Парамонов², Н.В. Никитин¹

¹Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

²Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Змеевики, или спирально изогнутые трубы с кривизной и кручением, являются простым и эффективным теплообменным устройством, что обуславливает их активное использование в различных технических изделиях и установках. При проектировании таких устройств зачастую используются инженерные методики, основанные на эмпирических законах сопротивления и теплообмена как функциях геометрических параметров трубы. Хотя эти формулы подробно откалиброваны по экспериментальным данным, они не позволяют получить информацию о локальных характеристиках и структуре течения в трубе.

Для численного исследования структуры течения вязкой несжимаемой жидкости в змеевиках реализован вычислительный алгоритм, основанный на конечно-разностном методе второго порядка по пространству и 3 ½-шаговой схеме третьего порядка интегрирования по времени [1]. Расчет проводится в спиральной ортогональной системе координат [2]. Вдоль трубы используется условие периодичности, расход поддерживается постоянным. Течение предполагается однородным вдоль трубы, благодаря чему в этом направлении возможно использовать расчетную область размером в одну ячейку. По другим координатам в результате методических расчетов была выбрана неравномерная по радиусу сетка размером 64x128 ячеек со сгущением у стенки трубы. Для рассмотренного диапазона определяющих параметров такая сетка обеспечивает точность интегральных характеристик в пределах 0.1%.

Численно получены законы сопротивления для четырех различных труб, конфигурации которых приведены в табл. 1. Здесь первый набор параметров соответствует прямой трубе, второй соответствует тору, а третий и четвертый — змеевику с малым и большим шагом спирали. Полученные законы сопротивления представлены на рис. 1. Для исследованных труб также приведены эмпирические законы, известные в литературе. В [3] для ламинарного режима течения был предложен закон сопротивления в виде:

$$f_c = \frac{344 (D_{coil}/d)^{-0.5}}{\left(1.56 + \log_{10} \left(Re (D_{coil}/d)^{-0.5}\right)\right)^{5.73}},$$

$$13.5 \left(\frac{D_{coil}}{d}\right)^{0.5} < Re < 2000 \left(1 + 13.2 \left(\frac{D_{coil}}{d}\right)^{-0.6}\right).$$

Здесь d — диаметр трубы, D_{coil} — диаметр винтовой образующей змеевика, Re — число Рейнольдса, определенное по средней скорости жидкости и диаметру трубы d . Показано, что эмпирические законы достаточно хорошо описывают рассмотренные интегральные параметры, а максимальное отличие наблюдается для малых чисел Рейнольдса и составляет порядка 3%. Различия интегральных характеристик для тора и змеевика с одинаковой кривизной малы, что позволяет на практике использовать течение в торе как упрощенную модель для описания течения в змеевике. По мере увеличения шага змеевика гидравлическое сопротивление трубы уменьшается и приближается к результатам, соответствующим прямой трубе.

Изолинии продольной компоненты скорости в поперечном сечении трубы (рис. 2) иллюстрируют близость структуры основного течения для тора и змеевика с малым кручением. Появляющаяся для змеевика асимметрия течения настолько незначительна, что различить ее на данном графике не представляется возможным. При увеличении шага змеевика (рис. 2.г) изменяется распределение продольной компоненты скорости жидкости: на 10% увеличивается максимальная скорость в ядре потока и в полтора раза уменьшается скорость вторичных течений. Выделение более явно выраженного ядра потока

приближает течение к течению в прямой трубе, что и отражается на поведении интегральных характеристик.

Дальнейшие исследования планируется посвятить анализу законов теплообмена для течений в змеевиках, а также оценке условий применимости имеющихся эмпирических формул.

Литература

1. N. Nikitin. Finite-difference method for incompressible Navier–Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // *Journal of Computational Physics*, 217 (2006). P. 759-781.
2. M.M. Germano. The Dean equations extended to a helical pipe flow // *Journal of Fluid Mechanics*, 203 (1989). P. 289-305.
3. H. Ito. Friction factors for turbulent flow in curved pipes // *J Basic Engineering*, 81 (1959). P. 123-134.

Таблица 1. Параметры труб, принятых в расчетах.

#	Радиус змеевика	Шаг змеевика	Кривизна, κ	Кручение, τ	Тип трубы
1	-	-	-	-	Straight pipe
2	5	0	0.2	0	Torus
3	5	6	0.193	0.0369	Coil 1
4	5	60	0.043	0.0822	Coil 2

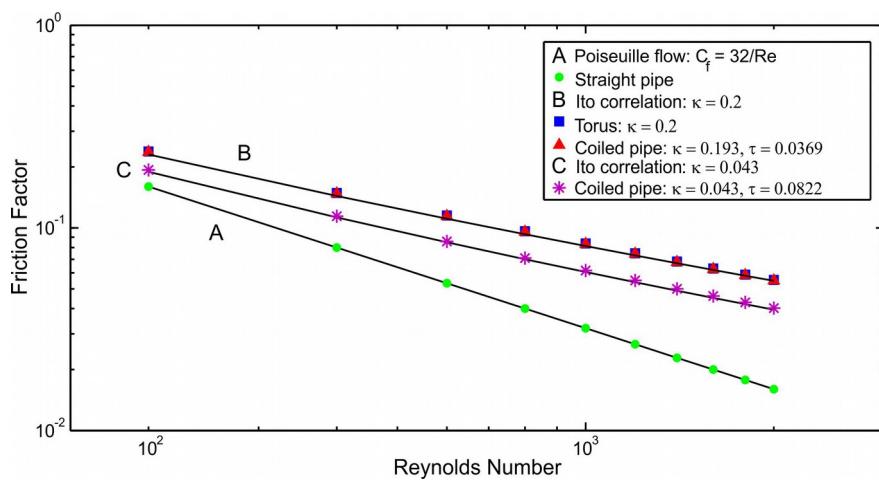


Рис. 1. Зависимость гидравлического сопротивления трубы от числа Рейнольдса.

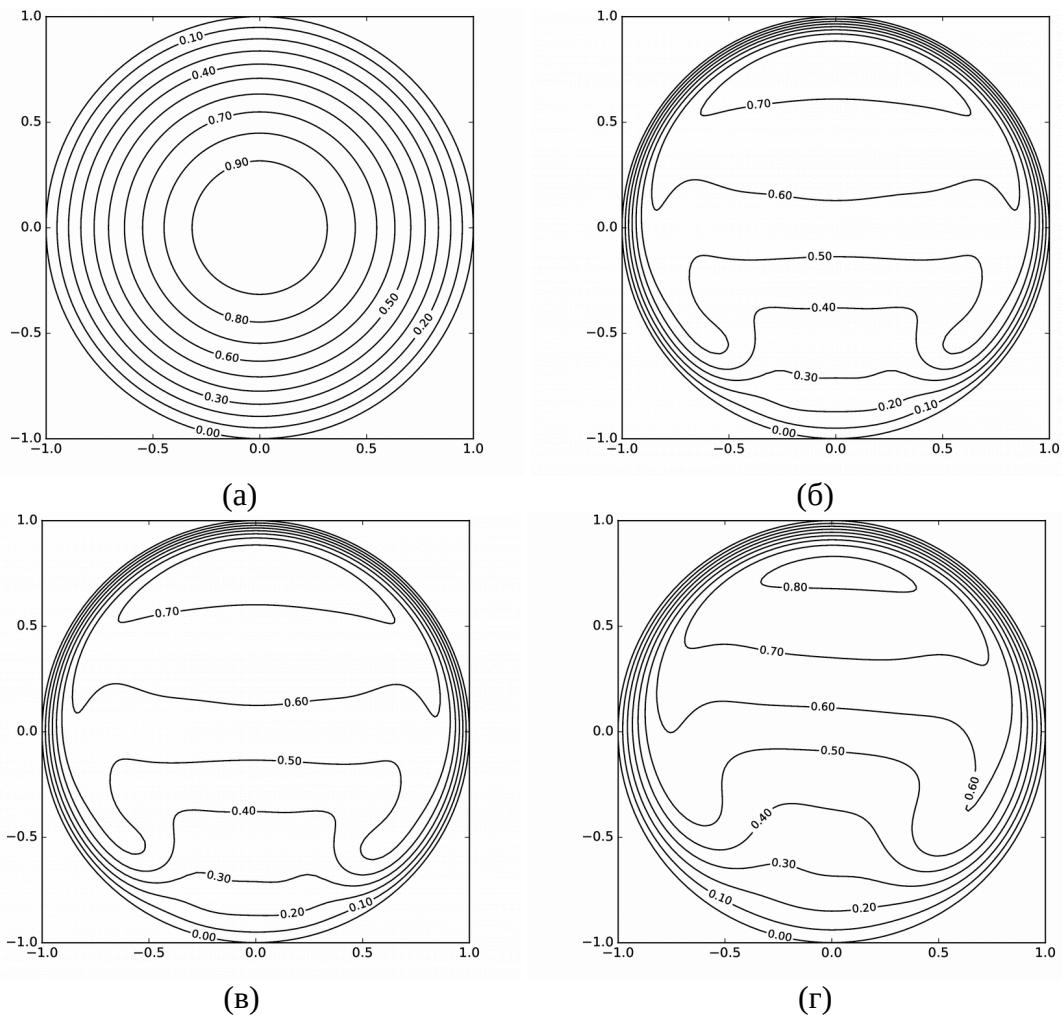


Рис. 2. Изолинии продольной компоненты скорости в поперечном сечении трубы, $Re = 2000$: (а) прямая труба, #1; (б) тор, #2; (в) змеевик, #3; (г) змеевик, #4.

ВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ МГНОВЕННОЙ РАЗНОСТИ ФАЗ

О.Э. Кривоносова, Д.Ю. Жиленко
Институт механики МГУ, Москва

Рассматриваются нестационарные осесимметричные течения вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое, формирующиеся при периодической модуляции скорости вращения одной из границ. Волновые структуры таких течений исследуются методом, основанным на определении мгновенной разности фаз между скоростью сферы и азимутальной скоростью в каждой точке течения с использованием преобразования Гильберта. Применение метода позволяет определить волновую структуру течения путем построения волновых поверхностей, вдоль которых колебания происходят в одной фазе, и определения положения узлов, точек в которых одна из компонент скорости всегда равна нулю.

1. В настоящее время повышается интерес к системам с неравномерным вращением в геофизике и астрофизике. Основное внимание уделяется инерционным волнам, формирующими в сферических слоях при больших величинах средней скорости вращения сферических границ. Вместе с тем, формирование волновых структур, в том числе и отличных от инерционных волн, происходит при любых скоростях вращения и любых, отличных от нуля, амплитудах модуляции. Цель настоящей работы – разработка и применение метода, позволяющего рассматривать эволюцию волновых структур, от затухающих волн до стоячих волн, при увеличении скорости вращения и амплитуды модуляции. Метод основан на расчете мгновенных фаз колеблющейся границы $\Psi_s(t)$ и азимутальной компоненты скорости в каждой точке слоя $\Psi(t,r,\theta)$ и их разности $\Delta\Psi(t,r,\theta) = \Psi_s(t) - \Psi(t,r,\theta)$. Мгновенное значение фазы $\Psi(t)$ произвольного вещественного сигнала $x(t)$ определяется как $\Psi(t) = \arctg(y(t)/x(t))$, где $y(t)$ ортогональное дополнение к $x(t)$, и вычисляется как преобразование Гильберта исходного сигнала $x(t)$.

2. Изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости в сферическом зазоре описывается уравнениями Навье-Стокса и неразрывности, с условиями прилипания и непротекания на границах. Для расчета течения использовался вычислительный алгоритм с консервативной конечно-разностной схемой схемой дискретизации по пространству и полуяевской схемой 3-ого порядка точности для интегрирования по времени [1]. Скорость вращения одной из границ изменялась по закону $\Omega_k(t) = \Omega_0 + a_k \sin(2\pi f_k t)$. Здесь a_k и f_k – амплитуда и частота модуляции. В качестве безразмерных параметров, учитывающих амплитуду и частоту модуляции, выбраны относительная толщина динамического пограничного слоя $\delta/r_1 = 1/r_1 \sqrt{2\nu/2\pi f_1}$ и максимальный угол отклонения колеблющейся границы относительно среднего движения $\gamma = a_k/2\pi f_k$ [2].

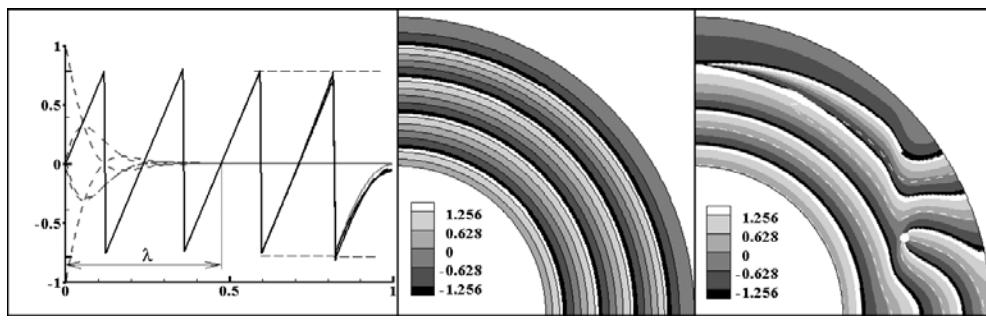


Рис.1 Волны, вызванные колебаниями внутренней сферы относительно состояния покоя. *а* – зависимость $\Delta\Psi$ (сплошные линии) и нормированной азимутальной компоненты скорости (пунктирные линии) от безразмерного радиуса в разные моменты времени; волновые поверхности: *б* – затухающей бегущей волны, *в* – “стоячей волны”.

В качестве тестовых исследованы течения, формирующиеся при колебаниях одной из границ относительно состояния покоя. В этом случае при небольших амплитудах модуляции поверхности равных фаз в меридиональной плоскости (Рис.1б) представляют собой концентрические окружности с периодически повторяющимися значениями, что соответствует затухающей бегущей сферической волне. Установлено, что длина такой сферической волны совпадает с аналогичной величиной, полученной аналитически Шлихтингом для одномерной волны, вызванной колебаниями плоской стенки. Причем $\Delta\Psi$ не зависит от времени (Рис.1а). На внутренней границе $\Delta\Psi=0$ и линейно возрастает вдоль радиуса. Скачки $\Delta\Psi$ на величину π происходят два раза за период модуляции в тех точках, в которых азимутальная скорость в моменты наибольшего отклонения сферы равна нулю (Рис.1а). С увеличением амплитуды модуляции бегущая волна сменяется вынужденными колебаниями на частоте вынуждающей силы, появляются узлы (белая точка на Рис.1в), характерные для стоячих волн, и скачки фазы вдоль неподвижной границы (Рис.1в).

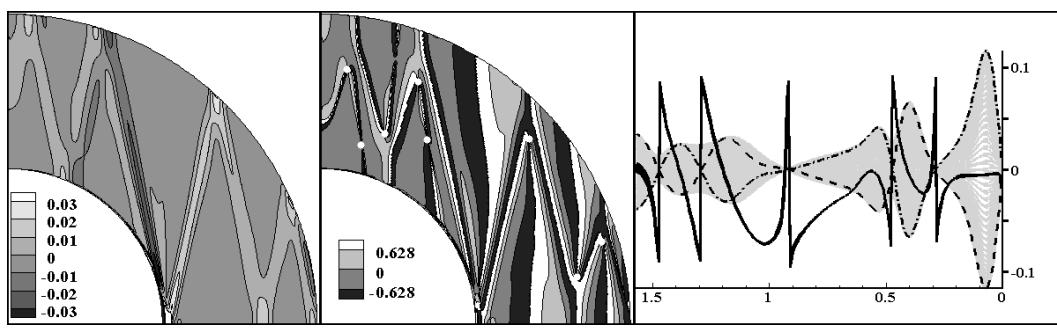


Рис.2. Инерционные волны при $Re=10^5$. *а* и *б* – контуры азимутальной скорости и $\Delta\Psi$ в меридиональной плоскости течения (*а* – при нулевом отклонении сферы в момент разгона). *в* – зависимость от меридионального угла по направлению от экватора к полюсу вблизи внутренней границы в разные моменты времени нормированной волновой составляющей азимутальной скорости (пунктирные линии – в моменты наибольшего отклонения сферы, серым цветом показана область изменения за период) и разности мгновенных фаз $\Delta\Psi$ (черные линии при наибольших и нулевых отклонениях сферы).

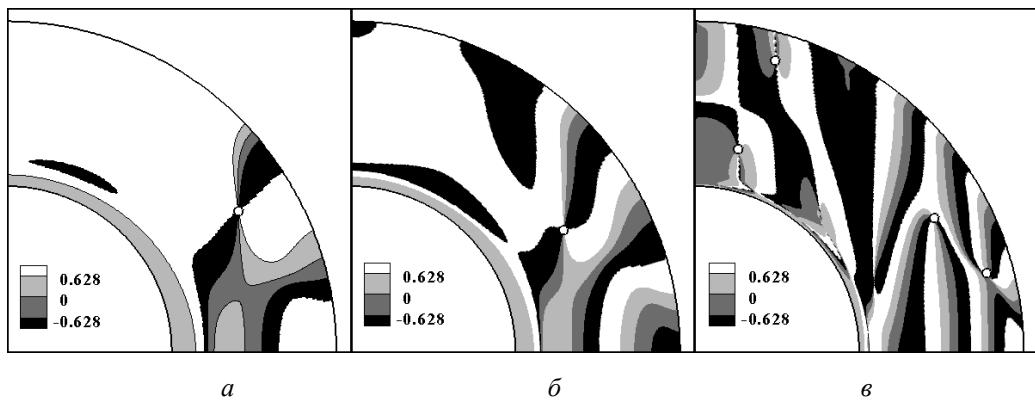


Рис. 3 Поверхности $\Delta\Psi$: *а* – $Re_1 = 202.5$, *б* - $Re_1 = 405$, *в* - $Re_1 = 4050$.

При большой средней скорости вращения границ $Re > 10^4$ модуляция скорости вращения одной из них приводит к появлению инерционных волн (Рис.2), концентрирующихся вокруг конических поверхностей, которые наклонены к оси вращения под углом, зависящим только от отношения частоты модуляции к средней скорости вращения сферического слоя. Такие волны характеризуются пересечением

волновых поверхностей, наличием узлов (белые точки на Рис.2б), являющихся результатом взаимодействия бегущих и отраженных волн, и немонотонным изменением разности фаз вдоль сферических границ. Рассмотрим, каким образом меняется волновая структура при средней скорости вращения сферических границ $10^4 > Re > 200$ в случае равных относительных амплитуд и частот модуляции (рис. 3). При малых Re (Рис.3а) вблизи внутренней сферы зависимость величины разности фаз от меридионального угла монотонна, в то время как вблизи внешней сферы наблюдаются скачки (черно-белые переходы на рисунке Рис.3а). С увеличением Re появляются узлы, скачки разности фаз приближаются к поверхности внутренней сферы (Рис.3б), в волновой структуре появляется характерный для инерционных волн угол наклона к оси вращения (Рис.3в).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 14-08-00204.

ЛИТЕРАТУРА.

1. N. Nikitin, J. Comp. Phys., 217, 2, 759 (2006).
2. Д.Ю. Жиленко, О.Э.Кривоносова, Докл. РАН, т.464, №4, 417 (2015).

УДК 517.956.35

**Численное моделирование многофазных течений через трубы с переменным
поперечным сечением**

М.В. Куропаткин¹, П.Е. Спесивцев²

¹Московский физико-технический институт (государственный университет)

²Московский научно-исследовательский центр «Шлюмберже»

Моделирование многофазных течений в трубах носит важный прикладной характер в нефте-газовой отрасли. В частности, рассматриваются течения через штуцер, который представляет собой локальное сужение в трубопроводе. Штуцер широко используется для контроля расхода скважины и поддержания стабильного давления на входе в штуцер. При многофазном течении через штуцер может формироваться как критический так и докритический режимы течения. Во время критического режима расход через штуцер достигает своего максимального значения, а скорость фаз в узком сечении достигает скорости звука. В этом режиме уменьшение давления на выходе из штуцера не приводит к изменению давления на входе и общего расхода скважины.

В настоящее время для математического описания многофазных течений через штуцер существует несколько моделей [1-3]. Целью данной работы является внедрение аналитической модели штуцера в существующий прототип симулятора многофазных течений в скважинах и трубопроводах, основанный на модели Дрейфа [4]. Модель Дрейфа основана на упрощенном описании многофазного течения с помощью системы частных дифференциальных уравнений: одно уравнение закона сохранения импульса записанного для смеси в целом, законы сохранения массы для фаз и алгебраические соотношения, связывающие скорости фаз. Для определения всех неизвестных характеристик течения в скважине используется алгоритм SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations, частично неявный метод для уравнений со связью по давлению) [5].

Первая часть исследования касалась докритической модели штуцера, которая хорошо описывает дозвуковые течения и выведена в предположении о несжимаемости

жидкости. Как показано на Рис. 1, штуцер создает дополнительный перепад давления, влияющий на распределение давления вдоль всей скважины

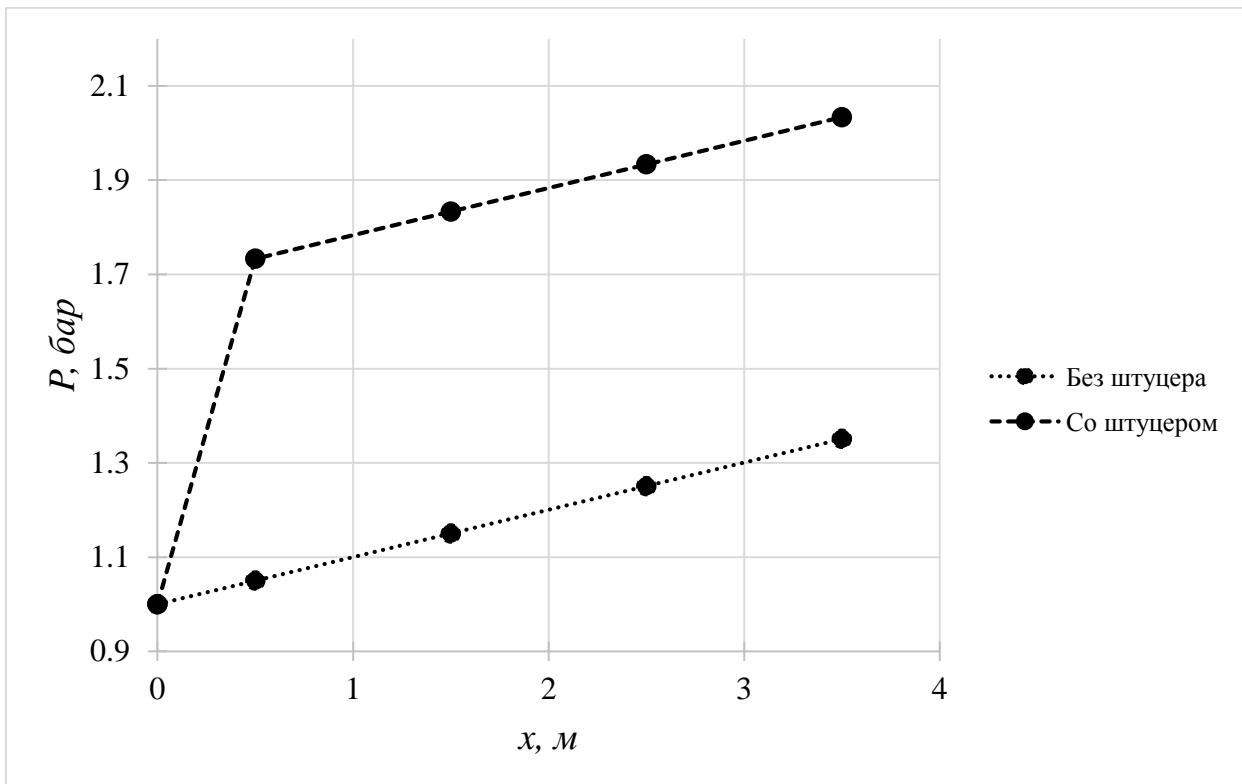


Рис. 1. Распределение давления вдоль скважины с учетом перепада давления, вызванного наличием штуцера и без учета этого перепада.

Вторая часть исследования заключалась в численном внедрении модели штуцера, позволяющей описать как критический так и докритический режимы течения. Внедренная модель основана на [1] и позволяет независимо определять режим течения и описывать плавный переход от одного режима к другому.

$$y_c = \left(\frac{N}{D} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

где y_c - критическое отношение давлений, при котором происходит переход от одного режима течения к другому; N - числитель; D - знаменатель; k - отношение теплоемкостей

газа $\frac{C_p}{C_v}$;

$$N = \frac{k}{k-1} + \frac{(1-X_1)\rho_{g_1}(1-y)}{X_1\rho_L}$$

1 - индекс переменных, отвечающих за значения на входе в штуцер, 2 - индекс переменных, отвечающих за значения на выходе из штуцера; X - массовая доля газа; ρ_g - плотность газа; ρ_L - плотность жидкости;

$$D = \frac{k}{k-1} + \frac{n}{2} + \frac{n(1-X_1)\rho_{g_0}}{X_1\rho_L} + \frac{n}{2} \left[\frac{(1-X_1)\rho_{g_0}}{X_1\rho_L} \right]^2,$$

где $\rho_{g_0} = \rho_{g_1}y^{\frac{1}{k}}$; n - показатель политропы, который находится по формуле:

$$n = 1 + \frac{X_1(C_p - C_v)}{X_1C_v + (1-X_1)C_L},$$

где C_L - теплоемкость жидкости.

Проведен тестовый расчет для однофазного течения сжимаемого газа. Как показано на Рис. 2, в этом расчете явно видна граница перехода от критического к докритическому режиму течения через штуцер.

Данные модели имеют ряд допущений, такие как отсутствие трения и равенство фазовых скоростей. В будущей работе влияние этих допущений на модель будет оценено.

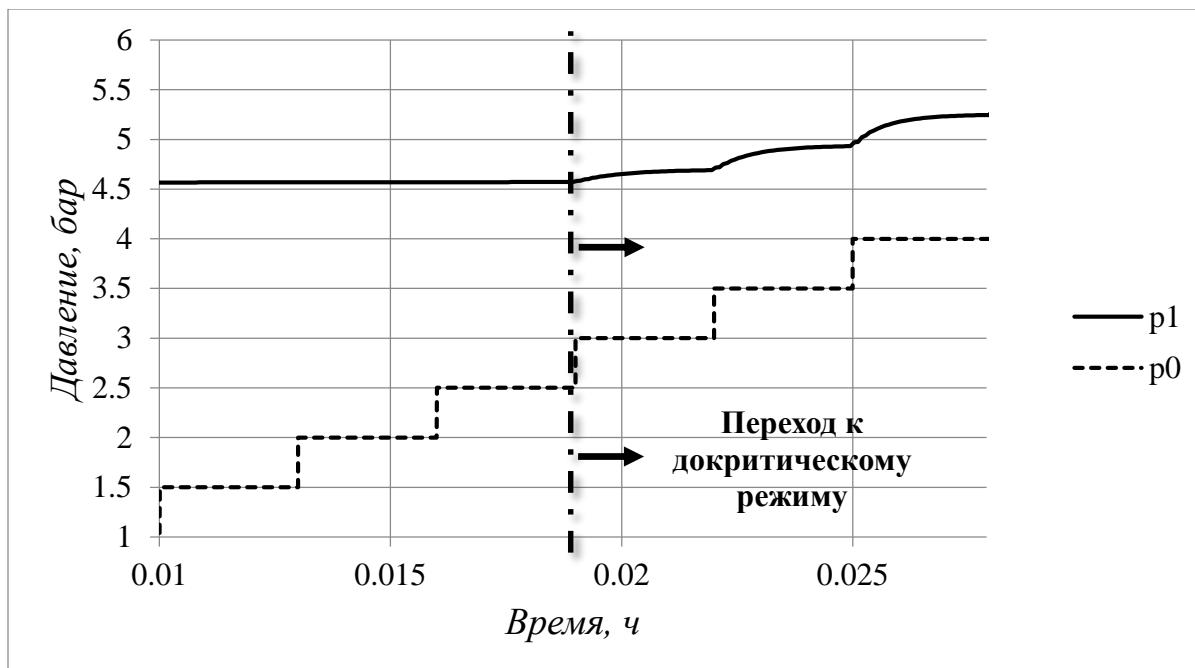


Рис. 2. Давление газа на входе в штуцер и на выходе из него с течением времени. p_0 – давление на выходе из штуцера, p_1 – давление на входе в штуцер.

Литература

1. Sachdeva R. [et al.] Two-phase flow through the chokes, 1986.
2. Selmer-Olsen S., Holm H. Subsea chokes as multiphase flowmeters, 1995.
3. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям.
4. Shi H. [et al.] Drift-flux modeling of multiphase flow in wellbores.- SPE 84228, 2003.
5. Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. –London: Hemisphere publishing, 1980.

Исследование устойчивости распространения волны газовой детонации в двух постановках

А.И. Лопато, П.С. Уткин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации проектирования Российской академии наук
Московский физико-технический институт

Если в реагирующей газовой смеси тем или иным способом обеспечить формирование и распространение сильной ударной волны (УВ), то за ее фронтом может начаться протекание химических реакций, если температура достаточно велика. В случае, когда энерговыделение за фронтом лидирующей волны (ЛВ) достаточно для поддержания ее интенсивности, формируется самоподдерживающийся комплекс ЛВ – зона химических реакций, который называется детонационной волной (ДВ).

Цель работы – численное исследование различных режимов распространения пульсирующей ДВ (устойчивый, слабо неустойчивый, нерегулярный и сильно неустойчивый) в двух постановках – моделирование в лабораторной системе координат с инициированием детонации у закрытого конца канала и моделирование в системе координат, связанной с лидирующим скачком – и сопоставление полученных результатов.

Математическая модель основана на одномерной системе нестационарных уравнений Эйлера, дополненной одностадийной моделью кинетики химической реакции Аррениуса. При приведении определяющей системы уравнений к безразмерному виду использовалась идеология [1]. В качестве характерных масштабов плотности и давления выбирались параметры перед фронтом ДВ. Масштаб длины выбирался равным расстоянию за фронтом ДВ, на котором в решении Зельдовича-Неймана-Деринга (ЗНД) массовая доля реагента уменьшается до $1/2$. В выбранных единицах физико-химические свойства реагирующей смеси полностью определяются заданием трех безразмерных параметров – показателя адиабаты γ , теплового эффекта Q и энергии активации E .

Рассматривались две различные постановки одной и той же задачи о распространении ДВ. В первой распространение ДВ изучается в лабораторной системе координат (x, t) . В начальный момент времени канал длиной L , заполненный покоящейся реагирующей смесью, разделен на две части. В левой, относительно короткой части заключен газ с повышенными значениями давления и температуры. Подобным образом моделируется мгновенное действие электрического разряда для инициирования детонации. В правой части канала находится газ при нормальных условиях. На обеих границах расчетной области выставляются условия непротекания. Используется равномерная расчетная сетка с

числом ячеек N . Во второй постановке моделирование проводилось в системе координат (ξ, τ) , связанной с лидирующим скачком. При переходе в новую систему координат в уравнениях начинает фигурировать априори неизвестная скорость ЛВ, и требуется расширить определяющую систему уравнением эволюции скорости ЛВ. Это может быть сделано не единственным образом. В рамках данной работы для описания эволюции скорости ЛВ используется характеристическая форма записи определяющей системы уравнений вдоль C_+ -характеристики [2]. Во второй постановке, таким образом, расчетная область теперь представляет собой отрезок $[-L; 0]$ с неподвижными концами. Правая граница соответствует ЛВ, и на ней выставляются условия Ренкина-Гюгонио, отвечающие текущей скорости ЛВ. На левой, удаленной границе выставляются условия экстраполяции нулевого порядка. В качестве начального условия используется решение ЗНД.

Вычислительный алгоритм в обоих случаях основан на принципе расщепления по физическим процессам. При переходе с одного временного слоя на другой сначала интегрируются уравнения газовой динамики без учета протекания химических реакций, и таким образом выполняется первый этап процедуры расщепления, а затем рассчитывается вклад химических реакций без учета конвекции (второй этап расщепления). Дискретизация по пространственной переменной осуществляется с использованием метода конечных объемов. Численный поток рассчитывается с использованием сеточно-характеристического варианта монотонной схемы Куранта-Изаксона-Рис, расширенной для случая двухкомпонентного газа. Для повышения пространственного порядка аппроксимации метода используется ENO-восполнение второго порядка. Интегрирование по времени осуществляется явным методом Рунге-Кутты второго порядка аппроксимации. Второй этап процедуры расщепления по физическим процессам предполагает решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей протекание химических реакций, для массовой доли реагента и температуры в каждой ячейке расчетной сетки. Несмотря на то, что в работе исследуются особенности распространения ДВ в одномерной постановке, детальное разрешение узких зон протекания химических реакций может требовать использования расчетных сеток с числом ячеек до нескольких сотен тысяч, что делает рассматриваемые задачи вычислительно затратными. В связи с этим вычислительный алгоритм был распараллелен в идеологии метода декомпозиции расчетной области. Программная реализация осуществлена с использованием библиотеки MPI. Расчеты проводились на суперкомпьютере МВС-100k МСЦ РАН. Более подробное описание используемого вычислительного алгоритма для случая первой постановки, особенности его распараллеливания, а также результаты решения ряда тестовых задач приведены в [3]. Детальное описание

вычислительного алгоритма для случая второй постановки с оценкой реально достигающегося на практике порядка аппроксимации представлено в [4].

Перейдем теперь к результатам численного исследования распространения пульсирующей ДВ в двух описанных выше постановках. Следуя [2], зафиксируем показатель адиабаты $\gamma = 1.2$ и тепловой эффект $Q = 50$, и будем варьировать величину энергии активации E . Линейная теория предсказывает, что ДВ становится неустойчивой, если $E > 25.26$ [5].

Рис. 1 отвечает случаю распространения устойчивой детонации при $E = 25$ в расчете в первой постановке (см. Рис. 1а) и во второй (см. Рис. 1б). Важной характеристикой полученных численных результатов является сеточное разрешение. Для возможности прямого сопоставления результатов, полученных при использовании двух различных методик, пространственное разрешение в обоих случаях выбиралось одинаковым. В случае расчета в лабораторной системе координат при длине расчетной области $L = 2\ 000$ и общем числе ячеек $N = 400\ 000$ на характерный пространственный масштаб в одну единицу, соответствующий в размерных величинах «длине полупревращения», приходится $N_{1/2} = 200$ ячеек. Здесь и далее параметры сеточного разрешения выбирались аналогичными серии вычислительных экспериментов в [2]. В расчете по второй методике длина расчетной области составляла $L = 20$ при общем числе ячеек $N = 4\ 000$.

Для анализа особенностей распространения ДВ в первой постановке на Рис. 1а представлена динамика изменения пикового давления в расчетной области p_{peak} , отнесенного к давлению в точке фон Неймана (ФН) p_{vN} . Длина области инициирования составляла 5 единиц, а температура и давление в этой области – 20.0 и 100.0, соответственно. Практически мгновенное сгорание смеси в узкой области инициирования приводит к значительному росту давления и формированию сильной взрывной волны. После этого наблюдается типичная для экспериментов по прямому инициированию детонации фаза ослабления ЛВ и ее переход из перескокового режима к самоподдерживающемуся режиму Чепмена-Жуге (ЧЖ). Далее ДВ распространяется с постоянной средней скоростью и параметрами за фронтом. Вместе с тем, даже в этом случае давление в пике ФН не является постоянным, а высокочастотно пульсирует с постоянной амплитудой. Вычислительные эксперименты показывают, что амплитуда данных пульсаций зависит от расчетной сетки и уменьшается при измельчении сетки.

Увеличение энергии активации до $E = 26$ приводит к смене режима распространения ДВ, и в расчетах в обеих постановках наблюдается слабо неустойчивая детонация с выходом на стационарный предельный цикл (см. Рис. 2). Постановка задачи в части геометрии, условий инициирования и сеточного разрешения аналогична случаю устойчивой детона-

ции. В первой постановке регулярные пульсации возникают при ослаблении сильно пересжатой ДВ до уровня ЧЖ, что типично для неустойчивых ДВ. Период пульсаций параметров за фронтом ДВ в первой постановке составляет 11.79, во второй – 11.85, линейный анализ [5] дает величину 12.11. Таким образом, можно заключить, что слабо неустойчивый режим хорошо воспроизводится в расчетах в обеих постановках.

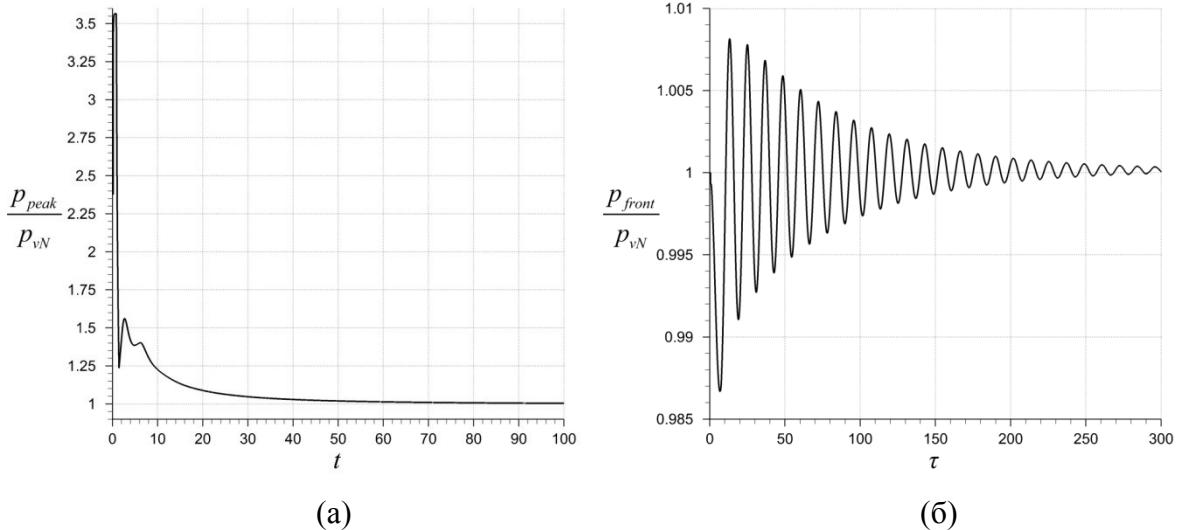


Рис. 1 – Устойчивая детонация при $E = 25$: (а) динамика изменения пикового давления в расчетной области в первой постановке; (б) динамика изменения давления за фронтом ЛВ во второй постановке.

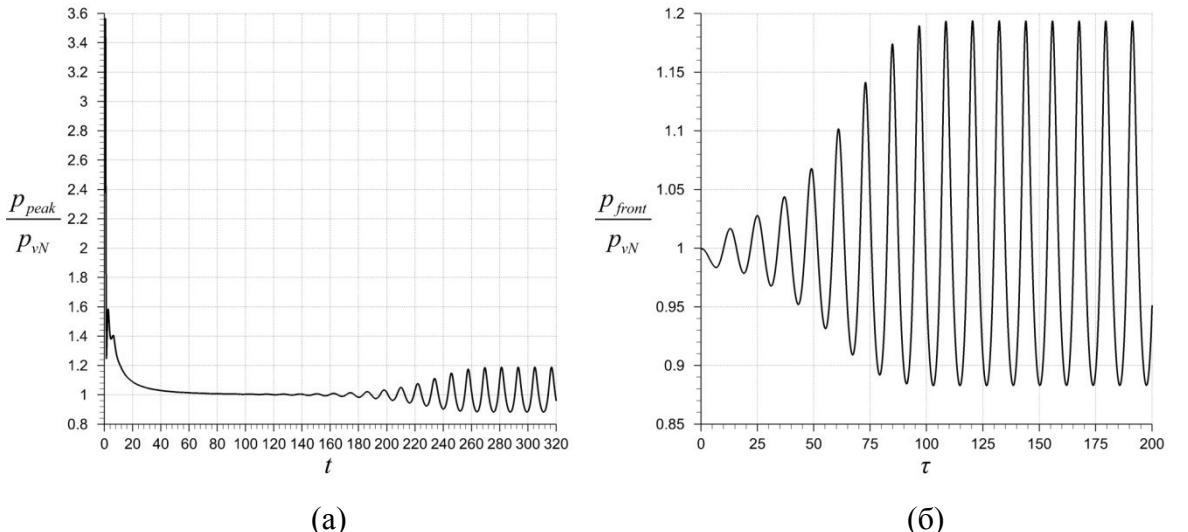


Рис. 2 – Слабо неустойчивая детонация при $E = 26$: (а) динамика изменения пикового давления в расчетной области в первой постановке; (б) динамика изменения давления за фронтом ЛВ во второй постановке.

Для моделирования нерегулярной пульсирующей детонации при $E = 28$ используется уже более детальное разрешение зоны протекания химических реакций, $N_{1/2} = 400$.

Для первой постановки $L = 2\ 000$, $N = 800\ 000$, условия инициирования аналогичны предыдущим случаям. Для второй постановки $L = 20$, $N = 8\ 000$. Сравнивая Рис. 2а и Рис. 3а, можно отметить, что при большей энергии активации неустойчивость фронта ДВ начинает проявляться раньше. Характер пульсаций на Рис. 3 – нерегулярный, хаотичный, и сравнение Рис. 3а и Рис. 3б, в целом, может быть проведено лишь на качественном уровне. Вместе с тем, сравнение максимального и минимального давления при пульсациях в обеих постановках – $1.65p_{vN}$ и $0.76p_{vN}$ в первой постановке, $1.68p_{vN}$ и $0.76p_{vN}$ во второй – дает основание полагать, что для нерегулярных и сильно неустойчивых режимов, возникающих при дальнейшем увеличении энергии активации, особенности методов сквозного счета начинают сказываться все больше, вплоть до срыва детонационного режима горения, зафиксированного в одномерных расчетах в [6].

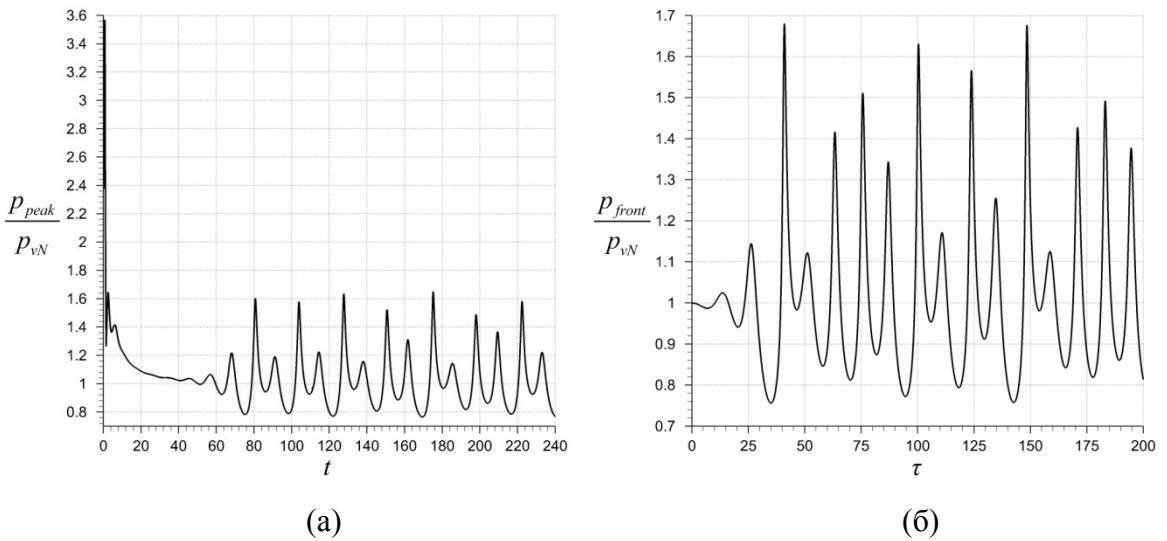


Рис. 3 – Нерегулярная детонация при $E = 28$: (а) динамика изменения пикового давления в расчетной области в первой постановке; (б) динамика изменения давления за фронтом ЛВ во второй постановке.

Сильно неустойчивый режим распространения ДВ реализуется при величине энергии активации $E = 35$. Для описания зоны протекания химических реакций используется разрешение $N_{1/2} = 266$. Характеристики расчетной области для расчета в первой постановке $L = 3\ 000$ и $N = 800\ 000$. Соответствующие параметры для второй постановки $L = 60$ и $N = 160\ 000$. Расчет в системе координат, связанной с лидирующим скачком, дает результат, качественно схожий с [2] (см. Рис. 4б). В то же время, динамика изменения пикового давления в расчетной области для первой постановки (см. Рис. 4а) существенно отличается от Рис. 4б, чего не наблюдалось для других режимов распространения ДВ. Пульсации носят более хаотичный режим и имеют больший период. Хотя прямое сравнение динамики изменения пикового давления в расчетной области для первой постановки и давления

на фронте во второй не вполне корректно, и требуется дальнейший анализ пространственных распределений определяющих газодинамических параметров, наглядно продемонстрировано качественное отличие результатов расчетов сильно неустойчивой ДВ в двух различных постановках.

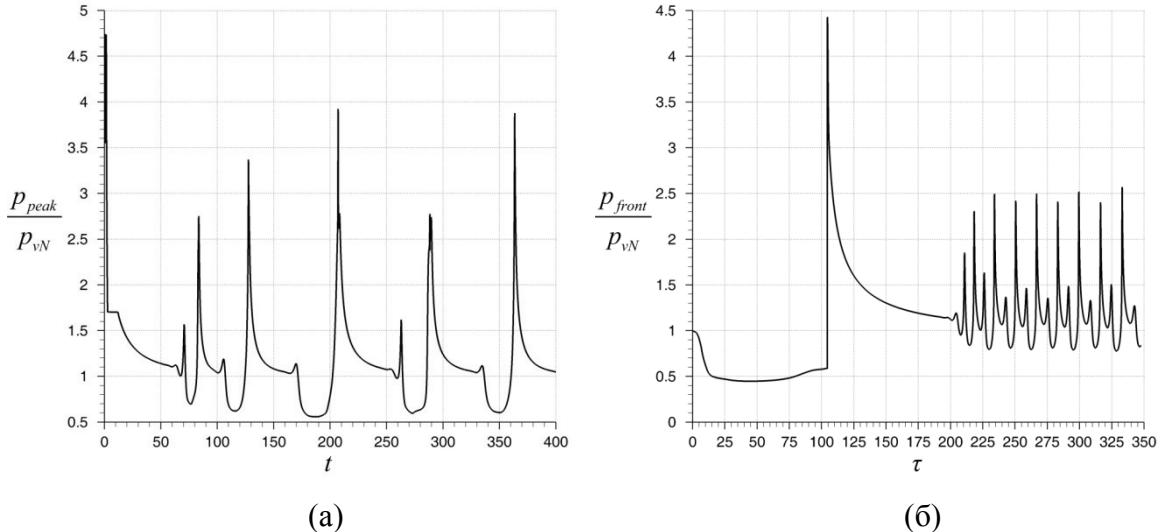


Рис. 4 – Сильно неустойчивая детонация при $E = 35$: (а) динамика изменения пикового давления в расчетной области в первой постановке; (б) динамика изменения давления за фронтом ЛВ во второй постановке.

Исследование А.И. Лопато (разработка и реализация вычислительных алгоритмов, проведение вычислительных экспериментов, анализ результатов) выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00408 «мол_а». Исследование П.С. Уткина (постановка задачи, формулировка математической модели, анализ результатов) выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Москвы в рамках научного проекта № 15-31-70004 «мол_а_мос».

Литература

1. Erpenbeck J.J. Stability of steady-state equilibrium detonations // Physics of Fluids. – 1962. – V. 5. – P. 604 – 614.
2. Kasimov A.R., Stewart D.S. On the dynamics of the self-sustained one-dimensional detonations: A numerical study in the shock-attached frame // Physics of Fluids. – 2004. – V. 16, No. 10. – P. 3566 – 3578.
3. Лопато А.И., Уткин П.С. Математическое моделирование пульсирующей волны детонации с использованием ENO-схем различных порядков аппроксимации // Компьютерные исследования и моделирование. – 2014. – Т. 6, № 5. – С. 643 – 653.

4. Лопато А.И., Уткин П.С. Детальное математическое моделирование пульсирующей детонационной волны в системе координат, связанной с лидирующим скачком // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – № 3 (принята к печати).
5. Lee H.I., Stewart D.S. Calculation of linear detonation instability of plane detonation // Journal of Fluid Mechanics. – 1990. – V. 216. – P. 103 – 132.
6. He L., Lee J.H.S. The dynamical limit of one-dimensional detonations // Physics of Fluids. – 1995. – V. 7. – P. 1151 – 1158.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕКУРСИОННОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ИСПАРЕНИЯ ТОНКОГО СЛОЯ ПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАСТВОРИМОГО СУРФАКТАНТА

А.В. Люшнин, В.Ю. Гордеева

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет

В последние двадцать лет, с развитием нанотехнологий, особый интерес представляет исследование поведения поверхности раздела двух сред, а также изучение межмолекулярных и поверхностных сил. Свободная энергия слоя жидкости складывается из суммы его объемной и поверхностных энергий. При уменьшении толщины слоя жидкости его объемная энергия уменьшается, а поверхностные межмолекулярные взаимодействия становятся определяющим фактором, который определяет движения слоя жидкости. Задача динамики движения и вопросы структурообразования поверхности тонкого слоя испаряющейся пленки полярной жидкости, порядка 10-500 ангстрем, на твердой горизонтальной подложке имеет большое практическое применение, а результаты используются во многих технологических процессах, как, например, при создании устойчивыхnanoструктур, в медицинской диагностики и модификации структур ДНК.

В экспериментальных работах [1-2] было обнаружено, что в процессе растекания капли полидиметилсилоксана (полярная жидкость) на гладкой силиконовой подложке образуется двухслойная динамическая система. В этой системе имеется «тонкий», порядка 10 Å, прекурсионный слой толщина которого в процессе растекания капли не изменяется и «толстый» молекулярный слой, толщина которого с течением времени стремится к толщине прекурсионного слоя.

В теоретической работе [3] было показано, что для описания двухуровневой структуры тонких слоев полярной жидкости необходимо учитывать тот факт, что энергия межмолекулярного взаимодействия должна складываться из суммы ван-дер-Ваальсовского взаимодействия и специфического взаимодействия двойного электрического слоя на межфазной границе «жидкость-твердое тело». Эта особенность полярной жидкости формирует в диапазоне 20-200 Å два устойчивых значения толщины слоя. Теоретические и экспериментальные исследования по изучению эволюции поведения тонких водяных пленок приведены в работах [4-6].

В данной работе теоретически исследуется процесс испарения тонкого слоя полярной жидкости (воды) со свободной поверхностью, расположенной на твердой подложке. На свободной границе «жидкость-пар» находится растворимый сурфактант. Коэффициент поверхностного натяжения является линейной функцией от поверхностной концентрации сурфактанта. Свободная энергия Гиббса представляется в виде немонотонной функцией относительно толщины слоя и является суммой ван-дер-ваальсова взаимодействия и специфического взаимодействия двойного электрического слоя на границе «подложка-жидкость». В рамках длинноволнового приближения в системе уравнений Навье-Стокса изучается влияние растворимого сурфактанта на динамику и устойчивость движения фронта испарения тонкой жидкостной пленки. Исследована устойчивость движения фронта испаряющегося тонкого слоя полярной жидкости при наличии сурфактанта на свободной поверхности.

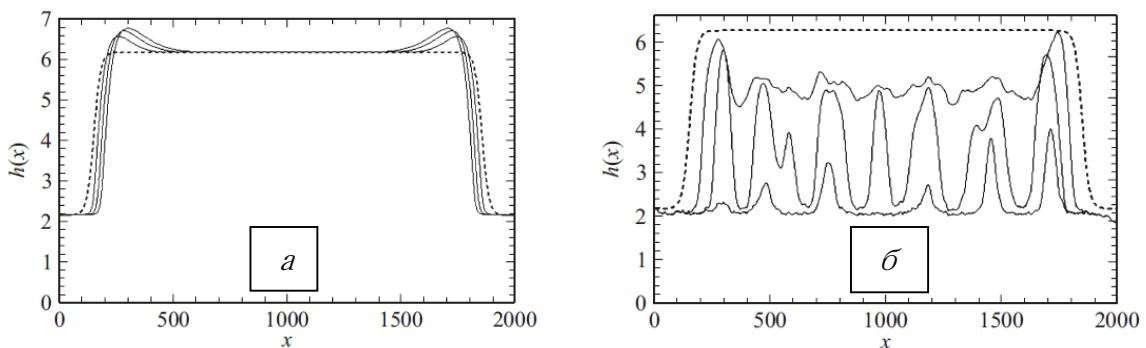


Рис 1. Эволюция распространения фронта тонкого слоя жидкости $h(x)$ для различных значений концентрационного числа Марангони: а)- $Ma_c = 0.1$ и б) $Ma_c = 50$. Пунктиром обозначено начальное распределение. Сплошными линиями приведены профили для безразмерных значений времен 1, 10, 25, соответственно.

На Рис.1(а) приведена эволюционная динамика тонкого слоя полярной жидкости при малом значении безразмерного концентрационного числа Марангони, как видно из графика такая динамика движения фронта слоя жидкости имеет стационарную форму движения и аналогична результатам, приведенным в работе [4]. С ростом концентрационного числа Марангони на поверхности «толстого» слоя появляются коротковолновые возмущения, которые приводят к деформации поверхности с образованием провалов в слое (Рис.1(б)). С течением времени эти провалы достигают толщины «тонкого» слоя и вся поверхность принимает пикообразную форму. Характер профиля неустойчивости тонкой пленки при наличии растворимого сурфактанта имеет существенное отличие от профиля тонкого слоя жидкости без примеси. Если для «чистого» слоя жидкости имеет место пальцеобразная

форма неустойчивости [5], которая наблюдается на контактной линии слоёв и толщина «толстого» слоя остаётся неизменной, тогда как при наличии сурфактанта весь слой испытывает неустойчивость, что приводит к совершенно другой форме образования структур на свободной поверхности.

Проведем анализ устойчивости данной системы относительно некоторого «замороженного» состояния, где величины толщины слоя и объемной концентрации имеют постоянные значения. Представим эти возмущения в «нормальном» виде $\exp(\lambda t + ikx)$, где λ является декрементом возмущений и описывает поведение возмущения со временем ($\lambda > 0$ ведет к росту возмущений, а отрицательное значение декремента соответствует затуханию возмущений), k есть волновое число вдоль оси x . Решая систему уравнений относительно λ получаем две независимые моды, которые представлены на Рис.2. Одна из которых, обозначенная на рисунке λ_1 , представляет собой моду концентрационных возмущений, а вторая, помеченная надписью λ_2 , описывает эволюцию возмущений слоя жидкости при испарении. Как видно из рисунка при значении безразмерного параметра испарения $\Omega \ll 1$ и малом значении числа Ma_c обе моды возмущений затухают. Особенностью моды испарения является тот факт, что при $k = 0$ декремент не равен нулю и имеет место так называемая годстоуновская мода возмущений. При $\Omega \rightarrow 0$ декремент λ_2 этой моды стремится к нулевому значению.

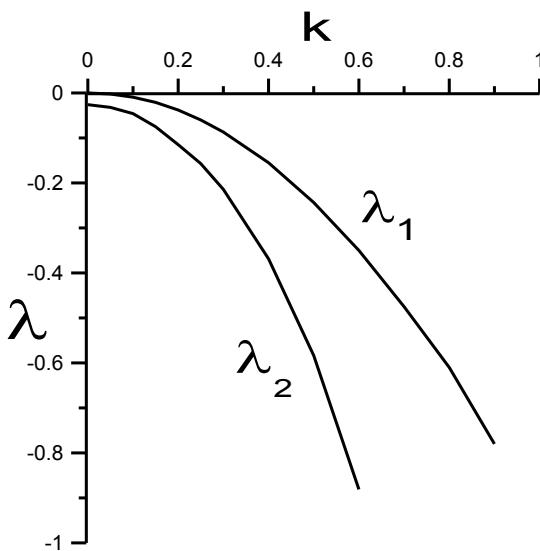


Рис 2. Дисперсионная зависимость $\lambda(k)$ для $Ma_c = 0.01$ и $\Omega = 0.01$.

Для концентрационной моды неустойчивости рост значений безразмерного концентрационного числа Марангони приводит к понижению устойчивости системы и образованию области неустойчивости. При достижении некоторого критического значения Ma_c^{crit} при любых значениях волнового числа возмущения такого типа нарастают. Напротив, с увеличением безразмерного параметра испарения устойчивость системы по отношению к моде испарения увеличивается, что качественно соответствует результатам, приведенным в работе [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 14-01-96021 р_урал_а) и Министерства образования Пермского края (соглашение С-26/004.4).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. Heslot, N. Fraysse & A.M. Cazabat Molecular layering in the spreading of wetting liquid drops // Nature, 1989, v. 338, p. 640-642;
- [2] M. Voue, M.P. Valignat, G. Oshanin, A.M. Cazabat, J. De Conick Dynamics of spreading of liquid microdroplets on substrate of increasing surface energies // Langmuir, 1998, v.14, № 20, p. 5951-5158;
- [3] A. Sharma, A. Jameel Nonlinear stability, rupture, and morphological phase separation of thin fluid films on apolar nad polar substrate // Journal of Colloid and Interface Science, 1993,v. 161, p. 190-208;
- [4] A.V. Lyushnin, A.A. Golovin A.A., L.M. Pismen Fingering instability of thin evaporating liquid films // Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 2002, v.65, p. 021602/1 - 021602/7;
- [5] I. Leizerzon, S.G. Lipson, A.V. Lyushnin Symbiosis of different-sized drops // Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 2003, v.68, p. 051601/1-051601-5;
- [6] В.Ю. Гордеева, А.В. Люшнин Влияние термокапиллярного эффекта на динамику и устойчивость движения испаряющейся тонкой пленки // Журнал технической физики, 2013, т. 83, №. 3, с. 41-47.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ЧИСЛА ПРАНДТЛЯ ДЛЯ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ ПРИ ТЕЧЕНИИ В ТРУБЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

М.С. Макарова, В.Г. Лущик
НИИ механики МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва

Обзор экспериментальных работ [1] по турбулентному числу Прандтля Pr_t для развитого течения в круглой трубе, плоском канале и для двумерного пограничного слоя с постоянными физическими свойствами показал, что в общем случае турбулентное число Прандтля является функцией молекулярного числа Прандтля Pr , числа Рейнольдса Re и расстояния от стенки y^+ : $Pr_t(y^+, Pr, Re)$. В [1] также было исследовано влияние градиента давления, шероховатости, транспирации для воздуха и жидкостей (жидкий металл, вода, масло).

Использование в качестве рабочего тела при течении в трубах с проницаемыми стенками смесей газов с малыми числами Прандтля $Pr < 0.7$ представляет интерес для ряда прикладных задач, например [2,3,4].

Для газовых смесей водорода, гелий, аргона, ксенона с молекулярным числом Прандтля $0.18 < Pr < 0.7$ при числах Рейнольдса $3 \cdot 10^4 < Re < 1 \cdot 10^5$ в [5] рассмотрен ряд моделей для зависимости $Pr_t(y^+, Pr, Re)$. Анализ результатов расчетных исследований величины Pr_t показывает, что они носят противоречивый характер, особенно в пристеночной области при $y^+ < 10$. Путем DNS, проведенного для турбулентного течения в канале и трубе с непроницаемыми стенками в работах [6-8], было установлено, что величина турбулентного числа Прандтля при низких числах Рейнольдса практически не зависит от значения молекулярного числа Прандтля при $Pr \geq 0.2$.

Для определения турбулентного числа Прандтля как в экспериментах [9], так и в расчетах [10] используется соотношение

$$Pr_t = \frac{\langle u'v' \rangle \partial T / \partial u}{\langle v'T' \rangle \partial u / \partial y} = c_p \frac{\tau \partial T / \partial u}{q_t \partial u / \partial y}, \text{ где } \tau = -\langle u'v' \rangle, q_t = -c_p \langle v'T' \rangle \quad (1)$$

Большой разброс значений Pr_t в экспериментах, по-видимому, объясняется невысокой точностью измерения величин $\langle u'v' \rangle$ и $\langle v'T' \rangle$ и большой погрешностью при дифференцировании измеренных профилей скорости и температуры в широком диапазоне расстояний от стенки до оси трубы.

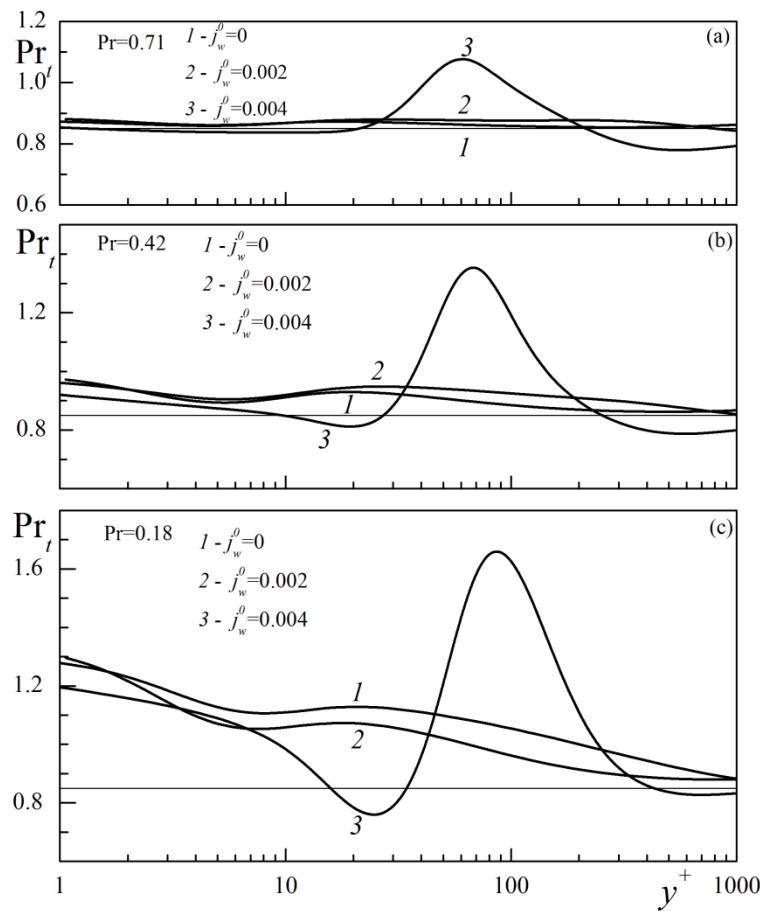
В [9] был проведен анализ более 20 измеренных профилей температуры в пристенных турбулентных течениях различных жидкостей (при $0.02 \leq Pr \leq 100$) при условии, что профили температуры имели достаточно широкий участок, хорошо описываемый логарифмической формулой. Определение по логарифмическому участку значения Pr_t не зависит от Pr и группируется около среднего значения $Pr_t = 0.85$.

В настоящей работе, как и в работах [11,12], численное исследование влияния молекулярного числа Прандтля Pr на величину Pr_t проведено для газа с постоянными физическими свойствами при трех значениях числа Прандтля: $Pr=0.71$ (воздух), $Pr=0.42$ (смесь He-Ar) и $Pr=0.18$ (смесь H₂-Xe). Задача решалась в приближении узкого канала, что позволяет достаточно адекватно эксперименту описать течение на начальном участке

трубы, в частности, немонотонное изменение скорости и характеристик турбулентности по длине. В расчетах использована дифференциальная модель турбулентности [13,14], дополненная уравнением переноса для турбулентного потока тепла ρq_t [15]. Границные условия задавались как в [10].

Параметрами задачи являются число Рейнольдса на входе в участок отсоса Re_0 , число Прандтля Pr , интенсивность отсоса $j_w^0 = (\rho v)_w / (\rho u)_0$, безразмерный тепловой поток $q^+ = q_w d / (\lambda_0 T_0 Re_0 Pr_0)$.

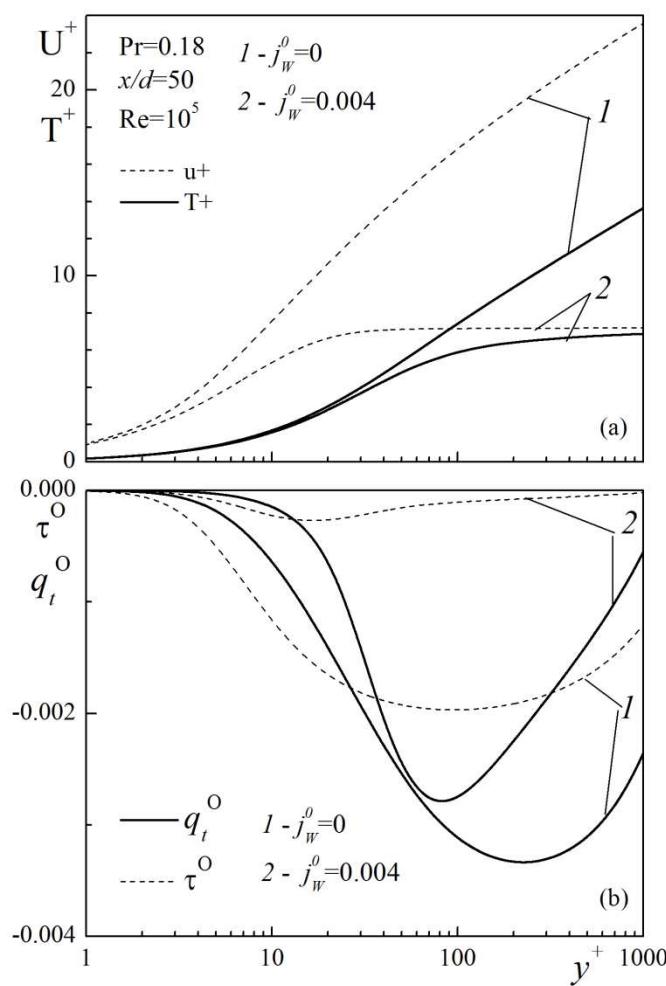
На фиг. 1,а-с представлено изменение Pr_t по сечению трубы при $x/d=50$ для $Re=10^5$. Как видно, при отсутствии отсоса ($j_w^0=0$, линии 1) с уменьшением числа Pr величина Pr_t возрастает в пристеночной области и тем сильнее, чем меньше число Pr . При $Pr=0.71$ (фиг. 1,а, линия 1) величина Pr_t слабо меняется по сечению трубы и близка к величине $Pr_t=0.85$, определенной в [9] и обычно используемой в расчетах теплообмена.



Фиг. 1. Влияние молекулярного числа Прандтля Pr и интенсивности отсоса j_w^0 на турбулентное число Прандтля Pr_t .

Исследование влияния отсоса газа проведено для тех же газовых смесей при двух значениях интенсивности отсоса $j_w^0=0.002$ (линии 2, фиг. 1,а-с) и $j_w^0=0.004$ (линии 3, фиг. 1,а-с). Отметим, что при анализе результатов расчета необходимо учитывать то обстоятельство, что при отсосе газа число Рейнольдса уменьшается по длине трубы.

Из фиг. 1 видно, что при слабом отсосе ($j_w^o=0.002$, линии 2) влияние отсоса на число Pr_t для воздуха и газовых смесей слабое. С увеличением интенсивности отсоса ($j_w^o=0.004$, линии 3) число Pr_t в области значений $y^+ = yu_*/(\rho/\eta)_w = 20 - 200$ возрастает и тем сильнее, чем меньше молекулярное число Pr . Причиной этого роста Pr_t является деформация профилей скорости $u^+ = u/u_*$ и температуры $T^+ = (T_w - T)/T_*$ (фиг. 2,а), которые с ростом j_w^o в логарифмической области уплощаются, так что величина du/dy , входящая в знаменатель выражения для Pr_t (1), становится очень малой, и число Pr_t возрастает, несмотря на рост величины q_t^o в этой области (фиг. 2,б). При меньшем значении величины интенсивности отсоса ($j_w^o=0.002$) рост величины Pr_t в логарифмической области (фиг. 1, линии 2) не такой заметный.



Фиг. 2. Влияние интенсивности отсоса j_w^o на профили скорости $u^+(y^+)$, температуры $T^+(y^+)$, турбулентное трение $\tau^o(y^+)$ и турбулентный поток тепла $q_t^o(y^+)$.

Приведенные выше результаты численного исследования получены при использовании уравнения для турбулентного потока тепла ρq_t , а для определения турбулентного числа Прандтля Pr_t использовано выражение (1).

Представляет интерес исследовать, как влияет переменность Pr_t на характеристики теплообмена, например, на число Нуссельта.

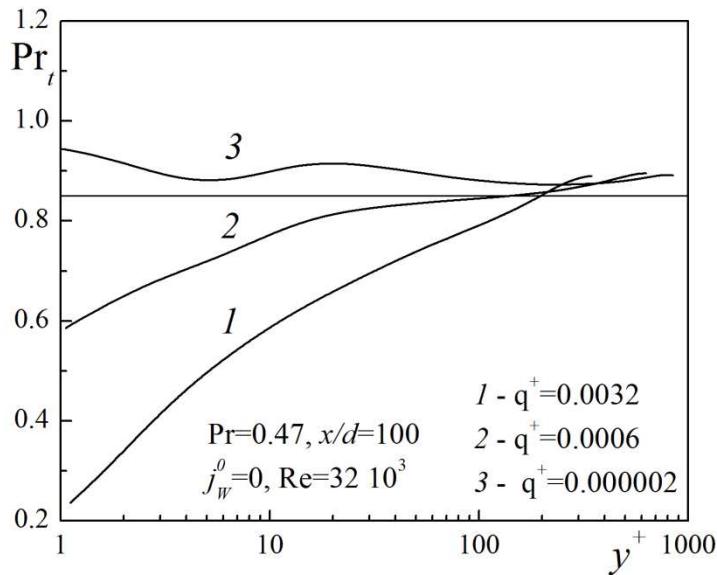
В табл. 1 для трех значений интенсивности отсоса j_w^o и трех значений числа Прандтля приведены величины чисел Нуссельта, определенных в расчетах с постоянной величиной турбулентного числа Прандтля $\text{Pr}_t=0.85$ и с использованием уравнения для турбулентного потока тепла.

Таблица 1. Величины чисел Нуссельта $Nu(j_w^o, \text{Pr})$ при $x/d=50$

$j_w^o(\text{Re}_{50})$	0 (10^5)			0.002 ($0.6 \cdot 10^5$)			0.004 ($0.2 \cdot 10^5$)		
Pr	0.71	0.42	0.18	0.71	0.42	0.18	0.71	0.42	0.18
$\text{Pr}_t=0.85$	180.7	126.9	72.8	177.6	115.0	60.4	284.3	171.8	79.0
$\text{Pr}_t = \text{var}$	178.9	123.0	67.67	176.3	112.3	56.9	283.7	170.1	82.5

Как видно из табл. 1, отличие числа Nu, определенного в предположении постоянства турбулентного числа Прандтля $\text{Pr}_t=0.85$, от результатов, полученных в расчетах с использованием уравнения для турбулентного потока тепла ρq_t , возрастает с уменьшением молекулярного числа Прандтля Pr и с увеличением интенсивности отсоса j_w^o . При этом это отличие не превышает 8% при $j_w^o=0$ для $\text{Pr}=0.18$. Если в экспериментах точность определения числа Nu такого же порядка, то использование предположения о постоянстве числа Pr_t можно считать оправданным.

При анализе результатов, приведенных в табл. 1, следует иметь в виду, что число Re при наличии отсоса уменьшается по длине трубы от величины $\text{Re}_0=10^5$ на входе до $\text{Re}_{50}=0.6 \cdot 10^5$ для $j_w^o=0.002$ и $\text{Re}_{50}=0.2 \cdot 10^5$ для $j_w^o=0.004$ при $x/d=50$.

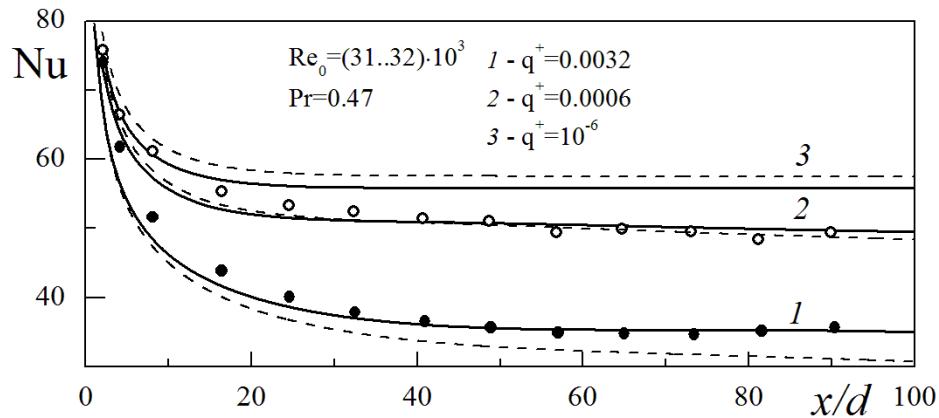


Фиг. 3. Влияние переменности физических свойств газа на турбулентное число Прандтля Pr_t .

В заключение следует отметить, что в случае существенного нагрева теплоносителя, когда физические свойства газа нельзя считать постоянными, изменение

\Pr_t по сечению трубы будет заметно отличаться от величины \Pr_t для постоянных физических свойств.

На фиг. 3 представлено изменение величины \Pr_t по сечению трубы для условий эксперимента [11] ($Re=32\cdot10^3$, $Pr=0.47$) при тех же значениях теплового потока в стенку q^+ . Как видно из фиг. 3, в пристенной области \Pr_t (линии 1, 2) заметно ниже, чем при постоянных физических свойствах (линия 3), что сказывается на величине числа Nu. Это иллюстрируется на фиг. 4, где результаты расчета с постоянным числом $\Pr_t=0.85$ (штриховые линии) отличаются от результатов, полученных в расчетах с использованием уравнения для турбулентного потока тепла, например, для $q^+=0.32\cdot10^{-2}$ (линии 1) при $x/d>50$ более чем на 10%.



Фиг. 4. Изменение числа Нуссельта по длине участка обогрева (линии – расчет, точки – эксперимент [11]) для трех значений теплового потока в стенку, штриховые линии – расчет с постоянным значением турбулентного числа Прандтля $\Pr_t = 0.85$.

Заключение

Проведенное численное исследование влияния молекулярного числа Pr на величину турбулентного числа \Pr_t для газа с постоянными физическими свойствами при трех значениях числа Прандтля показало, что при отсутствии отсоса на стенках трубы с уменьшением числа Pr величина \Pr_t возрастает в пристеночной области и тем сильнее, чем меньше число Pr . Для воздуха величина \Pr_t слабо меняется по сечению трубы и близка к величине $\Pr_t = 0.85$, обычно используемой в расчетах теплообмена. Показано, что при слабом отсосе влияние его на число \Pr_t для воздуха и газовых смесей слабое. С увеличением интенсивности отсоса число \Pr_t в логарифмической области возрастает и тем сильнее, чем меньше молекулярное число Pr . Причиной этого роста числа \Pr_t является существенная деформация профилей скорости и температуры. Исследованное влияние переменности \Pr_t на характеристики теплообмена показало, что отличие числа Nu, определенного в предположении постоянства турбулентного числа Прандтля $\Pr_t = 0.85$, от результатов, полученных в расчетах с использованием уравнения для турбулентного потока тепла, возрастает с уменьшением молекулярного числа Pr и с увеличением интенсивности отсоса. Так, для $Pr = 0.18$ это отличие составляет ~8%. При

значительном подогреве теплоносителя, когда свойства нельзя считать постоянными, это отличие возрастає до ~10%.

Работа выполнена при поддержке РФФИ №14-08-31624-мол_а.

ЛИТЕРАТУРА.

1. W.M. Kays, Turbulent Prandtl number – where are we?, *Transactions of the ASME. Journal of Heat Transfer* 116 (2) (1994) 284-295.
2. A.I. Leontiev, V.G. Lushchik, M.S. Makarova, Temperature Stratification under Suction of a Boundary Layer from a Supersonic Flow, *High temperature* 50 (6) (2012) 739-743.
3. Yu.A. Vinogradov, A.G. Zditovets, M.M. Strongin, Experimental investigation of the temperature stratification of an air flow through a supersonic channel with a central body in the form of a porous permeable tube, *Fluid Dynamics* 48 (5) (2013) 687-696.
4. S.A. Burtsev, A.I. Leontiev, Study of the influence of dissipative effects on the temperature stratification in gas flows (Review), *High temperature* 52 (2) (2014) 297-307.
5. D.M. McEligot, M.F. Taylor, The turbulent Prandtl number in the near-wall region for low-Prandtl-number gas mixtures, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 39 (6) (1996) 1287-1295.
6. L. Redjem-Saad, M. Ould-Rouiss, G. Lauriat, Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in pipe flows: Effect of Prandtl number, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 28 (5) (2007) 847-861.
7. H. Kawamura, K. Ohsaka, H. Abe, K. Yamamoto, DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 19 (5) (1998) 482-491.
8. H. Kawamura, H. Abe, Y. Matsuo, DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 20 (3) (1999) 196-207.
9. B.A. Kader, A.M. Yaglom, Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 15 (12) (1972) 2329-2351.
10. A. Leont'ev , V. Lushchik, M. Makarova, Heat and mass transfer in a tube with permeable walls: influence of suction and the prandtl number, in: K. Hanjalić (Ed.), *Proceedings of the Eight International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, September 15-18 2015, Begell House INC, USA, 2015, pp. 145–148.
11. P.E. Pickett, M.F. Taylor, D.M. McEligot, Heated turbulent flow of helium-argon mixtures in tubes, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 22 (5) (1979) 705-719.
12. M.F. Taylor, K.E. Bauer, D.M. McEligot, Internal forced convection to low-Prandtl-number gas mixtures, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 31 (1) (1988) 13-25.
13. V.G. Lushchik, A.A. Pavel'ev, A.E. Yakubenko, Three-parameter model of shear turbulence, *Fluid Dynamics* 13 (3) (1978) 13-25.
14. V.G. Lushchik, A.A. Pavel'ev, A.E. Yakubenko, Three-parameter model of turbulence: Heat transfer calculations, *Fluid Dynamics* 21 (2) (1986) 40-52.
15. V.G. Lushchik, A.A. Pavel'ev, A.E. Yakubenko, Transfer equation for turbulent heat flux. Calculation of heat exchange in a pipe, *Fluid Dynamics* 23 (6) (1988) 42-50.

Кавитационное свечение слабопроводящей жидкости в тонком диэлектрическом канале

Монахов А.А.
Институт механики МГУ г. Москва

Задача транспортировки слабопроводящей жидкости в различных технологических процессах по диэлектрическим каналам часто осложняется процессом электризации, то есть образованием нескомпенсированного электрического заряда в среде. Возникающие при этом сильные электрические поля могут существенно изменить условия транспортировки. Наиболее сильно эффект присутствия сильных полей проявляется в тонких каналах, когда толщина канала становится соизмеримой с толщиной пограничного слоя. В случае возникновения кавитации процессы электризации жидкости еще больше усложняются. Например, возможны ситуации, когда не весь заряд выносится потоком, а значительная его часть аккумулируется на стенах канала [1]. Используемые теоретические модели еще недостаточно хорошо развиты и расчеты, выполненные на их основе, не в полной мере согласуются с экспериментальными данными.

Представлены результаты экспериментального исследования течения углеводородной жидкости в тонком коаксиальном канале. Работа проводилась в течение ряда лет на экспериментальной установке, созданной в институте механики МГУ. Схема установки представлена на Рис.1. Движение жидкости в исследуемом канале 1 создавалось перепадом давления при помощи шестеренчатого насоса 2. В регистрационном модуле 4 измерялись давление жидкости электронным датчиком 7 и температура датчиком 8. Скорость движения жидкости в канале регулировалась перепускным клапаном 6. После регистрационного модуля жидкость поступала в блок визуального наблюдения 3, который был выполнен из органического стекла. Через этот блок проводились кино и фоторегистрация процессов, регистрация свечения жидкости фотоэлектронным умножителем (ФЭУ). Затем жидкость попадала в коллектор 5, где происходило отделение кавитационных пузырьков и термостатирование жидкости. В некоторых экспериментах на выходе из канала 1 устанавливался электрический зонд 9 в виде сетки для измерения электрического потенциала жидкости. Также проводилась регистрация электромагнитного фона в радиодиапазоне антенной 10. Излучение в рентгеновской области регистрировалось ионизационным датчиком и рентгеновской пленкой. Вся информация поступала для обработки на персональный компьютер.

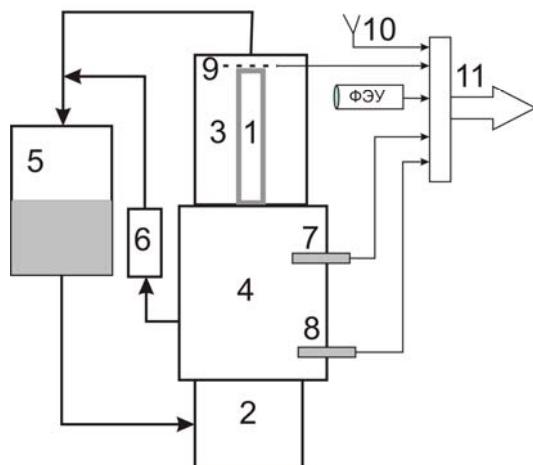


Рис.1 Схема установки для исследования течения жидкости в диэлектрическом канале.

В экспериментах использовались два вида каналов: составной цилиндрический с внутренним диаметром 1 мм и коаксиальный. Начальный участок цилиндрического канала выполнен из фторопласта марки Ф4 МБ с диаметром $d = 1$ мм и длиной $L = 30$ мм. В оконечной части 3 из оргстекла помещена титановая втулка для разряда заряженной жидкости.

Использование коаксиального канала позволило уменьшать ширину канала, не уменьшая внешних размеров, что было крайне необходимо для регистрации наблюдавшихся процессов. На Рис.2 представлена схема коаксиального канала.

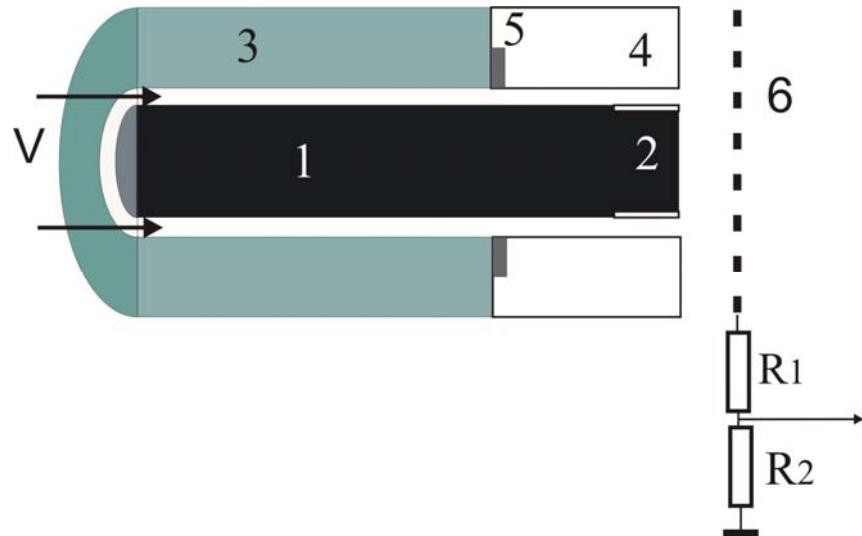


Рис.2. Схема коаксиального канала.

Внутренняя часть 1 выполнена из эbonита диаметром $D = 5$ или 10 мм и длиной $L = 30$ мм. На оконечной части имелись небольшие каверны 2 в виде углублений в 0.5 мм для кавитации жидкости. Внешняя часть канала 3 сделана составной из фторопласта, длиной $L = 20$ мм и оконечной 4 из органического стекла для визуализации и регистрации процессов. Между фторопластом и оргстеклом помещалась металлическая шайба 5. Зазор между стенками канала составлял $h = 0.15$ мм. Потенциал жидкости, возникающий за счет электризации, измерялся зондом 6 в виде металлической сетки через делитель напряжения. В качестве жидкости использовалось техническое масло АИ 20 с вязкостью $\nu = 80$ сСт. Числа Re по поперечному характерному размеру канала не превышали 150.

2. Электризация жидкости в цилиндрическом канале

При течении жидкости в цилиндрическом канале на начальном участке канала в зависимости от степени удаления от входа в канал формируется профиль жидкости от прямоугольного до параболического. При этом происходит электрохимическое взаимодействие стенки канала, выполненной из фторопласта и углеводородной жидкости [2,3]. В результате в окрестности стенки в жидкости возникает тонкий слой нескомпенсированного положительного электрического заряда. Этому способствуют существенное различие в характеристиках атомов фтора (стенка) и углерода (жидкость): потенциалы ионизации фтора и углерода составляют, соответственно, IE (F) = 17,42 эв, IE (C) = 11,25 эв, сродство к электрону атомов фтора и углерода EA (F) = 3,45 эв, EA (F) = 1,2 эв [4].

В экспериментах с цилиндрическим каналом диаметром $H = 1$ мм при скорости потока около $V = 8$ м/с на начальном участке канала наблюдается свечение голубоватого цвета (Рис.3).

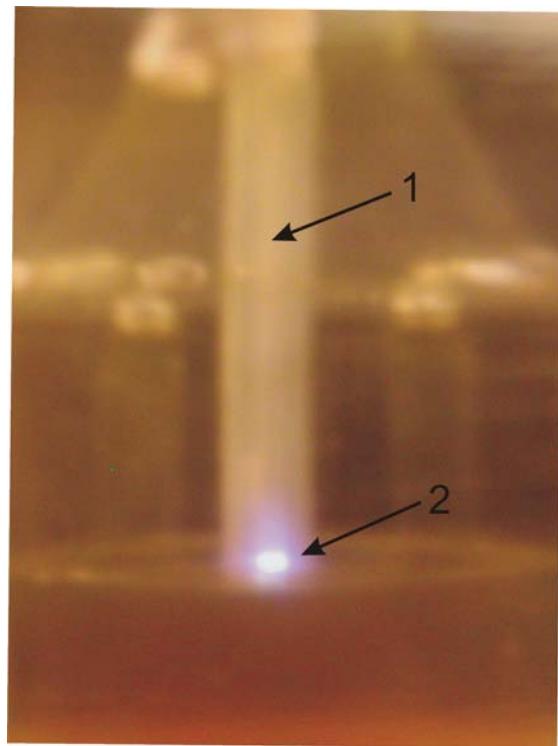


Рис.3. Кавитационное свечение на начальном участке цилиндрического канала.

Регистрация свечения фотоэлектронным умножителем (ФЭУ) показывает, что оно имеет дискретный характер и коррелирует с возникающей при этом электромагнитной помехой. На Рис. 4 приведена осциллограмма (кривая 3) сигнала с ФЭУ.

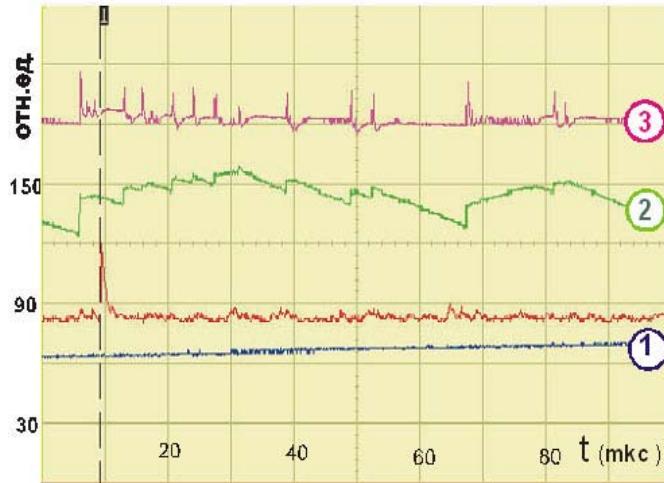


Рис.4. Осциллограммы давления жидкости в канале 1, электромагнитной помехи 2, свечения 3.

При наличии небольшого квазистатического изменения давления (кривая 1), наблюдается заметная корреляция между кавитационным свечением в виде дискретных импульсов 3 и возникающей электромагнитной помехой в радиодиапазоне 2. Дискретные

импульсы свечения, сопровождающиеся всплесками излучения в радиодиапазоне, могут свидетельствовать в пользу того, что свечение вызвано электрическими пробоями кавитационных пузырьков вследствие нескомпенсированных зарядов на их поверхности. Таким образом, получен новый, ранее не приводившийся, аргумент в поддержку электрической природы свечения кавитационных пузырьков [4].

Спектральный анализ кавитационного свечения представлен на Рис.5. Из рисунка видно, что в спектре отсутствуют атомарные линии химических элементов. Максимум интенсивности излучения сплошного спектра находится в области 475 нм.

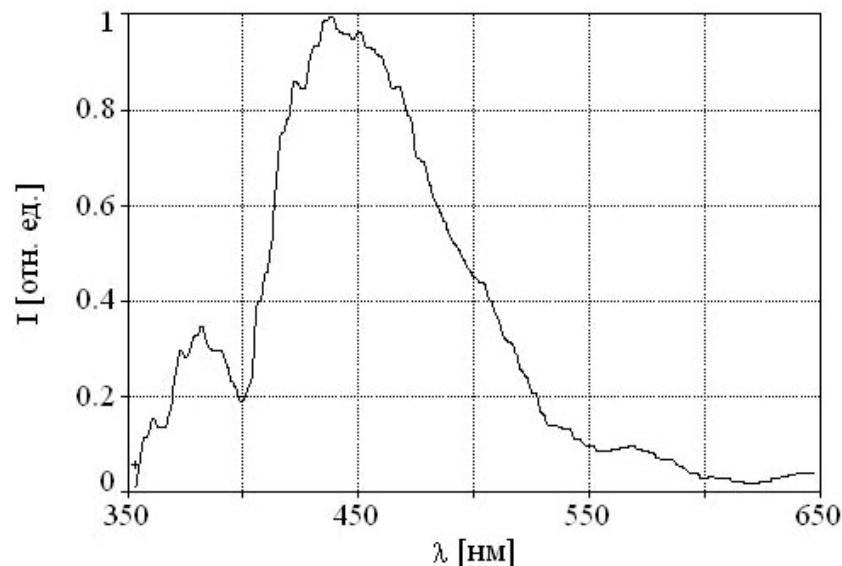


Рис.5. Спектр свечения кавитационной области.

Наблюдаемое свечение можно объяснить возникновением кавитационной каверны на входе в канал при наличии слабых пульсаций давления в жидкости [5]. На Рис.6. представлена осциллограмма давления жидкости P_1 перед входом в канал.

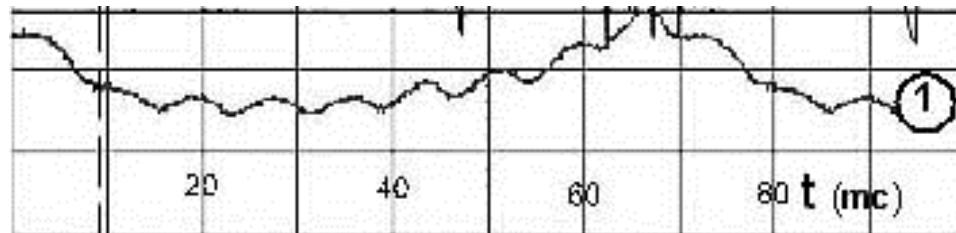


Рис.6. Осциллограмма давления жидкости перед входом в канал.

В потоке присутствуют пульсации давления на частоте около 130 гц, которые обусловлены скоростью вращения шестеренок насоса и пульсации с более низкой частотой в 14 гц, соответствующие резонансной частоте контура подвода жидкости к каналу. Наличие высокочастотной пульсации давления может вызывать деформацию кавитационных пузырьков и давать дополнительный вклад в свечение, как и в случае сонолюминесценции при акустическом воздействии на пузырьковое облако в жидкости.

Наиболее яркое свечение 4 возникает в составном канале с начальным участком из фторопласта (1) и металлической вставкой (2) на выходе жидкости из канала (Рис.7).

Это связано с электризацией жидкости при течении в канале, образованием заряженных кавитационных пузырьков и пробойным стоком заряда (4) на металлическое кольцо

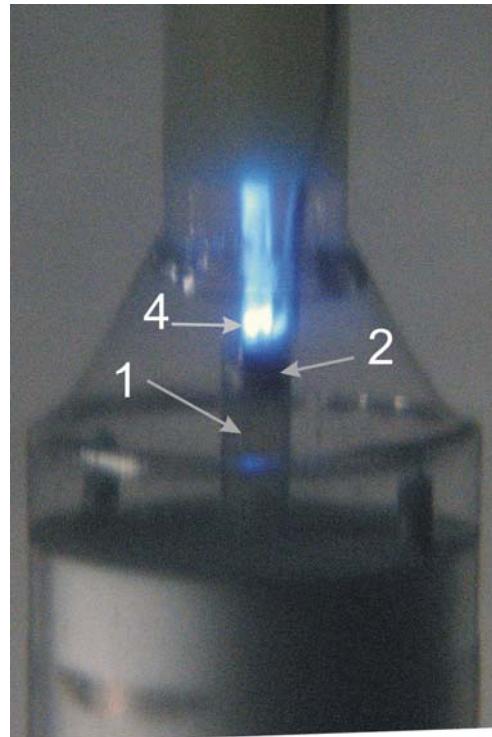


Рис.7. Кавитационное свечение в цилиндрическом канале с металлической вставкой.

На Рис. 8 представлена фотография разрушения стенки канала из органического стекла в виде оплавления и образования бокового канала. Наличие металлической вставки в канал и пробоев приводило также к интенсивному разогреву жидкости, температура которой достигало более 100 °C.



Рис.8. Температурное разрушение стенки канала.

Проведено исследование влияние внутреннего диаметра Н цилиндрического канала на нижнюю границу скорости течения жидкости, при которой возникало свечение. На Рис.9 показана необходимая для свечения скорость потока V в зависимости от диаметра Н. Исследования проводились для различных диэлектрических материалов стенок канала: для фторопласта, органического стекла, эбонита. В результате экспериментов не было обнаружено влияния материала стенки на скоростную границу возникновения кавитационного свечения. Однако при использовании различных материалов стенки яркость свечения менялась. Выяснилось также, что на интенсивность свечения влияет наличие острой кромки на входе в канал, что связано, по-видимому, с изменением кавитационных явлений в потоке на входе в канал.

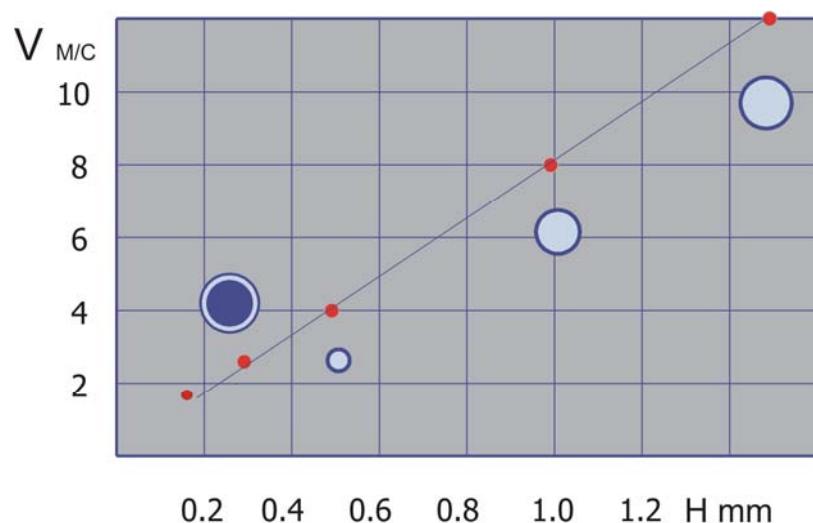


Рис.9. Влияние толщины канала на границу возникновения кавитационного свечения.

Движение жидкости в коаксиальном канале в описываемых экспериментах несколько отличается от течения в цилиндрическом канале. Центральная часть канала под влиянием пульсаций давления и вибраций может смещаться относительно оси симметрии, за счет этого кольцевой зазор на начальном участке может принимать форму эллипса. Изменение толщины зазора в канале может приводить к нестационарности наблюдаемых процессов. Наиболее сильно это явление проявлялось для коаксиального канала с внутренним цилиндром диаметром $d = 5$ мм.

Для коаксиального канала с внутренним цилиндром $d = 10$ мм, с помощью зонда проводилось измерение параметров электризации жидкости при различных скоростях потока. На Рис. 10 представлена осциллограмма потенциала зонда для движения жидкости без кавитации. Как и для течения в цилиндрическом канале, стенка канала приобретает отрицательный потенциал, а жидкость положительный. При небольших скоростях зондом регистрируются только положительные импульсы. С увеличением скорости потока частота положительных импульсов возрастает.

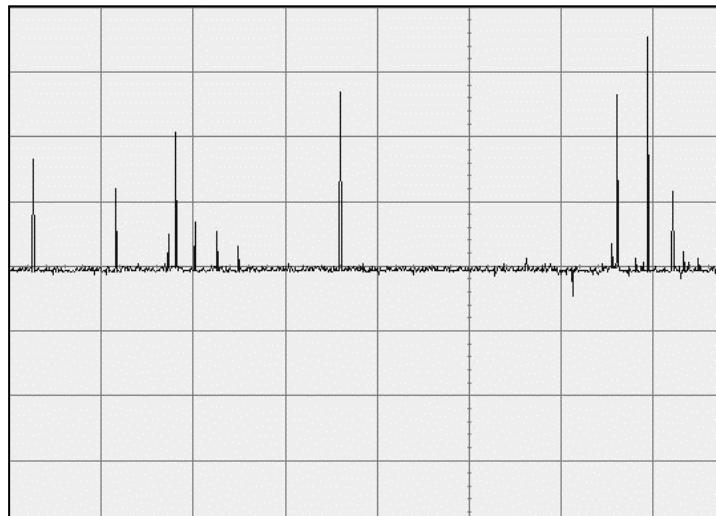


Рис. 10. Осциллограмма потенциала зонда для течения без кавитации.

При скорости потока около 2.5 м/с в кавитационных областях возникает свечение. На Рис.11 представлена фотография такого режима. Свечение имеет голубоватый оттенок и при постоянной скорости потока является стабильным.

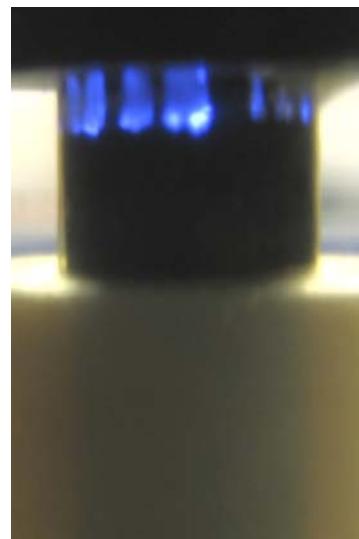


Рис.11. Свечение жидкости в кавитационных областях.

При возникновении кавитации на осциллограмме зонда появляются, наряду с положительными импульсами, также и отрицательные. Осциллограмма потенциала зонда при скорости потока $V=2.7$ м/с приведена на Рис.12.

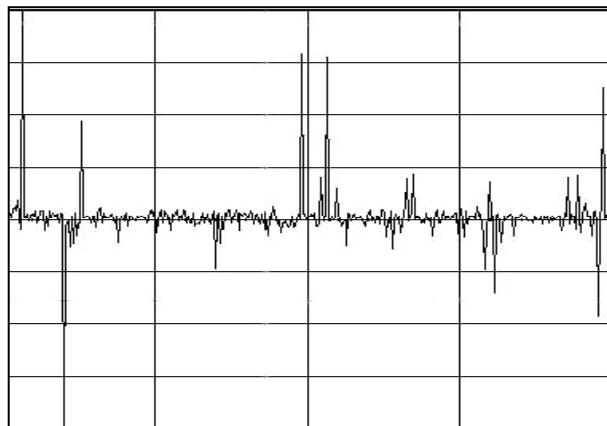


Рис.12. Осциллограмма потенциала зонда для течения с кавитацией.

Отрицательные пики на осциллограмме свидетельствуют о существовании в потоке областей с отрицательным объемным зарядом. Можно предположить, что наличие таких областей является следствием разрушения кавитационных образований с противоположно заряженными частями поверхностей раздела. Предположение основано на следующей модели пробоя кавитационных пузырьков. Течение жидкости сопровождается электризацией за счет поверхностных электрохимических процессов и появлением сильных электрических полей, нормальных к стенкам. В этих полях происходит движение отрицательных и положительных ионов жидкости в противоположных направлениях. Кавитационный пузырек в окрестности стенки, оказавшийся в этих потоках ионов, может получить нескомпенсированные заряды противоположных знаков на разных частях своих границ раздела. При накоплении зарядов может возникнуть пробой в газовой фазе внутри пузырька, который дает дополнительный вклад в наблюдающееся свечение. Пузырек с разнозаряженными частями границы раздела может достичь зонда и вызвать отрицательный импульс на осциллограмме.

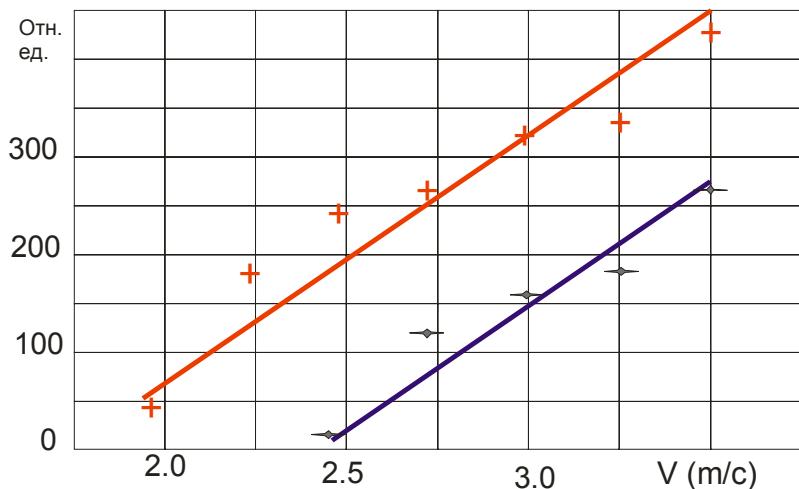


Рис.13. Электризация жидкости в коаксиальном канале

в зависимости от скорости потока.

Полученные осцилограммы зонда для различных скоростей жидкости в канале позволили построить график интенсивности электризации потока в зависимости от скорости для режима без кавитации и с кавитацией (Рис.13). График строился следующим образом: вырезались значения пульсаций вблизи нулевого порога, складывались отдельно значения положительных и отрицательных импульсов, затем сумма каждой составляющей делилась на суммарное время регистрации импульсов.

Свечение в коаксиальном канале может наблюдаться не только в кавитационных областях, но и в области расширения потока. На Рис.14 представлена фотография такого свечения. Свечение голубоватого цвета возникает в расширяющейся области стенки внешнего цилиндра коаксиального канала. Свечение стационарное, с дискретными областями. С увеличение скорости потока яркость свечения возрастает.



Рис. 14. Кавитационное свечение жидкости в расширяющейся области коаксиального канала.

Кавитационные области за счет циркуляции жидкости и перезарядки накапливают заряд до несколько десятков кВ. Разряд таких областей в коаксиальном канале происходил на металлическое кольцо, расположенное перед ними на расстоянии 8 мм и выступающее в роли катода, Рис.15. Кавитационные области являются независимыми источниками высокого напряжения. Необходимо отметить, что яркость разряда от катода к заряженной кавитационной области уменьшается, что говорит об уменьшении электронного тока с катода. Разряд таких областей невозможно объяснить электрическим



Рис.15. Разряд кавитационных областей на металлическое кольцо.

пробоем жидкости и объясняется образованием кавитационных светящихся нитей в начальном участке канала и движущихся с потоком. На Рис.16 показана такая кавитационная цепочка в начальном участке канала. Как отмечалось, при входе в канал может возникать кольцевая каверна. Под действием вибраций и пульсаций давления она рвется и перемещается в потоке. Ее свечение поддерживается пульсациями давления, как и в механизме свечения кавитационного пузырька при сонолюминесценции. Поскольку кавитационная цепочка является электропроводной, то при достижении зазора между заряженной кавитационной областью и металлическим кольцом происходит разряд.



Рис. 16. Образование кавитационной цепочки
в начальном участке канала.

Обнаружено, что при разряде кавитационных областей на металлическое кольцо возникает рентгеновское излучение [6]. На Рис.17 представлена рентгеновская пленка с затемнением в центральной области от рентгеновского излучения. На пленке также имеются дугообразные затемнения, полученные в результате рассеяния излучения. Мощность излучения составляла $H_p = 750$ мкР/час при фоне в помещении 14 мкР/час. Рентгеновская пленка располагалась на расстоянии 60 мм от кавитационной области.



Рис.17. Затемнение рентгеновской пленки при разряде кавитационной области.

. Механизм получения рентгеновского излучения в данном случае аналогичен, как и в рентгеновской трубке. Кавитационные области играют роль анода, катод – металлическое кольцо, а кавитационные нити создают условие для разряда кавитационных областей.

Полученные результаты исследования электризации жидкости в диэлектрическом канале получили практическое использование. Были получены патенты на изобретения [7-9] по способу создания наэлектризованной жидкости. Способ основан на электризации жидкости при прохождении через пакет тонких диэлектрических каналов. На Рис. 18 представлена фотография электризации диэлектрической жидкости при прохождении через пакет тонких каналов с разрядом на металлическое кольцо.



Рис. 18. Электризация и разряд жидкости в пакете диэлектрических каналов.



Рис.19. Разряд наэлектризованной жидкости при выходе из канала на заземленный проводник.

На Рис.19 показан разряд наэлектризованной жидкости при выходе из канала на заземленный проводник. Электризация жидкости таким способом может быть использована при покраске металлических изделий, опрыскивании растений ядохимикатами без использования источника высокого напряжения. Получен патент [10] на нагрев слабопроводящей жидкости. Данный способ основан на электризации жидкости и ее нагрев при разряде высоковольтных кавитационных областей.

Заключение

Установлено, что при докавитационных скоростях вследствие взаимодействия стенки и жидкости в потоке присутствует только одна компонента электризации. При кавитации в потоке регистрируются обе компоненты. Подтверждена электрическая теория свечения кавитационных пузырьков. Также показано, что в кавитационных областях потенциал электризации жидкости может достигать больших значений. Обнаружено, что разряд этих областей может вызвать рентгеновское излучение. Выявлена важная роль участка входа в канал, который может быть интенсивным источником образования нескомпенсированного заряда.

Литература

1. Герценштейн С.Я., Баранов Д.С., Бухарин Н.С., Монахов А.А. О механизме свечения высокоскоростного течения диэлектрической жидкости в узком диэлектрическом канале.// ДАН. 2006. Т.406. №6. С.749-752.
2. Полянский В.А., Панкратьева И.Л.//www.chemphys.edu.ru/pdf 2006-05-11-001.pdf
3. Физические величины: Справочник /Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат. 1991. 1232с.
4. Маргулис М.А., Маргулис И.М. Современное состояние теории локальной электризации кавитационных пузырьков. // Ж. физ. химии. 2007. Т.81. №1. С. 136-147.
5. Герценштейн С.Я., Монахов А.А. Электризация и свечение жидкости в коаксиальном диэлектрическом канале с диэлектрическими стенками. // Изв. РАН. МЖГ. 2009. №3. С.114-119.
6. Монахов А.А. Гидродинамический источник рентгеновского излучения. //ДАН. 2013. Т.450. №6. С.662-664.
7. Герценштейн С.Я., Монахов А.А. , Панин Д.Н. Способ обработки металлических емкостей наэлектризованным аэрозолем. Патент №2343997.
- 8.. Баранов Д.С., Бухарин Н.С., Герценштейн С.Я., Монахов А.А. Способ создания наэлектризованного аэрозоля диэлектрической жидкости с ядохимикатами и лекарственными препаратами. Патент № 2293608.
9. Герценштейн С.Я., Монахов А.А., Соловьева А.Л. Устройство для электризации диэлектрической жидкости с ядохимикатами или лекарственными препаратами. Патент №72882.
10. Монахов А.А., Ромашова Н.Б., Маслова Л.Н., Еричева Т.Н. Устройство для нагрева слабопроводящей жидкости. Патент № 2419750.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЯХ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ

И.В. Моршнева

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматриваются задача о возникновении конвективных течений в горизонтальном слое жидкости с примесью. Границы слоя предполагаются свободными, изотермическими, и концентрация примеси на каждой из них считается заданной. Перекрестные эффекты термодиффузии и диффузационной теплопроводности не учитываются. Расход жидкости через поперечное сечение предполагается равным нулю. Возникающие в слое бинарной смеси движения описываются уравнениями конвекции смеси в приближении Обербека-Буссинеска [1].

Уравнения движения имеют стационарное (основное) решение, соответствующее покоящейся смеси, в предположении, что градиенты температуры и концентрации постоянны и вертикальны. Известно [1], что, в отличие от случая чистой среды, в бинарной смеси возможны два вида неустойчивости основного решения — монотонная и колебательная.

Изучаются периодические по времени режимы, возникающие при колебательной потере устойчивости основного режима относительно плоских возмущений, периодических по однородной переменной. Уравнения возмущений имеют группу симметрии $O(2)$, и применима теория бифуркации рождения циклов в системах с такой симметрией. В [2] показано, что в случае общего положения при переходе параметра через критическое значение от равновесия могут ответвиться циклы, которым отвечают автоколебания двух типов: две бегущие навстречу друг другу волны, связанные инверсионной симметрией, и нелинейная смесь пары бегущих волн.

Для определения характера ветвления и устойчивости возникающих автоколебательных режимов в рассматриваемой задаче найдены аналитические выражения для коэффициентов уравнений разветвления. Эти коэффициенты представляют собой функционалы, которые выражаются через собственные функции линейной и сопряженной задач устойчивости, решения ряда неоднородных краевых задач с правыми частями, явно зависящими от этих же собственных функций. При различных значениях параметров проведен анализ знаков соотношений между коэффициентами уравнений разветвления. Показано, что и бегущие волны, и нелинейная смесь волн могут быть устойчивы в зависимости от значений параметров. Может происходить как сверхкритическое, так и докритическое ветвление автоколебаний. Для обоих типов автоколебательных режимов найдены первые два члена ряда по степеням параметра надкритичности.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (Задание №1.1398.2014/К).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука. 1972.
2. И.В. Моршнева, В.И. Юдович. Об ответвлении циклов от равновесий инверсионно- и вращательно-симметричных динамических систем. СМЖ, 1985, т. 26, № 1, с.124-133.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И ДИНАМИКИ ПРИСТЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ МЕТОДОМ АНАЛИЗА РАСХОЖДЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОЛЕЙ

Н.В. Никитин
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Интенсивные экспериментальные, а в последние годы и численные исследования показывают, что в пристенном слое турбулентного течения, где производится доминирующая часть энергии турбулентных пульсаций, наблюдаются отчетливо выраженные структуры с квазипериодическим распределением во времени и в пространстве. Наиболее заметны так называемые пристенные полосы ("near-wall streaks") - вытянутые вдоль потока узкие области замедленного и ускоренного движения [1]. Полосы хаотично распределены в боковом направлении, однако средний боковой интервал их расположения, будучи выраженным в так называемых пристенных единицах длины, оказывается одинаковым во всех течениях и разных условиях (при различных значениях числа Рейнольдса) [2]. Попытки объяснить возникновение пристенных полос предпринимались неоднократно [3-13]. Пока исследователи сходятся лишь в одном: полосы появляются в результате взаимодействия поперечных к основному течению движений в виде продольных вихрей с градиентом скорости продольного движения. Что касается причин возникновения поперечных движений и механизма выработки определенного бокового интервала расположения полос, то в этих вопросах консенсуса до сих пор нет, а имеющиеся экспериментальные, численные и теоретические данные весьма противоречивы. Большинство существующих теорий исходит из модельного представления процесса самоподдержания турбулентности в виде идеализированного замкнутого цикла. Этот цикл включает в себя три основных элемента: образование полос посредством поперечных движений, разрушение полос в результате неустойчивости полосчатого движения и нелинейный процесс образования поперечных движений, вызывающих возникновение новых полос. Отметим, что ни одно из фигурирующих в приведенном описании цикла понятий строго не формализовано, что допускает варьирование их трактовки в различных исследованиях. Что еще более существенно, в эксперименте, как лабораторном, так и численном невозможно объективное разделение турбулентного движения на используемые в модельном цикле составляющие, например, однозначно выделить полосу из окружающего пульсационного движения. Для такого разделения неизбежно приходится пользоваться теми или иными процедурами фильтрации и осреднения, конкретный выбор которых во многом определяет результат. При построении теоретических моделей зачастую используются идеализации далекие от реальных условий. Например, при оценке устойчивости полосчатого движения полосы чаще всего моделируются периодической в боковом направлении стационарной цепочкой прямолинейных (не зависящих от продольной координаты) структур, тогда как реальные полосы нестационарны и непрямолинейны, имеют разные амплитуды, конечную протяженность и случайное расположение в пространстве. Все это снижает ценность имеющихся подходов, ставит под сомнение формулируемые выводы.

В данной работе предлагается принципиально новый подход к численному исследованию структуры и динамики пристенной турбулентности, который в значительной степени свободен от недостатков, свойственных традиционным подходам. Предлагаемый подход основан на анализе процесса расхождения турбулентных полей, близких друг к другу в начальный момент времени. Пусть v и $v1$ - два близких в момент времени $t0$ турбулентных поля скорости, например, $v1 = v + u$, где поле v - статистически установившееся турбулентное поле, предварительно рассчитанное интегрированием уравнений Навье-Стокса, а u - некоторое малое возмущение: $\|u\| << \|v\|$. Интегрируя одновременно уравнения Навье-Стокса с начальными условиями v и $v1$ и сравнивая решения в каждый момент времени, получим эволюцию возмущения u . Технически, для определения эволюции поля u удобно вместо задачи для $v1$ переписать уравнения Навье-Стокса относительно возмущения $u = v1 - v$ и совместно с задачей для v при $t > t0$ интегрировать непосредственно уравнения для возмущения u , в которые нестационарное поле v входит в качестве "основного" течения, на фоне которого развиваются возмущения. Метод Анализа Расхождения Турбулентных Полей (АРТП) применительно к несжимаемым пристенным турбулентным течениям был разработан автором

настоящей работы [14-16]. Показано, что независимо от начальной формы возмущение на линейном этапе развития после непродолжительного начального периода перестройки растет в среднем экспоненциально по времени (или в пространстве при исследовании пространственного развития). Скорость экспоненциального роста, будучи выраженной в пристенных единицах, оказывается универсальной константой, не зависящей ни от вида течения (рассматривались течения в круглой трубе и в плоском канале), ни от числа Рейнольдса в рассмотренном диапазоне. Для замкнутого течения (при использовании условий периодичности в направлении потока) полученное значение скорости роста возмущений соответствует старшему показателю Ляпунова, рассчитанному ранее для течения в плоском канале [17]. Универсальность скорости роста малых возмущений свидетельствует о пристенном характере генерации возмущений и указывает на причастность этого процесса к механизму самоподдержания турбулентности. Нелинейный этап развития возмущения начинается при достижении амплитудой возмущения уровня около 1% от характерной скорости потока. Нелинейное развитие ведет к насыщению, при котором возмущение переходит в состояние разности двух статистически независимых (некоррелированных) турбулентных полей, соответствующих одному и тому же течению. Можно показать, не решая задачу, что первые моменты (средние величины) поля u в этом режиме равны нулю, а вторые моменты совпадают по форме с моментами поля v , но превышают их по амплитуде в 2 раза. Можно также показать, что двухточечные корреляции в полях u и v идентичны, а это значит, что поле возмущений имеет те же структуры, отражающиеся в двухточечных корреляциях (в частности, пристенные полосы), что и основное поле v .

Приведенные соображения указывают, что метод Анализа Расхождения Турбулентных Полей позволяет исследовать все стадии цикла самоподдержания турбулентности. При этом не требуется каких-либо специальных приемов обработки исследуемого поля скорости, которые могут повлиять на результат. Изучение развития возмущения u на линейной стадии дает возможность судить о закономерностях процесса неустойчивости полосчатого движения и разрушения полос. Причем метод не только позволяет прямое сопоставление формы и расположения растущего возмущения с характером полосчатого движения, но и допускает возможность выделения существенных и малосущественных свойств полосчатого движения, определяющих рост возмущений. Развитие возмущений в начале нелинейной стадии, предшествующей этапу насыщения с образованием полос, позволяет исследовать процесс возникновения поперечных движений, вызывающих образование полос - наиболее интригующий элемент цикла самоподдержания турбулентности. В самом турбулентном поле эти поперечные движения имеют незначительную амплитуду и скрыты на фоне более интенсивных случайных пульсаций. Существует несколько точек зрения на природу и форму таких движений. Более того, сам факт существования организованных поперечных движений (продольных вихрей) подвергается сомнению. Предлагаемый подход указывает конструктивный путь разрешения накопившихся противоречий. Наконец, последний, нелинейный этап развития возмущений, ведущий к насыщению, дает возможность непосредственного наблюдения за процессом образования полос. Таким образом, метод Анализа Расхождения Турбулентных Полей представляет совершенно новые, не применявшиеся ранее возможности изучения всех стадий цикла самоподдержания турбулентности, определения их качественных и количественных характеристик, выделения определяющих свойств.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 14-01-00295. Вычисления проводились на суперкомпьютерном комплексе МГУ «Ломоносов».

ЛИТЕРАТУРА.

- [1] Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A. & Rundstadler, P. W. The structure of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* 30, 741, 1967.
- [2] Smith, J. R. & Metzler, S. P. The characteristics of low-speed streaks in the near-wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* 129, 27–54, 1983.
- [3] Asai, M. and Nishioka, M. Origin of the peak-valley wave structure leading to wall turbulence, *J. Fluid Mech.* 208, 1, 1989.
- [4] Butler, K. M. & Farrell, B. F. Optimal perturbations and streak spacing in wall-bounded turbulent shear flows. *Phys. Fluids A* 5, 774–777, 1993.

- [5] Waleffe, F. Hydrodynamic stability and turbulence: beyond transients to a self-sustaining process. *Stud. Appl. Math.* 95, 319–343, 1995.
- [6] Panton, R. L. (ed.) *Self-Sustaining Mechanism of Wall Turbulence*. Computational Mechanics Publication, Southampton, 1997.
- [7] Никитин Н.В., Чернышенко С.И. О природе организованных структур в турбулентных пристенных течениях. Изв. РАН МЖГ, 1, 24-30, 1997. Перевод: Nikitin N.V., Chernyshenko S.I. On the nature of the organized structures in turbulent near-wall flows. *Fluid Dyn.* 32(1), 18-23, 1997.
- [8] Schoppa W., Hussain F. Coherent structure generation in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.* 453, 57-108, 2002.
- [9] Chernyshenko S. I., Baig M. F. The mechanism of streak formation in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.* 544, 99–131, 2005.
- [10] del 'Alamo, J. C., Jimenez J. Linear energy amplification in turbulent channels. *J. Fluid Mech.* 559, 205–213, 2006.
- [11] Hwang Y., Cossu C. Amplification of coherent streaks in the turbulent Couette flow: an input–output analysis at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* 643, 333–348, 2010.
- [12] Gayme D.F., McKeon B.J., Bamieh B., Papachristodoulou A., Doyle J.C. Amplification and nonlinear mechanisms in plane Couette flow. *Phys. Fluids* 23, 065108, 2011.
- [13] Farrell B.F., Ioannou P.J. Dynamics of streamwise rolls and streaks in turbulent wall-bounded shear flow. *J. Fluid Mech.* 708, 149-196, 2012.
- [14] Nikitin N. Spatial periodicity of spatially evolving turbulent flow caused by inflow boundary condition. *Phys. Fluids*, 19(9), 091703-4, 2007.
- [15] Nikitin N. On the rate of spatial predictability in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.* 614, 495-507, 2008.
- [16] Никитин Н.В. О скорости роста возмущений в пристенных турбулентных течениях. Изв. РАН, МЖГ, 5, 27-32, 2009. Перевод: Nikitin N.V. Disturbance growth rate in turbulent wall flows. *Fluid Dyn.* 44(5), 652-657, 2009.
- [17] L. Keefe, P. Moin, and J. Kim, “The Dimension of Attractors Underlying Periodic Turbulent Poiseuille Flows,” *J. Fluid Mech.* 242, 1, 1992.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭФФЕКТОВ ПАЛЬЦЕВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ С ПРЕДЕЛОМ ТЕКУЧЕСТИ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ

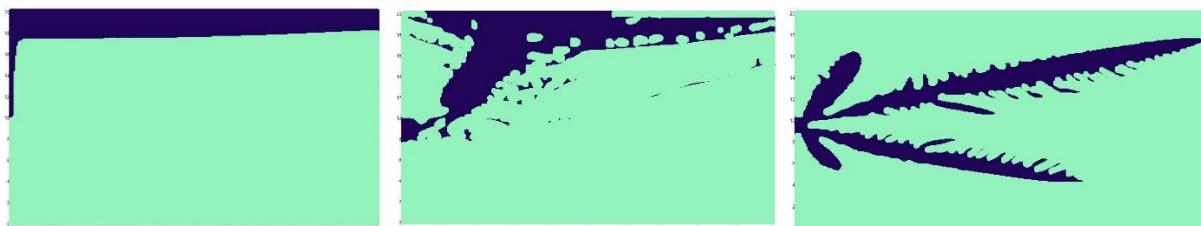
Екатерина Зилонова, Андрей А. Осипцов, Сергей Боронин, Наталья Лебедева, Дин Виллберг, и Жан Дерош,
Schlumberger

Вытеснение неньютоновских жидкостей при горизонтальном течении через вертикальный канал с плоскими стенками встречается в целом ряде природных (течение магмы в каналах вулканов) и индустриальных (гидроразрыв нефтеносного пласта) приложениях. Гидроразрыв пласта, содержащего углеводороды, для стимуляции добычи нефти или газа как правило приводит к образованию трещин в следствие последовательной закачки неньютоновских жидкостей в скважину под высоким давлением. В результате, формируется вытеснение неньютоновских жидкостей в узком слоте, что приводит к развитию пальцевой неустойчивости на границе раздела.

Предложена модель течения в трещине гидроразрыва, которая позволяет получить понимание процесса. С точки зрения гидромеханики, в трещине формируется вытеснение жидкости Хершеля-Балкли жидкостью со степенной реологией, что приводит к развитию неустойчивости Сэффмана-Тэйлора на поверхности раздела. Большинство гидроразрывных жидкостей имеют степенную реологию. Суспензии с примесью твердых частиц нередко обладают свойством предела текучести, который может иметь значительное влияние на процесс развития неустойчивости на поверхности раздела. В рамках приближения тонкого слоя построена новая модель, учитывающая предел текучести суспензии. Система определяющих уравнений включает уравнение переноса для объемной доли жидкостей и частиц, а также нелинейное эллиптическое уравнение для давления с граничными условиями смешанного типа.

Модель и ее численная реализация были верифицированы относительно трех различных наборов экспериментальных данных, полученных в ячейке Хеле-Шоу: гравитационная конвекция тяжелой и легкой жидкостей, вытеснение жидкостей с разными вязкостями с развитием пальцевой неустойчивости на границе раздела, и вытеснение жидкости с пределом текучести жидкостью со степенной реологией, с образованием фрактальной пальцевой неустойчивости. Получено хорошее качественное и количественное согласие между численными расчетами и экспериментальными данными.

Было проведено параметрическое исследование процесса вытеснения с целью изучения эффекта Бингамовской реологии (предела текучести) на взаимодействие между пальцевой неустойчивостью и гравитационной конвекцией. Вытесняющая жидкость – вода, а вытесняемая это суспензия на основе Бингамовской жидкости. В численных расчетах варьировалась динамическая вязкость и предел текучести. Показано, что существуют три различных сценария, в зависимости от вязкости вытесняемой суспензии (Фиг. 1): гравитационная конвекция или оплывание (низкая вязкость, например вода), промежуточный режим (средняя вязкость, например неразбавленный глицерин), и режим с преимущественным развитием пальцевой неустойчивости, где гравитационная неустойчивость подавляется (высокая вязкость, например сшитый полимерный гель). С увеличением предела текучести суспензии ширина пальцев уменьшается, пальцы становятся тоньше и длиннее при том же объеме закачиваемой вытесняющей жидкости.



Фиг. 1. Различные режимы вытеснения суспензии с пределом текучести (зеленый) с объемной долей частиц $C = 0.4$ с помощью ньютоновской жидкости (синий) в ячейке Хеле-Шоу. Слева направо: режим гравитационного оплывания ($\mu = 0.001 \text{ Pa.s}$, без предела текучести), промежуточный ($\mu = 0.1 \text{ Pa.s}$, без предела текучести), и режим с преимущественным образованием пальцев ($\mu = 1 \text{ Pa.s}$, предел текучести = 1 Pa). Здесь в скобках показана вязкость жидкости суспензии.

INTERPLAY BETWEEN FINGERING INSTABILITY AND SLUMPING IN DISPLACEMENT OF YIELD-STRESS FLUIDS IN A HELE-SHAW CELL

Ekaterina Zilonova, Andrei A. Osipov, Sergei A. Boronin, Natalia Lebedeva, Dean Willberg, and Jean Desroches,
Schlumberger

The displacement of non-Newtonian fluids in horizontal flow through a vertical channel with plane walls occurs in a variety of natural (lava flow in dykes) and industrial (hydraulic fracturing) applications. Hydraulic fracturing of a hydrocarbon-bearing rock for stimulation of oil or gas production typically creates a hydraulic fracture by pumping a series of different non-Newtonian fluids under high pressure through the well into the rock. As a result, sequential displacement of different non-Newtonian fluids forms in a narrow slot, giving rise to interfacial instability and fingering. These phenomena are in focus of the present work.

A modeling approach was chosen to gain insight in the fracturing process, which, from the fluid mechanics point of view, is a displacement of a Herschel-Bulkley fluid by a power law fluid in a Hele-Shaw cell, leading to the development of a Saffman-Taylor instability at the interface between the fluids. Most hydraulic fracturing simulators use a power law rheology. Proppant-laden slurries, however, often exhibit a yield stress, which is expected to play a large role in the development of interfacial instabilities. A novel numerical model, which takes into account the yield-stress behavior of the slurry, was thus developed using the lubrication approximation. The system of governing equations includes transport equations for fluid volume fractions and a nonlinear elliptic equation for pressure with mixed-type boundary conditions. The pressure equation is solved with a fixed-point (Picard) iterations method, with the multigrid linear solver used at each iteration.

The model and its numerical implementation were validated against three distinct sets of experiments conducted in Hele-Shaw cells: gravitational slumping of a heavy fluid in a light one, displacement of fluids with different viscosities resulting in fingering at the interface, and displacement of a yield-stress fluid by water and power-law fracturing gel, which leads to the formation of fractal-like fingering patterns. Good qualitative and quantitative agreement between numerical simulations and experiments was obtained.

A parametric study of fluid injection sequences was conducted to study the particular effect of the Bingham rheology on the interplay between fingering and slumping. The displacing fluid is water, and the displaced fluid is a suspension based on a Bingham fluid of variable dynamic viscosity. It was found that there are basically three scenarios, depending on the viscosity of the displaced suspension (Fig. 1): slumping (low viscosity, e.g., water), intermediate (moderate viscosity, e.g., nondiluted glycerin), and fingering dominated, where slumping is damped (high viscosity, corresponding to that of crosslinked polymer gels). With increase in the yield stress of the suspension, the fingers' thickness decreases, they get thinner and longer for the same amount of clean fluid injected.

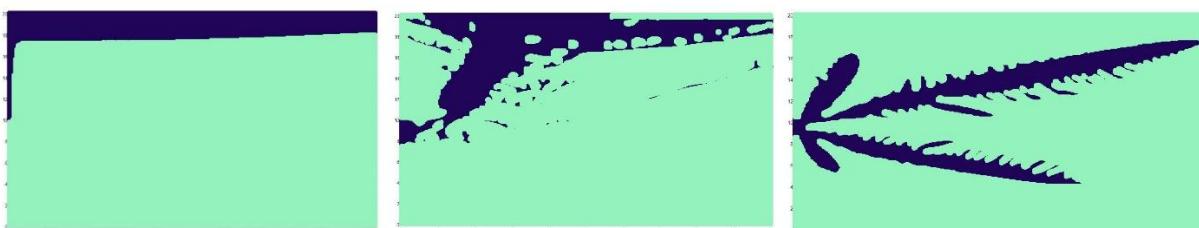


Figure 1. Various patterns in displacement of yield-stress suspension (green) with particle volume fraction $C = 0.4$ by a Newtonian fluid (blue) in a Hele-Shaw cell. From left: slumping dominated ($\mu = 0.001 \text{ Pa.s}$, no yield stress), intermediate ($\mu = 0.1 \text{ Pa.s}$, no yield stress), and fingering dominated ($\mu = 1 \text{ Pa.s}$, yield stress = 1 Pa), with the viscosity of the carrier fluid in parentheses.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НАКЛОНА В ПЛОСКОСТИ ШИРОКИХ ГРАНЕЙ ЯЧЕЙКИ ХЕЛЕ – ШОУ НА КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ

В. О. Ощепков ^a, И. А. Бабушкин ^b

^{a, b}Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614068, Пермь, Букирева, 15

Важным направлением в гидродинамике является исследование течений жидкости в трехмерных областях. Но, определенные предположения о геометрии области и характере течения позволяют свести трехмерную задачу к плоской. Хорошой физической моделью, позволяющей преобразовать трехмерную задачу к двумерной, является ячейка Хеле - Шоу.

Конвективные течения в жидкостях и газах, возникающие при наличии пространственной неоднородности плотности в поле тяжести, являются самым распространенным видом движения газов и жидкостей в природе. Для бинарной смеси характерна термоконцентрационная конвекция. В неизотермической бинарной смеси конвекция возникает за счет пространственной неоднородности температуры и концентрации, а также двух механизмов диссипации: теплопроводности и диффузии. При этом действуют перекрестные кинетические эффекты: термодиффузии и диффузионной теплопроводности [1]. В работе [2] экспериментально и теоретически были исследованы механизмы возбуждения тепловой конвекции в вертикальных каналах с теплопроводными границами для бинарной жидкости с известными термодиффузионными свойствами. Показано, что, в зависимости от надкритичности, в бинарной жидкости возможны постоянные и устойчивые колебательные тепловые режимы конвекции. В работах [3] и [4] представлены результаты влияния на конвективные течения однокомпонентной жидкости в ячейке Хеле-Шоу центробежных сил и вертикальных вибраций. Как показали исследования влияние центробежных сил аналогично влиянию наклона полости в плоскости широких граней.

В настоящей работе представлены результаты экспериментального исследования конвективных течений неизотермической бинарной смеси в ячейке Хеле–Шоу с границами конечной теплопроводности в статическом поле тяжести при наклоне кюветы относительно широких граней на угол α и подогреве сверху. В качестве исследуемой жидкости используется 10%-ый раствор спирта в воде. Для визуализации течений используются светорассеивающие частицы кополиамида размером 50÷80 мкм. Для изучения поведения температурного поля в рабочую полость были помещены спай дифференциальных термопар. Эксперименты проводились для различных фиксированных углов наклона (15, 20, 30, 45 градусов) с разностью температур на теплообменниках от 0,5°C до 40°C.

Получена карта режимов течений в зависимости от угла наклона полости и числа Рэлея. Исследована динамика температурного поля для различных конвективных течений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований 13-01-96010.

Список литературы

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972, 68 с.
2. Demin V.A., Glukhov A.F. Thermal convection of binary mixes in thin channels. // 8-th International Meeting on Thermodiffusion (Lecture Notes) – Julich .(Germany). - 2008. - Р. 187-195.
3. Бабушкин И.А., Демин В.А., Кондрашов А.Н., Пепеляев Д.В. Тепловая конвекция в ячейке Хеле-Шоу при действии центробежных сил // Изв. РАН, Механика жидкости и газа, 2012, № 1, с. 14-25.
4. Демин В. А., Макаров Д. В. Устойчивость конвективных течений в ячейке Хеле-Шоу при воздействии вертикальных вибраций // Вестник Пермского Университета, Сер. Физика, Вып. 1, 2005, с. 101-110.

Гидродинамико-статистическая модель прогноза сильных шквалов и смерчей умеренных широт при неустойчиво стратифицированной атмосфере и результаты независимых испытаний этого прогноза для территории ЕТР

Переходцева Э.В.

(Гидрометцентр России/ Московский технический университет МИРЭА)

Развитие методов автоматизированного прогноза таких редких и опасных явлений, как смерчи и сильные шквалы, сопровождающиеся порывами максимального ветра скоростью 25м/с и более до настоящего времени является чрезвычайно актуальной задачей синоптической практики. Во многих наших статьях [2,3,4] и, в частности, на конференции НeЗaTeГиУc, посвященной 100-летию академика Петрова [5], были подробно описаны те условия в атмосфере, которые могут способствовать возникновению разрушительных смерчей и сильных шквалов на Европейской территории России. Увеличение заблаговременности прогноза этих явлений (до 12-36 ч.) позволило бы заранее принять предохранительные меры и существенно снизить приносимый ими материальный ущерб. К сожалению, даже оперативные мезомасштабные гидродиномические модели прогнозируют лишь 5-15% этих явлений и пока не дают успешного их прогноза.

Поэтому для достижения успешных результатов прогноза на данных «объективного анализа» была разработана статистическая модель распознавания этих редких опасных явлений, когда метеорологическая ситуация, приводящая к смерчам или сильным шквалам в неустойчиво стратифицированной атмосфере представлялась в виде вектора $\mathbf{X}(A)=(x_1(A), x_2(A), \dots, x_n(A))$, где $n=38$ параметров, которые могли быть получены из прогностических полей региональной модели Гидрометцентра России. Таким образом, множество векторов $\{\mathbf{X}(A)\}$ составляло обучающую выборку для наличия явления смерчей и сильных шквалов. Обучающая выборка для отсутствия таких явлений состояла из метеоситуаций, при которых в неустойчиво стратифицированной атмосфере наблюдались грозы, ливни и даже порывы ветра скоростью 8-10м/с. Обучающая выборка отсутствия смерчей и сильных шквалов (явления A) в неустойчиво стратифицированной атмосфере или наличия явления B (отсутствия явлений A) представляла множество $\{\mathbf{X}(B)\}$. Модель распознавания множеств $\{\mathbf{X}(A)\}$ и $\{\mathbf{X}(B)\}$ была построена с помощью байесовского подхода [1, 2]. Этот подход позволяет минимизировать ошибки прогноза первого и второго рода и получающиеся при этом средние экономические потери.

Задачей, предшествующей проблеме распознавания этих множеств $\{\mathbf{X}(A)\}$ и $\{\mathbf{X}(B)\}$, была проблема уменьшения размерности пространства признаков (параметров атмосферы, используемых при составлении диагноза и прогноза). Это было сделано с помощью алгоритма диагонализации средней выборочной матрицы корреляции \mathbf{R} и выбора наиболее информативных представителей от каждого блока и отдельных информативных предикторов [2]. В качестве параметра информативности был использован критерий – расстояние Махalanобиса $\Delta^2 (\Delta^2 = (m_i(A) - m_i(B))^T \mathbf{R}^{-1} (m_i(A) - m_i(B)))$ [1,2].

Здесь $m_i(A)$ и $m_i(B)$ – компоненты векторов математического ожидания для явления A - $\mathbf{M}(A)$ и явления B - $\mathbf{M}(B)$, σ_i^2 – средняя дисперсия параметра i. В результате в состав наиболее информативного вектора-предиктора вошли следующие наиболее информативные и слабо зависимые параметры (V_{700} , T_3 , Td_3 , H_{1000} , Iw , dT/dn_3 , T_{300}), где наиболее информативными являются V_{700} , T_3 , Td_3 .

Сначала нами была рассчитана дискриминантная функция для прогноза шквалов скоростью 20м/с и более $F_1(\mathbf{X})$, а затем и функция $F_2(\mathbf{X})$ для прогноза смерчей и очень сильных шквалов скоростью 25м/с и выше. В узлах сетки региональной модели 75x75км в зависимости от значений гидродинамических прогнозов рассчитываются вероятности возникновения шквалов двух классов $P_1(\mathbf{X})$ и $P_2(\mathbf{X})$: $P_1(\mathbf{X})=100/(1+\exp(-F_1(\mathbf{X})))$; $P_2(\mathbf{X})=100/(1+\exp(-F_2(\mathbf{X})))$. Файлы с этими полями вероятностей для прогнозов с заблаговременностью 12-24-36-48 ч. записываются в банк данных АСОИ Гидрометцентра России, а также на FTP – сервер Гидрометцентра России, откуда их могут брать и использовать в оперативной синоптической практике синоптики для формирования категорического прогноза смерчей и сильных шквалов по вероятностям $P_2(\mathbf{X})$, превышающим пороговую вероятность $P=60\%$ (для прогноза на текущий день), и для прогноза на 36 ч. при превышении пороговой вероятности $P=52\%$ для соответствующего файла.

В Гидрометцентре России в течение летних сезонов последних пяти лет проводились очень жесткие автоматизированные испытания этого метода. Гидродинамико-статистический прогноз на текущий день был в 2012 г. рекомендован по результатам испытаний для использования в синоптической практике [6].

В последующие годы независимая проверка прогнозов проводилась по криволинейным областям одноградусной сетки, покрывающей территорию ЕТР. Предупрежденность альтернативного прогноза явлений смерчей и сильных шквалов со скоростью 25м/с и выше в 2015 г. составила 52% при предупрежденности отсутствия явления 87%, а предупрежденность такого же альтернативного прогноза на следующий день с заблаговременностью 36ч оказалась даже выше – 59% при предупрежденности отсутствия таких явлений – 85%. Надо отметить, что повторяемость явлений смерчей, сильных шквалов и сильных порывов ветра скоростью $V>24\text{м/с}$ чрезвычайно мала поэтому прогноз таких явлений считается оправдавшимся, даже если были зафиксированы порывы максимального ветра скоростью 22м/с и более. При такой оценке «с допуском» предупрежденность сильных шквалов и смерчей составила 75-77%. Предупрежденность отсутствия явлений сильных шквалов и смерчей на практике также выше 85%, ибо при проводимой автоматизированной оценке не учитывалась устойчивая стратификация атмосферы, при которой в синоптической практике сразу дается отсутствие явлений сильных шквалов и смерчей со скоростью ветра $V>25\text{м/с}$.

Вместе с тем надо отметить, что все смерчи были предсказаны не только на текущий день, но и на следующий за 24-36 ч. Это касается, в частности, самого сильного за последние годы смерча в Янаульском районе Башкирии (пос. Дютюрли и др.) 29 августа 2014 года. При этом на 6 станциях были отмечены (предсказанные нами) шквалы скоростью 22м/с и выше. На 29 станциях были отмечены ветры скоростью 19м/с и выше. Все они, кроме 3-х явлений, также были предсказаны.

В тот день на достаточно большой территории в узлах сетки 75x75 км были зафиксированы вероятности прогноза, не только превышающие пороговую вероятность $P=60\%$, но и очень высокие вероятности, близкие к $P=92\text{-}96\%$ (см. рис. 1). В докладе приводятся примеры прогноза сильных шквалов и смерчей в Одессе 31 мая 2013 года, в Сочи 20 сентября 2013 года, в С-Петербурге 29 июля 2010 года и многие другие, в частности, и в Сибири, в г. Благовещенске. Результаты испытаний сильных шквалов и смерчей с заблаговременностью 36 ч. должны быть представлены на секции Ученого Совета Гидрометцентра России в феврале-марте 2016 года, а позднее – на Центральной Методической Комиссии Росгидромета.

В настоящее время нами разработана программа прогноза этих опасных явлений до 3-х суток с использованием в гидродинамико-статистической модели прогноза выходных полей глобальной полулагранжевой модели (автор – Толстых М.А.), что

позволит при успешных результатах испытаний использовать этот прогноз при подготовке населения и администрации районов к возникновению таких явлений с помощью принятия необходимых превентивных мер защиты.

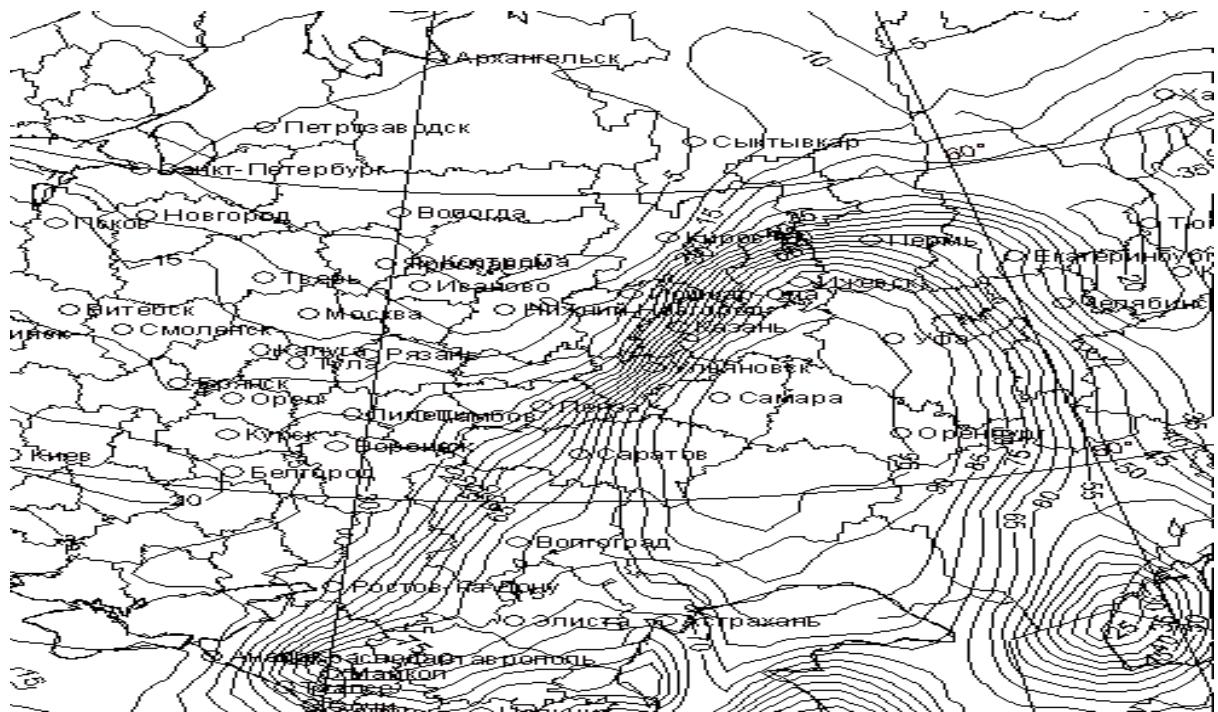


Рис.1. Область прогноза максимального ветра $V>=25\text{м/с}$ ограничена изолинией вероятности $P=60\%$. В районе возникновения смерча (между Уфой и Ижевском) $P=90\%$ и более.

Литература

- [1] Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. – 1963. – М.: Физматгиз, 500с.
- [2] Переходцева Э.В. Прогноз шквалов статистическими методами классификации на основе диагностических и прогностических синхронных связей. 1985 – Гидрометиздат. Труды Гидрометцентра СССР. 1985. Вып. 271. С. 37-60.
- [3] Переходцева Э.В. Прогноз сильных шквалов и смерчей в летний период 2009 года на основании статистических моделей // Труды Гидрометцентра России. 2010. вып. 344. С. 265-280.
- [4] Переходцева Э.В. Гидродинамико-статистическая модель прогноза шквалов и смерчей с заблаговременностью 12-36 ч. для территории Сибири. «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса». 2011г. т. 8. – N 1. – С. 263-270.
- [5] Переходцева Э.В. Условия возникновения и вероятностный прогноз смерчей и штормового ветра на основе статистических моделей. Материалы международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность». 2012 г. Москва (5.02.12-11.02.12). С. 173-175.
- [6] Переходцева Э.В. Гидродинамико-статистический метод прогноза шквалов и очень сильного ветра в градации опасных явлений в летний период с заблаговременностью 12-36ч по выходным данным региональной модели для Европейской территории России. 2013. – Информационный сборник, N40, С. 170-181.

ВЕТВЛЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕРМОДИФФУЗИИ

Е.И. Петрова, И.В. Моршнева

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается задача о возникновении конвекции в бинарной смеси, расположенной между двумя вертикальными бесконечными изотермическими пластинами. В задаче имеются перекрестные кинетические эффекты — термодиффузия и диффузационная теплопроводность (последняя в данной работе не учитывается).

Уравнения движения имеют стационарное (основное) решение с кубическим профилем скорости, постоянным давлением, линейным распределением температуры и концентрации. Линейная устойчивость основного стационарного решения изучалась в работах Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Л.Е. Сорокина. Ими было показано [1], что возможна и монотонная, и колебательная потеря устойчивости основного режима.

Данная работа посвящена изучению ветвления и устойчивости периодических по времени режимов течения, возникающих при колебательной потере устойчивости основного режима относительно плоских возмущений, периодических по вертикальной переменной. Уравнения возмущений имеют группу симметрии $O(2)$, и применима теория бифуркации рождения циклов в системах с такой симметрией, развитая В.И. Юдовичем и И.В. Моршневой применительно к задаче конвекции в вертикальном слое жидкости [2]. Из результатов теории следует, что при переходе параметра через критическое значение колебательной потери устойчивости от основного режима может ответвиться два вида автоколебаний: две, бегущие навстречу друг другу, простые волны и нелинейная смесь пары бегущих волн. Характер ветвления и устойчивость этих режимов зависит от соотношений между коэффициентами системы уравнений разветвления. Для определения этих коэффициентов численно находятся собственные функции линейной и сопряженной задач устойчивости, решается ряд неоднородных краевых задач с правыми частями, явно зависящими от этих же собственных функций. Проведенные вычисления показали, что и бегущие волны, и их нелинейная смесь могут быть устойчивы в зависимости от значений параметров. Обнаружено, что возможны следующие пять типов ветвления:

1. бегущие волны ответвляются в свехкритическую область и устойчивы, нелинейная смесь волн ответвляется в свехкритическую область и неустойчива;
2. бегущие волны ответвляются в свехкритическую область и неустойчивы, нелинейная смесь волн ответвляется в свехкритическую область и устойчива;
3. бегущие волны ответвляются в свехкритическую область, нелинейная смесь волн ответвляется в докритическую область, все режимы неустойчивы;
4. бегущие волны ответвляются в докритическую область, нелинейная смесь волн ответвляется в свехкритическую область, все режимы неустойчивы;
5. все режимы ответвляются в докритическую область и неустойчивы.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (Задание №1.1398.2014/К)

ЛИТЕРАТУРА.

1. Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука. 1972.

2. И.В. Моршнева, В.И. Юдович. Об ответвлении циклов от равновесий инверсионно- и вращательно-симметричных динамических систем. СМЖ, 1985, т. 26, № 1, с.124-133.

Свойства решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса. Особенности численного моделирования

Л.И.Петрова

*Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова,
факультет Вычислительной Математики и Кибернетики*

Показано, что уравнения Эйлера и Навье-Стокса обладают двойными решениями: на неинтегрируемом, касательном, многообразии и на интегральных структурах. Переход от решений первого типа ко второму описывает переход газодинамической системы от неравновесного состояния к локально-равновесному и процесс возникновения завихренности или турбулентности.

Двойственность решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса обусловлена специфическими свойствами этих уравнений. Во-первых, эти уравнения являются системой уравнений законов сохранения энергии, количества движения и массы. От согласованности уравнений законов сохранения зависит интегрируемость и свойства решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса. И, во-вторых, поскольку уравнения Эйлера и Навье-Стокса описывают определенную среду (течение жидкости или газа), то должна существовать связь между функциями, описывающими величины этой среды (давлением, плотностью, температурой). Такая связь, которая обычно не учитывается, описывается функционалом состояния. Для газодинамической системы таким функционалом является энтропия.

Из уравнений Эйлера и Навье-Стокса при исследовании согласованности уравнений законов сохранения получается соотношение для энтропии, которое и раскрывает свойства решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса.

С двойственностью решений связаны трудности решения уравнений Эйлера и Навье-Стокса. Так как решения определены на разных пространственных объектах, то они не могут быть получены обычным непрерывным численным моделированием производных с помощью одной системы координат.

Решение уравнений Эйлера и Навье-Стокса обычно сводится или к численному моделированию производных только на касательном многообразии или только на интегральных структурах или поверхностях кокасательного многообразия. Первый подход - это непосредственное численное моделирование уравнений Эйлера и Навье-Стокса, которое выполняется на касательном многообразии, и позволяет получить неточные решения. А второй подход - это получение точных решений. Чтобы получить точные решения, на уравнения накладываются условия интегрируемости (условия совместности уравнений). Для этого используются такие методы как метод характеристик, симметрий, собственных функций и т.д.. Это позволяет получить интегральные структуры или поверхности.

И тот и другой подходы оказываются незамкнутыми. Первый подход (который обычно применяется в механике сплошных сред, где требуется описать течение газа, то есть процесс) не дает возможности

получить точные решения, которые описывают возникающие образования. А второй подход (который используется в физике сплошных сред, где интересуются точными решениями, описывающими какие-либо структуры и наблюдаемые образования) не позволяет определить динамику возникновения точных решений и получить разрывы производных или самих функций, описывающих интенсивность возникающих образований.

Получить полное решение и описать процессы возникновения завихренности и турбулентности можно только с помощью двух систем координат или решая уравнения одновременно численно и аналитически.

Частота акустического излучения цилиндрического вихря на плоскостиТ.А. Петрова^{1,a}, Ф.В. Шугаев^{1,b}¹ Кафедра квантовой статистики и теории поля,

Физический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва 119991, Россия

E-mail: tatyana.a.petrova@gmail.com^a shugaev@phys.msu.ru^b

Определена частота акустического излучения одиночного цилиндрического вихря на плоскости в вязком теплопроводном газе при малой начальной завихренности. Задача решена на основе уравнений Навье-Стокса.

Исходные уравнения

С учетом разложения Гельмгольца для вектора скорости на потенциальную и соленоидальную часть, уравнения Навье-Стокса в безразмерном виде могут быть записаны следующим образом [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Omega_i}{\partial t} = \nu \Delta \Omega_i + \frac{3}{4} \varepsilon_{ijk} \nu \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_m} - v_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} + \Omega_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} - s \Omega_i + f_{1i}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -v_j \frac{\partial w}{\partial x_j} + s, \\ \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{e^h}{\gamma} \Delta w + \frac{4}{3} \nu \Delta s - \left(\frac{1}{\gamma} e^h + 0.5 s \nu \right) \Delta h + 1.5 \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} - v_j \frac{\partial s}{\partial x_j} + f_2, \\ \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\gamma}{Pr} \eta \Delta h - (\gamma - 1) s - v_j \frac{\partial h}{\partial x_j} + f_3, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i},$$

$$w = -\ln \rho, h = \ln T,$$

$$\nu = \mu/\rho, \eta = \lambda/\rho, i=1,2,3, j=1,2,3, l=1,2,3.$$

Здесь ε_{ijl} - антисимметричный тензор, ρ, T, \vec{v} - безразмерные значения плотности, температуры, скорости (отнесенные к ρ_0, T_0, c_0 , соответственно); μ, ν, λ, c - вязкость, кинематическая вязкость, теплопроводность и низкочастотная скорость звука, γ - показатель адиабаты; Pr - число Прандтля. Функции f_{1i}, f_2, f_3 - нелинейные члены относительно первых производных по координатам. Индекс “0” относится к начальному состоянию.

Система (1) обезразмерена с использованием характеристической длины $l_0 = v_0 / c_0$ и характеристического времени $t_0 = v_0 / c_0^2$.

Постановка задачи

В начальный момент завихренность имеет отличное от нуля значение ω_0 только внутри газообразного кругового цилиндра радиуса r_0 и высотой z_0 . Цилиндр располагается на плоскости. Ось цилиндра перпендикулярна плоскости. Задача решается в предположении, что начальная завихренность ω_0 мала ($\omega_0 \ll 1$).

Решение и результаты

При решении системы (1) использовалось разложение неизвестных функций в ряд по степеням малого параметра (завихренности) $\varepsilon = \omega_0$ [2]:

$$\begin{aligned}\Omega_1^{(1)}(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 \Omega_1^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 \Omega_1^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 \Omega_1^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\ \Omega_2^{(1)}(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 \Omega_2^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 \Omega_2^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 \Omega_2^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\ \Omega_3^{(1)}(\vec{x}, t) &= \varepsilon \Omega_3^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^2 \Omega_3^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 \Omega_3^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\ w(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 w^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 w^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 w^{(3)}(\vec{x}, t) \dots, \\ s(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 s^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 s^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 s^{(3)}(\vec{x}, t) \dots, \\ h(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 h^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 h^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 h^{(3)}(\vec{x}, t) \dots, \\ v_i(\vec{x}, t) &= \varepsilon v_i^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^2 v_i^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 v_i^{(3)}(\vec{x}, t) \dots\end{aligned}\quad (2)$$

Кратные интегралы вычислены с применением сеток Коробова [3].

Система (1) имеет осциллирующие решения, затухающие во времени. Принимая во внимание то, что дисперсионная кривая $\omega_r(k)$ имеет две ветви, мы учитывали только ту ветвь, которая соответствует меньшим значениям коэффициентов затухания σ_1, σ_2 .

Были получены **результаты**, демонстрирующие зависимость плотности от времени.

Рис.1, 2 иллюстрируют осцилляции плотности внутри первоначального вихревого цилиндра.

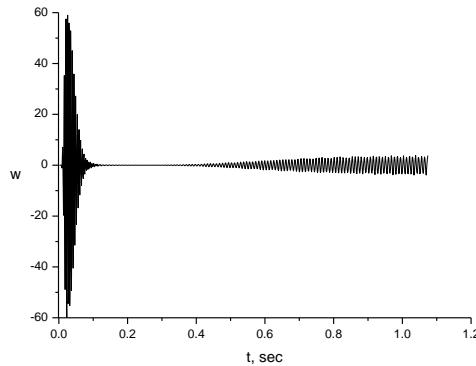


Рисунок 1: Зависимость $w = -\ln \rho$ от времени на оси цилиндра,

$r_0 = 0.188$ см, $z_0 = 2.909$ см, $z = 1.7$ см, высокая частота осцилляций составляет примерно 110 Гц.

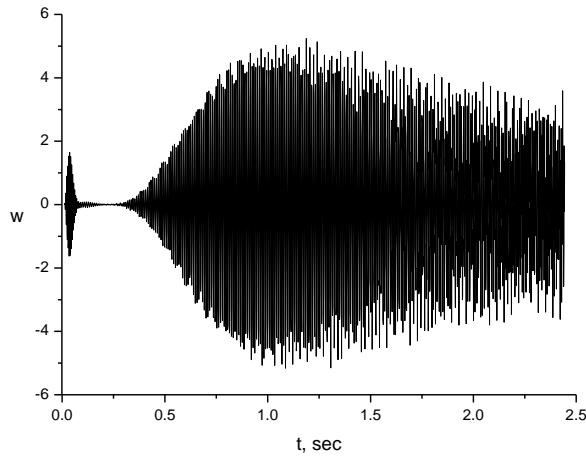


Рисунок 2: Зависимость $w = -\ln \rho$ от времени при $r = r_0/2$,

$r_0 = 0.188$ см, $z_0 = 2.909$ см, высокая частота осцилляций составляет примерно 110 Гц.

Рис.1 относится к точке на оси цилиндра. Как можно видеть, сначала амплитуда колебаний растет, затем спадает до нуля, но потом колебания возникают заново уже с меньшей амплитудой и постепенно затухают. Рис.2 демонстрирует колебания при $r = r_0/2$. В этом случае также можно различить два временных интервалов, в которых амплитуда колебаний достаточно велика. Но теперь максимальная амплитуда наблюдается на участке второй волны колебаний.

Процесс имеет другой вид для течения вне первоначального цилиндра (Рис.3).

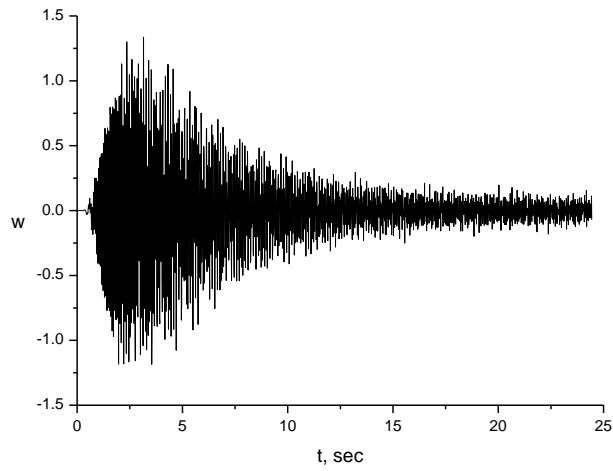


Рисунок 3: Зависимость $w = -\ln \rho$ от времени при $r > r_0$, $0 < t < 2.5$ с

$r = 1.709$ см, $r_0 = 0.188$ см, $z_0 = 2.909$ см, высокая частота осцилляций равна примерно 250 Гц.

Рис.3 описывает развитие процесса вне цилиндра: возникновение колебаний, их нарастание и затухание.

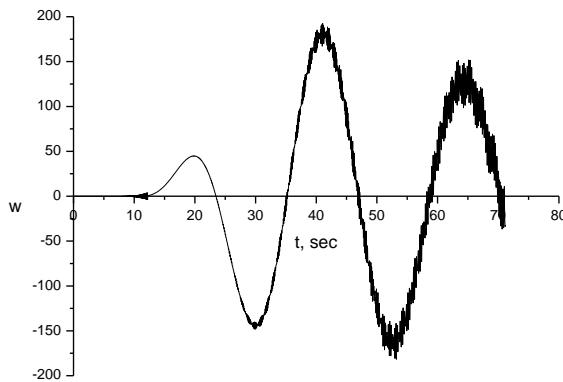


Рисунок 4: Зависимость $w = -\ln \rho$ от времени при $r_1 > r_0$,

$r = 8.545$ см, $r_0 = 0.94$ см, $z_0 = 14.545$ см высокая частота осцилляций равна примерно 15 Гц.

Дополнительно работе исследовалась зависимость вида и частоты осцилляций для геометрически подобных полей течения в зависимости от масштаба. На Рис.4 показан процесс для случая, геометрически подобного представленному на Рис.3 (с коэффициентом подобия 5). Обнаружено, что собственная частота колебаний существенно меньше, по сравнению с рассмотренными ранее случаями.

Выводы

Показано, что при вращении одиночного цилиндра на плоскости имеют место высокочастотные осцилляции, модулированные низкочастотным сигналом. Значение высокой частоты остается постоянным в течение длительного периода времени. Таким образом, высокую частоту осцилляций можно считать собственной частотой вихря. При этом значение собственной частоты зависит только от начального радиуса вихревого цилиндра и не зависит от интенсивности начальной завихренности. Как и ожидалось из физических соображений, собственная частота уменьшается при увеличении начального радиуса цилиндра. Кроме того, она имеет различные значения в различных областях - внутри начального цилиндра и во внешней области.

Результаты работы представляют интерес в аэроакустике и могут быть полезны для моделирования торнадо.

Литература

1. Петрова Т.А, Шугаев Ф.В. Частота акустического излучения цилиндрического вихря // Вестник Московского Университета, серия 3. Физика, Асторономия. — 2015. — № 4. — С. 31–35.
2. П.Г. Яковлев, Излучение звука плоским локализованным вихрем, // Акуст. журн. 2012. **58**, № 4. С. 563.
3. Н.М. Коробов, Теоретико-числовые методы в приближенном анализе, *Московский центр математического образования*, 2004

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ВСПЛЕСКОВ В КОНВЕКЦИИ РЭЛЕЯ-БЕНАРА

Д.Е. Пивоваров
НИИ механики МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва

Классическая задача тепловой конвекции Рэлея-Бенара привлекает внимание ученых богатством гидродинамических структур, возникающих при ламинарных режимах течения. Эти режимы предшествуют развитому турбулентному течению и интересны тем, что в них проявляются некоторые предвестники турбулизации потока. Одним из таких предвестников выступает явление внезапного возникновения и такого же внезапного исчезновения локальных турбулентных структур, называемых турбулентными всплесками, на фоне установившегося течения в виде конвективных ячеек Бенара. Подобное явление было обнаружено в экспериментах с наклонным воздушным слоем [1]. В этой работе отмечалась невозможность определения полной картины течения и локальных характеристик потока, которые могли бы быть получены из численного эксперимента. При этом было проверено, что жидкость в условиях эксперимента удовлетворяла требованиям, согласно которой уравнение её движения можно описывать уравнениями тепловой конвекции в приближении Буссинеска.

В настоящей работе проведено численное моделирование упомянутых турбулентных всплесков. В качестве математической модели используется несжимаемая жидкость. Конвективное движение, определяемое разностью плотностей в процессе нагрева учтено в члене с подъемной силой в уравнениях движения. Для численного решения задачи применялся метод конечных разностей [2]. В его основе лежит полуяяная схема интегрирования по времени третьим порядком точности, где уравнения разрешаются неявно относительно вязких членов. Она хорошо зарекомендовала себя при моделировании турбулентных порывов в гидродинамических трубах [3].

Основной целью работы является получение параметров задачи и расчетного метода, при которых осуществляется моделирование указанного явления для детального изучения внутренней структуры течения. Произведены методические расчеты с целью определения оптимальных параметров расчетной сетки, к числу которых относятся размер шага и сгущение. Диапазон изменения физических критериев подобия задачи определялся серией параметрических расчетов.

Работа поддержанна грантом РФФИ 16-31-00521.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Daniels K.E., Wiener R.J., Bodenschatz E. Localized transverse bursts in inclined layer convection // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. No 11. pp. 114501.
2. Nikitin N. Finite-difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // J. Comput. Phys. 2006. V. 217. No 2. P. 759–781.
3. Никитин Н.В., Пиманов В.О. Численное исследование локализованных турбулентных структур в трубах // МЖГ. 2015. №5. С. 64–75.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУКТУР В КРУГЛЫХ ТРУБАХ ПРИ ПЕРЕХОДНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

*В.О. Пиманов, Н.В. Никитин
МГУ им. М.В. Ломоносова, НИИ механики*

В трубах круглого сечения при переходных числах Рейнольдса турбулентность принимает форму локализованных в пространстве структур, разделенных ламинарным потоком [1]. Их называют *турбулентными порывами*. Порывы сносятся вниз по потоку примерно со средней скоростью течения, при этом их форма и пространственная протяженность остаются постоянными. В длину они составляют несколько десятков диаметров трубы. В некотором смысле порыв можно рассматривать, как единицу турбулентности, в которой в локальной форме заключен механизм ее самоподдержания. Несмотря на то, что исследованию порыва посвящено большое количество работ, вопросы о том, в чем причина пространственной локализации, что определяет его скорость перемещения, какие внутренние процессы поддерживают его существование, остаются открытыми.

Исследование турбулентного порыва осложнено присутствием беспорядочных турбулентных пульсаций, на фоне которых теряется его внутренняя структура. В работе [2] численно было найдено решение уравнений Навье-Стокса, напоминающее турбулентный порыв, но имеющее более простую динамику. Это решение принадлежит сепаратрисе, разделяющей области притяжения ламинарного и турбулентного режимов. При наложении дополнительных условий симметрии такое решение оказывается периодическим по времени, что позволяет провести его детальное исследование.

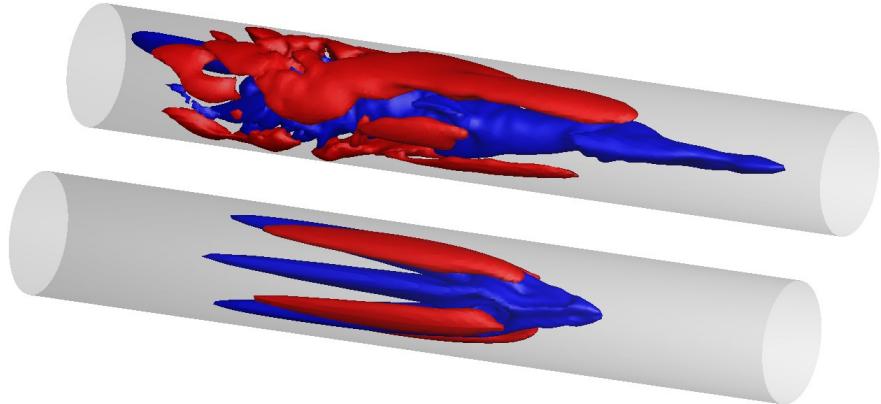


Рис. 1. Турбулентный порыв (вверху) и решение на сепаратрисе (ниже). Красным выделены области повышенной скорости, синим – пониженной. Направление потока слева направо.

Алгоритм отыскания решения на сепаратрисе состоит в следующем. Выбирается некоторое начальное поле скорости u_T , соответствующее турбулентному режиму. u_L – ламинарное поле скорости. Тогда поле скорости $u_a = u_L + a$ ($u_T - u_L$) при $a = 0$ является ламинарным, при $a = 1$ – турбулентным, и существует некоторое граничное значение a , при котором u_a не ламинаризуется, не развивается в турбулентность, а остается на сепаратрисе. Варьируя a методом деления отрезка пополам, можно достаточно точно установить решение на сепаратрису, чтобы удержать его на ней достаточно долго, чтобы определить основные свойства решения.

Решая конечно-разностным методом уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости [3], мы воспроизвели турбулентный порыв и решение на сепаратрисе при $Re =$

2200 ($Re = DU/v$, где D – диаметр трубы, U – расходная скорость, v – кинематическая вязкость). Решение на сепаратрисе действительно выходит на периодический режим с периодом $\sim 15D/U$. Так же, как и турбулентный порыв, оно оказывается локализованным в пространстве на длине $\sim 15D$, его скорость сноса составляет $\sim 1.4U$. Решение на сепаратрисе можно представить в виде суммы стационарной и пульсационной составляющих. Стационарная составляющая представляет собой ядро пониженной скорости и полосы повышенной и пониженной скорости, вытянутые вверх по потоку вдоль стенок трубы. Пульсационная составляющая представляет собой волну, бегущую вниз по порыву со скоростью $\sim 0.2U$. Было показано, что пульсационная составляющая формируется между полосами повышенной и пониженной скорости в соответствии с тем, что стационарная составляющая движения неустойчива к малым возмущениям. В свою очередь пульсации через нелинейное взаимодействие вызывают движение в поперечной плоскости, ответственное за формирование полос. Таким образом, был продемонстрирован цикл самоподдержания решения на сепаратрисе. Отметим, что решение на сепаратрисе является решением полной системы уравнений и существует во времени неограниченно долго, что позволяет предполагать схожесть механизмов самоподдержания решения на сепаратрисе и турбулентного порыва, но утверждать это можно будет лишь после дополнительного исследования. Результаты работы опубликованы в [4].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №14-01-00295-а. Вычисления проводились на базе суперкомпьютерного комплекса МГУ.

Список литературы:

1. Wygnanski I.J., Champagne F.H. // J. Fluid Mech. 1973. V. 59 (2). P. 281-335.
2. Avila M., Mellibovsky F., Roland N., Hof B. // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 110. 224502.
3. Nikitin N. // J. Comp. Phys. 2006. V. 217 (2). P. 759-781.
4. Никитин Н.В., Пиманов В.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 5. С. 64-75.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНЫХ ВТОРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВДОЛЬ ДВУГРАННОГО УГЛА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Н.В. Попеленская, Н.В. Никитин
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Разработан алгоритм численного решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости для расчета турбулентных течений вдоль углов разной величины (как внутренних, т.е. меньших 180 градусов, так и внешних). Базовая постановка задачи состоит в расчете течения в прямой трубе с сечением в виде кругового сектора с заданным углом при вершине, который может варьироваться, вообще говоря, от 0 до 360 градусов. На стенках трубы ставятся условия прилипания, вдоль потока - традиционные для моделирования турбулентности в трубах условия периодичности. Для решения уравнений Навье-Стокса в такой геометрии подходит конечноразностный метод [1] хорошо отработанный на множестве подобных задач. В данном случае естественным является использование цилиндрической системы координат, в которой границы расчетной области являются координатными поверхностями. Решение уравнения Пуассона при определении давления - наиболее ресурсоемкий элемент алгоритма при расчете нестационарных несжимаемых течений - решается быстрым прямым методом. Метод сочетает быстрое преобразование Фурье вдоль продольного направления и быстрый метод циклической редукции для решения получающейся цепочки двумерных эллиптических уравнений. Для интегрирования по времени используется полунеявный метод с неявной обработкой части вязких членов, соответствующих производным в плоскости поперечного сечения. В такой постановке вычислительный алгоритм несложно распараллеливается для использования многопроцессорной вычислительной техники. Основной целью исследования является изучение течения в окрестности двугранного угла, образованного радиальными стенками трубы. Учитывая это, предусмотрено видеоизменение постановки задачи с заменой условия прилипания на криволинейной стенке трубы на условия свободной стенки (непротекание плюс отсутствие касательных напряжений). Такой искусственный прием позволяет ценой сознательного искажения течения на периферии от интересующей области повысить эффективное число Рейнольдса потока без увеличения числа узлов расчетной сетки. Оправданность такого приема будет установлена специальными методическими исследованиями.

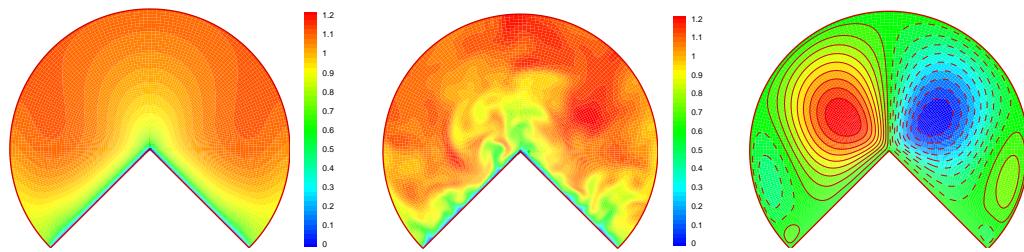


Рис. 1. Турбулентное течение вдоль угла в 270 градусов. Слева направо: поле средней скорости, мгновенное распределение скорости и линии тока вторичного течения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 14-01-00295. Вычисления проводились на суперкомпьютерном комплексе МГУ «Ломоносов».

ЛИТЕРАТУРА.

1. Nikitin N. Finite-difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates. *Journal of Computational Physics*, 217(2), 759-781, 2006.
2. Swarztrauber, P. N. A direct method for the discrete solution of separable elliptic equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 11, 1136-11503, 1974.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРОЦЕССА ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ

С.С. Попович, Ю.А. Виноградов, А.Г. Здитовец, М.М. Стронгин
НИИ механики МГУ, Москва

Температурная стратификация (безмашинное энергоразделение) предполагает перераспределение полного теплосодержания в потоке газа без совершения им внешней работы или теплообмена с окружающей средой. Газовый поток с температурой T_0^* , пройдя через такое устройство, разделяется на два потока с температурами $T_1^* > T_0^*$ и $T_2^* < T_0^*$ [1-3]. Метод газодинамической температурной стратификации в потоке сжимаемого газа, предложенный академиком Леонтьевым А.И. [4], основан на отличии адиабатной температуры стенки в потоке сжимаемого газа от температуры торможения. В результате взаимодействия дозвукового и сверхзвукового потока воздуха через теплопроводную стенку (рис. 1) на выходе из устройства получаем два потока – нагретый сверхзвуковой и охлажденный дозвуковой.

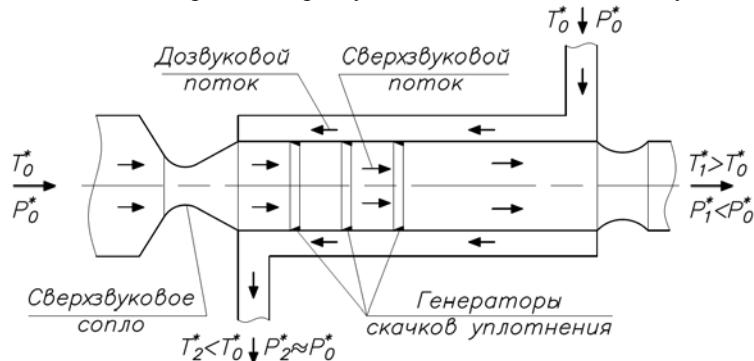


Рис. 1. Схема экспериментального исследования трубы Леонтьева противоточной компоновки с генераторами скачков уплотнения в сверхзвуковом канале

Тепловой поток через стенку в трубе Леонтьева зависит от теплоотдачи со стороны сверхзвукового α_1 и дозвукового потоков α_2 (коэффициента теплопередачи K), начальной температуры торможения потока T_0^* и адиабатной температуры стенки T_w^* , обтекаемой сверхзвуковым потоком (коэффициента восстановления температуры r). Режим максимальной эффективности температурной стратификации соответствует минимальному значению r и максимальному значению α [5, 6].

$$q = K(T_w^* - T_0^*) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} T_0^* (1 - r)$$

Для повышения количества передаваемого тепла в устройстве необходимо повысить наименьший из коэффициентов теплоотдачи, в данном случае – со стороны сверхзвукового канала устройства [7, 8]. Любое внесение конструктивных изменений в сверхзвуковой канал с целью интенсификации теплоотдачи сопровождается образованием ударных волн и локальных отрывных зон. Данная работа посвящена исследованию влияния на эффективность температурной стратификации конических ребер в сверхзвуковом канале, генерирующих скачки уплотнения.

Экспериментальные исследования проводились на прототипе устройства газодинамической температурной стратификации [9, 10]. Длина рабочей части установки – 700 мм. Измеренное число Маха на входе в рабочий участок сверхзвукового канала составляло 2.0 (критический диаметр сопла 4.6 мм). Сверхзвуковой канал конический расширяющийся, с углом раскрытия 1.2°, начальный диаметр – 6 мм. Температура в форкамере установки и на входе в дозвуковой канал поддерживалась равной 40°C. Давление торможения 12 атм. Расход через сверхзвуковой канал составлял около 45 г/с. Расход через дозвуковой канал варьировался относительно расхода по сверхзвуковому каналу в диапазоне от 0 до 0.9. Материал разделяющей потоки стенки – латунь. Конические вставки (генераторы ударных волн) устанавливались в сверхзвуковом канале на длине 100, 200 и 300 мм от среза сопла. Ширина каждой вставки – 1 мм. Угол полураствора вставки – 22° – соответствовал геометрии предыдущих исследований [11].

Исследовались две конфигурации устройства: «гладкая стенка» – режим безотрывного обтекания сверхзвукового канала, «канал с генераторами скачков уплотнения» – установка конических вставок в сверхзвуковом канале устройства. Также исследовались режимы одинаково направленного движения дозвукового и сверхзвукового потоков («прямоток») и разнонаправленные движения потоков («противоток»). На первом этапе исследований измерялось распределение статического давления и температуры стенки сверхзвукового канала устройства при отсутствии дозвукового потока. После этого по дозвуковому каналу запускался поток воздуха и измерялся суммарный эффект температурной стратификации по показаниям датчиков на входе и выходе из соответствующих каналов устройства (рис. 2).

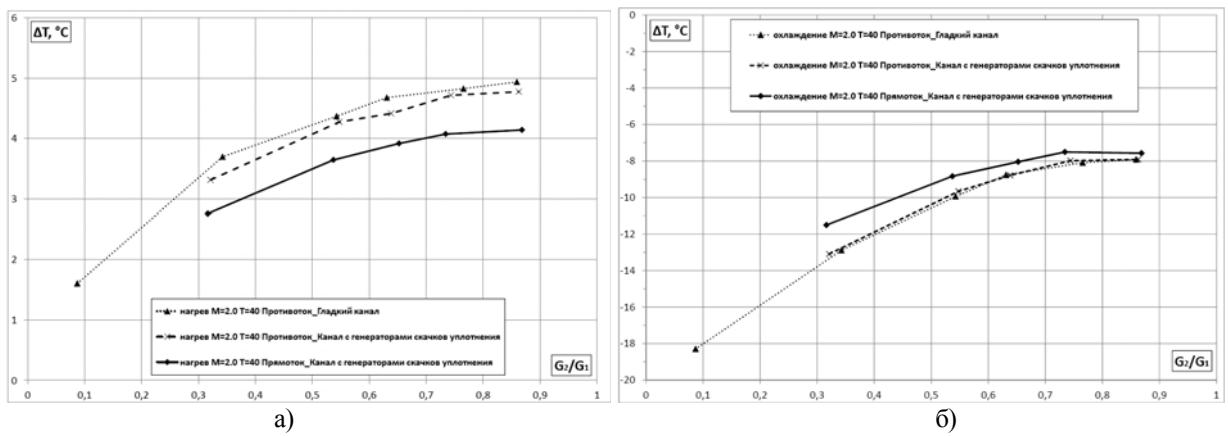


Рис. 2. Результаты измерения температурного перепада на выходе из трубы Леонтьева в зависимости от отношения расходов дозвукового потока к сверхзвуковому на режимах: противоток – гладкий канал, противоток – канал с генераторами скачков уплотнения, прямоток – канал с генераторами скачков уплотнения: а) нагрев сверхзвукового потока; б) охлаждение дозвукового потока

В области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем коэффициент теплоотдачи возрастает многократно при незначительном увеличении адиабатной температуры стенки (коэффициента восстановления температуры). Об этом свидетельствовали данные предыдущих исследований по влиянию скачков уплотнения и отрывного течения за ребром на коэффициент восстановления температуры в сверхзвуковом потоке сжимаемого газа [11-14]. В результате настоящего исследования подтверждено, что режим противотока оказывается эффективнее, чем прямоток (рис. 2). В то же время генерация скачков уплотнения практически не оказывается на охлаждении дозвукового потока и несколько снижает нагрев сверхзвукового потока в устройстве стратификации. Малое влияние скачков уплотнения на эффект температурной стратификации можно объяснить незначительным уровнем интенсификации теплоотдачи: генерируемые ударные волны не достигают пограничного слоя, пересекаясь в центральной части канала и теряя при этом свою интенсивность. Возможным направлением дальнейших исследований является установка конических генераторов ударных волн в центральной части канала. Такая конфигурация позволит избежать пересечения ударных волн и добиться более существенной интенсификации теплоотдачи в области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем.

Работа выполняется за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-19-00699).

ЛИТЕРАТУРА.

1. E.R.G. Eckert. Energy separation in fluid streams // International Communications in Heat and Mass Transfer, 13 (2), 1986, pp. 127-143.
2. Леонтьев А.И. Газодинамические методы температурной стратификации (обзор) // Изв. РАН. МЖГ, 2002. – №4. – С. 6-26.
3. Бурцев С.А., Леонтьев А.И. Исследование влияния диссипативных эффектов на температурную стратификацию в потоках газа (обзор) // ТВТ. 2014. Т. 52. № 2. С. 297-307.
4. Леонтьев А.И. Способ температурной стратификации газа и устройство для его осуществления (Труба Леонтьева). Патент на изобретение РФ №2106581. Кл. МПК-6: F25B9/02.10.03.1998.
5. Макаров М.С., Макарова С.Н. Эффективность энергоразделения при течении сжимаемого газа в плоском канале // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20. № 6. С. 777-787.
6. Бурцев С.А. Исследование путей повышения эффективности газодинамического энергоразделения // ТВТ. 2014. Т. 52. № 1. С. 14.
7. Волчков Э.П., Макаров М.С. Газодинамическая температурная стратификация в сверхзвуковом потоке // Изв. РАН. Энергетика, 2006. – №2. – С. 19-31.
8. Бурцев С.А. Методика расчета устройств газодинамической температурной стратификации при течении реального газа // Тепловые процессы в технике. 2013, № 9. С. 386-390.
9. Виноградов Ю.А., Здитовец А.Г., Стронгин М.М. Экспериментальное исследование температурной стратификации воздушного потока, протекающего через сверхзвуковой канал, с центральным телом в виде пористой трубы // Изв. РАН. МЖГ, 2013. – № 5. – С. 134-145.
10. A.G. Zditovets, U.A. Vinogradov, A.A. Titov. Experimental investigation of the heat transfer process at a gas-dynamic method of energy separation. Proceedings of 15th International Heat Transfer Conference. IHTC-15-8965, 2014, 13 p.
11. Попович С.С. Экспериментальное исследование влияния падающего скачка уплотнения на адиабатную температуру стенки в сверхзвуковом потоке сжимаемого газа // Тепловые процессы в технике. 2014. Т. 6. № 3. С. 98-104.

12. Popovich S.S., Egorov K.S., Vinogradov Yu.A. Experimental research of adiabatic wall temperature influenced by separated supersonic flow // Proceedings of 15th International Heat Transfer Conference, IHTC-15-8962, 2014, 11 p.
13. С.С. Попович, Ю.А. Виноградов, М.М. Стронгин. Экспериментальное исследование возможности интенсификации теплообмена в устройстве безмашинного энергоразделения потоков // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королева. 2015. Т. 14. N. 2. С. 159-169.
14. Popovich, M. Strongin, Yu. Vinogradov, A. Zditovets. Experimental research of heat transfer augmentation technique in gas dynamic energy separation process // Proceedings of the 8th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, 2015. Begell House Inc. P. 865-868.

Нестационарные эффекты в течениях с образованием каверн с отрицательным числом
кавитации

В.В. Прокофьев, И.И. Козлов, С.А. Очеретяный
НИИ механики МГУ им. Ломоносова, Москва
prokof@imec.msu.ru

В докладе дается обзор работ, проведенных в Институте механики МГУ посвященных исследованиям течений с образованием вентилируемых каверн с давлением, повышенным по сравнению с давлением в окружающей жидкости (отрицательное число кавитации). Рассматривается в основном плоская модель такого течения. Обсуждается вопрос об области применимости точного стационарного решения для анализа реального течения. Исследуется механизм уноса газа из такой каверны и в частности роль неустойчивости типа Релея-Тейлора в этом процессе. Приводятся результаты экспериментальных исследований развития Р-Т структур на границе каверны, обсуждается возможность использование классической теории для описания этих процессов.

Приводятся примеры возможного полезного использования таких течений. В частности, речь идет об инициировании кавитационных струй путем поддува горячего пара в такую каверну. Рассматривается возможность практического применения такого течения в режиме струйной завесы для аппарата на воздушной подушке. Речь также идет об использовании кормовых каверн для снижения донного сопротивления объектов. Приведена формула для эффективной тяги.

Рассматриваются различные автоколебательные кавитационные режимы при сверхкритическом поддуве в каверну. Исследованы детали течения с помощью скоростной видеокамеры Phantom Miro 320 (скорость съемки 9000 кадр/с, разрешение 768*576 pixels). Запись изменения давления в газовой полости и в форкамере, синхронизировалась с работой скоростной видеокамеры. Показано, что механизм автоколебаний в различных режимах в принципе одинаков, только в низкочастотном режиме вдоль границы каверны в каждый момент времени распространяется только одна волна, а при высокочастотном режиме несколько. Специальные исследования показали, что характер кавитационных автоколебаний может быть существенно связан с нелинейным взаимодействием двух колебательных систем - каверны и подводящего трубопровода.

О НОВОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОДИФФУЗИИ

Е.Ю. Просвиряков

Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань

Постановка задачи. При исследовании и описании движения несжимаемых жидкостей традиционно используется уравнение Навье-Стокса [1-4]. С одной стороны это оправдано тем, что любая жидкость является диссипативной средой. Иными словами является вязкой. Именно этим обстоятельством можно объяснить пристальное внимание к исследованию математических свойств решений трехмерной нестационарной системы Навье-Стокса. К настоящему времени остается открытой проблема о доказательстве существования и единственности гладких решений уравнений Навье-Стокса для произвольной краевой задачи [5, 6]. Под произвольной краевой задачей понимают следующее: приводит задание ли гладких граничных условий к гладкому решению [5, 6]. Существуют различные мнения о том, как нужно формализовать данную нерешенную проблему [6]. С другой стороны указанная нерешенная проблема имеет место при описании идеальной жидкости – решении уравнения Эйлера [7].

В качестве основной трудности, встречающейся на пути исследователя при решении краевых и начально-краевых задач уравнений Навье-Стокса (Эйлера), отметим наличие нелинейного слагаемого (конвективного ускорения) в полной производной при описании течения жидкости в координатах Эйлера. Данная проблема остается актуальной при описании адвективного и конвективного движения жидкостей (система уравнений Обербека-Буссинеска) [1-4], течения стратифицированных растворов (уравнения термодиффузии) [8, 9], поведения жидкостей, описываемой в рамках электромагнитной гидродинамики [10, 11], а также для жидкостей с выраженной предысторией (реологическая гидродинамика неньютоновских жидкостей) [12].

При исследовании движения несжимаемой жидкости в отличие от сжимаемых сред отсутствует эволюционное уравнение для давления. Нельзя сказать, что примеры такого рода функциональных зависимостей полностью отсутствуют: например, уравнение Бернулли или уравнения Грэда-Шаффранова [1, 13, 14]. В недавней работе приведен класс точных решений, позволяющий связать скорости с давлением в стационарном случае и получить физически нетривиальные новые точные решения [15].

К настоящему времени накоплено некоторое количество точных решений, описывающих движение жидкостей различной природы [16, 17]. К точным решениям относят: решения, представленные виде элементарных функций и квадратур; решения, при которых исходная система уравнений в частных производных может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, линейных уравнений с частными производными, линейных интегральных уравнений (как правило, можно свести к одному уравнению указанного типа) [16, 17].

Классификация точных решений неоднозначна [16, 18]. В литературе выделяют три типа: функциональная зависимость скоростей жидкости, число независимых переменных, необходимых для описания течения жидкости и групповая классификация [19-24]. Заметим, что понятие точного решение можно заменить на интегрируемость системы уравнений. Данный термин был предложен Гориэлли [25]. Он является шире, чем понятие интегрируемости динамических систем.

При исследовании движении жидкости первые точные решения были получены в предположении одномерности потока, что привело к тождественному обращению в нуль конвективной производной: течение Куэтта [26], течение Пуазейля [27], волновые движения Стокса [28]. Течения Хименца и Кармана являются первыми точными решениями уравнений Навье-Стокса, учитывающие силы инерции [29, 30].

Данные решения – первые примеры точных решений уравнений Навье-Стокса – принадлежат к классу решений, в котором скорости течения являются линейно формой горизонтальных координат, коэффициенты которой зависят от поперечной координаты. Важность нахождения точных решений подчеркивается тем обстоятельством, что первые решения стали носить имена первооткрывателей [26-30]. Для адвективных и конвективных движений необходимо упомянуть два решения: течение Остроумова [31] и решения Бириха [32].

Несмотря на достаточно продолжительную историю изучения решений скоростей, линейно зависящих от горизонтальных координат, первым, кто систематически начал развивать изучение таких решений как класса, принято считать Ц. Линя [33]. Он впервые предложил рассматривать такие решения при исследовании течений проводящей магнитной жидкости [33]. Справедливости ради нужно отметить, что решения, обладающие такими свойствами рассматривались Эйлером для изучения идеальной жидкости [7]. Эйлером были исследованы простейшие полиномиальные решения [7]. Решения, рассмотренные в [16, 17, 33] являлись линейно зависимыми относительно горизонтальных координат кроме давления, которое в общем случае представляет собой квадратичную форму. Данные решения были обобщены для описания адвекции и конвекции вязкой несжимаемой жидкости [10, 11, 34]. Особо следует отметить работы, в которых указанные решения для температуры, магнитной напряженности были обобщены до класса

решений, позволяющего описывать движения вблизи точек экстремумов. В этом случае температурные и магнитные поля представлены квадратичной формой [10, 11, 35, 36].

В настоящей работе представлен класс точных решений, описывающих термодиффузионные движения вязкой несжимаемой жидкости. Целесообразность этих исследований объясняется тем фактом, что наличие примесей в жидкости позволит сформулировать новые краевые задачи, объясняющие нетривиальные физические эффекты в стратифицированных жидкостях. В настоящее время не предложен класс точных решений, описывающий поведение термодиффузионных движений в точках экстремумов гидродинамический полей и около них, а известные решения полученные применением аппарата группового анализа не позволяют исследовать эти явления.

Уравнения конвекции, описывающие вязкую стратифицированную несжимаемую жидкость, в векторной форме записываются следующим образом [1-4, 8, 9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\nabla P + v \Delta \mathbf{V} + g(\beta_1 T + \beta_2 C) \mathbf{k}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T &= (\chi + \alpha^2 d n) \Delta T + \alpha d n \Delta C, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) C &= d \Delta C + \alpha d \Delta T, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В системе уравнений (1) введены следующие обозначения: $\mathbf{V}(t, x, y, z) = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости;

P – отклонение давления от гидростатического, деленное на постоянную среднюю плотность жидкости ρ ; T – отклонение от средней температуры; C – отклонение концентрации легкой компоненты от среднего значения; g – ускорение свободного падения; v , χ , d , α , β_1 и β_2 – коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, диффузии, термодиффузии, теплового и концентрационного расширения жидкости соответственно; n – термодинамический параметр, $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ – оператор Гамильтона, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – орты декартовой системы координат, Δ – оператор Лапласа.

Система уравнений (1) является объектом дальнейшего изучения. Отметим, что при равенстве нулю коэффициента теплопроводности $\chi = 0$ и диффузии $d = 0$, получим систему Навье - Стокса, описывающую изотермическое движение вязкой несжимаемой жидкости. Если в системе уравнений Навье - Стокса положить равной нулю вязкость $v = 0$, то исходная система формально редуцируется к системе Эйлера, описывающей идеальную жидкость (или положить $\alpha = 0$, $v = 0$ и $\chi = 0$ в системе уравнений термодиффузии (1)). Необходимо отметить, что полагать нулю диссипативные коэффициенты мы можем формально. Известны примеры решений, описывающие диссипативные среды, которые предельным переходом не могут быть сведены к решениям, описывающим движения идеальных сред.

Приведем основные свойства системы (1), которые помогают находить точные решения по некоторому вычисленному ранее решению: инвариантность уравнений относительно сдвига по всем независимым переменным и инвариантность уравнений относительно согласованного растяжения по независимым и зависимым переменным; инвариантность поворота относительно одной из координатной осей; инвариантность преобразования Галилея [16].

Класс решений, описывающий трехмерных течений стратифицированной жидкости в прямоугольной декартовой системе координат. Движение жидкости, описываемое решениями нелинейной системой уравнений Навье-Стокса (1) в декартовой прямоугольной системе координат, будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_x &= U + x u_1 + y u_2, \quad V_y = V + x v_1 + y v_2, \quad V_z = w, \\ P &= P_0 + x P_1 + y P_2 + \frac{x^2}{2} P_{11} + \frac{y^2}{2} P_{22} + x y P_{12}, \\ T &= T_0 + x T_1 + y T_2 + \frac{x^2}{2} T_{11} + \frac{y^2}{2} T_{22} + x y T_{12}, \\ C &= C_0 + x C_1 + y C_2 + \frac{x^2}{2} C_{11} + \frac{y^2}{2} C_{22} + x y C_{12}. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) неизвестные функции $U, u_1, u_2, V, v_1, v_2, w, P_0, P_1, P_2, P_{11}, P_{22}, P_{12}, T_0, T_1, T_2, T_{11}, T_{22}, T_{12}, C_0, C_1, C_2, C_{11}, C_{22}, C_{12}$ зависят от переменной z и времени t . Очевидно, что при отсутствии зависимости от времени, формулы (2) описывают стационарные (установившиеся) течения жидкости.

Поясним некоторые особенности выражений (2), которые являются обобщением метода разделения переменных [16, 17, 37]. Выражения, определяющие приведенное давление, температуру и концентрацию получаются при подстановке в исходную систему (1), а не вводятся формально. Иными словами, коэффициенты $P_0, P_1, P_2, P_{11}, P_{22}, P_{12}, T_0, T_1, T_2, T_{11}, T_{22}, T_{12}, C_0, C_1, C_2, C_{11}, C_{22}, C_{12}$ выражаются через функции $U, u_1, u_2, V, v_1, v_2, w$ и их частные производные по координатам z и времени t . Здесь уместно отметить, что эти решения не являются асимптотическими.

Представление (2) не является в общем случае разложением гидродинамических полей в ряд Тейлора и отбрасывания слагаемых после определенного порядка, потому что коэффициенты являются функциями двух переменных. Однако при рассмотрении других классов решений может оказаться, что решения (2) описывается не точно движение жидкости, тем не менее, при необременительных условиях на функции может дать достаточную оценку поведения решений при топологическом интегрировании [16, 37].

Подставим соотношения (2) в систему (1) и совершим очевидные преобразования, получим выражения вида:

$$A_k + xB_k + yC_k + \frac{x^2}{2}D_k + \frac{y^2}{2}E_k + xyF_k = 0. \quad (3)$$

Здесь $k = \overline{1, 6}$ – номер преобразованного уравнения системы Навье-Стокса для термодиффузии (1). При $k = 1, k = 2$ и $k = 3$ имеем упрощенное уравнение импульсов в системе (1), спроектированное на оси OX, OY, OZ соответственно; при $k = 4$ – уравнение теплопроводности; при $k = 5$ – уравнение концентрации; при $k = 6$ – уравнение несжимаемости. Отметим, что для $k = 1, k = 2$ справедливы равенства: $D_k = E_k = F_k$.

Приравниваем коэффициенты нулю в полиномиальных выражениях, получим следующую систему, состоящую из двадцати пяти нестационарных квазилинейных уравнений в частных производных, для определения неизвестных двадцати пяти функций:

$$\begin{aligned} \hat{L}U + Uu_1 + Vu_2 + P_1 &= 0, \quad \hat{L}u_1 + u_1^2 + v_1u_2 + P_{11} = 0, \quad \hat{L}u_2 + u_2u_1 + v_2u_2 + P_{12} = 0, \\ \hat{L}V + Uv_1 + Vv_2 + P_2 &= 0, \quad \hat{L}v_1 + v_1u_1 + v_1v_2 + P_{12} = 0, \quad \hat{L}v_2 + u_2v_1 + v_2^2 + P_{22} = 0, \\ \hat{L}w + \frac{\partial P_0}{\partial z} - g\beta_1T_0 - g\beta_2C_0 &= 0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial z} = g(\beta_1T_1 + \beta_2C_1), \quad \frac{\partial P_2}{\partial z} = g(\beta_1T_2 + \beta_2C_2), \\ \frac{\partial P_{11}}{\partial z} = g(\beta_1T_{11} + \beta_2C_{11}), \quad \frac{\partial P_{12}}{\partial z} &= g\beta(\beta_1T_{12} + \beta_2C_{12}), \quad \frac{\partial P_{22}}{\partial z} = g(\beta_1T_{22} + \beta_2C_{22}), \\ \hat{M}T_0 + UT_1 + VT_2 - (\chi + \alpha^2dn)(T_{11} + T_{22}) - \alpha dn \left(C_{11} + C_{22} + \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ \hat{M}T_1 + UT_{11} + VT_{12} + u_1T_1 + v_1T_2 - \alpha dn \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} &= 0, \quad \hat{M}T_2 + UT_{12} + VT_{22} + u_2T_1 + v_2T_2 - \alpha dn \frac{\partial^2 C_2}{\partial z^2} = 0, \\ \hat{M}T_{11} + 2u_1T_{11} + 2v_1T_{12} - \alpha dn \frac{\partial^2 C_{11}}{\partial z^2} &= 0, \quad \hat{M}T_{22} + 2u_2T_{12} + 2v_2T_{22} - \alpha dn \frac{\partial^2 C_{22}}{\partial z^2} = 0, \\ \hat{M}T_{12} + u_1T_{12} + u_2T_{11} + v_1T_{22} + v_2T_{12} - \alpha dn \frac{\partial^2 C_{12}}{\partial z^2} &= 0, \\ \hat{N}C_0 + UC_1 + VC_2 - d(C_{11} + C_{22}) - \alpha d \left(T_{11} + T_{22} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ \hat{N}C_1 + UC_{11} + VC_{12} + u_1C_1 + v_1C_2 - \alpha d \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} &= 0, \quad \hat{N}C_2 + UC_{12} + VC_{22} + u_2C_1 + v_2C_2 - \alpha d \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = 0, \\ \hat{N}C_{11} + 2u_1C_{11} + 2v_1C_{12} - \alpha d \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial z^2} &= 0, \quad \hat{N}C_{22} + 2u_2C_{12} + 2v_2C_{22} - \alpha d \frac{\partial^2 T_{22}}{\partial z^2} = 0, \end{aligned}$$

$$\hat{N}C_{12} + u_1 C_{12} + u_2 C_{11} + v_1 C_{22} + v_2 C_{12} - \alpha d \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + u_1 + v_2 = 0. \quad (4)$$

Здесь для сокращения записи и уточнения физического смысла полученная система нелинейных уравнений в частных производных записана в операторном виде. Дифференциальные операторы в частных производных записываются следующим образом:

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial z} - \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \hat{M} = \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial z} - (\chi + \alpha^2 dn) \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \hat{N} = \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial z} - d \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Характерной особенностью системы уравнений (4) является наличие в уравнении теплопроводности системы (1) наличие слагаемого с концентрацией. Система (1) и как следствие система (4) позволяют описывать движения жидкости, учитывая оба эффекта: эффект Соре и эффект Дюфора. В подавляющем большинстве работ по анализу решений уравнений термодиффузии эффектом Дюфора пренебрегают [9]. Отсутствие эффекта Дюфора при анализе течений жидкостей объясняют незначительностью влияния температуры на концентрацию. Тем не менее, в силу принципа Онзагера эффект Дюфора существует и, хотя является признаком неустойчивости, оказывает влияние на движение жидкости [38]. Далее будут рассмотрены решения уравнения термодиффузии, учитывающей оба эффекта.

Частные случаи класса решений. Приведенная выше система уравнений (4) состоит из 25 уравнений в частных производных первого порядка для вычисления стольких же функций, входящих в выражения (3). Важной особенностью системы (4) является существование конвективных слагаемых в уравнениях. Таким образом, несмотря на то, что каждое уравнение системы (4) является более простым по сравнению с (1), но уравнения (4) достаточно хорошо моделируют трехмерные нестационарные течения. Рассматриваемая система содержит чрезвычайно много физически и математически нетривиальных новых точных решений.

Решения (3) можно считать точными, поскольку они являются решениями системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка параболического типа. Известно, что уравнения такого вида можно решить аналитически или численно с произвольной степенью точностью.

В силу того, что решение (3) является новым, укажем некоторые случаи, которые были рассмотрены ранее в других работах. Сразу отметим, что здесь мы не будем рассматривать невязкие решения – решения, удовлетворяющие уравнению Эйлера.

Для начала формально положим нуль в системе уравнений (1) коэффициенты температуропроводности, диффузии, термодиффузии, теплового и концентрационного расширения жидкости. В этом случае решения (3) вырождаются до класса решений, описывающего движение вязкой жидкости

$$V_x = U + xu_1 + yu_2, \quad V_y = V + xv_1 + yv_2, \quad V_z = w,$$

$$P = P_0 + xP_1 + yP_2 + \frac{x^2}{2}P_{11} + \frac{y^2}{2}P_{22} + xyP_{12}. \quad (5)$$

Решениям данного типа посвящено много работ и обзоров. Отметим лишь некоторые статьи, отражающие указанную тематику [1, 3, 5, 7, 12, 16-30, 39-41]. Известные классические решения принадлежат изотермическому классу (3). Недавно было показано, что в рамках решений (5) возможно описывать крупномасштабные течения и колебания вязкой завихренной несжимаемой жидкости в отсутствии сил Кориолиса [40, 41]. Данный результат был получен при полной постановке задачи. Учитывались не только вязкие, и инерционные силы.

Другим нетривиальным частным случаем можно отметить адвективный и конвективный класс решений вида

$$V_x = U + xu_1 + yu_2, \quad V_y = V + xv_1 + yv_2, \quad V_z = w,$$

$$P = P_0 + xP_1 + yP_2 + \frac{x^2}{2}P_{11} + \frac{y^2}{2}P_{22} + xyP_{12},$$

$$T = T_0 + xT_1 + yT_2 + \frac{x^2}{2}T_{11} + \frac{y^2}{2}T_{22} + xyT_{12}.$$

Большинство неизотермических решений системы уравнений Навье-Стокса зависит линейно от координат x, y . Примеры решений уравнений Обербека-Буссинеска, описывающие квадратичный нагрев жидкости с коэффициентами, неравнозначественно постоянным значениям, приведены в работах [4, 8-11, 31, 32, 34-36].

Решения линеаризованной системы уравнений (4), описывающей стационарные течения. Рассмотрим далее решения системы (4), пренебрегая инерционными силами. Иными словами конвективное ускорение в полной производной системы (1) полагаем тождественно равным нулю. Следовательно, слагаемые в (4), которые являются произведениями функций и производных исчезают.

Приведем еще один метод, основанный на теории подобия, позволяющие линеаризовать систему (4). Здесь нужно сразу сказать, что предпочтительнее использовать аффинное подобие [10-12, 35, 40, 41]. Использование данного способа приведения уравнений или решений к безразмерному виду позволяет учесть анизотропию геометрию слоя жидкости [10-12, 35, 40, 41].

Учет анизотропии приводит к расширению использования линеаризации системы уравнений (4). Дело в том, что при задании одного характерного размера значение конвективного ускорение определяется числом Рейнольдса или его аналогами. Иными словами, геометрические размеры слоя равноправны. Они не играют роли при линеаризации системы уравнений Навье-Стокса к системе Стокса. При учете анизотропии геометрических размеров появятся модифицированные безразмерные величины, представляющие собой произведение классических чисел подобия и масштабных множителей. Масштабные множители характеризуют отношение характерных размеров тела. Может случить так, что даже при достаточно больших критериях, характеризующих влияние нелинейных и диссипативных членов, модифицированный критерий подобия позволит линеаризовать систему. Напомним, что все критерии подобия выведены для геометрически изотропных тел [1, 4]. Примеры описанной выше техники приведены в работах [10-12, 35, 40, 41].

Система уравнений (4) при установившимся течении редуцируется к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2T_1}{dz^2} &= 0, \quad \frac{d^2T_2}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2T_{11}}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2T_{22}}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2T_{12}}{dz^2} = 0, \\ \frac{d^2C_1}{dz^2} &= 0, \quad \frac{d^2C_2}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2C_{11}}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2C_{22}}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2C_{12}}{dz^2} = 0, \\ \frac{d^2T_0}{dz^2} &= -(T_{11} + T_{22}), \quad \frac{d^2C_0}{dz^2} = -(C_{11} + C_{22}), \\ \frac{dP_1}{dz} &= g(\beta_1 T_1 + \beta_2 C_1), \quad \frac{dP_2}{dz} = g(\beta_1 T_2 + \beta_2 C_2), \quad \frac{dP_{11}}{dz} = g(\beta_1 T_{11} + \beta_2 C_{11}), \quad (6) \\ \frac{dP_{12}}{dz} &= g\beta(\beta_1 T_{12} + \beta_2 C_{12}), \quad \frac{dP_{22}}{dz} = g(\beta_1 T_{22} + \beta_2 C_{22}), \\ \nu \frac{d^2U}{dz^2} &= P_1, \quad \nu \frac{d^2u_1}{dz^2} = P_{11}, \quad \frac{d^2u_2}{dz^2} = P_{12}, \quad \nu \frac{d^2V}{dz^2} = P_2, \quad \nu \frac{d^2v_1}{dz^2} = P_{12}, \quad \nu \frac{d^2v_2}{dz^2} = P_{22}, \\ \frac{dw}{dz} + u_1 + v_2 &= 0, \quad \frac{dP_0}{dz} = \nu \frac{d^2w}{dz^2} + g\beta_1 T_0 + g\beta_2 C_0. \end{aligned}$$

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} T_1 &= c_1 z + c_2, \quad T_2 = c_3 z + c_4, \quad T_{11} = c_5 z + c_6, \quad T_{12} = c_7 z + c_8, \quad T_{22} = c_9 z + c_{10}, \\ C_1 &= c_{11} z + c_{12}, \quad C_2 = c_{13} z + c_{14}, \quad C_{11} = c_{15} z + c_{16}, \quad C_{12} = c_{17} z + c_{18}, \quad C_{22} = c_{19} z + c_{20}, \\ T_0 &= -(c_5 + c_9) \frac{z^3}{3!} - (c_6 + c_{10}) \frac{z^2}{2!} + c_{21} z + c_{22}, \\ c_0 &= -(c_{15} + c_{19}) \frac{z^3}{3!} - (c_{16} + c_{20}) \frac{z^2}{2!} + c_{23} z + c_{24}, \\ P_1 &= g\beta_1 \left(c_1 \frac{z^2}{2} + c_2 z \right) + g\beta_2 \left(c_{11} \frac{z^2}{2} + c_{12} z \right) + c_{25}, \\ P_2 &= g\beta \left(c_3 \frac{z^2}{2} + c_4 z \right) + g\beta_2 \left(c_{13} \frac{z^2}{2} + c_{14} z \right) + c_{26}, \\ P_{11} &= g\beta \left(c_5 \frac{z^2}{2} + c_6 z \right) + g\beta_2 \left(c_{15} \frac{z^2}{2} + c_{16} z \right) + c_{27}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{12} &= g\beta \left(c_7 \frac{z^2}{2} + c_8 z \right) + g\beta_2 \left(c_{17} \frac{z^2}{2} + c_{18} z \right) + c_{28}, \\
P_{22} &= g\beta \left(c_9 \frac{z^2}{2} + c_{10} z \right) + g\beta_2 \left(c_{19} \frac{z^2}{2} + c_{20} z \right) + c_{29}, \\
U &= \frac{g\beta_1}{\nu} \left(c_1 \frac{z^4}{4!} + c_2 \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{g\beta_2}{\nu} \left(c_{11} \frac{z^2}{2} + c_{12} z \right) + c_{25} \frac{z^2}{2} + c_{30} z + c_{31}, \\
V &= \frac{g\beta_1}{\nu} \left(c_3 \frac{z^4}{4!} + c_4 \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{g\beta_2}{\nu} \left(c_{13} \frac{z^2}{2} + c_{14} z \right) + c_{26} \frac{z^2}{2} + c_{32} z + c_{33}, \\
u_1 &= \frac{g\beta_1}{\nu} \left(c_5 \frac{z^4}{4!} + c_6 \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{g\beta_2}{\nu} \left(c_{15} \frac{z^2}{2} + c_{16} z \right) + c_{27} \frac{z^2}{2} + c_{34} z + c_{35}, \\
u_2 &= \frac{g\beta_1}{\nu} \left(c_7 \frac{z^4}{4!} + c_8 \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{g\beta_2}{\nu} \left(c_{17} \frac{z^2}{2} + c_{18} z \right) + c_{28} \frac{z^2}{2} + c_{36} z + c_{37}, \\
v_1 &= \frac{g\beta_1}{\nu} \left(c_7 \frac{z^4}{4!} + c_8 \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{g\beta_2}{\nu} \left(c_{17} \frac{z^2}{2} + c_{18} z \right) + c_{28} \frac{z^2}{2} + c_{38} z + c_{39}, \\
v_2 &= \frac{g\beta_1}{\nu} \left(c_9 \frac{z^4}{4!} + c_{10} \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{g\beta_2}{\nu} \left(c_{19} \frac{z^2}{2} + c_{20} z \right) + c_{29} \frac{z^2}{2} + c_{40} z + c_{41}, \\
w &= -\frac{g\beta_1}{\nu} \left(c_5 \frac{z^5}{5!} + c_9 \frac{z^5}{5!} + c_6 \frac{z^4}{4!} + c_{10} \frac{z^4}{4!} \right) - \frac{g\beta_2}{\nu} \left(c_{15} \frac{z^5}{5!} + c_{19} \frac{z^5}{5!} + c_{16} \frac{z^4}{4!} + c_{20} \frac{z^4}{4!} \right) - \\
&\quad - \left(c_{27} \frac{z^3}{3!} + c_{29} \frac{z^3}{3!} \right) - \left(c_{34} \frac{z^2}{2} + c_{40} \frac{z^2}{2} \right) - (c_{35} z + c_{41} z) + c_{42}, \\
P_0 &= -2g\beta_1 \left(c_5 \frac{z^4}{4!} + c_9 \frac{z^4}{4!} + c_6 \frac{z^3}{3!} + c_{10} \frac{z^3}{3!} \right) + g\beta_1 \left(c_{21} \frac{z^2}{2!} + c_{22} z \right) - \\
&\quad - 2g\beta_2 \left(c_{15} \frac{z^4}{4!} + c_{19} \frac{z^4}{4!} + c_{16} \frac{z^3}{3!} + c_{20} \frac{z^3}{3!} \right) + g\beta_2 \left(c_{23} \frac{z^2}{2!} + c_{24} z \right) - \\
&\quad - \nu \left(c_{27} \frac{z^2}{2} + c_{29} \frac{z^2}{2} + c_{34} z + c_{40} z + c_{35} + c_{41} \right) + c_{43}. \tag{7}
\end{aligned}$$

В решении (7) c_i , где $i = \overline{1, 43}$ – постоянные интегрирования.

Решения (7), несмотря на простой вид, являются новыми. Они описывают очень важный вид трехмерных стационарных вязкой несжимаемой жидкости течений, который играет важную роль в технической и технологической гидродинамике. Речь идет о течениях с экстремальными значениями гидродинамических полей. Удивительно, но решения (7) описывают точно распределение скоростей, температуры, давления и концентрации в точке экстремума. Для исследования течений вблизи точек экстремума необходимо учитывать конвективное слагаемое ускорения движущейся жидкости. Очевидно, что возможен переход к решениям, описывающим двумерные термодиффузионные течения.

Пренебрежение силами инерции дает возможность получить полиномиальное решение системы (4). Очевидно, что функции, определяющие температуру и концентрацию, изменяются по линейному закону. Компоненты давления (2) имеют параболический профиль. Исключение составляет однородное слагаемое P_0 , которое представляет собой многочлен четвертой степени. Наибольшую степень, равную пяти, имеет скорость w . Остальные функции имеют четвертую степень.

Для определения постоянных интегрирования c_i , где $i = \overline{1, 43}$, необходимо записывать граничные условия. Отметим, что они должны удовлетворять классу (2). Иными словами, они должны быть линейными по соответствующим функциям, входящим в (2). Заведомо удовлетворяют указанному выше ограничению условие прилипание, задание локализованного источника температуры и концентрации, скоростей и напряжений на границах слоя жидкостей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере и Инвестиционно-венчурного фонда Республики Татарстан.

1. Кутепов А. М., Полянин А.Д. и др. Химическая гидродинамика. М.: Бюро Квантум, 1996. 336 с.
2. Polyanin A. D., Kutepov A. M., Vyazmin A. V., Kazenin D. A. Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering. London: Taylor & Francis, 2002. 406 p.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 тт.: Т.6: Гидродинамика. 5-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 736 с.
4. Гершун Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Москва: Наука, 1972. 392с.
5. Bertozzi A.L., Majda A.J. Vorticity and Incompressible Flows. Cambridge U. Press, Cambridge, 2002. 545 p.
6. Ladyzhenskaya O. A. Sixth problem of the millennium: Navier-Stokes equations, existence and smoothness. // Russ. Math. Surv. 2003. V. 58. №2. P. 251. [Ладыженская О. А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость, УМН, 58:2(350) (2003), 45–78]
7. Neményi P. F. Recent developments in inverse and semi-Inverse methods in the mechanics of Continua. // Advances in Appl. Mech. 1951. Vol. 11. S. 123-151. [Неменъи П.Ф. Современное развитие обратных и полуобратных методов в механике сплошной среды. В сб. "Проблемы механики" под ред. Р. Мизеса и Т. Кармана. М.: ИЛ, 1955. С. 234-257]
8. Andreev V.K., Bekezhanova V.B. Stability of nonisothermal fluids (Review) // J. Appl. Mech. Tech. Phy. 2013. Vol. 54. №2. P. 171-184. [Андреев В. К., Бекежанова В. Б. Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // Прикл. мех. техн. физ. 2013. №2. С. 3-20.]
9. Рыжков И.И. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Монография. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2013. 200 с.
10. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь, 2006. 155 с.
11. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Киров: ВятГУ, 2011. 207 с.
12. Скульский О.И., Аристов С.Н. Механика аномально вязких жидкостей. Москва – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2003. 156 с.
13. Shafranov V.D., On equilibrium magnetohydrodynamic configurations. // Terzo Congresso Internazionale Sui Fenomeni Dionizzazione Nei Gas (Venezia, 11–15 giugno, 1957), Milano, 1957, P. 990–997.
14. Grad H., Rubin H. "Hydromagnetic equilibria and force-free fields", Proceedings of the 2nd United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, V.31 (Geneva, 1958), Columbia University Press, New York, 1959, P. 190.
15. Aristov S.N., Polyanin A.D. New classes of exact solutions of Euler equations // Doklady Physics. 2008. T. 53. № 3.Р. 166-171. [Аристов С.Н., Полянин А.Д. Новые классы точных решений уравнений Эйлера. // Доклады РАН, 2008, т. 419, № 3, с. 328-333.]
16. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theor. Found. of Chem. Eng. 2009. T. 43. № 5. P. 642-662. [Аристов С.Н., Князев Д.Е., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теорет. основы хим. технологии. 2009. Т.43. №5. С.547-566.]
17. Polyanin A.D., Aristov S.N. A new method for constructing exact solutions to three-dimensional Navier-Stokes and Euler equations // Theor. Found. of Chem. Eng. 2009. T. 45. № 6. P. 885-890. [Полянин А.Д., Аристов С.Н. Новый метод построения точных решений трехмерных уравнений Навье–Стокса и Эйлера // Теор. основы хим. технологии. 2011. Т. 45. № 6. С. 696-701.]
18. Broman G. I., Rudenko O.V. Submerged Landau jet: exact solutions, their meaning and application // 2010. T. 53. №1. P. 91-98. [Броман Г. И., Руденко О. В. Затопленная струя Ландау: точные решения, их смысл и приложения // УФН. 2010. Т. 180. № 1. С. 97–104.]
19. Drazin P. G. and Riley N. The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 196 p.
20. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. 2006. № 6. С. 3–76.
21. Ludlow D. K., Clarkson P. A., Bassom, A. P. Nonclassical symmetry reductions of the two-dimensional incompressible Navier–Stokes equations.// Studies in Applied Mathematics. 1999. Vol. 103. P. 183–240.
22. Ludlow D. K., Clarkson P. A., Bassom, A. P. Nonclassical symmetry reductions of the three-dimensional incompressible Navier–Stokes equations.// J. of Physics A: Math. and General. 1998. Vol. 31. P. 7965–7980.

23. Мелешко С. В., Пухначев В. В. Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье–Стокса // Прикл. мех. и техн. физика. 1999. № 2, С. 24–33.
24. Meleshko S.V. A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations // Nonlinear Dynamics. 2004. Vol. 36. No. 1, S. 47–68.
25. Goriely A. Integrability and nonintegrability of dynamical systems. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2001. 291 p. [Гориэлли А. Интегрируемость и сингулярность. Москва – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2006. 316 с.]
26. Couette M. Études sur le frottement des liquids. // Ann. Chim. Phys. 1890. Т. 21. 433-510.
27. Poiseuille J. Récherches experimentelles sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres // Comptes Rendus. 1840. Vol. 11. P. 961-967, P. 1041-1048. 1841. Vol. 12. P. 112-115.
28. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums // Camb. Philo. Trans. 1851. Vol. 9, P. 8-106.
29. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichformigen Flussigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder // Dinglers Polytech. J. 1911, Vol. 326, P. 321-324.
30. von Karman T. Über laminare und turbulente Reibung // ZAMM. 1921. Vol. 1. P. 233-252.
31. Ostroumov G.A. Free convection under the condition of the internal problem. NASA TM, 1958. [Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1952. 256с.]
32. Birikh R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer, of liquid // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1996. №7. Р. 43-47 [Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости. // Прикл. мех. техн. физ. 1966. №3. С.69-72.]
33. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. 1958. Vol. 1. P. 391–395.
34. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции. // Нелинейная динамика. 2013. Т.9. №4. С. 651-657.
35. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Конвективный теплообмен при локализованном нагреве плоского слоя несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 3. С. 53-58.
36. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Об одном классе аналитических решений стационарной осесимметричной конвекции Бенара–Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. 2013. № 3(32). С. 110–118.
37. Бетяев С.К. Асимптотические методы классической динамики жидкости. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. 516 с.
38. Onsager L. Reciprocal relations in irreversible processes // Physical Review. 1931. V. 38. № 12 S. 2265.
39. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Уравнения нестационарного пограничного слоя: Общие преобразования и точные решения // ТОХТ. 2001. Т. 35. № 6. С. 563–573.
40. С.Н. Аристов, Е.Ю. Просвиряков Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. 2014. Т.10. №2. С. 177-182.
41. С. Н. Аристов, Е. Ю. Просвиряков Волны Стокса в завихренной жидкости // Нелинейная динамика. 2014. Т.10. №3. С. 309–318.

БЕЗОТРЫВНОЕ ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПРЯМОМ КРУГЛОМ ДИФФУЗОРЕ ПРИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ГРАДИЕНТЕ ДАВЛЕНИЯ

В.В. Трифонов, А.И. Решмин, С.Х. Тепловодский, А.Д. Сударикова
НИИ механики МГУ, Москва

Результаты исследования турбулентного течения в круглом коническом диффузоре с углом раскрытия 0.6° при числах Рейнольдса (построено по средней по сечению скорости и диаметру на выходе диффузора) в диапазоне от $800 < Re_2 < 3000$ приведены в [1] (далее параметры во входном сечении диффузора обозначаются индексом - 1, в выходном - 2). При проектировании диффузора выбор такого угла раскрытия определялся тем, что согласно расчетам, продольный градиент давления в потоке при указанных числах Рейнольдса был отрицателен. Это гарантировало безотрывное течение в канале такого диффузора. Диаметр канала диффузора увеличивался с 6 до 10 мм на длине 420 мм. Измерения показали, что в отличие от трубы, где при $Re < 2000$ турбулентное течение не реализуется, в канале диффузора формировалось турбулентное течение при $Re_2 > 1000$. При $Re_2 > 1300$ параметры течения в выходном сечении определялись только числом Рейнольдса и практически не зависели от входных условий, если интенсивность турбулентности на входе превышала некоторый уровень. Турбулентные характеристики потока в диффузоре заметно выше, чем в цилиндрической трубе при том же числе Рейнольдса. Турбулентный характер течения подтверждался расчетами и измерениями напряжений Рейнольдса в выходном сечении диффузора.

Локальное число Рейнольдса в круглом диффузоре обратно пропорционально диаметру, поэтому если в выходном сечении $Re_2 \sim 800$, на входе в диффузор $Re_1 \sim 1330$. В связи с этим, для обеспечения достаточной интенсивности турбулентности на входе в диффузор, воздух поступал во входную часть диффузора по трубке меньшего диаметра d . При этом на входе в диффузор происходило внезапное расширение потока и разрушение сформированного в подающей трубке турбулентного течения. Пульсационные характеристики потока при этом были достаточны для того, чтобы в канале диффузора произошел переход к турбулентности. Место формирования турбулентного профиля скорости зависело от числа Рейнольдса в выходном сечении и при его приближении к 1000 смещалось к выходу из диффузора. Как показали расчеты переход к турбулентности сопровождался ростом отношения осевой скорости к средней. Это было хорошо видно по результатам измерений.

Для того, чтобы выяснить, как влияет на выходные параметры течения переход к турбулентности в канале, были проведены исследования на диффузоре с отношением выходного и входного диаметров $D_2/D_1 = 3.4$. В этом случае, если в выходном сечении $800 < Re_2 < 3000$, на входе в диффузор $2720 < Re_1 < 10200$, то есть при $Re > 2720$ турбулентное течение может быть сформировано в подающей трубке с диаметром $d = D_1$, равным входному диаметру диффузора. При этом установившийся в подающей трубке турбулентный поток при входе в диффузор мог бы сохраняться и далее постепенно трансформироваться в расширяющемся канале.

Проведены исследования течения в коническом диффузоре с углом раскрытия $\sim 1.2^\circ$. Входной диаметр $D_1 = 6$ мм, выходной - $D_2 = 20.4$ мм, длина $L = 710$ мм. Расчеты показали, что в выбранном диапазоне чисел Рейнольдса при таком угле раскрытия в канале формируется течение с положительным продольным градиентом давления. Для определения характера течения и обнаружения отрывов потока в случае их возникновения использовались дренажные отверстия, размещенные по всей длине диффузора.

Воздух подавался на вход диффузора через трубы с различным диаметром d . При $d = 6$ мм параметры течения меняются непрерывно. При $d = 3$ и 1.7 мм имеет место внезапное расширение с разной степенью возмущения потока. Длина труб была подобрана таким образом, чтобы в них сформировалось развитое турбулентное течение при всех расходах, соответствующих требуемому диапазону чисел Рейнольдса Re_2 на выходе из диффузора от 300 до 2800. Фото экспериментального диффузора показано на рис. 1.



Рис. 1. Экспериментальная установка.

Для измерения скорости воздуха применялся термоанемометр DISA 56C01 СТА с измерительным мостом 56C17, снабженный малоразмерным проволочным датчиком 55P11 производства Dantec Dynamics (длина нити 1.25 мм, толщина нити 5 мкм). Датчик размещался на устройстве перемещения, что позволяло

проводить измерения в разных точках сечения на выходе диффузора. Сигнал с измерительного моста переводился в цифровой формат и обрабатывался.

На рис. 2 приведены результаты измерений скорости и её пульсаций на оси потока в выходном сечении диффузора в зависимости от числа Рейнольдса при различных способах подачи воздуха в диффузор. При увеличении угла раскрытия диффузора с 0.6 до 1.2° турбулизация потока увеличивается. При уменьшении числа Рейнольдса на выходе диффузора до 800 область перехода к турбулентности остается далеко от выхода. Видно, что параметры потока в центре выходного сечения диффузора не зависят от способа подачи воздуха в диффузор, из этого следует, что турбулентный поток успевает полностью сформироваться.

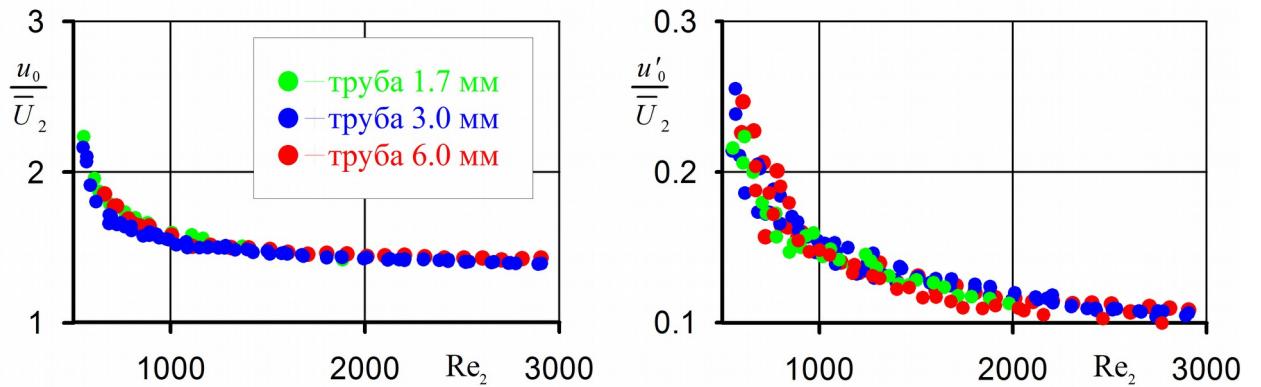


Рис. 2. Скорость и её среднеквадратичные пульсации в центре выходного сечения диффузора

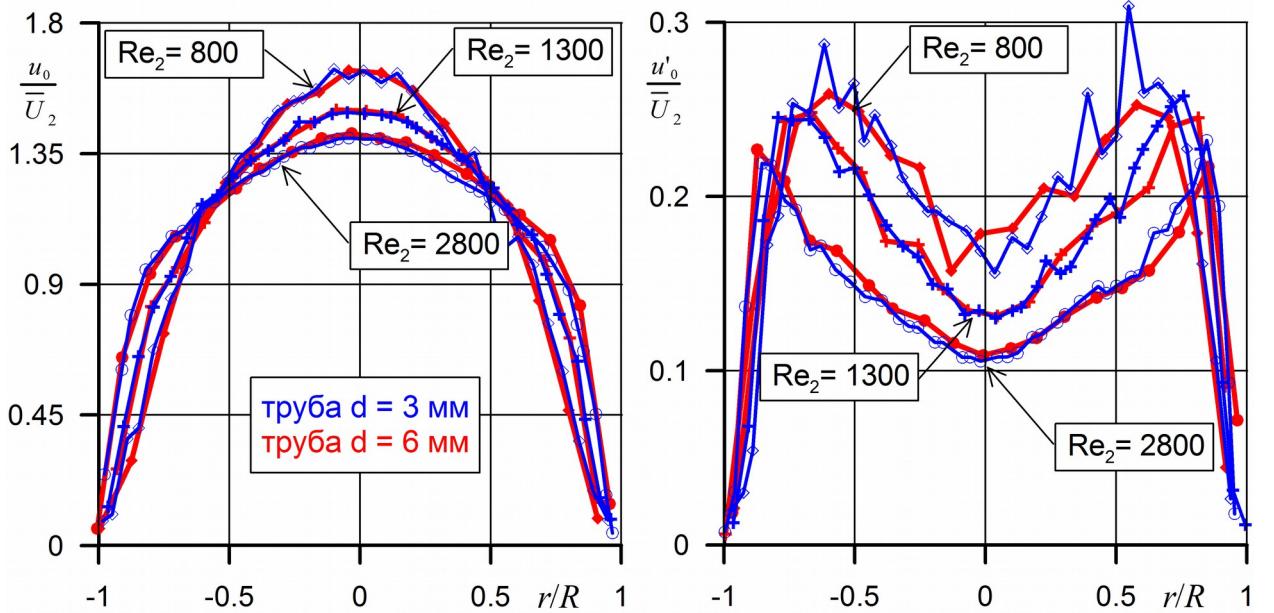


Рис. 3. Профили скорости и её среднеквадратичных пульсаций в выходном сечении диффузора при различных значениях числа Рейнольдса в выходном сечении.

Наличие перехода к турбулентности в канале диффузора не оказывается на профилях скорости и её среднеквадратичных отклонений в выходном сечении диффузора, результаты измерений которых представлены на рис.3.

На рис. 4 приведены результаты расчета энергии турбулентности на оси диффузора при различных значениях числа Рейнольдса Re_2 . Расчет проводился с использованием трехпараметрической модели турбулентности [2]. Из графика следует, что перестроение потока при разных способах подачи воздуха в диффузор проходит в начальной части канала. Следует отметить, что энергия турбулентности в канале диффузора значительно превышает соответствующие значения в цилиндрической трубе.

Измерение распределения статического давления по длине канала диффузора показывает монотонное изменение давления вдоль канала. При этом на всей длине диффузора зафиксирован положительный градиент давления. Из графиков на рис. 5 видно, что различие в изменении давления по длине диффузора при разных способах подачи имеет место только в начале канала, где согласно расчету происходит либо переход к турбулентности при $d < D_1$, либо перестроение потока при $d = D_1$.

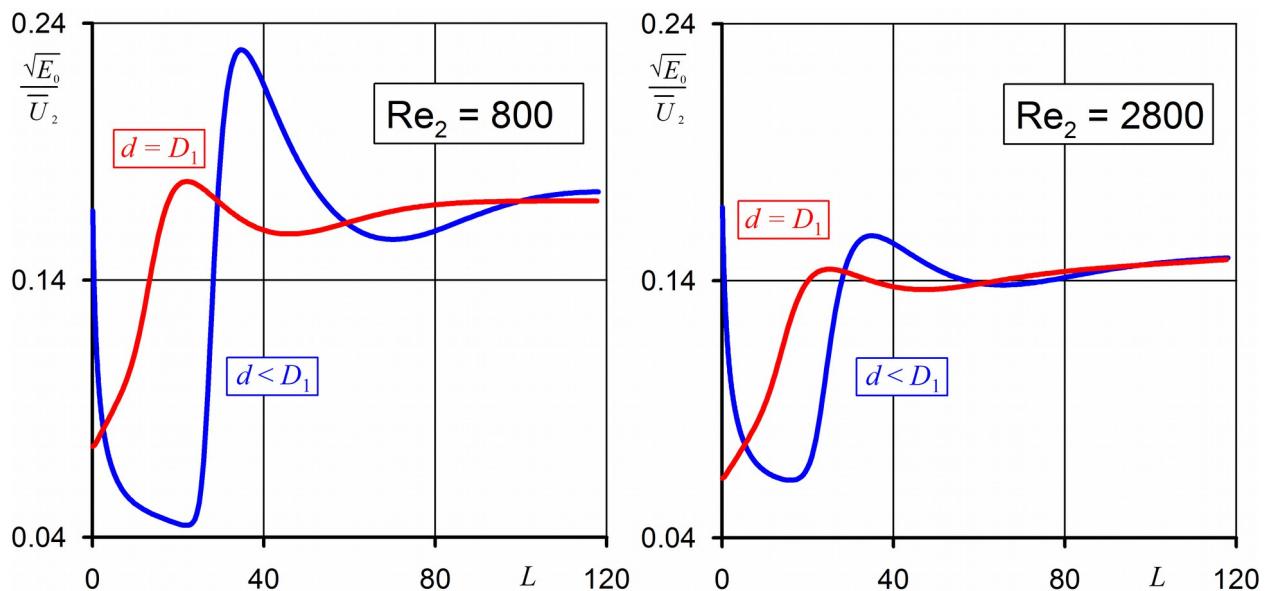


Рис. 4. Процесс формирования турбулентного потока в канале диффузора.

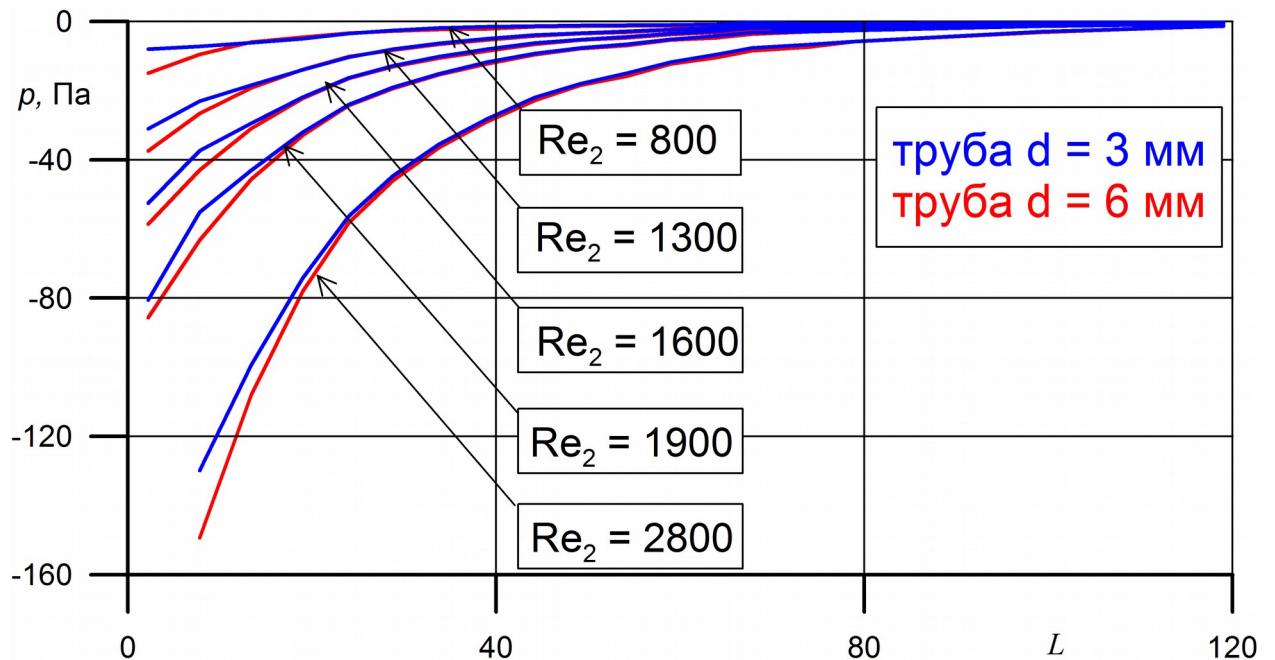


Рис. 5. Распределение давления по длине диффузора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Экспериментальное исследование течения в канале конического диффузора с углом раскрытия $\sim 1.2^\circ$ и длиной 120 входных диаметров при числах Ренольдса в выходном сечении в диапазоне от 800 до 2800 показало, что при различных способах подачи воздуха в диффузор на выходе диффузора формируется турбулентное течение. Статическое давление в канале диффузора меняется монотонно с положительным продольным градиентом, при этом течение в канале - безотрывное.

Параметры потока в выходном сечение диффузора не зависят от способа подачи воздуха в диффузор. Процесс формирования турбулентного течения, при числах Ренольдса на выходе больше 800, полностью происходит внутри диффузора. Параметры турбулентного течения на выходе из диффузора определяются только числом Рейнольдса и не зависят от условий на входе, пока эти условия достаточны для формирования турбулентного течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Решмин А.И., Тепловодский С.Х., Трифонов В.В. Турбулентное течение в круглом безотрывном диффузоре при числах Рейнольдса меньших 2000 //Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 2. С. 121-130.
2. Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности //Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1978. № 3. С. 13-25.

РАЗРАБОТКА ТЕХНОЛОГИИ ФОРМИРОВАНИЯ КРУГЛЫХ ЗАТОПЛЕННЫХ СТРУЙ С УВЕЛИЧЕННОЙ ДЛИНОЙ НАЧАЛЬНОГО УЧАСТКА

А.И. Решмин, Ю.С. Зайко, О.И. Навознов, А.Д. Сударикова, С.Х. Тепловодский.
НИИ механики МГУ, Москва

Струйные и сдвиговые течения, которые очень часто встречаются в природе и широко применяются в технике, привлекают пристальное внимание исследователей. Среди этих течений значительный интерес вызывают затопленные струи. Как правило, такие струи всегда турбулентные. Турбулентные затопленные струи достаточно хорошо изучены и по ним выполнено большое количество исследований. При истечении ламинарной струи в окружающее пространство профиль средней скорости всегда имеет точку перегиба, что вызывает неустойчивость. Чем тоньше сдвиговый слой, тем больше в нем поперечный градиент скорости и тем быстрее развивается неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. В дальнейшем эта неустойчивость растет и приводит к образованию кольцевых вихрей [1]. Ламинарные двумерные струи, вытекающие из узкой щели, были впервые исследованы Андраде (1939). Он обнаружил, что струя становилась неустойчивой, когда число Рейнольдса превышало величину порядка 10 [2].

Течение струи на начальном участке определяется характером потока в подающем устройстве. При этом основное значение имеют профиль средней скорости и степень турбулентности потока. Существуют различные способы создания потоков с низкой интенсивностью турбулентности в каналах.

В [3] плоская ламинарная струя формировалась посредством пропускания газа через проницаемые перегородки и последующего уменьшения площади поперечного течения потока в 67 раз. Это позволило получить интенсивность турбулентности на выходе менее 0.1%. В случае формирования круглой струи такой метод вряд ли был приемлем, так как в такое же число раз увеличивалось бы и число Рейнольдса в выходном сечении. Такое поджатие в плоском потоке не приводит к увеличению числа Рейнольдса.

В [4, 5] для формирования круглой дозвуковой струи используют осесимметричное сопло Витошинского. Для разбиения крупных вихревых структур, поступающих с лопаток вентилятора, на более мелкие и выравнивания потока перед входом в сопловую аппаратуру в форкамере струйной установки устанавливают хонейкомб и набор детурбулизирующих сеток. На срезе сопла формируется струя с ламинарным характером течения в определенном диапазоне чисел Рейнольдса, которая поступает в гладкую цилиндрическую трубу. Если степень турбулентности достаточно мала, переход к турбулентности в трубе не происходит. Профиль средней скорости на выходе при таком способе формирования потока определяется длиной выходного участка трубы. При длине трубы 200 калибров получается профиль скорости близкий к параболическому при числах Рейнольдса примерно до 7000. Создание параболического профиля скорости (профиля Пуазеля) на срезе сопла приводит к ситуации, когда течение в круглой затопленной струе остается ламинарным на расстоянии до десяти калибров, отсутствуют кольцевые вихри Кельвина – Гельмгольца и продольные вихри.

При таких способах формирования параметров струи в выходном сечении удается добиться ламинаризации потока. При этом профиль скорости в выходном сечении определяется только числом Рейнольдса и длиной канала, в котором струя формируется. Параболический профиль скорости, формирующийся на достаточно большой длине, имеет минимальный поперечный градиент скорости по сравнению с другими профилями, полученными в менее длинных каналах. Но существует множество профилей скорости с меньшим градиентом, однако, они не могут быть получены при таких способах формирования потока. В качестве примера можно привести течение, в котором продольная скорость линейно увеличивается в некоторой области около стенки.

Здесь представлены результаты исследований, направленных на разработку технологии создания газовых струй, у которых переход к турбулентности в слое смешения происходит на расстоянии порядка 10 калибров от начала течения при числах Рейнольдса выше 10000 и при диаметре струи более 100 мм. Начальные участки таких газовых струй, в которых интенсивность процессов переноса соответствует молекулярному уровню, могут использоваться для организации газодинамических завес, создающих области с заданными свойствами внутри другой среды.

Главная проблема, препятствующая созданию ламинарных газовых струй при таких числах Рейнольдса, является их неустойчивость и, как следствие, турбулизация, которая обычно происходит на расстоянии порядка диаметра струи. Для формирования ламинарного течения с профилем скорости, близким к параболическому, описанным выше способом при диаметре струи больше 100 мм потребовалась бы труба в десятки метров длиной, поэтому здесь такой способ не подходит. Задача создания газовых струй, сохраняющих ламинарность течения на достаточном расстоянии от сопла, таким образом, разбивается на две подзадачи: во-первых, создание устройств для организации ламинарного потока с заданным профилем скорости в выходном сечении и, во-вторых, оптимизация профиля скорости с целью затягивания перехода к турбулентности. Здесь будем говорить только о формирующих устройствах.

Описанные выше способы ламинаризации потока с помощью хнейкомбов и сетчатых перегородок достаточно хорошо освоены и именно они использованы в данной работе. Что касается формирования профиля скорости ламинаризированного потока, то здесь предлагается совершенно другой метод, позволяющий создать компактные формирующие устройства, обеспечивающие низкий уровень гидравлических потерь.

В качестве основного элемента устройства, формирующего профиль скорости, выбран круглый короткий диффузор с большой степенью расширения и проницаемой перегородкой в выходном сечении.

Условия и методика эксперимента. Эксперименты по исследованию параметров формирующего устройства проводились на газодинамической установке в Институте механики Московского государственного университета, фотография которой представлена на рис. 1.



Рис. 1. Экспериментальная установка.

Воздух подается в формирующее устройство с помощью электрического вентилятора, скорость вращения которого регулируется. После вентилятора воздух по короткому трубопроводу поступает во входную часть формирующего устройства, представляющую собой цилиндрический канал диаметром 40 мм, где поток выравнивается, проходя через перфорированную решетку. После решетки поток воздуха проходит через хонейкомб и систему мелкопористых сеток. После этого организовано практически мгновенное (на длине 20 мм), расширение потока до диаметра 120 мм с помощью короткого безотрывного диффузора 6, из которого струя истекает в окружающую среду. Диффузор выполнен так, что за ним формируется нужный профиль скорости, а течение в нем безотрывное.

Для измерения скорости воздуха используется термоанемометр DISA 56C01 СТА, датчик которого размещается на устройстве перемещения, что позволяет проводить измерения профиля скорости в выходном сечении. Сигнал термоанемометра поступает на вход аналого-цифрового преобразователя, оцифровывается и обрабатывается.

Измерения скорости воздуха проводились с помощью малоразмерных проволочных датчиков 55P11 производства Dantec Dynamics (длина нити 1.25 мм, толщина нити 5 мкм). Визуализация потока осуществлялась с применением генератора дыма.

Формирующее устройство. Для формирования ламинарной струи необходимо выровнять поступающий поток и подавить в нём турбулентные пульсации. Входная часть устройства - цилиндрический канал диаметром 40 мм и длиной 150 мм. В его начале установлена равномерно перфорированная пластина - решетка с диаметром отверстий 0.6 мм и прозрачностью 0.8. За ней расположен хонейкомб - плотный набор тонкостенных трубок такого диаметра, что число Рейнольдса в них соответствует ламинарному течению, и такой длины, чтобы в проходящем потоке турбулентность вырождалась, и поток был ламинарным. В созданной установке хонейкомб состоит из плотно уложенных трубок длиной 40 мм, диаметром 1 мм и толщиной стенки 0.05 мм. В результате после входной секции перед диффузором удалось получить равномерный поток с интенсивностью пульсаций менее 1%.

Выходная часть - это диффузор с отношением выходного и входного диаметров равным трем. Длина канала примерно 0.5 входного диаметра. Исследования разных авторов показывают, что безотрывное течение в расширяющемся канале может иметь место, если угол расширения не превышает 12-14°. При большем угле раскрытия возникает отрыв потока и значительно возрастает коэффициент сопротивления диффузора. Оптимальный угол раскрытия конического диффузора, согласно [6] составляет 6-8°. При этом длина диффузора может оказаться достаточно большой. В выходном сечении диффузора формирующего устройства установлена проницаемая перегородка в виде тканой металлической сетки (ячейка - 40 мкм, нить 30 мкм). Проницаемая перегородка тормозит поток и вызывает его расширение в направлении от оси канала, направляя среду к образующей переходного участка. Одновременное воздействие на поток проницаемой перегородки и профилированной стенки приводит к тому, что область обратных токов (область отрыва) не образуется. Фотография диффузора приведена на рис. 2.



Рис. 2. Сверхкороткий диффузор.

Результаты измерений. На рис. 3 показаны профиль скорости и относительных пульсаций скорости после прохождения участка детурбулизации формирующего устройства - перфорированной пластины и следующего за ней хонейкомба. Видно, что скорость потока достаточно равномерна, и ее пульсации составляют 0.5-0.6 %. Число Рейнольдса в канале при этом примерно 16000 и может меняться в диапазоне 10000-40000 в зависимости от расхода с сохранением интенсивности турбулентности после прохождения входной секции на уровне 0.5%.

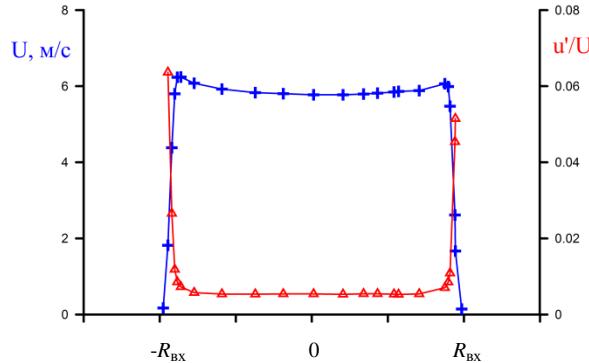


Рис. 3. Параметры потока за хонейкомбом.

На рис. 4 приведены профили скорости и ее пульсаций при различных скоростях потока на выходе из формирующего устройства в начальном сечении струи в 3 мм от выходной сетки.

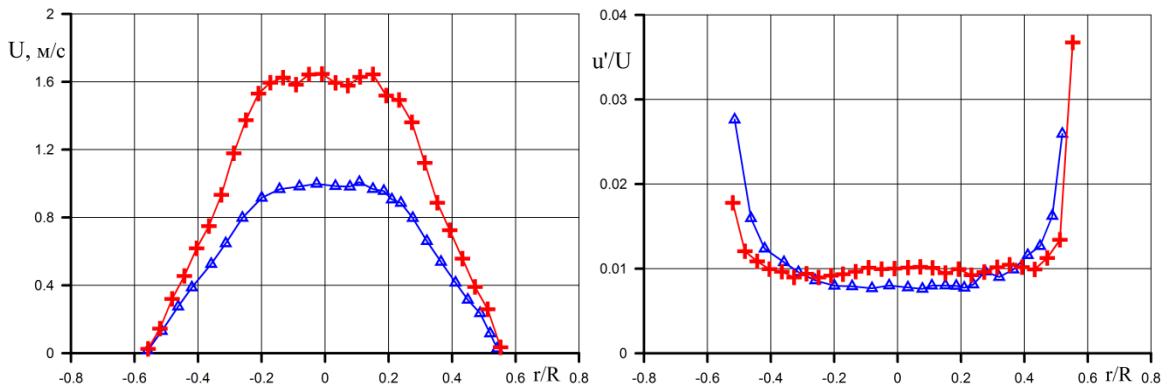


Рис. 4. Параметры потока на выходе диффузора.

Следует отметить, что относительные пульсации скорости после прохождения диффузора практически не изменились. Это означает, что диффузор не дает дополнительных пульсаций, то есть течение в нем безотрывное. Это отмечалось и в [7]. Там проводилось сравнение относительных пульсаций скорости до и после диффузора на расстояниях от оси, соответствующих одной линии тока. При безотрывном течении эти величины совпадали, а при наличии локального отрыва значительно (в несколько раз) различались.

Были выполнены измерения скорости и ее пульсаций на расстояниях от сетки 1 и 3 выходных диаметра (120 и 360 мм). Результаты измерений приведены на рис. 5.

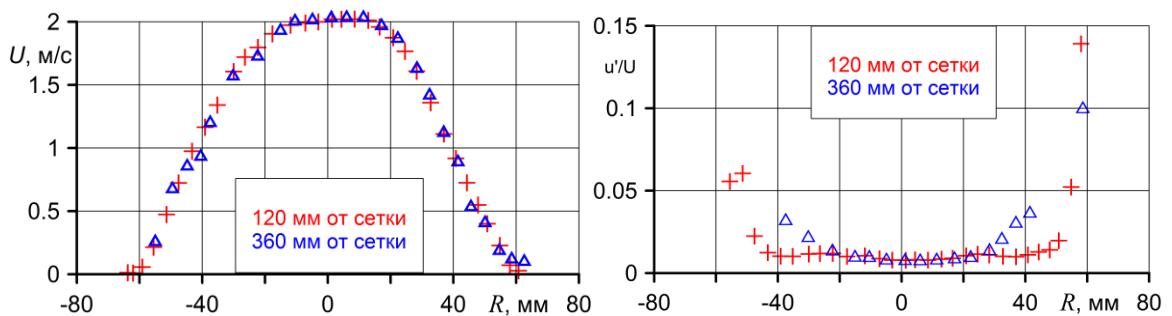


Рис. 5. Параметры потока на различных расстояниях от выхода диффузора.

Для визуализации формируемого потока в него подавались струйки задымленного воздуха. Подача осуществлялась от регулируемого источника воздуха, который проходил через емкость с работающим генератором дыма. Дым в поток подводился вблизи выхода из диффузора по никелевым трубкам с внутренним диаметром 0.9 мм и толщиной стенки 0.05 мм. Использовались две трубы. По одной дым подавался в центр струи, по другой в 45 мм от центра струи (15 мм от края струи). Для подсветки снизу устанавливались оптоволоконные источники света.



Рис. 6. Визуализация потока за диффузором струйками дыма.

Визуализация показала, что ламинарный характер потока в центре струи сохранялся на расстоянии 4 - 5 диаметров струи, однако ядро потока оказывалось на этих расстояниях довольно узким (рис. 6). На рис. 5 видно, что область с градиентом скорости занимает значительную часть потока, и в ней происходит потеря устойчивости и развитие турбулентности, поэтому область струи, отстоящая от центра, размывается.

Для организации более устойчивого течения был изменен профиль скорости в начальном сечении струи. Для этого к выходу диффузора, вплотную к сетке, была добавлена дополнительная секция диаметром 120 мм длиной 50 мм, в которой размещалась профилирующая вставка. Начальные 20 мм вставки представляли собой профиль Витошинского, поджимающий поток до диаметра 80 мм, а конечные 10 мм - расширение до 120 мм. Сразу за вставкой располагалась такая же сетка, как и за диффузором, образуя еще один безотрывный сверхкороткий диффузор. В результате безградиентный участок потока заметно увеличился, что видно из результатов измерений, представленных на рис. 7.

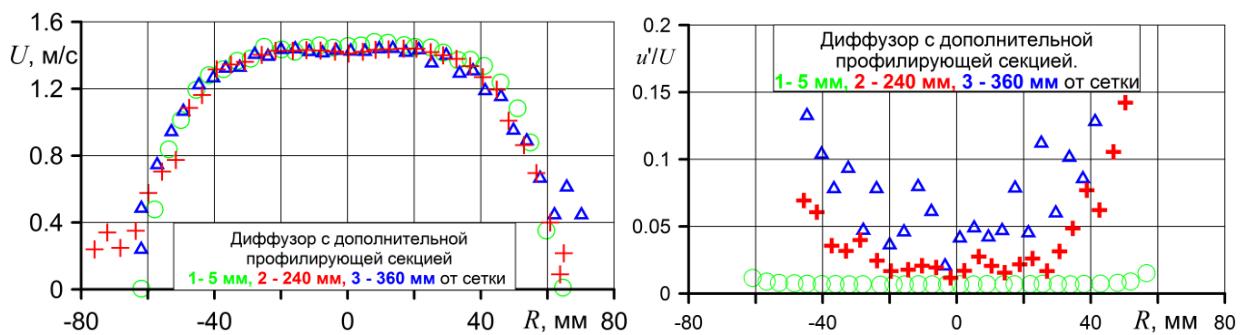


Рис. 7. Параметры потока на выходе формирующего устройства.

В процессе проведения экспериментов было замечено, что при работе установки струя подсасывает воздух и вызывает воздушный поток вокруг конструкции формирующего устройства. Чтобы этот эффект меньше влиял на начальный участок течения после финишной сетки по ее периметру было установлено цилиндрическое кольцо диаметром, равным выходному диаметру установки.

На рис. 8 приведены фотографии течения с дымовой визуализацией потока за устройством.

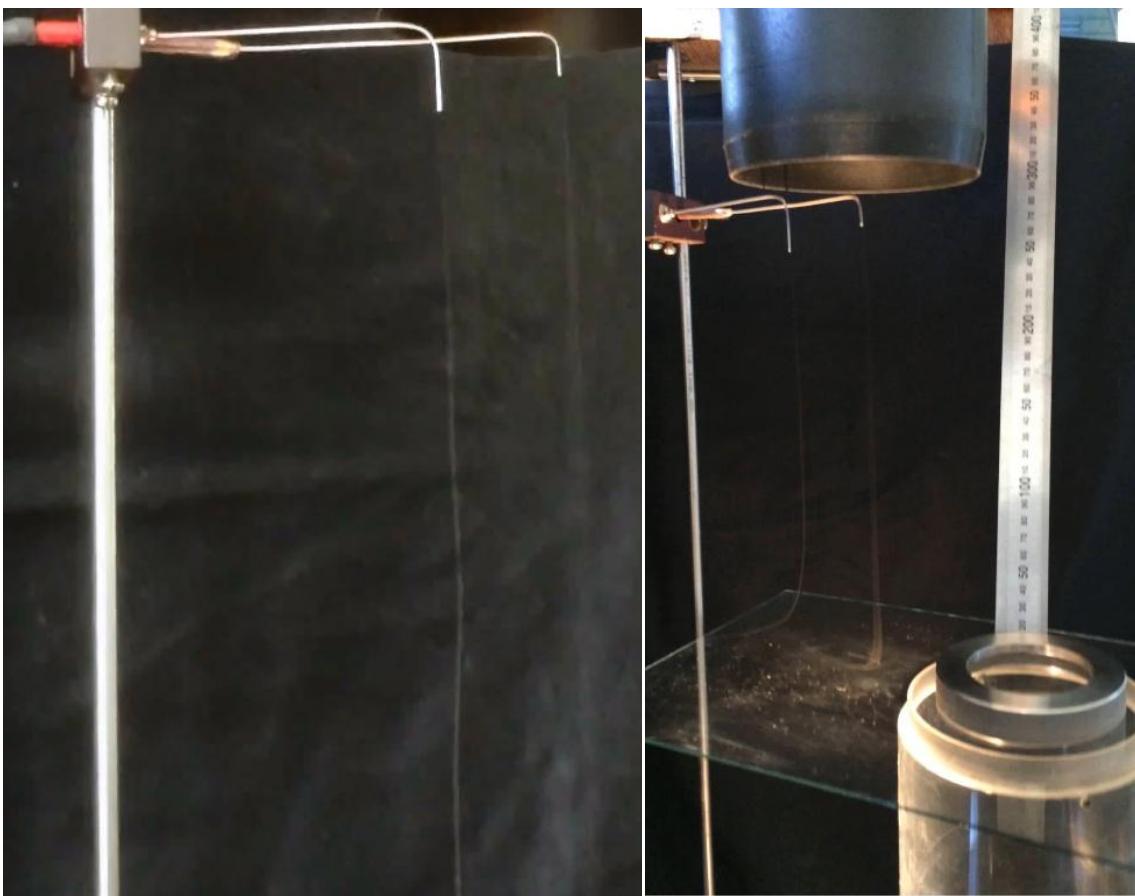


Рис. 8. Визуализация потока за формирующим устройством струйками дыма: свободная струя (слева), струя, натекающая на плоскую поверхность (справа).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Предложена технология создания малотурбулентных газовых затопленных струй диаметром более 100 мм при числах Рейнольдса на уровне 10000. Продемонстрирована возможность формирования затопленной струи с начальным участком 4 - 5 диаметра струи в начальном сечении. Струя не разрушается при натекании на твердую поверхность, что подтверждается визуализацией. Размер формирующего устройства соизмерим с диаметром струи. Потери давления на устройстве порядка входного скоростного напора. Основой конструкции устройства является круглый короткий диффузор с проницаемой перегородкой в выходном сечении. В докладе будут обсуждены основные пути дальнейшего развития предложенной технологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Drazin P. G., Reid W. H. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge Univ. Press, 1981.
2. Andrade, E. N. da C. *Proc. Phys. Soc.* 1939. 51, 784.
3. Hiroshi Sano. The stability and transition of a two-dimensional jet. // Aeronautical Research Institute, University of Tokyo, Japan. *Journal of Fluid Mechanics*. 1959. Vol. 7. Part. 1
4. Г. В. Козлов, Ю. А. Литвиненко, Г. Р. Грек, А. М. Сорокин. О механизме возникновения и развития когерентных структур в ламинарной и турбулентной круглых струях. // Вестник НГУ. Серия физика. 2008. Том 3. Вып. 1. С. 12-22
5. Литвиненко М. В., Литвиненко Ю. А., Козлов Г. В., Вихорев В. В. Экспериментальное исследование затопленной круглой струи с вихрями Дина // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Физика. 2014. Т. 9, вып. 2. С. 128–135.
6. Дейч М.Е. Техническая газодинамика. М.: Энергия, 1974. 592 с.
7. А.И. Решмин, С.Х. Тепловодский, В.В Трифонов. // Круглый короткий диффузор с большой степенью расширения и проницаемой перегородкой. Изв. РАН. МЖГ № 5. 2012. С. 32-39.

Численное моделирование склоновых потоков в пакете OpenFOAM

Д. И. Романова
МГУ им. М. В. Ломоносова

Рассмотрены задачи о движении снежных лавин. Моделирование производится в пакете OpenFOAM с использованием решателя interFoam. Задача представлена как нестационарное течение двух сред (снег / воздух), разделённых свободной поверхностью. Поток снега представлен вязкой несжимаемой ньютоновской жидкостью. Рассмотрены двумерный и трёхмерный варианты реализации задачи. Интерес представляют следующие данные: форма и размеры лавины, скорость внутри неё и скорость движения фронта, скорость в окружающей среде. Были исследованы изменения вышеперечисленных параметров в зависимости от режимов течения лавины (ламинарного, турбулентного), параметра вязкости, геометрии склона, распределения снега на склоне в начальный момент времени. Моделирование проводилось на базе экспериментальных данных полученных в Хибинском горном массиве цехом противолавинной защиты ПО “Апатит”.

ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИЙ КРУГОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ НА ТЕПЛОВУЮ КОНВЕКЦИЮ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ПЛОСКОМ СЛОЕ

К.Ю. Рысин, А.А. Вяткин, В.Г. Козлов
rysin@pspu.ru vjatkin_aa@pspu.ru kozlov@pspu.ru

Лаборатория вибрационной гидромеханики,
 Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет

Исследуется тепловая конвекция во вращающемся горизонтальном плоском слое при вибрациях круговой поляризации. Верхняя и нижняя границы слоя поддерживаются при различных температурах; боковая цилиндрическая граница теплоизолирована. Разность температур границ слоя $\Theta = 10 - 20^{\circ}\text{C}$. Слой совершает равномерное вращение с заданной скоростью вокруг вертикальной оси z (рис. 1), проходящей через его центр симметрии. Скорость вращения слоя варьируется в диапазоне $f_{\text{rot}} = \Omega_{\text{rot}}/2\pi = 0 - 3.5$ об/с. Ось вращения совершает поляризованные по кругу вибрации. Частота вибраций задается в пределах $f_{\text{vib}} = \Omega_{\text{vib}}/2\pi = 0 - 6.5$ Гц. Описание вибрационного стенда приведено в [1]. Эксперименты проводятся на слоях различной толщины $h = (1.50, 0.50 \pm 0.01)$ см. Изучаются структура конвекции и теплоперенос через слой в зависимости от разности температур границ слоя, скорости вращения и интенсивности вибраций.

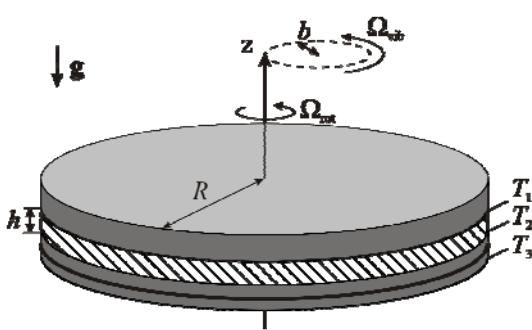


Рис. 1. Схема слоя

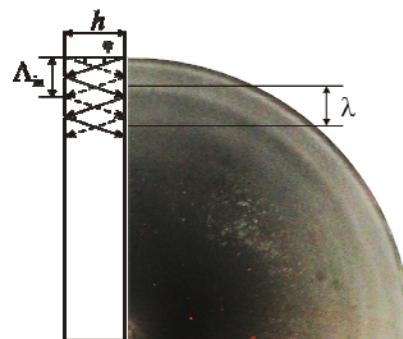


Рис. 2. Конвективные структуры при подогреве сверху

В случае подогрева вращающегося слоя жидкости сверху, система находится в устойчивом состоянии. При вибрационном воздействии в слое генерируются потоки в виде регулярной системы азимутальных вихрей (рис. 2). Источниками волн в данном случае служат торцевые границы слоя. Характеристическими поверхностями волны являются прямые круговые конусы, где φ угол распространения волн [2]. На плоскости безразмерных параметров λ/h и $N = \Omega_{\text{osc}}/\Omega_{\text{rot}}$, где $\Omega_{\text{osc}} = \Omega_{\text{vib}} - \Omega_{\text{rot}}$, приводится сравнение длин волн вихревых структур со значениями длин инерционных волн, полученных теоретически. Показано, что размер вихревых структур согласуется с длиной инерционных волн (Λ_{in}). Конвективные течения обеспечивают незначительный теплоперенос. Изучению конвективных течений, генерируемых инерционными волнами предшествует экспериментальное исследование тепловой конвекции во вращающемся вокруг горизонтальной оси плоском слое [3]. В работе показано, что инерционные волны оказывают значительное влияние на осредненную тепловую конвекцию. Это направление является новым и перспективным в плане развития теории термовибрационной конвекции при вращении.

В докладе также приводятся результаты экспериментов в случае подогреваемого снизу вращающегося слоя. Изучается влияние вибрационного воздействия как до порога естественной конвекции при вращении, так и в надкритической области параметров.

Работа выполнена в рамках задания Минобрнауки РФ 2014/372 (проект 2176).

ЛИТЕРАТУРА.

1. А.А. Вяткин, В.Г. Козлов, К.Ю. Рысин. Стенд для изучения влияния осциллирующих силовых полей на вращающиеся гидродинамические системы // Конвективные течения. Вып. 7. 2015. Пермь: ПГГПУ. С. 61-72.
2. H.P. Greenspan. The Theory of Rotating Fluids. Cambridge University Press. New York, 1968. 328 p.
3. Kozlov V., Vjatkin A., Sabirov R., Rysin K. Inertial waves and vibrational thermal convection // Proc. 66th Intern. Astronautical Congress, IAC2015, Jerusalem, Israel, 8 p.

ОСОБЕННОСТИ КАПИЛЛЯРНОГО РАСПАДА СТРУИ ЖИДКОСТИ ПРИ ЧИСЛАХ ОНЕЗОРГА БОЛЬШЕ ЕДИНИЦЫ

А.А. Сафонов
ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша», МФТИ, Москва

Исследуется вынужденный капиллярный распад струи жидкости. В общем случае, распад струи происходит неравномерно, - образуются большие (основные) капли и капли малого размера (сателлиты). Неравномерность распада обусловлена нелинейностью процесса развития капиллярных волн в струе. Один из основных параметров, определяющих капиллярные процессы в струе жидкости – число Онезорга:

$$Oh = \mu / \sqrt{\sigma r_0 \rho},$$

где ρ , μ – соответственно плотность и динамическая вязкость жидкости, r_0 - радиус невозмущённой струи. Известно значительное число работ, посвящённых исследованию образования сателлитных капель при $Oh \ll 1$. В них аналитически рассчитаны зависимости размеров основных и сателлитных капель от параметров инициирующего распад сигнала [1]. Однако, случай $Oh = O(1)$ рассматривался значительно реже, причём исследования проводились путём численного моделирования процессов, происходящих в конкретных технических устройствах (например [2]). Разрыв струи, происходящий при $Oh \gtrsim 1$, происходит по автомодельным законам. Известен ряд теоретических и экспериментальных работ, направленных на выявление этих законов [3,4].

В работе аналитически исследован нелинейный процесс развития капиллярных волн в струе жидкости при числах Онезорга $Oh = O(1)$. Решение задачи развития капиллярных волн строится путём сшивки асимптотических решений развития волн малой интенсивности и автомодельных закономерностей разрыва струи.

В работе определены условия возникновения сателлитных капель, рассчитаны зависимости размеров основных и сателлитных капель от параметров инициирующего капиллярный распад сигнала при числах Онезорга $Oh = O(1)$.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Lafrance P. Nonlinear breakup of a laminar liquid jet. *Phys. Fluids*. 1975. Vol. 18. N4. P.428-432.
2. W. Hoeve and other. Breakup of diminutive Rayleigh jets. *Physics of Fluids*. 2010. 22, 122003.
3. J. Eggers, T.F. Dupont. Drop formation in a one-dimensional approximation of the Navier–Stokes equation. *J Fluid Mech.* 1994. Vol. 262. P. 205 – 221.
4. J. Eggers1, E. Villermaux. Physics of liquid jets. *Rep. Prog. Phys.* V. 71, N 36. 2008.

ФОРМИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ ВБЛИЗИ ЛОКАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

И.О. Сбоев, А.Н. Кондрашов, П.Д. Дунаев
Пермский государственный национальный исследовательский университет

До сих пор в области тепловой конвекции остается недостаточно изучен переходный режим, в частности развитие температурного пограничного слоя вблизи локального источника тепла и последующее формирование теплового плюма [1]. Выполненный обзор доступной литературы по проблеме, близкой к рассматриваемому явлению, выявил необходимость дальнейшего исследования влияния начальных условий на эволюцию течения [2,3]. Однако получение достоверных результатов в лабораторных условиях сильно осложняется по некоторым причинам [4,5]. Во-первых, лабораторная модель обладает конечным временем прогрева теплообменника. Во-вторых, конвективный параметр реальных жидкостей имеет сложный характер зависимости от температуры. В связи с этим возникает необходимость проведения численного эксперимента, преимуществом которого является возможность контроля начальных условий. Однако в силу идеализации условий в рамках численной модели с целью верификации получаемого решения проводится сравнение с экспериментальными данными.

В ходе численного расчета определяется структура течения несжимаемой жидкости в ограниченном твердыми границами слое, возникающем под действием локального подогрева. Расчетная область имеет форму прямоугольного параллелепипеда высотой h . В основании полости лежит квадрат со стороной l . Полость ориентирована таким образом, что ее нижняя сторона находится в горизонтальной плоскости XY декартовой системы координат, а вектор гравитационного ускорения g параллелен вертикальной оси z . Течение организуется под действием круглого источника тепла радиусом r , расположенного на нижней границе полости. Для численного решения задачи применяется система автоматизации инженерных расчетов ANSYS CFX [6]. В рассматриваемой модели изменение энергии жидкости за счет сил внутреннего трения не учитывается. Система уравнений тепловой конвекции дополняется граничными условиями для скорости, выражающими условие прилипания $V|_G = 0$. Верхняя граница слоя находится при постоянной температуре T_0 , равной также температуре невозмущенной жидкости, при этом боковые грани считаются теплоизолированными.

Прямоугольная расчетная сетка имеет нерегулярную структуру, и расстояние между соседними узлами в направлении к основанию полости сокращается в 12 раз. Общее количество расчетных узлов составляет величину порядка $1,4 \cdot 10^5$, при этом на круглый нагреватель радиусом $r \approx 5$ мм приходится в среднем $1,5 \cdot 10^3$ узлов.

В рамках настоящей работы численно изучается пространственная и временная эволюция поля изотерм в зависимости от формы, размера r круглого нагревателя и превышении температуры ΔT локального источника тепла над температурой невозмущенной жидкости. В ходе перебора значений этих параметров выявлено два режима развития теплового пограничного слоя вблизи нагревателя. Наблюдаемое различие в поведении конвективного факела на начальном этапе его формирования приводят к необходимости выбора универсального параметра, отвечающего за реализацию того или иного режима. В этом случае характеристикой режимов выступает безразмерный аналог числа Рэлея Ra . В отличие от обычного числа Рэлея характерной длиной в настоящей работе выбран линейный размер источника тепла r .

Также при помощи численной модели исследуется влияние формы локального источника тепла на структуру образующегося в слое жидкости температурного поля. С этой целью помимо круглого нагревателя моделируются источники тепла, имеющие форму треугольника, квадрата и пятиугольника. При этом размеры нагретой области соответствуют размерам фигур, вписанных в окружность радиуса $r = 5,5$ мм. Нагреватель представленного радиуса применяется также в натурном эксперименте. В ходе численного эксперимента для каждого источника тепла были определены критические значения управляющего параметра Ra_{kp} .

При дальнейшем исследовании предпринимается попытка обобщения результатов численной модели на случай различных рабочих жидкостей. Таким образом, согласно численной модели искомое значение критического числа Ra_{kp} заключено в интервале от $0,8 \cdot 10^2$ до $1,2 \cdot 10^2$ и в пределах погрешности не зависит от числа Прандтля рабочей жидкости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №14-01-31430 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Bazylak A., Djilali N., Sinton D. Natural convection in an enclosure with distributed heat sources //Numerical Heat Transfer, Part A: Applications. – 2006. – Vol. 49. – no. 7. – pp. 655-667.
2. Sezai I., Mohamad A.A. Natural convection from a discrete heat source on the bottom of a horizontal enclosure //International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2000. – Vol. 43. – no. 13. – pp. 2257-2266.
3. Oosthuizen P.H., Paul J.T. Natural convection in a rectangular enclosure with two heated sections on the lower surface //International journal of heat and fluid flow. – 2005. – Vol. 26. – no. 4. – pp. 587-596.

4. Бабушкин И.А., Кондрашов А.Н., Сбоев И.О. Развитие конвективного факела в вертикальном слое // Вестник Пермского университета. Сер. Физика. Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2012. Вып. 4 (22). С. 101–105.
5. Бабушкин И.А., Кондрашов А.Н., Рыбкин К.А., Сбоев И.О. Развитие теплового плюма в узком вертикальном слое // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2 (34). С. 41–51.
6. Сухановский А.Н. Формирование дифференциального вращения в цилиндрическом слое жидкости //Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3. №. 2. С. 103-115.

О ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОМ ПЕРЕХОДЕ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА СКОЛЬЗЯЩЕМ КРЫЛЕ

Н.В. Семенов¹, А.Д. Дрясов¹, Ю.Г. Ермолаев¹, А.Д. Косинов^{1,2}, А.Н. Семенов^{1,3}, А.А. Яцких^{1,2}.

¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

² Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Новосибирский государственный университет, Новосибирск,

³ Институт геологии и минералогии им. В. С. Соболева СО РАН, Новосибирск

E-mail: semion@Itam.nsc.ru

Исследование пространственных пограничных слоев в последнее время особенно актуально для развития авиационной техники. Практическое применение напрямую связано с тем, что такие пограничные слои реализуются, в частности, на крыле самолета. Отметим, что процесс возникновения турбулентности в пограничном слое на модели скользящего крыла качественно отличается от двумерного случая плоской пластины. В трехмерном пограничном слое на реальном стреловидном крыле может возникать целый ряд неустойчивостей: неустойчивость Толмина-Шлихтинга, неустойчивость поперечного течения, выраженная в виде стационарных и бегущих возмущений, неустойчивость течения на линии растекания передней кромки крыла и т.д. Развитие всех этих возмущений и их относительная роль в процессе перехода сильно зависит от внешних условий. Обзор экспериментальных данных, полученных на различных установках, приведен в [1]. В работе [1] показано, что числа Рейнольдса перехода сверхзвукового пограничного слоя на скользящем крыле, полученные в различных экспериментах, могут отличаться на порядок. Цель данной работы – определить числа Рейнольдса перехода, которые не вызывают сомнения. А также понять причины такого разброса в данных по переходу.

Эксперименты выполнены в сверхзвуковой малотурбулентной аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН при числах Маха $M=2 - 4$. В экспериментах использовалась модель крыла с чечевицеобразным профилем и углом скольжения передней и задней кромки $\chi=45^\circ$, которая устанавливалась под нулевым углом атаки. Длина модели 0,38 м, ширина 0,2 м, максимальная толщина 12 мм, относительная толщина 3 %. Кромки модели имели различный радиус притупления (приблизительно 0,1 и 1 мм). Возмущения в потоке регистрировались термоанемометром постоянного сопротивления. Измерения пульсационных и средних характеристик потока проводились автоматизированной системой сбора данных.

Влияние числа Маха на положение перехода рассматривалось в работе [2]. Измерения кривых нарастания возмущений выполнялись в критическом слое, где пульсации возмущений имеют максимальное значение при числах Маха $M=2; 2,5; 3; 3,5$ и 4. По полученным данным определялось значение числа Рейнольдса перехода (соответствующее максимуму кривой нарастания). Также измерялись профили, как среднего течения, так и пульсаций. В каждой точке измерений были получены осцилограммы, амплитудно-частотные спектры и статистические диаграммы естественных пульсаций.

На рис.1 приведены зависимости среднеквадратичных пульсаций от Re_x для всех значений числа Маха для случая острой передней кромки. Максимумы в распределениях соответствуют положению ламинарно-турбулентного перехода. Минимальное значение $Re_{\text{пер}}$ получено для $M=3,5$, что качественно согласуется с результатами исследований положения перехода на плоской пластине на этой же установке. Получено, что только для $M=2$ и 2,5 для случая острой передней кромки в диапазоне наших измерений существует область устойчивого развития возмущений, а рост начинается от $x \approx 100$ мм ($Re_x \approx 0,5 \times 10^6$). При $M=3; 3,5$ и 4 рост возмущений наблюдался примерно от начала области измерений $x=50$ мм до значений продольной координаты x , соответствующей положению ламинарно-турбулентного перехода. Анализ амплитудно-частотных спектров и статистических диаграмм показал, что даже при $x=50$ мм мы находимся в области нелинейного развития возмущений для значений числа Маха $M=3; 3,5$ и 4. Более подробно полученные данные описаны в работе [2].

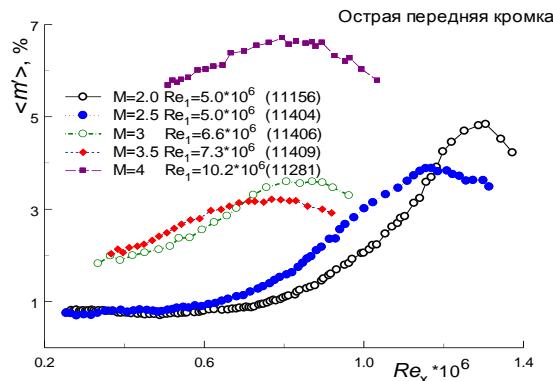


Рис. 1. Кривые нарастания возмущений для различных чисел Маха.

Влияние единичного числа Рейнольдса на положение перехода на скользящих крыльях рассматривалось в работах [3 - 8]. Если в работах [3 - 5] не отмечено влияние единичного числа Рейнольдса на положение перехода, то в работах [6 - 8] показано, что увеличение Re_1 приводит к значительному росту числа $Re_{\text{пер}}$. Примеры полученных данных, в виде зависимостей кривых нарастания возмущений от единичного числа Рейнольдса, представлены на рис.2 ($M=2$) и рис.3 ($M=2,5$). На рис. 2 кривая 1 была измерена при $Re_1 = 5 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$, кривая 2 - при $Re_1 = 10 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$, а кривая 3 - при фиксированном значении координаты $x = 150 \text{ мм}$, а менялось значение Re_1 . Максимумы в распределениях соответствуют положению ламинарно-турбулентного перехода. На рис. 3 кривые 1 – 3 были измерены при $Re_1 = 5 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$, кривая 4 - при $Re_1 = 10 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$, а кривая 5 - при фиксированном значении координаты $x = 150 \text{ мм}$, а менялось значение Re_1 . Получено, что с увеличением единичного числа Рейнольдса положение ламинарно-турбулентного перехода смещается вниз по потоку. Для числа Маха 2 положение перехода смещается почти в 1.6 раза, для $M=2,5$ изменяется приблизительно в 1.3 раза. Показано, что увеличение единичного числа Рейнольдса ведет к росту числа Рейнольдса перехода, что сильно затрудняет сравнение экспериментальных данных, полученных даже в одной и той же установке. Но с увеличением числа Маха этот эффект становится менее значимым. Это вызвано ростом уровня возмущений в рабочей части с увеличением числа Маха.

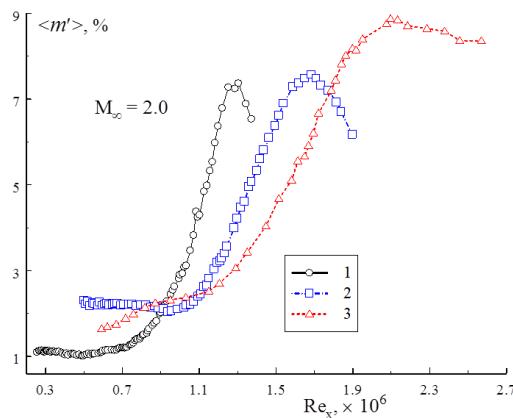


Рис. 2.

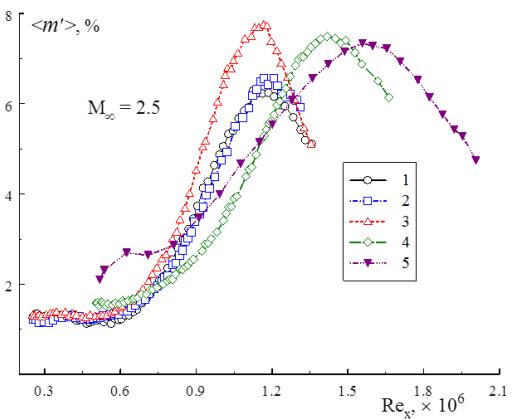


Рис. 3.

Результаты исследования влияния внешних возмущений на устойчивость и ламинарно-турбулентный переход сверхзвукового пограничного слоя на скользящем крыле представлены в работах [9 - 11]. В качестве источника вихревых возмущений было предложено использовать проволоку различного диаметра, натянутую перед сопловыми вставками. В экспериментах использовалась проволока, диаметром $d = 0,63 \text{ мм}$, $0,95 \text{ мм}$, $1,9 \text{ мм}$ и 3 мм . Выполнено исследование структуры вихревых возмущений, создаваемых с помощью проволоки при $M=2$. Получено, что возмущения в свободном потоке для проволоки диаметром $0,63 \text{ мм}$ не выделяются на фоне естественных пульсаций. Для других диаметров проволоки в свободном потоке получено превышение возмущений над естественным фоном, отмечено расширение области вихревых возмущений в трансверсальном направлении и рост их интенсивности с увеличением диаметра проволоки. Амплитудно-частотные спектры возмущений в свободном потоке для различных диаметров проволоки подобны, а основное отличие наблюдается в области низких частот до 5 кГц . Увеличение диаметра проволоки приводит к росту возмущений в этой части спектра. Проведено исследование восприимчивости сверхзвукового пограничного слоя на остром и затупленном скользящем крыле к внешним возмущениям при числах Маха $M=2$ и $2,5$. Определены положения ламинарно-турбулентного перехода для всех источников внешних возмущений. Для этого были измерены кривые нарастания возмущений в следе за проволокой. Результаты измерений при $Re_1 = 5 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$ для различных диаметров проволоки при $M=2,5$ представлены на рис. 4 (случаи острой передней кромки – слева, затупленной – справа). Для $d=3 \text{ мм}$ отмечено максимальное влияние вихревых возмущений на положение перехода. Получена более сильная дестабилизация пограничного слоя для затупленной модели, чем для случая острой передней кромки. Уменьшение диаметра проволоки приводит к увеличению числа Рейнольдса перехода. И уже при $d=0,63 \text{ мм}$ влияния вихревых возмущений не положение перехода не отмечено. Измерены кривые нарастания, профили пульсаций массового расхода и профили средних напряжений, получены амплитудно-частотные спектры и выполнен статистический анализ. Предложено определять коэффициент восприимчивости K как отношение максимальной амплитуды пульсаций массового расхода в пограничном слое к амплитуде пульсаций в свободном потоке над моделью. Для этого использовались результаты измерений в свободном потоке над моделью и в пограничном слое скользящего крыла в сечении $x=50 \text{ мм}$. Подтверждено дестабилизирующее влияния притупления передней кромки модели скользящего крыла. Определены коэффициенты восприимчивости. Показано, что увеличение диаметра проволоки приводит к увеличению интенсивности порождаемых возмущений и раннему проявлению нелинейных процессов, что в свою очередь приводит к дестабилизации пограничного слоя.

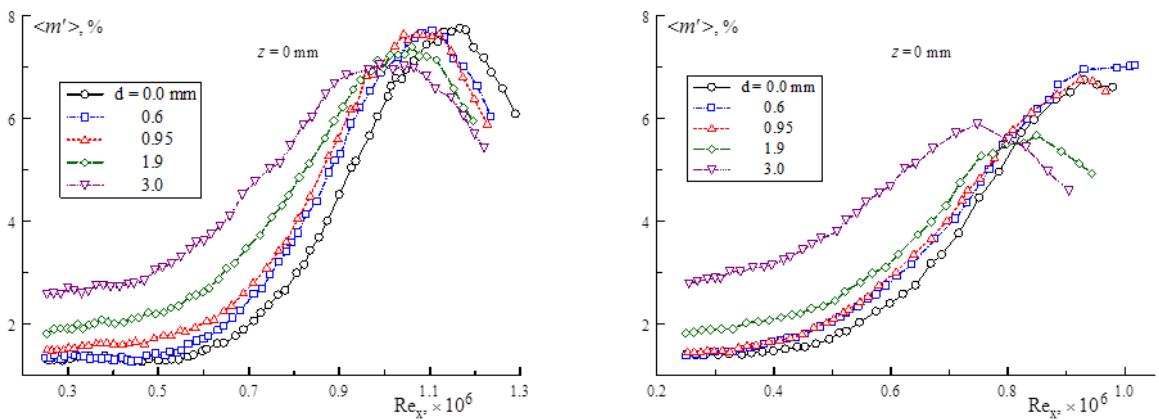


Рис.4 Кривые нарастания возмущений для различных диаметров проволоки

Особый интерес представляют данные по влиянию малых углов атаки на положение перехода на скользящих крыльях при обтекании высокоскоростным потоком. Имеется только несколько работ, в которых в той или иной степени рассматривалась данная проблема. В экспериментах [8] получено незначительное уменьшение чисел Рейнольдса перехода для угла атаки - 4 градуса по сравнению с $\alpha=0$. В [4] угол атаки изменялся приблизительно от $-1,5^\circ$ до $5,5^\circ$. Если для положения датчиков в 70% вдоль размаха крыла получено монотонное увеличение числа Рейнольдса перехода $Re_{\text{пер}} \approx 0,6 \times 10^6$ до $Re_{\text{пер}} \approx 1,3 \times 10^6$ с ростом угла атаки. То для положения датчиков в 30% вдоль размаха крыла зафиксирован максимум в распределении $Re_{\text{пер}}(\alpha)$ для значения $\alpha=1,73^\circ$. Незначительное изменение угла атаки от этого значения приводило к существенному изменению положения перехода вверх по потоку.

Выполнены измерения кривых нарастания возмущений в пограничном слое на модели скользящего крыла для различных углов атаки при числе Маха $M=2$, получены амплитудно-частотные спектры. В экспериментах использовался способ определения положения ламинарно-турбулентного перехода с помощью термоанемометра при фиксированном положении датчика, а изменялось значение единичного числа Рейнольдса. Результаты измерений кривых нарастания возмущений для различных углов атаки представлены на рис. 5. Положению ламинарно-турбулентного перехода соответствует максимум в распределениях амплитуды возмущений от числа Рейнольдса. Получена зависимость числа Рейнольдса перехода для малых углов атаки.

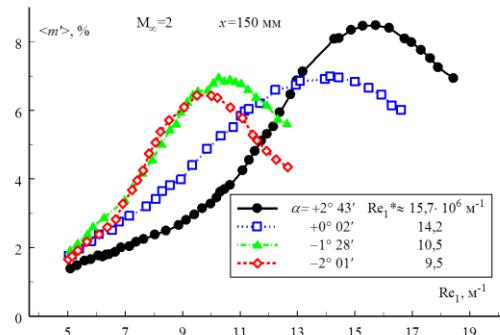


Рис.5.

Особенности нелинейного развития возмущений исследовались в [12, 13]. Был выполнен статистический анализ всех экспериментальных данных (по измерениям в критическом слое и по всем профилям). Проведено сравнение гистограмм, построенных на основе осциллографов, полученных в эксперименте, с плотностью вероятности Гаусса. При Махе 2 в линейной области развития возмущений усиливаются пульсации с частотами от 8 до 35 кГц ($Re_x = 0,3 \div 0,7 \times 10^6$). В нелинейной области происходит как заполнение низкочастотной части спектра, так и бурный рост высокочастотных пульсаций. Статистический анализ экспериментальных данных, приведенных выше, наши данные по эволюции амплитудно-частотных спектров, и результаты теоретических и экспериментальных работ по вторичной неустойчивости трехмерного несжимаемого пограничного слоя позволяют сделать вывод, что рост высокочастотной части спектра ($f > 35$ кГц) вызван механизмом вторичной неустойчивости. Нелинейные процессы в трехмерном пограничном слое на скользящем крыле вызывают механизм вторичной неустойчивости, что и приводит к раннему переходу. И при высоком уровне шума в рабочей части увеличение внешних возмущений уже слабо влияет на положение перехода.

Анализ всех полученных нами данных позволяет определить диапазон достоверных значений чисел Рейнольдса перехода сверхзвукового пограничного слоя на скользящем крыле, что особенно важно при рассмотрении экспериментов, выполненных при различных условиях потока в различных аэродинамических трубах. Результаты исследований послужат надежной базой для создания инженерных методов предсказания положения ламинарно-турбулентного перехода в трехмерном сверхзвуковом пограничном слое на скользящем крыле.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-08-00875).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Kosinov A.D., Semionov N.V., Yermolaev Yu.G., Tagaev S.N. Transition of a supersonic boundary layer on swept wings // Proceedings of XIII International Conference on the Methods of Aerophysical Research, 5-10 February, Novosibirsk, 2007, pt. 5, p. 144-149.
2. Semionov N.V., Kosinov A.D., Yermolaev Yu.G. Experimental study of turbulence beginning of supersonic boundary layer on swept wing at Mach numbers 2 – 4. // Journal of Physics: Conference Series (JPCS). -2011. - Vol.318, No.032018. -P. 1-9.
3. Stallings R.L., Lamb M. Effects of roughness size on the position of boundary layer transition and on the aerodynamic characteristics of a 55 deg. swept delta wing at supersonic speeds// NASA Technical Paper 1027, 1977, 47 p.
4. Sugiura H., Yoshida K., Tokugawa N., Takagi S., Nishizawa A. Transition Measurements on the Natural Laminar Flow Wing at Mach 2// J. of Aircraft, 2002, Vol. 39, No. 6, p. 996-1002
5. Archambaud J.P., Louis F., Séraudie A., Arnal D., Carrier G. Natural transition in supersonic flows: flat plate, swept cylinder , swept wing// AIAA Paper № 2004-2245, 2004, 10p.
6. Приданов В.Г., Харитонов А.М., Черных В.В. Совместное влияние чисел Маха и Рейнольдса на переход в пограничном слое// Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. - 1974. - №1. - С. 160-163.
7. Stallings R.L., Lamb M. Effects of roughness size on the position of boundary layer transition and on the aerodynamic characteristics of a 55 deg. swept delta wing at supersonic speeds// NASA Technical Paper 1027, 1977, 47 p.
8. Pate S.R., Brilhart R.E. Investigation of boundary-layer transition on swept wings at Mach numbers 2.5 to 5// Technical documentary report NO. AEDC-TDR-63-109, 1963, AFSC Program Area 750A , Project 1366 , Task 136612, 41 p.
9. N.V. Semionov, A.D. Kosinov and Yu.G. Yermolaev Experimental study of receptivity of supersonic boundary layer on swept wing [Электронный ресурс] // 5th European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS 2013) (Germany, Munich, 1–5 Jul. 2013) : Proceedings. ISBN 978-84-941531-0-5 - CIMNE., 2013. -No.Paper 339. -P. 1-8. CD-ROM.
10. Semionov N.V., Kosinov A.D., Yermolaev Yu.G., Dryasov A.D. Experimental study of receptivity of supersonic boundary layer on swept wing at Mach number 2.5 // Int. Conf. Methods of Aerophysical Research. June 30 – July 6, 2014, Novosibirsk, Russia: Proc. / Ed. V.M. Fomin. Novosibirsk: Inst. Theor. and Appl. Mech. SB RAS, 2014. URL: <http://www.itam.nsc.ru/users/libr/eLib/confer/ICMAR/2014/pdf/Semionov134.pdf>.
11. Семенов Н.В., Дрясов А.Д., Семенов А.Н. Влияние внешних возмущений на возникновение турбулентности и переход в сверхзвуковом пограничном слое на скользящем крыле// XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, сборник трудов. Казань, 20-24.августа. 2015. Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015, С. 3411-3413.
12. N.V. Semionov, A.D. Kosinov and Y.G. Yermolaev Influence of external disturbances on nonlinear processes of three-dimensional supersonic boundary layer [Электронный ресурс] // 5th European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS 2013) (Germany, Munich, 1–5 Jul. 2013) : Proceedings. ISBN 978-84-941531-0-5 - CIMNE., 2013. -No.Paper 340. -P. 1-9. CD-ROM.
13. Ю.Г. Ермолаев, А.Д. Косинов, Н.В. Семенов. Экспериментальное исследование нелинейных процессов в пограничном слое на скользящем крыле при числе Маха $M=2$ // Прикладная механика и техническая физика. -2014. -T.55, No.5. -С. 45-54.

**Каскадные процессы в стратифицированных средах:
эксперимент и прямое численное моделирование.**

Сибгатуллин И.Н. (МГУ им. М.В. Ломоносова), Е. Ерманюк (ENS de Lyon),
C. Brouzet (ENS de Lyon), T. Dauxois (ENS de Lyon), S. Joubaud (ENS de Lyon)

Внутренние гравитационные волны могут переносить значительную часть энергии в океанах и астрофизических объектах, влиять на фоновую стратификацию и момент количества движения. Они могут создаваться создаваться в звездах турбулентной конвекцией, в океанах взаимодействием приливных течений и орографии. Инерционные и внутренние волны описываются похожими уравнениями. Из-за особенностей дисперсионного соотношения и характера отражения внутренних и гравитационных волн, в замкнутых областях волны после отражений от границ могут образовывать замкнутые пути, которые были названы Лео Маасом в 1995 году волновыми атTRACTорами.

В настоящее время детально разработана линейная теория волновых атTRACTоров и основной интерес представляют нелинейные взаимодействия и развитие неустойчивых режимов, возможность опрокидывания и перемешивание. Мы провели прямое численное моделирование волновых атTRACTоров в соответствие с экспериментами, проводимыми в настоящее время в Высшей Нормальной Школе Лион (ENS de Lyon). Прямое численное моделирование реализовано с помощью спектрально-элементного метода 9-го порядка аппроксимации.

Подтверждено наличие триадного резонанса на луче атTRACTора с наибольшей энергией при возрастании амплитуды внешних колебаний. При дальнейшем увеличении амплитуды дочерние волны становятся также неустойчивыми, и происходит сложный каскадный процесс. Также показано, что при большом числе Прандтля-Шмидта в областях взаимодействия сфокусированных внутренних волн большой амплитуды и твёрдых границ могут образовываться высокочастотные складчатые структуры, которые могут перемещаться внутрь области и взаимодействовать с фоновым течением.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ а 15-01-06363.

Особенности сверхзвукового обтекания кольцевых каверн¹.

М.М. Симоненко, С.В. Гувернюк, А.Ф. Зубков, А.А. Синявин

НИИ механики МГУ, Москва

Введение.

Конструктивные особенности в виде каверн (выемок, вырезов) на поверхности тел широко встречаются в объектах аэрокосмической техники. Изучению обтекания каверн посвящено большое количество экспериментальных, теоретических и численных исследований [1-13]. В обзоре [3] отражены результаты более чем 200 зарубежных публикаций по исследованию высокоскоростного турбулентного обтекания каверн. Экспериментальные и численные исследования сверхзвукового обтекания каверн проводились в ЦАГИ [4,5], ИТПМ СО РАН [6,7], Институте механики МГУ [8-13] и других организациях.

Несмотря на большое количество экспериментальных и численных работ по исследованию сверхзвукового обтекания каверн, понимание физики течения в каверне даже простейшей прямоугольной конфигурации все еще остается неполным. В реальных условиях обтекание осесимметричных тел зачастую происходит под углом атаки, при этом нарушается осевая симметрия потока. В кольцевой каверне реализуются сложные трехмерные структуры течения. Изучение таких структур и особенностей трехмерного сверхзвукового обтекания представляет не только академический интерес, но и имеет важное практическое значение при выборе оптимальных схем обтекания тел с кавернами.

Режим сверхзвукового обтекания каверны определяется, прежде всего, ее геометрией, а также зависит от состояния пограничного слоя на входе в каверну, чисел Маха и Рейнольдса. В свободных кавернах прямоугольного сечения в зависимости от отношения длины L каверны к ее глубине h возможны две различные схемы обтекания. Если $\lambda=L/h$ мало ($\lambda < \lambda_O$), реализуется открытая схема, рис. 1.*a*. В этом случае во всей области каверны образуется дозвуковое циркуляционное течение 1, отделенное от внешнего потока слоем смешения 2. Если λ превышает некоторое критическое значение λ_C , реализуется замкнутая схема, рис. 1.*b*. В замкнутой каверне образуются две изолированные области отрыва: одна 3 за передним, другая 4 перед задним уступом каверны, во внешнем сверхзвуковом поле течения возникают скачки уплотнения. Компенсирующий скачок 5 обеспечивает разворот сверхзвукового потока вдоль дна каверны. Скачок 6 образуется перед задней областью отрыва 4.

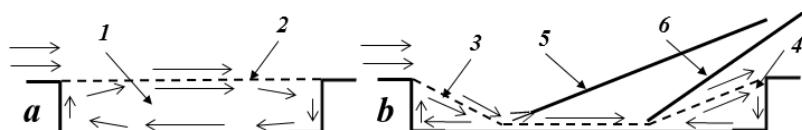


Рис.1 Схема сверхзвукового обтекания открытой (a) и замкнутой (b) каверны.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-01-99623.

Промежуточный диапазон $\lambda_O < \lambda < \lambda_C$ отвечает так называемой переходной области, являющейся, по существу, областью гистерезиса, в которой возможны^[9-13] как открытая, так и замкнутая схема обтекания, рис. 2. Для прямоугольных плоских и осесимметричных каверн при сверхзвуковом турбулентном обтекании имеются эмпирические оценки границ переходной области: $\lambda_O=9-10$, $\lambda_C=13-14$.

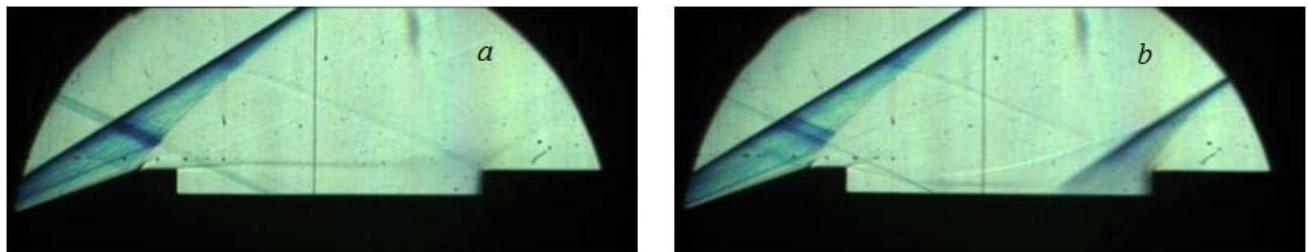


Рис. 2 Визуализация обтекания открытой (a) и замкнутой (b) каверны ($\lambda = 12$, $M = 2.5$).

Область гистерезиса интересна тем, что незначительное динамическое^[9] или тепловое^[11] воздействие на течение может вызвать перестройку от одного режима течения к другому. Вопросы адекватного численного моделирования этих явлений представляют значительную сложность.

В работе представлены новые и частично опубликованные^[9,10,12] результаты экспериментальных исследований трехмерного сверхзвукового обтекания осесимметричных кольцевых каверн прямоугольного сечения на цилиндро-конических телах.

Экспериментальные модели и условия проведения испытаний.

Для исследования сверхзвукового обтекания кольцевой каверны под углом атаки использовались 2 экспериментальные модели, фотоснимки которых представлены на рис. 3.



Рис. 3. Экспериментальные модели: а) - модель 1 с кольцевой каверной на цилиндрическом теле; б) - модель 2 с кольцевой каверной на коническом теле.

Модель 1 включает цилиндрический корпус диаметром 45 мм, снабженный цилиндро-коническим головным и цилиндрическим хвостовым насадками диаметром $D = 64$ мм, рис.3.а. Образованная этими телами каверна в осевом сечении представляет собой прямоугольный вырез с равновеликими высотами переднего и заднего уступов $h = 9.5$ мм, $h/D \approx 0.15$. Угол раствора конической части головного насадка составляет 40° , длина цилиндрической части этого насадка – 14 мм. Хвостовой насадок можно перемещать вдоль оси симметрии так, что относительная протяженность каверны варьируется в диапазоне $\lambda=8\text{--}16$. При проведении весовых испытаний используется модификация модели фиксированной длины 304 мм. Протяженность каверны в этом случае варьируется посредством установки на корпусе перед хвостовым насадком дополнительных кольцевых вкладышей.

Модель 2 имеет форму конуса с углом раствора 20° , оканчивающегося цилиндрическим телом диаметром 79 мм, рис. 3.б. На расстоянии 93 мм от вершины конуса вдоль образующей выполнена кольцевая выемка глубиной 7 мм, длиной 117 мм. Протяженность образованной в выемке кольцевой каверны варьировалась посредством установки кольцевых вкладышей перед задней стенкой выемки. В продольном сечении форма каверны - прямоугольник. Результаты получены для каверн с $\lambda=9, 11$ и 13.5 .

Угол атаки варьировался в диапазоне $\alpha=0\text{--}12^\circ$. Скорость изменения угла атаки была 0.5 град/с. В весовых испытаниях угол атаки изменялся дискретно. Погрешность измерения текущего значения α не превышала $15'$.

Во второй серии опытов была использована экспериментальная модель 3 с каверной переменной протяженности. Схема модели 3 представлена на рис. 4.

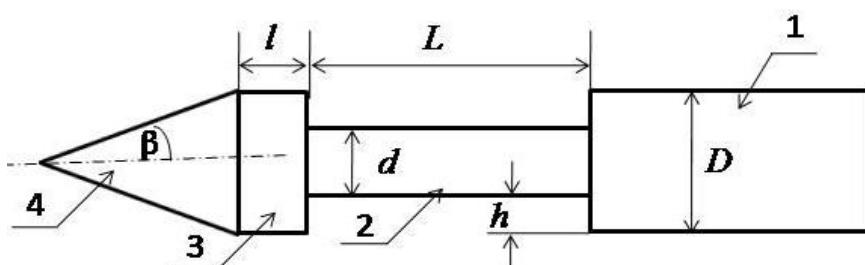


Рис. 4. Схема экспериментальной модели 3.

Модель представляла собой цилиндрический корпус 1 диаметром $D=45$ мм. На корпусе 1 соосно с ним установлена цилиндрическая штанга 2 внешним диаметром $d=29$ мм. Штанга 2 имеет возможность возвратно-поступательного перемещения относительно корпуса 1 вдоль оси симметрии. На свободном конце штанги 2 соосно с ней установлен съемный цилиндро-конический наконечник, включающий цилиндрическую вставку 3 диаметром D и длиной l , на которой закреплен сменный конический наконечник 4 с полууглом раствора β . Зазор между корпусом 1 и вставкой 3 образует кольцевую каверну с равновеликими высотами $h=8$ мм переднего и заднего уступов. Длина L каверны изменялась в пределах 54-117 мм за счет продольного перемещения штанги 2 относительно корпуса 1. Форма головного наконечника модели варьировалась путем изменения угла β ($\beta = 10, 20$ и 30°) и длины l ($l=0, 30, 60$ и

90 мм). Модель устанавливалась в рабочей части трубы под нулевым углом атаки. При минимальной протяженности каверны после запуска и выхода аэродинамической трубы на рабочий режим во всех случаях реализовывалась открытая схема обтекания. После перемещения модели на заданный угол атаки открытая схема обтекания сохранялась. Далее осуществлялось непрерывное изменение длины каверны сначала в сторону увеличения до максимального значения, затем в сторону уменьшения до исходного положения. Скорость изменения длины каверны достигала 2 мм/с.

Эксперименты выполнены в аэродинамических трубах А-8 и А-7 НИИ механики МГУ при числах Маха $M = 2.5$ и 3 , давлении в форкамере $P_0 = 3.4$ и 4.3×10^5 Па, единичных числах Рейнольдса $Re_1 = 3.8$ и $3.7 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$, соответственно. Рабочая среда – воздух с температурой торможения порядка 275 К. Измерение давления осуществлялось на стенках переднего и заднего уступов каверны на расстоянии $\sim h/2$ от дна каверны, при этом преобразователи давления находились вне рабочей части аэродинамической трубы и были соединены с приемниками давления гибкими трубками длиной до 3 м. Использовались пьезоэлектрические преобразователи давления типа MP3H6115A, диапазон измерения 15–115 кПа, максимальная ошибка измерения ± 1.5 кПа. Вследствие большой протяженности воздушного тракта высокочастотные пульсации давления сглаживались, и фактически регистрировалось осредненное по времени статическое давление. В ходе экспериментов осуществлялась видеорегистрация шлирен-изображений картин течения в цифровом формате. Для визуализации структуры течения использовался теневой прибор ИАБ–451. Осуществлялась также скоростная съемка процессов перестройки течения на границах переходной области.

Результаты испытаний.

Модель 1.

Показанные на рис. 5 стадии перехода от первоначально замкнутой каверны к открытой каверне получены при $\lambda = 12$. Первоначально замкнутая каверна внезапно открывалась при увеличении угла атаки и достижении критического угла $\alpha_k = 3.8^\circ$, после чего никакие угловые отклонения не могли вызвать обратную перестройку от открытой схемы течения к замкнутой схеме. Аналогичные стадии перехода при изменении угла атаки были зафиксированы вблизи верхней границы области гистерезиса для $\lambda = 13.2$. В противоположность этому при достаточно близких значениях $\lambda = 13.5$, но уже вне области гистерезиса, первоначально замкнутая схема оказывалась устойчивой к угловым возмущениям и восстанавливалась после любых угловых перемещений модели в исследованном диапазоне углов атаки.

Модель 2.

Похожие результаты получены при исследовании модели 2 с каверной на коническом теле, рис. 3.б. При $\lambda = 11$ после запуска трубы реализовывались как открытая, так и замкнутая каверна, рис. 6. При увеличении угла атаки первоначально замкнутая каверна необратимо перестраивалась в открытую каверну, которая сохранялась после любых последующих изменениях угла атаки и возврата модели в исходной положение.

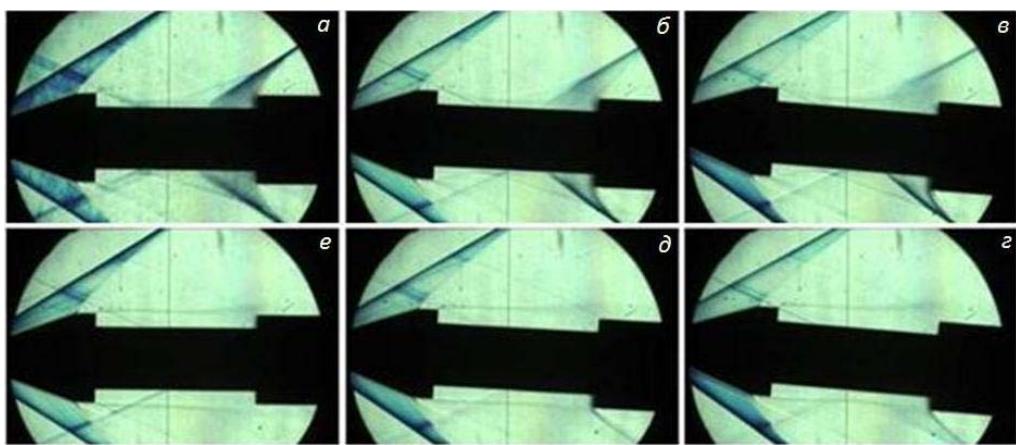


Рис. 5. Эволюция структуры обтекания первоначально замкнутой каверны (модель 1, $M=2.5$) в области гистерезиса ($\lambda = 12$) при увеличении ($a-e$) и последующем уменьшении ($e-g$) угла атаки: (a, e), (b, d), (c, g) - $\alpha = 0, 2, 3.8^\circ$

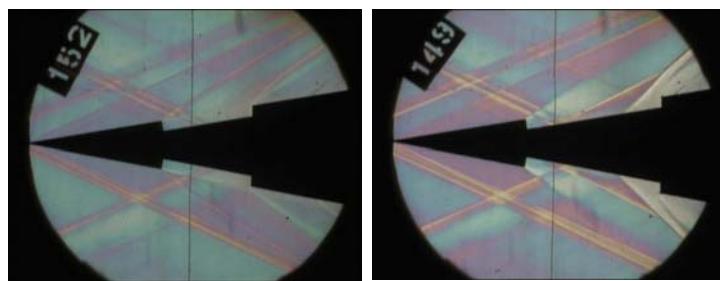


Рис. 6. Открытая и замкнутая каверна (модель 2, $M=2.5$), $\lambda = 11$.

Модель 3.

Теневые фотографии на рис. 7 иллюстрируют открытую (a, b) и замкнутую (c, d) каверну при минимальном (a, c) и максимальном (b, d) значениях относительной протяженности λ , допускающей существование обеих схем обтекания. Снимки на рис. 7, a, b получены при непрерывном увеличении λ открытой каверны, а на рис. 7, d, c – при непрерывном уменьшении λ замкнутой каверны. Хорошо видны головной скачок уплотнения 1, возникающий перед коническим наконечником, и передний фронт 2 волны разрежения, возникающей при расширении потока за передней кромкой каверны.

На режимах с открытой схемой обтекания (рис. 7, a, b) наблюдаются задний фронт 3 волны разрежения и слой смешения 4, простирающийся от переднего уступа вниз по потоку. Течение в открытой каверне и в примыкающей к ней сверхзвуковой области зависит от λ , поскольку возмущения от заднего уступа при изменении λ передаются вперед по всей длине области отрыва. Угол наклона заднего фронта 3 волны разрежения уменьшается при увеличении λ , что означает большее расширение потока в волне разрежения на переднем уступе и, соответственно, понижение давления в зоне отрыва за этим уступом. Вместе с тем, при увеличении λ наблюдается появление волн сжатия 5 в сверхзвуковой области потока перед задним уступом, что должно приводить к возрастанию давления в отрывной области перед этим уступом.

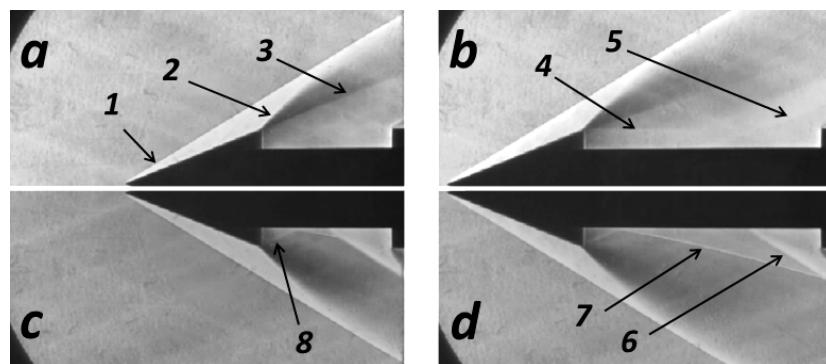


Рис. 7. Открытая (a,b) и замкнутая (c,d) каверна (модель 3, $l=0$, $\beta=20^\circ$, $M=3$, $\alpha=0^\circ$): (a,c), (b,d) - $\lambda = 7.0, 13.2$.

В случае замкнутой каверны (рис. 7, c,d) наблюдаются два скачка уплотнения 6 и 7, а также граница 8 области отрыва потока за передним уступом. Скачок 6 расположен непосредственно перед областью отрыва у заднего уступа каверны. Компенсирующий скачок 7 зарождается в окрестности примыкания сверхзвукового потока к дну каверны и простирается вниз по течению в области расширения сверхзвукового потока. Течение за передним уступом вниз по потоку вплоть до скачка 6 не зависит от λ и определяется исключительно параметрами потока на входе в каверну. В то же время параметры потока перед задним уступом каверны изменяются при изменении λ . При больших λ скачок 6 пересекается со скачком 7 вне области каверны и несколько ниже ее заднего уступа. При уменьшении λ точка пересечения скачков 6 и 7 перемещается вдоль скачка 7 вверх по потоку и приближается к дну каверны.

На рис.8 представлены характерные гистерезисные кривые изменения давления P перед задним уступом каверны, полученные при малом угле атаки ($\alpha < 0.25^\circ$) и непрерывном увеличении/уменьшении (нижние/верхние ветви) λ . Здесь давление P отнесено к статическому давлению в набегающем потоке. Сплошная кривая соответствует наветренной, прерывистая – подветренной стороне каверны. В открытой каверне давление увеличивается монотонно с увеличением λ , при замыкании каверны ($\lambda=\lambda_C$) давление скачкообразно возрастает. В замкнутой каверне давление остается повышенным при уменьшении λ до $\lambda=\lambda_O$, затем скачкообразно уменьшается до величины, соответствующей давлению в открытой каверне при том же λ .

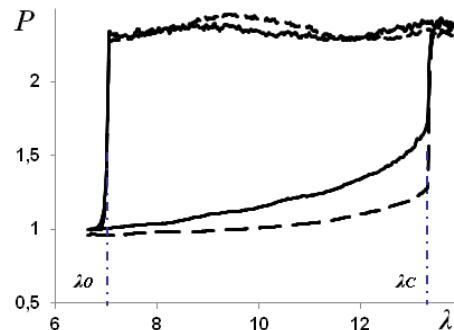


Рис. 8. Зависимость P от λ (модель 3, $l=0$, $\beta=20^\circ$, $M=3$, $\alpha < 0.25^\circ$).

На рис. 9 представлена типичная зависимость λ_O и λ_C от α для трех вариантов модели 3 ($l=const$, $\beta=var$). Светлыми значками обозначена нижняя граница λ_O , темными – верхняя граница λ_C области гистерезиса. С увеличением α наблюдается сужение границ области гистерезиса, при этом λ_O возрастает, а λ_C практически не меняется. Для рассмотренных вариантов модели 3 область гистерезиса вырождается при $\alpha=4-5^\circ$.

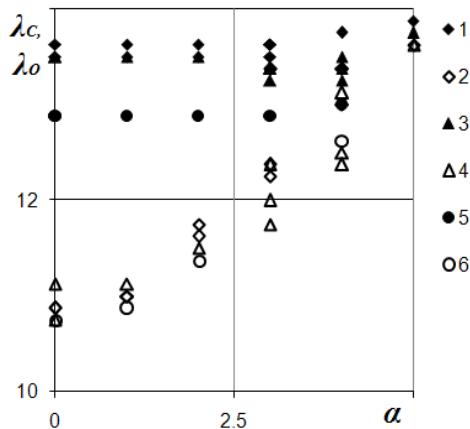


Рис. 9. Зависимость λ_C и λ_O от α (модель 3, $l=60$ мм, $M=3$): (1, 2) - $\beta=10$, (3, 4) - 20, (5, 6) - 30° .

Наличие ограниченной по λ и α области гистерезиса объясняет обнаруженный ранее (на моделях 1 и 2) эффект необратимого открытия первоначально замкнутой (при $\alpha=0$) каверны фиксированной протяженности ($\lambda=\lambda_I=const$, $\lambda_O < \lambda_I < \lambda_C$) при изменении угла атаки. С увеличением α первоначально замкнутая каверна выходит за пределы области гистерезиса и попадает в область, где возможна только открытая каверна. Возврат в область гистерезиса при последующем уменьшении α не приводит к смене режима течения в каверне, соответственно, открытая каверна сохраняется в дальнейшем при любых изменениях α .

Заключение.

С помощью технологии непрерывного увеличения или уменьшения протяженности кольцевой каверны в потоке в зависимости от угла атаки определены границы области гистерезиса, в пределах которых наблюдаются как открытая, так и замкнутая схемы обтекания каверны. Показано, что конкретный тип реализующегося режима обтекания в области гистерезиса зависит от предыстории течения. Данна классификация основных стадий перестройки режимов течения при изменении угла атаки и протяженности каверны. Нижняя граница области гистерезиса существенно зависит от угла атаки набегающего потока. В противоположность этому верхняя граница области гистерезиса практически не чувствительна к изменению условий обтекания каверны.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-01-99623.

Литература

1. *A.F. Charwat, J. N. Roos, F.C. Dewey, and J.A. Hitz*, An Investigation of Separated Flows-Part I: The Pressure Field // *Journal of the Aerospace Sciences*, 28, 457 (1961)
2. *R.L. Stalling, F.J. Wilcox*, Experimental cavity pressure distribution at supersonic speeds // *NASA TP 2683* (1987)
3. *S.J. Lawson, G.N. Barakos*, Review of numerical simulations for high-speed, turbulent cavity flows // *Progress in Aerospace Sciences*, 47, 186 (2011)
4. *В. И. Пензин* Отрывное течение в кольцевой выемке // Ученые записки ЦАГИ, VII, 6, 124 (1976).
5. *А.Д. Савельев* Численное моделирование обтекания протяженных выемок сверхзвуковым потоком // Ученые записки ЦАГИ, XLII, 3. 60, (2011)
6. *В.Н. Зайковский, Я.И. Смульский, В.М. Трофимов*, Влияние последовательных каверн на теплообмен в сверхзвуковом потоке // ИТПМ СО РАН, Теплофизика и аэромеханика, 3, 423, (2002).
7. *Ю.В. Захарова*, Влияние температурного фактора на параметры сверхзвуковых турбулентных течений в каналах переменного сечения. Автореферат диссертации, ИТПМ, 21, (2011)
8. *А.И. Швец*, Исследование течения в цилиндрическом вырезе на осесимметричном теле при сверхзвуковом обтекании // Известия РАН, Механика Жидкости и Газа, 1, 123, (2002)
9. *С.В. Губернюк, А.Ф. Зубков, М.М. Симоненко, А.И. Швец* Экспериментальное исследование трехмерного сверхзвукового обтекания осесимметричного тела с кольцевой каверной // Известия РАН, Механика Жидкости и Газа, 4, 136 (2014)
10. *С.В. Губернюк, А.Ф. Зубков, М.М. Симоненко* О наблюдении аэродинамического гистерезиса при сверхзвуковом обтекании кольцевой каверны на осесимметричном теле // Успехи механики сплошных сред. Сб. докладов Международной конференции, приуроченной к 75-летию акад. В.А. Левина, Владивосток. ООО "Мегапринт", Иркутск, 163 (2014)
11. *С.В. Губернюк, А.А. Синявин*, Об управлении гистерезисом сверхзвукового обтекания прямоугольной каверны с помощью теплового импульса. // Успехи механики сплошных сред: Сб. докладов Международной конференции, приуроченной к 70-летию акад. В.А. Левина, Владивосток: Дальнаука, 196 (2009)
12. *М.М. Симоненко, А.Ф. Зубков*, Экспериментальное исследование перестройки режимов сверхзвукового обтекания кольцевой каверны // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20-24 августа 2015 г., Сборник докладов, Казанский федеральный университет, Казань, 3465 (2015).
13. *А.С. Шишаева, С.В. Губернюк, М.М. Симоненко и др.*, Численное исследование гистерезиса сверхзвукового турбулентного обтекания тела с кольцевой каверной в программном комплексе ЛОГОС. // Материалы XIV международной конференции «Супервычисления и математическое моделирование». Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 164 (2012).

О ТРЕХВОЛНОВОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ СКОЛЬЗЯЩЕГО КРЫЛА

Б.В.Смородский, С.А.Гапонов, Ю.Г.Ермолаев, Г.Л.Колосов, А.Д.Косинов, Н.В.Семенов
Институт теоретической и прикладной механики им.С.А.Христиановича СО РАН, Новосибирск

Ламинарно-турбулентный переход в пограничных слоях происходит в результате усиления возмущений изначально малой амплитуды. При низком уровне внешних воздействий существенная часть переходной области хорошо описывается линейной теорией гидродинамической устойчивости. Более поздние стадии перехода характеризуются нелинейностью поля возмущений. Учет нелинейных взаимодействий возмущений позволяет понять физические механизмы перехода к турбулентности [1].

Нелинейные взаимодействия возмущений в пограничных слоях исследовались ранее во множестве работ, как экспериментальных, так и теоретических. Слабонелинейная теория (СНТ) гидродинамической устойчивости, разработанная в ИТПМ и детально описанная в [2], является комбинацией асимптотического разложения поля возмущений в ряд по амплитуде возмущения и метода усреднений. Применение теории такого рода позволило дать интерпретацию значительному количеству экспериментально наблюдаемых особенностей процесса перехода в двумерных дозвуковых [1-3] и сверхзвуковых [4] пограничных слоях.

Исследование нелинейных взаимодействий в трехмерных (3D) сжимаемых пограничных слоях оказывается более сложным в силу наличия поперечного течения и присутствия нескольких типов мод неустойчивости. Несмотря на то, что принципиальная возможность существования резонансных триплетов волн в пограничном слое на скользящем крыле была известна в течение длительного времени [5], проблема нелинейных взаимодействий в сжимаемых 3D пограничных слоях до сих пор остается не исследованной до конца. В настоящей работе приводятся результаты совместных экспериментальных и теоретических исследований устойчивости сверхзвукового трехмерного пограничного слоя на модели скользящего крыла.

ЭКСПЕРИМЕНТ

Эксперименты проводились в сверхзвуковой аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН с пониженным уровнем шума в рабочей части при числе Маха $M=2$ и значении единичного числа Рейнольдса $Re_1=5\times 10^6 \text{ м}^{-1}$. Использовалась модель скользящего крыла с острой передней кромкой и углом скольжения $\chi=45^\circ$. Контролируемые гармонические возмущения фиксированной частоты вводились в пограничный слой модели при помощи точечного источника на основе тлеющего разряда в камере. Развитие возмущений вниз по потоку от источника исследовалось при помощи термоанемометра постоянного сопротивления и системы автоматизированного сбора данных, которыми оборудована установка Т-325.

Частота возбуждения искусственных возмущений в настоящих экспериментах составляла $f=20 \text{ кГц}$. В результате проведенного частотно-волнового анализа поля возмущений пограничного слоя модели было обнаружено присутствие двух волн большой амплитуды: на основной частоте $f=20 \text{ кГц}$ и на частоте субгармоники $f=10 \text{ кГц}$. Развитие амплитудных β -спектров на указанных частотах вниз по потоку показано на Рис.1. Видно, что наиболее усиливающимися являются волны со значениями трансверсального волнового числа $\beta=0.8$ и 1.1 рад/мм для частот $f=10$ и 20 кГц соответственно, наиболее неустойчивые по линейной теории [6-8].

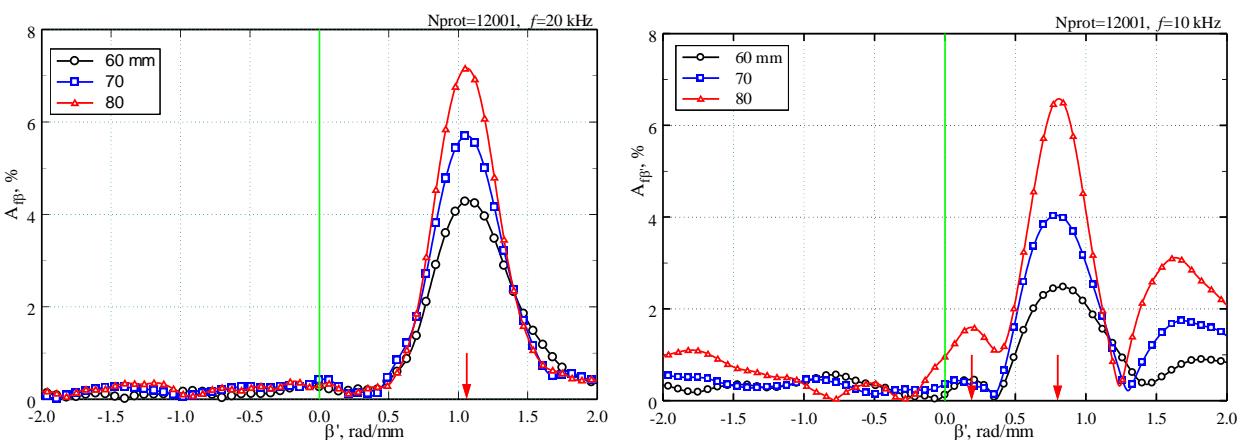


Рис.1: Измеренные β -спектры поля возмущений – амплитуда пульсаций в зависимости от трансверсального волнового числа β на частоте генерации $f_1=20$ (а) и на частоте субгармоники $f_2=10 \text{ кГц}$ (б) при $x=60, 70$ и 80 мм .

Появление дополнительных пиков в амплитудных спектрах на частоте субгармоники вызвано действием трехволнового резонансного взаимодействия волн, выделившихся на линейном этапе развития. Таким образом, локальный максимум при $\beta=0.2 \text{ рад/мм}$ формируется в результате резонансного взаимодействия волн с $f=10$ и 20 кГц . При этом удовлетворяются обычные условия фазового синхронизма: $f_2+f_3=f_1$, $\alpha_2+\alpha_3\approx\alpha_1$, $\beta_2+\beta_3=\beta_1$.

ТЕОРИЯ

В настоящей работе были продолжены начатые ранее [6,9-11] теоретические исследования устойчивости и резонансного взаимодействия волн неустойчивости поперечного течения в сверхзвуковом пограничном слое на модели скользящего крыла. В рамках СНТ поток в сжимаемом пограничном слое записывается в виде суммы параметров среднего движения и возмущений малой интенсивности. При этом поле возмущений представлено в виде набора распространяющихся, растущих вниз по потоку и взаимодействующих гармонических по времени волн.

Нелинейные уравнения для возмущений зависят от свойств потока и параметров возмущения. Применяя условия разрешимости системы уравнений в линейном приближении и метод усреднений по «быстрым» переменным, можно получить эволюционные уравнения для амплитуд трёх взаимодействующих волн. Далее анализ нелинейного развития возмущений в пространственном сверхзвуковом пограничном слое на модели скользящего крыла проводится следующим образом. Параметры среднего течения рассчитываются в рамках автомодельного приближения. Затем прямая и сопряженная линейные задачи устойчивости для компонент триплета интегрируются численно с помощью метода ортогонализаций, в результате чего определяются коэффициенты амплитудных уравнений в зависимости от параметров. После этого указанная система уравнений для амплитуд взаимодействующих волн интегрируется численно в зависимости от начального спектра возмущений. В результате получаем кривые нарастания и скорости параметрического усиления спектральных компонент.

В работе представлены результаты параметрических расчетов эффективности трехволнового взаимодействия в субгармонических триплетах волн неустойчивости трехмерного сверхзвукового пограничного слоя на модели скользящего крыла с острой передней кромкой. Расчеты нелинейного развития волн продемонстрировали возможность параметрического усиления устойчивых в линейном смысле возмущений в достаточно широком диапазоне трансверсальных волновых чисел. При этом рост частоты основной волны в субгармоническом триплете приводит к монотонному увеличению эффективности взаимодействия с низкочастотными компонентами триплета, что выражается в увеличении коэффициентов нелинейной связи. При этом независимо от параметров наличие ненулевого поперечного течения на скользящем крыле приводит к асимметричному распределению величины коэффициентов нелинейной связи в зависимости от трансверсального волнового числа. Трехволновый резонанс вызывает более эффективное усиление субгармоник, распространяющихся в направлении поперечного течения. Тогда как в линейном приближении эти волны являются затухающими или растут вниз по потоку заметно медленнее субгармоник, бегущих в направлении противоположном направлению поперечного течения.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Проведено сопоставление рассчитанных в рамках СНТ кривых нарастания компонент субгармонического триплета с данными указанных измерений. Результаты такого сопоставления представлены на Рис.2, где сплошными линиями показаны расчетные, а символами – измеренные данные. Параметры компонент триплета, использовавшиеся в расчетах, соответствуют найденным в эксперименте доминирующим компонентам поля возмущений (Рис.1): основная частота, на которой проводилась генерация искусственных возмущений $f_1 = 20$ кГц, с трансверсальным волновым числом $\beta_1 = 1.1$ рад/мм (кривая 1); наиболее неустойчивая в линейном смысле мода на частоте субгармоники $f_2 = 10$ кГц, $\beta_2 = 0.8$ рад/мм (кривая 2); и мода, выделяющаяся из спектра на частоте субгармоники за счет трехволнового резонансного взаимодействия возмущений $f_3 = 10$ кГц, $\beta_3 \approx 0.2$ рад/мм (кривая 3). Данные теории и эксперимента достаточно хорошо согласуются друг с другом.

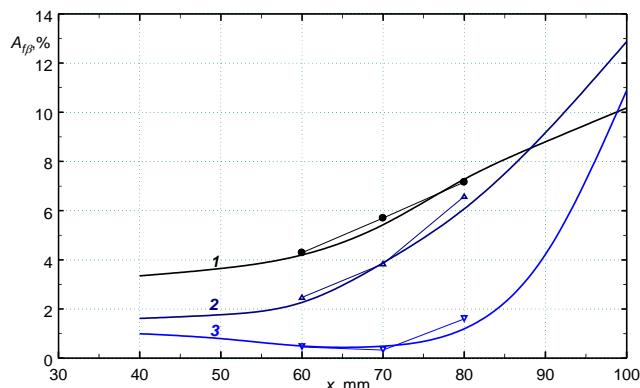


Рис.2: Кривые нарастания компонент субгармонического триплета волн – зависимость амплитуды пульсаций от продольной координаты x . Сравнение теории (сплошные линии) и эксперимента (символы).

На основании проведенных совместных экспериментальных и теоретических исследований можно сделать вывод о том, что разработанная слабонелинейная теория устойчивости достаточно хорошо описывает начальную стадию нелинейной эволюции возмущений в пространственном сжимаемом пограничном слое на модели скользящего крыла в условиях контролируемого эксперимента. Ведущим механизмом развития поля возмущений при этом является трехволновое резонансное взаимодействие возмущений в субгармоническом триплете волн неустойчивости поперечного течения. Тем не менее, естественный переход в пространственном пограничном слое может проходить и по иному сценарию, определяемому, например, механизмом вторичной высокочастотной неустойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00520, 15-08-00875) и по бюджетному проекту №. гос регистрации.

Литература

1. Kachanov Yu.S. Physical mechanisms of laminar-turbulent transition. *Annu.Rev.Fluid Mech.*, 1994, 26, 411-482.
2. Zelman M.B., Maslennikova I.I. Tollmien-Schlichting-wave resonant mechanism for subharmonic-type transition. *J.Fluid Mech.*, 1993, 252, 499-578.
3. Wuerz W., Sartorius D., Kloker M., Borodulin V.I., Kachanov Yu.S., Smorodsky B.V. Nonlinear instabilities of a non-self-similar boundary layer on an airfoil: Experiments, DNS, and theory. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 2012, 31, 102-128.
4. Гапонов С.А., Терехова Н.М. Трехволновые нелинейные взаимодействия возмущений в сверхзвуковом пограничном слое на непроницаемой и пористой поверхностях. *Теплофизика и аэромеханика*, 2009, 16(3), 353-363.
5. Tumin A. Three-wave nonlinear interaction in a three-dimensional compressible boundary layer. *Int.J.Non-Linear Mechanics*, 1995, 30(5), 661-671.
6. Gaponov S.A., Smorodsky B.V. Linear stability of three-dimensional boundary layers. *J.Appl.Mech.Techn.Phys.*, 2008, 49(2), 157-166.
7. Колосов Г.Л., Панина А.В., Косинов А.Д., Ермолаев Ю.Г., Семенов Н.В. Пространственно-волновая структура контролируемых возмущений в трехмерном сверхзвуковом пограничном слое. *Вестник НГУ. Серия: Физика*, 2011, 6(4), 5-15.
8. Ермолаев Ю.Г., Колосов Г.Л., Косинов А.Д., Семенов Н.В. Линейная эволюция контролируемых возмущений в сверхзвуковом пограничном слое скользящего крыла. *МЖГ*, 2014, 2, 58-68.
9. Gaponov S.A., Smorodsky B.V. Three-wave resonant interactions of disturbances in swept-wing supersonic boundary layers. *Abstracts of the International Conference on Methods of Aerophysical Research*, August 19-25, 2012, Kazan, Russia, Part II, 2012, 97.
10. Smorodsky B.V. Cross-flow instability mode nonlinear interactions in supersonic swept-wing boundary layer. *Abstracts of the International Conference on Methods of Aerophysical Research*, June 30 – July 6, 2014, Novosibirsk, Russia, Part II, 2012, 184-185.
11. Колосов Г.Л., Смородский Б.В. О трехволновом резонансном взаимодействии возмущений в сверхзвуковом пограничном слое на модели скользящего крыла // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20-24 августа 2015, Изд-во Казанского ун-та, С.1911-1913.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ

Б.В.Смородский, С.А.Гапонов

Институт теоретической и прикладной механики им.С.А.Христиановича СО РАН, Новосибирск

Важной задачей механики жидкости и газа является вопрос об управлении состоянием пограничного слоя с целью затянуть или наоборот ускорить возникновение турбулентности. Одним из методов управления, активно разрабатываемых в последнее время, является применение проницаемых пористых покрытий. Влияние свойств проницаемого покрытия на устойчивость пограничных слоев рассматривалось в целом ряде как теоретических, так и экспериментальных работ [1,2]. При сверхзвуковых скоростях обтекания, как показывают расчеты [1,3], введение пористого покрытия оказывает дестабилизирующее влияние на первую моду неустойчивости пограничного слоя и, вследствие этого, ускоряет переход. Этот вывод в дальнейшем был подтвержден экспериментально [4].

Указанные выводы были получены для случая нулевого среднего расхода сквозь проницаемую поверхность. Однако в течение уже длительного времени известно, что отсос газа из пограничного слоя модели или наоборот, вдув, сильно меняют характеристики устойчивости слоя и могут повлиять на положение ламинарно-турбулентного перехода [5].

Влияние вдува инородного газа на устойчивость ламинарного пограничного слоя впервые было проанализировано в [6], где было построено невязкое решение путем его разложения в ряд по волновым числам и показано, каким образом вязкое решение может быть получено путем асимптотического разложения по обратным степеням числа Рейнольдса. Было обнаружено, что влияние вдува инородного газа проявляется главным образом через профили параметров пограничного слоя. Кроме того, в [6] был разработан критерий невязкой устойчивости. С его помощью было показано, что вдув газа с большим молекулярным весом, аналогично случаю с охлаждаемой поверхностью, может привести к стабилизации пограничного слоя. Исследование возможности улучшения устойчивости пограничных слоев путем вдува газа с большим молекулярным весом было продолжено в [7]. Асимптотические процедуры были переформулированы, и было проведено исследование воздействия вдува газа с различным молекулярным весом. Было обнаружено, что впрыск легкого газа может существенно уменьшить критические числа Рейнольдса. Эти результаты были получены для числа Маха $M=0$, а разработанная там процедура применима только при $M < 1.3$. В настоящее время широко используются численные методы решения уравнений устойчивости без ограничений на величину числа Маха. Достаточно полные уравнения устойчивости пограничного слоя бинарной смеси в приближении параллельного течения были выведены в [8]. Однако расчеты в этой работе проведены не были, и до настоящего времени отсутствуют детальные исследования устойчивости пограничных слоев на основе прямых численных методов интегрирования дифференциальных уравнений. Параметрические расчеты, позволяющие ставить задачу об управлении устойчивостью и ламинарно-турбулентным переходом, никогда не проводились. Особый пробел имеет место для сверхзвуковых течений при числах Маха $M > 1.3$. Кроме того, упомянутые выше теоретические исследования никогда не были подтверждены экспериментом, и поэтому не могут считаться надежными для обоснования и построения правильных физических моделей возникновения турбулентности в сверхзвуковых течениях многокомпонентных смесей газов.

В настоящей работе делается попытка теоретического исследования устойчивости сверхзвукового пограничного слоя бинарной смеси на модели плоской пластины. В приближении локальной автомодельности получены уравнения, аналогичные [9], описывающие средний поток в сжимаемых ламинарных пограничных слоях бинарной смеси газов. Краевая задача для полученной системы интегрировалась численно. Было исследовано влияние параметров вдува на характеристики поверхностного трения и теплообмена ламинарного сверхзвукового пограничного слоя воздуха для чисел Маха $0.7 < M < 4$, для различных значений температуры обтекаемой поверхности, а также молекулярного веса вдуваемого газа в зависимости от интенсивности вдува с поверхности. В результате были получены профили скорости, температуры, плотности газовой смеси, а также концентрации примеси поперек пограничного слоя, которые позволили рассмотреть влияние вдува примеси на поверхностное трение и теплообмен в зависимости от различных параметров.

Расчеты показали, что увеличение интенсивности вдува приводит к уменьшению коэффициента поверхностного трения, причем этот эффект оказывается более выраженным в случае вдува легкого газа. Легкий газ оказывается также и наилучшим охладителем, поскольку с увеличением интенсивности вдува газа в случае достаточно большого отношения температуры поверхности к температуре набегающего потока достигается уменьшение интенсивности теплообмена.

Рассматривалось также поведение такого важного для устойчивости параметра, как появление обобщенной точки перегиба в профилях пограничного слоя в зависимости от характеристик вдува и вдуваемого газа. Найден диапазон интенсивности вдува, когда перегиб в профилях отсутствует, в результате чего пограничный слой не подвергается дополнительной дестабилизации перегибным профилем скорости.

Далее была построена краевая задача для системы уравнений линейной устойчивости, обобщающая известную систему Дана-Линя [10] на случай течения в пограничном слое бинарной смеси с учетом эффектов диффузии и термодиффузии примеси. Полученная задача на собственные значения интегрировалась численно с помощью метода ортогонализаций [11].

Расчеты устойчивости проводились для модели плоской пластины при числе Маха набегающего потока $M=2$ и других параметрах течения близких к реализуемым в экспериментах в сверхзвуковой аэродинамиче-

ской трубе Т-325 ИТПМ СО РАН: $T_0 = 285$ К, $Re_1 \approx 5 \cdot 10^6$ м⁻¹. Поверхность модели предполагалась теплоизолированной.

Расчеты показали, что инжекция инородного газа с проницаемой поверхности модели в пограничный слой в зависимости от сорта вдуваемого газа может как дестабилизировать течение, приводя к более раннему переходу, так и способствовать его частичной стабилизации, смешая переход вниз по течению.

На **рис.1** приведен пример, демонстрирующий зависимость скорости пространственного роста $-\alpha_i$ двумерных возмущений частоты $f = 14$ кГц от интенсивности вдува инородного газа $f_w = -\text{Re}(\rho_w V_w / \rho_e U_e)$. Видно, что вдув воздуха (*Air*) или легкого газа, такого как неон (*Ne*) приводит к монотонному росту инкрементов возмущений при увеличении интенсивности инжекции, вызванному формированием более неустойчивых профилей среднего течения. В то же время вдув тяжелого инертного газа такого как ксенон (*Xe*) также дестабилизирует течение. Причиной такого явления является низкая теплоемкость ксенона, приводящая к тому, что температура смеси вблизи стенки существенно увеличивается с ростом $-f_w$. Вдув гелия (*He*) приводит к немонотонной зависимости $-\alpha_i = -\alpha_i(f_w)$: при малой величине инжекции $-f_w < 0.05$ течение стабилизируется, тогда как дальнейший рост интенсивности вдува вызывает рост скоростей нарастания возмущений. Такое поведение опять-таки объясняется противоположным действием двух факторов – низкого молекулярного веса примеси и его высокой теплоемкостью. Из приведенного графика видно также, что в случае вдува тяжелого газа с теплоемкостью близкой к теплоемкости воздуха (*SF₆*, *CCl₄*) увеличение интенсивности инжекции приводит к монотонному уменьшению скоростей пространственного роста возмущений, т.е. к стабилизации течения.

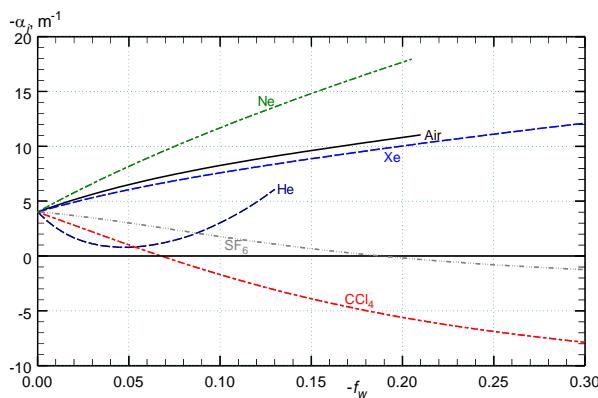


Рис.1: Скорости пространственного роста $-\alpha_i$ двумерных (2D, $\chi = 0^\circ$) возмущений в зависимости от параметра вдува инородного газа $f_w = -\text{Re}(\rho_w V_w / \rho_e U_e)$: $f = 14$ кГц.

На основании проведенных исследований делается вывод о том, что молекулярный вес примеси, а также ее теплоемкость имеют существенное влияние на характеристики линейной устойчивости сверхзвукового пограничного слоя бинарной смеси газов. Показана принципиальная возможность стабилизации пограничного слоя при вдуве тяжелого газа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 15-01-00866).

Литература

- Гапонов С.А. Устойчивость сверхзвукового пограничного слоя на проницаемой поверхности с теплообменом. Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, №.1, 41-46.
- Фомин В.М., Федоров А.В., Шиплюк А.Н. и др. Стабилизация гиперзвукового пограничного слоя покрытиями, поглощающими ультразвук. ДАН, 2002, 384(2), 1-5.
- Gaponov S.A., Smorodsky B.V. Linear stability of supersonic boundary layer on porous surface. Recent Advances in Fluid Mechanics and Aerodynamics. Moscow, 2009, 68-73.
- Гапонов С.А., Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Лысенко В.И., Семенов Н.В., Смородский Б.В. Влияние пористости поверхности на устойчивость и переход сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине. Теплофизика и аэромеханика, 2010, 17(2), 281-290.
- Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
- Shen S.F. The Theory of Stability of Compressible Laminar Boundary Layers with Injection of a Foreign Gas. NAVORD Report 4467, May 1957.
- Powers J.O., Heiche G., Shen S.F. The stability of selected boundary layer profiles. NOLTR 62-143, 1963.
- Powers J.O. Formulation of the complete equations of boundary layer stability with mass transfer. NOLTR 66-187, 1966.
- Albacete L.M., Glowacki W.J. Skin friction and heat transfer characteristics of the compressible laminar boundary layer with injection of a light, medium and heavy gas. NOLTR 66-215, 1967.
- Гапонов С.А., Маслов А.А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Н-ск: Наука, 1980.
- Жигулев В.Н., Тумин А.М. Возникновение турбулентности. Н-ск: Наука, 1987.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ АЛЮМИНИЕВОЙ ПУДРЫ НА КОНВЕКЦИЮ В ПЛОСКОМ СЛОЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПО КРУГУ ВИБРАЦИЙ

Соромотин А.А., Бабушкин И.А.

*Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Россия, г. Пермь, Букирева, 15*

Результаты, полученные в экспериментальной работе [1] показали, что в случае, когда градиент температуры и направление инерционных ускорений перпендикулярны, вибрации могут возбуждать конвекцию даже в случае сильной гравитационной стабилизации, например, при подогреве сверху, когда ситуация абсолютно устойчива при строго гравитационной конвекции. Влияние высоких частот исследовано в работах Г. З. Гершуни и Е. М. Жуховицкого [2, 3].

Цель данной работы - экспериментальное исследование влияния алюминиевой пудры на конвекцию в плоском слое при воздействии поляризованных по кругу вибраций, а также сравнение полученных результатов с экспериментами без применения алюминиевой пудры. Такие исследования необходимы для будущих экспериментов с визуализацией конвективных течений. Необходимо знать, какой вклад вносит алюминиевая пудра в структуру и тепломассообмен в таких системах.

В качестве рабочей жидкости выступает 95% раствор этилового спирта. Выбор данной рабочей жидкости обусловлен необходимостью усиления вибрационных эффектов конвекции по сравнению с гравитационными. Выбранная жидкость предпочтительна для исследования термовибрационной конвекции за счет большего коэффициента объемного расширения и других характеристик по отношению к другим жидкостям. Для выполнения работы была изготовлена модель плоского горизонтального слоя (Рис. 1). Общая схема установки представлена на (Рис. 2).

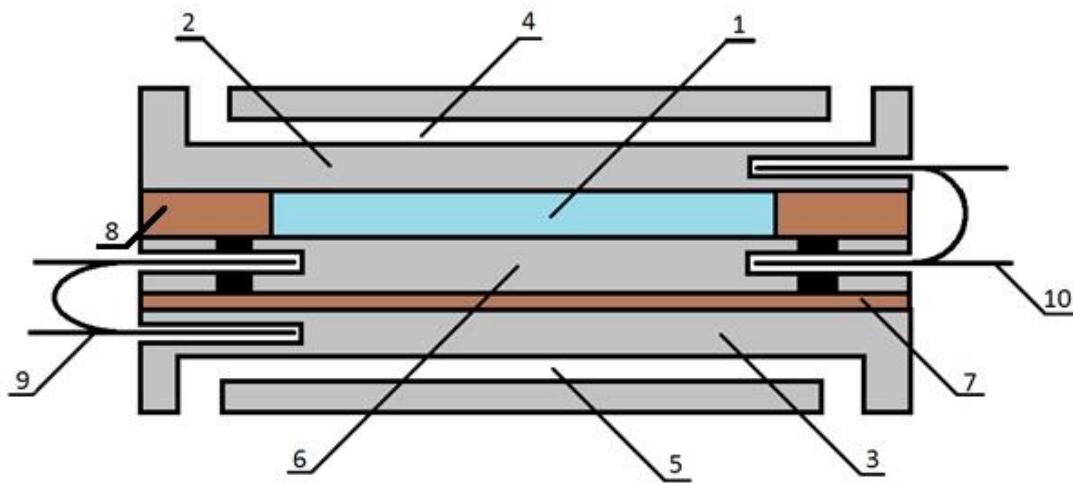


Рис. 1 Экспериментальная модель плоского слоя.

1 – рабочий слой жидкости; 2,3 – верхний и нижний теплообменники; 4,5 – каналы для терmostатирующей жидкости; 6 – датчик теплового потока; 7 – теплоизолирующая прокладка; 8 – боковая граница рабочего слоя; 9,10 – дифференциальные термопары.

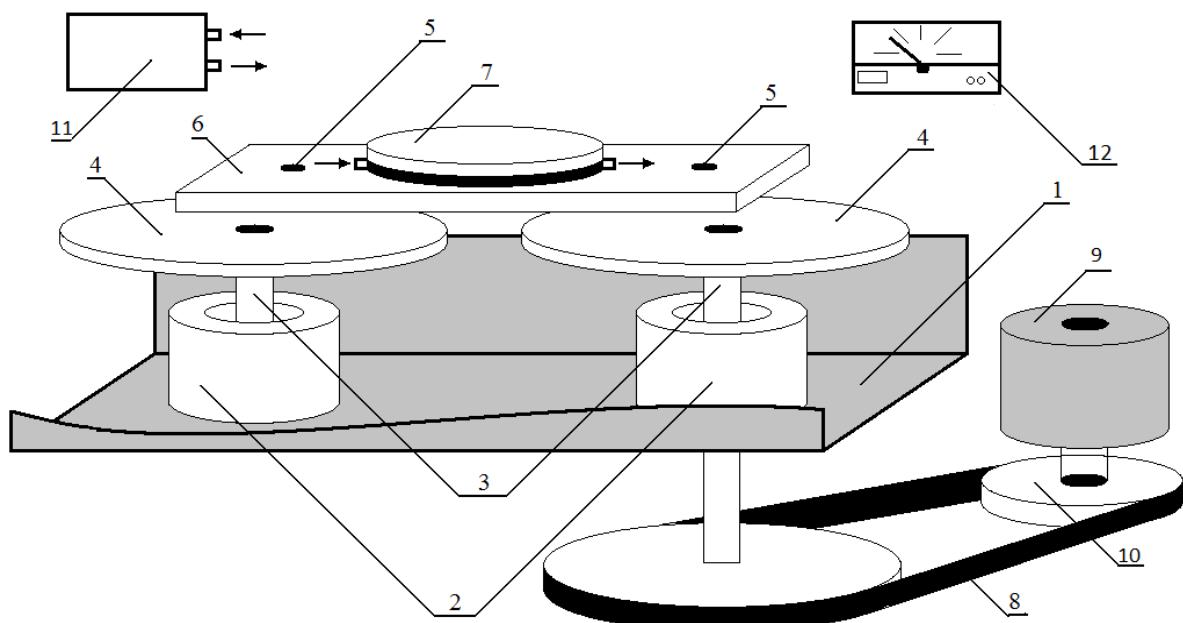


Рис. 2. Общая схема установки

1 – швеллер; 2 – стаканы; 3 – валы; 4 – диски; 5 – втулки; 6 – текстолитовая пластина; 7 – модель плоского горизонтального слоя; 8 – ременная передача; 9 – электродвигатель; 10 – сменные шкивы; 11 – термостаты; 12 – микровольтметр.

Для определения кризиса механического равновесия применяется метод Шмидта – Милвертона, основанный на сравнении тепловых потоков, идущих через слой жидкости и через датчик теплового потока. По результатам измерений строится зависимость перепада температур на датчике

теплового потока от разности температур на рабочем слое жидкости. Граница механической неустойчивости определяется по пересечению прямых соответствующих зависимостей при наличии и отсутствии вибраций.

По результатам работы, построена карта механического равновесия для этилового спирта в координатах Ra_v от Ra_g .

Для экспериментального исследования влияния алюминиевой пудры на конвекцию в плоском горизонтальном слое используются различные концентрации пудры в жидкости. Исследования проводятся аналогично, в результате которых получена карта механического равновесия, но теперь уже с добавлением пудры.

Необходимо сравнить две полученные карты и сделать вывод о том, как сильно, и на сколько влияет наличие пудры на тепломассообмен в такой системе, и какая концентрация пудры может быть использована для проведения экспериментов с визуализацией течений в пределах заданной погрешности.

Список литературы

1. Зюзгин А. В. Экспериментальное исследование тепловой конвекции в переменных силовых полях: дис.доктора физ.-мат. наук: Пермь, 2011. 180 с.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Юрков Ю. С. О конвективной устойчивости при наличии периодически меняющегося параметра // ПММ. 1970. Т. 34, Вып. 3. С. 470–480.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 197.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПЫЛА СТРУИ ЖИДКОГО ТОПЛИВА С УЧЕТОМ МОДЕЛЕЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ-ТЕЙЛORA И КЕЛЬВИНА-ГЕЛЬМГОЛЬЦА

С.В. Стрижак¹, И.Н. Сибгатуллин²

Институт Системного Программирования РАН¹, МГУ им. М.В Ломоносова², Москва

Распыл жидкой струи используется в различных устройствах: струйных принтерах, водяных инжекторах, топливных форсунках дизельных двигателях. Известно, что существуют различные теории и модели распада струи. Гипотеза Рэлея справедлива для малых скоростей, гипотеза Ландау для больших скоростей. Согласно гипотезе Ландау поверхность струи деформируется благодаря возмущениям и на ней появляются выпуклые и вогнутые участки. При высоких скоростях истечения, например $u=700$ м/с, струя жидкого топлива распадается неравномерно, и механизм распада на основе гипотезы Ландау, базирующимся на динамическом влиянии воздуха, становится необоснованным. Необходимо учитывать теплофизическое влияние на процесс распыливания. В частности, на распыливание может оказывать влияние внутреннее испарение жидкого топлива. Определяющим безразмерным параметром, влияющим на модель распада струи является число Вебера. Существуют различные модели распада струи: вибрационный, поточный, разделительный, каскадно-катастрофический и другие. Рисунок 1 демонстрирует различные режимы.

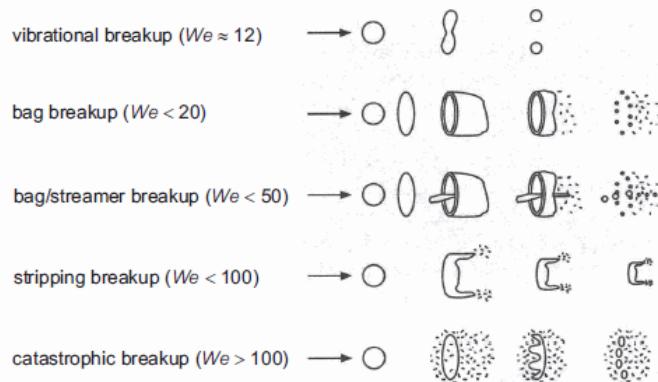


Рисунок 1 — Различные модели распада струи при изменении числа Вебера We

В гидродинамике часто наблюдаются ситуации, когда одна среда движется с определённой скоростью вдоль поверхности другой среды или наблюдается продольное движение слоёв стратифицированной жидкости. При этом возможно возникновение гидродинамической неустойчивости. Первый тип соответствует неустойчивости Рэлея-Тейлора, второй — Кельвина-Гельмгольца [1]. Данные типы неустойчивости часто сопутствуют друг другу. Например, когда одна среда проникает в другую на поздних стадиях возникает режим, в которой одна среда с большой скоростью движется относительно другой среды (Рисунок 2).

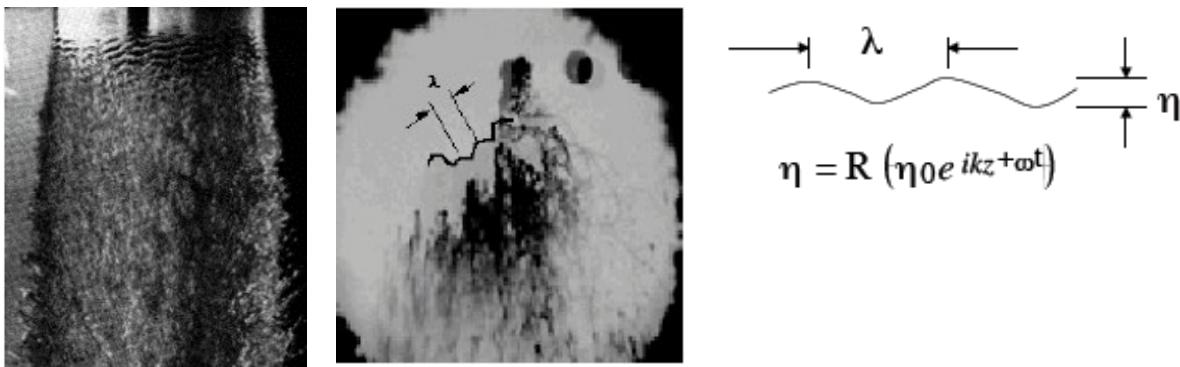


Рисунок 2 — Фотография струи вблизи сопла и в области распада струи

В 1987 г. R. D. Reitz из University of Wisconsin-Madison предложил модель по механизму распада струи [2]. Им была предложена модель на базе неустойчивости Рэлея-Тейлора и Кельвина-Гельмгольца – KHRT

(Рисунок 3). Основная идея модели состоит в том, что характерное время распада струи связано с характерной длиной нарастающей волны. Модель была реализована во многих расчетных кодах, в том числе в открытом решателе *dieselFoam*. В данной работе рассматривалась двухфазная сжимаемая турбулентная среда и Эйлер-Лагранжев подход для моделирования динамики газовой струи с жидкими частицами. Математическая модель включала в себя уравнения сохранения для сжимаемого турбулентного газа и жидкой фазы при наличии физико-химических процессов. Математическая модель базировалась на подходах URANS с k-e и RNG моделями турбулентности и Large Eddy Simulation (LES) с моделями Смагоринского и одним дифференциальным уравнением для подсеточной кинетической энергии. Модель URANS включала в себя следующие уравнения:

Для газовой (эйлеровой) фазы уравнение неразрывности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) &= \nabla \cdot \left[\rho \mathcal{D} \nabla \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \right] + f_m + \dot{\rho}_m^s \delta_{m1} \\ \sum_V N_p \dot{m}_d &= - \int_V \dot{\rho}^s dV = -V \dot{\rho}^s \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнение движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) &= -\nabla p + \nabla \cdot \sigma + \mathbf{F}^s + \rho \mathbf{g} - \frac{2}{3} \nabla(\rho k) \\ \sigma &= 2\mu \mathbf{S} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} \\ \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение энергии:

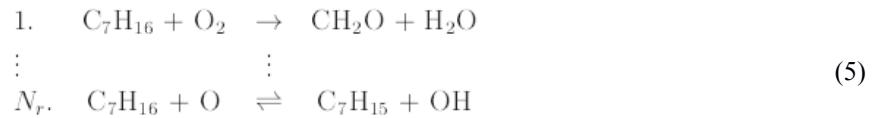
$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} e) &= -p \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{J} + \rho \varepsilon + \dot{Q}^c + \dot{Q}^s \\ \mathbf{J} &= -\kappa \nabla T - \rho \mathcal{D} \sum_m h_m \nabla \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\dot{Q}^c = \sum_{r=1}^{N_r} q_r \dot{\omega}_r \quad q_r = \sum_{s=1}^{N_s} (\vartheta_{sr}^t - \vartheta_{sr}^m) (h_s)_f^{ref}$$

Уравнения для k-ε модели турбулентности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} k) &= -\frac{2}{3} \rho k \nabla \cdot \mathbf{u} + \sigma : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{Pr_k} \right) \nabla k \right] - \rho \varepsilon + \dot{W}^s \\ \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \varepsilon) &= - \left(\frac{2}{3} C_{\varepsilon_1} - C_{\varepsilon_3} \right) \rho \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{Pr_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{k} [C_{\varepsilon_1} \sigma : \nabla \mathbf{u} - C_{\varepsilon_2} \rho \varepsilon + C_s \dot{W}^s] \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения химической кинетики и скорости реакции:



$$\sum_{j=1}^{N_s} \vartheta'_{jk} c_j \rightleftharpoons \sum_{j=1}^{N_s} \vartheta''_{jk} c_j, \quad k = 1, N_r \quad (6)$$

$$\begin{aligned} f_m &= M_m \sum_{r=1}^{N_r} (\vartheta''_{mr} - \vartheta'_{mr}) \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_r &= k_f^r \prod_{s=1}^{N_s} c_s^{\vartheta'_{sr}} - k_b^r \prod_{s=1}^{N_s} c_s^{\vartheta''_{sr}} = k_f^r \Pi_f - k_b^r \Pi_b \\ k^r &= A_r T^{n_r} \exp\left(-\frac{E_a^r}{RT}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

Для жидкой (лагранжевой) фазы уравнение движение капли:

$$m_d \frac{d\mathbf{u}_d}{dt} = \mathbf{F} \quad (8)$$

Уравнение для расчета силы, действующей на каплю:

$$\mathbf{F} = -\frac{\pi D^2}{8} \rho C_D |\mathbf{u}_d - \mathbf{u}| (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}) + m_d \mathbf{g} \quad (9)$$

Соотношение для коэффициента сопротивления в зависимости от числа Re:

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re_d} \left(1 + \frac{1}{6} Re_d^{2/3}\right) & Re < 1000 \\ 0.424 & Re > 1000 \end{cases} \quad (10)$$

$$Re_d = \frac{\rho |\mathbf{u}_d - \mathbf{u}| D}{\mu}$$

Уравнения 8 и 9 могут быть объединены в одно уравнение

$$\frac{d\mathbf{u}_d}{dt} = -\frac{\mathbf{u}_d - \mathbf{u}}{\tau_u} + \mathbf{g} \quad (11)$$

$$\tau_u = \frac{8m_d}{\pi \rho C_D D^2 |\mathbf{u}_d - \mathbf{u}|} = \frac{4}{3} \frac{\rho_d D}{\rho C_D |\mathbf{u}_d - \mathbf{u}|} \quad (12)$$

Уравнение энергии для капли:

$$m_d \frac{dh_d}{dt} = \dot{m}_d h_v(T_d) + \pi D \kappa N u (T - T_d) f \quad (13)$$

$$f = \frac{z}{e^z - 1}, \quad z = -\frac{c_{p,v} \dot{m}_d}{\pi D \kappa N u}$$

Уравнение сохранения массы для капли:

$$\frac{dD^2}{dt} = C_{evap}$$

(14)

$$\frac{dm_d}{dt} = \dot{m}_d = -\pi D D \rho_v S h \ln \frac{p - p_{v,\infty}}{p - p_{v,s}} = -\pi D D \rho_v S h \ln \left(1 + \frac{X_{v,s} - X_{v,\infty}}{1 - X_{v,s}} \right)$$

Для получения фильтрованных уравнений Навье-Стокса (подход LES) использовался коробочный фильтр. Мелкие вихри, размер которых не превышал шага расчетной сетки, моделировались с помощью модели Смагоринского. Для дискретизации уравнений используется метод конечных объемов. Полученные уравнения для связи скорости и давления решались итерационным алгоритмом PISO [3]. Параллельная версия решателя позволяла значительно ускорить время расчетов.

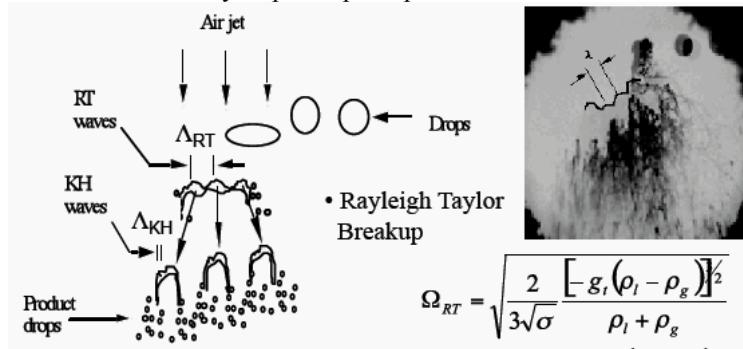


Рисунок 3 — Каскадная модель распада струи с моделью KHRT

В решатель dieselFoam были включены следующие модели [4]:

-) модель разрушения топливной струи на базе теории неустойчивости Релея-Тейлора и Кельвина-Гельмольца - KHRT;
-) модель Ранц-Маршалла для испаряющейся жидкости;
-) модель Розина-Раммлера для задания распределения размеров капель;
-) модель задания положения и геометрии инжектора;
-) модель взаимного соударения капель и соударения капель со стенкой.

Модель разрушения KHRT имеет два механизма разрушения. Модель Кельвина-Гельмольца (КН) включает в себя решение дифференциального уравнения для радиуса первичной-родительской капли в зависимости от чисел Вебера We, Онезорге Oh и Тейлора T. Модель Релея-Тейлора (RT) работает несколько иначе. Распад RT разделяет капельный пакет так, чтобы новое статистическое число капель было увеличено с коэффициентом равным отношению радиуса первоначальной-родительской капли к длине волны. Новый размер капли будет скоректирован, чтобы гарантировать выполнение законов сохранения.

Расчетная область выбиралась в форме параллелепипеда с размерами (0.01 0 -0.01) (0.01 0.1 0.01). Размеры указаны в метрах. Рисунок 4 демонстрирует расчетную область и сетку. В верхней части параллелепипеда располагалось модельная форсунка, через которую под давлением подавалась жидкая струя. Инжектор (форсунка) имела форму цилиндра с размерами 110 мм × 100 мм и выходным отверстием D = 0.3 мм. Положение инжектора задавалось с координатами (0 0 99). Размеры указаны в мм. Количество расчетных ячеек варьировалось: 168 100, 1 312 200, 4 392 300, 20 000 000. Сетка на базе шестигранников была построена с помощью утилиты blockMesh. Начальные значения расчетного поля задавалось как: T = 800 K, p = 5e+06 Па, U = (0,0,0) N2 = 0.766, 02 = 0.233. Начальное поле для параметров турбулентности: k = 1 [м2/с2], RANS: ε = 90 [м2/с2], LES: μSgs = 0,1 [кг/м · с]. Конечное время расчета равнялось Tend = 0.1 секунды, шаг по времени dt = 2.5e-06 секунды.

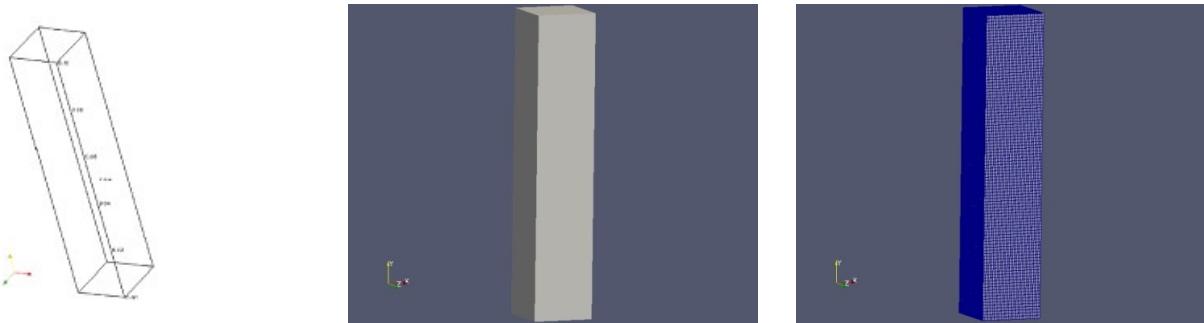


Рисунок 4 — Расчетная область и расчетная сетка

Подключение библиотеки «chemkin» позволило описать химические реакции. Скорость реакции определялась с помощью закона Аррениуса. C7H16 вступает в реакцию с O₂ с образованием CO₂ и H₂O. В ходе реакции рассматривалось 5 компонент: C₆H₁₄ C₇H₁₆ O₂ N₂ CO₂ H₂O. В результате расчета с моделировалось динамика капельной жидкости в окружающей газовой среде, распределение поля концентраций различных компонент топлива, температурное поле, скорость движения отдельных капель. Рисунок 5 демонстрирует результаты расчета распределения скорости и температуры для газовой фазы. Рисунок 6 — распределение вязкости и компонент фракции C₇H₁₆ для газовой фазы.

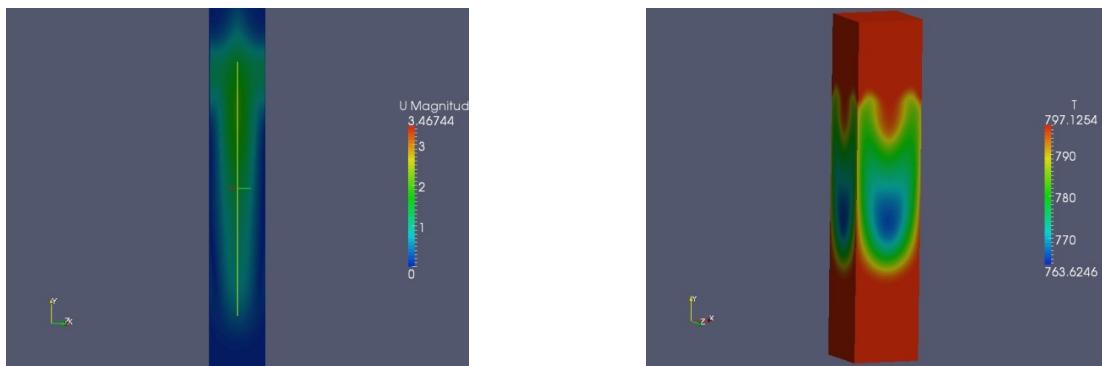


Рисунок 5 — Распределение скорости и температуры для газовой фазы

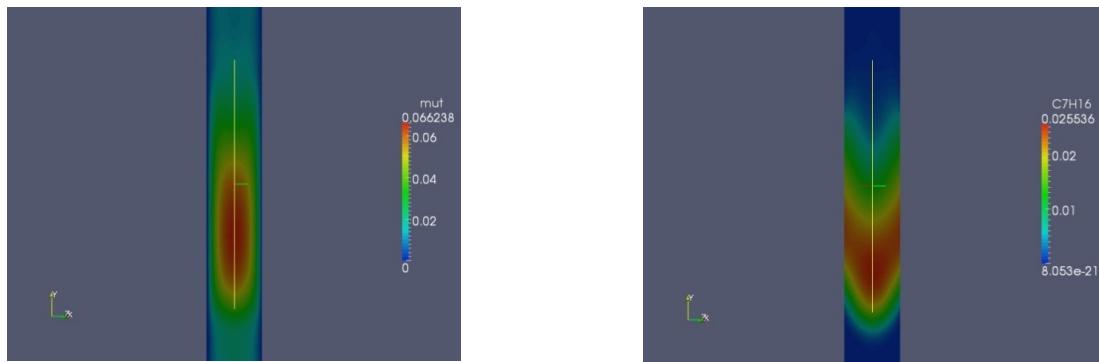
Рисунок 6 — Распределение вязкости и компонент фракции C₇H₁₆ для газовой фазы

Рисунок 7 содержит информацию о распределение капель по диаметру и температуре для разных фаз.

Рисунок 8 — распределение массовой фракции.



Рисунок 7 — Распределение капель по диаметру и температуре. Различные фазы

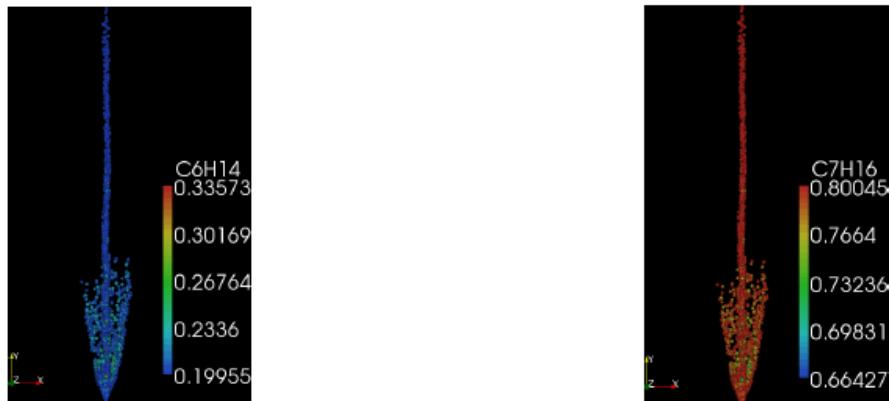
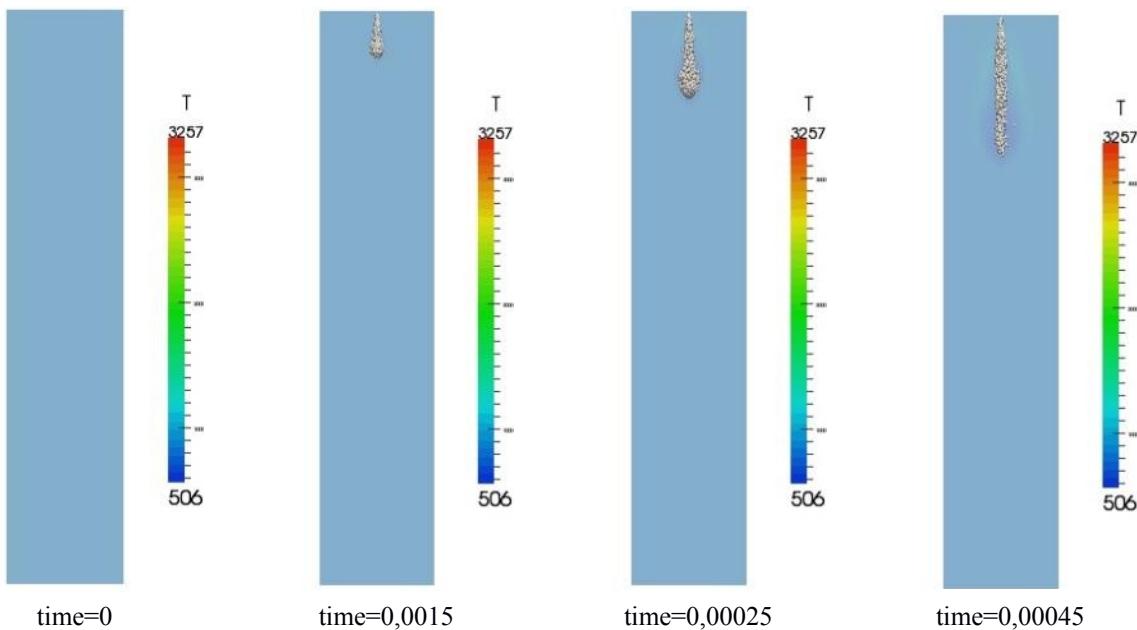


Рисунок 8 — Распределение массовой фракции капель C6H14 и C7H16

Для исследования сходимости и оценки влияния сетки проводились расчеты на трех разных сетках:
а) 168 100 ($41*41*100$); б) 1 312 200 ($81*81*200$); в) 4 392 300 ($121*121*300$). Сравнение результатов расчета проводилось по значению температуры факела, диаметру капель, глубины проникновения струи. Рисунок 9 демонстрирует результаты расчета температуры на сетке а). Величина значения time указана в секундах.



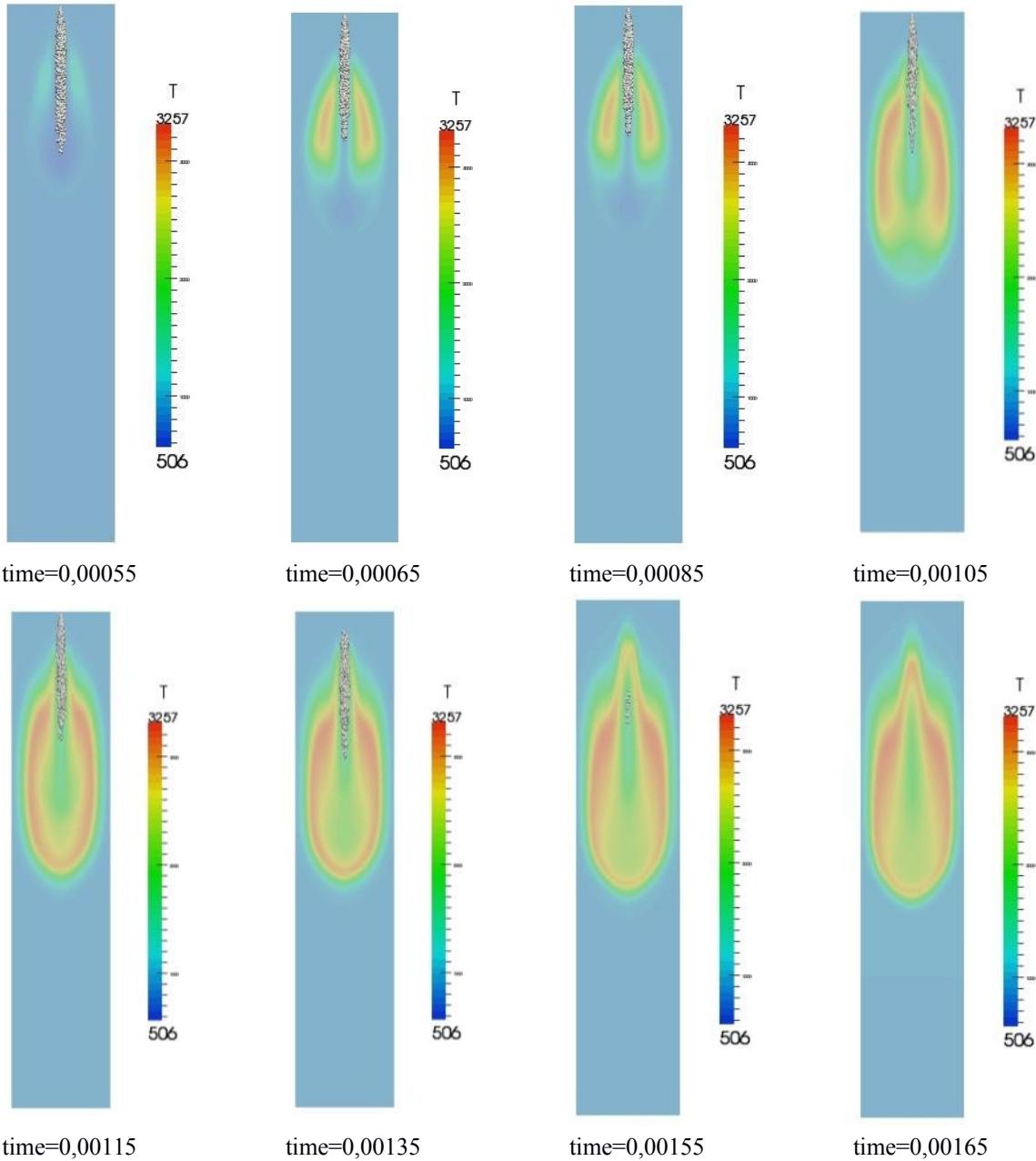


Рисунок 9 — Значение поля температуры и траекторий частиц капель в разные моменты времени, полученные на сетке а)

Максимальная глубина проникновения топливной струи получена для момента времени $\text{time} = (0,00115 — 0,00135)$ секунды. Длина проникновения струи $L = 0,0698$ метра. Момент исчезновения капель соответствует $\text{time}=0,00155$ секунды. Максимальная температура $T=3257$ К. Рисунок 10 демонстрирует результаты расчета на сетке б).

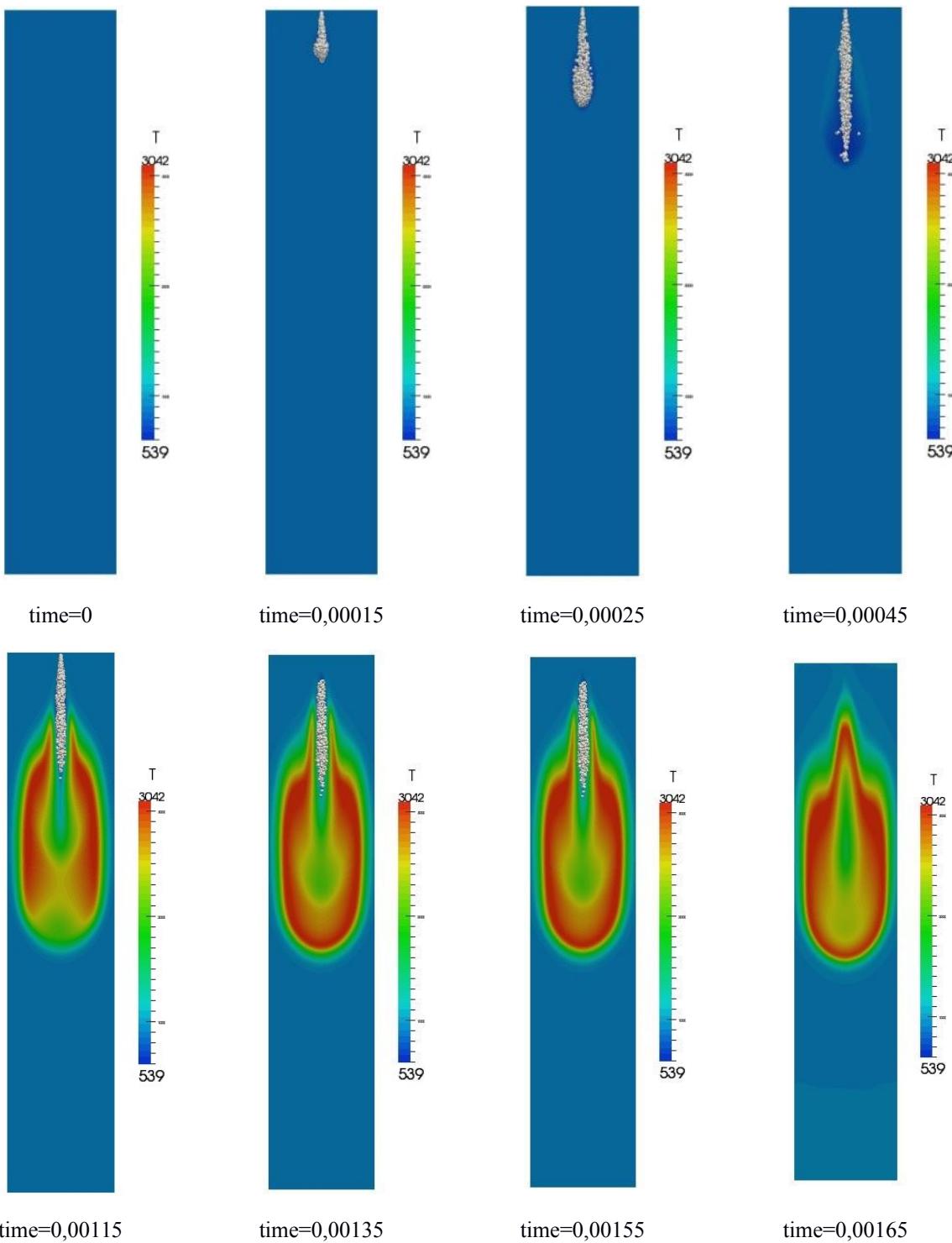


Рисунок 10 — Значение поля температуры и траекторий частиц капель в разные моменты времени, полученные на сетке б)

Максимальная глубина проникновения струи получена для момента времени $time = (0,00125 - 0,00135)$ секунды. Длина проникновения струи $L = 0,072$ метра. Момент исчезновения капель соответствует $time = 0,00155$ секунды. Максимальная температура $T = 3042$ К. Ошибка расчета по максимальному значению

температуры на рассмотренных сетках составила 6.6 %. Рисунок 11 демонстрирует результаты расчета на сетке в).

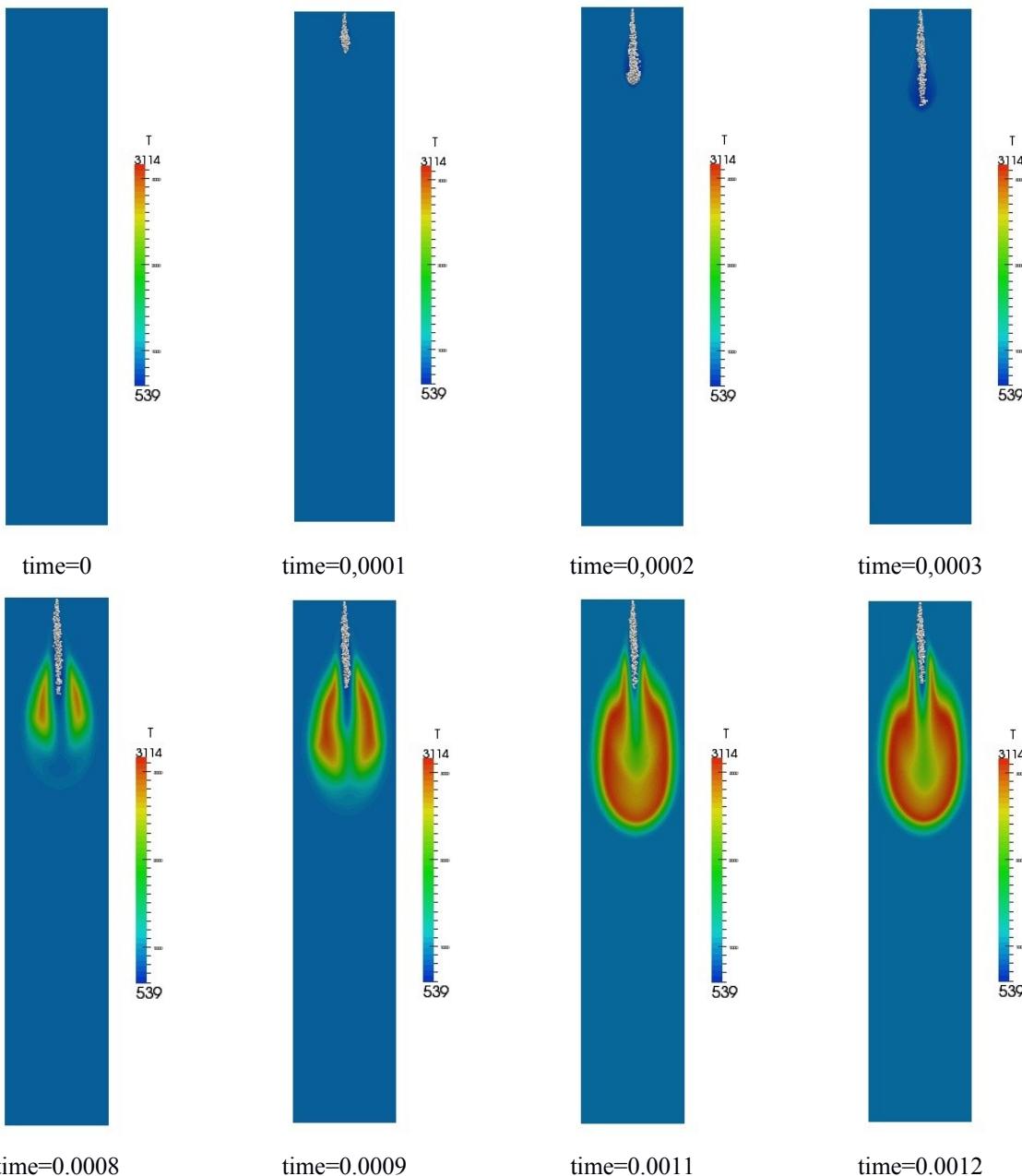


Рисунок 11 — Значение поля температуры и траекторий частиц капель в разные моменты времени, полученные на сетке в)

Максимальная глубина проникновения струи получена для момента времени $time=$ (0,0011 — 0,0012) секунды. Длина проникновения струи $L= 0,072$ метра. Момент исчезновения капель соответствует $time=0,00155$ секунды. Максимальная температура $T=3114$ К. Ошибка расчета по максимальному значению температуры на рассмотренной сетке по отношению к предыдущим расчетным примерам (сетка 168 100, 1 312 200) составила 4.6% и 2.3 %. Расчеты проводились на вычислительном кластере UniHUB на 12, 24, 36 ядрах.

Для оценки эффективности использовалось общее время счета задачи Tend=0.01 секунда. Таблица 1 иллюстрирует результаты.

Таблица 1 — Общее время расчета на различном числе ядер

Число ядер	Время счета, секунд
12	57 138
24	30 854
36	17 265

Проведенные исследования показали, что созданный программный модуль при запуске задачи до 36 ядер имеет высокую степень масштабируемости. Обработка результатов проводилась в пакете Paraview.

В заключение стоит отметить, что необходимо проводить более детальный расчет на подробных сетках (от 20 до 100 миллионов ячеек) с целью получения достоверных результатов и сравнения их с результатами экспериментальных данных для форсунок дизельных двигателей [5].

Работа частично поддержана министерством образования (RFMEFI60714X0090).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Ф. Дразин. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 288 с.
2. R. D. Reitz. Modeling Atomization Processes In High Pressure Vaporizing Sprays. Atomization and Spray Technology, 1987, v. 3, pp. 309–337.
3. Weller H.G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. “A tensorial approach to computational continuum mechanics using object oriented techniques”, Computers in Physics, 1998, v.12, № 6, p. 620-631.
4. H. Jasak, H.G. Weller, and N. Nordin. In-Cylinder CFD Simulation Using a C++ Object-Oriented Toolkit. SAE Paper, 2004, 2004-01-0110, p.11.
5. В.А. Марков, С.Н. Девягин, В.И. Марчук. Впрыскивание и распыливание топлива в дизелях. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 360 с.

ЗОНАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ, ГЕНЕРИРУЕМОЕ КОЛЕБЛЮЩИМСЯ ЯДРОМ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

С.В. Субботин, Н.В. Козлов, В.Г. Козлов,
Лаборатория вибрационной гидромеханики,
Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь

Экспериментально исследуется осредненное зональное течение, возбуждаемое круговыми колебаниями внутреннего ядра во вращающейся сферической полости. Отношение радиусов ядра и полости составляет $R_1 / R_2 = 0.5$. Колебания ядра совершаются в экваториальной плоскости вокруг центра полости с частотой вращения последней и вызываются внешним статическим полем (полем силы тяжести), перпендикулярным оси вращения (плотность ядра меньше плотности жидкости). Дифференциальное вращение ядра отсутствует, для этого один из полюсов ядра соединен с ближним полюсом полости гибкой, но упругой на скручивание леской.

Обнаружено, что колеблющееся ядро возбуждает в полости осредненное осесимметричное азимутальное течение в виде системы вложенных коаксиальных цилиндрических поверхностей, вращающихся с различными угловыми скоростями (рис. 1). Максимумы отстающего дифференциального вращения жидкости достигаются на расстоянии $r / R_2 \approx 0.15, 0.50$ и 0.90 от оси полости. Показано, что осредненное движение генерируется в осциллирующих пограничных слоях вблизи твердых границ тела и полости, а его интенсивность возрастает с амплитудой колебаний ядра по квадратичному закону. Проводится сравнение с зональным течением, возбуждаемым свободным колеблющимся ядром, которое в результате колебаний само совершает осредненное дифференциальное вращение [1]. Показано, что течение, возбуждаемое колеблющимся свободным ядром, является линейной суперпозицией течений, генерируемых независимо в результате дифференциального вращения расположенного в центре полости ядра и вследствие колебаний ядра, вращающегося вместе с полостью. Сделан вывод, что два механизма генерации потоков, в экмановских пограничных слоях (при дифференциальном вращении ядра) и в осциллирующих пограничных слоях (при колебаниях ядра), действуют и проявляются независимо.

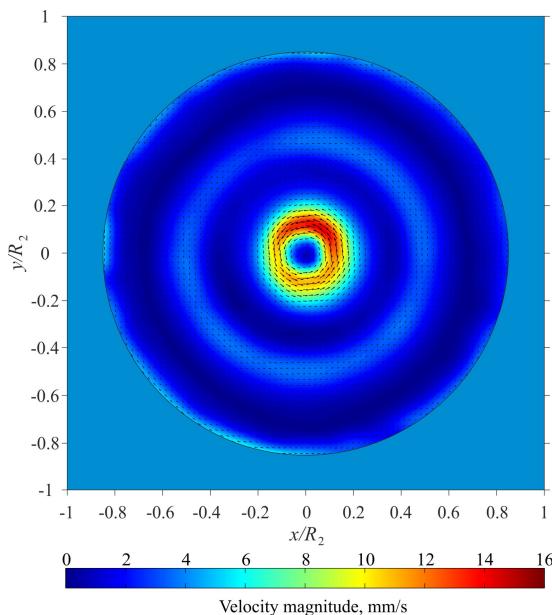


Рис. 1. Пример векторного поля осредненной азимутальной скорости жидкости на расстоянии $z / R_2 = 0.53$ от экваториальной плоскости

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 14-11-00476).

ЛИТЕРАТУРА.

1. V.G. Kozlov, N.V. Kozlov, and S.V. Subbotin. Influence of an external force field on the dynamics of a free core and fluid in a rotating spherical cavity // Phys. Fluids 2015 V. 27 (7). 074106.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В СВЕРХКОРОТКИХ ДИФФУЗОРАХ

А.Д. Сударикова, Ю.С. Зайко, О.И Навознов, А.И. Решмин, С.Х. Тепловодский, В.В. Трифонов.
НИИ механики МГУ, Москва

Проведено экспериментальное исследование характеристик потока в дозвуковых коротких круглых диффузорах с проницаемой перегородкой в выходном сечении. Диффузор содержит участки меньшего d и большего D диаметров и расположенный между ними короткий, длиной примерно 0.5 входного диаметра, переходный участок, выполненный в виде тела вращения. В исследуемых диффузорах диаметр канала увеличивается в 3 раза на длине около половины входного диаметра. В [1] был рассмотрен сверхкороткий диффузор с расширением от 20 до 60 мм на длине 10 мм. Потери давления в диффузоре были меньше входного скоростного напора, так что при выходе потока в открытое пространство давление перед диффузором оказывалось меньше атмосферного. Здесь рассматриваются диффузоры с той же степенью расширения но с выходным диаметром 120 мм и с различными профилями образующей канала. Потери давления на диффузоре порядка скоростного потока на входе в диффузор. Общий вид одного из таких диффузоров приведен на рис. 1.



Рис. 1. Сверхкороткий диффузор

Отсутствие отрыва потока в диффузорах с таким расширением обеспечивается за счет специально подобранного профиля канала и постановки на выходе диффузора гидравлического сопротивления в виде проницаемой перегородки - мелкопористой металлической тканой сетки. Проницаемая перегородка тормозит поток и вызывает его расширение, направляя среду к образующей переходного участка. Одновременное воздействие на поток профилированной стенки и проницаемой перегородки приводит к тому, что область обратных течений не образуется.

Эксперименты проводились на воздухе. Если входной поток симметричен, сразу после диффузора формируется осесимметричное течение. Как и в [1] измерения скорости потока после диффузора проводились с помощью термоанемометра DISA 56C01 СТА, датчик которого размещался на устройстве перемещения, что позволяло проводить измерения профиля скорости и её пульсаций в выходном сечении за диффузором. Способы тарировки датчика термоанемометра и методики измерений приведены в [2].

Были исследованы диффузоры с различающимися профилями канала и с разными коэффициентами сопротивления проницаемых перегородок. На рис.2 показаны образующие поверхности каналов и соответствующие профили скорости в выходном сечении некоторых образцов диффузора.

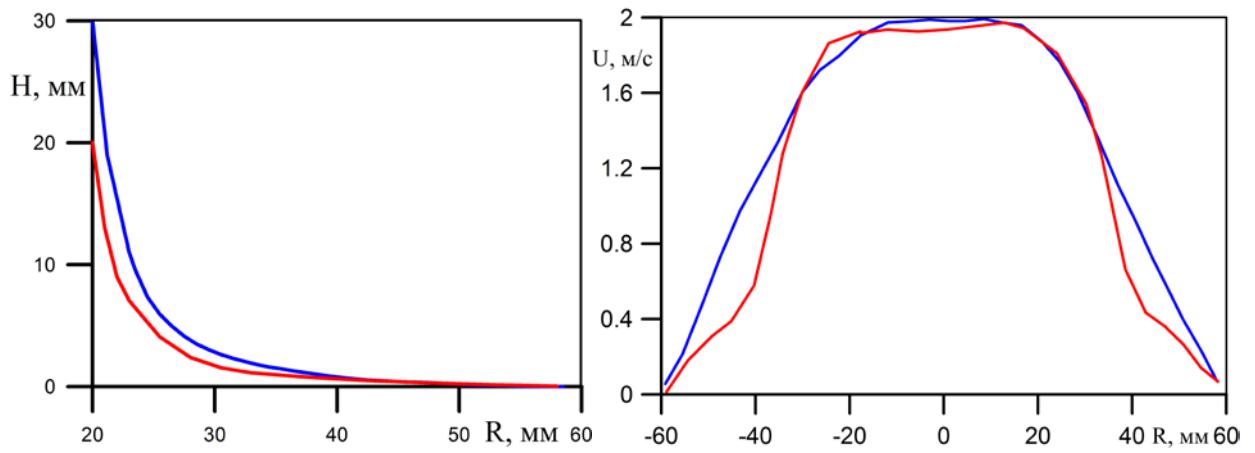


Рис.2. Влияние формы канала диффузора на профиль скорости в выходном сечении:
R-радиус канала, H-расстояние от перегородки до стенки канала, U-скорость потока.

Проведено измерение распределения статического давления вдоль образующей канала диффузора. Для этого исследования был изготовлен диффузор с дренажными отверстиями на стенке канала, показанный на рис.3. Входной диаметр $d = 50$ мм, выходной диаметр $D = 120$ мм, длина переходного участка 20 мм.



Рис. 3. Экспериментальный образец диффузора для измерения давления на образующей канала.

Обнаружено, что при безотрывном течении в канале статическое давление вдоль образующей распределено монотонно и градиент давления вдоль образующей отрицателен. При нарушении этого распределения и возникновении на образующей канала участков с положительным градиентом давления возникает отрыв потока от стенки канала. В этом случае пульсации скорости в выходном сечении диффузора значительно увеличиваются. На рис.4. и рис.5. приведены экспериментальные данные измерений скорости и ее пульсаций в выходном сечении, давления на стенке канала диффузора, R -радиус канала ($R=0$ соответствует центру канала), L -расстояние между дренажными отверстиями ($L=0$ соответствует началу расширяющегося участка канала).

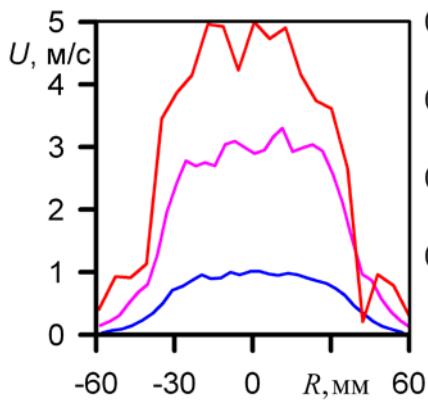


Рис. 4. Профили скорости и ее пульсаций в выходном сечении.

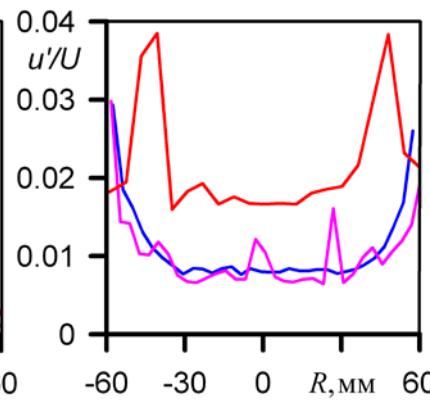


Рис. 4. Профили скорости и ее пульсаций в выходном сечении.

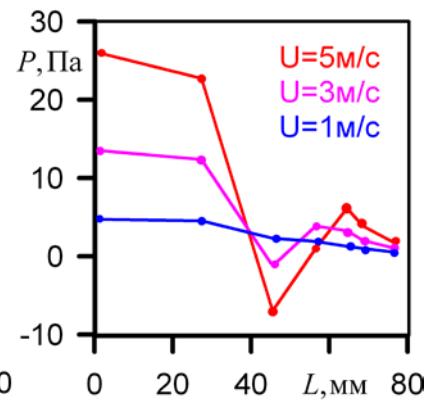


Рис. 5. Распределение давления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Экспериментально исследовано течение в канале круглого сверхкороткого диффузора с увеличением диаметра в 3 раза на длине, не превышающей половину входного диаметра, с проницаемой перегородкой в выходном сечении. При правильном выборе профиля канала диффузора и коэффициента сопротивления проницаемой перегородки отрыв потока в канале не происходит. При этом градиент давления на образующей канала в направлении потока монотонен и отрицателен. Потери давления на диффузоре примерно равны входному скоростному напору.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.И. Решмин, С.Х. Тепловодский, В.В. Трифонов. Круглый короткий диффузор с большой степенью расширения и проницаемой перегородкой // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 5. с. 32-39.
2. А.И. Решмин, С.Х. Тепловодский, В.В. Трифонов. Турбулентное течение в круглом безотрывном диффузоре при числах Рейнольдса меньших 2000 // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 2. с. 121-130.

Фильтрация в окрестности подводных грязевых вулканов как механизм накопления газовых гидратов

Суэтнова Е.И.
ИФЗ РАН. Москва

Газовые гидраты в естественных условиях представляют собой кристаллические образования из газа (главным образом метана) и воды, подобные льду, которые формируются и стабильны в определенном диапазоне давления и температуры. Формирование газовых гидратов в осадках в морском дне является одним из важных геофизических процессов, изучение которого необходимо как в фундаментальных, так и в прикладных аспектах. В геофизических условиях морских осадков газ доставляется в зону термобарической стабильности газовых гидратов диффузией и фильтрацией к поверхности порового флюида, насыщенного газом. Геофизическими исследованиями в зонах подводных грязевых вулканов были обнаружены признаки значительных скоплений газовых гидратов в окрестностях жерла вулканов, а также геофизические признаки фильтрации флюидов. Однако на современном этапе геофизической изученности подводных грязевых вулканов оценка гидратонасыщенности глубоководных осадков в окрестности грязевых вулканов представляется проблематичной.

В данной работе приводятся результаты математического моделирования аккумуляции газовых гидратов, ассоциированных с подводными грязевыми вулканами. Модель описывает фильтрацию газонасыщенного флюида от грязевой камеры к поверхности и осаждение газовых гидратов в зоне их термобарической стабильности, с условием термодинамического равновесия гидрат-газонасыщенный флюид. Такой цикл фильтрации может существовать между извержениями грязевого вулкана. Модельные расчеты показали, что скорость гидратонакопления зависит от гидродинамических свойств осадков над питающим резервуаром, их пористости и от температурного градиента в осадках и давления в резервуаре питания, а также его глубины от поверхности, физических свойств осадков, внешнего давления (глубины дна).

Показано, что время достижения установившегося режима фильтрации также зависит от этих параметров. В рамках модели проведен анализ влияния величины проницаемости и глубины питающего вулкан резервуара на скорость накопления газовых гидратов. Модельные расчеты показывают, что максимальная скорость гидратонакопления составляет 2.6% порового пространства за 100 лет при проницаемости осадков $k_0=10^{-14} \text{ м}^2$, градиенте температуры 0.05°m^{-1} , глубине питающего резервуара 1000м от поверхности дна и глубине моря 1200м. Такая скорость гидратонакопления может обеспечить за сотни лет значительную гидратонасыщенность в окрестностях грязевых вулканов, соответствующую наблюдательным данным.

УДК 532.555.4

**Теоретическое исследование
неизотермических эффектов в многофазных потоках**

Д.В. Суркова^{1,2}, В.П. Пименов²

¹Московский физико-технический институт (государственный университет)

²Московский научно-исследовательский центр Шлюмберже

Проблема создания и совершенствования методов и средств измерения расхода и состава многофазных потоков остается до сих пор весьма актуальной [1-2]. В нефтегазовой промышленности для этой цели часто используют измерение давления при течении флюида через различные ограничители, например, через трубку Вентури (рис. 1), в сочетании с измерением плотности потока, используя гамма плотномер или другие способы [2]. Важной проблемой является мониторинг добычи в скважинных условиях, где нет возможности использовать громоздкие средства измерения, которые используются на поверхности. Информацию о фазовом составе и расходе флюида желательно получить с использованием наиболее надежных датчиков, например датчиков давления и температуры. Надо определить, где проводить измерения, с какой точностью и как по измеренным значениям рассчитать состав и расход водонефтяной смеси.

Работа включает в себя три этапа: (1) приближенный 1D анализ температурных эффектов в однофазных и двухфазных потоках, (2) анализ двухмерных температурных эффектов в однофазных потоках с помощью численного моделирования, (3) 2D численное моделирование температурных эффектов в двухфазных потоках.

Оценка температурных эффектов в трубке Вентури в 1D приближении проводилась с использованием уравнения движения (рис. 1)

$$P_1 + \rho V_1^2 / 2 = P(x) + \rho V(x)^2 / 2 + \Delta P(x);$$

$$\Delta P_{13} = \kappa \cdot (P_1 - P_2)$$

и уравнения энергии

$$c_p \cdot dT - \mu_{JT} c_p \cdot dP + d(V^2 / 2) = 0$$

где κ - коэффициент потерь давления ($\kappa \approx 0,15 \div 0,2$), P_1, P_2 и P_3 - статические давления на входе трубы, в горловине и на выходе из диффузора, значения плотности ρ , теплоемкости c_p и

коэффициента Джоуля-Томсона μ_{JT} рассчитывались для гомогенной смеси нефти и воды в зависимости от водосодержания.

Было показано, что при скорости потока на входе в трубку Вентури $V_1 = 3,5$ м/с охлаждение воды и нефти в горловине составляет 11 мК и 33 мК соответственно, нагрев на выходе из диффузора 8 мК и 12 мК. Такие изменения температуры потока могут быть измерены современными скважинными датчиками температуры.

Оценка влияния двухмерных эффектов проводилась с использованием пакета COMSOL. Была показана сеточная сходимость решения и получены типичные значения потерь давления в трубке Вентури. Для модели ламинарного течения, полученол хорошее количественное соответствие между аналитическим и 2D численным расчетом как для нагрева потока на выходе из диффузора, так и для охлаждения потока в горловине. Особенности реализации модели турбулентного течения в COMSOL Multiphysics 3.5 не позволили нам достаточно точно учесть процессы вязкой диссипации на стенках трубы Вентури, и нагрев потока на выходе из диффузора может отличаться от нагрева, рассчитанного по необратимому падению давления ΔP_{13} , который соответствует эффекту Джоуля-Томсона. Установлено, что нагрев потока, по которому можно определить состав смеси, надо измерять на расстоянии от горловины не менее 5-8 диаметров трубы Вентури (рис. 2). Было показано, что в рамках модели ламинарного течения высоковязких флюидов вязкая диссипация может приводить к существенному (более 300 мК, (рис. 3)) нагреву стенок в горловине трубы Вентури. Проводится уточнение величины этого нагрева для турбулентного потока. Рассматривается влияние водосодержания добываемого флюида на величину нагрева стенок трубы Вентури.

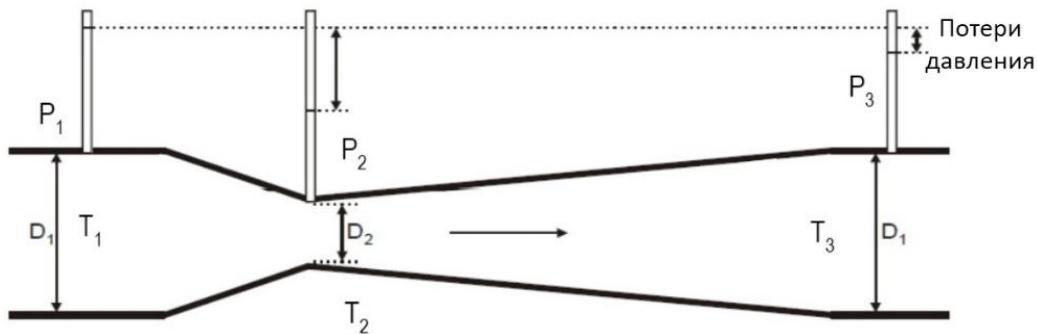


Рис. 1. Трубка Вентури

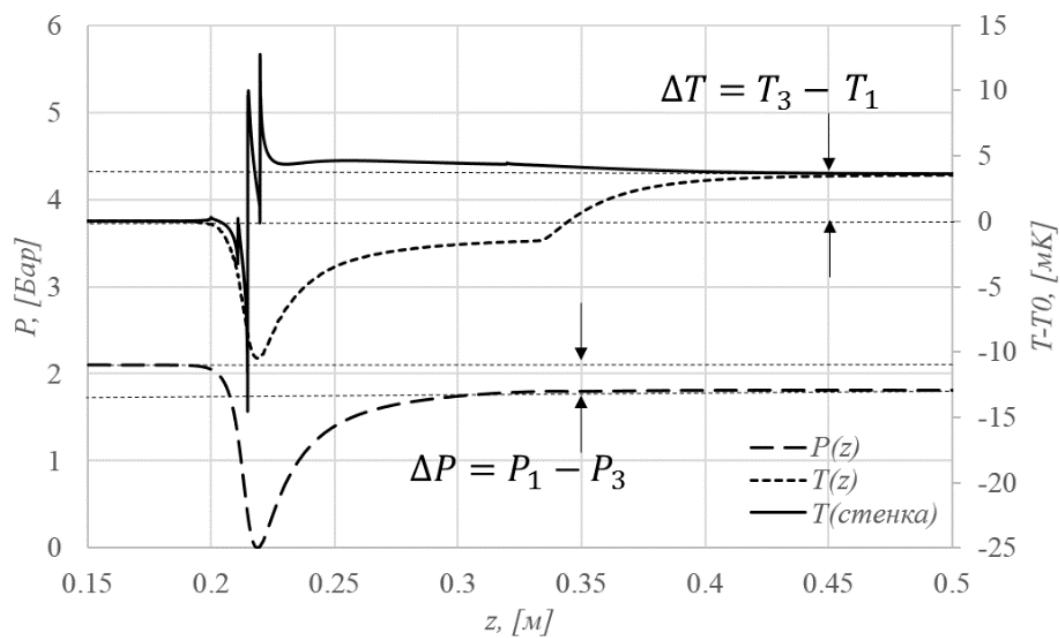


Рис. 2. Изменение давления и температуры по длине трубы Вентури

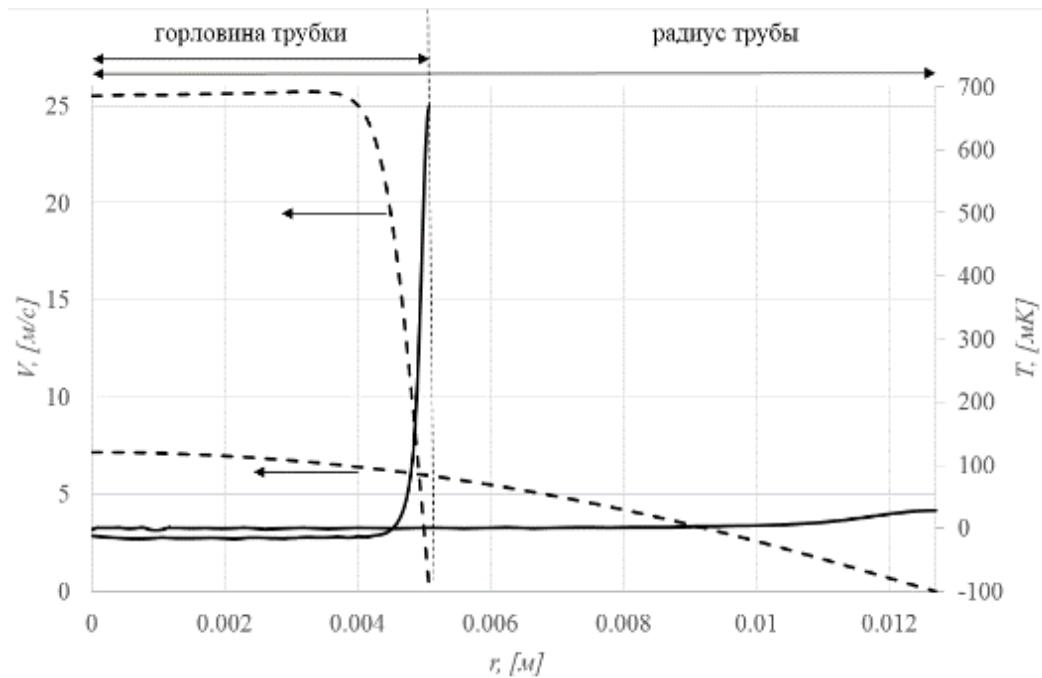


Рис. 3. Изменение скорости и температуры по радиусу трубы Вентури

Литература

1. Вакулин А.А., Шабаров А.Б. Диагностика теплофизических параметров в нефтегазовых технологиях. –Новосибирск: Наука: Сиб. отд. РАН, 1998.
2. Eivind Dahl [et al.]. Handbook of Multiphase Flow Metering. –March 2005. –Revision 2. –113 c.

ГИДРОСТАТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В МЕХАНИЗМЕ СОЗДАНИЯ ТЯГИ ПРОТИВ ВОЛН У ПЛАВУЧЕЙ НАКЛОННОЙ ПЛАСТИНЫ

А.К. Такмазьян, В.В. Прокофьев
НИИ механики МГУ им. Ломоносова, Москва

Новый принцип «прямоточного волнового движителя», основанный на эффекте «опрокидывания» гравитационных волн и превращения потенциальной энергии волн в кинетическую, описан в работе [1]. В ней приведена одна из возможных конструкций такого движителя, не имеющего подвижных элементов и не зависящего от качки судна. В [2] с помощью физического и численного эксперимента было подтверждено наличие эффекта движения против волн погруженной в жидкость пластины. Здесь волнодвигатель-пластина вообще не имел вертикального перемещения и был закреплен на тележке, свободно перемещавшейся вдоль волнового канала по рельсам.

В настоящей работе представлены результаты физического и численного эксперимента с тем же волнодвигателем-пластины, но установленным на судно катамаран, корпуса которого представляли собой пластины из пенопласта марки ПС1 - 150 толщиной 64 мм и общей длиной 6110 мм. Расстояние между корпусами – 1000 мм. Наклонная пластина устанавливалась в средней части катамарана. Большая длина корпусов обеспечивала отсутствие килевой качки судна. Однако в отличие от пластины, жестко закрепленной на тележке, для катамарана имеет место вертикальная качка, обусловленная переменной вертикальной составляющей силы, действующей на пластину. Были проведены исследования зависимости скорости движения катамарана против волн в зависимости от параметров волнодвигателя и самих волн. Оказалось, что величина скорости движения против волн даже увеличилась по сравнению с волнодвигателями, прикрепленными к тележке. В зависимости от длины волн характер движения катамарана различен – судно движется против волн, периодически увеличивая скорость, причем, период либо совпадает с периодом волн, либо в два раза больше. Для достаточно коротких волн имеет место монотонное движение. Эффект движения катамарана под действием волн (и направление движения судна) весьма сильно зависит от глубины погружения (верхняя кромка пластины может быть ниже или выше невозмущенной поверхности воды) и угла наклона пластины. Показано, что при некоторых параметрах направление движения судна определяется заданием начальной скорости. Наибольшую скорость движения судна против волн обеспечивали волнодвигатели сравнительно малых размеров (длина пластины ~ 0,3 м при длине катамарана 6 м и длине волны 3 – 4 м). Показано, что те же волнодвигатели при измененных параметрах установки пластины могут весьма эффективно использовать энергию волн для обеспечения хода катамарана по волнам.

С помощью вычислительного пакета XFlow было проведено численное моделирование процесса образования волн в канале с помощью клиновидного волнопродуктора и одновременно воздействие этих волн на наклонную пластины. Причем плавучесть взаимодействующей с волнами пластины моделировалась равной плавучести катамарана из эксперимента. Сравнение рассчитанных параметров волн и параметров движения катамарана с экспериментальными данными показывает хорошее согласование. При тех же параметрах, что и в эксперименте наблюдается обнаруженный ранее экспериментально эффект «гистерезиса» – зависимость направления движения катамарана от начальной скорости. С помощью численных расчетов удалось определить механизм эффекта движения пластины против волн. Оказалось, что он в основном зависит от гидростатической составляющей гидродинамических сил и, в конечном счете, определяется высотой уровня находящейся над пластиной волны. Наиболее интенсивное движение против волн имеет место в фазе впадины над передней стороной пластины. При опрокидывании волны вблизи верхней кромки пластины (пластине находится под волной и в это время на пластину действует сила в сторону движения волны) теряется потенциальная энергия (высота) волны. Дефицит среднего по периоду уровня жидкости над пластиной за счет нелинейной перестройки профиля и частичного обрушения волны по сравнению с уровнем жидкости за задней кромкой пластины является причиной перемещения пластины против волн. Для проверки гипотезы о гидростатическом характере наблюдаемых эффектов была использована теория мелкой воды первого приближения, в которой давление на поверхности пластины имеет только гидростатическую составляющую. Амплитуда набегающих волн задавалась такой, чтобы обеспечить обрушение волн вблизи верхней кромки пластины. Результаты проведенных вычислений средней скорости движения пластины в зависимости от частоты волн, качественно повторяют экспериментальные данные, а с учетом пересчета по амплитуде получено и количественное соответствие.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-08-00413).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Якимов Ю.Л., Якимов А.Ю. Прямоточный волновой движитель судна // Вестник Моск. ун-та, сер.1, мат., мех. 2005, №4.

2. Очеретяный С.А., Прокофьев В.В., Такмазьян А.К., Филатов Е.В. Воздействие волн на погруженную в жидкость подвижную пластину: физический и численный эксперимент. // Известия РАН, МЖГ, 2013, №.

ЛАМИНАРИЗАЦИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С КОНФУЗОРОМ

С.Х. Тепловодский, В.Г. Лущик, А.И. Решмин
НИИ Механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Рассмотрено течение в плоском канале, имеющем участок с конфузором, которому предшествует и за которым следует канал постоянного сечения. Для решения задачи использовались уравнения неразрывности и движения в приближении узкого канала и трехпараметрическая дифференциальная модель турбулентности. Получены продольные и поперечные распределения интегральных и локальных характеристик течения. Показано, при каких условиях наступает ламинаризация потока в конфузоре и далее в канале постоянного сечения режим ламинарного течения сохраняется.

ВВЕДЕНИЕ

Продольный градиент давления является параметром, который оказывает существенное влияние на турбулентное течение, приводя в пределе в случае отрицательного градиента давления к ламинаризации пограничного слоя, а в случае положительного – к его отрыву. Достаточно полная библиография работ по влиянию градиента давления на турбулентный пограничный слой содержится в обзоре [1], где отмечено, что экспериментальные данные получены, в основном, для профилей скорости и трения на поверхности пластины.

Результаты расчетов для внешнего течения – в пограничном слое на пластине в потоке с отрицательным градиентом давления [2], выполненных с использованием трехпараметрической дифференциальной модели турбулентности [3], показали хорошее согласование с известными экспериментальными данными. Показано, что изменение характеристик турбулентности вместе с поведением интегральных величин пограничного слоя свидетельствует о том, что при достаточно большом отрицательном градиенте давления возможна ламинаризация турбулентного пограничного слоя.

В инженерной практике проточный тракт энергоустановок состоит из участков как постоянного, так и переменного сечения, в частности, и из конфузорных участков. Знание режима течения на этих участках проточного тракта имеет большое значение при определении гидравлических характеристик энергоустановки.

Целью настоящей работы является численное исследование с использованием модели турбулентности [2] течения с отрицательным градиентом давления в условиях внутренней задачи – в плоском канале с конфузором при постоянном числе Рейнольдса.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрен плоский конфузор, в котором реализуется течение с отрицательным продольным градиентом давления. Параметры канала соответствуют принятым в [4]. Входу в конфузор предшествовал участок стабилизации длиной $L_1 = 1200$ мм ($L_1/h_0 = 80$, где h_0 – входная высота канала), на котором устанавливалось развитое турбулентное течение при заданном числе Рейнольдса. Далее следовал конфузор длиной $L_k = 200$ мм ($L_k/h_0 \approx 13$) с горизонтальной нижней стенкой и плоской наклонной верхней стенкой с линейно изменяющейся высотой, на выходе равной $h_1 = 11, 9, 7$ или 5 мм, на котором в плоском конфузоре при любом угле раскрытия число Рейнольдса Re оставалось постоянным. За конфузором следовал участок постоянного сечения $L_2 = 700$ мм ($L_2/h_0 \approx 47$) и высотой, равной высоте конфузора на выходе h_1 , на котором устанавливалось развитое турбулентное, либо ламинарное течение при заданном числе Рейнольдса.

Для решения задачи, как и в [5] использовались уравнения неразрывности и движения в приближении узкого канала. Рассчитывались параметры течений при числах Рейнольдса $Re = 3000, 5000$ и 10000 . При определении числа Рейнольдса в качестве характерного размера принимался гидравлический диаметр, который для плоского канала равен его удвоенной высоте.

Для вычисления входящей в уравнение движения величины турбулентного трения $\rho\tau = -\rho\langle u'v' \rangle$ использована трехпараметрическая дифференциальная модель турбулентности [3], в которой уравнения переноса записаны для энергии турбулентности $E = 0.5\sum\langle u_i'^2 \rangle$, величины напряжения сдвига $\tau = -\langle u'v' \rangle$ и предложенного А.Н. Колмогоровым параметра $\omega = E/l^2$ (l – поперечный интегральный масштаб турбулентности).

При заданной длине конфузора параметрами задачи являются: тангенс угла наклона верхней стенки конфузора к оси потока $\beta = (h_0 - h_1)/L_k$, число Рейнольдса Re , параметр ускорения потока в конфузоре $K = (V/U^2) \cdot (dU/dx) = 2\beta/Re$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рис. 1, 2 приведены результаты расчёта изменения по длине продольной скорости на оси канала u_0 , отнесённой к местной среднерасходной скорости U , максимальной (в текущем сечении) интенсивности

турбулентности $e_m = \sqrt{E_{\max}}/U$ и коэффициента трения λ при числах Рейнольдса $Re=10000$ (рис. 1) и 3000 (рис. 2) для четырех значений параметра укоренения потока в конфузоре K .

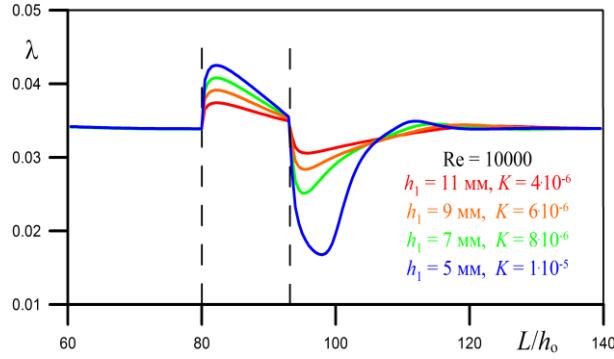
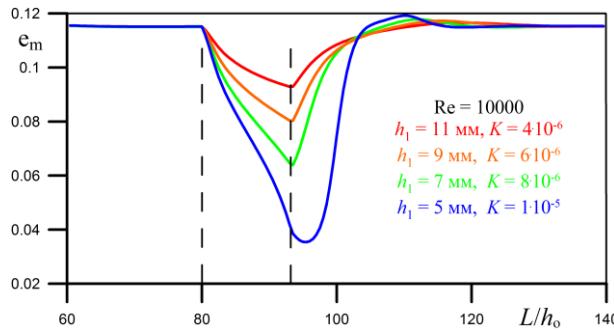
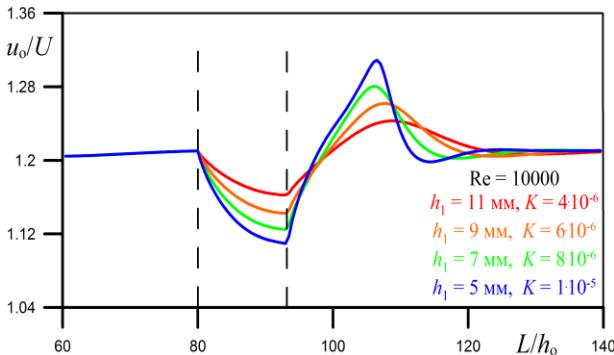


Рис. 1.

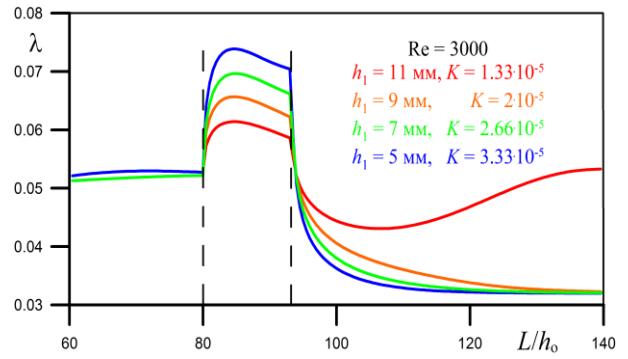
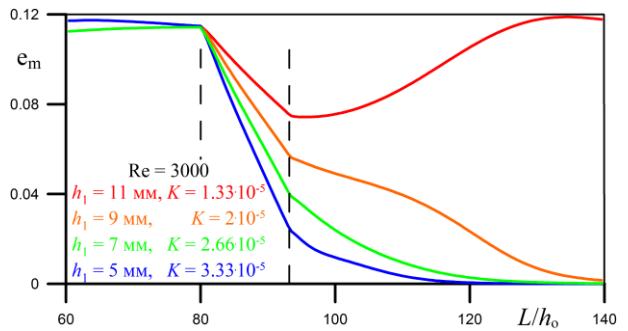
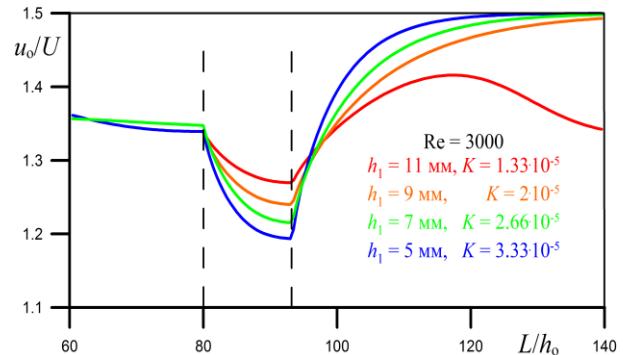


Рис. 2.

Величину K при течении в конфузоре принято считать параметром ламинаризации. Признаком ламинаризации исходного турбулентного течения будем считать выход на такой режим течения, при котором скорость на оси канала $u_0/U = 1.5$, коэффициент трения $\lambda = 96/Re$, энергия турбулентности E во всем сечении потока близка к нулю.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что при $Re = 10000$ турбулентное течение сохраняется во всех рассмотренных случаях. При $Re = 5000$ ламинаризация наступает только при сужении канала до высоты $h_1=5$ мм. При меньших наклонах верхней стенки турбулентное течение сохраняется. При $Re = 3000$ только при слабом наклоне верхней стенки (выходная высота $h_1=11$ мм) турбулентное течение сохраняется. При более сильном наклоне происходит полная ламинаризация. Величину K при течении в конфузоре принято считать параметром ламинаризации. Признаком ламинаризации исходного турбулентного течения будем считать выход на такой режим течения, при котором скорость на оси канала $u_0/U = 1.5$, коэффициент трения $\lambda = 96/Re$, энергия турбулентности E во всем сечении потока близка к нулю.

Проведенное численное исследование показало, что для рассмотренного конфузора длиной $L_k = 200$ мм ($L_k/h_0 \approx 13$) ламинаризация наступает при значении параметра $K \geq 2 \cdot 10^{-5}$. Дальнейшее уменьшение параметра K , при котором наступает ламинаризация, связано с увеличением длины конфузора, т.е. увеличением времени воздействия отрицательного градиента давления на течение. В подтверждение сказанного на рис. 3 для $Re = 5000$ представлено изменение максимальной интенсивности турбулентности $e_m = \sqrt{E_{\max}}/U$ для конфузоров различной длины $L_k = 200 - 600$ мм ($L_k/h_0 = 13 - 40$) при одном и том же наклоне стенки конфузора ($\beta = 0.02$), т.е. при одинаковом значении параметра $K=8 \cdot 10^{-6}$.

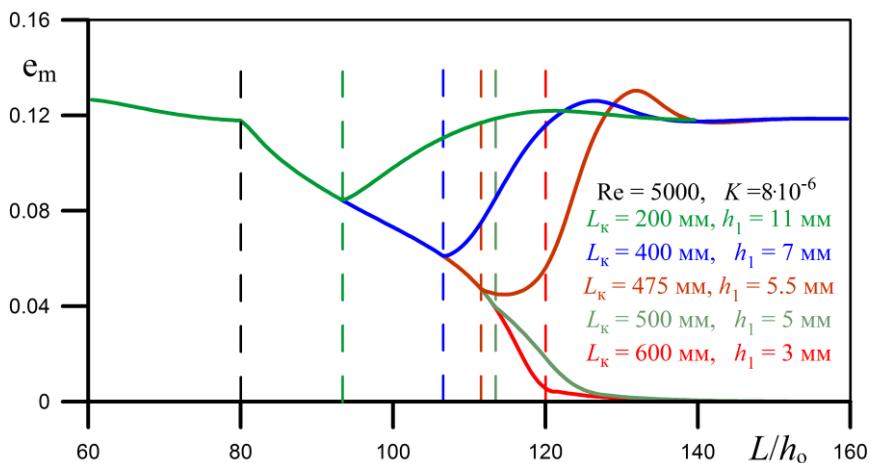


Рис. 3.

Результаты, представленные на рис. 3, показывают, что при значении $K = 8 \cdot 10^{-6}$ ламинаризация наступает в конфузоре длиной $L_k \geq 500\text{мм}$ ($L_k/h_0 \geq 33$). Можно предположить, что дальнейшего уменьшения значения параметра ламинаризации можно достичь, увеличивая длину конфузора. В этом случае следует ввести ещё один параметр задачи h_1/h_0 - отношение выходной и входной высот канала конфузора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадер Б.А., Яглом А.М. Влияние шероховатости и продольного градиента давления на турбулентные пограничные слои // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ. 1984. Т. 18. С. 3-111.
2. Луцик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Уравнения переноса для характеристик турбулентности: модели и результаты расчетов // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ. 1988. Т. 22. С. 3-61.
3. Луцик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 13.
4. Танака и др. Влияние ламинаризации потока и его последующей турбулизации на теплообмен в случае течения при малых числах Рейнольдса в канале, состоящем из конфузорной секции и следующей за ней секции с постоянным поперечным сечением // Теплопередача. 1982. Т. 104. № 2. С. 144-153.
5. Луцик В.Г., Сизов В.И., Якубенко А.Е. К использованию приближения узкого канала для расчета турбулентного течения в соплах жидкостных ракетных двигателей // ТВТ. 1993. Т. 31. № 5. С. 752-758.

АМПЛИТУДНЫЙ МЕТОД ПРЕДСКАЗАНИЯ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА НА СТРЕЛОВИДНОМ ТКРЫЛЕ

М.В. Устинов

Центральный Аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский

Расчет положения ламинарно-турбулентного перехода на стреловидном крыле является актуальной задачей в связи с разработкой пассажирских самолетов с ламинарным крылом. При достаточно большом угле стреловидности основной перехода к турбулентному режиму течения становится неустойчивость поперечного течения в пограничном слое. В этом случае доминирующим типом неустойчивых возмущений являются стационарные или нестационарные вихри ориентированные почти вдоль линий тока внешнего течения. Порождаемая ими модуляция продольной составляющей скорости в пограничном слое достигает 20-30% скорости потока при сохранении ламинарного режима течения. При этом возмущения заметно изменяют профиль средней скорости, что приводит к замедлению их роста вплоть до полного его насыщения. В [1] показано, что амплитуда вихрей неустойчивости в режиме насыщения может вообще не зависеть от их начального уровня. Эксперименты [2,3] продемонстрировали, что развитие как стационарных, так и нестационарных мод в пограничном слое стреловидного крыла существенно отклоняется от предсказаний линейной теории устойчивости на протяжении значительной части ламинарной области. Применение e^N метода для расчета точки перехода в таких условиях становится бессмысленным. Насыщение роста искусственно введенных в пограничный слой стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения может быть описано в рамках нелинейного метода параболических уравнений устойчивости (PSE) [4]. Однако этот подход до сих пор не применялся для описания «естественного» перехода из-за неопределенности начальных условий. Данная работа посвящена созданию такого амплитудного метода предсказания ламинарно-турбулентного перехода на стреловидном крыле вызванного одновременным воздействием турбулентности потока и шероховатости поверхности. При этом оба вида исходных возмущений имеют широкополосный спектр со случайными фазами.

Численный метод. Рассмотрим течение в пограничном слое на верхней поверхности скользящего крыла с хордой c' и углом стреловидности χ обтекаемого потоком вязкой несжимаемой жидкости со скоростью u_∞ . Введем безразмерные переменные используя в качестве масштабов характерную толщину пограничного слоя $\delta' = \sqrt{\nu c' / u_\infty}$ и u_∞ . Решение для продольной (вдоль хорды крыла) U , поперечной V и вертикальной W составляющих скорости в пограничном слое представим в виде

$$\{U, V, W\} = \{U_0, V_0, W_0\}(x, z) + \{u_s, v_s, w_s\}(x, y, z) + \{u_{ns}, v_{ns}, w_{ns}\}(x, y, z, t) \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое соответствует осредненному по размаху течению, второе – стационарным, а третье – нестационарным неустойчивым возмущениям. Нестационарные возмущения представим в виде конечной суммы ряда Фурье по поперечному волновому числу β и частоте ω , стационарные – в виде аналогичного ряда по β . В соответствии с формализмом PSE метода каждую гармонику в этих рядах представим в виде бегущей волны с медленно меняющимися амплитудой и продольным волновым числом.

$$\begin{aligned} \{u_s, v_s, w_s\} &= \sum_{m=-M}^M \{u_m^s, v_m^s, w_m^s\}(x, z) e^{i(\alpha_m^s(x) + \beta_m y)} \\ \{u_{ns}, v_{ns}, w_{ns}\} &= \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \{u_{mn}^{ns}, v_{mn}^{ns}, w_{mn}^{ns}\}(x, z) e^{i(\alpha_m^{ns}(x) + \beta_m y - \omega_n t)} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\beta_m = m\beta_h, \quad \omega_n = n\omega_h$$

В отличие от традиционного нелинейного PSE метода продольные волновые числа отдельных гармоник никак не связаны и находятся независимо из условия наименьшего изменения амплитуды каждой гармоники на шаге по времени. Количество гармоник M и N в рядах (2) предполагается большим. При этом шаги по волновому числу и частоте β_h и ω_h малы по сравнению с максимальными волновыми числами и частотой неустойчивых возмущений. В результате, при конечных среднеквадратичных стационарных и нестационарных возмущениях u_{rms}^s и u_{rms}^{ns} , амплитуда каждой гармоники в рядах (2) мала.

Подстановка решения (1), (2) в уравнения Навье-Стокса при учете медленной зависимости амплитуд и волновых чисел от x приводит к системе линейных параболизованных уравнений устойчивости для отдельных гармоник

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{v}_m^s}{\partial x} + \mathbf{L} \left(\mathbf{V}_0(x), \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial x}, \alpha(x), \beta_m, 0 \right) \mathbf{v}_m^s &= 0, \quad m = -M \dots M \\
 \frac{\partial \mathbf{v}_{mn}^s}{\partial x} + \mathbf{L} \left(\mathbf{V}_0(x), \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial x}, \alpha(x), \beta_m, \omega_n \right) \mathbf{v}_{mn}^s &= 0, \quad m = -M \dots M, n = -N \dots N \\
 \mathbf{v}_m^s(x, 0) = \mathbf{v}_m^s(x, \infty) &= 0 \quad \mathbf{v}_{mn}^{ns}(x, 0) = \mathbf{v}_{mn}^{ns}(x, \infty) = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

и уравнениям пограничного слоя для осредненного по размаху течения

$$\begin{aligned}
 U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{R} W_0 \frac{\partial U_0}{\partial z} &= u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} - NU_s - NU_{ns} \\
 U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{1}{R} W_0 \frac{\partial V_0}{\partial z} &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} - NV_s - NV_{ns} \\
 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial W_0}{\partial z} &= 0 \\
 U_0(x, 0) = V_0(x, 0) &= 0 \quad U_0(x, \infty) = u_e(x) \quad V_0(x, \infty) = \sin \chi
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $R = \sqrt{u_\infty c' / \nu}$ - число Рейнольдса.

В правые части уравнений импульса для осредненного течения входят нелинейные члены, описывающие влияние на него возмущений. Они аналогичны напряжениям Рейнольдса в турбулентном пограничном слое и имеют вид

$$\begin{aligned}
 NU_i &= \langle u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \rangle + \langle w_i \frac{\partial u_i}{\partial z} \rangle \\
 NU_i &= \langle u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \rangle + \langle w_i \frac{\partial v_i}{\partial z} \rangle
 \end{aligned} \tag{5}$$

где индекс i принимает значения s или ns , а угловые скобки означают осреднение по размаху. Следует отметить что нелинейные члены являются алгебраической суммой вкладов отдельных гармоник. Произведения гармоник с разными частотой и волновым числом не дают в них вклад вследствие случайности их фаз. Нелинейные члены (5) пропорциональны среднему квадрату возмущений. При описанном далее выборе начальных амплитуд гармоник они остаются конечными и стремятся к некоторым постоянным значениям (при заданном x) при стремлении количества гармоник к бесконечности.

Начальные условия для стационарных и нестационарных возмущений должны находиться из решения задач о восприимчивости пограничного слоя к шероховатости поверхности и турбулентности потока. Пульсации, например, продольной составляющей скорости, порождаемые турбулентностью потока, имеют широкополосный спектр со случайными фазами. Они характеризуются спектральной плотностью квадрата пульсаций скорости $F[u^2]_{\omega\beta}$. По своему физическому смыслу эта величина есть вклад пульсаций с волновыми числами от β до $\beta + \Delta\beta$ и частотами от ω до $\omega + \Delta\omega$ в их средний квадрат. Аналогичный смысл для интервалов от β_m до $\beta_m + \beta_h$ и от ω_n до $\omega_n + \omega_h$ имеет квадрат модуля амплитуды гармоники скорости в ряду для нестационарных возмущений. Значит имеет место следующая связь амплитуды гармоники со спектральной плотностью

$$|u_{mn}^{ns}| = \sqrt{F[u^2]_{\omega\beta} \beta_h \omega_h} \tag{6}$$

Для стационарных пульсаций аналогично имеем

$$|u_m^s| = \sqrt{F[u^2]_\beta \beta_h} \tag{7}$$

где $F[u^2]_\beta$ - плотность спектра квадрата пульсаций скорости по поперечному волновому числу.

Для нахождения возмущений, порождаемых турбулентностью, будем использовать подход, разработанный в [5]. Согласно нему, турбулентные пульсации могут иметь фазовые скорости,

отклоняющиеся от скорости потока. Часть из них имеет продольное, поперечные волновые числа и частоту совпадающие с соответствующими параметрами неустойчивых мод и могут их порождать за счет резонансного взаимодействия вблизи нейтральной точки. Для спектральной плотности пульсаций продольной скорости вблизи нейтральной точки в [5] получено следующее выражение

$$F[u^2]_{\omega\beta} = Tu^2 R^2(\omega, \beta) |u_0|^2(\omega, \beta, z) \quad (8)$$

где $R(\omega, \beta)$ - коэффициент восприимчивости, $u_0(\omega, \beta, z)$ - нормированная на единицу собственная функция. Способ вычисления коэффициента восприимчивости для мод неустойчивости поперечного течения аналогичен описанному в [5] способу его нахождения для волн Толлмина-Шлихтинга.

Из (6) и (8) имеем выражение для начальной амплитуды гармоник в их нейтральных точках x

$$u_{mn}^{ns}(x_{0mn}) = TuR(\omega_n, \beta_m) u_o(\omega_n, \beta_m, z) \sqrt{\beta_h \omega_h} \quad (9)$$

Начальные условия для стационарных возмущений порождаемых шероховатостью поверхности также задавались в нейтральной точке для каждой гармоники. Их вид аналогичен (9), но вместо степени турбулентности подставлялось отношение степени шероховатости r_z к местной толщине вытеснения пограничного слоя δ^* . Коэффициент восприимчивости к шероховатости $R_s(\beta) \equiv R_s$ считался не зависящим от волнового числа. Учитывая одномерность спектра стационарных возмущений $\sqrt{\beta_h \omega_h}$ заменялся на $\sqrt{\beta_h}$ (см. (7)). В результате имеем следующие начальные условия для гармоник стационарных возмущений

$$u_m^s(x_{0m}) = \left(\frac{r_z}{\delta^*} \right) R_s u_o(\beta_m, z) \sqrt{\beta_h} \quad (10)$$

Начальные условия для осредненного по размаху течения ставились в сечении $x = x_{00}$, расположенным до нейтральных точек всех возмущений. Они соответствовали решению уравнений пограничного слоя (4) без нелинейных членов.

Ламинарно-турбулентный переход на стреловидном крыле происходит в результате вторичной неустойчивости пограничного слоя модулированного стационарными и нестационарными возмущениями. В показано, что критерием ее возникновения является достижение суммой амплитуд стационарных и нестационарных возмущений величины 0.34. В описанном здесь методе расчета невозможно определить амплитуду пульсаций скорости из-за неопределенности фаз отдельных гармоник. Характеристиками стационарных и нестационарных возмущений являются их среднеквадратичные амплитуды a_{rms}^s и a_{rms}^{ns} . Предполагая, что амплитуда возмущений в $\sqrt{2}$ раз больше их среднеквадратичного значения получим критерий начала ламинарно-турбулентного перехода

$$a_{rms}^s + a_{rms}^{ns} = 0.34 / \sqrt{2} \quad (11)$$

В эксперименте [2] с которым сравнивались результаты расчетов, за точку перехода принималось место, где коэффициент перемежаемости равен 0.5. Для оценки определяемого таким образом положения перехода, координата его начала, найденная из (11) умножалась на 1.2.

Результаты расчетов. Целью исследования было моделирование результатов эксперимента [2] по исследованию влияния турбулентности потока и шероховатости поверхности на ламинарно-турбулентный переход, вызванный неустойчивостью поперечного течения. Для простоты в расчетах задавался степенной закон распределения скорости внешнего течения

$$u_e = x^{0.34} \cos \chi$$

который достаточно хорошо описывал экспериментальную зависимость. Угол стреловидности $\chi = 45^\circ$ си хорда крыла $c' = 0.5m$ также соответствовали условиям эксперимента [2]. В эксперименте при различных значениях Tu и r_z находилась скорость потока, при которой точка перехода находилась на 90%

хорды. В разных опытах она менялась от 18 до 25 м/с. Кроме того, в [2] приведены зависимости амплитуд стационарных и нестационарных возмущений от x для некоторых значений Tu и r_z при скорости потока 19 м/с. Поэтому для расчетов выбрано это значение скорости, а изменение параметров Tu и r_z сдвигало точку перехода вверх или вниз по потоку. Сравнение с данными [2] проводилось по числу Рейнольдса перехода при $\gamma = 0.5$. Коэффициент восприимчивости к шероховатости R_s был выбран так, чтобы получить наблюдаемую в эксперименте амплитуду стационарных возмущений в начале измерений при $x' / c' = 0.4$ для режима $r_z = 6 \mu m$, $Tu=0.08\%$. Восприимчивость к турбулентности потока рассчитывалась для ее интегрального масштаба $L = 50\delta$.

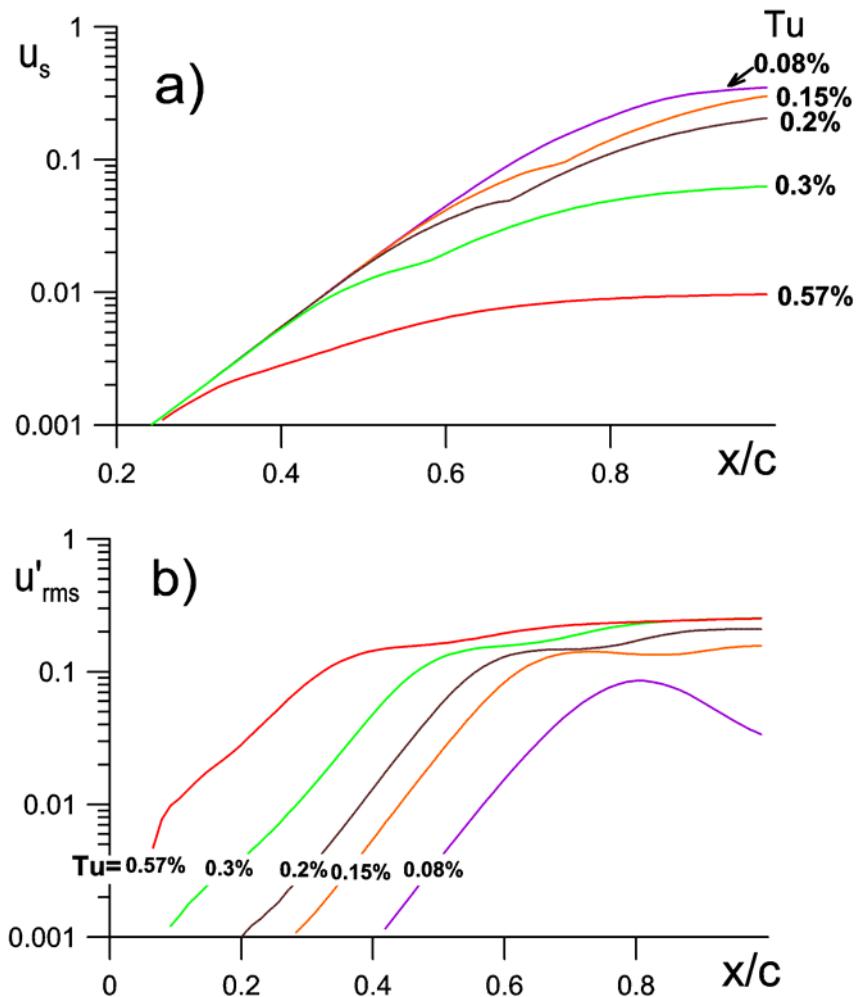


Рис.1. Зависимости амплитуды стационарных возмущений (а) и среднеквадратичной амплитуды нестационарных возмущений (б) от продольной координаты при $r_z = 6 \mu m$ и разных уровнях турбулентности

Полученные в расчетах зависимости амплитуды стационарных возмущений $a_s = \sqrt{2}a_{rms}^s$ и среднеквадратичной амплитуды нестационарных возмущений от продольной координаты при $r_z = 6 \mu m$ и разных уровнях турбулентности построены на рис. 1. Их сравнение с данными эксперимента показывает, что в расчете уровень нестационарных возмущений в точке начала измерений $x' / c' = 0.4$ при малых уровнях турбулентности меньше, а при высоких – больше, чем в эксперименте. Однако разница не слишком велика и их отношение варьируется от 0.3 до 1.3. Удовлетворительное описание расчетами начального уровня нестационарных возмущений свидетельствует о хорошей точности описания восприимчивости к турбулентности потока. Дальнейший характер развития возмущений также качественно соответствует данным эксперимента: при $Tu=0.08\%$ доминируют стационарные возмущения, при $Tu=0.57\%$ – нестационарные, при $Tu=0.15\%$ их амплитуды в точке перехода примерно одинаковы.

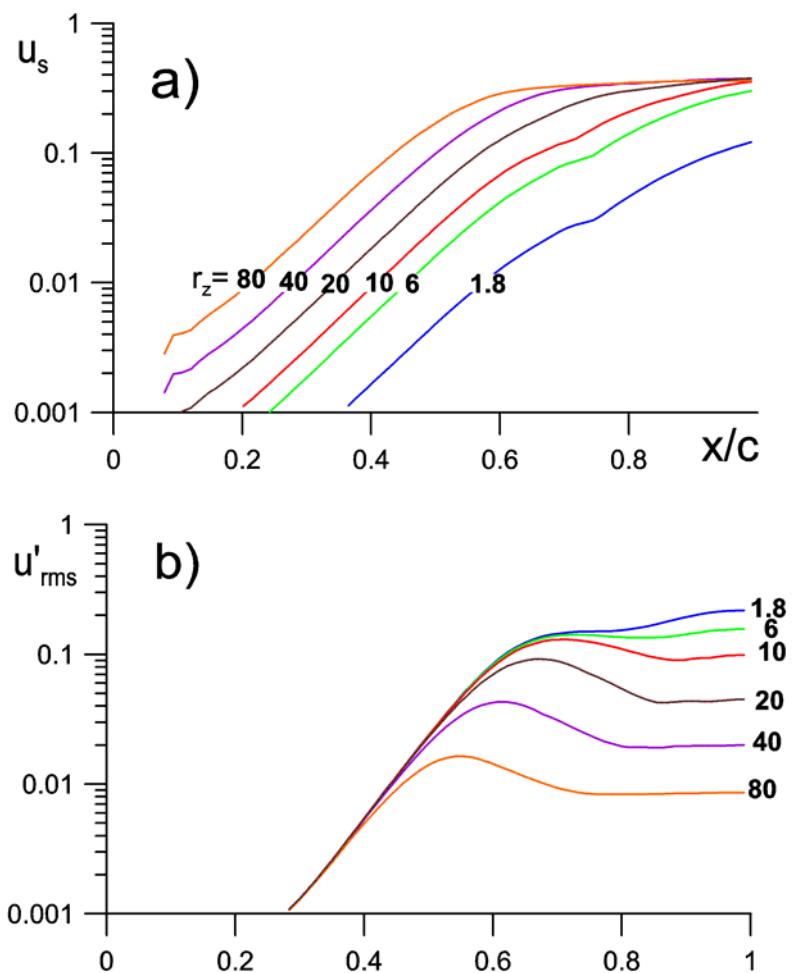


Рис.2. Зависимости амплитуды стационарных возмущений (а) и среднеквадратичной амплитуды нестационарных возмущений (б) от продольной координаты при $Tu=0.15\%$ и разной шероховатости поверхности

Аналогичные результаты расчетов, полученные при одинаковой степени турбулентности $Tu=0.15\%$ и разной шероховатости представлены на рис.2. Они также качественно соответствуют экспериментальным данным. Следует отметить, что на обоих рисунках виден эффект насыщения роста возмущений: нестационарных на рис. 1 и стационарных на рис.2.

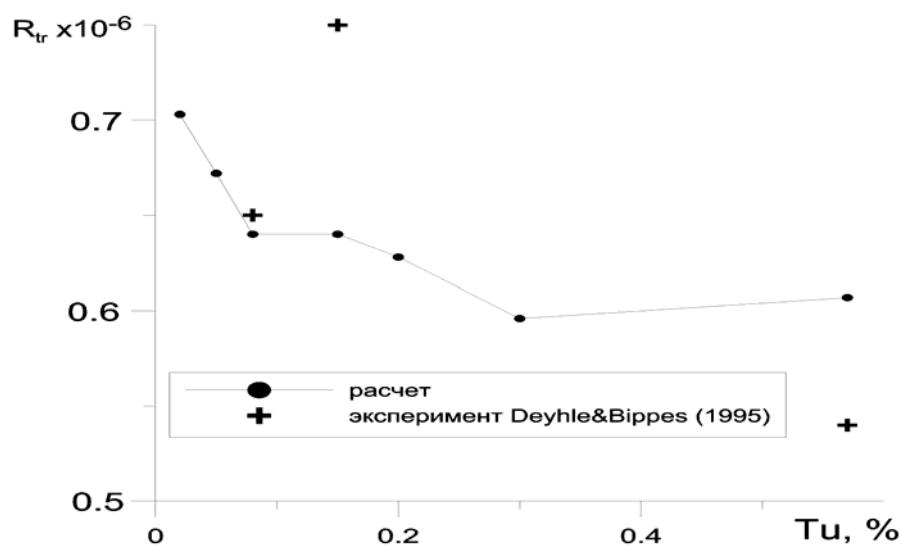


Рис. 3. Расчетная (-●-) и экспериментальная (+) зависимости числа Рейнольдса перехода от степени турбулентности потока при шероховатости поверхности $r_z = 6 \mu m$

Зависимость числа Рейнольдса перехода от степени турбулентности при $r_z = 6 \mu m$ найденная из критерия (11) с поправочным коэффициентом 1.2 построена на рис. 3. На нем также крестами показаны данные эксперимента. Совпадение результатов расчета и эксперимента не очень хорошее, в частности расчет не описывает наблюдавшееся в [2] увеличение числа Рейнольдса перехода при увеличении степени турбулентности с 0.08% до 0.15%. Однако следует иметь в виду, что данные для $Tu=0.08\%$ и 0.15% получены на разных установках при разном распределении давления по поверхности модели.

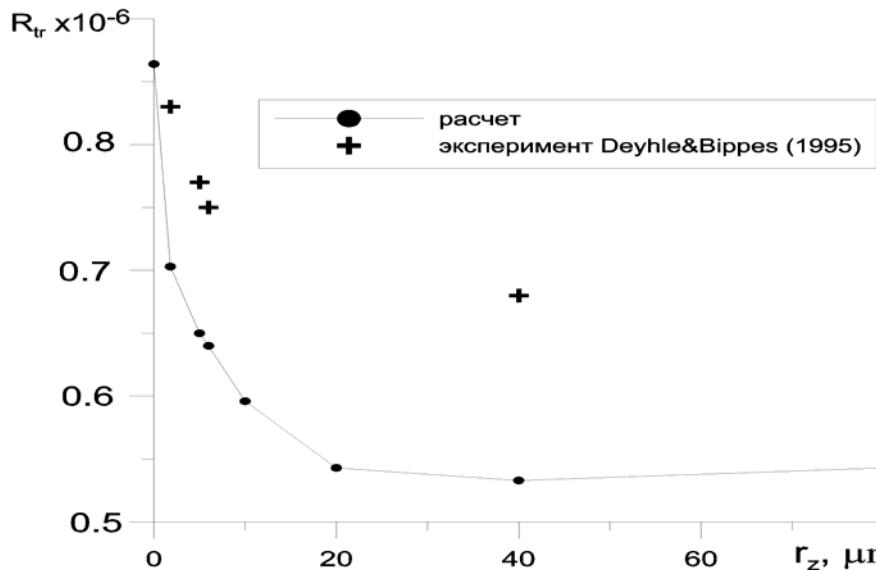


Рис. 4. Расчетная (-•-) и экспериментальная (+) зависимости числа Рейнольдса перехода от шероховатости поверхности при степени турбулентности потока 0.15%.

Аналогичные результаты в виде зависимости положения перехода при $Tu=0.15\%$ от шероховатости поверхности показаны на рис. 4. Здесь формы расчетной и экспериментальной зависимостей $R_{tr}(r_z)$ очень похожи, однако расчет занижает число Рейнольдса перехода примерно на 15%. Это расхождение можно объяснить недостаточной точностью выбора эмпирического коэффициента восприимчивости к шероховатости, либо неточным воспроизведением зависимости скорости внешнего течения от x в расчете. В целом разработанный амплитудный метод дает достаточно хорошее предсказание зависимости положения перехода на скользящем крыле от турбулентности потока и шероховатости поверхности при минимальном наборе эмпирических констант. Он достаточно эффективен и может быть положен в основу будущих инженерных методов предсказания перехода.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00705).

ЛИТЕРАТУРА.

1. 70. Reibert M.S., Saric W.S., Carrillo R.B.J., Chapman K.L. Experiments in nonlinear saturation of stationary crossflow vortices in a swept-wing boundary layer//AIAA paper №96-0184, 1996.
2. Deyhle H., Bippes H. Disturbance growth in an unstable three-dimensional boundary layer and its dependence on environmental conditions/J. Fluid Mech., 1996, v.316,h.73-113.
3. Качанов Ю.С. Сценарии возникновения турбулентности на скользящем крыле// XI съезд по фунд. проблемам прикл. и теор. механики. Сборник докладов. с. 1744-1746.
4. 76. Haynes T.S., Reed H.L. Simulation of swept-wing vortices using nonlinear parabolized stability equations// J. Fluid Mech. 2000. v.405. p. 325.
5. М.В. Устинов. Генерация волн Толлмина-Шлихтинга турбулентностью потока// Изв. РАН. МЖГ. 2014, №4, с. 58-72
6. Бородулин В.И. Комбинированные пороговые амплитуды – универсальный критерий перехода к турбулентности трехмерного пограничного слоя// XI съезд по фунд. проблемам прикл. и теор. механики. Сборник докладов. с. 553-554.

**О ВОЗМОЖНОСТИ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С ПОМОЩЬЮ
УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА С МОДИФИЦИРОВАННЫМИ ЛЕВЫМИ
ЧАСТЬЯМИ - ПОЛНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ.**

O.N. Хатунцева

г. Королев, РКК “Энергия” им. С.П. Королева, МФТИ

**ON A FEASIBILITY OF THE TURBULENCE DESCRIPTION VIA NAVIER-STOKES
EQUATIONS WITH THE MODIFIED LEFT PARTS – TOTAL DERIVATIVES OVER TIME.**

O.N.Khatuntseva

Korolev, RSC “Energia” named after S.P.Korolev, MIPT

В работе разрабатывается метод описания стохастических процессов для динамических систем, не имеющих выделенных состояний равновесия. Метод позволяет описывать такие системы в расширенном фазовом пространстве с помощью дифференциальных уравнений в частных производных, без привлечения стохастических дифференциальных уравнений.

На основании этого метода модифицируются уравнения Навье-Стокса, а именно, полная производная по времени дополняется членом, характеризующим изменение скорости за счет стохастической составляющей исследуемого процесса.

В такой постановке решается задача течения жидкости в трубе кругового сечения. Находятся два решения, одно из которых, соответствует ламинарному режиму течения, второе – турбулентному.

Первое решение характеризуется параболическим профилем скорости течения жидкости, второе - логарифмическим профилем скорости с множителем, обратно пропорциональным постоянной Кармана, который определяется в настоящей работе аналитически.

Найдено небольшое отличие первого и второго решений непосредственно у стенки трубы. Это отличие позволило аналитически, с помощью метода описания «разрывных» функций, найти минимально возможное значения числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения.

**1. Метод описания стохастических процессов с помощью дифференциальных
уравнений в частных производных.**

Наиболее удобной формой для описания сложных физических, в том числе, и

стохастических процессов, безусловно, следует признать использование дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. В первую очередь это связано с возможностью совместного решения таких уравнений, объединенных в системы уравнений и, соответственно, возможностью рассмотрения в совокупности отдельных элементов рассматриваемой системы и подпроцессов, происходящих в ней.

Существующие способы описания стохастических процессов с помощью дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных можно разделить на три основных класса.

Во-первых – это уравнение Фоккера-Планка [1], которое представляет собой уравнение в частных производных и описывает эволюцию плотности вероятности во времени. Использование этого уравнения ограничено случаями, когда вероятность изменения исследуемого случайного параметра на величину δ быстро убывает с увеличением δ . В этом случае можно ограничиться рассмотрением лишь диссипативного и диффузионного членов уравнения в рассматриваемом фазовом пространстве, что и определяет замкнутый вид уравнения Фоккера-Планка.

Во-вторых, это соотношения в форме уравнений Ланжевена, которые состоят из обычного детерминированного дифференциального уравнения и дополнительной части, описывающей случайный процесс [2].

Третья форма дифференциальных уравнений напоминает уравнения Ланжевена, но записанных с использованием стохастических дифференциалов (уравнение Ито): $dx = a(x,t)dt + b(x,t)\delta W$, где $a(x,t)$, $b(x,t)$ - коэффициенты сноса и волатильности; δW - бесконечно малый винеровский “шум”. В стандартном винеровском процессе $\delta W = \varepsilon \sqrt{dt}$, где $\varepsilon \sim N(0,1)$ - гауссова переменная с нулевым средним и единичной дисперсией. В зависимости от способа задания коэффициентов $a(x,t)$ и $b(x,t)$ выделяют такие процессы, как броуновское и логарифмическое блуждание, процесс Орнштейна-Уленбека и другие [3].

Уравнения в форме Ланжевена и уравнения в форме Ито представляют собой особый вид дифференциальных уравнений – стохастические дифференциальные уравнения. Проблема решения таких уравнений в общем виде - задача нетривиальная из-за наличия в них дифференциалов марковских случайных процессов и, как следствие, производных по времени в половинной степени [4]-[6]. Тем не менее, в частных случаях задача разрешима с использованием Леммы Ито. Однако даже в этих случаях остается открытый вопрос о том, в каком именно виде необходимо задать коэффициенты $a(x,t)$ и $b(x,t)$ для описания конкретной динамической системы, находящейся вдали от положения

равновесия, так, чтобы правильно учитывать коллективные явления взаимодействия подсистем на разных масштабах и возможные скрытые параметры, оказывающие влияние на систему. Важной открытой проблемой является совместное решение дифференциальных уравнений в частных производных (например, уравнений Навье-Стокса) и стохастических дифференциальных уравнений.

Все это затрудняет использование стохастических дифференциальных уравнений при описании стохастических процессов.

От уравнений Ланжевена и Ито можно перейти к уравнениям типа Фоккера-Планка, но лишь в случае, когда характерное время корреляции случайной “силы” много меньше времени релаксации стохастической системы за счет диссипативной “силы” [2]. Таким требованиям удовлетворяют истинно марковские (без скрытых параметров) процессы. В этом случае при усреднении случайных величин можно ограничиться рассмотрением двух первых моментов, что и приведет к ограничению членов уравнения в частных производных только диссипативным и диффузионным членами.

В данной работе разрабатывается метод описания стохастических процессов с помощью уравнений в частных производных в динамических системах, не имеющих ограничений, связанных с выводом уравнений типа Фоккера-Планка. А именно, метод предназначен для описания стохастических систем, не имеющих выделенных состояний равновесия, когда реализация случайной величины исследуемого параметра влечет за собой изменение функции плотности вероятности, причем такое изменение не обязано быть малой величиной.

В разрабатываемом методе не используется методология стохастических дифференциальных уравнений, что позволяет избежать связанных с ними трудностей и неопределенностей, описанных выше.

Построение математической модели для описания стохастических систем, не имеющих выделенных состояний равновесия.

Рассмотрим временной процесс, описываемый реализуемыми в фиксируемые моменты времени t_i ($i = 0, 1, 2, \dots, k - 1, k$) параметрами $\tilde{q}_i = \tilde{q}(t_i)$. Причем множество реализованных значений $\tilde{Q}(\tilde{q}) = \{\tilde{q}\}$ является подмножеством множества $Q(q) = \{q\}$ всех возможных значений исследуемого параметра q : $\tilde{Q}(\tilde{q}) \subset Q(q)$. Реализация параметра \tilde{q}_i в момент времени t_i происходит случайным образом в соответствии с плотностью вероятности $\varphi_i(q)$.

Будем считать, что также как и для марковских процессов, состояние исследуемого процесса будет определяться только предыдущим моментом времени, однако при этом не будет исключаться возможность влияния скрытых параметров. То есть, исследуемый процесс будем считать скрытой марковской моделью [7]-[8]. Скрытым фактором в случае рассмотрения стохастических систем, не имеющих выделенных состояний равновесия, будет выступать “стремление” системы изменить свою функцию плотности вероятности, так, чтобы в следующий момент времени минимизировать отклонение ее среднего значения от значения параметра, реализованного в предыдущий момент времени. В отличие от используемой в настоящее время техники дискретного описания скрытых марковских моделей для определения вероятности реализации исследуемого параметра в фиксированные моменты времени в соответствии с принятой матрицей перехода из одного состояния в другое, либо с помощью методики применения стохастических дифференциальных уравнений, рассматриваемый в настоящей работе подход будет основываться на возможности описания стохастических систем со скрытым параметром с помощью уравнений в частных производных в расширенном фазовом пространстве.

Остановимся на построении математической модели такой системы. Построим расширенное пространство переменных $(t, q; \varphi)$, в котором плоскость исследуемого процесса (t, q) является проекцией пространства $(t, q; \varphi)$ (см. рис.1). Будем искать в пространстве $(t, q; \varphi)$ такие зависимости $\varphi = \varphi(t, q) = \varphi(\tilde{q}(t), q)$, которые связывают между собой значения реализованных величин \tilde{q} в различные моменты времени.

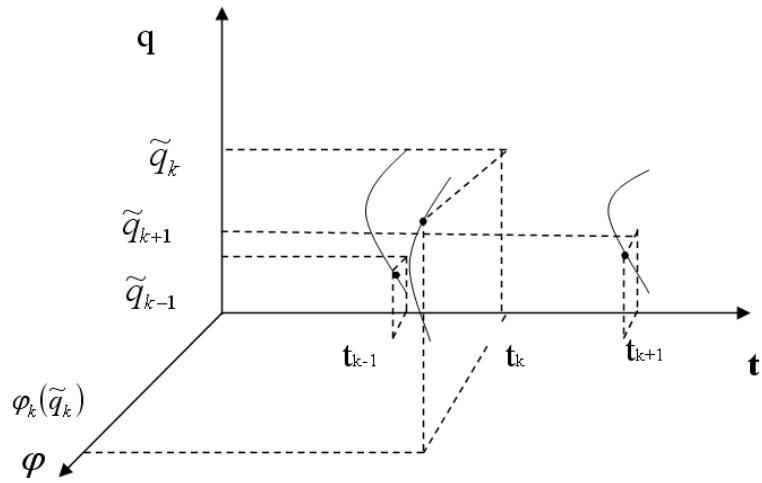


Рис.1

В расширенном пространстве $(t, q; \varphi)$ ведется поиск таких зависимостей $\varphi = \varphi(t, q)$, связывающих между собой значения реализованных в моменты времени t_k величин \tilde{q}_k , которые удовлетворяют соотношениям: $\varphi(t, q)|_{t=t_k} = \varphi_k(q)|_{q=\tilde{q}_k} \equiv \varphi_k(\tilde{q}_k)$.

Предположим, что в каждый фиксируемый момент времени t_i , существует нормированная функция $\varphi(t_i, q) = \varphi_i(q)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(q) dq = 1$, которая описывает вероятность реализации значения \tilde{q}_i . В точке t_i реализованный параметр \tilde{q}_i представим в виде:

$$\tilde{q}_i = \langle q \rangle_i + (\Delta q)_i, \quad (1.1)$$

где $(\Delta q)_i$ ($\Delta q \in C^1(R)$) - отличие реализованного в момент времени t_i , значения \tilde{q}_i от среднего значения возможных реализаций величин q :

$$\langle q \rangle_i = \int_{-\infty}^{+\infty} q \varphi_i(q) dq. \quad (1.2)$$

Поскольку рассматриваются стохастические системы марковского типа, не имеющие выделенных состояний равновесия, то предполагается, что в них в каждый фиксированный момент времени система “знает” только о реализованном в предыдущий момент времени значении исследуемого параметра (например, при анализе фондового рынка - о стоимости ценных бумаг) и не “подозревает” о существовании никаких других “реперных точек”. Поэтому, реализация на текущем шаге значения \tilde{q} ведет на следующем шаге к такому изменению функции $\varphi(q)$ и, соответственно, среднего значения $\langle q \rangle$, что это среднее значение “стремится” сравняться по величине с реализованным значением \tilde{q} , и следующая реализация исследуемого параметра происходит случайным образом в соответствии с новой плотностью вероятности. Если же, на текущем шаге, реализуется значение \tilde{q} , в точности равное среднему: $\tilde{q} = \langle q \rangle$, то при переходе к следующему шагу функция $\varphi(q)$ не изменяется и реализация значения \tilde{q} на следующем шаге происходит с вероятностью, определяемой плотностью вероятности, полученной на текущем шаге.

Для таких систем найдем зависимость, связывающую плотность вероятности $\varphi_k(q)$, реализуемую в момент времени t_k , с реализованными в момент времени t_{k-1} значением \tilde{q}_{k-1} и плотностью вероятности $\varphi_{k-1}(q)$.

Описывая исследуемый процесс в пространстве $(t, q; \varphi)$, заменим в выражениях (1.1)-(1.2) параметры, реализуемые в фиксированные моменты времени t_i , параметрами, реализуемыми в любой произвольный момент времени t : $\tilde{q}_i = \tilde{q}(t_i) \rightarrow \tilde{q}(t)$, $(\Delta q)_i = (\Delta q)(t_i) \rightarrow (\Delta q)(t)$, $\varphi_i(q) = \varphi(t_i, q) \rightarrow \varphi(t, q)$. При этом считаем, что нормировка

функции $\varphi(t, q)$ остается постоянной во времени. Исходя из выражений (1.1)-(1.2), запишем

$$\tilde{q} = \int_{-\infty}^{+\infty} q \varphi(t, q) dq + (\Delta q)(t).$$

Продифференцируем обе части полученного выражения по времени:

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} q \varphi(t, q) dq + \frac{d(\Delta q)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} q \frac{d\varphi(t, q)}{dt} dq + \frac{d(\Delta q)}{dt}.$$

Используя свойство постоянства нормировки функции $\varphi(t, q)$: $\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, q) dq = 0$,

вычтем из правой части полученного соотношения нулевой член:

$$\kappa \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa \frac{d\varphi(t, q)}{dt} dq, \text{ где } \kappa = \text{const}, \text{ и перепишем выражение в виде:}$$

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \kappa) \frac{d\varphi(t, q)}{dt} dq + \frac{d(\Delta q)(t)}{dt}.$$

Поскольку не будут рассматриваться никакие другие механизмы изменения функции φ от времени, кроме вышеописанного – при реализации текущего значения параметра \tilde{q} , то в линейном приближении выражение для производной функции φ по времени будет иметь вид:

$$\frac{d\varphi(t, q)}{dt} = \frac{d\varphi(\tilde{q}(t), q)}{dt} = \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \frac{d\tilde{q}}{dt}.$$

Используя его, мы исключаем возможность, например, самопроизвольного изменения функции φ . При этом, выражение для производной $d\tilde{q}/dt$, приобретает вид:

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \kappa) \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \frac{d\tilde{q}(t)}{dt} dq + \frac{d(\Delta q)(t)}{dt}. \quad (1.3)$$

Рассмотрим проекцию описываемого процесса из пространства $(t, q; \varphi)$ на плоскость (t, q) . На плоскости (t, q) в фиксируемые моменты времени t_i (где $i = 0, 1, 2, \dots, k-1, k$ – номера фиксируемых моментов) реализуются значения параметра $\tilde{q}(t_i) = \tilde{q}_i$. Функция $\varphi(t, q) \in C \times C^2(R)$ при проецировании на плоскость (t, q) в точках t_i должна удовлетворять соотношениям: $\varphi(t, q)|_{t=t_i} = \varphi_i(q)|_{q=\tilde{q}_i}$, $(\partial \varphi(t, q)/\partial q)|_{t=t_i} = (d\varphi_i(q)/dq)|_{q=\tilde{q}_i}$.

Поскольку рассматриваемый процесс на данном масштабе рассмотрения зависит только от предыдущего момента времени, то до момента времени t_{k-1} , отстоящего на шаг от исследуемого момента времени t_k , реализованные значения параметра \tilde{q} нас

интересовать не будут. Интерполируя величину \tilde{q}_{k-1} , как постоянное значение, на интервал $t < t_{k-1}$ и считая, что на интервале $t_{k-1} \leq t < t_k$ значение параметра \tilde{q} линейно изменяется от значения \tilde{q}_{k-1} до величины $\langle q \rangle_k$, получим кусочно-гладкую функцию $\tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t)$

на интервале $t < t_k$, такую, что $\tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t)|_{t \leq t_{k-1}} = \tilde{q}_{k-1} = \text{const}$;

$$\tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t)|_{t_{k-1} \leq t < t_k} = \tilde{q}_{k-1} + (\langle q \rangle_k - \tilde{q}_{k-1}) \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}.$$

Будем также считать, что на интервале $t_k \leq t < t_{k+1}$ значение параметра \tilde{q} , которое должно реализоваться в момент времени t_k , линейно изменится от значения \tilde{q}_k до величины $\langle q \rangle_{k+1}$. Экстраполируя эту величину, как постоянное значение, на интервал $t \geq t_{k+1}$, получим кусочно-гладкую функцию $\tilde{\tilde{q}}_k(t)$ для $t \geq t_k$, причем, $\tilde{\tilde{q}}_k(t)|_{t=t_k} = \tilde{q}_k = \text{const}$;

$$\tilde{\tilde{q}}_k(t)|_{t_k \leq t < t_{k+1}} = \tilde{q}_k + (\langle q \rangle_{k+1} - \tilde{q}_k) \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}; \quad \tilde{\tilde{q}}_k(t)|_{t \geq t_{k+1}} = \langle q \rangle_{k+1}.$$

В результате такого представления, функцию $\tilde{q}(t)$ на плоскости (t, q) , можно

записать в виде разрывной функции: $\tilde{q}(t) = \begin{cases} \tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t), & \text{если } t < t_k \\ \tilde{\tilde{q}}_k(t), & \text{если } t \geq t_k \end{cases}$. Здесь $\tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t) \in C(R)$,

$\tilde{\tilde{q}}_k(t) \in C(R)$ - кусочно-гладкие ветви функции $\tilde{q}(t)$ на плоскости (t, q) .

Для того чтобы описать на плоскости (t, q) в окрестности точки t_k разрывную функцию $\tilde{q}(t)$, в частности, найти производную $d\tilde{q}/dt$, линейно экстраполируем функцию $\tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t)$ на интервал $t \geq t_k$ и линейно интерполируем функцию $\tilde{\tilde{q}}_k(t)$ на интервал $t < t_k$. Введем дополнительную функцию H , которая будет принимать значение равное нулю везде до точки разрыва и равное единице везде после точки разрыва. Такая функция может иметь вид:

$$H = \frac{\tilde{q}(t) - \tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t)}{\tilde{\tilde{q}}_k(t) - \tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t)} = U_-(t - t_{k-1}) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < t_k \\ 1, & \text{при } t \geq t_k \end{cases}, \quad \text{где } \tilde{q}(t) = \begin{cases} \tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t), & \text{если } t < t_k \\ \tilde{\tilde{q}}_k(t), & \text{если } t \geq t_k \end{cases}. \quad (1.4)$$

Производная функции H по t будет равна

$$dH/dt = dH/d(t - t_k) = \delta(t - t_k), \quad \text{где } \delta \text{ - дельта-функция.}$$

В линейном приближении изменения функции $\varphi(t, q)$ в окрестности точки t_k , можно записать:

$$\left(\partial\varphi(t,q)\right|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\Big)_{t=t_k}\cdot(t-t_k)=\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}\cdot(q-\tilde{q}_k).$$

Если в точке $q = \tilde{q}_k$ выполняется соотношение: $(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k} = 0$, то будет равна нулю и производная $\left(\partial\varphi(t,q)\right|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\Big)_{t=t_k}$, то есть в следующий момент времени t_{k+1} плотность вероятности не изменится, и реализация следующего значения параметра \tilde{q} на плоскости (t,q) произойдет случайным образом в соответствии с плотностью вероятности $\varphi_{k+1}(q) = \varphi_k(q)$. Если же $(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k} \neq 0$, то $\left(\partial\varphi(t,q)\right|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\Big)_{t=t_k} \neq 0$ и

$$t - t_k = \frac{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}}{\left(\partial\varphi(t,q)\right|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\Big)_{t=t_k}}(q - \tilde{q}_k), \text{ поэтому,}$$

$$\frac{dH}{dt} = \delta(t - t_k) = \delta\left(\frac{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}}{\left(\partial\varphi(t,q)\right|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\Big)_{t=t_k}}(q - \tilde{q}_k)\right) = \left|\frac{\left(\partial\varphi(t,q)\right|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\Big)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}}\right| \delta(q - \tilde{q}_k). \quad (1.5)$$

Чтобы придерживаться “единообразия” описания изменения функции $\varphi(t,q)$, можно, не теряя общности, не рассматривать те моменты времени t_j , когда равны нулю производные $(d\varphi_j(q)/dq)_{q=\tilde{q}_j}$, $\left(\partial\varphi(t,q)\right|_{q=\tilde{q}_j}/\partial t\Big)_{t=t_j}$, а рассматривать следующие за ними моменты времени t_{j+1} . Как будет показано ниже, полученные итерационные выражения для функции $\varphi(t,q)$, в линейной постановке задачи, не будут зависеть от шага времени Δt , и поэтому, такие временные переходы не являются запрещенными.

Используя зависимости (1.4)-(1.5), а так же выбирая в качестве константы κ значение $\kappa = \langle q \rangle_k$, перепишем выражение (1.3) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{q}}{dt} &= \frac{d(\Delta q)}{dt} + \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \langle q \rangle_k) \frac{\partial\varphi(\tilde{q},q)}{\partial\tilde{q}} \frac{\partial\tilde{q}}{\partial H} \frac{dH}{dt} dq = \\ &= \frac{d(\Delta q)}{dt} + \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \langle q \rangle_k) \frac{\partial\varphi(\tilde{q},q)}{\partial\tilde{q}} (\tilde{q}_k(t) - \tilde{q}_{k-1}(t)) \left| \frac{\left(\partial\varphi(t,q)\right|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\Big)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \delta(q - \tilde{q}_k) dq = \\ &= \frac{d(\Delta q)}{dt} + (\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k) (\tilde{q}_k(t) - \tilde{q}_{k-1}(t)) \left| \frac{\left(\partial\varphi(t,q)\right|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\Big)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \left(\frac{\partial\varphi(\tilde{q},q)}{\partial\tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k}. \end{aligned}$$

Значение константы $\kappa = \langle q \rangle_k$, выбиралось из соображения, чтобы в том случае, если $\tilde{q}_k = \langle q \rangle_k$, изменение параметра \tilde{q} в следующий момент времени не зависело бы от изменения функции φ , то есть выполнялось бы соотношение: $d\tilde{q}/dt = d(\Delta q)/dt$.

Осредняя левую и правую часть полученного выражения по плотности вероятности

$\varphi_k(q)dq$, получим соотношение:

$$\left\langle \frac{d\tilde{q}}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d(\Delta q)}{dt} \right\rangle + (\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k) \left(\tilde{\tilde{q}}_k(t) - \tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t) \right) \left| \frac{(\partial \varphi(t, q))_{q=\tilde{q}_k} / \partial t}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right|_{t=t_k} \left| \frac{(\partial \varphi(\tilde{q}, q))}{\partial \tilde{q}} \right|_{q=\tilde{q}_k}. \quad (1.6)$$

Здесь $\langle \cdot \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot \varphi_k(q) dq$.

Обратимся к левой части выражения (1.6). Используя выражения (1.4)-(1.5), получим:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\tilde{q}}{dt} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{q}}{dt} \varphi_k(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial H} \frac{dH}{dt} \varphi_k(q) dq = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{\tilde{q}}_k(t) - \tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t)) \left| \frac{(\partial \varphi(t, q))_{q=\tilde{q}_k} / \partial t}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \delta(q - \tilde{q}_k) \varphi_k(q) dq = \\ &= (\tilde{\tilde{q}}_k(t) - \tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t)) \left| \frac{(\partial \varphi(t, q))_{q=\tilde{q}_k} / \partial t}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k}. \end{aligned}$$

Значение $\langle d(\Delta q)/dt \rangle$ в правой части выражения (1.6) в приближении линейной интерполяции изменения по времени функции $\varphi(t, q)$ и ее производных на интервале $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, можно так же найти, используя выражения (1.4)-(1.5). Для этого заметим, что в случае рассмотрения любой неизменной во времени функции $\varphi(q)$, имеют место соотношения:

$$\langle \Delta q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta q \varphi(q) dq = 0 \quad \text{и} \quad \left\langle \frac{d(\Delta q)}{dt} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\Delta q)}{dt} \varphi(q) dq = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta q \varphi(q) dq = 0.$$

Поэтому ненулевое значение величины $\langle d(\Delta q)/dt \rangle$ на интервале $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, может быть обусловлено только изменением функции $\varphi(t, q)$ во времени. Следовательно, среднее значение производной $\langle d(\Delta q)/dt \rangle$, можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d(\Delta q)}{dt} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\Delta q)}{dt} \varphi_k(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\Delta q)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi(t, q)}{\partial t} \varphi_k(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \left(\frac{1}{\partial \varphi(t, q) / \partial q} \right) \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \frac{dH}{dt} \varphi_k(q) dq = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \left(\frac{1}{\partial \varphi(t, q) / \partial q} \right) \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} (\tilde{q}_k(t) - \tilde{q}_{k-1}(t)) \left| \frac{(\partial \varphi(t, q))_{q=\tilde{q}_k} / \partial t}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \delta(q - \tilde{q}_k) \varphi_k(q) dq = \\
&= \left(\Delta \left(\frac{1}{\partial \varphi(t, q) / \partial q} \right) \right)_{q=\tilde{q}_k} (\tilde{q}_k(t) - \tilde{q}_{k-1}(t)) \left| \frac{(\partial \varphi(t, q))_{q=\tilde{q}_k} / \partial t}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} \varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k}.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (1.6), приходим к зависимости:

$$\varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k} = \left(\Delta \left(\frac{1}{\partial \varphi(t, q) / \partial q} \right) \right)_{q=\tilde{q}_k} \varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k} \left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} + (\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k) \left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k}.$$

В случае линейного приближения изменения функции на интервале времени $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ производная $(\partial \varphi(\tilde{q}, q) / \partial \tilde{q})_{q=\tilde{q}_k}$ может быть записана в виде:

$$\left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} \approx \frac{\varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q)_{q=\tilde{q}_k}}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}}.$$

Тогда полученное выражение принимает вид:

$$\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1} = (\varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q)_{q=\tilde{q}_k}) \left(\left(\Delta \left(\frac{1}{\partial \varphi(t, q) / \partial q} \right) \right)_{q=\tilde{q}_k} + \frac{\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k}{\varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k}} \right).$$

Из которого, в приближении линейной интерполяции, и учитывая непрерывность изменения по времени функции φ : $(\partial \varphi(t, q) / \partial q)_{t=t_{k-1}, q=\tilde{q}_k} = (d\varphi_{k-1}(q) / dq)_{q=\tilde{q}_k}$ и $(\partial \varphi(t, q) / \partial q)_{t=t_k, q=\tilde{q}_k} = (d\varphi_k(q) / dq)_{q=\tilde{q}_k}$, получаем:

$$\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1} = (\varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q)_{q=\tilde{q}_k}) \left(\left(\frac{1}{(d\varphi_k(q) / dq)_{q=\tilde{q}_k}} - \frac{1}{(d\varphi_{k-1}(q) / dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right) + \frac{\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k}{\varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k}} \right). \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7), связывающее реализованный в момент времени t_k параметр \tilde{q}_k с реализованным параметром в момент времени t_{k-1} , а также с плотностью вероятности распределения и ее производной на текущем шаге, с плотностью вероятности распределения и ее производной на предыдущем шаге (все в точке \tilde{q}_k), является инвариантным относительно изменения временных масштабов рассмотрения исследуемых систем. В самом деле, при выводе соотношения (1.7) выбирался произвольный шаг по времени Δt , однако его величина не вошла в окончательное выражение.

Тем не менее, масштаб времени Δt опосредовано через значение функции

$\varphi_{k-1}(q)|_{q=\tilde{q}_k}$ и значение производной $(d\varphi_{k-1}(q)/dq)|_{q=\tilde{q}_k}$ влияет на значения прогнозируемых в следующий момент времени величин $\varphi_k(q)|_{q=\tilde{q}_k}$, $(d\varphi_k(q)/dq)|_{q=\tilde{q}_k}$ и $\langle q \rangle_k$. Действительно, зафиксировав реализованное на текущем k -ом шаге значение \tilde{q}_k и взяв в качестве предыдущего, $(k-1)$ -го шага точку, отстоящую от точки k не на расстояние Δt , а на расстояние $n\Delta t$, где n - любое положительное число, мы получим другие эмпирические значения \tilde{q}_{k-1} , $\varphi_{k-1}(q)|_{q=\tilde{q}_k}$ и $(d\varphi_{k-1}(q)/dq)|_{q=\tilde{q}_k}$, а следовательно (в соответствие с уравнением (1.7)), и другие значения функции $\varphi_k(q)|_{q=\tilde{q}_k}$, ее производной $(d\varphi_k(q)/dq)|_{q=\tilde{q}_k}$ и величины $\langle q \rangle_k$ на текущем k -ом шаге. Полученные таким образом новые значения $\varphi_k(q)|_{q=\tilde{q}_k}$, $(d\varphi_k(q)/dq)|_{q=\tilde{q}_k}$ и $\langle q \rangle_k$ будут являться характеристиками нового (большего, если $n > 1$, и меньшего, если $n < 1$) временного масштаба рассмотрения системы. Однако такое влияние масштаба времени Δt не носит регулярного характера на величины прогнозируемых параметров – их одинаковые значения могут быть получены на разных временных масштабах рассмотрения. Отсутствие параметра Δt в соотношении (1.7) ведет к тому, что при таком подходе отпадает необходимость специально вводить случайный процесс, описывающий вероятностные по времени скачки изменения системы, как это делают, например, при описании пуассоновских процессов [3].

Значение \tilde{q}_k в соотношении (1.7) напрямую не зависит от величины \tilde{q}_{k-1} , то есть на плоскости (t, q) параметр \tilde{q}_i ведет себя как случайная величина. Учитывая, что $\langle q \rangle_k$ и $\langle q \rangle_{k-1}$ – являются константами, характеризующие распределения φ_k и φ_{k-1} , уравнение (1.7) можно записать в виде:

$$\frac{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}}{\varphi_k(q - \langle q \rangle_k)|_{q=\tilde{q}_k}} = \left(1 - \frac{\varphi_{k-1}(q - \langle q \rangle_{k-1})|_{q=\tilde{q}_k}}{\varphi_k(q - \langle q \rangle_k)|_{q=\tilde{q}_k}} \right) \left(\frac{1}{\left(\frac{d\varphi_k(q - \langle q \rangle_k)}{d(q - \langle q \rangle_k)} \right)|_{q=\tilde{q}_k}} - \frac{1}{\left(\frac{d\varphi_{k-1}(q - \langle q \rangle_{k-1})}{d(q - \langle q \rangle_{k-1})} \right)|_{q=\tilde{q}_k}} \right) + \frac{\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k}{\varphi_k(q - \langle q \rangle_k)|_{q=\tilde{q}_k}}.$$

Поскольку $\tilde{q}_k = q|_{q=\tilde{q}_k}$, то во всех выражениях для производных $(d\varphi_{k-1}(q - \langle q \rangle_{k-1})/d(q - \langle q \rangle_{k-1}))|_{q=\tilde{q}_k}$, $(d\varphi_k(q - \langle q \rangle_k)/d(q - \langle q \rangle_k))|_{q=\tilde{q}_k}$ и для функций $\varphi_{k-1}(q - \langle q \rangle_{k-1})|_{q=\tilde{q}_k}$, $\varphi_k(q - \langle q \rangle_k)|_{q=\tilde{q}_k}$, входящих в полученное соотношение, переменную q можно заменить новой переменной \tilde{q}_k . Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}}{\varphi_k(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k)} = \left(1 - \frac{\varphi_{k-1}(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_{k-1})}{\varphi_k(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k)}\right) \left(\left(\frac{1}{d\varphi_k(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k)/dp_k} - \frac{1}{d\varphi_{k-1}(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_{k-1})/dp_{k-1}} \right) + \frac{\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k}{\varphi_k(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k)} \right).$$

Обозначив $\tilde{q}_k - \langle q \rangle_i := p_i$ (где $i = k-1, k$), запишем:

$$\frac{p_k - (\tilde{q}_{k-1} - \langle q \rangle_k)}{\varphi_k(p_k)} = \left(1 - \frac{\varphi_{k-1}(p_{k-1})}{\varphi_k(p_k)}\right) \left(\left(\frac{1}{d\varphi_k(p_k)/dp_k} - \frac{1}{d\varphi_{k-1}(p_{k-1})/dp_{k-1}} \right) + \frac{p_k}{\varphi_k(p_k)} \right). \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8), связывающее в двух точках t_{k-1} и t_k значения параметров p_{k-1} и p_k (которые представляют собой отклонения величины \tilde{q}_k от средних значений $\langle q \rangle$ в этих точках), а также плотности вероятности реализации значений этих параметров, также как и уравнение (1.7), является основным уравнением задачи определения динамики стохастического процесса в линейном приближении для систем, не имеющих выделенного состояния равновесия. Оба этих уравнения необратимы по времени.

Уравнение (1.8) имеет аналитические решения в двух предельных случаях. Во-первых, когда реализованное значение на предыдущем шаге не просто “стремится” стать средним значением на шаге текущем, а становится им (в случае рассмотрения мартингалов): $\tilde{q}_{k-1} = \langle q \rangle_k$. Во-вторых, в случае больших значений производных:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} \approx \frac{\varphi_k(q)|_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q)|_{q=\tilde{q}_k}}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}} \gg 1 \quad (\text{или} \quad \frac{\varphi_k(p_k) - \varphi_{k-1}(p_{k-1})}{p_k - (\tilde{q}_{k-1} - \langle q \rangle_k)} \gg 1), \quad \text{когда небольшое}$$

изменение реализованного значения параметра \tilde{q} приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности.

Метод описания стохастических процессов, в которых небольшое изменение реализованного значения приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности.

Уравнение (1.8), можно записать в виде:

$$\frac{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}}{\varphi_k(p_k) - \varphi_{k-1}(p_{k-1})} = \frac{1}{d\varphi_k(p_k)/dp_k} - \frac{1}{d\varphi_{k-1}(p_{k-1})/dp_{k-1}} + \frac{p_k}{\varphi_k(p_k)}. \quad (1.9)$$

В данной работе рассмотрим только второй предельный случай, в котором уравнение (1.8) (или (1.9)) имеет аналитические решения. А именно, когда небольшие изменения реализованного значения исследуемого стохастического параметра на предыдущем шаге приводят к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности на шаге текущем:

$$\frac{\varphi_k(p_k) - \varphi_{k-1}(p_{k-1})}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}} = \frac{\varphi_k(p_k)|_{p_k=\tilde{q}_k-\langle q \rangle_k} - \varphi_{k-1}(p_{k-1})|_{p_{k-1}=\tilde{q}_k-\langle q \rangle_{k-1}}}{p_k - (\tilde{q}_{k-1} - \langle q \rangle_k)} \gg 1.$$

К такому же предельному случаю можно перейти, если не рассматривать фиксированные моменты времени, а выбирать каждый раз в качестве t_{k-1} такие временные шаги, на которых уже реализовались интересующие нас (или близкие к ним) значения стохастического параметра \tilde{q}_{k-1} : $\tilde{q}_{k-1} \approx \tilde{q}_k$ и при этом $\varphi_k(p_k)|_{p_k=\tilde{q}_k-\langle q \rangle_k} \neq \varphi_{k-1}(p_{k-1})|_{p_{k-1}=\tilde{q}_{k-1}-\langle q \rangle_{k-1}}$. Эта процедура не является запрещенной, в связи с инвариантностью шага по времени (см. выше).

В любом из этих случаев можно пренебречь членом, стоящим в левой части уравнения (1.9) и перейти к соотношению:

$$p_k = \varphi_k(p_k) \left(\frac{1}{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}} - \frac{1}{d\varphi_k/dp_k} \right). \quad (1.10)$$

Опуская в последнем выражении индексы k , перепишем его в виде:

$$\frac{1}{d\varphi/dp} = \frac{1}{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}} - \frac{p}{\varphi}, \quad \text{где } p = \tilde{q} - \langle q \rangle, \quad p_{k-1} = \tilde{q} - \langle q \rangle_{k-1}. \quad (1.11)$$

Зафиксируем значение параметра \tilde{q} , которое может реализоваться на текущем шаге, плотность вероятности реализации которого, мы хотим найти. Изменяемыми величинами будут плотность вероятности реализации величины \tilde{q} на текущем шаге – функция

$\varphi(p) = \varphi(q)|_{q=\tilde{q}}$, среднее значение $\langle q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} q \varphi(q) dq$ и переменная $p = \tilde{q} - \langle q \rangle$. Значения

функции $\varphi_{k-1}(p_{k-1}) = \varphi_{k-1}(q)|_{q=\tilde{q}}$ и ее производной $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} = (d\varphi_{k-1}(q)/dq)|_{q=\tilde{q}}$ на предыдущем $(k-1)$ -м шаге, в этом случае, являются константами (как уже реализованные величины). Тогда соотношение (1.11) является обыкновенным дифференциальным уравнением. Его решениями, в случае $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} \neq 0$, являются функции вида:

$$\varphi(p) = p d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} \pm \sqrt{p^2 (d\varphi_{k-1}/dp_{k-1})^2 + \alpha}, \quad (1.12)$$

где $\alpha \neq 0$ – константа.

В качестве плотности вероятности принимаются только действительные положительные значения выражения (1.12).

При больших значениях p функция $\varphi(p)$ имеет две асимптоты, одна из которых растет пропорционально первой степени p , а другая – наоборот, спадает как $const/p$:

$$\varphi(p)|_{p \rightarrow \infty} = \begin{cases} 2|d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} \cdot p| \\ \frac{1}{2} \left| \frac{\alpha}{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}} \cdot \frac{1}{p} \right| \end{cases}. \quad (1.13)$$

Проблема конечной нормировки негаусовских функций, типа выражений (1.12)-(1.13), может быть разрешена благодаря ограниченности диапазона области определения значений переменных q или p , по которым эти функции интегрируются. За пределами таких диапазонов значения функций считаются нулевыми. Если рассматривать конкретные физические системы, то ограничения на диапазоны значений переменных q или p часто накладываются естественным образом. Например, если $\varphi(p)$ - вероятность реализации возможных значений стоимости акций на торгах какого-то предприятия в рассматриваемый момент времени, то можно смело отбросить слишком большие и слишком малые значения величин p , а не считать вероятность их реализации малой, но конечной величиной. То же самое можно сказать в случае, когда функция $\varphi(p)$ описывает вероятность реализации пульсаций скорости или энергии в потоке жидкости. Сверху ограничения будут определяться, как максимум, величиной полной кинетической энергии рассматриваемой системы, а снизу – как минимум, флуктуациями термодинамических величин. Хотя реальный диапазон значений будет еще уже.

В случае неограниченного диапазона величин q или p (например, при рассмотрении в качестве этих переменных пространственных координат), для значений этих переменных, превышающих некоторые критические значения, могут реализовываться только решения, описываемые вторым выражением соотношения (1.13), то есть функцией типа $\varphi(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \text{const}/p$. Конечная нормировка таких функций может быть разрешена методом ренормгрупп.

Если рассмотреть распределение реализованных величин p в промежутке времени от $t - \Delta t$ до t , где интервал Δt такой, что в течение этого времени происходит n ($n \rightarrow \infty$) реализаций параметра p , причем эти реализации происходят в соответствии с различными плотностями вероятности, являющихся решениями уравнения (1.12), то, в соответствии с Центральной Предельной Теоремой Линдеберга, функция распределения величин p на этом интервале будет стремиться к нормальному (Гаусовскому) распределению для “умеренных” значений p . Для достаточно больших значений p , можно считать, что функция распределения, так же как и плотность вероятности, $\sim 1/p$. То есть рассматриваемый стохастический процесс со скрытыми параметрами имеет степенной (с “тяжелым хвостом”) характер распределения.

Параметр α , являющийся характеристикой рассматриваемой стохастической системы, может быть определен из решения уравнения (1.12) на предыдущих, уже реализованных, временных шагах. Однако, такой метод определения плотности

вероятности довольно сложный, поэтому откажемся от прямого использования формулы (1.12) и построим замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию траекторий исследуемого параметра в фазовом стохастическом пространстве.

Получение замкнутой системы дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию траекторий исследуемого параметра в фазовом пространстве для стохастических процессов, в которых небольшое изменение реализованного значения приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности.

Вновь считая фиксированными значения \tilde{q} , а, следовательно, и $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}$, проведем следующие операции. Введя обозначение:

$$d\varphi/dp = \chi \quad (1.14)$$

и, продифференцировав выражение (1.11) по величине p , получим: $\frac{\varphi^2}{\chi^3} \frac{d\chi}{dp} = \frac{\varphi}{\chi} - p$.

Обозначим:

$$\frac{\varphi^2}{\chi^3} \frac{d\chi}{dp} = \eta, \quad (1.15)$$

тогда

$$d\chi/dp = \eta\chi^3/\varphi^2. \quad (1.16)$$

Продифференцировав величину η по p и учитывая (1.11), (1.14), (1.15), получим выражение:

$$d\eta/dp = -\eta\chi/\varphi. \quad (1.17)$$

Выражения (1.14), (1.16) и (1.17) задают замкнутую автономную систему уравнений:

$$\begin{cases} d\eta/dp = -\eta\chi/\varphi \\ d\chi/dp = \eta\chi^3/\varphi^2 \\ d\varphi/dp = \chi \end{cases}. \quad (1.18)$$

Сделав замену переменных: $\varphi = e^s$, получим: $\chi e^{-s} = \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dp} = \mu$ (где $s = \ln \varphi$ - параметр, среднее отрицательное значение от которого, является энтропией рассматриваемой системы S : $S = -\int \varphi(p) \ln \varphi(p) dp = -\int s(p) \varphi(p) dp$ [1]). От системы уравнений (1.18) можно перейти к новой системе уравнений:

$$\begin{cases} d\eta/dp = -\eta\mu \\ d\mu/dp = \eta\mu^3 - \mu^2 \\ ds/dp = \mu \end{cases}. \quad (1.19)$$

Энтропия стохастической системы $S = -\int \varphi(p) \ln \varphi(p) dp$ одновременно является энтропией в термодинамическом смысле, если под величиной \tilde{q} , а, следовательно, и $p = \tilde{q} - \langle q \rangle$ понимать обобщенные координаты, импульсы, энергии частиц жидкости или газа (или набор этих параметров) в фазовом пространстве, описываемом функцией распределения $\varphi(p)$ [1].

Из системы (1.19) видно, что первые два уравнения являются взаимосвязанными и не зависят от третьего. Поэтому в том случае, если интересуют только изменения параметров η и μ , достаточно первых двух уравнений системы, а именно,

$$\begin{cases} d\eta/dp = -\eta\mu \\ d\mu/dp = \eta\mu^3 - \mu^2 \end{cases}. \quad (1.20)$$

Система уравнений (1.20) описывает эволюцию траекторий в фазовом стохастическом пространстве $(\eta, \mu; p)$.

Покажем, как можно воспользоваться разработанной теорией для описания макропроцессов. Предположим, что физическую систему, описываемую в детерминированном приближении функцией $f(t, \vec{x})$: $df/dt = \hat{A} f$ (\hat{A} - оператор, вид которого зависит от конкретной задачи, определяющий протекание процессов обмена выделенной области с внешней средой и влияние на эту область внешних воздействий), необходимо исследовать с большей степенью детализации - с учетом стохастических процессов. Например, для учета влияния необратимых процессов диссипации во внутренних степенях свободы в жидкости при ее турбулизации. В этом случае предлагается расширить пространство переменных: $(t, \vec{x}) \rightarrow (t, \vec{x}, p)$ и рассматривать функцию $f(t, \vec{x}, p)$. При описании динамики такого процесса полную производную $df/dt = \partial f / \partial t + \sum_i \dot{x}_i \partial f / \partial x_i$ следует заменить новой полной производной, имеющей вид:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{ds} \frac{ds}{dS} \frac{dS}{dt}. \quad (1.21)$$

Основная проблема, возникающая при таком расширении фазового пространства, состоит в поиске производной $dp/dt = dp/ds \cdot ds/dS \cdot dS/dt$. Покажем, как ее найти.

Производная dS/ds , входящая в соотношение (1.21), может быть выражена в виде:

$$\frac{dS}{ds} = - \int \frac{d(s\varphi)}{ds} dp = - \int \varphi dp - \int s \frac{\partial \varphi}{\partial s} dp = -1 - \int s\varphi dp = -1 + S, \quad (1.22)$$

где $S = - \int \varphi(p) \ln \varphi(p) dp = - \int \varphi(p) s(p) dp$ - энтропия стохастической системы.

Энтропия является аддитивной величиной и ее отсчет можно начинать с любого уровня. В самом деле, обозначив $S - 1 = S_1$ (см. (1.22)), найдем производную от этой величины: $dS_1/ds = d(S - 1)/ds = dS/ds = -1 + S = S_1$. Переобозначив $S_1 = S$, получим, $dS/ds = S$. Поэтому, принимая во внимание третье уравнение системы (1.19), выражение для полной производной от функции f можно переписать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} \frac{1}{\mu} \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (1.23)$$

Параметр $\frac{S}{dS/dt}$ в соотношение (1.23) характеризует временной масштаб τ , на

котором происходит необратимое изменение состояния системы за счет стохастических возмущений и на котором рассматривается исследуемая система (по всем масштабам меньше этого производится усреднение стохастических возмущений).

Зависимость (1.23) совместно с системой уравнений (1.20), соотношением:

$\frac{S}{dS/dt} = \tau$, а также с уравнениями, задающими изменение полной производной функции

$f(t, \vec{x}; p)$: $df/dt = \hat{A}f$, будут описывать динамику процесса рассматриваемой системы с учетом стохастических процессов:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{1}{\tau\mu} \frac{\partial f}{\partial p} = \hat{A}f \\ d\mu/dp = \eta\mu^3 - \mu^2 \\ d\eta/dp = -\eta\mu \end{cases}. \quad (1.24)$$

Иногда расширение фазового пространства, за счет учета влияния дополнительной переменной p (см. первом уравнении системы (1.24)), может приводить к существенному изменению вида функции f , являющейся ее решением. При этом, зависимость полученной функции от стохастической переменной может быть слабой, так что теряет смысл рассмотрение двух последних уравнений этой системы. В этих случаях вместо системы уравнений (1.24) более удобно использовать уравнение, полученное на основе

первого уравнения системы (1.24) с учетом соотношений: $s = \ln \varphi$, $\mu = \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dp}$,

$$\mu \delta p = \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dp} \delta p = \delta(\ln \varphi) = \delta s :$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial s} = \hat{A} f . \quad (1.25)$$

Используя систему уравнений (1.24) или уравнение (1.25) можно определять зависимости $f(t, \vec{x}, p; \tau)$ (где $p = \tilde{q} - \langle q \rangle$) или $f(t, \vec{x}, s; \tau)$, которые будут описывать рассматриваемые стохастические процессы на масштабе рассмотрения τ в расширенном фазовом пространстве.

Таким образом, расширение пространства переменных: $(t, q) \rightarrow (t, q; \varphi)$ и рассмотрение в этом пространстве непрерывно изменяющейся плотности вероятности $\varphi = \varphi(t, q)$, позволило получить соотношение, связывающее отклонение случайной величины от средних значений реализаций случайных величин в двух временных точках, а также плотности вероятности этих реализаций для стохастических систем, не имеющих выделенных состояний равновесия.

В предельном случае описания стохастических систем: когда небольшое изменение реализованного значения приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности, получены соотношения, описывающие плотность вероятности реализации исследуемого параметра в заданный момент времени.

Получена система уравнений, описывающих эволюцию траекторий отклонений исследуемого параметра от среднего значения в фазовом стохастическом пространстве.

2. Использование метода расширения фазового пространства с использованием стохастической переменной для описания турбулентности.

Течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения описывается системой уравнений Навье-Стокса. Единственным аналитическим решением этой задачи в стационарном случае является выражение, которое при любых значениях числа Рейнольдса задает параболический профиль скорости [2], что соответствует ламинарному режиму течения. Это решение является устойчивым в линейном приближении (для бесконечно малых возмущений) [10]-[11]. Данный вывод плохо соотносится с огромным количеством экспериментов в трубах, в которых при достаточно больших числах Рейнольдса практически невозможно “удержать” жидкость в ламинарном состоянии - происходит потеря устойчивости и переход к другим режимам течения жидкости [12]-[14].

Установившемуся турбулентному режиму течения жидкости, при больших значениях числа Рейнольдса, соответствует логарифмический профиль скорости. Такой режим течения является ярким примером недетерминированных – стохастических процессов.

Можно предположить, что проблема несоответствия теоретических и экспериментальных данных в случае реализации стохастических гидродинамических режимов течения заключена в том, что второй закон Ньютона и сформулированные на его основе уравнение движения жидкости (уравнение Навье-Стокса) предполагают отсутствие внутренних степеней свободы в выделенном объеме жидкости, которые могут участвовать в необратимом диссипативном преобразовании энергии или импульса, передаваемых рассматриваемой системе в результате воздействия на нее внешних сил. В случае рассмотрения турбулентной (стохастической) системы это условие не выполняется. Случайные разномасштабные возмущения в среде могут рассматриваться, как дополнительные внутренние степени свободы, возбуждаемые в жидкости, способные уменьшать часть макровоздействия, направленного на условно выделенный исследуемый объем жидкости.

Задача описания стохастических систем с помощью уравнений в частных производных, как было показано выше, а также в работе [15] (где решалась задача распространения акустических возмущений в стохастической среде), может быть разрешена путем расширения исследуемого фазового пространства, а именно, за счет введения дополнительной координаты p , характеризующей изменение стохастического состояния системы, а также параметра, характеризующего масштаб (временной и/или пространственный) рассмотрения такой системы.

Перейдем к описанию течения жидкости в расширенном фазовом пространстве с учетом стохастических степеней свободы.

При исследовании течения жидкости в трубе кругового сечения с помощью уравнений Навье-Стокса в расширенном фазовом пространстве ограничимся рассмотрением пульсаций только в поперечном сечении. Тогда уравнение сохранения

импульса: $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V}$ с учетом уравнения неразрывности $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, а также

добавочного члена: $\dot{s} \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial V}{\partial s}$ для описания стохастических пульсаций скорости при стационарном (в среднем) течении вязкой несжимаемой жидкости (см. уравнение (1.25)), можно переписать в виде соотношения:

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\Delta P}{\rho l} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right),$$

где $V = V(r, s)$ - компонента скорости в поперечном направлении в расширенном стохастическом пространстве с дополнительной переменной s , ΔP - падение давления на длине трубы l , ν - вязкость жидкости, τ - принятый временной масштаб рассмотрения системы.

Как будет показано ниже, использование уравнения типа (5) вместо системы уравнений (1.24) является оправданным для данной задачи.

Полученное уравнение будем решать, используя граничные условия – “прилипание” жидкости на стенке трубы в отсутствии пульсаций: $V(r, s) \Big|_{\substack{r=R \\ s=0}} = 0$, а также равенство нулю, в отсутствии пульсаций, производной скорости по координате r в центре тубы: $\partial V(r, s)/\partial r \Big|_{\substack{r=0 \\ s=0}} = 0$.

В отсутствии стохастических возмущений зависимость скорости течения жидкости в трубе кругового сечения от радиуса имеет вид параболической функции (см. [9]):

$$U(r) = \frac{R^2 \Delta P}{4\nu d} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) = U_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right), \text{ где } R \text{ - радиус трубы, } U_0 = \frac{R^2 \Delta P}{4\nu d} \text{ - значение}$$

скорости течения жидкости на продольной оси трубы при ламинарном режиме.

Уравнение, описывающее скорость течения жидкости с учетом временного масштаба рассмотрения системы, можно упростить, введя безразмерный коэффициент γ ($0 < \gamma \leq 1$) - параметр, характеризующий пространственный масштаб рассмотрения системы, и воспользовавшись соотношением: $\tau = \frac{\gamma R}{U_0} = \frac{\gamma R^2}{\nu Re}$, где $Re = \frac{RU_0}{\nu} = \frac{R^3 \Delta P}{4\nu^2 d}$ - число Рейнольдса. Подставляя значение τ и вводя безразмерную переменную $\tilde{V}(r, s) = V(r, s(p))/U_0$, приходим к уравнению:

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial s} = \frac{\gamma R^2}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} \right) + \frac{4\gamma}{Re}.$$

Из полученного выражения видно, что если число Рейнольдса мало, то абсолютные значения слагаемых, стоящих в правой части, могут оказаться значительно больше абсолютного значения члена, стоящего в левой части. В этом случае членом $\partial \tilde{V}/\partial s$ можно пренебречь, в результате, решение сводится к параболической зависимости скорости течения жидкости в трубе кругового сечения, характерного для ламинарного режима. В общем случае, когда нет необходимой информации о величине производной $\partial \tilde{V}/\partial s$, ни

левой, ни правой частью уравнения пренебрегать нельзя - необходимо решать полное уравнение в частных производных.

Сделав в нем замену: $\tilde{V}(r,s) = u(r,s) - (r/R)^2$, запишем

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\gamma R^2}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Решая это уравнение методом разделения переменных: $u(r,s) = F(r)N(s)$, получим два соотношения:

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{ds} = a \quad \text{и} \quad \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{dF}{d\tilde{r}} \right) = \frac{a \operatorname{Re}}{\gamma} \tilde{r} F, \quad (2.1)$$

где $\tilde{r} = r/R$, a - произвольная константа при любых фиксированных значениях параметров γ и Re . Если значения этих параметров не фиксированы, то a может быть функцией, зависящей от них: $a = a(\gamma, \operatorname{Re})$.

Нетрудно заметить, что нулевое значение константы a соответствует решению:

$\frac{V(r,s)}{U_0} = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 + b \ln\left(\frac{r}{R}\right) + c$ (где b и c - константы), которое также является решением

уравнений Навье-Стокса для трубы кругового течения без учета дополнительных стохастических переменных [9] (при этом из требования граничных условий полагают $b=0$, $c=1$).

В случае $a \neq 0$, решением первого уравнения (2.1) являются функции $N(s) = N_0 e^{\pm|a|s}$, где $N_0 = \operatorname{const}$, $a = \pm|a|$.

Второе уравнение (2.1) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 F}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{dF}{d\tilde{r}} \mp \frac{|a|\operatorname{Re}}{\gamma} F = 0.$$

Вводя переменную: $x = \sqrt{\frac{|a|\operatorname{Re}}{\gamma}} \tilde{r}$, $F(\tilde{r}) \rightarrow F(x)$, запишем соотношение:

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} \mp 1 = 0,$$

в котором знак «-» перед единицей соответствует условию: $a > 0$, знак «+» - условию: $a < 0$.

Делая замену: $\frac{1}{F(x)} \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, из которой следует: $\frac{1}{F(x)} \frac{d^2 F(x)}{dx^2} = \frac{df(x)}{dx} + f^2(x)$,

перепишем последнее выражение в виде:

$$\frac{df}{dx} + f^2 + \frac{1}{x}f \mp 1 = 0.$$

Вводя функцию $g(x) = f(x) + \frac{1}{2x} = \frac{1}{F(x)} \frac{dF(x)}{dx} + \frac{1}{2x}$, запишем соотношение:

$$\frac{\partial g}{\partial x} + g^2 + \frac{1}{4x^2} \mp 1 = 0,$$

или, переходя обратно к переменной $\tilde{r} = \frac{x}{\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma}}$, $g(x) \rightarrow g(\tilde{r})$,

$$g(\tilde{r}) = \frac{1}{\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma}} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{d\tilde{r}} + \frac{1}{2\tilde{r}} \right), \quad (2.2)$$

получим

$$\frac{1}{\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma}} \frac{dg}{d\tilde{r}} + g^2 + \frac{1}{4|a|\text{Re}/\gamma} \frac{1}{\tilde{r}^2} \mp 1 = 0.$$

Если $|a|\text{Re}/\gamma \gg 1$ и $\tilde{r} \rightarrow 1$, то с точностью до $O(|a|\text{Re}/\gamma)^{-1}$, можно записать:

$$\frac{dg}{d\tilde{r}} + \sqrt{|a|\text{Re}/\gamma} g^2 \mp \sqrt{|a|\text{Re}/\gamma} = 0, \quad \text{где } \tilde{r} \rightarrow 1. \quad (2.3)$$

Из уравнения (2.3) следуют решения:

$$g(\tilde{r}) = \operatorname{th} \left(\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma} (\tilde{r} + c) \right), \quad \text{в случае знака «-» в уравнении (2.3), то есть при } a > 0;$$

$$g(\tilde{r}) = -\operatorname{tg} \left(\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma} (\tilde{r} + b) \right), \quad \text{в случае знака «+» в уравнении (2.3), то есть при } a < 0.$$

Здесь c и b – константы интегрирования, которые могут зависеть от числа Рейнольдса и пространственного масштаба рассмотрения системы γ .

Подставляя эти выражения в соотношение (2.2), получим выражения:

$$F(\tilde{r}) = \frac{F_0}{\sqrt{\tilde{r}}} \operatorname{ch} \left(\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma} (\tilde{r} + c) \right), \quad \text{при } a > 0;$$

$$F(\tilde{r}) = \frac{F_0}{\sqrt{\tilde{r}}} \cos \left(\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma} (\tilde{r} + b) \right), \quad \text{при } a < 0.$$

Поэтому,

$$\tilde{V}(\tilde{r}, s) = N(s)F(\tilde{r}) - \tilde{r}^2 = \frac{u_0}{\sqrt{\tilde{r}}} \operatorname{ch} \left(\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma} (\tilde{r} + c) \right) e^{|a|s} - \tilde{r}^2, \quad \text{при } a > 0;$$

$$\tilde{V}(\tilde{r}, s) = N(s)F(\tilde{r}) - \tilde{r}^2 = \frac{u_0}{\sqrt{\tilde{r}}} \cos \left(\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma} (\tilde{r} + c) \right) e^{-|a|s} - \tilde{r}^2, \quad \text{при } a < 0.$$

Здесь $u_0 = N_0 F_0$.

Из условия “прилипания” на стенке трубы в отсутствии стохастических

возмущений: $\tilde{V}(\tilde{r}, s) \Big|_{\substack{s=0 \\ \tilde{r}=1}} = 0$, следует, что $u_0 = 1$, $b = c = -1$. Таким образом, учитывая четность функций косинуса и гиперболического косинуса, в пристеночной области трубы, можно записать соотношения для безразмерной скорости в виде:

$$\tilde{V}(\tilde{r}, s) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \left| ch\left(\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma}(1-\tilde{r})\right) e^{|a|s} - \tilde{r}^2 \right|, \text{ при } a > 0; \quad (2.4)$$

$$\tilde{V}(\tilde{r}, s) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \left| \cos\left(\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma}(1-\tilde{r})\right) e^{-|a|s} - \tilde{r}^2 \right|, \text{ при } a < 0. \quad (2.5)$$

Уравнения (2.4)-(2.5) можно переписать, используя динамические параметры скорости V_* и расстояния y_* (см., например, [9]): $V_* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{R\Delta P}{2\rho l}} = \sqrt{\frac{2\nu}{R}} U_0 = \frac{2U_0}{\sqrt{2\text{Re}}}$ (здесь σ - отнесенная к единице площади стенки сила трения),

$$\frac{y_*}{R} = \frac{y_* V_*}{\nu} \cdot \frac{\nu}{RV_*} \sim \frac{1}{\sqrt{2RU_0/\nu}} = \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}, \quad V_* y_* / \nu \sim 1;$$

$$\frac{V(y, s)}{V_*} \sim \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \frac{yV_*}{\nu}}} \left| ch\left(\sqrt{\frac{|a|}{2\gamma}} \frac{yV_*}{\nu}\right) e^{|a|s} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \frac{yV_*}{\nu}\right)^2\right| \right|, \text{ при } a > 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{V(y, s)}{V_*} \sim \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \frac{yV_*}{\nu}}} \left| \cos\left(\sqrt{\frac{|a|}{2\gamma}} \frac{yV_*}{\nu}\right) e^{-|a|s} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \frac{yV_*}{\nu}\right)^2\right| \right|, \text{ при } a < 0, \quad (2.7)$$

где $y = R - r$.

В точке $y = y_*$, в отсутствии стохастических возмущений (при $s = 0$), выполняются условия: $V \Big|_{\substack{s=0 \\ y=y_*}} = V_*$, $V_* y_* / \nu \sim 1$. Разложив функции скоростей, определяемых выражениями (2.6)-(2.7), в этой точке, при $s = 0$, в ряд Тейлора с точностью до $O(1/(2\text{Re}))$, получим соотношения:

$$1 \sim \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2\text{Re}}}\right) ch\left(\sqrt{\frac{|a|}{2\gamma}}\right), \text{ при } a > 0; \quad 1 \sim \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2\text{Re}}}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{|a|}{2\gamma}}\right), \text{ при } a < 0.$$

При выполнении условия $|a|/(2\gamma) < 1$, последние два выражения можно переписать в виде:

$$1 = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2\text{Re}}}\right) \left(1 + \frac{|a|}{4\gamma}\right) + O\left(\frac{1}{2\text{Re}}; \left(\frac{|a|}{2\gamma}\right)^2\right), \text{ при } a > 0,$$

$$1 = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2\text{Re}}}\right) \left(1 - \frac{|a|}{4\gamma}\right) + O\left(\frac{1}{2\text{Re}}; \left(\frac{|a|}{2\gamma}\right)^2\right), \text{ при } a < 0.$$

Полученные выражения сводятся к соотношению:

$$-1 \approx \pm |a| \sqrt{2\text{Re}} / (2\gamma), \quad (2.8)$$

где знак «+» соответствует случаю, когда $a > 0$; знак «-» - случаю, когда $a < 0$.

Очевидно, что выражение (2.8) имеет смысл только в том случае, когда в правой части стоит знак «-» (поскольку $\gamma > 0$). Следовательно, параметр a может иметь только отрицательные значения, и выражения для скорости должны определяться соотношениями (2.5), (2.7).

Значение параметра a , найденное из уравнения (2.8), представимо в виде:

$$a \approx -2\gamma / \sqrt{2\text{Re}}. \quad (2.9)$$

Подставляя его в уравнение (2.5), получим соотношение:

$$\tilde{V}(\tilde{r}, s) \approx \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \left| \cos\left(\sqrt[4]{2\text{Re}}(1-\tilde{r})\right) e^{-\frac{2\gamma}{\sqrt{2\text{Re}}}s} - \tilde{r}^2 \right|, \quad \text{где } \tilde{r} \rightarrow 1. \quad (2.10)$$

Из уравнения (2.10) видно, что с увеличением числа Рейнольдса модуль показателя экспоненты будет уменьшаться. И, следовательно, при достаточно больших значениях числа Рейнольдса изменением стохастической переменной можно пренебречь. Поэтому, выбор записи уравнения Навье-Стокса в расширенном фазовом пространстве в виде уравнения типа (1.25) без учета уравнений, описывающих эволюцию траекторий в фазовом стохастическом пространстве типа (1.24), является оправданным при достаточно больших числах Рейнольдса.

Уравнение (2.7), при подстановке параметра a , преобразуется к виду:

$$\frac{V(y, s)}{V_*} \approx \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \frac{yV_*}{\nu}}} \left| \cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2\text{Re}}} \frac{yV_*}{\nu}\right) e^{-\frac{2\gamma}{\sqrt{2\text{Re}}}s} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \frac{yV_*}{\nu}\right)^2 \right| \right), \quad y \rightarrow 0, \quad (2.11)$$

Если записать это выражение для области $y \leq y_*$ с точностью до $O(1/\sqrt{2\text{Re}})$, то получим соотношение: $\frac{V(y, s)}{V_*} = \frac{5}{4} \frac{yV_*}{\nu} - \frac{1}{4} \left(\frac{yV_*}{\nu} \right)^2 - \gamma s + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right)$. В приведенной постановке задачи (относительно динамических переменных), масштаб рассмотрения системы не должен превышать обезразмеренной динамической длины: $\gamma \leq y_*/R = 1/\sqrt{2\text{Re}}$. Поэтому, полученное выражение с точностью до $O(1/\sqrt{2\text{Re}})$

представимо в виде: $\frac{V(y,s)}{V_*} = \frac{5}{4} \frac{yV_*}{\nu} - \frac{1}{4} \left(\frac{yV_*}{\nu} \right)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right)$, которое в линейном (по величине yV_*/ν) приближении сводится к выражению:

$$\frac{V(y,s)}{V_*} \approx \frac{5}{4} \frac{yV_*}{\nu}. \quad (2.12)$$

Этот результат хорошо соотносится с экспериментальными данными для линейной зависимости безразмерной скорости течения жидкости вблизи поверхности стенок трубы в случае реализации турбулентного режима [9], [11]-[12]: $V(y)/V_* \sim yV_*/\nu$.

Исследовав, таким образом, течение жидкости вблизи стенки трубы и учитывая то, что параметр a должен оставаться постоянным во всей области течения, то есть определяться соотношением (2.9), можно перейти к рассмотрению зависимости скорости течения жидкости от радиуса для всего диапазона значений $\tilde{r} = r/R$: $0 < \tilde{r} < 1$, при больших значениях числа Рейнольдса. А именно, подставив значение $a\text{Re}/\gamma = -\sqrt{2\text{Re}}$ во вторую зависимость (2.1), перейдем к уравнению:

$$\frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{dF}{d\tilde{r}} \right) = -\sqrt{2\text{Re}} \tilde{r} F \quad (2.13)$$

с граничными условиями: $F(\tilde{r})|_{\tilde{r}=1}$, $dF(\tilde{r})/d\tilde{r}|_{\tilde{r}=1} = -1/2$; $dF(\tilde{r})/d\tilde{r}|_{\tilde{r}=0} = 0$.

Интересно отметить, что масштаб рассмотрения системы γ не вошел в уравнение для описания стохастического (турбулентного) режима течения жидкости (2.13), то есть это уравнение является инвариантным относительно масштаба рассмотрения системы. Однако учет существования таких масштабов, на которых происходит необратимое изменение состояния стохастической системы (и на котором производится усреднение стохастических возмущений), позволил перейти от уравнения типа: $\frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{dF}{d\tilde{r}} \right) = 0$ (в ламинарном случае) к уравнению (2.13). Исследуем его подробнее.

Выражение (2.10) и уравнение (2.13) должны одинаково описывать скорость течения жидкости вблизи стенки трубы.

Из соотношения (2.10) можно найти значения производных скорости и функции $F(\tilde{r})$ в точке $\tilde{r} = 1 - \gamma > 1 - 1/\sqrt[4]{2\text{Re}}$ при больших числах Рейнольдса:

$$\left. \frac{\partial \tilde{V}(\tilde{r},s)}{\partial \tilde{r}} \right|_{\substack{\tilde{r}=1-\gamma \\ \gamma < 1/\sqrt[4]{2\text{Re}}}} = -\frac{5}{2} + \left(\sqrt{2\text{Re}} + \frac{5}{4} \right) \gamma + O\left(\sqrt{2\text{Re}}\gamma^2\right), \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial F(\tilde{r})}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1-\gamma} = \left. \frac{\partial (\tilde{V}(\tilde{r}, s)|_{s=0} + \tilde{r}^2)}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1-\gamma} = -\frac{1}{2} + \left(\sqrt{2 \text{Re}} - \frac{3}{4} \right) \gamma + O(\sqrt{2 \text{Re}} \gamma^2).$$

В точке $\tilde{r} = 1$, и из выражения (2.10) и из граничных условий для уравнения (2.13), следуют соотношения для производных:

$$\left. \frac{\partial \tilde{V}(\tilde{r}, s)}{\partial \tilde{r}} \right|_{\substack{s=0 \\ \tilde{r}=1}} = -\frac{5}{2}; \quad \left. \frac{\partial F(\tilde{r})}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1} = \left. \frac{\partial (\tilde{V}(\tilde{r}, s)|_{s=0} + \tilde{r}^2)}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1} = -\frac{1}{2}.$$

Видно, что для любого значения δ , для значения γ из диапазона $0 < \gamma < 1/\sqrt[4]{2 \text{Re}}$, существуют такие значения числа Рейнольдса: $2 \text{Re} \geq (\delta/\gamma)^2$, что в точках $\tilde{r} = 1$ и $\tilde{r} = 1 - \gamma$, координаты которых отличаются на малую (но фиксированную) величину масштаба рассмотрения системы γ , производные скорости и функции $F(\tilde{r})$ скачком меняют свои значения на величину не меньшую, чем значение δ . Таким образом, уравнение (2.12) не имеет решений в классе C^1 для произвольных значений числа Рейнольдса, если определен минимальный масштаб, на котором происходят необратимые изменения состояния стохастической системы – масштаб рассмотрения системы γ . При исследовании турбулентных течений в численном эксперименте такой масштаб может быть связан с сеточным разрешением пространства.

Решения в виде функций с разрывом производных в одной или нескольких точках могут быть найдены численными методами (см., например, [16]-[18]). Однако в данной работе ограничимся исследованием аналитического решения уравнения (2.13) в локальной области исследуемого пространства - в пристеночной части трубы.

Для того чтобы в дальнейшем расширить исследуемую область течения, прилегающую к стенке трубы, рассмотрим при разложении выражения (2.11) в ряд Тейлора по параметру yV_*/ν в области: $0 < y/R < 1/\sqrt{2 \text{Re}}$ ($yV_*/\nu < 1$), помимо линейного еще и квадратичный члены:

$$\frac{V}{V_*} = \frac{5}{4} \frac{yV_*}{\nu} - \frac{1}{4} \left(\frac{yV_*}{\nu} \right)^2 + O\left(\left(\frac{yV_*}{\nu} \right)^3, \frac{1}{\sqrt{2 \text{Re}}} \right).$$

Это соотношение можно представить в виде:

$$\frac{V}{V_*} = \frac{5}{2} \left(\frac{yV_*}{2\nu} - \frac{1}{2} \left(\frac{yV_*}{2\nu} \right)^2 \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{yV_*}{\nu} \right)^2 + O\left(\left(\frac{yV_*}{\nu} \right)^3, \frac{1}{\sqrt{2 \text{Re}}} \right). \quad (2.14)$$

Выражение, стоящее в скобках в правой части соотношения (2.14) является разложением функции логарифма в окрестности точки $yV_*/(2\nu) = 1$ (или точки $yV_*/\nu = 2$)

до квадратичного члена включительно. Причем, в области: $yV_*/\nu > 1$, кубический член разложения логарифма (умноженный на коэффициент $5/2$): $\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{yV_*}{2\nu} \right)^3 = \frac{5}{48} \left(\frac{yV_*}{\nu} \right)^3$ превосходит величину квадратичного слагаемого $\frac{1}{16} \left(\frac{yV_*}{\nu} \right)^2$, входящего в выражение (2.14).

Экстраполируя решение (2.14) в область $yV_*/\nu > 1$, полученное соотношение, можно переписать в виде:

$$\frac{V}{V_*} \approx \frac{5}{2} \ln \left(\frac{yV_*}{2\nu} \right) + O \left(\left(\frac{yV_*}{2\nu} \right)^3 \right)$$

или

$$\frac{V}{V_*} \approx \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{yV_*}{\nu} \right) + b, \quad \text{где } \kappa = 0.4; \quad b = -\frac{5}{2} \ln 2 + O \left(\left(\frac{yV_*}{2\nu} \right)^3 \right). \quad (2.15)$$

Для того чтобы понять, где находятся границы области течения, скорость которого описывается выражением (2.15) (в предположении, что $b \approx const$), достаточно подставить соотношение: $F(\tilde{r}) \approx \tilde{V}(\tilde{r}, s)|_{s=0} + \tilde{r}^2 = \frac{2}{\kappa \sqrt{2 \text{Re}}} \ln(1 - \tilde{r}) + \tilde{r}^2 + \frac{2 \ln \sqrt{2 \text{Re}}}{\kappa \sqrt{2 \text{Re}}} + \frac{2}{\sqrt{2 \text{Re}}} b$, в уравнение (2.13). В результате, получим выражение:

$$-\frac{1}{\kappa \sqrt{2 \text{Re}}} + \left(2 + b + \frac{1}{\kappa} \ln(\sqrt{2 \text{Re}}(1 - \tilde{r})) \right) \tilde{r}(1 - \tilde{r})^2 + \frac{\sqrt{2 \text{Re}}}{2} \tilde{r}^3(1 - \tilde{r})^2 = O((2 \text{Re})^{-1}).$$

Из него следует, что в области: $1 - 1/\sqrt[n]{2 \text{Re}} \leq \tilde{r} < 1$ (или $0 < yV_*/\nu \leq (2 \text{Re})^{\frac{n-2}{2n}}$), где $n < 4$, выражение (2.15) удовлетворяет уравнению (2.13) с точностью не хуже, чем

$$O((2 \text{Re})^{-k}), \quad \text{где } k = (4 - n)/2n > 0. \quad (2.16)$$

При $n \rightarrow 4$, область течения, скорость которого описывается выражением (2.15) в пределах погрешности (2.16) составляет порядка десяти процентов от радиуса трубы.

Экспериментальное выражение для логарифмического профиля скорости в трубе в этой области имеет вид ([1], [3]-[4]): $V(y)/V_*|_{\text{Re} \gg 1} \approx 2.5 \ln(yV_*/\nu) + 5.5$.

Выражение (2.15) качественно (с точностью до постоянной Кармана: $\kappa = 0.4$) описывает осредненный профиль скорости течения жидкости при больших числах Рейнольдса в пристеночной области трубы. Логарифмической вид функции (2.15) и линейный вид функции (2.12) для зависимости скорости от расстояния до стенки трубы в

пристеночных областях при больших числах Рейнольдса, качественно совпадают с экспериментальными и теоретическими данными в случае реализации турбулентного характера течения жидкости в трубах кругового сечения ([11]-[12]). Поэтому, следует ожидать, что разработанный метод описания стохастических процессов с помощью расширения фазового пространства, за счет введения переменной, описывающей изменение стохастического состояния системы, позволит строить математические модели и для других турбулентных и стохастических систем на основе уравнений, описывающих их детерминированные аналоги.

Необходимо отметить, что, несмотря на то, что для труб кругового сечения, как было сказано выше, имеется единственное аналитическое решение уравнений Навье-Стокса, соответствующее параболическому профилю скорости, в численных расчетах (и при прямом численном моделировании, и в приближенных методах) при больших значениях числа Рейнольдса получают вполне качественные решения, соответствующие логарифмическому профилю скорости (см., например, [19]).

Разгадка феномена одинакового влияния на решение уравнений Навье-Стокса и расширения фазового пространства и численных расчетов, по-видимому, состоит в том, что, с одной стороны, как было показано выше, оказалось, что при решении данной задачи в фазовом пространстве, расширенном с помощью дополнительной стохастической переменной s , с учетом масштаба рассмотрения τ (или γ), можно воспользоваться

дополнительным членом в выражении для полной производной: $\frac{1}{\tau} \frac{\partial V}{\partial s}$, но при этом, не

использовать дополнительные замыкающие уравнения, описывающие динамику стохастических траекторий в нем; с другой стороны, при исследовании турбулентных течений в численном эксперименте всегда существует масштаб, который связан с сеточным разрешением пространства и который порождает схемную вязкость. Кроме того в приближенных методах описания течения при больших числах Рейнольдса в уравнения Навье-Стокса добавляют члены, замыкающие уравнения с помощью осредненных моментов пульсации, а при решении задачи с помощью прямого численного моделирования задают дополнительные возмущения с помощью гармонических граничных условий на оси трубы [19]. Таким образом, факторы, возникающие при решении задачи с помощью уравнений Навье-Стокса в пространстве (t, \bar{x}) при численном моделировании могут оказывать воздействие на изменение полной производной скорости,

сходное с влиянием члена $\frac{1}{\tau} \frac{\partial V}{\partial s}$ при решении этих уравнений в расширенном фазовом пространстве: $(t, \bar{x}, s; \tau)$. Однако описание динамики жидкости в расширенном фазовом

пространстве избавляет от необходимости “угадывать” или “подбирать” величину “правильного” масштаба задаваемых возмущений и их корреляций благодаря тому, что, выбор вида уравнения (группы симметрии) производится из “первых принципов”.

Таким образом, разработанный метод описания стохастических процессов для динамических систем, не имеющих выделенных состояний равновесия, позволил корректно описать турбулентное течение жидкости в пристеночной области трубы в зоне ламинарного подслоя и найти дополнительное аналитическое решение задачи течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения при больших числах Рейнольдса, характеризуемое логарифмическим профилем скорости течения. Использование данного метода позволило аналитически определить значение постоянной Кармана: $\kappa = 0.4$. Кроме того для турбулентного течения, показано отсутствие гладкого решения - зависимости скорости от радиуса трубы - в области течения по сечению трубы.

Однако определение критических значений чисел Рейнольдса, при которых происходит смена режимов течения, непосредственно из предложенного метода, вряд ли возможно.

В следующей главе предлагается метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы [23], и на основе этого метода в задаче о течении жидкости в трубе кругового сечения делается попытка определения критических значений чисел Рейнольдса, при которых происходит смена режимов течения.

3. Метод теоретического определения минимального значения числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения.

Метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы, применим к таким физическим процессам, которые можно однозначно описать функциями $\tilde{m}(\alpha)$ на всей области определения α , кроме малых подобластей, в которых эти функции скачком изменяют свои значения и/или значения своих производных. В таких подобластях функции $\tilde{m}(\alpha) = \tilde{m}(\alpha(t))$ могут вести себя случайным образом, не меняя, однако, свои значения и значения своих производных на границах подобластей. Задача метода состоит в поиске соотношений, связывающих значения функций и их производных на границах подобластей скачкообразного изменения параметров с размерами и положением этих подобластей относительно, рассматриваемых областей определения значений α . Остановимся на этом подробнее.

Операторный метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы.

Предположим, существует физический процесс, описываемый функцией $\tilde{m}(\alpha(t))$ такой, что до точки α_1 и за точкой α_2 функция $\tilde{m}(\alpha(t))$ определена однозначно, как функция аргумента α , то есть $\tilde{m}(\alpha(t)) = \tilde{m}(\alpha)$. В области $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ функция $\tilde{m}(\alpha(t))$ может вести себя случайным образом, не меняя при этом свои значения и значения своих производных в точках α_1 и α_2 (концы функции в этих точках “закреплены”).

Если случайные изменения функция $\tilde{m}(\alpha(t))$ в какой-либо точке области $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ становятся сопоставимы с разностью значений между линейно экстраполированной и интерполированной функцией $\tilde{m}(\alpha(t))$ в эту точку из точек α_1 и α_2 , соответственно, то поведение функции \tilde{m} на плоскости (α, \tilde{m}) будет выглядеть как случайный скачкообразный переход (см. рис. 2) из одного квазистационарного состояния в другое. Точка такого перехода однозначно не определена – может принимать случайное значение из интервала $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ (если следить за процессом изменения функции \tilde{m} от аргумента α много раз).

Рассмотрим однократное изменение функции $\tilde{m}(\alpha)$ при изменении аргумента $\alpha = \alpha(t)$ в одном направлении по времени в области перехода. Для определенности будем считать $\alpha_i = \alpha(t)|_{t=t_i}$.

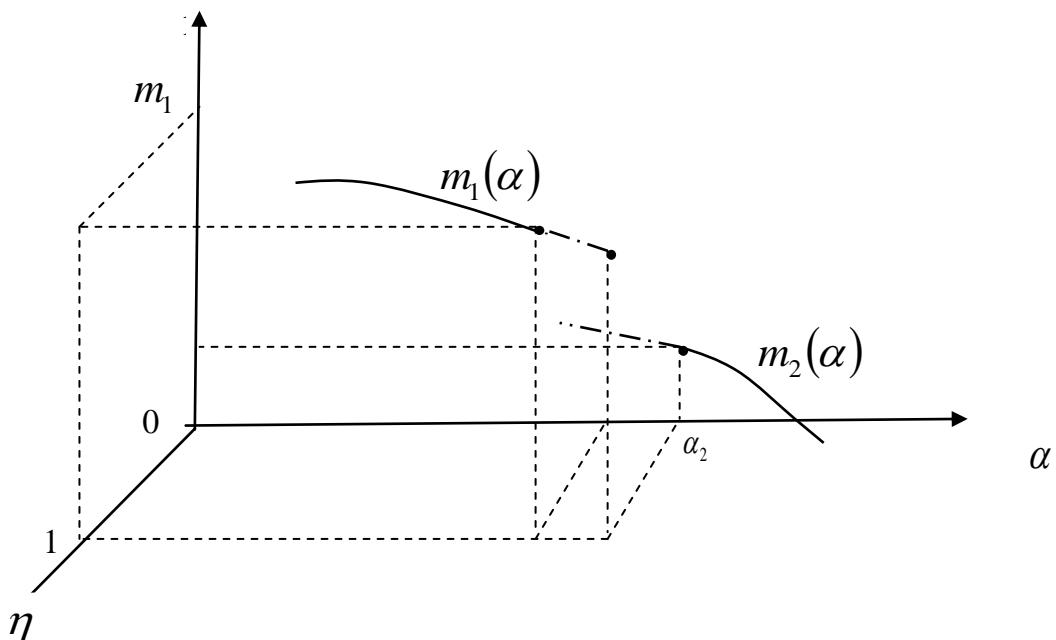


Рис.2

Обозначим точку завершение скачкообразного перехода, как точку α_2 . В качестве точки α_1 выберем такую точку на оси α (в плоскости (α, \tilde{m})), которая находится перед точкой α_2 , и в которой функция $\tilde{m}(\alpha(t))$ является заведомо однозначно определенной, как функция $\tilde{m}(\alpha)$. Будем считать, что функция $\tilde{m}(\alpha)$ может обладать лишь слабой нелинейностью в областях $\alpha \leq \alpha_1$ и $\alpha \geq \alpha_2$. Точку α_1 при выполнении требования однозначности функции перед ней нужно выбирать как можно ближе расположенной к точке α_2 , для того чтобы уменьшить погрешность, обусловленную нелинейностью функции $\tilde{m}(\alpha)$ (см. ниже).

Экстраполируем часть функции $\tilde{m}(\alpha)$, расположенной на плоскости (α, \tilde{m}) до точки $\alpha_1: \alpha \leq \alpha_1$, линейной функцией в область $\alpha > \alpha_1$. Полученную таким образом функцию обозначим, как $m_1(\alpha)$.

Часть функции $\tilde{m}(\alpha)$ за точкой $\alpha_2: \alpha \geq \alpha_2$, интерполируем в область $\alpha < \alpha_2$ и обозначим, как $m_2(\alpha)$.

На плоскости (α, m) построим функцию $m(\alpha)$ в виде: $m(\alpha) = \begin{cases} m_1(\alpha), & \alpha < \alpha_2 \\ m_2(\alpha), & \alpha \geq \alpha_2 \end{cases}$,

которая будет являться приближением функции $\tilde{m}(\alpha)$ с точностью до линейной экстраполяции функции $m_1(\alpha)$ в области $\alpha_1 \leq \alpha < \alpha_2$.

Среднее значение функции $m^2(\alpha)$ на участке $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ будет определяться выражением:

$$\langle m^2 \rangle = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m^2(\alpha) d\alpha. \quad (3.1)$$

Далее будем рассматривать такие процессы, в которых функцией $\langle m^2 \rangle$ описывается сохраняющийся во времени интеграл. Учитывая, что среднее на интервале $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ значение от функции $m^2(\alpha)$ является числом, выражение (3.1) может быть записано в виде:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2(\varphi) d\varphi = 1, \quad \text{где } M^2 = m^2(\alpha) / \langle m^2 \rangle, \quad \varphi = \alpha / \Delta\alpha, \quad \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Расширим пространство (α, m) дополнительным параметром $\eta: (\alpha, m) \rightarrow (\alpha, m; \eta)$, $0 \leq \eta \leq 1$, и определим в этом пространстве функцию $m(\alpha; \eta)$ так, чтобы проекция

функции $m(\alpha; \eta)$ на плоскость (α, m) совпадала с функциями $m_1(\alpha)$ и $m_2(\alpha)$ в областях: $\alpha < \alpha_2$ и $\alpha \geq \alpha_2$, соответственно. Удовлетворяя этим требованиям, в качестве функции $m(\alpha; \eta)$ можно выбрать соотношение (см. рис.2):

$$m(\alpha; \eta) = m_2(\alpha) + \eta(m_1(\alpha) - m_2(\alpha)), \text{ где } \eta = \begin{cases} 1, & \text{при } \alpha < \alpha_2 \\ 0, & \text{при } \alpha \geq \alpha_2 \end{cases}.$$

Параметр η будет характеризовать состояние системы (описываемой функцией m и ее производной), принимая значение равное единице везде до точки $\alpha = \alpha_2$ и, равное нулю в этой точке и за ней:

$$\eta = \frac{m(\alpha) - m_2(\alpha)}{m_1(\alpha) - m_2(\alpha)} \equiv \frac{M - M_2}{M_1 - M_2} = \frac{\partial m(\alpha)/\partial \alpha - \partial m_2(\alpha)/\partial \alpha}{\partial m_1(\alpha)/\partial \alpha - \partial m_2(\alpha)/\partial \alpha} \equiv \frac{\partial M/\partial \varphi - \partial M_2/\partial \varphi}{\partial M_1/\partial \varphi - \partial M_2/\partial \varphi}.$$

Производные величины η по α , а также η по φ будут равны:

$$\begin{aligned} \partial \eta / \partial \alpha &= -\partial \eta / \partial (-(\alpha - \alpha_2)) = -\delta(-(\alpha - \alpha_2)) = -\delta(\alpha - \alpha_2), \\ \partial \eta / \partial \varphi &= -\partial \eta / \partial (-(\varphi - \varphi_2)) = -\delta(-(\varphi - \varphi_2)) = -\delta(\varphi - \varphi_2) \end{aligned}$$

где $\delta(\alpha - \alpha_2)$ и $\delta(\varphi - \varphi_2)$ - дельта-функции.

Найдем среднее значение квадрата функции $m(\alpha)$ (см. (3.1)) в области скачкообразного перехода $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ в расширенном пространстве $(\alpha, m; \eta)$.

Проинтегрировав по частям выражение для среднего значения квадрата функции $m(\alpha)$:

$$\frac{1}{\Delta \alpha} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m^2(\alpha) d\alpha = \frac{\alpha}{\Delta \alpha} m^2(\alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \frac{2}{\Delta \alpha} \int_{m(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}}^{m(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2}} \alpha m dm,$$

и сделав замену:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} d\alpha = -(m_1(\alpha) - m_2(\alpha)) \delta(\alpha - \alpha_2) d\alpha,$$

получим соотношение:

$$\langle m^2 \rangle = \frac{\alpha_2}{\Delta \alpha} m_2 \left(m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \Delta \alpha \right) - \frac{\alpha_1}{\Delta \alpha} m_1^2. \quad (3.2)$$

Для краткости в этом выражении опущены обозначения показывающие, что значение функции m_2 берется в точке $\alpha = \alpha_2$: $m_2 = m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2}$, а значение функции m_1 - в точке $\alpha = \alpha_1$: $m_1 = m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}$. Значение функции m_1 - в точке $\alpha = \alpha_2$, в силу условия линейной экстраполяции, определялось как

$$m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} = m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1} + \frac{\partial m_1(\alpha)}{\partial \alpha} \Bigg|_{\alpha=\alpha_1} \Delta \alpha = m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \Delta \alpha, \quad \Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Из полученного выражения видно, что среднее значение квадрата функции $m(\alpha)$ на интервале $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ определяется ее значениями в двух крайних точках: α_1 и α_2 , а также значением производной функции в точке α_1 . Причем, член выражения $\frac{\alpha_1}{\Delta \alpha} m_1^2$ определен значениями безразмерной координаты и квадрата функции в точке α_1 только на ветви m_1 . А произведение $\frac{\alpha_2}{\Delta \alpha} m_2 \left(m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \Delta \alpha \right)$ описывает «смешанное» состояние системы в точке α_2 сразу для двух ветвей функции. Этот член пропорционален среднегеометрическому между значением функции на ветви m_2 и экстраполированным значением функции на ветви m_1 . Несимметричность в отношении двух ветвей функции при описании среднего квадрата этой функции в переходной области определяет характер выбора в обозначении первой и второй его ветви: $m_1(\alpha)$ - должна описывать состояние системы, устойчивое по отношению к внутренним процессам.

Вернемся к вероятностному представлению функции $m(\alpha)$ (или $\tilde{m}(\alpha)$) в области перехода: $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ на плоскости (α, m) . Квадрат функции $M(\varphi)$:

$$M^2 = m^2 / \langle m^2 \rangle, \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2(\varphi) d\varphi = 1,$$

играет роль плотности вероятности перехода с одной ветви функции на другую в точке $\varphi = \alpha / \Delta \alpha$, принадлежащей области $\varphi \times M(\varphi)$, где $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $M(\varphi) \in [M_1(\varphi); M_2(\varphi)]$.

Самопроизвольный переход неравновесного физического процесса с одного режима на другой возможен в том случае, если в переходной области $\varphi \times M(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $M(\varphi) \in [M_1(\varphi); M_2(\varphi)]$, ветви функции $M_1(\varphi)$ и $M_2(\varphi)$ - такие, что область неопределенности, возникающая при переходе от пространства $(\varphi, M; \eta)$ к пространству (φ, M) , не меньше, чем переходная область. То есть когда выполняется дисперсионное соотношение для области перехода.

Чтобы найти такое дисперсионное соотношение, рассмотрим коммутационное соотношение двух операторов $\hat{k} = i \partial / \partial \varphi$ и $\hat{\eta} = i \eta$:

$$[\hat{k}; \hat{\eta}] M = M \delta(\varphi - \varphi_2).$$

Используя зависимости:

$$\Delta_M^k = \left[\left(\hat{k}^2 M, M \right) - \left(\hat{k} M, M \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \Delta_M^\eta = \left[\left(\hat{\eta}^2 M, M \right) - \left(\hat{\eta} M, M \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\Delta_M^k \Delta_M^\eta \geq \frac{1}{2} \left| \left[\hat{k}; \hat{\eta} \right] M, M \right|,$$

где выражения в круглых скобках - скалярные произведения в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega \subset R^1)$, получим следующие выражения в пространстве $(\varphi, M; \eta)$:

$$\begin{aligned} \left(\hat{k} M, M \right) &= i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial M}{\partial \varphi} d\varphi = -i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial M}{\partial \eta} \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = -\frac{i}{2} M_2 \left(M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - M_2 \right), \\ \left(\hat{k}^2 M, M \right) &= - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial^2 M}{\partial \eta \partial \varphi} \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = \frac{1}{2} M_2 \left(\frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} \right), \\ \left(\hat{\eta} M, M \right) &= i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \eta d\varphi = i \varphi \eta M^2 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} + i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi + \\ &\quad + 2i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \eta M (M_1 - M_2) \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = -i M_1^2 \varphi_1 + \frac{i}{2} M_2^2 \varphi_2, \\ \left(\hat{\eta}^2 M, M \right) &= - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \eta^2 d\varphi = -\varphi \eta^2 M^2 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} - 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \eta M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi - \\ &\quad - 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \eta^2 M (M_1 - M_2) \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = M_1^2 \varphi_1, \\ \left| \left[\hat{k}; \hat{\eta} \right] M, M \right| &= \left| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi \right| = \frac{1}{2} M^2 (\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_2} = \frac{1}{2} M_2^2. \end{aligned}$$

При выводе этих соотношений, в области перехода $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ принималась линейная интерполяция функции $M_1(\varphi)$ из области $\varphi \leq \varphi_1$. Поэтому, значение разности $M_1(\varphi) - M_2(\varphi)$ и производной этой разности в точке $\varphi = \varphi_2$ равны, соответственно

$$M_1(\varphi_1) + \frac{\partial M_1(\varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1} - M_2(\varphi_2) \quad \text{и} \quad \frac{\partial M_1(\varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1} - \frac{\partial M_2(\varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_2}.$$

Значение функции $M(\varphi)$ в точке $\varphi = \varphi_2$ равно значению функции на второй ветви в этой точке, то есть $M(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_2} = M_2(\varphi_2)$.

Из приведенных выражений, следует,

$$\Delta_M^k = \left(\frac{1}{2} M_2 \left(\frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{4} M_2^2 \left(M_1 - M_2 + \frac{\partial M_1}{\partial \varphi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta_M^\eta = \left(M_1^2 \varphi_1 + \left(\frac{1}{2} M_2^2 \varphi_2 - M_1^2 \varphi_1 \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Параметр Δ_M^η определяет среднеквадратичное отклонение величины η в переходной области $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ в пространстве $(\varphi, M; \eta)$. Для того чтобы в рассматриваемой области был возможен переход с ветви $M_1(\varphi)$ на ветвь $M_2(\varphi)$ функции $M(\varphi)$, необходимо, чтобы среднеквадратичное отклонение величины η было не меньше половины интервала между ее значениями в начальном и конечном состояниях. То есть $\Delta_M^\eta \geq 1/2$.

Для рассмотрения равновероятного нахождения на каждой из двух ветвей рассматриваемой функции $M(\varphi)$, от неравенства: $\Delta_M^\eta \geq 1/2$ перейдем к равенству: $\Delta_M^\eta = 1/2$. Накладывая это условие, получим соотношение, связывающее безразмерные величины $\varphi_1, \varphi_2, M_1, M_2$:

$$4M_1^2 \varphi_1 + (M_2^2 \varphi_2 - 2M_1^2 \varphi_1)^2 = 1.$$

Используя зависимость (3.2) для определения среднего значения $\langle m^2 \rangle$ перейдем к соответствующей зависимости с размерными величинами: $\alpha_1 = \alpha_2 - \Delta\alpha, \alpha_2, m_1, m_2$:

$$\left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} \right)^2 m_2^4 - 4 \frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} \left(1 - \frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} \right) m_1^2 m_2 \left(m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \Delta\alpha - m_2 \right) = \left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} \left(m_1 m_2 - m_1^2 + m_2 \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \Delta\alpha \right) + m_1^2 \right)^2. \quad (3.3)$$

Дисперсионное соотношение для безразмерных параметров имеет вид:

$$\left(\frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2} M_2 \left(M_1^2 - 2M_1 M_2 + 2 \frac{\partial M_1}{\partial \varphi} (M_1 - M_2) + \left(\frac{\partial M_1}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \geq 0.$$

А для соответствующих им размерных величин его можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha)^2 \left(\frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \right)^2 + 2\Delta\alpha \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \left(m_1 - m_2 + \left(\frac{m_1^2}{m_2} \frac{1}{\partial m_1 / \partial \alpha} + \alpha_2 \right) \left(\frac{\partial m_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial m_2}{\partial \alpha} \right) \right) + \\ + 2\alpha_2 m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) \left(\frac{\partial m_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial m_2}{\partial \alpha} \right) + m_1 (m_1 - 2m_2) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Выражения (3.3)-(3.4) являются алгебраическими. Они связывают значения функций $m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} = m_1, m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_2$ и значения их производных $\partial m_1(\alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_1} = \partial m_1/\partial \alpha, \partial m_2(\alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_2} = \partial m_2/\partial \alpha$,

$\partial m_2(\alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_2} = \partial m_2/\partial \alpha$ в точках $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, соответственно, с протяженностью области перехода $\Delta\alpha$, которая отделяет точку α_1 от точки перехода α_2 .

Необходимо напомнить, что соотношения (3.3)-(3.4) находились в предположении, что скачкообразный переход с ветви функции “1” на ветвь функции “2” происходит в точке α_2 при однократном изменении по времени функции $\alpha(t)$. Однако учитывая, что если в качестве точки перехода выбрать любую точку из интервала $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, а затем переобозначить ее, как α_2 , и провести туже цепочку рассуждений, то полученные в результате уравнения будут полностью совпадать с соотношениями (3.3)-(3.4). Это связано с тем, что система уравнений определяет лишь возможные комбинации параметров: $m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} = m_1$, $m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_2$, $\partial m_1(\alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_1} = \partial m_1/\partial \alpha$, $\partial m_2(\alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_2} = \partial m_2/\partial \alpha$, $\alpha_2 - \Delta\alpha$ (или α_1) для физического процесса с двумя (или несколькими) квазивновесными состояниями, описываемого функцией $m(\alpha(t))$, с резкими (стохастическими) изменениями ее значений в какой либо области аргумента.

В общем случае, полученная система (3.3)-(3.4) является недоопределенной. В результате, точка перехода, как правило, является неединственной. И поэтому, при изменении функции $m(\alpha)$ (где $\alpha = \alpha(t)$) с течением времени сначала в одном, а затем в другом направлении по α , переход может происходить (и обычно происходит) в разных точках.

Из-за инертности физических систем, в нестационарных процессах происходит “затягивание” существования текущего процесса. Другими словами, если вероятность нахождения системы в двух состояниях, описываемых двумя ветвями функции, одна и та же, то система продолжает оставаться в том состоянии, в котором уже пребывает, до тех пор, пока в результате случайной флуктуации или возмущающего воздействия (для возникновения, которых требуется некоторое время) не перейдет в другое состояние. В этом случае на плоскости с координатами (α, m) будет изображена не однопараметрическая, а разрывная гистерезисная кривая.

Необходимо отметить, что соотношения (3.3)-(3.4) не являются инвариантным по отношению к выбору начала отсчета оси α . В предложенном методе это происходит из-за несимметричности относительно параметра η состояний, характеризуемых функциями $m_1(\alpha)$ и $m_2(\alpha)$, а также из-за “привязки” процесса перехода из одного состояния системы в другое к масштабу этого перехода: $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. В описываемых этим методом физических процессах это свойство “переходных” состояний определяется конкретными

диапазонами параметров, а также наличием собственных масштабов таких процессов. Например, при описании зависимости силы сопротивления шара в потоке жидкости от числа Рейнольдса, возникает скачкообразный переход с одной ветви функции на другую при изменения режима течения жидкости от ламинарного к турбулентному. Этот переход не может происходить при малых значениях числа Рейнольдса. Минимальное - критическое значение этого числа, а также диапазон значений чисел Рейнольдса при которых возможен такой переход, можно считать масштабами переходного процесса.

Практически все процессы в природе, совершающие скачкообразные переходы между различными состояниями, могут быть описаны непрерывными функциями, имеющими в области перехода разрыв производных в одной или нескольких точках. Однако эти функции имеют, как правило, вероятностную – стохастическую природу либо во всей переходной области, либо в какой-то ее части. Принятое математическое приближение описания зависимости $m(\alpha)$ в виде функции с разрывом первого рода, позволяет в некоторых задачах определить размер и/или положение этой области, используя информацию о значениях функции и ее производных только на ее границах. Рассмотрим применение этого метода на примере гидродинамической задачи из главы 2.

Описание переходных режимов течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения.

Вернемся к рассмотрению течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения с гладкими стенками.

В главе 1 было показано, что при рассмотрении стохастических систем необходимо решать задачи, связанные с ее исследованием, в фазовом пространстве переменных, расширенном за счет введения дополнительной координаты, характеризующей изменение стохастического состояния системы, а также параметра, характеризующего масштаб рассмотрения такой системы. При этом детерминированное состояние системы описывается гиперплоскостью в таком фазовом пространстве.

В главе 2, процедура расширения пространства была применена к описанию жидкости при ее течении в трубе кругового сечения. При этом, уравнение сохранения

импульса: $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\vec{V}$ с учетом уравнения неразрывности $\nabla V = 0$, а также

добавочного члена для описания пульсаций скорости в поперечном направлении при стационарном (в среднем) течении вязкой несжимаемой жидкости, было переписано в

виде соотношения: $\frac{1}{\tau} \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\Delta P}{\rho l} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right)$, где $V = V(r, s)$ - компонента скорости в поперечном направлении, ΔP - падение давления на длине трубы l , ν - вязкость жидкости, τ - принятый временной масштаб рассмотрения системы. Решение уравнения находилось при использовании граничного условия “прилипание” жидкости на стенке трубы в отсутствии пульсаций: $V(r, s) \Big|_{s=0}^{r=R} = 0$, а также равенства нулю, в отсутствии пульсаций, производной скорости по координате r в центре тубы: $\partial V(r, s)/\partial r \Big|_{s=0}^{r=0} = 0$.

В результате были обнаружены два решения, одно из которых соответствует ламинарному, а второе – турбулентному режиму течения жидкости.

Для турбулентного режима найдено выражение для скорости жидкости непосредственно у стенки трубы в виде:

$$\frac{V}{V_*} \approx \frac{5}{4} \frac{yV_*}{\nu} - \frac{1}{4} \left(\frac{yV_*}{\nu} \right)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{2} Re}\right), \quad (3.5)$$

где $y = R - r$ - расстояние до стенки трубы, $V_* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{R \Delta P}{2 \rho l}} = \sqrt{\frac{2 \nu}{R} U_0} = \frac{2 U_0}{\sqrt{2} Re}$ - динамическая скорость жидкости, $Re = U_0 R / \nu$ - число Рейнольдса, $U_0 = \frac{R^2 \Delta P}{4 \nu \rho l}$ - скорость жидкости на оси трубы при заданном перепаде давления при ламинарном режиме течения.

В пристеночной области найдено решение, характеризуемое логарифмическим профилем осредненной скорости течения. Аналитически найдено значение постоянной Кармана: $\kappa = 0.4$.

К сожалению, определение критических значений чисел Рейнольдса, при которых происходит смена режимов течения, непосредственно из предложенного метода расширения фазового пространства с помощью «стохастической» переменной, вряд ли возможно. Поэтому вернемся к рассмотренному выше методу описания «разрывных» функций и попробуем использовать для этой цели его.

Нетрудно видеть, что для ламинарного течения жидкости, характеризуемого параболическим профилем скорости, скорость жидкости непосредственно у стенки трубы можно записать в виде: $V = U_0 (1 - (r/R)^2) \approx 2U_0 y/R$. Или, учитывая, что $2U_0 = V_*^2 R / \nu$, записать:

$$\frac{V}{V_*} \approx \frac{yV_*}{\nu}. \quad (3.6)$$

Таким образом, ламинарный и турбулентный режимы течения можно характеризовать различными функциями скорости непосредственно у стенки трубы:

$$V(y) = \begin{cases} \frac{yV_*^2}{\nu}, & \text{ламинарный} \\ \frac{5}{4} \frac{yV_*^2}{\nu} - \frac{1}{4} \frac{y^2 V_*^3}{\nu^2}, & \text{турбулентный} \end{cases}$$

или градиентами скорости:

$$\left. \frac{dV(y)}{dy} \right|_{y=0} = \begin{cases} \frac{V_*^2}{\nu}, & \text{ламинарный} \\ \frac{5}{4} \frac{V_*^2}{\nu}, & \text{турбулентный} \end{cases}.$$

Используя соотношение $V_*^2 = 2\nu U_0 / R = 2\text{Re} \nu^2 / R^2$, последнее выражение можно переписать в виде:

$$\left. \frac{1}{2} \frac{d(VR/\nu)}{d(y/R)} \right|_{y=0} = \begin{cases} \text{Re}, & \text{ламинарный} \\ \frac{5}{4} \text{Re}, & \text{турбулентный} \end{cases}.$$

Предположим, что переход с ламинарного режима течения на турбулентный происходит при критическом значении числа Рейнольдса: Re_{c1} .

Вычтем из левой и правой частей полученного соотношения это число:

$$\left. \frac{1}{2} \frac{d(VR/\nu)}{d(y/R)} \right|_{y=0} - \text{Re}_{c1} = \begin{cases} \text{Re} - \text{Re}_{c1}, & \text{ламинарный} \\ \frac{5}{4}(\text{Re} - \text{Re}_{c1}) + \frac{1}{4}\text{Re}_{c1}, & \text{турбулентный} \end{cases}.$$

Обозначив: $m = \left. \frac{1}{2} \frac{d(VR/\nu)}{d(y/R)} \right|_{y=0} - \text{Re}_{c1}$ и $\alpha = \text{Re} - \text{Re}_{c1}$, перейдем к функции и

переменной, используемых в соотношениях (3.3)-(3.4):

$$m(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{ламинарный} \\ \frac{5}{4}\alpha + \frac{1}{4}\text{Re}_{c1}, & \text{турбулентный} \end{cases}.$$

Из экспериментов известно, что при малых числах Рейнольдса может быть только ламинарный режим течения, а при больших – как ламинарный, так и турбулентный, поэтому более устойчивой ветвью решения: $m_l(\alpha) = \alpha$, следует обозначить решение, соответствующее ламинарному режиму, а менее устойчивой ветвью решения:

$m_2(\alpha) = \frac{5}{4}\alpha + \frac{1}{4}Re_{c1}$, следует обозначить решение, соответствующее турбулентному (стохастическому) режиму течения жидкости.

Поскольку Re_{c1} - значение числа Рейнольдса, при котором происходит «уход» с ветви «1», то $\alpha_1 = Re_1 - Re_{c1} = 0$ и значение функции $m_1 = m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 = 0$. Значение производной при этом на ветви «1» равно: $\partial m_1 / \partial \alpha = \partial m_1(\alpha) / \partial \alpha \Big|_{\alpha=\alpha_1} \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

«Переход» на ветвь «2» будет происходить в точке $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha = \Delta\alpha$. И, поэтому, значение функции $m_2 = m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{5}{4}\alpha_2 + \frac{1}{4}Re_* = \frac{5}{4}\Delta\alpha + \frac{1}{4}Re_{c1}$. Значение производной при этом на ветви «2» равно: $\partial m_2 / \partial \alpha = \partial m_2(\alpha) / \partial \alpha \Big|_{\alpha=\alpha_2} \stackrel{\text{def}}{=} 5/4$.

Подставляя значения функций и их производных в соответствующих точках в уравнение (3.3), найдем его решения: $\Delta\alpha = -Re_{c1}/9$, $\Delta\alpha = -Re_{c1}/5$ и $\Delta\alpha = -Re$.

Соотношению (3.4) удовлетворяют только первые два решения: $\Delta\alpha = -Re_{c1}/9$ и $\Delta\alpha = -Re_{c1}/5$. Причем минимальному (из двух возможных) по абсолютной величине значению дисперсии соответствует решение: $\Delta\alpha = -Re_{c1}/5$, максимальному – решение: $\Delta\alpha = -Re_{c1}/9$. Вопрос устойчивости этих решений требует отдельного исследования. Однако можно предположить, что наиболее устойчивым решением является то, которому соответствует наименьшая дисперсия. Поэтому остановимся вначале на первом решении.

Переходя обратно к физическим параметрам, характеризующим течение жидкости: $\alpha = Re - Re_{c1}$, запишем, $\Delta\alpha = Re_{c2} - Re_{c1} = -Re_{c1}/5$, то есть

$$Re_{c2} = 4/5 \cdot Re_{c1}, \text{ или } \Delta U_0 = U_{0c2} - U_{0c1} = -1/5 \cdot U_{0c1}, \text{ или } U_{0c2} = 4/5 \cdot U_{0c1}, \quad (3.7)$$

где Re_{c2} - значение числа Рейнольдса после перехода режима течения жидкости к турбулентному, при условии, что переход от ламинарного режима течения произошел при значении числа Рейнольдса, равного Re_{c1} ; U_{0c2} и U_{0c1} - значения скорости течения жидкости на оси трубы в турбулентном и ламинарном режимах, соответственно.

Таким образом, можно констатировать, что переход от ламинарного режима к турбулентному должен сопровождаться эффективным уменьшением числа Рейнольдса ($Re = U_0 R / \nu$). Это можно объяснить тем, что при заданном перепаде давления при переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения часть энергии жидкости перейдет в энергию вихреобразования, в том числе с составляющей скорости, направленной в сторону, противоположную основному потоку. В связи с этим, профиль

скорости при турбулентном режиме течения имеет более «наполненный» вид в пристеночных областях. Все это и повлечет уменьшение числа Рейнольдса, рассчитанного по скорости течения жидкости на оси трубы.

Соотношения (3.7) можно использовать и для определения минимально возможного значения критического числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения. Остановимся на этом подробнее.

Модуль разности максимальных значений скоростей течения жидкости в трубе при двух режимах течения: ламинарном и турбулентном, должен быть такой, который допускал бы процесс вихреобразования. Можно предположить, что характерный размер такого процесса: l_v , должен быть не больше половины длины пути смешения. В самом деле, по определению Прандтля, путь смешения l характеризует расстояние, проходимое частицей («молем») жидкости поперек течения, прежде чем произойдет смешение с окружающей ее жидкостью. Для того чтобы имел место процесс вихреобразования, при прохождении расстояния, равного длине пути смешения один вихрь максимально возможного размера должен разделиться хотя бы на два вихря. Выражение для пути смешения записывается в виде: $l = \kappa \left| \frac{dV/dy}{d^2V/dy^2} \right|$, где $\kappa \approx 0,4$ - постоянная Кармана.

Следовательно,

$$l_v \leq l/2 = \frac{\kappa}{2} \left| \frac{dV/dy}{d^2V/dy^2} \right|. \quad (3.8)$$

Производную dV/dy можно оценить, предполагая, что изменение скорости в центре трубы при переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения при критическом числе Рейнольдса порождает вихри самого большого размера – порядка радиуса трубы. То есть

$$\frac{dV}{dy} \approx \frac{\Delta U_0}{R} = -\frac{1}{5} \frac{U_{0c1}}{R}. \quad (3.9)$$

Вторую производную скорости d^2V/dy^2 можно оценить с помощью отношения разности производных для двух масштабов вихрей: максимально и минимально возможных:

$$\frac{d^2V}{dy^2} \approx \frac{\Delta U_0/R - V_*/y_*}{R - y_*} \approx -\frac{1}{5} \frac{U_{0c1}}{R^2} - 2 \frac{U_{0c1}}{R^2} = -\frac{11}{5} \frac{U_{0c1}}{R^2}. \quad (3.10)$$

Подставляя выражения (3.9) и (3.10) в (3.8), получим соотношение: $l_v \leq \frac{\kappa}{22} R$.

Остановимся на случае, когда на длине пути смешения вихрь успевает разделиться ровно на два вихря. Тогда найденный характерный размер l_v должен быть порядка динамической длины: $y_* \sim \nu/V_*$, на которой происходит диссипация кинетической энергии вихревого движения частиц жидкости в тепло: $l_v \sim y_* = R/\sqrt{2\text{Re}_{c1\min}}$.

Следовательно, $\frac{\kappa}{22}R \sim \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}_{c1\min}}}R$. То есть значение минимально возможного

критического числа Рейнольдса, при котором становится возможен процесс вихреобразования (а, следовательно, и переход от ламинарного к турбулентному режиму течения):

$$\text{Re}_{c1\min} = \frac{V_{0c1\min}R}{\nu} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{22}{0,4} \right)^2 \approx 1513.$$

То есть минимальное число Рейнольдса турбулентного течения (соответствующее этому ламинарному течению), будет равно:

$$\text{Re}_{c2\min} = \frac{4}{5} \text{Re}_{c1\min} \approx \frac{4}{5} 1513 \approx 1210. \quad (3.11)$$

По имеющимся экспериментальными данными [9, 12] минимально возможное число Ренольдса турбулентного режима течения: $\text{Re}_{c\min \text{эксп}} = 2V_{cp\min}R/\nu \approx 2200$, где $V_{cp\min}$ - минимальная фиксируемая средняя по сечению трубы скорость турбулентного течения.

Учитывая, что $V_{cp\min} \approx 0,816V_{0c2\min}$ (вычисленной по формуле Блаузиуса), для приведения к параметру, используемому в эксперименте, выражение (3.11) надо домножить на коэффициент $\sim 2 \cdot 0,816 \approx 1,63$. В результате получим: $\text{Re}_{c\min \text{meop}} \approx 1210 \cdot 1,63 \approx 1970$.

То есть теоретически найденное значения критического числа Рейнольдса, при котором становится возможен переход от ламинарного режима течения к турбулентному, лишь незначительно (с точностью порядка десяти процентов) меньше аналогичного параметра, найденного экспериментальными методами.

При увеличении числа Рейнольдса и, соответственно, разности максимальных значений скоростей течения жидкости в трубе при двух режимах течения, увеличивается вероятность потери устойчивости ламинарного режима течения и, следовательно, увеличивается вероятность перехода к турбулентному течению.

Проделав математические процедуры для второго решения соотношения (3.4): $\Delta\alpha = -\text{Re}_{c1}/9$, аналогичные тем, которые описаны для первого решения, получим минимальное критическое число Рейнольдса, равное $\text{Re}_{c\min \text{meop}} \approx 6500$.

Первый и второй турбулентные режимы течения будут иметь одинаковые профили течения, по крайней мере, в пристеночной области. Однако переход из ламинарного режима в турбулентный будет осуществляться при различных минимально возможных критических значениях числа Рейнольдса. Следовательно, при значениях числа Рейнольдса, превышающих величину $Re \approx 6500$, течение с различной вероятностью может генерировать вихри двух масштабов, которые затем будут дробиться до размеров диссипативного слоя.

При достижении значения числа Рейнольдса $Re \approx 6500$ в трубе кругового сечения с разной вероятностью могут существовать различные режимы течения: ламинарный, первый или второй турбулентный, а также их комбинации и динамические переходы из одного в другой. Вероятно, этим можно объяснить некоторые аспекты процесса перемежаемости турбулентного течения и существования когерентных структур. Однако этот вопрос чрезвычайно сложный и требует дальнейшего исследования.

Подведем итоги:

Полностью детерминированный подход к описанию жидкости с помощью уравнений Навье-Стокса приводит к результату абсолютной устойчивости течения жидкости в трубе кругового сечения при любых числах Рейнольдса для бесконечно малых возмущений. В отличие от него, разработанный метод описания стохастических процессов с использованием дифференциальных уравнений в частных переменных, а именно, уравнения Навье-Стокса, записанного в пространстве, расширенном с помощью дополнительной стохастической переменной, позволяет найти два решения этой задачи: одно из которых, соответствует ламинарному режиму течения, второе – турбулентному.

Первое решение характеризуется параболическим профилем скорости течения жидкости, второе - логарифмическим профилем скорости с множителем, обратно пропорциональным постоянной Кармана, который определяется в настоящей работе аналитически.

Найдено небольшое отличие первого и второго решений непосредственно у стенки трубы. Это отличие позволило аналитически, с помощью метода описания «разрывных» функций, найти минимально возможное значения числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика // М.: Наука, 1979. 527с.
2. Климонтович Ю.Л. Нелинейное броуновское движение // Журнал «Успехи физических наук». Т.164 №8 1994 г. стр. 811-844.
3. Анищенко В.С., Вадисова Т.Е., Шиманский-Гайер Л. Динамическое и статическое описание колебательных систем // М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”; Институт компьютерных исследований, 2005.-156 с.
4. Ватанабе С., Икeda Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы // Мир, 1984.
5. Ito K. Stochastic Differential Equations // Memoirs of the American Math. Soc. 4, 1951.
6. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы // Наука, 1985, 1990.
7. Rabiner L. A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition // IEEE Proceedings. 1989. Vol. 77. No. 2. Pp. 257–286.
8. Момзикова М.П., Великодная О.И., Пинский М.Я., Сироткин А.В., Тулупьев А.Л., Фильченков А.А. Оценка вероятности наблюдаемой последовательности в бинарных линейных по структуре скрытых марковских моделях с помощью апостериорного вывода в алгебраических байесовских сетях // Труды СПИИРАН. СПб: Наука, 2010. Вып. 2. С. 122–142
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика // т.VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. С.282.
10. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости // М. «Физматлит», 2005, 288 с.
11. Монин А.С., Яглом А.М. Статическая гидромеханика // М., «Наука», Часть 1, 1965, 640 с.; Часть 2, 1967, 720 с.
12. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика // М., «Наука», 1969, 824 с.
13. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя // М.: «Наука», 1974. 711 с.
14. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа // М.: «Наука», 1978. 736 с.
15. Хатунцева О.Н. О возможности описания стохастических процессов со скрытыми параметрами с помощью дифференциальных уравнений в частных производных // Математическое моделирование. Том 28, 2016 г. (принята к печати).
16. И.М. Соболь, Численные методы Монте-Карло, М., Физматлит, 1973.
17. Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M.N., Teller A. H., Teller E. Equation of state calculations by fast computing machines. J. Chem. Phys . 2 1, 1087–1092, 1953.

18. Green P. J. Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination. *Biometrika* 82, 711–732, 1995.
19. Никитин Н.В. Прямое численное моделирование трехмерных турбулентных течений в трубах кругового сечения // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа, 1994 №6, 14–26.
20. О.Н. Хатунцева. О влиянии учета изменения плотности вероятности случайных величин на динамику стохастического процесса // Электронный журнал “Физико-химическая кинетика в газовой динамике”. Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-11-20-010.pdf.
21. О.Н. Хатунцева Описание динамики марковских процессов в расширенном пространстве переменных // Журнал “Ученые записки ЦАГИ” Т. XLII №1 2011 г. стр. 62-85.
22. О.Н. Хатунцева О возможности использования аналитического подхода для нахождения логарифмического профиля скорости течения жидкости в трубе кругового сечения при больших значениях числа Рейнольдса // Журнал “Математическое моделирование”. Том 28, 2016 г. (принято к печати).
23. О.Н. Хатунцева Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задачах образования вязких “пальцев” и росте дендритов. “Сибирский журнал вычислительной математики” Т12, N2, 2009 г, стр.231-241.

Линейная неустойчивость течений Хагена-Пуазейля, плоского течения Куэтта и плоского течения Пуазейля

**Чефранов Сергей Георгиевич (ИФА РАН), Чефранов Александр Георгиевич
(Восточно-Средиземноморский университет, Северный Кипр)**
schefranov@mail.ru Alexander.chefranov@emu.edu.tr

Линейная теория гидродинамической устойчивости для течения Хагена– Пуазейля (ХП)) приводит к выводу о неограниченно большой пороговой величине числа Рейнольдса Re . Соответствующее противоречие с данными наблюдений в настоящее время обходят, предполагая, что неустойчивость течения ХП имеет жесткий характер и осуществляется только для возмущений имеющих конечную достаточно большую амплитуду. Эволюцию возмущений течения ХП рассматривают в рамках нелинейной теории гидродинамической устойчивости. Аналогичная ситуация имеет место и для плоского течения Куэтта (ПК). Для плоского течения Пуазейля (ПП) линейная теория уже лишь количественно не согласуется с данными экспериментальных наблюдений, определяя пороговое число Рейнольдса $Re= 5772$ (S. A. Orszag, 1971), которое, однако, намного превышает наблюдаемое значение $Re=1080$ (S. J. Davies, C. M. White, 1928).

В настоящей работе показано, что указанные выводы линейной теории об устойчивости для течений ХП и ПК при любых числах Рейнольдса и явно завышенное значение порогового числа Рейнольдса для течения ПП связаны с традиционным использованием представления поля возмущений, предполагающего возможность разделения продольной (вдоль направления течения) переменной от других пространственных переменных. Установлено, что при отказе от упомянутой традиционной нормальной формы представления возмущений могут быть получены выводы о линейной неустойчивости для течений ХП и ПК уже при конечных числах Рейнольдса (для течения ХП при $Re>704$, а для течения ПК при $Re>139$). Приведено в соответствие и вывода линейной теории устойчивости для течения ПП с экспериментом - теперь получена оценка минимального порогового числа Рейнольдса $Re=1040$. Получено и соответствие оценки для минимального порогового числа Рейнольдса в случае течения ПК с данными экспериментов S. Bottin, et.al., 1997, где порог устойчивости ламинарного течения ПК $Re > 150$ и H. J. Leutheusser, et.al., 1971, где наблюдался переход от ламинарного режима ПК к неламинарному при $Re > 140$.

Результаты новой линейной теории гидродинамической устойчивости для течений ХП, ПП и ПК опубликованы в следующих статьях.

1. С.Г. Чефранов, А.Г. Чефранов, ЖЭТФ, т.146, 373- 383, 2014
2. С.Г. Чефранов, А.Г. Чефранов, ДАН, т.463, №3, 290- 296, 2015
3. S.G. Chefranov, A. G. Chefranov, arXiv: 1509.08910 [physics.flu-dyn]v1 29 Sep 2015
(принята в ЖЭТФ)

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ПРИСТЕНОЧНОЙ ОБЛАСТИ
ОКОЛО ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ

В.И. Шалаев

Московский физико-технический институт, Центральный аэрогидродинамический институт, г. Жуковский

Представлен обзор исследований особенностей уравнений трехмерного конического ламинарного пограничного слоя в плоскости симметрии. Рассмотрены особенности, возникающие во внешней части вязкого слоя. Обнаружен и изучен новый тип особенностей в пристеночной области, механизм формирования которых не зависит от внешних краевых условий. Исследована порождаемая особенностями физическая структура течения, включающая многослойную область вязко-невязкого взаимодействия и пограничную область, описываемую укороченными уравнениями Навье-Стокса. Получены и проанализированы аналитические решения уравнений для некоторых асимптотических областей. Рассмотрены различные тела, включая плоские треугольные крылья.

В теории трехмерного пограничного слоя обычно полагается, что в окрестности плоскости симметрии, например, треугольных крыльев в сверх- или гиперзвуковом потоке, решение уравнений можно разложить в ряд Тейлора по нормальной к этой плоскости координате. Однако проведенные ранее исследования для внешней части пограничного слоя [1] показали, что в этой области имеется собственное решение, зависящее от поперечной координаты ζ по степенному закону с нецелым показателем степени, который может быть меньше единицы. В результате этого решение оказывается нерегулярным, а при значениях параметра $k \geq k_c = 1/3$ становится сингулярным. Было обнаружено, что течение около плоскости симметрии имеет сложную структуру и содержит вложенные асимптотические области, которые описываются укороченными уравнениями Навье-Стокса и уравнениями трехмерного взаимодействующего пограничного слоя.

Для упрощения формул рассмотрен пограничный слой на тонких телах при линейной зависимости вязкости от температуры и числе Прандтля $Pr = 1$. Течение описывается автомодельными уравнениями, которые в ортогональных криволинейных координатах x, y, φ имеют вид [2]:

$$\begin{aligned} u_{yy} &= Awu_\varphi - vu_y, \quad h = h_w + h_r u - \frac{\gamma-1}{2} M^2 u^2, \quad y = \sqrt{\frac{3\rho_\infty u_\infty l}{2x\mu_\infty}} \int_0^{y^*} \rho dy^*, \\ w_{yy} &= Aww_\varphi - vw_y + w\left(\frac{2}{3}u + Kw\right) - h\left(\frac{2}{3} + K\right), \\ y=0: & u=v=w=0, \quad h=h_w \quad (h_y=0); \quad y=\infty: u=w=h=1; \\ f_y &= u, \quad g_y = w, \quad v = f + Kg + Ag_\varphi, \quad A(\varphi) = \frac{2w_e(\varphi)}{3R(\varphi)}, \quad K(\varphi) = \frac{2w'_e(\varphi)}{3R(\varphi)}, \quad h_r = 1 - h_w + \frac{\gamma-1}{2} M^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x и y^* – координаты вдоль образующей и по нормали к ней, отнесенные к длине тела l , φ – поперечная координата, y – переменная А.А. Дородницина, $R(\varphi)$ – коэффициент Ламе, $f(y, \varphi)$ и $g(y, \varphi)$ – функции тока, $v(y, \varphi)$ – преобразованная нормальная скорость, M – число Маха. Плотность ρ , энтальпия h , вязкость μ , скорость вдоль образующей u и поперечная скорость w , отнесены к своим значениям на внешней границе пограничного слоя, обозначенным индексом ∞ , $\rho\mu = 1$; индексы φ и y обозначают дифференцирование по соответствующим переменным, штрихи – дифференцирование по аргументу.

Асимптотическое решение уравнений (1) во внешней части пограничного слоя при $y \gg 1$ ищется на основе разложения относительно краевых значений и введения новой переменной [1]. Не имеющее сингулярности при нулевом угле атаки решение представляется в виде:

$$\eta = \frac{y - \Delta(\varphi)}{\sqrt{a(\varphi)}}, \quad u = 1 + U(\eta), \quad w = 1 - b(\varphi)U(\eta), \quad v = y - \Delta(\varphi) \quad (2)$$

Здесь $\Delta(\varphi)$ – толщина вытеснения. Для функции $U(\eta)$, а также функций $a(\varphi)$ и $b(\varphi)$ в окрестности плоскости стекания $\varphi = \varphi_1$, получены следующие выражения [1]:

$$\begin{aligned} U &= C_1 \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right); \quad z = \varphi_1 - \varphi \ll 1, \quad k = -K(\varphi_1), \quad m = (3k)^{-1}, \quad n = k^{-1} \\ m \neq 1: & b = b_0(m) - b_m(m)\zeta^{2(m-1)}, \quad m = 1: b = b_0 - b_1 \ln \zeta, \end{aligned}$$

$$n \neq 1 : a = a_0(n) + a_n(n)\zeta^{2(n-1)}, \quad n = 1 : a = a_1 - 2n \ln \zeta \quad (3)$$

Здесь $C_1(k)$, a_n и b_m – постоянные. Из соотношений (3) следует, что при $k \geq 1/3$ во внешней части пограничного слоя становятся бесконечными возмущения поперечной скорости, а при $k \geq 1$ обе компоненты скорости растут экспоненциально – эта область соответствует отрыву [4]. Соотношения (3) соответствуют начальному условию в плоскости растекания, которое приводит к регулярному при $k \rightarrow 0$ решению (3), но сингулярно при $k \geq 1/3$ в плоскости стекания. Второе решение сингулярно в плоскости стекания при $k = 0$ и остается трехмерным для полностью осесимметричных условий; оно может иметь смысл для нестационарных задач, например, при резком изменении угла атаки до нуля.

В настоящей работе показано, что сингулярность может возникать также в пристеночной области и вследствие этого критическое значение параметра становится зависящим от чисел Маха M и Прандтля Pr , а также безразмерной температуры стенки h_w , $k_c = k_c(M, Pr, h_w) < 1/3$. Как оказалось, появление особенности в плоскости симметрии можно связать с отсутствием в ней локального решения, что для круглого конуса под углом атаки было обнаружено во многих работах и до сих пор не имело объяснения.

С этой целью рассмотрено автомодельное решение уравнений (1) в плоскости симметрии (стекания) $\varphi = \varphi_1$, которое вблизи поверхности тела ($y \ll 1$) представляется в виде разложений:

$$\begin{aligned} f_0 &= \tau_0 \frac{y^2}{2} + F_0(y), \quad u_0 = f_{0y} = \tau_0 y + U_0(y), \quad g_0 = \theta_0 \frac{y^2}{2} + G_0(y), \quad w_0 = \theta_{0y} + W_0(y) \\ v_0 &= \alpha y^2 + F_0(y) - kG_0(y), \quad \alpha = \frac{1}{2}(\tau_0 - k\theta_0) \end{aligned} \quad (4)$$

Функции $U_0(y)$ и $W_0(y)$ представляют решение в плоскости симметрии при малых y , но при $y \gg 1$ они должны расти не быстрее степенной функции, чтобы решение около стенки можно было срастить с решением в средней части пограничного слоя.

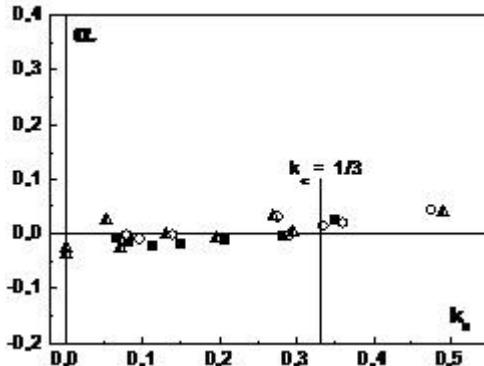


Рис. 1 Граница области отсутствия решений в плоскости симметрии конуса под углом атаки в зависимости от критического значения параметра k : ▲ – [2], ■ – [3], ○ – [4].

В первом приближении этим функции подчиняются линейным уравнениям, которые при $y \gg 1$ принимают вид:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{3} - r \right) \frac{\partial U_0}{\partial r} &= -\frac{\tau_0}{3} \left(\frac{3r}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad r = -\frac{\alpha y^3}{3}, \quad c = \frac{2(\tau_0 - 3k\theta_0)}{9\alpha} \\ r \frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{3} - r \right) \frac{\partial W_0}{\partial r} + cW_0 &= \frac{\beta_1}{3\alpha} - \left(\frac{3r}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\beta_2}{3\alpha} - \frac{\alpha_2}{3\alpha} U_0 \end{aligned}$$

где β_1 , β_2 и α_2 – известные постоянные. Решение для $U_0(y)$ находится в явном виде, для $W_0(y)$ – выражается через неполные гипергеометрические функции Куммера. При $r \gg 1$:

$$U_0 \sim r^{-\frac{2}{3}} e^r; \quad \alpha > 0 : W_0 \sim (-r)^c, \quad \alpha = 0 : W_0 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \left(r \mp \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right); \quad \alpha < 0 : W_0 \sim e^r r^{\frac{c-2}{3}}$$

При $\alpha < 0$ скорости растут экспоненциально при $y \gg 1$, а $\alpha = 0$ является границей области отсутствия решения в плоскости симметрии, что подтверждается расчетами разных работ [2-4], представленными на

рис. 1. Наличие отрицательных значений α в расчетах можно объяснить падением точности вычислений [1]. Видно, что при $k \geq 1/3$ для граничных решений $\alpha > 0$, что говорит о другом механизме сингулярности, связанным с особенностями решения во внешней области.

Исследование течения в плоскости стекания позволяет качественно изучить структуру течения в ее окрестности. С этой целью рассмотрены линии тока в поперечной основному течению плоскости. Нормальная поверхности тела v и поперечная w скорости течения около плоскости стекания в главном приближении представляются полиномами:

$$v = -\left(\alpha y^2 + \frac{1}{6} k b_0 y^3\right) = -\frac{1}{6} k b_0 y^2 (y + y_c), \quad y_c = \frac{6\alpha}{kb_0},$$

$$w = -k \zeta \left(\theta_0 y - \frac{1}{2} b_0 y^2\right) \approx -k \theta_0 \zeta y, \quad b_0 = p \left(\frac{2}{3} - k\right) h_w, \quad p = \frac{2}{3} - k.$$

Здесь параметр $-p$ есть безразмерный поперечный градиент давления в плоскости стекания. В плоскости $\zeta = 0$ может быть две критических точки, в которых нормальная к стенке скорость $v = 0$. Одна из них соответствует поверхности конуса $y = 0$, вторая точка $y = -y_c$ возникает при $\alpha < 0$, если $p > 0$, что соответствует малым углам атаки, и при $\alpha > 0$, если $p < 0$. Критическое значение угла атаки k_c исчезновения решения уравнений в плоскости стекания соответствует обычно благоприятному поперечному градиенту давления ($p > 0$) и появление второй критической точки в поле течения означает изменение физической структуры течения и, возможно, нарушение теории пограничного слоя.

Используя указанные представления скоростей, для линий тока в главном приближении получим уравнение:

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y + y_c}\right) dy = \beta \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad y(\zeta_0) = y_0, \quad \beta = \frac{\alpha}{k\theta_0}.$$

Здесь начальные значения y_0 и ζ_0 определяют субхарактеристику, проходящую через эту точку. Интеграл этого уравнения имеет вид:

$$\alpha \neq 0: y = \frac{y_c y_0 s^\beta}{y_c + y_0 (1 - s^\beta)}, \quad s = \left| \frac{\zeta}{\zeta_0} \right|,$$

$$\alpha = 0: y = \frac{y_0}{1 - y_0 d \ln s}, \quad d = \frac{ph_w}{6\theta}$$

Из этих соотношений следует, что при $\alpha \geq 0$ имеется одна особая точка – полуузел $\zeta = y = 0$, к которому стягиваются все линии тока, т.к. $v < 0$ и $s < 1$ (при $\alpha = 0$ – это седло-узел, седло находится в нижней полуплоскости). Вторая критическая точка $y = -y_c$ находится в нижней полуплоскости.

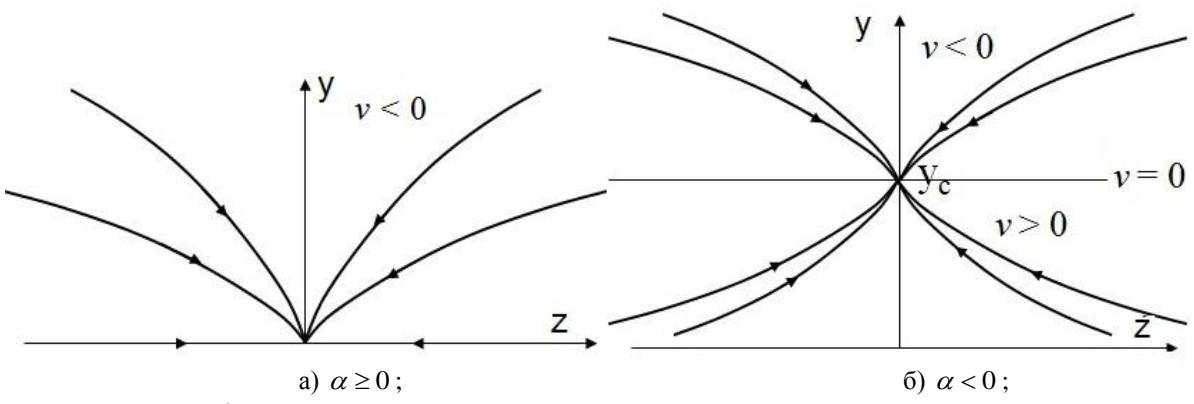


Рис. 2. Линии тока в поперечной плоскости при разных значениях параметра α .

Поведение линий тока показано на рисунках 2а и 2б. При $\alpha > 0$ единственная критическая точка находится в начале координат и линии тока стягиваются к ней из области $z \neq 0$, как показано на рисунке 2а, поскольку всюду $v < 0$ и поперечная скорость w направлена к плоскости симметрии. При $\alpha = 0$ $y_c = 0$ и начало координат $z = y = 0$ соответствует сдвоенной критической точке типа седло-узел: седло находится в нижней полуплоскости, а узел остается сверху и картина субхарактеристик в верхней полуплоскости

остается такой же, как при $\alpha > 0$. При $\alpha < 0$ узел передвигается в точку $z = 0$, $y = -y_c > 0$, а начало координат становится седловой точкой (рисунок 2б). В этом случае при $y > -y_c$ нормальная скорость $v < 0$, при $0 < y < -y_c$ $v > 0$ и $v = 0$ на линии $y = y_c$.

Таким образом, при $\alpha < 0$, в пристеночной области появляется новый слой и течение изменяет свою топологическую структуру по сравнению с той, которая имеет место для $\alpha \geq 0$ и сохраняется для $\alpha < 0$ при $y > y_c$. Автомодельное решение уравнений пограничного слоя в плоскости стекания для этого случая не существует, а в решении полных уравнений появляется особенность – продольное и поперечное трение стремится к бесконечности при $\zeta \rightarrow 0$, что демонстрируют расчеты пограничного слоя на тонком треугольном крыле малого удлинения с начальными данными на передней кромке. Главным приближением для такого течения является обтекание треугольной пластины. Возмущения безразмерного продольного ($f_i''(0, \xi)$) и поперечного ($g_i''(0, \xi)$) напряжений трения относительно этого состояния обусловлены с наличием эллиптического поперечного профиля крыла ($i = 2$, рисунок 3а) и слабым вязко-невязким взаимодействием ($i = 1$, рисунок 3б); $\xi = 1 - \zeta = 1$ соответствует плоскости симметрии, а $\xi = 0$ – передней кромке. Это означает, что в окрестности плоскости симметрии теория пограничного слоя неприменима. Эти результаты получены на основе весьма точных вычислений, обычные вычисления дают ненулевые значения поперечной скорости или трения в плоскости симметрии, что обусловлено неточностью разностной аппроксимации вблизи особенности, как показано в главе 6 монографии [1]. Следует отметить, что в решениях уравнений Навье-Стокса во вновь образовавшейся области течения около начала координат формируется вихрь [5].

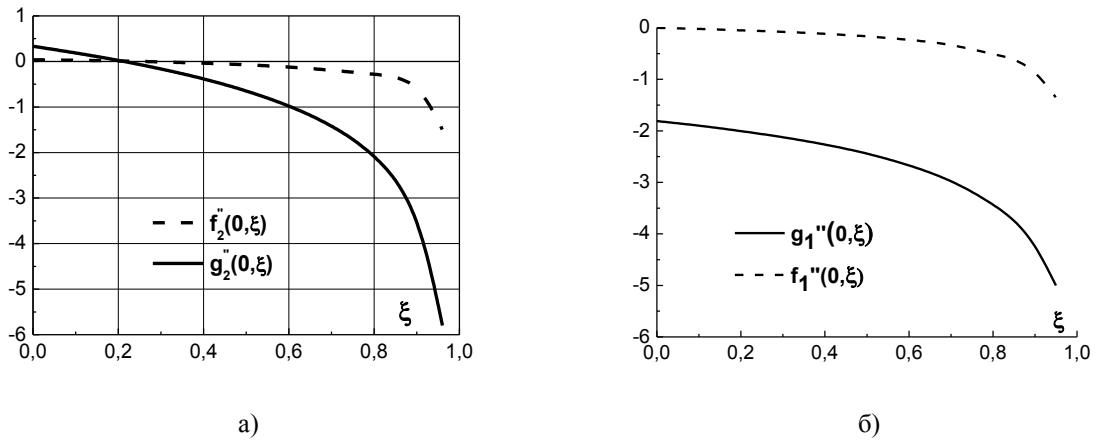


Рис. 3 Распределения возмущений напряжения трения на треугольном крыле малого удлинения, связанные с: а) вторым приближением для пограничного слоя; б) распределением толщины на эллиптическом конусе; число Maxa $M = 2$.

Во внешней области продольная скорость в этих случаях регулярна, а безразмерные скорости поперечного течения имеют особенности степенного типа по ζ [1]:

$$g'_2 = 1 + \left[c_1 \zeta^{-\frac{1}{4}} - 1 - (\gamma - 1) M^2 \right] U(\eta), \quad g'_1 = 1 + \left[c_1 \zeta^{-\frac{1}{2}} - 1 - (\gamma - 1) M^2 \right] U(\eta).$$

Обнаруженные здесь сингулярности продольной скорости связаны с их появлением в пристеночной области. Характер решения около плоскости симметрии определяется на основе предположения, о локальной автомодельности решения в ее окрестности при $\alpha > 0$ для того, чтобы трехмерное решение переходило в двумерное. Внешняя скорость в этой области в основном приближении имеет вид $w_e = -w_{e\varphi}(\varphi_1) \zeta$, а функции течения в пограничном слое у стенки представляются так в виде:

$$\begin{aligned} f(\eta, \zeta) &= a(\zeta) \left[\tau_0 \frac{\eta^2}{2} + F(\eta, \zeta) \right], \quad u(\eta, \zeta) = f_\eta = \tau_0 \eta + U(\eta, \zeta), \quad \eta = \frac{y}{a(\zeta)} \\ g(\eta, \zeta) &= a(\zeta) \left[\theta_0 \frac{\eta^2}{2} + G(\eta, \zeta) \right], \quad w(\eta, \zeta) = \theta_0 \eta + W_0(\eta, \zeta) \end{aligned}$$

$$v = a(\zeta) \left[\alpha\eta^2 + F(\eta, \zeta) - kG(\eta, \zeta) - k\zeta G_\zeta + k\zeta\eta \frac{a_\zeta}{a} (\theta_0\eta + G_\eta) - k\zeta \frac{a_\zeta}{a} \left(\frac{\theta_0}{2}\eta^2 + G \right) \right]. \quad (4)$$

С точностью до линейных членов уравнения в пристеночной области сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} U_{\eta\eta} + \alpha\eta^2 U_\eta &= -\alpha\tau\eta^2 - \tau_0 \left[F + kG \left(1 + \frac{a_\zeta}{a} \right) \right], \\ W_{\eta\eta} + \alpha\eta^2 W_\eta - \alpha_1 a^2 \eta W &= -a^2 \left\{ \beta_0 + \beta_1\eta - \beta_2\eta^2 + \theta_0 \left[F + kG \left(1 + \frac{a_\zeta}{a} \right) \right] - (\alpha_2\eta - \alpha_3)U_0 \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение этих уравнений должно переходить в решение уравнений в плоскости стекания для $\alpha \geq 0$. Для этого первые два члена уравнений должны быть инвариантны относительно преобразования (4), что и определяет функцию $a(\zeta)$:

$$\alpha a^2 - \frac{1}{2} k\theta_0 \zeta a a_\zeta = \alpha, \quad a^2 = 1 + C\zeta^q, \quad q = \frac{4\alpha}{k\theta_0}. \quad (6)$$

Из этого соотношения следует, что при $\alpha \geq 0$ решение уравнений пограничного слоя в пристеночной области не регулярно, а при $\alpha < 0$ имеет особенность и обращается в бесконечность, если $\zeta \rightarrow 0$. Представленные результаты не зависят от внешних краевых условий и справедливы как для сверхзвуковых, так и гиперзвуковых пограничных слоев. Они могут быть использованы для анализа особенностей ламинарного течения в плоскостях симметрии различных тел. Особенности численных решений уравнений трехмерного пограничного слоя в плоскости симметрии тонкого треугольного крыла на рисунке 3 удовлетворяет полученному критерию.

Работа выполнена при поддержке РФФИ по гранту № 15-01-03615.

1. Шалаев В.И. Применение аналитических методов в современной аэромеханике. Часть 1. Теория пограничного слоя. // М.: МФТИ, 2010. – 300 с.
2. Roux B. Supersonic laminar boundary layer near the plane of symmetry of a cone at incidence//J. Fluid Mechanics, 1972. V.51. № 1. P. 1-14.
3. Murdock J.W. The solution of sharp cone boundary layer equations in the plane of symmetry//J. Fluid Mechanics, 1972. V.54. № 4. P. 665-678.
4. Шалаев В.И. Об особенностях уравнений трехмерного пограничного слоя // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. Казань: Издательство Казанского университета, 2015. С. 4162–4165.
5. С.В. Александров, А.В. Ваганов, В.И. Шалаев. Численное исследование структуры гиперзвукового течения вязкого газа около треугольного крыла с затупленными передними кромками // Материалы Международной конференции «нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентности». М.: Издательство Московского университета, 2014. С. 14-16.

Особенности гиперзвукового течения вязкого газа около треугольного крыла с затупленными передними кромками

Шалаев В.И.^{1,2}, Александров С.В.^{1,2}, Ваганов А.В.²,

¹Московский физико-технический институт, ²Центральный аэрогидродинамический институт

Аннотация

На основе численных решений уравнений Навье-Стокса с помощью пакета ANSYS CFX на кластере ФАЛТ МФТИ исследована структура ламинарного течения около треугольного крыла с затупленными передними кромками. С помощью сравнений рассчитанного распределения тепловых потоков на поверхности крыла с экспериментальными данными проведена верификация метода моделирования. Проанализированы процессы образования вихревых структур и их взаимодействия с пограничным слоем. Изучены физические механизмы образования зон повышенных тепловых потоков на поверхности и раннего ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое, что позволило объяснить наблюдаемые экспериментально явления.

Ключевые слова: вязкий теплопроводный газ, гиперзвуковое течение, вихревые структуры, теплообмен, треугольное крыло, численное моделирование

1. Введение

Изучение гиперзвуковых пространственных течений вязкого теплопроводного газа является весьма актуальной проблемой современной аэродинамики и представляет значительный интерес с точки зрения приложений к разработке нового поколения высокоскоростных летательных аппаратов. Интенсивные исследования в этой области проводились в основном с использованием асимптотических методов и теории пограничного слоя [1], и в рамках такого подхода были выявлены основные параметры, управляющие рассматриваемым классом течений, изучены эффекты вязко-невязкого взаимодействия, распространения возмущений, возникновения отрыва в ламинарном пограничном слое, построены автомодельные решения, рассмотрены задачи теплообмена. В то же время, целый ряд наблюдаемых в опытах явлений еще не получил адекватного объяснения.

К таким явлениям относятся зоны аномально высоких тепловых потоков на наветренной поверхности треугольных крыльев с затупленными передними кромками, обнаруженные в экспериментах [2 – 7]. В АДТ Т-117 ЦАГИ проведены подробные исследования по влиянию на эти аномалии числа Маха, радиуса притупления и угла атаки, в процессе которых было выявлено наличие раннего ламинарно-турбулентного перехода, объяснить который в рамках обычных представлений не удавалось [2, 4, 7]. Во всех этих работах изучались в основном поверхностные явления с помощью саже-масляного или термоиндикаторного покрытий; плоские теневые картины течения не позволили прояснить подробную пространственную структуру течения и связать с ней наблюдаемые эффекты. Термоанемометрические измерения развития возмущений также не внесли ясность в существование проблемы [8].

Численное моделирование рассматриваемого течения проводилось в рамках параболизованных уравнений Навье-Стокса [9], уравнений Эйлера [10] и полных уравнений Навье-Стокса [11]. В работе [9] тепловое пятно, наблюдаемое на передней кромке крыла, было связано с перестройкой течения взрывного типа в окрестности вершины к режиму скользящего обтекания передней кромки. Была выдвинута гипотеза о появлении висячей ударной волны вследствие разворота потока и с ней связана S-образная форма головной ударной волны и локальное возрастание теплового потока. Однако, подробная визуализация течения теневым методом в [7, 8, 10] не обнаружила висячей волны в переходной области. Рядом с плоскостью симметрии крыла решения параболизованных уравнений Навье-Стокса [9] выявили наличие интенсивного продольного вихря, который удалось связать с наблюдаемой здесь экспериментально зоной экстремальных тепловых потоков, но сам механизм повышения теплопередачи прояснить не удалось. Следует отметить, что центральный вихрь обнаруживался и в решениях уравнений Эйлера [10], и было непонятно, каким образом чисто невязкое явление связано с вязким эффектом нагрева поверхности. Над средней по размаху частью наветренной поверхности крыла никаких особенностей структуры течения обнаружено не было, и причина возникновения здесь области повышенных тепловых потоков, а также раннего ламинарно-турбулентного перехода оставалась неясной.

Решения полных уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса [11] выявили наличие над этой частью крыла второго интенсивного вихря (или двух вихрей) продольной ориентации, который и приводил к образованию второй зоны экстремального теплообмена. Сравнение с экспериментальными данными [7] теплопередачи в окрестности теплового пятна на передней кромке позволяло надеяться, что метод моделирования [11] удовлетворительно описывает рассматриваемое течение. Расчеты четко связывали появление теплового пятна на кромке с областью сужения области течения между ударной волной и передней кромкой, возникающей вследствие перестройки течения от взрывной эволюции к режиму

обтекания скользящей кромки, и связанным с этим сужением гладким торможением и дальнейшим разгоном потока. Однако ряд деталей оставался неясным, и ряд важных физических особенностей обтекания не удалось интерпретировать. В частности, не были проанализированы механизмы образования вихрей и их взаимодействия с пограничным слоем на крыле, а именно эти явления лежат в основе всех наблюдавшихся экспериментально аномалий.

В настоящей работе, проведено подробное исследование структуры течения около треугольного крыла в рамках численных решений полных уравнений Навье-Стокса для ламинарного режима, поскольку все отмеченные выше аномалии связаны именно с ламинарным участком течения. Анализ результатов расчетов позволил выявить механизмы образования продольных вихрей, а также изучить взаимодействие вихрей с развивающимся пограничным слоем, что позволило определить физические принципы формирования зоны повышенных тепловых потоков, а также возникновения раннего ламинарно-турбулентного перехода.

В разделе 2 изложена постановка задачи, методы построения расчетной сетки и численного решения уравнений с использованием пакета программ ANSYS CFX (лицензией ФАЛТ МФТИ). В разделах 3 и 4 представлены результаты численного моделирования и их сравнение с экспериментальными данными. В разделе 5 проведен анализ результатов расчетов. В заключении приведены основные выводы. Все расчеты выполнены на кластере ФАЛТ МФТИ.

2. Постановка задачи

В настоящей работе рассмотрена задача гиперзвукового обтекания при условиях экспериментальных исследований в ударной трубе ЦАГИ УТ-1М [10, 12] треугольного крыла с углом стреловидности передних кромок $\chi = 75^\circ$, толщиной $\tau = 16$ мм, радиусом притупления кромок и носика $r_0 = 8$ мм, длиной $l = 570$ мм. Результаты численного моделирования представлены для числа Маха набегающего потока $M = 6$; единичного числа Рейнольдса $Re_{1,\infty} = 1.1556 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$, температуры торможения $T_0 = 750$ К, давления торможения $P_0 = 20$ Атм, углов атаки $\alpha = 0^\circ$ и 10° . Общий вид крыла, и используемая система декартовых координат с началом в центре сферического затупления носка показаны на рисунке 1.

Предполагается, что течение описывается полными уравнениями Навье-Стокса для сжимаемого, вязкого и теплопроводного совершенного газа, вязкость определяется законом Сазерленда. Поверхность крыла считалась изотермической с температурой $T_w = 290$ К; для скоростей на ней ставилось условия прилипания. На левой границе расчетной области фиксировались газодинамические параметры сверхзвукового однородного набегающего потока. На правой границе за крылом использовались «мягкие» условия, поток здесь был сверхзвуковым и не влиял на течение в расчетной области. Предполагалось, что течение симметрично относительно плоскости $Y = 0$, и для сокращения ресурсов рассматривалась только половина расчетной области.

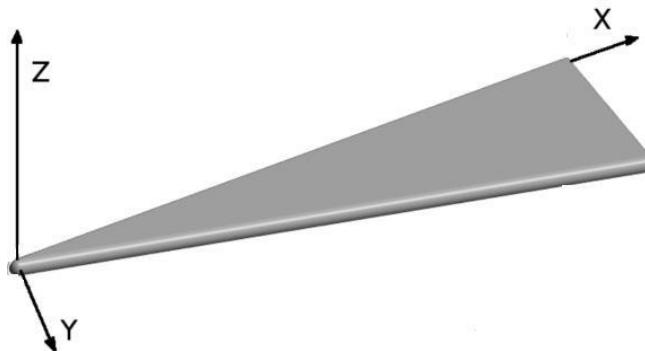


Рис. 1. Общий вид математической модели крыла

Для численной аппроксимации уравнений в декартовой системе координат использовался метод конечного объема и схема TVD с невозрастающей энтропией и ограничителем потока Барта-Джефферсона [13]. В настоящей работе для расчетов применялась реализация программы ANSYS CFX, обеспечивающая второй порядок точности аппроксимации по пространству и первый порядок по времени.

Для построения геометрической и сеточной моделей использовался пакет программ ANSYS ICEM CFD (лицензия ФАЛТ МФТИ). Размер расчетной области выбран так, чтобы головная ударная волна не пересекала внешнюю границу. В расчетах использовалась неструктурированная гексагональная сетка, построенная с применением блочного подхода, реализованного в модуле HEXA. Сеточная модель состоит из 7 блоков. Чтобы разрешить температурный и динамический пограничные слои, а также большие продольные градиенты физических величин, блоки с наименьшим шагом располагались у поверхности крыла и его вершины. Размер расчетной области в ортогональном поверхности тела

направлении составлял 170 ячеек, высота пристеночных ячеек фиксировалась и составляла 0.0015 мм. В температурном пограничном слое в окрестности вершины крыла располагалось минимум 10 ячеек и здесь была сосредоточена четверть всех расчетных узлов, что обеспечивало хорошее разрешение. Общий вид расчетной сетки представлен на рисунке 2.

Для численного моделирования было использовано 4 сеточных модели с 2, 4, 10 и 50 млн узлов. Рассматриваемая стационарная задача решалась методом установления до сходимости по невязке – максимальная невязка потоков на границе расчетной области составляла 10^{-6} , а внутри области – 10^{-4} . Решение находилось в несколько этапов с последовательным переходом к более мелким сеткам. На первом этапе расчета использовалась сетка с 2 млн узлов, а в качестве начального приближения задавался равномерный поток. Это решение являлось начальным приближением для расчетов на сетке с 4 млн узлов, которое, в свою очередь, использовалось как начальное приближение для решения на сетке с 10 млн узлов. Окончательное решение получалось для сеточной модели с 50 млн узлов, и все представленные результаты относятся именно к этой сеточной модели. Такой подход позволил существенно уменьшить время расчетов и получить сходящееся решение.

3. Численное моделирование распределений параметров на поверхности крыла

Распределения тепловых потоков на поверхности тел в гиперзвуковом потоке, а также предельных линий тока являются одними из основных результатов экспериментальных исследований в аэродинамических трубах и могут быть использованы для верификации численного моделирования. На рисунке 2 представлено сравнение рассчитанного распределения теплового потока на поверхности крыла при $\alpha = 0^\circ$ (верхняя часть рисунка) с экспериментальными данными, полученными в импульсной трубе УТ – 1М ЦАГИ при примерно тех же условиях (нижняя часть рисунка).

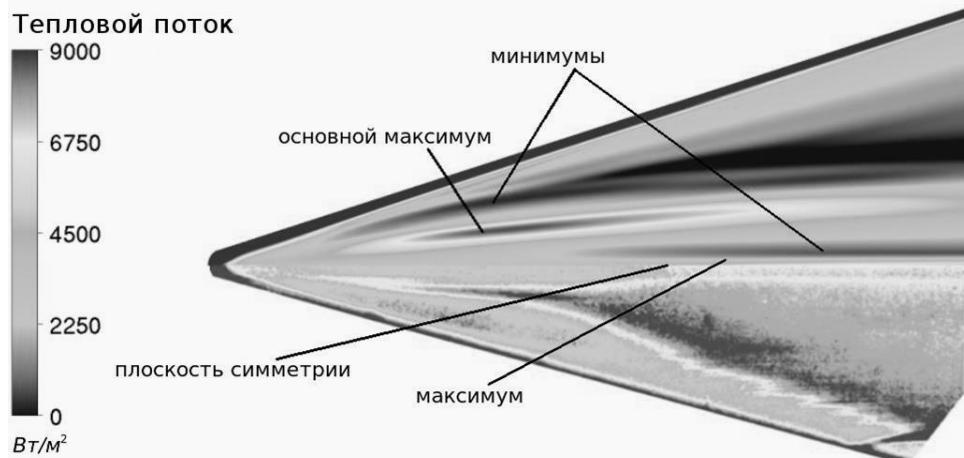


Рис. 2. Сравнение численного (верхняя часть) и экспериментального (нижняя часть) распределений теплового потока при $\alpha = 0^\circ$

В средней части крыла отчетливо выделяются узкие области интенсивного теплообмена с максимальным тепловым потоком $Q \approx 8000\text{--}9000 \text{ Вт}/\text{м}^2$. Как показано ниже, эти аномалии расположены под вихрями в пограничном слое, оси которых относительно полос находятся ближе к кромке крыла и примерно следуют направлению их внешних границ. Следует отметить, что тепловой поток в таких аномалиях повышается в 3-4 раза, что сопоставимо с эффектом ламинарно-турбулентного перехода и может приводить к нежелательным последствиям на реальных летательных аппаратах. В эксперименте эта область завершается резким расширением, которое обусловлено ламинарно-турбулентным переходом, механизм которого объяснен в настоящей работе. Ниже по течению, возле оси симметрии, имеются другие области повышенного теплообмена с меньшими значениями теплового потока $Q \leq 6750 \text{ Вт}/\text{м}^2$, которые связаны с двумя вытянутыми вдоль оси симметрии вихрями. Качественное согласие рассчитанных и экспериментальных распределений поверхностного теплообмена, по крайней мере, до начала ламинарно-турбулентного перехода, позволяет надеяться на возможность исследования структур рассматриваемого течения с помощью численного моделирования. При увеличении угла атаки до $\alpha = 10^\circ$ структура течения заметно изменяется, причем, распределения тепловых потоков на подветренной или нижней (рисунок 3а) и наветренной или верхней (рисунок 3б) поверхностях крыла существенно различаются.

На подветренной поверхности распределение теплового потока при $\alpha = 10^\circ$ (рисунок 3а) отчасти похоже на соответствующее распределение при $\alpha = 0^\circ$, но имеются качественные и количественные отличия. Область наиболее интенсивного теплового потока, подобная наблюдавшейся в средней части крыла при $\alpha = 0^\circ$, расположена ближе к плоскости симметрии, а максимальная величина теплового

потока в ней возросла до $10000-13000 \text{ Вт}/\text{м}^2$, т.е. заметно больше чем при отсутствии угла атаки. Ниже по течению и ближе к передней кромке имеется вторая область повышенного теплообмена, максимальный тепловой поток в которой ниже, чем в первой и составляет около $6500 \text{ Вт}/\text{м}^2$.

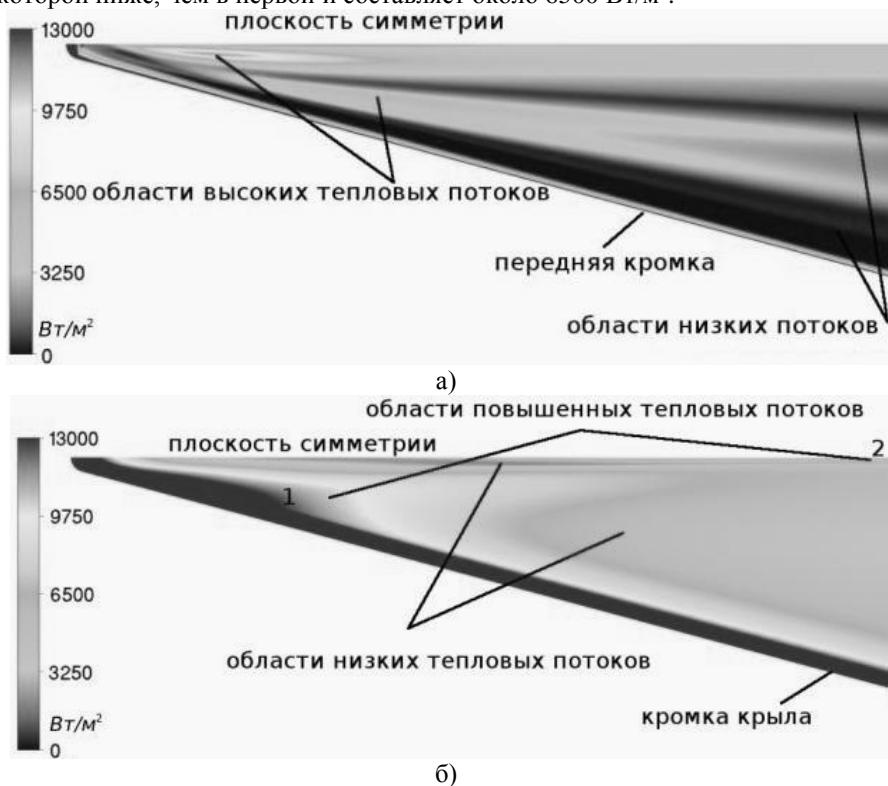


Рис.3. Распределение теплового потока на подветренной (а) и наветренной (б) поверхностях крыла при $\alpha = 10^\circ$

Распределение теплового потока на наветренной поверхности крыла при $\alpha = 10^\circ$ представлено на рисунке 3б и, как видно существенно отличается от результатов расчета на для нижней поверхности. Широкая зона 1 наиболее интенсивного теплового потока с максимальной величиной $10000-13000 \text{ Вт}/\text{м}^2$ расположена в передней части крыла у самой кромки, начиная от вершины. Граница этой области на большом протяжении примерно параллельна плоскости симметрии. Зона повышенного теплообмена 2 меньшей интенсивности около плоскости симметрии расположена значительно ниже по течению, как при $\alpha = 0^\circ$.

На рисунках 4а и 4б приведены распределения продольного трения на наветренной поверхности крыла при $\alpha = 0^\circ$ (рисунок 4а) и $\alpha = 10^\circ$ (рисунок 4б). Сравнение рисунка 4а с верхней частью рисунка 2 и сравнение рисунка 4б с рисунком 3б указывает на некую аналогию в распределениях теплового потока и продольного трения на крыле, однако максимумы и минимумы трения и теплового потока смешены относительно друг друга в поперечном направлении, на что указывают результаты расчетов распределений теплового потока (рисунок 5а) и поперечного трения (рисунок 5б) в отдельных сечениях на поверхности крыла при $\alpha = 0^\circ$. Эти результаты свидетельствуют о наличии вязкого механизма повышения теплообмена на стенке, связанного с ростом локального трения, который может быть обусловлен взаимодействием вихря с пограничным слоем. По осям ординат на рисунках 5а и 5б отложена безразмерная поперечная координата $\bar{Z} = Z / b(X)$, где $b(X)$ - полуширина крыла. По оси ординат на рисунке 5а представлены распределения размерного теплового потока $q(\bar{Z})$ в сечениях $X = 0,12, 0,22, 0,32, 0,42, 0,52 \text{ м}$ в единицах $\text{Вт}/\text{м}^2$, а на рисунке 5б – распределения в тех же сечениях поперечного напряжения трения $\tau_y(\bar{Z})$.

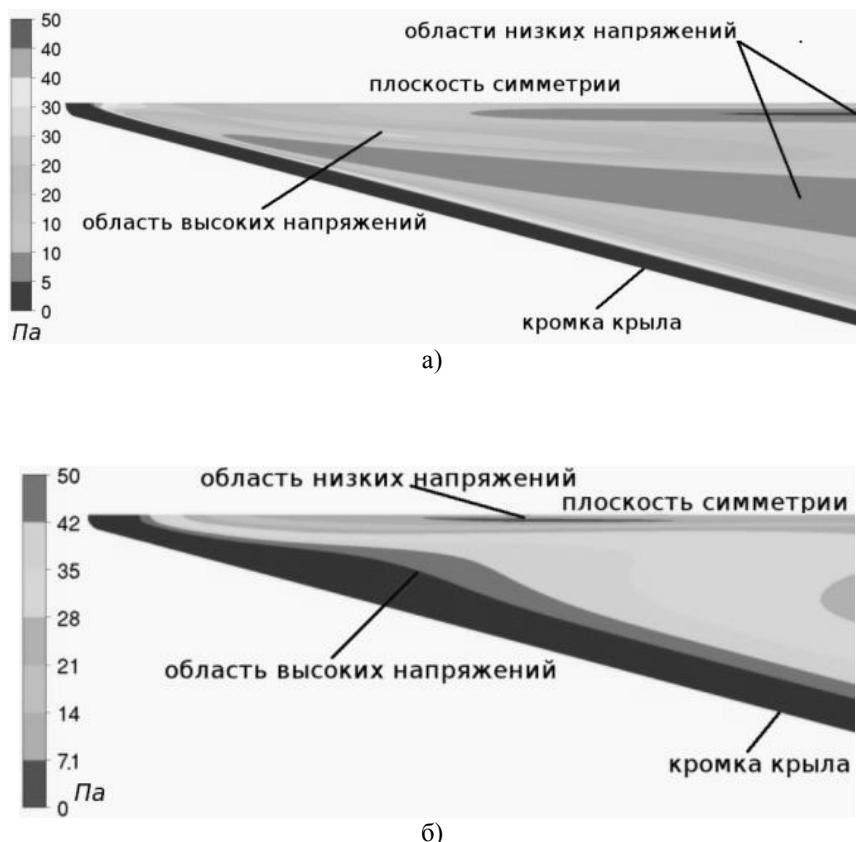


Рис. 4. Распределения продольного напряжения трения на наветренной поверхности крыла при $\alpha = 0^\circ$ (а) и $\alpha = 10^\circ$ (б)

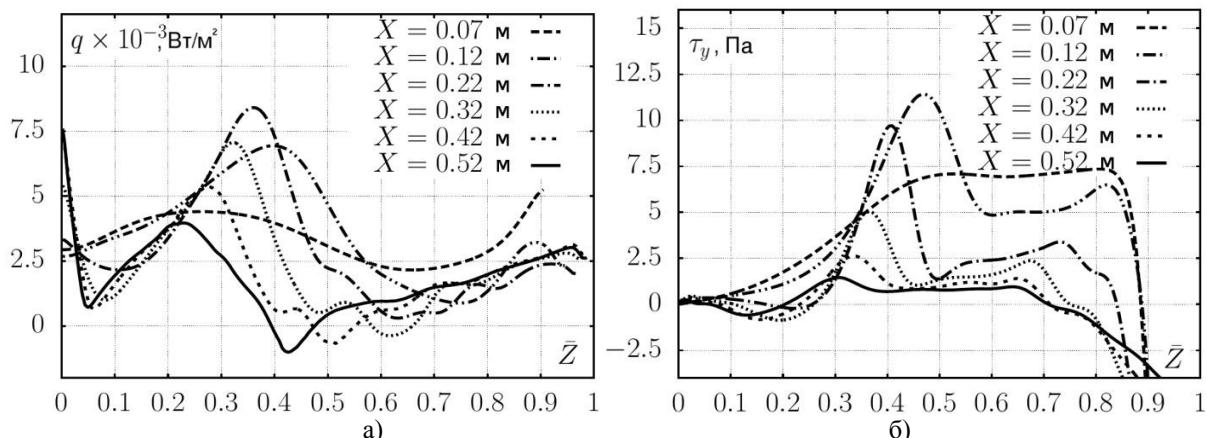


Рис. 5. Распределения теплового потока (а) и поперечного трения (б) на поверхности крыла при $\alpha = 0^\circ$ в сечениях $X = 0,07, 0,12, 0,22, 0,32, 0,42, 0,52 \text{ м}$

4. Результаты расчетов пространственной структуры течения

В настоящей работе рассматриваются физические особенности гиперзвукового течения, формирующиеся на подветренной поверхности крыла, которые имеют место в достаточно широком диапазоне углов атаки, как показывают результаты расчетов на рисунках 2 и 3а. Рассмотренные выше поверхностные аномалии могут быть объяснены в результате анализа пространственной структуры течения, которую мы подробно рассмотрим для угла атаки $\alpha = 0^\circ$. Общий вид структуры течения в поперечном сечении $X = 0,1 \text{ м}$ после формирования в окрестности вершины трех вихрей с приблизительно продольной ориентацией осей представлен на рисунке 6. Это сечение располагается в начале области повышенного теплового потока, распределение которого на поверхности показано в нижней части рисунка. Темная полоса на рисунке соответствует вязкому ударному слою с высокотемпературным газом, сформировавшемуся в окрестности вершины крыла. Видно, что около поверхности температура газа в этом сечении существенно ниже. Выше этого слоя, в невязкой области, образуется интенсивный вихрь с вращением по часовой стрелке, который и обнаруживается в решениях

уравнений Эйлера и параболизованных уравнений Навье-Стокса [9, 10], причем, в этих решениях он расположен прямо у плоскости симметрии.

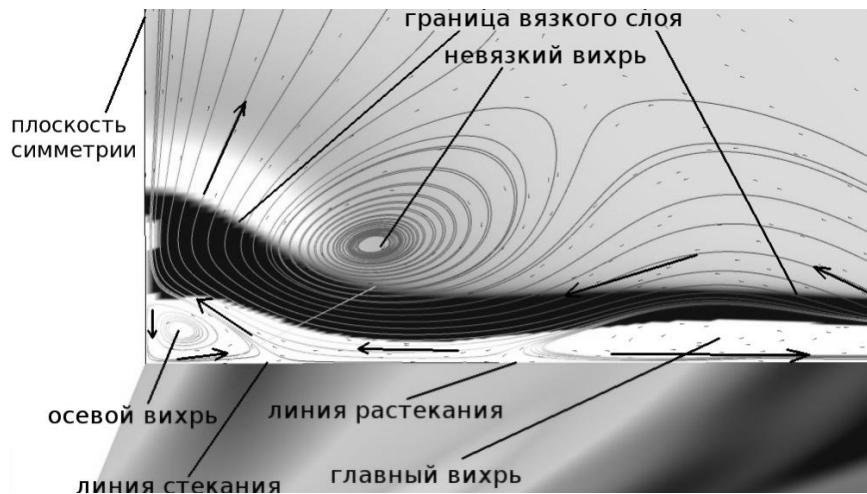


Рис. 6. Структура течения над поверхностью крыла в сечении $X = 0,1$ м; $\alpha = 0^\circ$

В вязком пограничном слое существуют два вихря, врачающихся против часовой стрелки, которые обнаруживаются только в решениях уравнений Навье-Стокса, полных или при отсутствии членов с продольной диффузией. Малый (осевой) вихрь расположен у самой плоскости симметрии, его формирование связано с необходимостью выполнения условий симметрии внутри вязкой области, которая описывается уравнениями Навье-Стокса; уравнения пограничного слоя здесь имеют особенность [14]. Интенсивность этого вихря мала, и повышение теплового потока под ним незначительно.

Второй (главный) вихрь расположен в средней по размаху части крыла. Из расчетов следует, что формирование этого вихря происходит при $X \approx 0,07$ м, на удалении 0,078 м (около 10 радиусов затупления) от вершины крыла, под воздействием двух противоположных тенденций: невязкого течения в ударном слое в направлении от передней кромки к плоскости симметрии, связанного с углом стреловидности передней кромки; вязкого течения от плоскости симметрии к кромке в пристеночной области пограничного слоя, обусловленного неблагоприятным поперечным градиентом давления. В результате диффузионного поглощения ударного слоя вязким течением и расширения пристеночной области эти две области с противоположным направлением скорости сближаются и при $X \geq 0,07$ м формируется закрученное течение. Этот процесс поясняет рисунок 7, на котором представлены линии тока пространственного течения в окрестности вершины крыла.

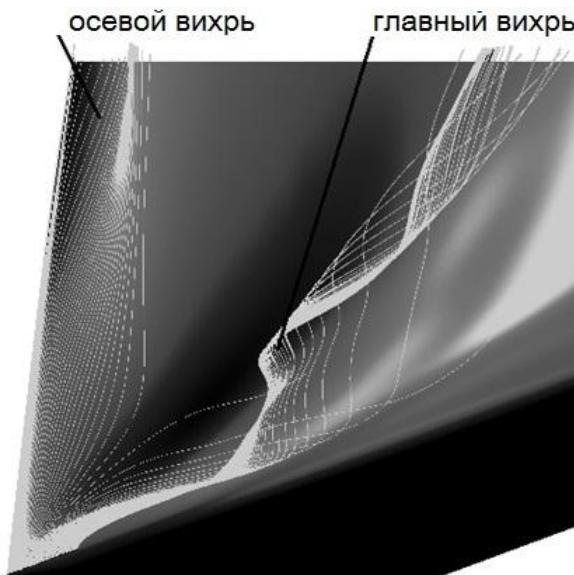


Рис. 7. Вихревая структура линий тока над поверхностью крыла $\alpha = 0^\circ$

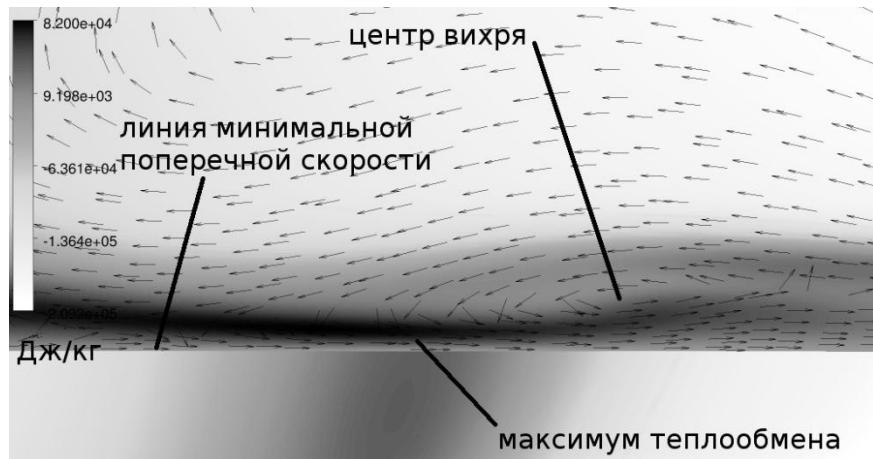


Рис. 8. Линии тока и распределение энтропии в сечении над точкой максимального теплового потока на поверхности: $X = 0,2$ м, $\alpha = 0^\circ$

На рисунке 8 приведены линии тока поперечного течения и распределение энтропии в сечении $X = 0,2$ м, приблизительно соответствующего максимуму теплового потока на поверхности под основным вихрем. Из этих данных, а также распределений теплового потока и поперечного трения (рисунок 5) следует, что образованная вихрем линия растекания на поверхности (точка торможения поперечного течения) расположена на границе области интенсивного теплообмена $\bar{Z}_c \approx 0,28$.

Точка максимального теплового потока находится примерно посередине между этой точкой и положением центра вихря. Эффект смещения точки максимума теплового потока относительно точки торможения поперечного течения объясняется на основе теории натекания двумерного потока на наклонную стенку [1]. Этот максимум соответствует максимальной интенсивности вихря и максимальным поперечным и продольным касательным напряжениям вдоль оси вихря, что демонстрируют профили поперечной (W) и продольной (U) скоростей в пограничном слое на рисунке 9.

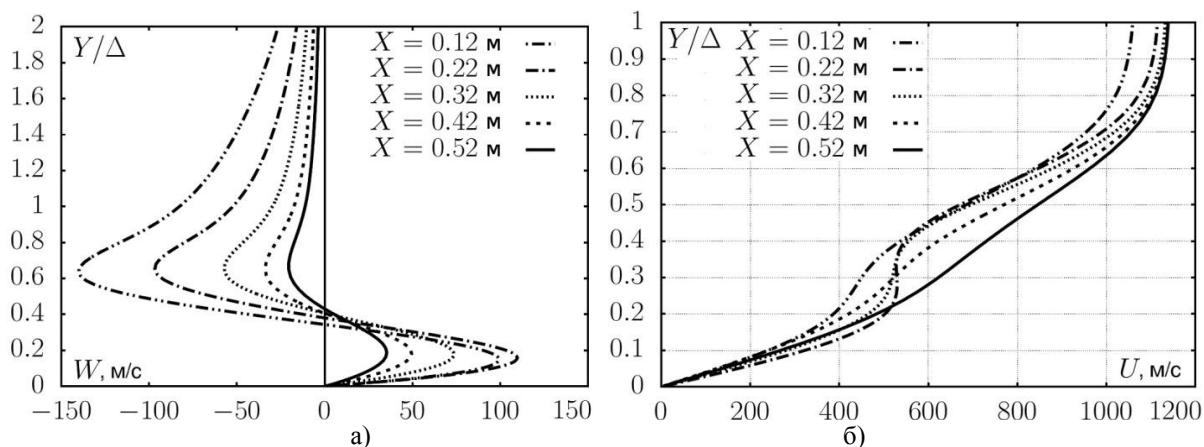


Рис. 9. Профили поперечной (а) и продольной (б) составляющих скорости вдоль оси вихря в сечениях $x = 0,12, 0,22, 0,32, 0,42, 0,52$ при $\alpha = 0^\circ$

После образования вихря в сечении $X \approx 0,07$ м его интенсивность возрастает, на что указывают профили поперечной скорости, и достигает максимума в сечении, соответствующему максимальному теплообмену на поверхности. Профиль продольной скорости в этом сечении становится полностью пологим на оси вихря, а поперечная скорость вблизи стенки достигает максимального значения $W \approx 110$ м/с. После прохождения этого сечения $X \approx 0,2$ м вихрь начинает ослабевать, поперечная скорость в пограничном слое уменьшается, а профиль продольной скорости становится все более наполненным, но точка перегиба на нем не исчезает.

5. Обсуждение результатов расчетов

Процесс образования и развития главного вихря обсужден в предыдущем разделе. Полученные в процессе численного моделирования результаты позволяют также определить физические механизмы, лежащие в основе двух основных экспериментальных эффектов: образование области повышенного теплообмена и развитие раннего ламинарно-турбулентного перехода в средней части крыла.

Прежде всего, следует отметить, что изменение теплового потока более чем в три раза, как показывают его распределения на рисунке 5а, невозможно объяснить наличием точки торможения поперечного течения. Энталпию в пристеночной области пограничного слоя можно определить соотношением $h = H_0 - \frac{1}{2}(U^2 + W^2)$, где H_0 - полная энталпия. Нормальная скорость V в

пограничном слое на порядок меньше поперечной скорости W , которая, в свою очередь в 10 раз меньше продольной скорости. Поэтому обращение в ноль поперечной скорости на линии растекания может изменить тепловой поток только на проценты. Тем не менее, из представленных результатов следует, что именно около этой линии формируется аномальное распределение теплового потока.

Второй параметр, который напрямую влияет на величину теплового потока на стенке – это продольное напряжение трения, и выше было отмечено подобие распределений продольного трения и тепловых потоков на крыле на рисунках 3 и 4. Поперечное напряжение трения в оценках можно не учитывать, поскольку оно на порядок меньше продольного. Однако здесь возникает другой парадокс – наибольшая деформация профиля продольной скорости и возрастание ее нормальной производной происходят вдоль оси вихря, а на его периферии существенно ослабевают. Поэтому следовало бы ожидать, что максимальный тепловой поток должен быть связан с осью вихря, а в расчетах он удален от нее и связан скорее с линией растекания.

Подробный анализ пространственной структуры течения показал, что в начальный период образования и развития вихря наиболее горячий газ располагается в ударном слое на внешней границе пограничного слоя, как показывает рисунок 6. Вихрь захватывает этот горячий газ и в процессе эволюции вниз по течению переносит его к поверхности за половину оборота вокруг оси, что демонстрирует рисунок 8. Внутри вихря, справа от линии растекания, горячий газ прижимается к стенке, где и формируется область повышенных тепловых потоков. Слева от линии растекания течение направлено к внешней границе и здесь тепловые потоки не растут.

Другим результатом взаимодействия вихря с пограничным слоем является образование профиля скорости, как внутри закрученной струи или вихря. Профиль продольной скорости внутри пограничного слоя имеет точку перегиба и даже становится пологим вблизи максимума интенсивности вихря ($X \approx 0,2$ м). Такой профиль скорости становится неустойчивым относительно невязкой моды Рэлея, что провоцирует существенно более ранний ламинарно-турбулентный переход, нежели волны Толлмина–Шлихтинга. Профиль же поперечной скорости приобретает S-образную форму вдоль оси вихря, что приводит к возбуждению волн поперечной неустойчивости (cross-flow instability), которые также приводят к более раннему переходу. Какое из этих явлений приводит к наблюдаемому экспериментально явлению (см. рисунок 2) может быть выяснено только в результате анализа гидродинамической устойчивости рассматриваемого течения, что выходит за рамки настоящей работы.

6. Заключение

На основе численного моделирования с помощью комплекса программ ICEM CFX исследована структура ламинарных гиперзвуковых течений вязкого газа около треугольного крыла с затупленными передними кромками. Вычисления проведены при экспериментальных условиях в ударной трубе УТ-1М ЦАГИ при числе Маха $M = 6$ и единичном числе Рейнольдса $Re_{1,\infty} = 1.1556 \cdot 10^6$ 1/м; рассмотрены углы атаки 0° и 10° . Рассчитанные распределения тепловых потоков качественно согласуются с экспериментальными данными.

Обнаруженные экспериментально полосы повышенных тепловых потоков вблизи плоскости симметрии и в средней части поверхности крыла обусловлены образованием продольных вихревых структур. Вихри имеют различную природу: вихрь у плоскости симметрии обусловлен условиями торможения течения, а главный вихрь – взаимодействием течения в пристеночной области пограничного слоя, направленного от плоскости симметрии, с противоположно направленным течением во внешней части вязкой области от кромки крыла. Вихри обусловлены взаимодействием вязкой и невязкой областей течения и получаются только при численном моделировании на основе уравнений Навье–Стокса, в решениях уравнений Эйлера и параболизованных уравнений Навье–Стокса они не обнаруживались. Полученный в этих решениях вихрь у плоскости симметрии имеет чисто невязкую природу.

Представленные результаты показывают, что в отличие от двумерных течений, где взаимодействие ударного и пограничного слоев определяется диффузионным процессом поглощения первого, в пространственных течениях возможен конвективный перенос горячего газа из ударного слоя в вязкую пристеночную область. Получено, что образование зон повышенных тепловых потоков в

средней части крыла связано с конвективным переносом вихрем горячего газа из ударного слоя к поверхности.

Взаимодействие вихря с пограничным слоем приводит к образованию точки перегиба на профиле продольной скорости и развитию неустойчивости Рэлея. Профиль поперечной скорости в пограничном слое вдоль оси вихря имеет S-образную форму, что приводит к возбуждению неустойчивых волн поперечной моды. Оба эти явления ведут к возникновению более раннего ламинарно-турбулентного перехода, нежели развитие волн Толлмина-Шлихтинга, что объясняет экспериментально наблюдаемые явления.

Работа выполнена при поддержке РФФИ по гранту № 15-01-03615.

Список используемых источников

1. Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа // М.: Физматлит, 2004.— 455 с.
2. Кондратьев И.А., Юшин А.Я. О локальном увеличении теплового потока на нижней поверхности треугольного крыла с затупленными передними кромками // Аэродинамика воздушно-космических систем. Сборник докладов ежегодной научной Школы-семинара ЦАГИ "Механика жидкости и газа". — 1990. — Т. 1. — С. 167 – 175.
3. Губанова О.И., Землянский Б.А., Лесин А.Б., Лунев В.В., Никулин А.Н., Сюсин А.В. Аномальный теплообмен на наветренной стороне треугольного крыла с затупленным носком при гиперзвуковом обтекании // Аэродинамика воздушно-космических систем. Сборник докладов ежегодной научной Школы-семинара ЦАГИ. Механика жидкости и газа — 1990. — Ч. 1. — С. 188–196.
4. Ковалева Н.А., Колина Н.П., Юшин А.Я. Экспериментальное исследование теплообмена и ламинарно-турбулентного перехода на моделях треугольного полукрыла с затупленной передней кромкой в сверхзвуковом потоке // Ученые записки ЦАГИ. — 1993. — Т. XXIV, № 3. — С. 46–52.
5. Лесин А.Б., Лунев В.В. О пиковых тепловых потоках на треугольной пластине с притупленным носком в гиперзвуковом потоке // МЖГ. — 1994. — № 2. — С. 131–137.
6. Лунев В.В. Течение реальных газов с большими скоростями. — М.: Физматлит, 2007.
7. Бражко В.Н., Ваганов А.В., Дудин Г.Н. и др. Экспериментальное исследование особенностей аэродинамического нагревания треугольного крыла при больших числах Маха // Труды МФТИ. — 2009. — Т. 3. — С. 58–67.
8. А.В. Ваганов, Ю.Г. Ермолаев, А.Д. Косинов, Н.В. Семенов, В.И. Шалаев. Экспериментальное исследование структуры течения и перехода в пограничном слое треугольного крыла с затупленными передними кромками при числах Маха 2, 2,5 и 4 // ТРУДЫ МФТИ. — 2013. — Том 5, № 3. С. 164-173.
9. Власов В.И., Горшков А.Б., Ковалев Р.В., Лунев В.В. Тонкая треугольная пластина с притупленным носком в вязком гиперзвуковом потоке // МЖГ. — 2009. — № 4. — С. 134–145.
10. В.Н. Бражко, А.В. Ваганов, В.Е. Мошаров, В.Н. Радченко, С.В. Чернов Расчетно-экспериментальное исследование структуры течения около наветренной поверхности затупленного треугольного крыла // Материалы одиннадцатой Международной школы-семинара "Модели и методы аэродинамики". — М.: МЦНМО. — 2011. — С. 28-29.
11. В.Н. Бражко, А.В. Ваганов, В.Я. Нейланд, М.А. Стародубцев, В.И. Шалаев. Моделирование особенностей обтекания наветренной стороны треугольного крыла с затупленными передними кромками на основе численного решения уравнений Навье–Стокса // ТРУДЫ МФТИ. — 2013. — Том 5, № 2. С. 13 – 22.
12. Александров С.В., Ваганов А.В., Шалаев В.И. Физические механизмы возникновения зон повышенных тепловых потоков и раннего ламинарно-турбулентного перехода в гиперзвуковом пограничном слое на треугольном крыле с затупленными передними кромками // Материалы четырнадцатой Международной школы-семинара "Модели и методы аэродинамики". — М.: МЦНМО. — 2014. — С. 13-14.
13. Barth T. J., Jespersen D. C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // In 27th Aerospace Sciences Meeting. AIAA paper 89-0366. — 1989.
14. Шалаев В.И. Применение аналитических методов в современной аэромеханике. Часть 1. Теория пограничного слоя. // М.: МФТИ. — 2010. — 300 с.

Применение пакета прикладных программ Turbo Problem Solver (TPS) для численного моделирования развития неустойчивости Рэлея-Тейлора

В.В. Шепелев, С.В. Фортова, А.П. Пронина

Исследование Рэлей-Тейлоровской неустойчивости (РТН), "неустойчивости тяжелого над легким", представляет фундаментальный и прикладной научный интерес. Неустойчивость Рэлея-Тейлора встречается в астрофизике, в физике плазмы. Один из известных механизмов образования турбулентности через вихревые каскады [1] также может реализовываться путем развития РТН. Несмотря на большое количество работ по РТН, опубликованных в последние десятилетия, исследование механизмов ее образования до сих пор актуально.

Численное моделирование РТН осуществляется с помощью программного комплекса Turbo Problem Solver [2]. Пакет прикладных программ Turbo Problem Solver реализует обобщенный и современный подход к построению вычислительных кодов, основанный на гиперболичности решаемых уравнений. Гиперболичность дает возможность локально расщепить в любой точке расчетной области систему N-го порядка на N независимых уравнений в характеристических переменных, и записать соответствующую систему разностных уравнений в консервативной либо неконсервативной матричной форме. Для решения задач, описывающих различные физические процессы, пакет предоставляет пользователю несколько численных схем и программные блоки, содержащие специфические для задачи начальные, граничные условия и массовые силы. Пакет написан на языке C++ и является расширяемым программным продуктом и позволяет пользователю внедрять свои разработки в программный код. Для распараллеливания используется стандартный интерфейс обмена сообщениями MPI.

Представленная в работе модель РТН основана на численном интегрировании уравнений Эйлера для двухкомпонентной невязкой сжимаемой среды. Рассматривается РТН в системе из двух смешивающихся идеальных газов в постоянном гравитационном поле. Расчетная область представляет собой параллелепипед, в котором в начальный момент времени легкий и тяжелый газы занимают два смежных горизонтальных слоя. Граница между слоями подвергается возмущению. Сила тяжести направлена вертикально вниз, распределение давления линейно вдоль вертикальной оси.

Исследуется развитие неустойчивости в трех задачах:

1. Одномодовое возмущение вертикальной компоненты скорости границы, развивающееся в пузырь из легкого газа, всплывающий вертикально вверх в слое тяжелого газа. Исследуется и сравнивается с известными теоретическими и численными оценками кинематика движения границы пузыря.
2. Многомодовое возмущение вертикальной компоненты скорости границы, в котором развиваются сразу несколько пузырей.
3. Случайное возмущение плотности, в котором пузыри сразу начинают перемешиваться.

Показан процесс выбора и этапы настройки классов пакета TPS для численных экспериментов в описанных постановках. Для расчетов использовался конечно-разностный метод крупных частиц и конечно разностный монотонный гибридный метод Белоцерковского-Гущина-Коньшина [3]. Приведены результаты расчетов, показывающие рост и развитие РТН в указанных постановках. Производится сравнение с теоретическими и численными оценками из работ [4], [5].

Список литературы

1. С. В. Фортова, Вихревой каскад неустойчивостей и переход к турбулентности, Журнал вычислительной математики и математической физики, том 54, номер 3 (2014), 536–544.
2. Фортова С. В., Программный пакет для решения гиперболических систем уравнений, Журнал математического моделирования, том 25, номер 5 (2013), 123–135.
3. Белоцерковский О. М., Опарин А. М., Чечеткин В. М., Турбулентность: новые подходы, Наука, М., 2002
4. Oparin A. and Abarzhi S., Three-dimensional bubbles in Rayleigh-Taylor instability, Phys. Fluids, 11, No. 11, 3306-3311 (1999).
5. Белоцерковский О. М., Опарин А. М., Численный эксперимент: от порядка к хаосу, Наука, М., 2000.

Пульсации плотности в турбулентном течении воздуха и аргона и их взаимодействие с ударной волной

Шугаев Ф. В., Терентьев Е. Н., Докукина О. И., Штеменко Л. С.

Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 119991, Ленинские горы

Экспериментально исследованы пульсации плотности в турбулентном течении воздуха и аргона в ударной трубе и их взаимодействие с ударной волной, отражённой от перфорированного торца ударной трубы. Число Маха падающей волны изменялось в пределах от 1.9 до 3.5, число Маха отражённой волны – от 1.4 до 2.4. Определен масштаб турбулентных пульсаций за падающей волной. За отражённой волной он в несколько раз меньше. Получены фазовые траектории турбулентных пульсаций.

Взаимодействие ударной волны с турбулентностью – это существенно нелинейный процесс, в котором оба явления влияют друг на друга. Ударная волна усиливает турбулентные пульсации [1], а турбулентность приводит к уширению зоны ударного перехода [2]. Масштаб турбулентности, как и уровень турбулентных пульсаций, является одним из основных параметров, определяющих свойства турбулентного потока, особенно его способность к перемешиванию. Ранее масштаб турбулентных пульсаций плотности за ударной волной был определён в работах [3-5] при числах Маха волны, близких к единице. Он оказался равным 0.5 мм. В экспериментах был использован метод спектр-интерферометрии.

Настоящие эксперименты выполнены в ударной трубе прямоугольного сечения 40x60 мм². Длина канала составляла 3 м. Турбулизация потока осуществлялась сеткой, за которой образовывались вихревые кольца. В результате возникал турбулентный поток. Ударная волна отражалась от перфорированного торца ударной трубы и взаимодействовала с турбулентным потоком. Число Маха падающей волны изменялось в пределах от 1.9 до 3.5, число Маха отражённой волны – от 1.4 до 2.4. Рабочими газами служили воздух и аргон. Как известно, в аргоне отсутствует взаимодействие ударной волны с пограничным слоем на стенках трубы, что позволяет не учитывать влияние упомянутого эффекта при анализе экспериментальных данных [6,7].

Плотность за фронтом ударной волны и турбулентные пульсации плотности измерялись с помощью лазерного шлирен-метода [8]. Луч гелий-неонового лазера с гауссовым профилем интенсивности пересекал под прямым углом рабочую секцию и падал на секционированный фотодиод. Сигнал с фотодиода поступал на цифровой осциллограф. Когда лазерный луч проходит через турбулентный поток, интенсивность луча, падающего на фотодиод, меняется благодаря дифракции. Мы рассматриваем рабочую секцию ударной трубы как фазовый экран. Пройдя через рабочую секцию, луч меняет фазу на величину

$$\Delta\varphi = 2\pi \Delta n w / \lambda,$$

где Δn – изменение показателя преломления, λ – длина волны луча, w – ширина рабочей секции. Далее мы считаем набег фазы малым. Для расчёта плотности необходимо знать аппаратную функцию лазерного шлирен-метода. Из уравнений Максвелла в скалярном случае следует

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0,$$

где c – скорость света, а

$$E(x_1, x_2, x_3, t) = v(x_1, x_2, x_3) \exp(i\omega t), v(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2, z) \exp(-ikz), k = 2\pi/\lambda.$$

В приближении медленно меняющейся амплитуды получаем параболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Решение параболического уравнения позволяет найти аппаратную функцию $F(\xi)$

$$\begin{aligned} F(\xi) &= -C_{cal} \left(0.5\sqrt{0.5\pi/a_1} / a_0 \right) \{ -i \exp(q_1) \sigma_1 + i \exp(q_2) \sigma_2 \}, \\ q_1 &= 0.5i\psi(-a_1 - i(a_2 + a_3) - r \exp(-i\psi))\xi^2, \\ q_2 &= -0.5i\psi(-a_1 + i(a_2 + a_3) - r \exp(i\psi))\xi^2, \\ \sigma_1 &= \operatorname{erf}(q_3 q_5) - \operatorname{erf}(q_3 q_6) - \operatorname{erf}(q_3 q_7) + -\operatorname{erf}(q_3 q_8), \\ \sigma_2 &= \operatorname{erf}(q_4 q_9) - \operatorname{erf}(q_4 q_{10}) - \operatorname{erf}(q_4 q_{11}) + \operatorname{erf}(q_4 q_{12}), \\ q_3 &= \exp(-0.5i\psi)\sqrt{r}, \quad q_4 = \exp(0.5i\psi)\sqrt{r}, \quad q_5 = -i\xi + a_3 l_2 / r, \\ q_6 &= -i\xi + a_3 l_1 \exp(i\psi) / r, \quad q_7 = -i\xi - a_3 l_1 \exp(i\psi) / r, \\ q_8 &= -i\xi - a_3 l_2 \exp(i\psi) / r, \quad q_9 = -i\xi + a_3 l_2 \exp(-i\psi) / r, \\ q_{10} &= i\xi + a_3 l_1 \exp(-i\psi) / r, \quad q_{11} = i\xi - a_3 l_1 \exp(-i\psi) / r, \\ q_{12} &= i\xi - a_3 l_2 \exp(-i\psi) / r, \quad \alpha = 2/k, \quad a_0 = 1 + \alpha a, \quad a_1 = 1/a_0, \quad a_2 = \alpha a a_1, \\ a_3 &= 0.5k/b, \quad r = \left(a_1^2 + (a_2 + a_3)^2 \right)^{0.5}, \quad \psi = \operatorname{arctg}((a_2 + a_3)/a_1). \end{aligned}$$

Здесь a, b – расстояния между лазером и рабочей секцией и между рабочей секцией и фотодиодом, соответственно. Величина l_1 есть сторона квадратной чувствительной ячейки фотодиода, l_2 есть зазор между двумя ячейками. Величина C_{cal} – это калибровочная постоянная, определяемая в предварительных опытах путём перемещения лазерного луча вдоль поверхности фотодиода. Плотность турбулентного потока определяется из интегрального уравнения

$$V(t) = \frac{2\pi}{\lambda} K_{GD} w \int_{-\infty}^{+\infty} F(s - v_s t) \Delta\rho(s) ds.$$

Здесь $V(t)$ – сигнал, снимаемый с осциллографа, v_s – скорость турбулентного потока, K_{GD} – постоянная Гладстона-Дэйла. Интегральное уравнение может быть решено с помощью преобразования Фурье, а также другими методами.

Амплитуда турбулентных пульсаций плотности составляла в среднем 0.5% от значения плотности за падающей ударной волной. В турбулентном потоке наблюдались возмущения, частота которых значительно меньше частоты турбулентных пульсаций. Эти низкочастотные возмущения отфильтровывались с помощью стандартных программ. Высокочастотные сигналы обрабатывались статистическими методами. За падающей волной получены корреляционные функции пульсаций плотности и их фазовые траектории. Как известно, сеточная турбулентность в максимально возможной степени однородна и изотропна. За отражённой волной турбулентность уже нельзя считать изотропной.

На рис.1 показана корреляционная функция пульсаций плотности в воздухе за падающей ударной волной. По оси абсцисс отложено расстояние в м. Кружки соответствуют целочисленным значениям времени. При нахождении масштаба турбулентности использована гипотеза Тейлора о замороженности турбулентности.

На рис. 2 представлена зависимость масштаба турбулентных пульсаций плотности в аргоне за падающей волной от числа Маха волны. Как видно из графика, масштаб турбулентности меняется от 0.3 мм до 0.5 мм при изменении числа Маха волны от 1.9 до 3.1. В воздухе масштаб турбулентности больше на 20-30% при прочих равных условиях. Он меняется от 0.4 мм до 0.8 мм при изменении числа Маха волны от 1.9 до 3.5.

За отражённой ударной волной масштаб турбулентности уменьшается в несколько раз в зависимости от числа Маха волны и начальной плотности в канале.

Следует отметить, что уровень пульсаций плотности за отражённой волной с течением времени уменьшается. На рис. 3а дана фазовая траектория пульсаций плотности за падающей волной, на рис. 3б – за отражённой волной в аргоне. По оси абсцисс отложено время в мкс , по двум другим осям – плотность и её производная по времени. Видно, что за отражённой волной через 200 мкс уровень пульсаций плотности уменьшается приблизительно в два раза.

Уменьшение уровня пульсаций можно объяснить следующим образом. Благодаря взаимодействию между вихревыми кольцами за падающей волной возникают акустические возмущения. Отражённая волна усиливает их. Возникает резонансное рассеяние акустических волн на вихревых кольцах [9]. Вихревые кольца становятся неустойчивыми и распадаются на более мелкие. Это и приводит к уменьшению уровня пульсаций давления и плотности.

Литература

1. Азарова О. А./// Журн. выч. матем . и матем. физ., 44(3), 532, (2004).
2. Nathan E. Grube, Ellen M. Taylor , M. Pino Martin// AIAA J.,480 (2011).
3. Wintrich H., Merzkirch W./// Shock Waves IV. Proc. 19th Int. Symp. on shock waves. Marseille, France, 26-30July 1993. 319.
4. Vitkin D., Merzkirch W., Fomin N./// J. Visualization, 1(1), 29 (1998).
5. Fomin N., Lavinskaya E., Merzkirch W., Vitkin D.///Shock Waves, 10, 345 (2000).
6. Strelow R., Cohen A./J. Chem. Phys., 30 (1), 257 (1959).
7. Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М. (1977).
8. Bystrov S. A., Honma H., Ivanov V. I., Koreeda J., Maeno K., Shugaev F. V., Yanagisawa H.///Shock Waves, 8, 183 (1998).
9. Копьёв В. Ф., Леонтьев Е. А.///Изв. АН СССР. Сер. мех. жидк. и газа. 22, 398 (1987).

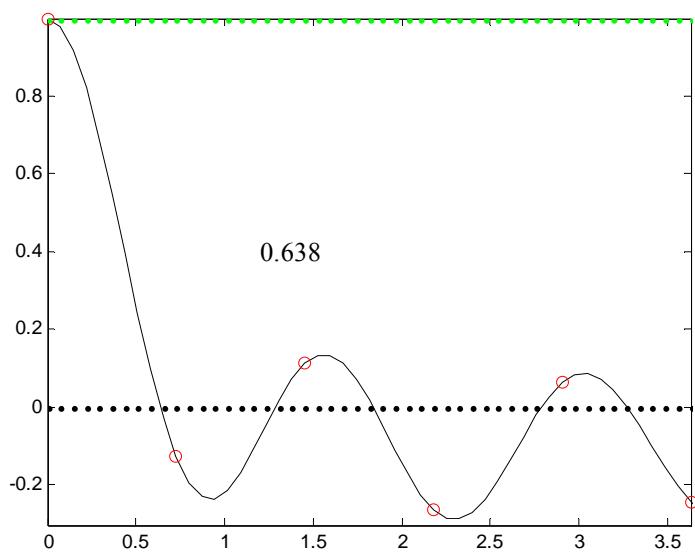


Рис.1. Корреляционная функция пульсаций плотности в воздухе за падающей ударной волной.

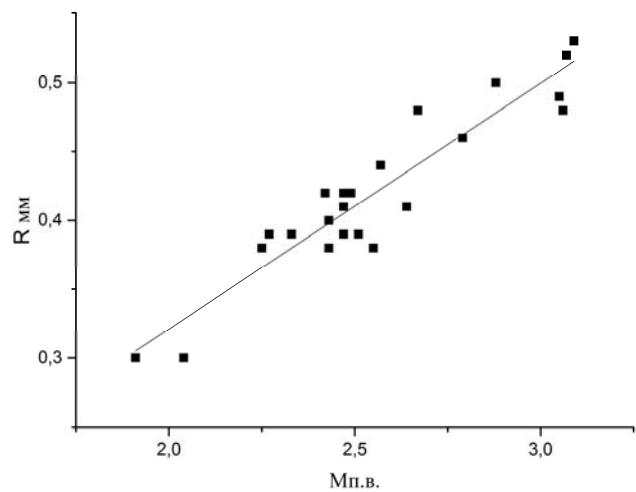


Рис.2. Зависимость масштаба турбулентных пульсаций плотности в аргоне за падающей волной от числа Маха волны.

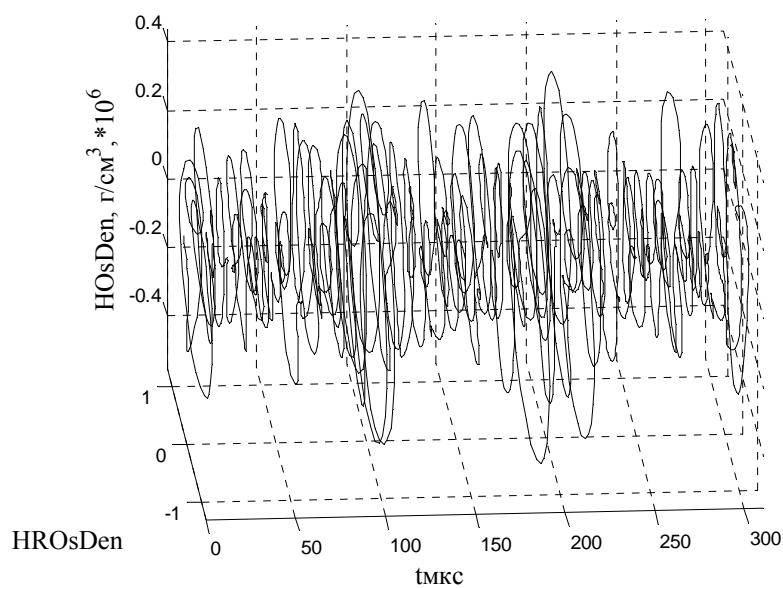
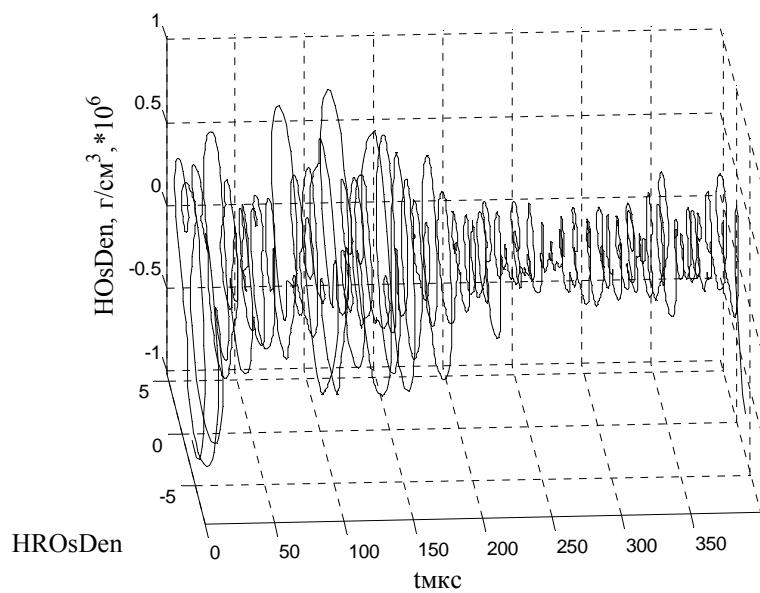
*a)**б)*

Рис.3. Фазовая траектория пульсаций плотности за падающей волной (*а*) и за отражённой в аргоне (*б*).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСРЕДНЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕМ КОНТЕЙНЕРЕ С УПРУГОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ГРАНИЦЕЙ

В.Д. Щипицын, Н.В. Козлов

Лаборатория вибрационной гидромеханики,

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Пермь

В представленной работе проводится экспериментальное исследование осредненных течений изотермической жидкости, возникающих в осциллирующем контейнере цилиндрической формы с упругой деформируемой границей. Изучается влияние параметров вибраций (частоты и амплитуды) и жидкости на структуру и интенсивность генерируемых потоков и закономерности их трансформации. Картина возбуждаемых течений и их численные характеристики изучаются с помощью PIV-методики. Эксперименты проводятся в двумерной постановке в широком интервале безразмерных частот.

Обнаружено, что структура осредненных течений определяется безразмерной частотой вибраций $\omega \equiv \Omega R^2 / v$ (рис. 1). Выделено три характерных диапазона безразмерных частот: низкие, умеренные и высокие, для каждого из которых характерна своя картина течений. Осредненные течения в высокочастотной и низкочастотной области имеют противоположные направления.

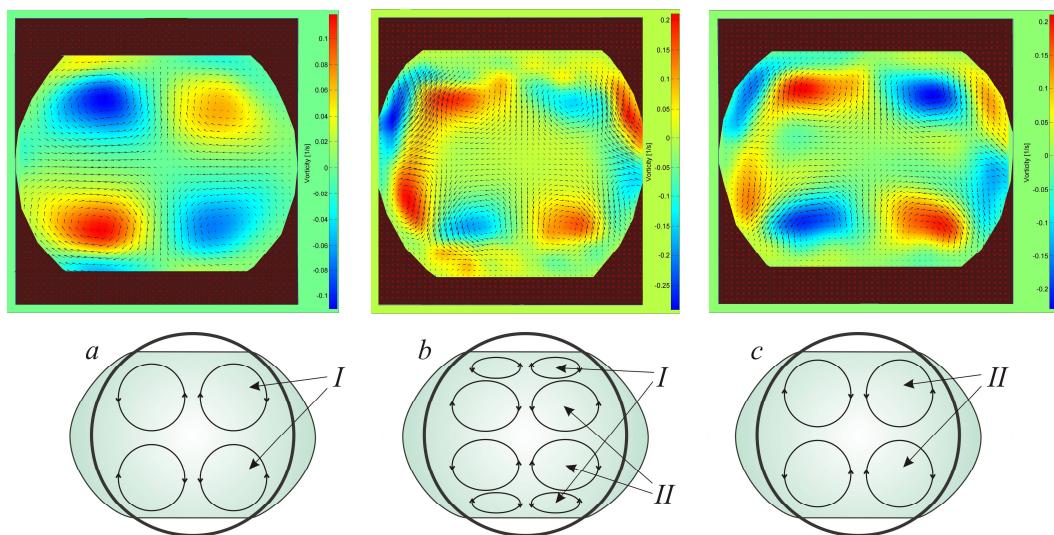


Рис. 1. Поле скорости и схема течения в случае низкой (a), умеренной (b) и высокой (c) безразмерной частоты вибраций

Важно отметить, что осредненные течения в осциллирующем контейнере хоть и изменяют свой вид, но сохраняются также и в области умеренных и низких безразмерных частот. Это означает, что вибрационный механизм генерации осредненных потоков применим и для капель малого размера.

Результаты исследования потоков в осциллирующем деформируемом контейнере качественно согласуются с результатами экспериментального исследования осредненных потоков, возникающих в полости квадратного сечения при вращательных колебаниях [1], где была обнаружена подобная трансформация структуры осредненных потоков при переходе из области высоких частот в область низких, в частности, направление потоков жидкости менялось на противоположное.

Полученные результаты представляют теоретический и практический интерес для задач, связанных с интенсификацией процессов массопереноса в жидкости, находящейся внутри осциллирующих упругих контейнеров и фазовых включений в виде капель.

Работа выполнена в рамках задания Минобрнауки РФ 2014/372 (проект 2176)

ЛИТЕРАТУРА.

1. Иванова А.А., Козлов В.Г. Вибрационная конвекция при непоступательных колебаниях полости. Изотермический случай // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 25–32.

ТУРБУЛЕНТНЫЕ СКЛОНОВЫЕ ПОТОКИ

М.Э. Эглит¹, А.Е. Якубенко², Т.А. Якубенко²

¹МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

²Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Работа посвящена математическому моделированию природных склоновых потоков, таких как снежные лавины, сели, быстрые оползни, лавовые потоки. Это открытые потоки, движущиеся по склонам под действием силы тяжести. Существенными чертами этих потоков являются наличие свободной поверхности, сложные реологические свойства движущейся среды, захват и вовлечение ими в движение материала, лежащего на склоне, и – для многих потоков – турбулентный характер движения.

Большинство предложенных до сих пор моделей склоновых потоков основаны на уравнениях, осредненных по глубине потока. Величины трения на дне и скорости захвата донного материала при этом предполагаются функциями глубины и средней скорости, заданными некоторыми эмпирическими формулами [1]. Модели, представленные в этой работе, используют полные (не осредненные по глубине) уравнения. Впервые в такой постановке учитываются одновременно неньютоновские свойства среды, захват материала со дна и турбулентность.

Для задания реологических свойств движущегося материала принимается так называемая модель Хершеля – Балкли, которая при различном выборе коэффициентов описывает линейно и нелинейно вязкие (степенные) жидкости, а также среды с пределом текучести, в частности жидкость Шведова – Бингама. При моделировании захвата донного материала используется следующая гипотеза: захват происходит тогда, когда касательное напряжение на дне потока достигает значения предела прочности на сдвиг материала дна [2 – 4, 6]. Величина скорости вовлечения донного материала при этом определяется в результате расчета касательного напряжения на дне при решении задачи. Для описания турбулентных характеристик используется дифференциальная трехпараметрическая модель турбулентности, предложенная в [5] и в дальнейшем успешно примененная для расчета движения жидкостей вдоль проницаемых и непроницаемых стенок в присутствии градиента давления, массо- и теплообмена и других процессов. Модель была обобщена с тем, чтобы учесть наличие свободной поверхности, нестационарность, связанную, в частности, с захватом донного материала, и неньютоновские свойства движущейся среды. Составлена программа и проведены серии расчетов нестационарного турбулентного движения по длинному однородному склону. Одной из особенностей задачи является то, что при наличии захвата материала дна нижняя граница потока смещается по нормали к дну вниз с не известной заранее скоростью, и область, где проводится расчет, меняется со временем. Изучено поведение потоков линейно-вязкой, степенной и бингамовской жидкостей. Исследовано влияние захвата массы и реологических свойств на поведение потока. В частности, обнаружено, что в потоках бингамовских и дилатантных степенных жидкостей, захватывающих материал дна, турбулентные характеристики могут иметь в поперечном сечении не один, а два локальных максимума – один вблизи дна и второй в центральной части сечения потока [6].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-08-00084, 15-01-00361, 15-01-08023).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Eglit M.E., Demidov K.S. Mathematical modeling of snow entrainment in avalanche motion. *Cold Reg. Sci. Technol.*, 2005. 43, 1-2, P. 10-23.
2. Issler D, M. Pastor Peréz. Interplay of entrainment and rheology in snow avalanches; a numerical study. *Annals of Glaciology*, 2011, 52(58), 143-147.
3. M.E. Eglit and A.E. Yakubenko. Numerical modeling of slope flows entraining bottom material. *Cold Regions Science and Technology*. 2014. 108, 139–148.
4. М.Э. Эглит, А.Е. Якубенко, Т.А. Якубенко. Численное моделирование нестационарного потока нелинейно-вязкой жидкости. Модели и методы аэродинамики. Материалы Тринадцатой Международной школы-семинара. М.:МЦНМО. 2013. С. 218-219.
5. Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности. Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1978. №3. С. 13-25.
6. М.Э. Эглит, А.Е. Якубенко. Влияние захвата донного материала и неньютоновской реологии на динамику турбулентных склоновых потоков. Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. №3.

LAMINAR-TURBULENT TRANSITION OF A SWEPT-WING BOUNDARY LAYER UNDER THE INFLUENCE OF CYLINDRICAL TRIP DEVICES

V.I. Borodulin¹, A.V. Ivanov¹, Y.S. Kachanov¹, A.P. Roschektaev¹, J.D. Crouch²

¹⁾ Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Novosibirsk, Russia;

²⁾ Boeing Commercial Airplanes, Seattle, U.S.A.

Forcing turbulence in boundary layer by means of various trip devices (turbulence promoters) has been widely used for many dozens of years in many practical applications in aerodynamics, e.g. for fixing of the laminar-turbulent transition location or for prevention of separation. The particular design of such devices might be very different, e.g.: sand paper strips, wall wires, zigzag strips, arrays of 3D roughness elements and so on. The correctly chosen trip device usually leads to a rather rapid breakdown of laminar boundary layers and to their quick transition into the turbulent state. However, not all trip devices are efficient and not all of their characteristics are obvious. For instance, there are a number of important characteristics which have to be known for every particular trip device, such as: the robustness, the efficiency, the necessary and sufficient device height, the intensity and character of the produced base flow distortions, and so on.

In the present experiments we concentrate on investigation of the swept-wing boundary layer transition tripped by spanwise-periodic rows of cylindrical roughness elements. The goal of these experiments is to investigate the most important characteristics of a swept-wing boundary layer both upstream and downstream the trip device and to gain experimental information necessary for obtaining *transfer functions* for characterization of the jumps of boundary-layer integral parameters when passing this kind of trip devices. Despite the transition from the laminar state to the state of self-sustained turbulence can not occur immediately and require some chord length, in some cases, like in CFD modeling of boundary layer transition, the quick transition can be considered as an immediate process, when the integral boundary layer characteristics (the displacement thickness δ_1 , the momentum thickness δ_2 and the shape factor H) jump at the trip position from their laminar values to those characteristic for the developed turbulent boundary layer. The particular aim of this study is to determine the transfer function K_1 that describes the relation of the laminar boundary layer displacement thickness δ_1 (at the trip device location) to the displacement thickness δ_1 of the produced turbulent boundary layer extrapolated to the location of the trip device. Similarly we intend to determine another transfer function K_2 that describes the jump for the boundary-layer momentum thicknesses δ_2 .

The experiments were conducted in a low-turbulence subsonic wind-tunnel of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics T-324 on a model of a 25-degree swept wing. Cylinders with diameter 11.68 mm (period $\Delta z' = 2D = 23.36$ mm) were glued onto the model surface 406 mm downstream the leading edge ($x' = 406$ mm, see Fig.1). Twelve different regimes were studied for two free-stream velocities U_{er} (15.8 and 24.5 m/s) and five heights of the trip-device cylinders h (from 0.6 to 2.4 mm). In addition, two reference laminar regimes were investigated in absence of any trip devices to document initial (non-tripped) laminar boundary layer flow. The studied tripped regimes cover a rather broad range of non-dimensional trip heights h/δ_1 (from 0.74 to 3.74) and trip height Reynolds numbers $Re_h = U_{er}h/v$ (from 565 to 3613) and $Re_{hl} = U_{lr}h/v$ (from 257 to 3604), where U_{er} is the potential flow mean velocity at the trip device location and U_{lr} is the mean velocity measured in the laminar boundary at a wall distance $y = h$.

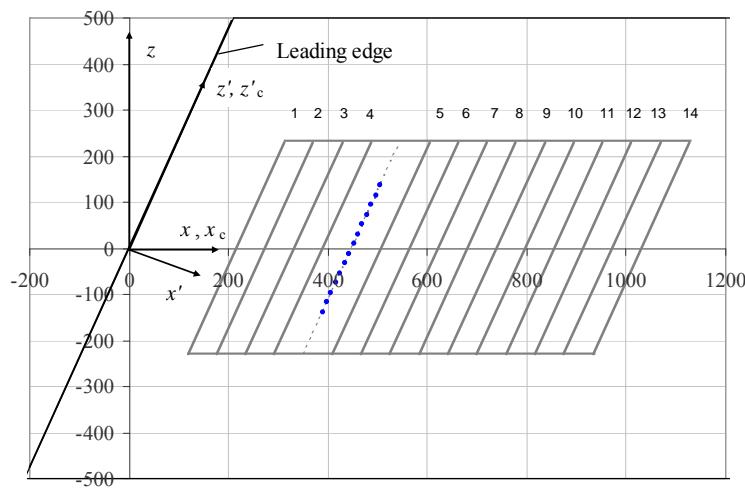


Fig.1. Sketch of the 25-degree swept-wing model and coordinate systems. The numbered oblique grey lines show positions (sections) of the main boundary layer measurements.

It is proved by the measurements that the structure of the potential flow velocity is independent practically from both the trip-device type and the free-stream speed. In non-tripped regimes the “natural” boundary-layer perturbations (both steady and traveling ones) are shown to have very small amplitudes and the laminar boundary

layer is far away from transition to turbulence at the two studied speed regimes. In presence of trip devices two transition scenarios have been found in the studied regimes: (i) the *evolutionary* scenario and (ii) the *abrupt* scenario.

The *evolutionary* transition scenario was observed in one of studied regimes only for the smallest cylinders height and for the low free-stream velocity (the case of the lowest Re_h), while the abrupt transition is found in all other regimes in presence of trip devices. The evolutionary transition is characterized by an exponential growth of CF-vortices induced by the trip elements with subsequent appearance of the well-known local high-frequency *secondary* (LHFS) instability associated with the beginning of final breakdown (turbulization) of the laminar flow. The LHFS-instability occurs when the combined disturbance amplitude (sum of zero-to-peak amplitudes of crossflow vortexes and crossflow waves) reaches a threshold value of about 30-33% [1]. In the evolutionary transition case the breakdown takes place rather far downstream from the trip and its position depends significantly on parameters of the base flow and the trip device.

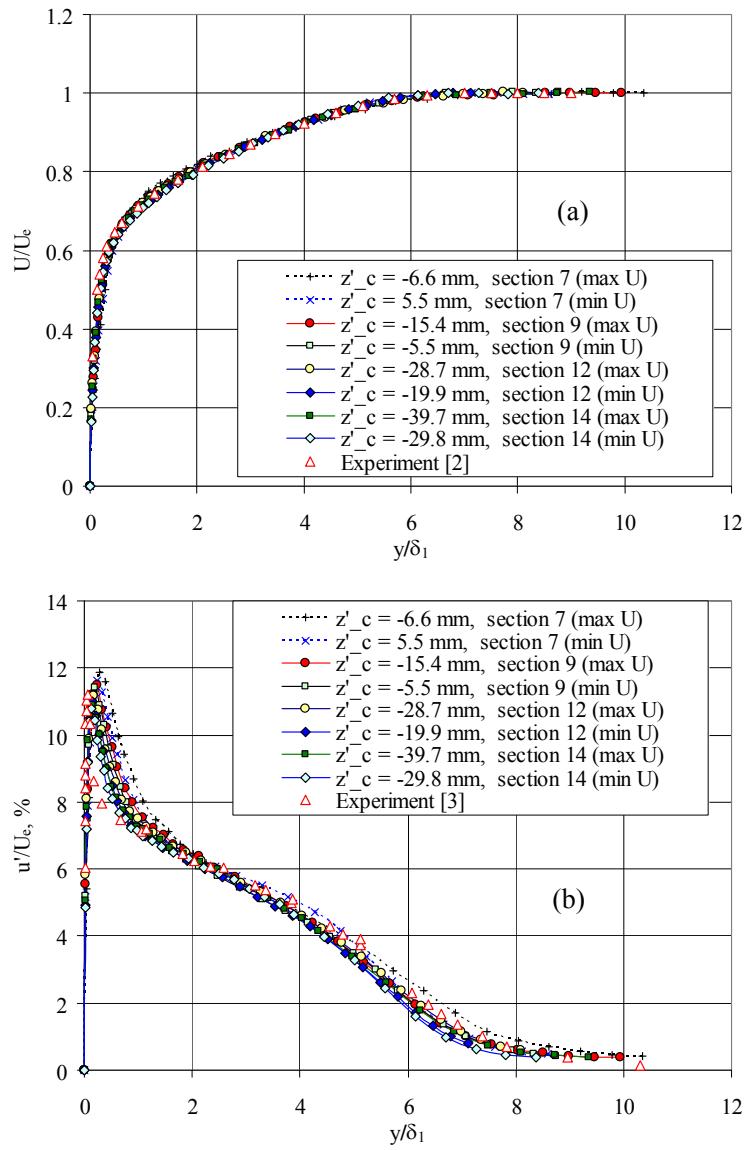


Fig.2. Wall-normal profiles of mean flow velocity (a) and velocity fluctuation amplitudes (b) measured at four different positions downstream the trip device in region of developed self-similar turbulence. Moderate trip height $h/\delta_1 = 1.53$, $U_{er}=15.7\text{m/c}$.

In the *abrupt* transition scenario the CF-instability is bypassed and the transition starts always very near the trip device through a *primary* instability of the base flow strongly perturbed by presence of the roughness elements. Every individual roughness element produces in this case a turbulent wedge, inside which the flow quickly becomes turbulent, while outside the wedge it remains laminar. The initial width and the length of the turbulent wedges depend on parameters of the base flow and the trip device. However, the spatial location of the forced transition beginning is practically fixed and independent of these parameters.

It is found that in all studied regimes with the abrupt transition scenario, the spanwise modulation of the mean-flow velocity and the velocity-fluctuation amplitude are the largest immediately downstream the trip-device cylinders but this modulation significantly decreases downstream when spanwise-separated turbulent wedges produced by the trip elements merge downstream. However, in all studied regimes, the modulation does not disappear completely till the very end of the region of measurements demonstrating a long memory of the turbulent flow about the spanwise periodicity of the trip device. In regimes with the abrupt transition scenario the shapes of wall-normal profiles of the mean flow velocity and the fluctuation-velocity amplitude are transformed very quickly into those typical for the developed turbulent boundary layer. Non-dimensional profiles become self-similar in this region and coincide practically with each other independently of the spatial (streamwise and spanwise) position and the regime of measurements (i.e. the flow velocity and the trip height). In the turbulent region the shapes of the wall-normal profiles of the mean flow velocity (Fig. 2a) and the velocity fluctuation amplitudes (Fig. 2b) are found to agree very well with those measured in experiments [2] and [3]. In all regimes with moderate roughness-element heights, the turbulence developed in 3D boundary layer demonstrates all properties of classical turbulence, in particular the disturbance spectra slopes follow very well to Kolmogorov's $-5/3$ law in inertial region and to the Heisenberg's -7 law in the high-frequency region (Fig. 3). It is found that at roughness-element heights greater than a certain threshold (about $Re_h \approx 1760$) the turbulent mean-velocity profiles, the velocity disturbance profiles and the frequency spectra start to deviate from those typical for classical turbulence and these deviations become more pronounced with subsequent growth of the trip-device magnitude.

Streamwise distributions of the boundary-layer integral parameters (δ_1 , δ_2 , H) are obtained and analyzed. It is found that the streamwise evolution of the boundary-layer momentum thickness follows very well the law found by Falkner [4] for the flat-plate turbulent boundary layer with the same (6/7) exponent at the streamwise coordinate but with a lower value of a constant factor (0.0108 instead of 0.0153). This law, as well as a linear law, was used for approximation and upstream extrapolation of the momentum thickness and displacement thickness for obtaining the initial (virtual) values of thicknesses of the turbulent boundary layer at the trip location. The shape factors were found to drop down after the flow turbulization from the laminar values (of about 2.3) to the turbulent values (of about 1.4), which agree very well with those estimated by Hama's formula [5] obtained for the flat-plate turbulent boundary layer. The transfer functions are determined for the boundary-layer momentum and displacement thicknesses as ratios of the initial (virtual) turbulent values to the corresponding laminar values. Variation of the obtained values of K_1 and K_2 with three different arguments, characterizing the dimensionless trip-device height: h/δ_1 , Re_h and Re_{hl} , is investigated in detail.

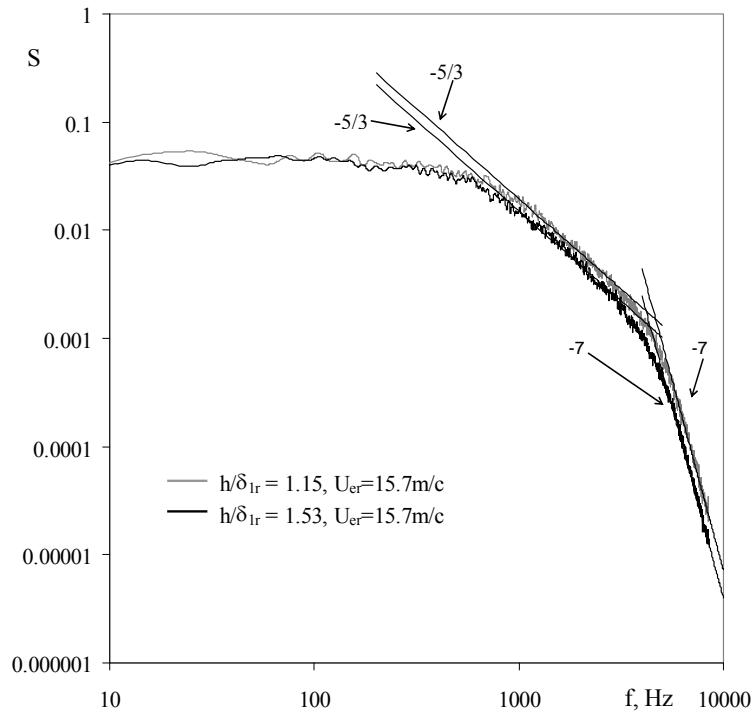


Fig.3. Disturbance spectra in turbulent region in two different tripped regimes with moderate trip-device heights. The spectra are taken in a region of developed turbulence, 291 mm downstream the trip device location (section 9). The slopes corresponding to inertial region with $-5/3$ Kolmogorov's law and to high-frequency region with -7 Heisenberg's law are indicated with lines.

It is found that depending on the studied trip-device height parameters, the displacement-thickness transfer coefficient K_1 can have values in the range from 0.5 to 1.2, while the momentum thickness transfer coefficient K_2 can vary in the range from 0.8 to 2. This result is not trivial since in 2D boundary layers these transfer coefficients

are usually greater than unity. It is found also that the two transfer functions demonstrate nearly linear dependence on every trip-device height parameter indicated above. The significant deviations of the transfer coefficients from unity found in the present study, as well as their significant variations with the trip height parameters, have to be taken into account during computer simulations of boundary layer transition caused by rows of cylindrical trip devices.

This work was supported by the Boeing Commercial Airplane Group and the Russian Foundation for Basic Research (grant No 14-01-00025).

REFERENCES

1. Borodulin V.I., Kachanov Y.S., Ivanov A.V., Crouch J.D., Ng L.L. Criteria of swept-wing boundary-layer transition and variable N-factor methods of transition prediction // *Intl. Conf. Methods of Aerophysical Research. June 30 – July 6, 2014, Novosibirsk, Russia: Proc.* / Ed. V.M. Fomin. Novosibirsk: ITAM SB RAS, 2014. URL: http://www.itam.nsc.ru/users/libr/eLib/confer/ICMAR/2014/pdf/Borodulin%20et%20al_106.pdf
2. Klebanoff P.S., Diehl Z.W. Some features of artificially thickened fully developed turbulent boundary layers with zero pressure gradient. *NACA Report 1110*, 1952.
3. Klebanoff P.S. Characterization of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. *NACA Report 1274*, 1955.
4. Falkner V.M. The resistance of a smooth flat plate with turbulent boundary layer. *Aircraft Engineering*. Vol. 15, 1943, p. 65.
5. Hama F.R. Boundary layer characteristics for smooth and rough surfaces. *Trans. Soc. Nav. Architects Marine Engrs.* 1954, Vol. 62, pp. 333-358.

Chaos and pattern formation in weakly nonlinear detonations

¹Kasimov, A. R. and ²Faria, L. M. and ²Rosales, R. R.

¹*King Abdullah University of Science and Technology, Thuwal, Saudi Arabia*

²*Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA*

aslan.kasimov@kaust.edu.sa

Weakly nonlinear multi-dimensional shock waves are characterized by small amplitude and weak curvature of the shock front. When such waves propagate in a chemically reacting gas, the energy released in chemical reactions can make them self-sustained (then the waves are called detonations). We derive an asymptotic model for the dynamics of detonations from the compressible reactive Navier-Stokes equations. The resultant model in 2D and in dimensionless form is given by [1]:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + v_y &= -\frac{1}{2}T_x + \mu u_{xx} \\ v_x &= u_y \\ \lambda_x &= -k(1-\lambda)e^{\theta T} \end{aligned}$$

where (u, v) is the velocity field, $T = u + q\lambda$ is the temperature, $\lambda \in [0, 1]$ is the variable measuring the fraction of the chemical energy, q , released in the reactions, and μ is the coefficients of viscosity. Parameters k and θ characterize the heat release rate. This system is a generalization of the models of small disturbance unsteady transonic flow, weakly nonlinear acoustics (Zabolotskaya-Khokhlov (ZK) equation), and water waves (dispersionless Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation). Without chemical and dissipative terms ($q = 0, \mu = 0$), our model reduces to $(u_t + uu_x)_x + u_{yy} = 0$, which is the same as ZK or dispersionless KP equation. The first equation in the system is seen to be a 2D Burgers equation forced by the chemical energy release. The model predicts regular and irregular multi-dimensional patterns in 2D, and in 1D exhibits transition from steady and stable traveling waves to oscillatory traveling waves through a Hopf bifurcation as θ is increased above a critical value. A cascade of period-doubling bifurcations leading to chaos is also observed.

References

- [1] L. M. Faria, A. R. Kasimov, and R. R. Rosales. Theory of weakly nonlinear self-sustained detonations. *J. Fluid Mech.*, 784, 163-198, 2015.

**ON THE OSCILLATORY MODES IN THE DEAN
FLOW BETWEEN POROUS CYLINDERS WITH
RADIAL FLOW AND RADIAL TEMPERATURE
GRADIENT**

L. Shapakidze

I. Javakhishvili Tbilisi State University
A. Razmadze Mathematical Institute, Georgia

The report presents the results of investigation of oscillatory modes arising after the loss of stability in a heat-conducting flow between two horizontal concentric cylinders which are heated under different temperatures. The annulus between cylinders is assumed to be filled with a liquid only partially, and pumping circuit allows the liquid to be pumped round the annulus. Note that the flow is under the action both of a radial flow through the permeable cylinder walls and of a radial temperature gradient.

It will be demonstrated that the main flow instability arising in a small neighbourhood of the point of intersection of various bifurcations depends essentially on the flow parameters and may result in the appearance of various oscillatory regimes of different physical nature.