Поиск периодческих решений

Поле скорости $\vec{v}(x, r, \theta, t)$ является периодическим по времени с периодом T в системе отсчета, движущейся со скоростью c_f, если оно удовлетворяет уравнению Навье-Стокса, условию несжимаемости и уравнению

$$\vec{v}(x, r, \theta, t) = \vec{v}(x + c_f T, r, \theta, t + T)$$

Замечание. Периодичность давления p вытекает из периодичности поля скорости автоматически, так как оно с точностью до аддитивной постоянной восстанавливается по полю скорости в каждый момент времени из уравнения Пуассона (дивергенция от уравнения Навье-Стокса)

$$\Delta p = div(-(\vec{v}, \nabla)\vec{v})$$

с условием на производную на границе (скалярное произведения уравнения Навье-Стокса с вектором нормали $\vec{n}$ на границе)

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = (-(\vec{v}, \nabla)\vec{v} + \nu \Delta \vec{v}, \vec{n})$$

Давление кинематическое.

1. Определение функции $F(x)$

На практике удобнее сформулировать условие периодичности поля скорости по времени немного иначе, более конструктивно.

Программа для решения уравнения Навье-Стокса $NS[Re, \Delta t, c_f](\vec{v})$ берет на вход некоторое мгновенное поле скорости $\vec{v}$ и параметры расчета ($Re-$ число Рейнольдса, $\Delta t-$ время, в течении которого интегрировать, c_f- скорость движения системы отчета) и возвращает поле скорости, возникающее через время Δt.

Соответственно, если поле скорости является периодическим по времени в системе отсчета, движущейся со скоростью c_f, с периодом T, то оно удовлетворяет уравнению

$$F(x) = 0$$

где $x = (\vec{v}, Re, T, c_f)$

$$F(x) = NS[Re, T, c_f](\vec{v}) - \vec{v}$$

Я не знаю, как обосновать что-то в непрерывном случае, так что рассуждения далее будут для дискретного случая. Будем считать, что поле скорости задается n переменными. В таком случае в функции F на три неизвестных больше, чем уравнений.

$$F : R^{n+3} \to R^n$$

Программно функция F реализуется самым естественным образом, вызовом уже написанного и отлаженного кода для расчета течения в трубе, без каких-либо модификаций.

Решение принадлежит однопараметрическому множеству.

Пусть x_0 - некоторое решение уравнения $F(x) = 0$. Разложим функцию в ряд около этого решения

$$F(x) = F(x_0) + J_0 \Delta x + O(\Delta x^2)$$

Здесь $\Delta x = x - x_0$, J_0 - матрица Якоби, вычисленная в точке x_0

$$J_0 \in R^{(n+3)\times n}$$

Если нас интересуют такие малые сдвиги Δx, которые переводят решение в решение - $F(x_0) = F(x) = 0$, то мы получаем линейную систему на Δx

$$J_0 \Delta x = 0$$

В системе на 3 неизвестных больше, чем уравнений, соответственно решение принадлежит трехмерному пространству, то есть существует три базисных сдвига, которые переводят решение в решение.

Два из них заранее можно назвать. Это сдвиг вдоль трубы и сдвиг по времени. При этом параметры решения (Re, T, c_f) не меняются. Остается только одно направление, двигаясь вдоль которого можно переходить к решениям с новыми параметрами. В ϵ-окрестности в пространстве параметров все решения принадлежат прямой линии, соответственно, глобально они принадлежат некоторой гладкой кривой - однопараметрическому множеству.

Замечание. Можно наложить пару дополнительных условий, чтобы фиксировать фазу решения и его положение в трубе. Тогда будет доступно только одно направление $\Delta x.$ Мне кажется, это приведет к снижении скорости сходимости метода. Кроме того, эти условия не естественны, что приводит к сложностям при построении подпространств Крылова, которые используются при решении линейной системы. В общем, они не обязательны, и я их не использую.

Замечание. Нужно отметить, что мы предполагаем, что все уравнения системы $J_0 \Delta x = 0$ линейно независимы. Наверное, в общем случае это так.

Замечание. Если добавить в число параметров еще один, например, период решения в угловом направлении, то решения будут принадлежать некоторой гладкой поверхности в пространстве уже четырех параметров. Возможностей найти решения с заданными параметрами становится больше.

2. Метод Ньютона-Крылова

Чтобы найти решение нелинейного уравнения можно воспользоваться методом Ньютона.

Пусть вектор $x = (u, c_f, T) \in R^{n+2}$. Re фиксировано. На месте числа Рейнольса может быть любой из параметров. Пусть x_0 - некоторое начальное приближение к решению. Функцию F можно разложить в ряд около x_0

$$F(x) = F(x_0) + J(x_0)\Delta x + O(\Delta x^2)$$

Пренебрегая нелинейными членами разложения, полагая, что нас интересует x, при котором $F(x) = 0$, получаем систему линейных уравнений на Δx

$$J(x_0)\Delta x = -F(x_0)$$

Новое приближение к решению $x_1 = x_0 + \Delta x$. Метод итерационный. Система прямоугольная и существует произвол при определении Δx в две неизвестных, но он связан с возможностью сдвига вдоль трубы и по фазе, как было показано выше. Параметры решения определяются однозначно.

В общем случае формирование матрицы Якоби и ее решение требует колоссальных ресурсов, но к счастью в этом нет необходимости, так как существуют методы Крыловского типа. В них решение системы $Ax = b$ приближается последовательностью векторов $\{b, Ab, A^2b, A^3b, \dots\}$, и как правело достаточно небольшого их числа, чтобы получить решение с хорошей точностью. Для их построения достаточно уметь умножать матрицу A на x, но в нашем случае

$$J_0\Delta x = \frac{F(x_0 + \epsilon\Delta x) - F(x_0)}{\epsilon}$$

находится численным дифференцирование. Вычисление одного произведения $J_0\Delta x$ требует вычисления функции F один раз при достаточно малом значении ϵ, при условии, что $F(x_0)$ уже известна. Есть только одна проблема - в подпространствах Крылова матрица квадратная, а в нашем случае прямоугольная. Я придумал несложную модификацию метода GMRES для решения этой задачи. Возможно это очень посредственная модификация, возможно наоборот, многие о такой возможности не догадываются - я не знаю.

Мне кажется детали реализации самого численного метода уже не представляют большого интереса. То, что он работает и найтенные им решения действительно являеются периодическими по времени, легко убедится подставив их в функцию F. То, что решения действительно принадлежит однопараметрическому множеству я посторался показать выше.