

地下水

非稳定渗流解析法

李佩成 著

科学出版社

41745



200354918



00287098

# 地下水非稳定渗流解析法

李佩成 著

5475/28



科学出版社

1990

## 内 容 简 介

本书在概括解析法基本知识的基础上,详细地介绍了如何应用这些方法求解和研究地下水非稳定渗流课题。

全书共分十五章。第一、二章介绍地下水渗流基本定律和基本方程;第三、四、五章介绍分离变量法、傅里叶变换法及拉普拉斯变换法的基本知识,并举例说明如何将其用于渗流研究;第六章比较详细地介绍了贝塞尔函数;第七至十四章利用前述方法,特别是贝塞尔函数法求解了一些典型的渗流课题,推导出可供实用的计算公式,编绘出若干计算图表,列举了算例,交待了解题技巧以及有助于深化研究的文献资料,第十五章通过介绍第七、八章得出的“割离井”公式在实际中的多种应用,展示了书中所述内容及成果应用的前景。

本书可供水利、水文地质、地下水资源开发利用等领域从事渗流研究的科研、工程技术人员以及有关专业大学生、研究生阅读参考。对于讲授和学习工程数学的师生以及从事热传导科学研究的人员也有参考价值。

## 地下水非稳定渗流解析法

李 佩 成 著

责任编辑 李棋方 蒋发二

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1990年5月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1990年5月第一次印刷 印张:10 3/4

印数:0001—900 字数:280 000

ISBN 7-03-001632-7/P·314

定价:11.00 元

# 前 言

地下水渗流可分为稳定渗流和非稳定渗流，本书着重于现象普遍而研究尚觉欠缺的非稳定渗流。地下水渗流的研究方法主要包括解析法、数值法、模拟法和模型试验法，本书着力于解析法。

井是提取、排除和勘测利用地下水的主要建筑物，本书侧重于井的渗流课题。

解析法是渗流研究的传统方法，尽管其存在着缺点，但在解题过程中严格遵循渗流机理的数理推演特征，对初学者训练思维深窥究竟十分有益，解析法所得公式对同类课题有良好通用性，从而可以补偿研究者花费的较多辛劳；而电子计算机的普及，显著提高了繁难计算公式的实用性。

求解非稳定渗流的解析法通常包括分离变量法、傅里叶变换法(包括傅里叶积分法)、拉普拉斯变换法及贝塞尔函数法等。

对于这些方法及其在渗流研究中的应用，本书并不面面俱到，而着重于介绍有力的贝塞尔函数法以及诸法的联合运用。本书涉及的渗流课题虽不算多，但力求其具有典型性；求解过程也力求详尽。对关键步骤、难点和启发思考处都注明了可供参考的文献，对推导的大部分公式都有演示例题。

本书分十五章，第六章以前的内容属于解析法的数理基础，分别简介了地下水渗流的基本定律和基本方程、求解渗流基本方程的分离变量法、傅里叶变换法、拉普拉斯变换法，并列举了算例。第七章至十四章，利用前述方法研究典型的渗流课题，按部就班地推导了相应的计算公式，编绘出计算图表，列举了算例，提出若干建议和见解。这八章是本书的本论所在。书中有的公式、图表、算例是作者完成的，有的虽然在其它文献中可以见到，但本书完善了推导过程，补正了某些漏误。

本书承蒙王迺信、王运昌、孙明勤及李克希诸同志进行校对；魏晓妹同志不仅清抄了全部书稿，而且提出了不少很好的建议；初阳瑞同志协助进行大量演算；书中的图是赵延风同志清绘的；在此谨致谢忱。

# 目 录

## 前言

第一章 地下水渗流定律.....	1
一、线性渗透定律.....	1
二、实际渗透速度与平均渗透速度.....	3
三、水力坡度的几何意义和物理概念.....	4
四、非线性渗透定律.....	7
第二章 地下水渗流的基本方程及其求解条件.....	9
一、潜水非稳定渗流基本方程.....	9
二、潜水井的非稳定渗流方程.....	12
三、考虑弹性释水及越流补给时承压含水层中井孔的渗流方程 .....	15
四、地下水稳定渗流的微分方程.....	19
五、求解渗流基本方程的方法概述.....	20
六、地下水基本渗流方程的求解条件.....	21
第三章 求解渗流基本方程的分离变量法及其应用举例.....	30
一、分离变量法及其在求解方程中的应用.....	30
二、算例.....	34
第四章 傅里叶级数及傅里叶变换法用于求解渗流课题.....	38
一、傅里叶级数简介.....	38
二、正弦变换和余弦变换.....	40
三、无限延伸含水层中的非稳定渗流课题.....	44
四、半无限边界中地下水的一维非稳定渗流.....	47
五、边界水位突然涨落引起的半无限边界中的非稳定渗流.....	53
六、傅里叶变换.....	58
七、应用傅里叶变换求解渗流课题举例.....	61
第五章 拉普拉斯变换法及其在求解渗流课题中的应用举例 .....	64

一、拉普拉斯变换的定义及常用函数的拉氏变换式 .....	64
二、拉普拉斯变换的特性 .....	66
三、拉普拉斯逆变换 .....	71
四、拉普拉斯变换在求解渗流课题中的应用举例 .....	73
<b>第六章 贝塞尔函数论要</b> .....	<b>78</b>
一、第一类零阶贝塞尔函数 .....	78
二、第二类零阶贝塞尔函数 .....	81
三、一阶和 $n$ 阶贝塞尔函数 .....	87
四、贝塞尔函数的递推公式 .....	90
五、方程 $xy'' + y' + a^2xy = 0$ 的积分 .....	92
六、包含贝塞尔函数的一些重要公式 .....	93
七、贝塞尔函数的渐近公式 .....	98
八、两个重要定理 .....	99
九、贝塞尔函数的正交性 .....	100
十、按贝塞尔函数将任意函数展开为级数 .....	105
十一、变形(或虚宗量)第一类贝塞尔函数 .....	106
十二、虚宗量第二类贝塞尔函数 .....	109
十三、第三类贝塞尔函数(汉克尔函数) .....	111
十四、关于贝塞尔函数表 .....	114
<b>第七章 无上下补给时均质含水层中“割离井”的定降深非稳</b> <b>定渗流计算</b> .....	<b>116</b>
一、“割离井”及渗流计算“割离井法”的概念 .....	116
二、水位降落曲线计算通式的推导 .....	118
三、起始水位呈水平时的水位计算公式 .....	125
四、井的出水量计算公式 .....	126
五、公式的简化, 计算图表的绘制与应用 .....	127
六、算例 .....	136
<b>第八章 有上部入渗时均质含水层中割离井的非稳定渗流计</b> <b>算</b> .....	<b>145</b>
一、水位变化计算公式的推导 .....	145
二、关于出水量的计算公式 .....	151
三、入渗强度为常数时水位降落曲线及出水量的计算公式 .....	151

四、算例 .....	154
第九章 停止抽水后水位恢复过程预报公式的推导 .....	164
一、预报通式的推导 .....	164
二、抽水终止时水位为常数情况下的预报公式 .....	169
三、公式(9.20)在预报停止抽水后水位恢复过程时的应用 .....	170
四、公式的简化, 计算图表的绘制与应用 .....	175
五、算例 .....	180
六、关于推导公式(9.19)和(9.20)的几点说明 .....	189
第十章 井水位及边界水位均为定值时割离井的渗流计算 .....	191
一、水位计算公式的推导 .....	191
二、起始水位为常数时的水位计算公式 .....	200
三、水位计算公式的另一种形式 .....	201
四、出水量公式推导 .....	204
五、公式的改型 .....	208
第十一章 内外边界分别为水位或流量时井孔的非稳定渗流 计算 .....	211
一、通式的推导 .....	211
二、内边界给出水位, 外边界给出流量的课题 .....	216
三、井水位稳定为常数, 起始水位水平的割离井渗流计算 .....	217
四、井水位随时间呈直线均匀下降时割离井的渗流计算 .....	219
五、内边界为流量, 外边界给出水位的课题 .....	230
六、几种特殊定解条件下第五节课题的计算公式 .....	232
第十二章 出水量为常数时割离井的渗流计算 .....	237
一、水位曲线计算公式的推导 .....	237
二、对公式(12.50)、(12.51)及(12.53)的说明 .....	249
三、算例 .....	250
第十三章 存在越流补给时地下水向割离井的非稳定渗流 .....	253
一、基本渗流方程及其拉氏变换 .....	253
二、存在越流时割离井非稳定渗流计算公式的推导 .....	257
三、算例 .....	270



四、关于稳定渗流公式 .....	282
第十四章 存在越流时地下水向位于广阔含水层中井孔的非 稳定渗流 .....	284
一、存在上下越流,含水层无限广阔,而井的影响半径有限时地下 水向井孔的渗流 .....	284
二、含水层无限广阔,影响半径很大且存在越流时井孔的非稳定 渗流 .....	304
第十五章 “割离井”公式在生产实践中的应用问题 .....	317
一、“割离井”公式用于测算水文地质参数 .....	317
二、在资源评价中利用“割离井”公式计算均布井群的开采能力 ... .....	324
三、“割离井”法用于井群布局设计 .....	329
参考文献 .....	331

# 第一章 地下水渗流定律

为了对地下水渗流进行定量研究，也象对其它重要的自然现象——电流、热传导、刚体运动等一样，必须首先把握住各主要运动要素之间的最基本的数量关系。

渗流定律也叫渗透定律，它是反映渗透速度  $V$  与水力坡降  $J$  之间的关系的。这种关系呈线性时叫线性渗透定律；呈非线性关系时叫非线性渗透定律，下面分别予以介绍。

## 一、线性渗透定律

线性渗透定律又叫达西定律，是由法国水力学家、工程师达西 (Darcy, H.) 于 1856 年通过实验发现建立的。

达西所用的实验装置如图 1-1 所示，通过供水管从上面注水，同时在实验过程中保持恒定水头，水渗经试样（砂子）以后由出水管流进量筒中，水渗经试样损失的水头用测压管测定。

根据试验得出如下规律：渗经多孔介质（试样砂）的流量  $Q$ ，其大小与垂直水流的介质面积  $F$  及进出口的水头差  $\Delta H$  之乘积成正比，而与介质的长度  $L$  成反比。用公式表示即为

$$Q = K \frac{F \Delta H}{L}. \quad (1.1)$$

该公式也称为达西渗透流量公式。

式中  $K$ ——与岩土及渗透液体性质有关的常数，一般称为渗透系数。

在 (1.1) 式的两端分别除以面积  $F$ ，并考虑到

$$\frac{Q}{F} = V. \quad (1.2)$$

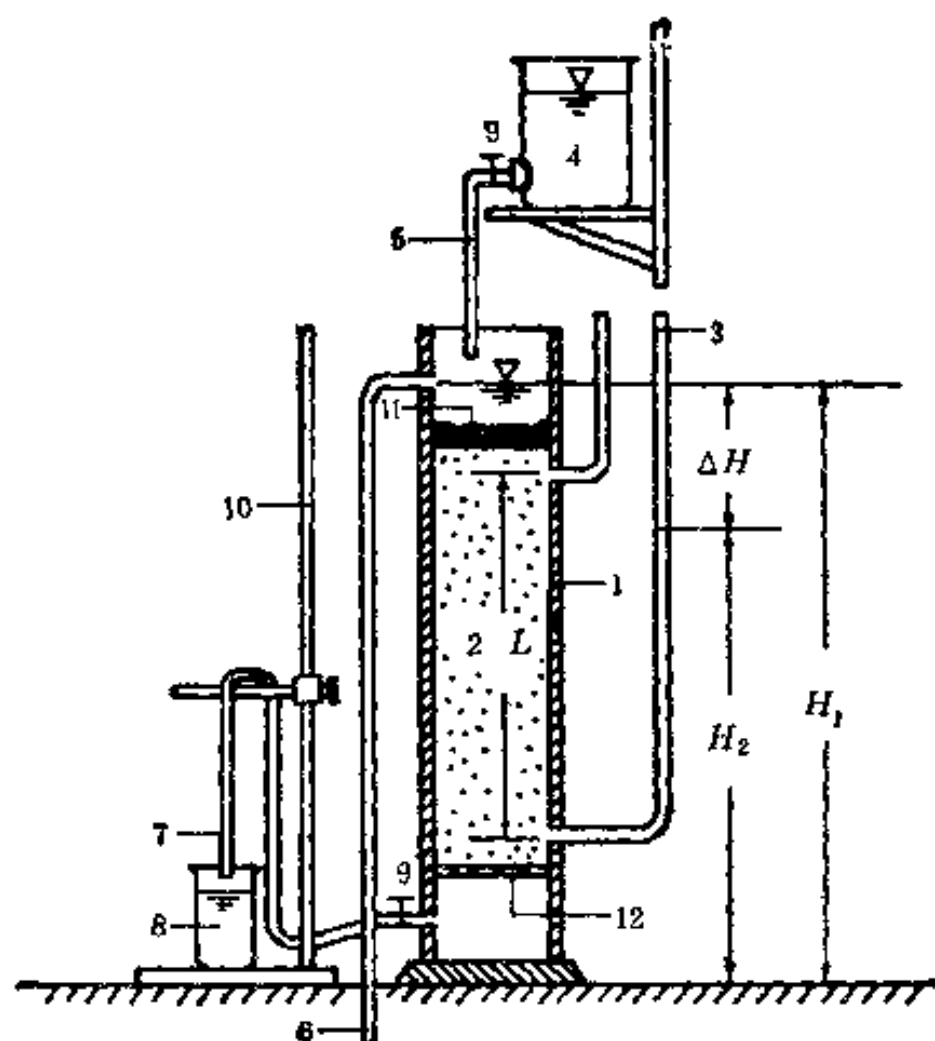


图 1-1 达西仪示意图

1. 试筒 2. 试样 3. 测压管 4. 供水筒 5. 供水管 6. 溢流管 7. 出水管  
8. 量筒 9. 闸阀 10. 滑动支架 11. 砾石层 12. 金属孔板

式中  $V$ ——平均渗透速度。

再令 
$$\frac{\Delta H}{L} = J, \quad (1.3)$$

式中  $J$ ——水力坡降, 即是单位渗径长度上的水头损失。

由此得

$$V = KJ, \quad (1.4)$$

公式(1.4)表明, 地下水的渗透速度  $V$  与水力坡降  $J$  的一次方成正比。这便是达西定律, 公式(1.4)称为达西渗透流速公式, 简称达西公式。由于公式(1.4)反映的是线性关系, 所以将达西定律也叫线性渗透定律。

在公式(1.4)中, 水力坡度是无因次量, 所以渗透系数与渗透

速度具有相同的因次(量纲),也可以用相同的单位,通常以“厘米/秒”、“米/日”等表示。

达西公式——公式(1.4)类似电学中的欧姆公式和力学中的牛顿公式,在形式上是十分简单的,但是,时至今日它仍然是地下水研究中最重要基本公式。

## 二、实际渗透速度与平均渗透速度

在将渗透流量公式(1.1)转变为流速公式(1.4)的过程中,曾使用了公式(1.2),亦即

$$\frac{Q}{F} = V.$$

如图1-2所示,渗透水流只能从孔隙中流过。因此,上式中的 $Q$ 是经由孔隙的渗透流量,而式中的 $F$ 却是试样(或者说多孔介质)垂直水流方向的总面积。在该面积中既包含实际通过水流的孔隙面积,也包含岩土颗粒占据的不透水的面积。

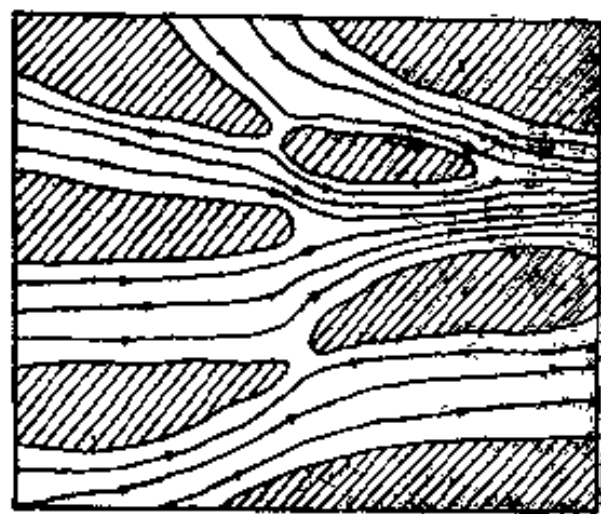


图1-2 地下水渗流示意图

由此可知,公式(1.2)或(1.4)中的流速 $V$ ,或者说达西公式中的流速 $V$ ,是一个化引而来的平均渗透流速,并不是水在多孔介质的孔隙中流动的实际流速。

实际流速是指实际在孔隙中流动的水流速度,可用下式表示:

$$U = \frac{Q}{Fn_t}. \quad (1.5)$$

式中  $n_t$ ——岩土的渗透孔隙率,也称渗透断面系数,该系数为真实通过水流的孔隙面积  $F_t$  与包含此面积的岩土总面积  $F$  之比。

在(1.5)式中考虑到  $\frac{Q}{F} = V$ ,则可得出表示实际渗透速度的

公式

$$U = V/n_i, \quad (1.6)$$

于是

$$V = n_i U, \quad (1.7)$$

在不少文献中还出现术语“平均真实流速  $\bar{U}$ ”， $\bar{U}$  值等于单位时间内通过的水量  $Q$  除以孔隙总面积（包括不通水的孔隙），孔隙总面积值是用孔隙率  $n$  乘渗透岩体的横断面面积  $F$  而得，故知

$$\bar{U} = \frac{Q}{Fn} = \frac{V}{n}, \quad (1.8)$$

于是

$$V = n\bar{U}. \quad (1.9)$$

公式 (1.8)、(1.9) 说明，平均渗透速度，在数值上等于真实渗透速度  $U$  与渗透断面系数的乘积，或者等于平均真实渗透速度与孔隙率的乘积。

由于  $n_i$  和  $n$  均是始终小于 1 的数，故由公式 (1.6)，(1.8) 可以看出，地下水运动的平均渗透速度（简称平均渗速），也就是通常习惯上所说的渗透速度  $V$ ，始终小于实际渗透速度（简称实际渗速），也始终小于平均实际渗速。

弄清平均渗速  $V$ ，实际渗速  $U$  及平均实际渗速  $\bar{U}$  之间的关系是必要的，这不仅为了防止某些概念的混乱，而且在实际工作中也是有用的。例如在测定地下水流速的方法中，有些方法测出的便是实际渗速或平均实际渗速，而在渗流计算中却又常常需要把它们转变成平均渗速。

### 三、水力坡度的几何意义和物理概念

图 1-3 表示从渗流场中取出的割离体，对此，象在水力学中那样，可以列出渗透水流在相距为  $\Delta L$  的两过水断面上的伯努里方程：

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \Delta H, \quad (1.10)$$

式中  $Z_1, Z_2$ ——测量点处从基准面算起的几何高度，也称几何水

头或几何水头高度；

$P_1, P_2$ ——测点处的压力强度，简称压强；

$\frac{P_1}{\gamma}, \frac{P_2}{\gamma}$ ——压力水头高度；

$\gamma$ ——水的比重；

$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}, \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}$ ——流速水头高度。

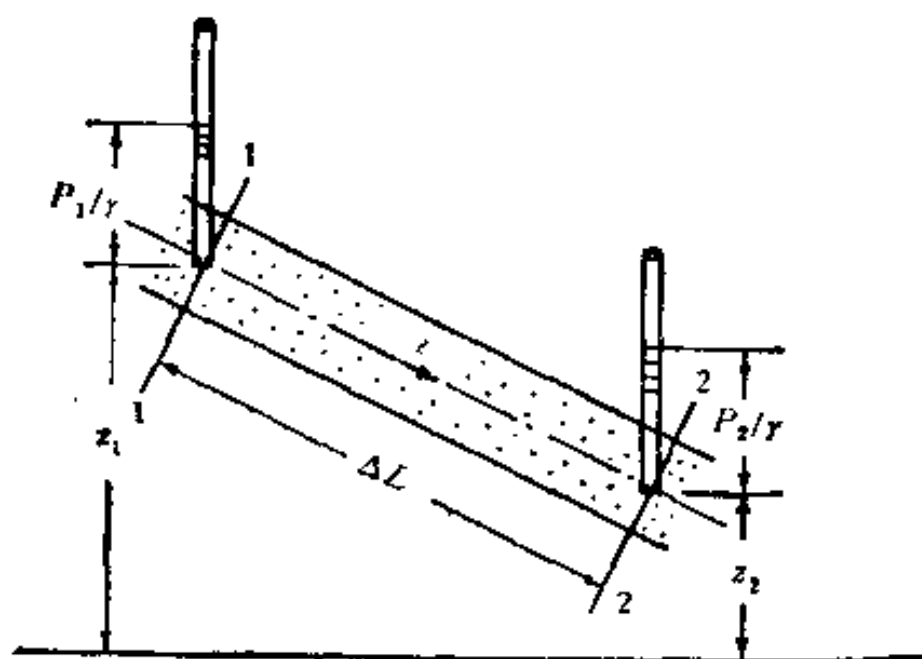


图 1-3 渗流场示意图

由于地下水运动速度缓慢，故当流速水头忽略时，从而得

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma}. \quad (1.11)$$

公式 (1.8) 之左为断面 1—1 的总水头高度  $H_1$ ，即

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = H_1, \quad (1.12)$$

(1.8) 式之右为断面 2—2 的总水头  $H_2$ ，即

$$Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} = H_2. \quad (1.13)$$

从而可以推得

$$\left(Z_1 + \frac{P_1}{\gamma}\right) - \left(Z_2 + \frac{P_2}{\gamma}\right) = H_1 - H_2 = \Delta H, \quad (1.14)$$

$$\text{或 } \Delta H = H_1 - H_2 = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + Z_1 - Z_2 = \frac{\Delta P}{\gamma} + \Delta Z, \quad (1.15)$$

式中  $\Delta P = P_1 - P_2$ ——压力损失;

$\Delta Z = Z_1 - Z_2$ ——两点间的高差。

利用 (1.15) 式的关系,可写出坡降公式

$$J = \frac{\Delta H}{\Delta L} = \frac{\frac{\Delta P}{\gamma} + \Delta Z}{\Delta L} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta P + \gamma \Delta Z}{\Delta L}. \quad (1.16)$$

该式的物理意义: 水力坡降是两个考查断面上的总水头差与断面间距离之比,或者说是二断面间的单位水头损失。

按照 (1.4) 式及 (1.16) 式,可将平均渗速表示为

$$\begin{aligned} V &= \frac{K}{\gamma} \frac{\Delta P + \gamma \Delta Z}{\Delta L} = \frac{K}{\gamma} \frac{\Delta(P + \gamma Z)}{\Delta L} \\ &= \frac{K}{\gamma} \frac{\Delta P_s}{\Delta L}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

式中的  $\Delta P_s$  为化引压力,即

$$\Delta P_s = \Delta(P + \gamma Z). \quad (1.18)$$

若底板是水平的,则  $\Delta Z = 0$ , 于是

$$V = \frac{K}{\gamma} \frac{\Delta P}{\Delta L} = K \frac{\Delta P}{\gamma \Delta L} = K \frac{\Delta H}{\Delta L}. \quad (1.19)$$

水力坡度  $J$  按照研究对象的不同和计算工作的需要,可以表示为不同的形式,或者说可将水头与运动距离表示为差分,微分或偏微分,从而可以有

$$J = \frac{\Delta H}{\Delta L}, \quad (1.20a)$$

$$J = - \frac{dH}{dL}, \quad (1.20b)$$

$$J = - \frac{\partial H}{\partial L}. \quad (1.20c)$$

式中的负号表示水头随流动距离增大而降低。这些不同的形式,将有助于建立不同的方程式——差分方程、微分方程和偏微分

## 四、非线性渗透定律

在巨砾以及大的岩溶洞穴和裂缝之中地下水的运动,其实与沿着渠道和管道流动的水流性质相似,可能会出现很大的流速.在人工坑道或井孔附近,地下水的运动速度也可能变得很大,以致水流的雷诺数超过临界数值,水流进入紊流状态.在层流状态起主导作用的粘滞摩阻力已退让于惯性-脉动力,流速发生旋转和位移,水头损失增大,在这种情况下地下水的运动不再服从线性定律,而服从非线性定律

$$V = K_f J^{\frac{1}{2}}. \quad (1.21)$$

即就是说在紊流情况下,地下水的渗透速度  $V$  与水力坡降  $J$  的平方根成正比.  $K_f$  为紊流时的渗透系数.

该定律也被称为谢才定律(1921年),公式(1.21)被称为谢才公式或谢才-克拉斯诺波里斯基公式.

在有些情况下,地下水的运动介于上述两种状态之间,故被称为混流运动,对此可用所谓斯姆列盖尔定律的公式表示,即

$$V = K_f J^{\frac{1}{m}}. \quad (1.22)$$

式中的  $m$  变化在 1—2 之间,当  $m$  为 1 时即为达西公式; $m$  为 2 时为谢才公式.在其余情况下由于  $m$  值不易确定,因而公式(1.22)在实际中很少应用,而被另一种形式的公式所代替,即

$$J = AV + BV^2. \quad (1.23)$$

式中的  $A, B$  为经验系数,其值取决于岩石颗粒的粗细和渗液粘滞性的大小.

(1.23)式是表达渗透规律的通式,不难发现当渗透流速很小时,可以忽略式右的第二项而导出达西定律(线性定律)

$$V = \frac{1}{A} J = KJ. \quad (1.24)$$

当  $V$  非常大时,相比之下,可以忽略等式之右的第一项而得



$$J = BV^2,$$

或 
$$V = \left(\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}} = K J^{\frac{1}{2}}, \quad (1.25)$$

公式 (1.23) 是根据自然作用力的独立性原则, 并通过试验建立的, 首创者是裘布依, 后来又有不少学者作了进一步的研究.

若在公式 (1.23) 中令

$$A = \frac{1}{K}, \quad \alpha = KB, \quad (1.26)$$

则 (1.23) 可转变为

$$J = \frac{V}{K} (1 + \alpha V). \quad (1.27)$$

式中  $K$  即是线性定律中的渗透系数  $K$ , 而  $\alpha$  被称为非线性参数.

依据本书的主旨, 对于渗透定律只作如上的扼要介绍, 以满足其它篇章的引用为限度, 至于更深入的论述可参阅文献[1—5].



由  $x$  轴方向流入的:  $\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right) dy dt$ ;

由  $y$  方向流出的:  $\left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy\right) dx dt$ 。

(3) 单元体内部的变化水量:

由于水位经过  $dt$  时间上涨了  $\frac{\partial H}{\partial t} dt$ , 使原来水面从  $ABCD$  上升到  $A'B'C'D'$ , 故在这两个水面所包围的小六面体中蓄存的水量为  $\mu \frac{\partial H}{\partial t} dt dy dx$ 。

分析了这些水量之后, 便可根据水量平衡原理, 列出割离体的水量平衡方程式:

$$q_x dy dt + q_y dx dt + w dx dy dt = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right) dy dt + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy\right) dx dt + \mu \frac{\partial H}{\partial t} dt dx dy。$$

消去同类因子并整理之, 得

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = w - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right)。 \quad (2.1)$$

而单宽流量  $q = H \times 1 \times V$ , 又由达西公式 (1.20c) 知流速

$$V_x = -K \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$V_y = -K \frac{\partial H}{\partial y},$$

故知

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -HK \frac{\partial H}{\partial x} = -T \frac{\partial H}{\partial x} \\ q_y &= -HK \frac{\partial H}{\partial y} = -T \frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

此处  $T = KH$ ——含水层的导水系数, 以米<sup>2</sup>/日计。

将 (2.2) 式代入 (2.1) 式则得

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y}\right) + w。 \quad (2.3)$$

(2.3) 式便是潜水二维非稳定运动的微分方程。

由于  $T = KH$ ，而  $H\partial H = \partial\left(\frac{H^2}{2}\right)$ ，故 (2.3) 式可写为

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial \frac{H^2}{2}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial \frac{H^2}{2}}{\partial y} \right) + w. \quad (2.4)$$

如果水流为一维流，其方程为

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + w. \quad (2.5)$$

上列的微分方程 (2.3), (2.4), (2.5) 也被称为布森涅茨克 (Boussinesq) 方程。

式中的  $H$  代表水头或潜水的水位，通常以米计。如果基准面取在含水层底板的表面上， $H$  也便是含水层的厚度，如图 2-1 所示的那样。

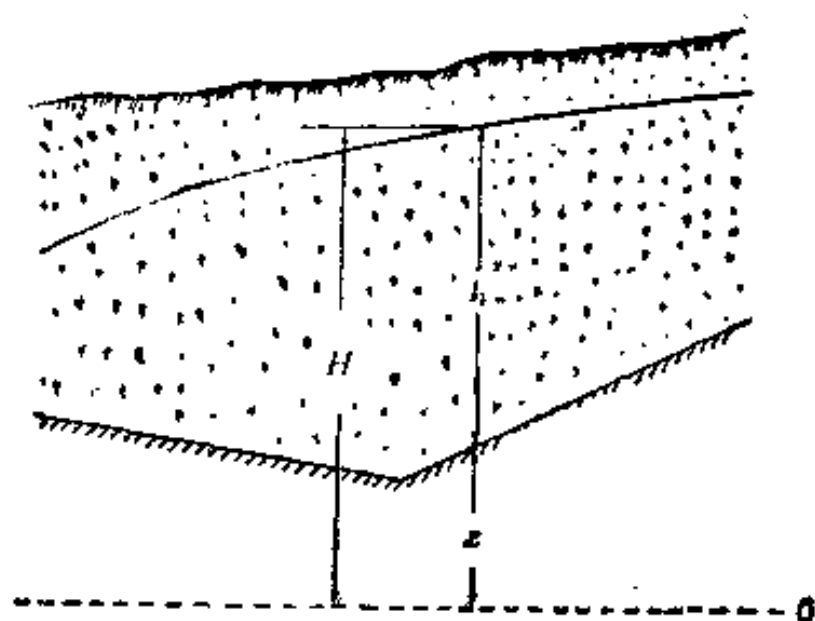


图 2-2 底板呈任意坡度的含水层示意图

如果底板倾斜不平，基准线并不与底板表面相吻合，而低出  $Z$  值，如图 2-2 所示，此时

$$H = h + Z. \quad (2.6)$$

式中  $h$  代表含水层厚度。

在图 2-2 所示的情况下，方程 (2.3) — (2.5) 中的  $T$  值将变为

$$T = Kh. \quad (2.7)$$

可以看出, (2.3), (2.4), (2.5) 均为非线性方程<sup>1)</sup>, 目前尚难于精确的直接求解。因此, 在实际工作中除了用近似算法求解之外, 经常采用所谓线性化法将它们变为线性方程而求解。最常用的线性化方法是: 在一定的时间和一定的空间内取导水系数  $T$  的平均值, 并把它视为常数。由于渗透系数  $K$  值一般被视为常数, 因此所说的取  $T$  为常数, 实际便是把计算时段内的含水层厚度  $H$  值取平均数并视为常数。

$$\text{并设} \quad a = \frac{T}{\mu} = \frac{KH_p}{\mu}, \quad (2.8)$$

则方程式 (2.3), (2.4), (2.5) 变为

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) + \frac{w}{\mu}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) + \frac{w}{\mu}. \quad (2.10)$$

式中  $a$ ——水位传导系数, 以 米<sup>2</sup>/日 计;

$H_p$ ——平均含水层厚度, 米;

$\mu$ ——自由孔隙率, 或称给水度, 也就是从单位体积含水层中在重力作用下, 能够释放给出的水量所占该含水层体积的份数, 如 0.1, 0.15 等。

若无入渗发生, 即  $w = 0$ , 则在公式 (2.3), (2.4), (2.5) 以及 (2.8) — (2.10) 中失去附加项  $\frac{w}{\mu}$ 。若无入渗而需考虑蒸发损失  $\epsilon$ , 则附加项变为  $\frac{\epsilon}{\mu}$ , 且取负号。如果存在越层补给, 则应增加反映该补给的附加项。

## 二、潜水井的非稳定渗流方程

地下水向井孔的运动呈辐状流, 因而使用圆柱坐标便于计算。

1) 数学中所说的线性微分方程, 是指函数和它的导数均是一次的, 它们也不相乘。

包含这种坐标的方程,可以采取对(2.3)~(2.5);(2.6)~(2.10)式进行坐标变换的方法求取,也可以按照推导前述诸式的原理直接推得,为了加深对于非稳定渗流微分方程本质的认识,下面进行直接推导.

如图 2-3 所示,假设于某一时间  $t$ , 在距井  $r$  处的断面上水深为  $H$ , 按达西流量公式, 通过周长为  $2\pi r$  的流量为  $Q_r$ , 该流量经过厚度为  $dr$  的微分单元体, 获得增量  $\frac{\partial Q_r}{\partial r} dr$ . 因为我们所取的流量的方向正好与实际的流向相反, 故知

$$Q_r = -2\pi rHK \frac{\partial H}{\partial r} = -2\pi rKH \frac{\partial H}{\partial r}, \quad (2.11)$$

于是

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} dr = -2\pi K \left[ \frac{\partial \left( rH \frac{\partial H}{\partial r} \right)}{\partial r} \right] dr$$

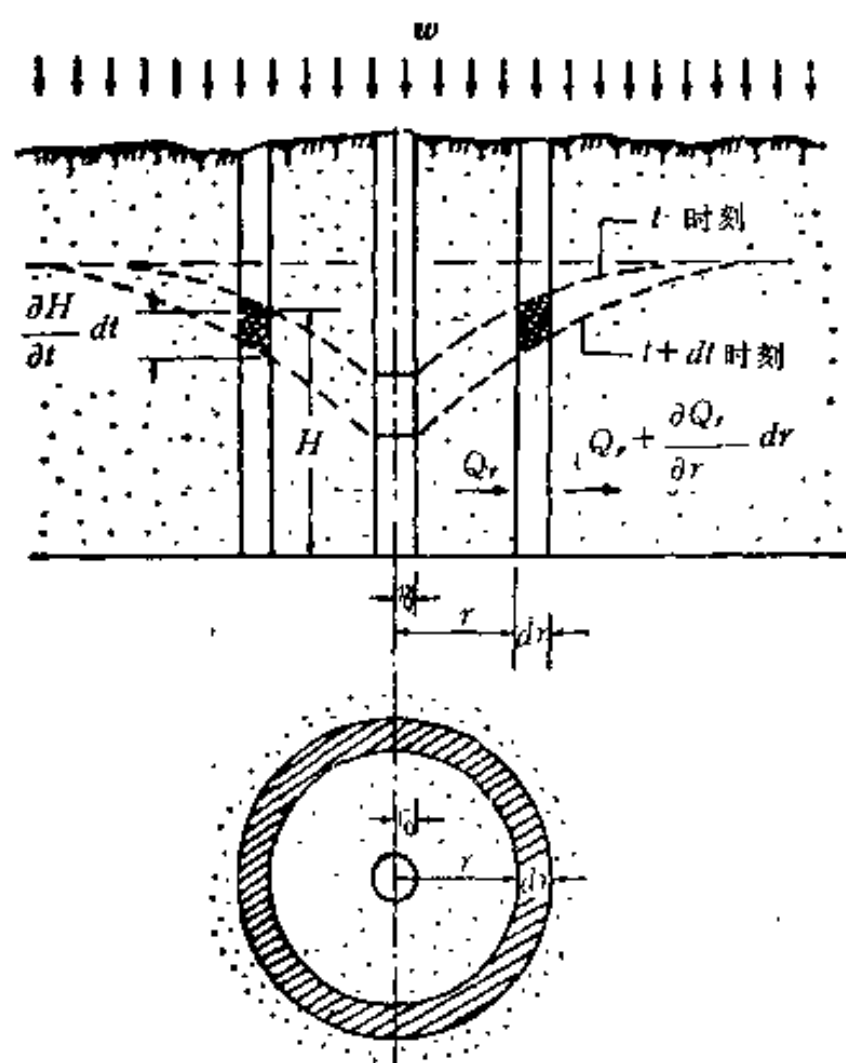


图 2-3 地下水向井的非稳定渗流

$$= -2\pi K \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( H \frac{\partial H}{\partial r} \right) + H \frac{\partial H}{\partial r} \right] dr.$$

而在  $dt$  时间内由此而获得的流出总增量为

$$dV_r = \frac{\partial Q_r}{\partial r} dr dt = -2\pi K \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( H \frac{\partial H}{\partial r} \right) + H \frac{\partial H}{\partial r} \right] dr dt. \quad (2.12)$$

在同一个  $dt$  时间内，在环形面积  $2\pi r dr$  上由于入渗进入含水层中的水量为

$$dV_w = (2\pi r dr) w dt = 2\pi r w dr dt. \quad (2.13)$$

式中  $w$ ——降水入渗强度，单位：米/日。

在非稳定渗流情况下，由于不断地抽取水量，便引起水位的相应变化以及含水层中水的体积的变化。如图 2-3 中的影线所示，在所考察的微分体中，这种变化量为

$$\begin{aligned} dV_\mu &= (2\pi r \mu dr) \left( -\frac{\partial H}{\partial t} dt \right) \\ &= -2\pi r \mu \frac{\partial H}{\partial t} dr dt, \end{aligned} \quad (2.14)$$

式中  $\mu$ ——含水层的给水度。

公式 (2.14) 中在  $\frac{\partial H}{\partial t}$  之前取负号，是因为在所考查的情况下水位随  $t$  的增大而变小。

根据水量平衡原理，进入微分体的入渗量以及因含水层水位下降而放出的水量，都将从微分体流出，亦即

$$dV_w + dV_\mu = dV_r. \quad (2.15)$$

将公式 (2.12), (2.13), (2.14) 表示的  $dV_r$ ,  $dV_w$ ,  $dV_\mu$  代入 (2.15) 式中，得

$$\begin{aligned} -2\pi r \mu \frac{\partial H}{\partial t} dr dt + 2\pi r w dr dt &= -2\pi K \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( H \frac{\partial H}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + H \frac{\partial H}{\partial r} \right] dr dt, \end{aligned}$$

对该式整理后得

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{K}{\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( H \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} H \frac{\partial H}{\partial r} \right] + \frac{w}{\mu}. \quad (2.16)$$

该式便是存在入渗时潜水完整井非稳定渗流偏微分方程式。该式也是非线性的。如果用时段  $dt$  内的平均含水层厚度  $H_p$  代替  $H$ ，则 (2.11) 式变为

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{KH_p}{\mu} \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right] + \frac{w}{\mu}, \quad (2.17)$$

若象前面那样，令

$$\frac{KH_p}{\mu} = \frac{T}{\mu} = a,$$

则 (2.17) 式变为

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right] + \frac{w}{\mu}. \quad (2.18)$$

若无人渗，即  $w = 0$ ，则得

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right]. \quad (2.19)$$

### 三、考虑弹性释水及越流补给时 承压含水层中井孔的渗流方程

在承压含水层中发生的非稳定渗流，一般认为是由岩层以及水的弹性体积变化引起的。推导此类渗流的微分方程，仍可用推导 (2.3)，(2.19) 式的类似思想方法，获得在形式上也很相似的结果。

现在便来推导上下均有弱透水层补给的承压含水层中井孔的非稳定渗流方程。

如图 2-4 所示，为了推导方程，象对潜水井所作的那样，在距井  $r$  处，切割一个厚度为  $dt$  的环柱体，进而考查在  $dt$  时间内流经该割离体的水量平衡关系。



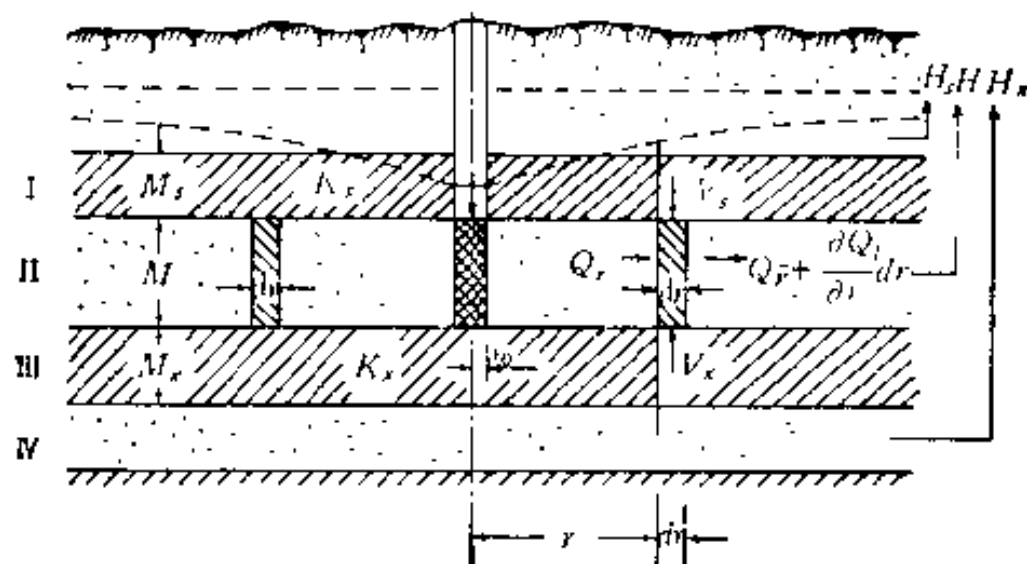


图 2-4 考虑弹性释放及越流补给时承压井示意图

设若流进该环柱体的单位时间水量，也就是流量为  $Q_r$ ，其值为

$$Q_r = 2\pi r M K \frac{\partial H}{\partial r} = 2\pi K M r \frac{\partial H}{\partial r}. \quad (2.20)$$

式中  $M$ ——主含水层厚度，被视为常数，通常以米计；

$H$ ——主含水层中的水头值，米；

$r$ ——考察点距主井的距离，米。

则在通过环柱体厚度  $dr$  之后， $Q_r$  发生的增量为

$$\begin{aligned} Q_r - \left( Q_r + \frac{\partial Q_r}{\partial r} dr \right) &= - \frac{\partial Q_r}{\partial r} dr \\ &= - 2\pi K M \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) dr. \end{aligned} \quad (2.21)$$

而在  $dt$  时间内的总增量为

$$dV_r = \left( - \frac{\partial Q_r}{\partial r} dr \right) dt = - 2\pi K M \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) dr dt. \quad (2.22)$$

在  $dt$  时间内，由含水层的上、下弱透水层补给的水量为：

$$dV_y = 2\pi r dr (V_s + V_x) dt = 2\pi r (V_s + V_x) dr dt. \quad (2.23)$$

式中  $V_s, V_x$ ——分别为上部和下部的越层补给速度，具有速度的量纲，单位可用米/日。

由于弹性释放产生的水量为

$$dV_r = 2\pi r dr \mu_s \left( -\frac{\partial H}{\partial t} dt \right) = -2\pi \mu_s r \frac{\partial H}{\partial t} dr dt, \quad (2.24)$$

式中  $\mu$ ——弹性释水系数。

根据水量平衡原理应有

$$dV_r = dV_y + dV_z, \quad (2.25)$$

将 (2.22), (2.23), (2.24) 式表示之  $dV_r$ ,  $dV_y$ ,  $dV_z$  代进 (2.25) 式则得

$$\begin{aligned} -2\pi KM \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) dr dt &= 2\pi r (V_r + V_z) dr dt \\ &+ \left( -2\pi r \mu_s \frac{\partial H}{\partial t} dr dt \right), \end{aligned}$$

消去上式两端的  $2\pi dr dt$ , 得

$$r \mu_s \frac{\partial H}{\partial t} = KM \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + r (V_r + V_z).$$

或

$$\mu_s \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{T}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + (V_r + V_z). \quad (2.26)$$

由于

$$\frac{T}{\mu_s} = \frac{KM}{\mu_s} = a_s, \quad (2.27)$$

此处  $a_s$ ——压力传导系数, 量纲仍为  $[L^2 T^{-1}]$ 。

从而得

$$\frac{1}{a_s} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{V_r + V_z}{T}. \quad (2.28)$$

或即

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{V_r + V_z}{\mu_s}. \quad (2.29)$$

该式便是有越流补给的二维承压渗流微分方程。

由达西公式知

$$V_r = K_r \frac{H_r - H}{M_r}, \quad V_z = K_z \frac{H_z - H}{M_z}, \quad (2.30)$$

式中的  $H_r, H_z; M_r, M_z; K_r, K_z$  分别代表上下弱透水层的水头、

厚度和渗透系数。

若将 (2.30) 式表示之  $V_i, V_x$  代进 (2.29) 式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = a_i \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) \\ + K_i \frac{H_i - H}{M_i \mu_i} + K_x \frac{H_x - H}{M_x \mu_x}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

或

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_i} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{K_i}{K M M_i} (H_i - H) \\ + \frac{K_x}{K M M_x} (H_x - H). \end{aligned} \quad (2.32)$$

若令

$$\left. \begin{aligned} b_i &= \sqrt{\frac{K_i}{K M M_i}} = \sqrt{\frac{K_i}{T M_i}}, \\ b_x &= \sqrt{\frac{K_x}{K M M_x}} = \sqrt{\frac{K_x}{T M_x}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

则 (2.32) 变为<sup>[6]</sup>

$$\frac{1}{a_i} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + b_i^2 (H_i - H) + b_x^2 (H_x - H). \quad (2.34)$$

式中  $b_i, b_x$  ——越流系数, 1/米。

若令

$$B_i = \frac{1}{b_i}, \quad B_x = \frac{1}{b_x}, \quad (2.35)$$

并将 (2.35) 式代进 (2.34) 式则得<sup>[7]</sup>

$$\frac{1}{a_i} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{(H_i - H)}{B_i^2} + \frac{(H_x - H)}{B_x^2}. \quad (2.36)$$

式中  $B_i, B_x$  ——越流参数, 米。

若无越流补给, 则得

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a_s \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right). \quad (2.37)$$

上式表示的承压含水层微分方程是线性的。

#### 四、地下水稳定渗流的微分方程

所谓稳定渗流是指在观察时间内地下水的水位(水头)、流量、流速均为常数,不随时间而变化。用数学语言表示,则是  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ,

$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ , 在这种情况下,方程式(2.3), (2.5)变为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + w = 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dx} \left( T \frac{dH}{dx} \right) + w = 0 \quad (2.39)$$

如果可将  $T = KH$  中的  $H$  取平均值  $H_p$ , 且与  $K$  均视为常数, 参见(2.9), (2.10)式, 则可得到微分方程

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{w}{KH_p} = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{w}{KH_p} = 0. \quad (2.41)$$

若无人渗, 即  $w = 0$ , 则上述方程可进一步简化, 而得到著名的拉普拉斯方程。或者说, 地下水稳定渗流微分方程是拉普拉斯方程。

同理, 对于井流参见公式(2.16), (2.17), (2.19), 得到

$$K \left[ \frac{d}{dr} \left( H \frac{dH}{dr} \right) + \frac{1}{r} H \frac{dH}{dr} \right] + w = 0, \quad (2.42)$$

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} + \frac{w}{KH_p} = 0. \quad (2.43)$$

若  $w = 0$ , 则得

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} = 0. \quad (2.44)$$

对于存在越流的稳定井流,则由(2.32)(2.34)式得

$$\frac{d^2H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} + \frac{K_r}{KMM_r} (H_r - H) + \frac{K_x}{KMM_x} (H_x - H) = 0, \quad (2.45)$$

$$\frac{d^2H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} + b_r^2(H_r - H) + b_x^2(H_x - H) = 0. \quad (2.46)$$

以上系统地推导了地下水渗流的基本方程,以后的解题便是针对具体的水文地质构造,在相应的边界条件和起始条件下求解上述方程。

## 五、求解渗流基本方程的方法概述

求解基本方程常用的方法概括起来主要分为三大类:解析求解法、数值计算求解法及模拟求解法。

解析求解法,乃是用数学解析方法求解地下水渗流微分方程的传统方法。它的缺点是当含水层条件和边界条件复杂时难于直接求解,但是,这一缺点不应成其为遭受轻视的理由,特别因为该方法较直接地反映渗流机理,推理性强,理论严密,对于选择和应用其它方法具有基础和启示作用。因此,对于从事地下水渗流计算和研究者来说,应当学习和掌握这种方法。

数值方法目前常用者有二,其一是有限差分法,其二是有限单元法。借助电子计算机,应用上述方法求解条件比较复杂的地下水渗流课题是相当有效的,尤其是有限差方法,国内外都有大量的成功的应用实例。有限单元法在渗流研究中的应用也在很快发展。

模拟求解方法分为水电比拟法(ЭГП)和网络模拟机模拟算法。这些方法都是成熟的有效方法,其中水电比拟法大多用来研究地下水的稳定运动,研究小区域的复杂渗流,如水工建筑物——坝、闸基础的渗流和土坝渗流等。

网络模拟机模拟算法也是求解非稳定渗流课题的有效方法,该方法的数学基础可以说是有限差分法,或者说它和有限差分法、有限单元法都基于连续介质的可离散理论。模拟方法的优点是已有成功的模拟仪器可直接使用。常用的这类模拟仪器有水力积分仪和电力积分仪。应用这些仪器能够比较容易的处理边界问题,解题的准备工作也比较简单,过程显示比较直观,因而有利于在解题过程中观察、发现和处理问题。

对于简单的课题,例如一维稳定流,二维辐状稳定流,如果含水条件也比较简单,便可直接从渗流基本定律出发,推求其计算公式,而无需通过求解基本运动方程的办法。

## 六、地下水基本渗流方程的求解条件

求解非稳定渗流方程,意味着需要确定任一时刻在渗流区内任一点的水位(或水头)值,或渗流量的数值等。这种求解,只有当决定着这种渗流现象的各要素之间存在确定的数学关系时才有可能。

例如,(2.19)式表示一维非稳定渗流中,水位  $H$  及时间  $t$  的关系,即

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + w, \quad (2.47)$$

或 
$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial H}{\partial x} \right) + w. \quad (2.48)$$

方程(2.47)或(2.48)表明地下水顺着  $x$  方向流动时水位  $H$  与时间  $t$  的变化关系,但是,已如前述,这些公式表明的只是形成某类渗流现象的因素之间的一般联系。或者说,它们只表明某一类现象的运动规律,而不包括确定某个具体现象的具体条件,因此,这些方程式是多解的。

为了使某个具体课题获得具体的确定解答,必须给出定解条件,也就是唯一解条件。概括言之,这些条件可分为四类:

(1) 渗流区域的几何尺寸：包括断面长度(或宽度)，不透水层的高程位置，含水层厚度等；

(2) 渗流区(含水层)的物理特征及补排条件：渗透系数  $K$  值，给水度(或有效孔隙率)  $\mu$  值，入渗系数  $w$  值等；

(3) 起始条件，也就是在观察开始时刻的函数值，或者说是开始时刻的渗流状态；

(4) 边界条件，也就是在渗流的边界上，函数或导数随时间的变化情况。

前述‘(1)’，‘(2)’两个条件是具体和容易理解的，下面将对起始条件和边界条件加以解释。

### (一) 起始条件

已经提及，起始条件乃是在被考查的渗流场内处于观察开始时刻的函数状态值，在针对非稳定渗流方程求解时，所给出的起始条件一般是水位状态——起始水位曲线。由于肯定是开始时刻，也就是说时刻已定，所以它实际上只是水位与坐标的关系曲线，这些曲线值也可以通过列出水位与相应坐标的表格来表示。起始水位值往往是由实际的观测得出的，当然也可以是设计给出的值，当用模拟计算方法或数值计算方法求解渗流课题时，便可直接使用这些曲线或数值，而当用解析方法求解非稳定渗流方程时，则常常需要将起始条件表示为水位与坐标的函数关系。

作为起始条件的水位曲线，可以是水平的静水位，水面线各点的坐标等于常数。用数学式子表示即为

$$H(x, 0) = H_0 = \text{const.} \quad (2.49)$$

作为起始条件的水位曲线，也可以是非稳定渗流过程中任一已知时刻的水位曲线，或者说，任一已知时刻的水位曲线，都可以作为从该时刻开始计算的下一时刻的起始条件。对于这种情况，其起始条件，例如对一维渗流来说可以表示为

$$H(x, t_0) = f(x). \quad (2.50)$$

在较多的情况下,作为起始条件的水位曲线,常是非稳定过程开始前的稳定渗流曲线。在这种情况下,起始条件对一维流来说可以表示为

$$H(x, 0) = f(x). \quad (2.51)$$

而  $f(x)$  可以具体的表现为如下形式

### 1. 无入渗补给时

如图 2-5 所示的有限边界渗流的  $H$  值可表示为公式

$$H = \sqrt{H_1^2 + (H_2^2 - H_1^2) \frac{x}{L}} \quad (2.52)$$

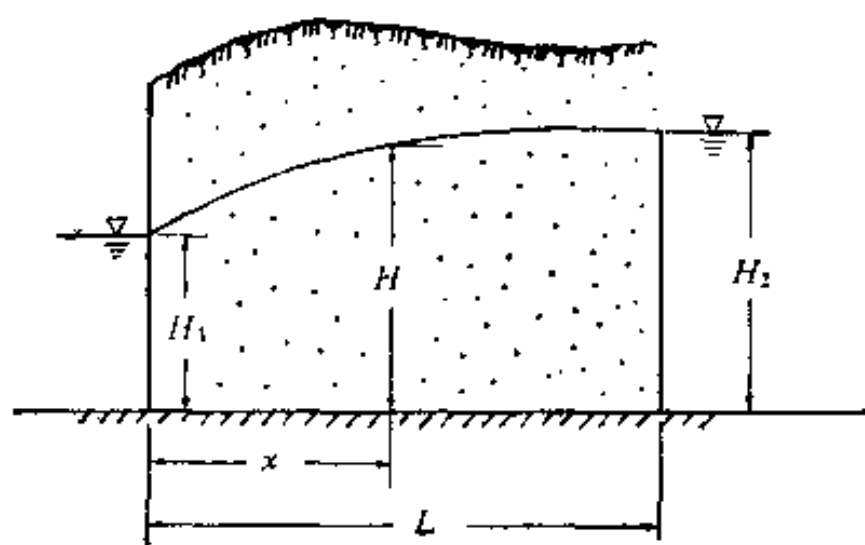


图 2-5 有限边界中的稳定渗流示意图

式中  $H_1$ ,  $H_2$  为已知相距为  $L$  的河流水位;  $H$  为距边界  $x$  处的水位。(2.52) 式是个抛物线方程。

在图 2-5 所示的情况下,为了求出任何一个  $H$  值,需知边界断面间的距离及相应的水位。

对如图 2-6 所示的半无限边界渗流,则仍用公式 (2.52),但需知两个断面的水位值,以及两个断面之间的距离,其余的曲线计算可用内差法或外差法。

不言而喻,上述两种情况下的渗流量亦为常数值。

### 2. 有入渗的河间地块

如图 2-7 所示,如果河间地块有当地入渗补给,且补给强度在



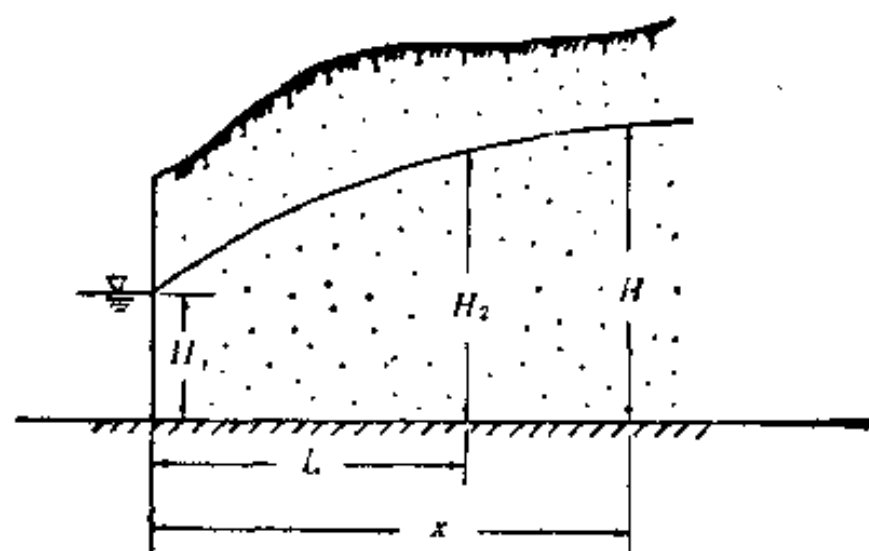


图 2-6 半无限边界渗流示意图

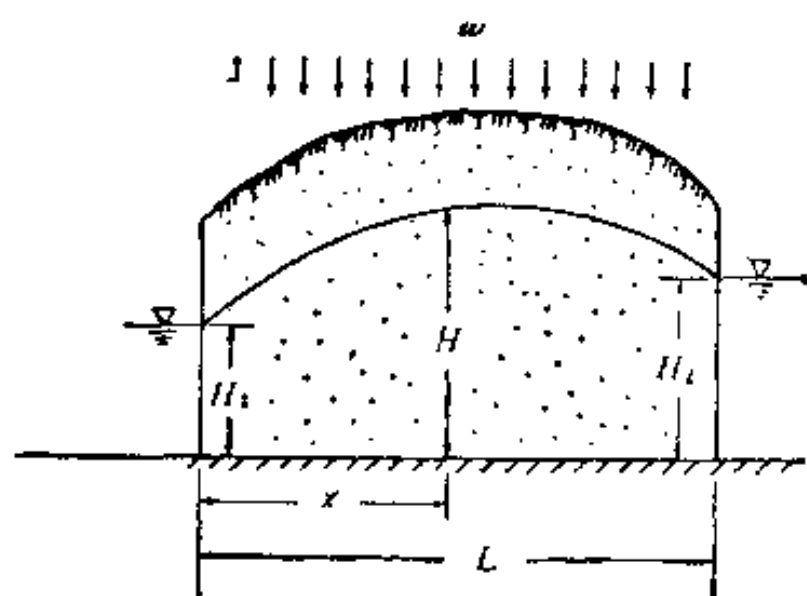


图 2-7 有入渗补给的稳定渗流示意图

断面的全长上保持不变,则用如下公式表示和计算水位曲线

$$H = \sqrt{H_1^2 + (H_2^2 - H_1^2) \frac{x}{L} + \frac{w}{K} (Lx - x^2)} . \quad (2.53)$$

该式是一个椭圆方程.

式中  $K$ ——渗透系数,米/日;

$w$ ——入渗补给强度,米/日.

为了应用(2.53)式,需知边界或任意两个断面上的含水层厚度(或水位) $H_1, H_2$ ,以及断面间的距离 $L$ .

在图 2-7 所示的情况下,由分水岭向两侧河流的流量将是逐渐增长的.

如果  $H_1 = H_2$ , 分水岭将处于对称位置, 于是 (4.7) 式变为

$$H = \sqrt{H_1^2 + \frac{w}{K} (2ax - x^2)}. \quad (2.54)$$

公式 (2.53) 乃是底板水平的均质含水层, 在入渗强度不变情况下计算水位曲线的通式。其余的公式 (2.52), (2.54) 都可以看作它在特殊条件下的特殊形式。

上面列举了一维流的一些常见的起始条件, 在二维、三维情况下的起始条件也具有上述同样的属性, 只是它们应当与课题具有相应的维数, 其一般的表示方法为:

(1) 对二维流

$$\left. \begin{aligned} H(x, y, 0) &= H_0 = \text{const (常数)}, & a \\ H(x, y, 0) &= f(x, y), & b \\ H(x, y, 0) &= f(x, y, t_0). & c \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

(2.55) 式中的  $t_0$  是个已知的起始时间值。

(2) 对三维流

$$\left. \begin{aligned} H(x, y, z, 0) &= H_0 = \text{const}, & a \\ H(x, y, z, 0) &= f(x, y, z), & b \\ H(x, y, z, 0) &= f(x, y, z, t_0). & c \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

(2.56) 式中的  $t_0$  亦为已知时刻的值。

在本节中介绍的主要是潜水的常见起始条件, 其实在不同的情况下还有其它的表示形式, 例如对于不同的坐标系则起始条件在表达形式上有所不同, 但其概念都是相同的。

## (二) 边界条件

求解渗流方程, 无论对于稳定流或非稳定流, 一般都需要知边界条件。在本节中, 我们将着重介绍一维的——包括在圆柱座标中为一维的非稳定渗流的边界条件, 通过这种介绍, 可以举一反三的了解其它非稳定渗流及稳定渗流的边界条件的概念及选定问题。

所谓边界条件, 就是渗流要素在渗流区域边界上所处的状态,

一般将边界条件分为三大类：

### 1. 第一类边界条件

第一类边界条件也称水位（水头）条件，就是在边界上给出已知的水位值，或者是时间函数的  $H \sim t$  关系式，以一维稳定流为例，则表示为：

$$H(0, t) = f(t), \quad (2.57)$$

$$H(L, t) = F(t). \quad (2.58)$$

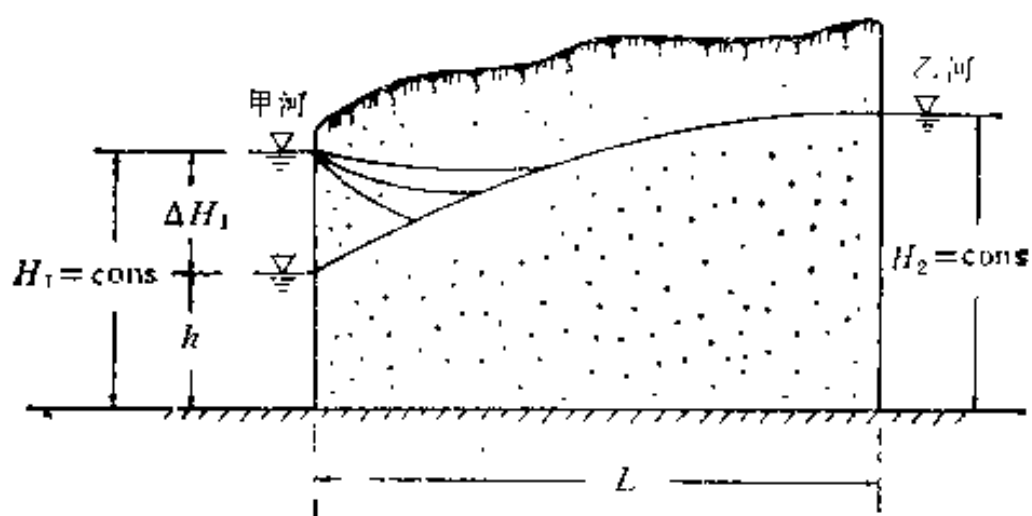


图 2-8 第一类边界示意图

图 2-8 表示了这种边界条件，在河间地段的边界上，乙河的水位保持不变，即  $H_2 = \text{常数}$ ，在甲河中原来的水位为  $h$ ，于瞬时内上升了  $\Delta H$ ，使河水位达到  $H_1$  的高度。此后，若在计算时间内保持不变，即  $H_1$  为常数。则 (2.57)，(2.58) 式变为

$$H(0, t) = H_1 = \text{const}, \quad (2.59)$$

$$H(L, t) = H_2 = \text{const}. \quad (2.60)$$

### 2. 第二类边界条件

第二类边界条件也称流量边界条件，就是在边界上给出流量值：

$$Q(0, t) = f(t), \quad (2.61)$$

$$Q(L, t) = F(t). \quad (2.62)$$

在流量为常数的情况下,也可以表示为:

$$Q(0, t) = \text{const}, \quad (2.63)$$

$$Q(L, t) = \text{const}. \quad (2.64)$$

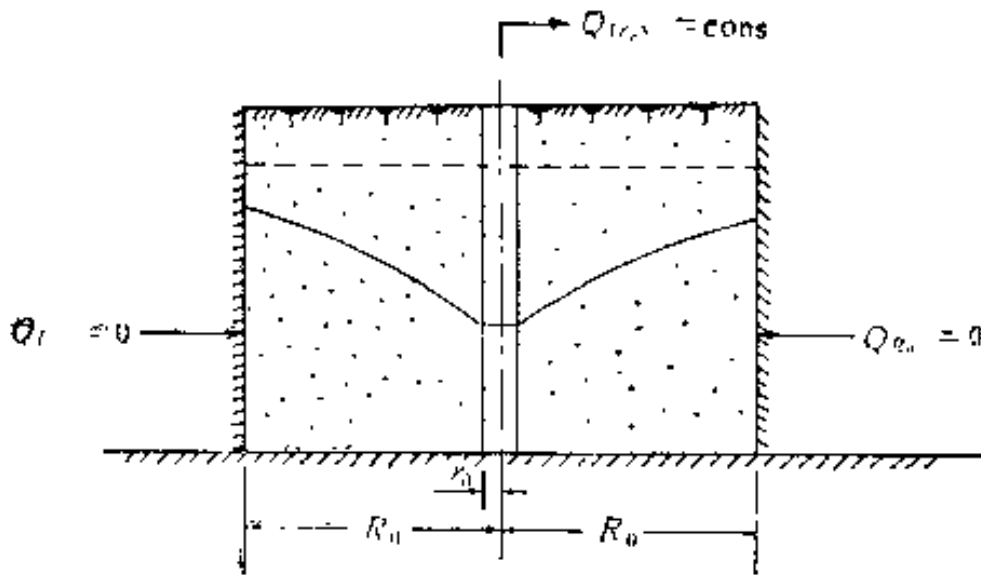


图 2-9 第二类边界条件的辐状流示意图

图 2-9 所示乃是这类边界的一个特例, 井孔位于周围隔水的边界中. 因此, 在  $r = R_0$  的边界上流量  $Q_{R_0} = 0$ , 而由井中进行定流量抽水, 即  $Q(r_0) = \text{const}$ .

在图 2-9 所示的外边界上, 亦即在  $r = R_0$  处的水力坡降为零.

因此, 在这里  $Q(R_0) = 0$  的条件可以表示为

$$\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{(R_0, t)} = 0. \quad (2.65)$$

### 3. 第三类边界条件

第三类边界条件也叫混合边界条件, 也就是对考察的渗流场来说, 边界条件既有水位条件(第一类边界条件), 又包含流量条件(第二类边界条件). 图 2-10 所示乃是这类边界条件的实例: 井孔位于周围不透水的边界中, 在井工作期间, 由界面上流进的流量为零, 而井中的水位降或者说井水位保持常数, 亦即

$$H(r_0, t) - H(r_0) = \text{const}, \quad (2.66)$$

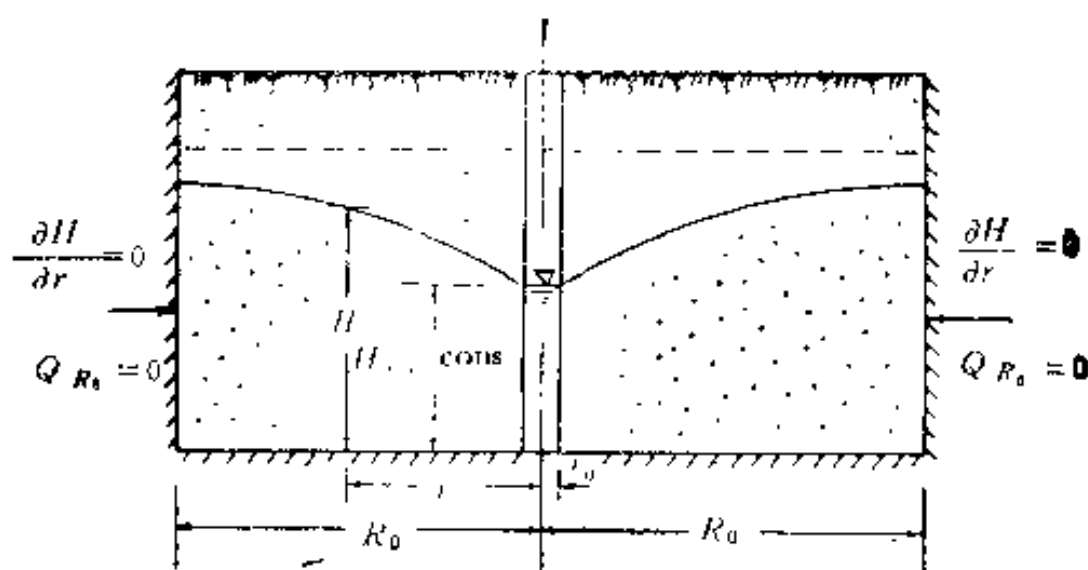


图 2-10 第三类边界条件的辐状流示意图

$$\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{(R_{0,r})} = 0. \quad (2.67)$$

上面所说的三类边界条件是指对整个课题而言的,例如说某课题的边界条件是第一类边界条件,意即它的所有边界都是一类的,而在实际工作中常常碰到的课题可能是混合边界条件。

如果分析的是课题中的某一个或某一段具体的边界条件,则只能说它是第一类,或者第二类。因此,在有些文献中只把边界条件划分为两类,即是我们所介绍的第一类和第二类边界条件。

在有些文献中还提出所谓第四类边界条件,实际是指在相邻界面上,或在不同渗透性的介质接触面上,当发生渗流时根据水流的连续性原理,应当存在的如下条件:

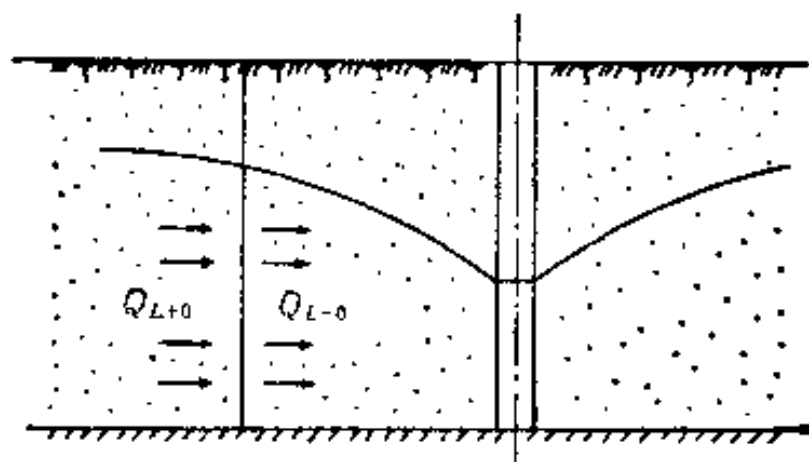


图 2-11 第四类边界条件示意图

$$\left. \begin{aligned} Q_{(L+0)} &= Q_{(L-0)}, & \text{a} \\ H_{(L+0)} &= H_{(L-0)}, & \text{b} \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

图 2-11 是这种条件的示意图。

公式(2.68)所示的条件，多用于成层介质中的渗流计算，它常常显示水流变化在界面上的连接情况，因此，我们把它更确切的称为“连接条件”。

正确地处理边界条件对于有效地进行渗流计算具有十分重要的作用。

# 第三章 求解渗流基本方程的 分离变量法及其应用举例

## 一、分离变量法及其在求解方程中的应用

求解偏微分方程——包括渗流基本方程的分离变量法又叫傅里叶法，或傅里叶分离变量法<sup>[1,2,3]</sup>，它是求解包括渗流基本方程在内的偏微分方程的一种有效方法。本章将举例阐明其基本知识，在以后的章节中将有更实际地应用。

如图 3-1 所示，地下水向沟渠作一维非稳定运动。

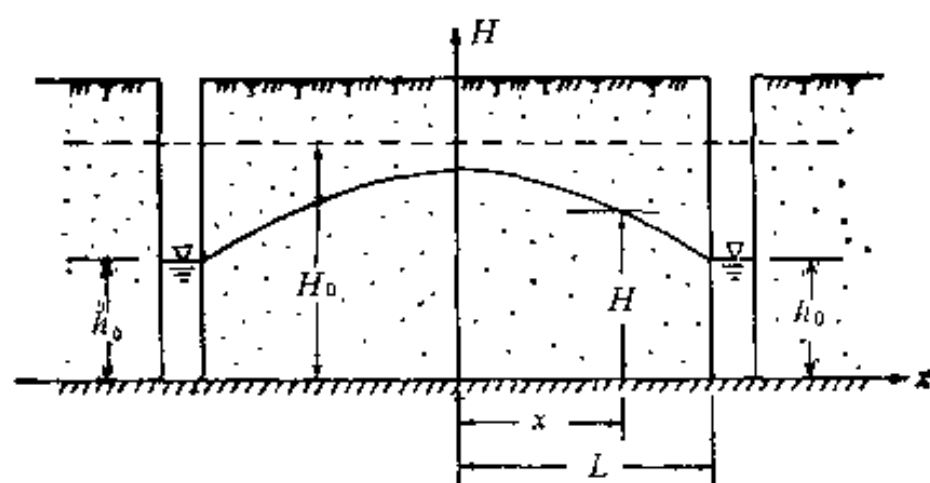


图 3-1 地下水向沟渠渗流示意图

根据第二章讲述的内容，该课题线性化了的微分方程为

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

其求解的边界条件为

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (3.2)$$

$$H|_{x=L} = h_0. \quad (3.3)$$

起始条件为

$$H|_{t=0} = H_0. \quad (3.4)$$

若令  $\tilde{H} = H - h_0$ , 亦即在图 3-1 中将  $x$  轴上移  $h_0$ , 于是 (3.1) — (3.4) 式变为

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial x^2}, \quad (3.5)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (3.6)$$

$$\tilde{H}|_{x=L} = 0, \quad (3.7)$$

$$\tilde{H}|_{t=0} = H_0 - h_0. \quad (3.8)$$

该课题的求解便可采用分离变量法. 分离变量法的主要实质在于认定方程 (3.5) 的解可以由满足边界条件 (3.6), (3.7) 的只含  $x$  的函数, 以及同时满足起始条件 (3.8) 的只含  $t$  的函数的乘积来表示, 亦即

$$\tilde{H}(x, t) = h(x)T(t),$$

$$\text{简写为} \quad \tilde{H}(x, t) = hT. \quad (3.9)$$

应再次指出 (3.9) 式中的  $h$  仅是  $x$  的函数, 而  $T$  仅是时间  $t$  的函数. 由此可知

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (hT) = hT',$$

$$\text{而} \quad \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (Th') = Th'',$$

将这些关系式代入 (3.5) 式, 得

$$hT' = ah''T, \quad (3.10)$$

分离变量, 则有

$$\frac{T'}{aT} = \frac{h''}{h} = C_1 = \text{const.} \quad (3.11)$$

或即

$$\frac{T'}{aT} = C_1, \quad (3.12)$$

$$\frac{h''}{h} = C_1. \quad (3.13)$$



由此可见,利用分离变量法作为求解的第一步是将偏微分方程(3.1)变为两个常微分方程,如(3.12), (3.13)式所示。

作为第二步,转入寻求方程(3.12), (3.13)的解。(3.12)式可变为

$$\frac{dT}{T} = ac_1 dt, \quad (3.14)$$

两端积分则得

$$T = Ce^{ac_1 t}. \quad (3.15)$$

从物理现象分析,水位  $h$  的变化,受到起始条件和边界条件的限制,不可能无限增大,故在从(3.15)式中  $c_1$  应为负值,今用“ $-\lambda^2$ ”来表示,则(3.15)式变为

$$T = Ce^{-\lambda^2 at}. \quad (3.16)$$

再来看(3.13)式即

$$h''(x) + \lambda^2 h(x) = 0,$$

$$\text{或} \quad \frac{d^2 h}{dx^2} + \lambda^2 h = 0. \quad (3.17)$$

此式之解可参见有关手册,如[11]为

$$h(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x. \quad (3.18)$$

作为使用分离变量法的第三步,当分别求出函数  $T(t)$ ,  $h(x)$  之后,再根据分离变量法的原理,将它们相乘,亦即将(3.16), (3.18)式代进(3.9)式,得

$$\tilde{H}(x, t) = T(t)h(x) = (AC \cos \lambda x + BC \sin \lambda x)e^{-\lambda^2 at}, \quad (3.19)$$

如令  $AC = \alpha$ ,  $BC = \beta$ , 则

$$\tilde{H}(x, t) = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x)e^{-\lambda^2 at}, \quad (3.20)$$

故得

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = [-\alpha \lambda \sin \lambda x + \beta \lambda \cos \lambda x]e^{-\lambda^2 at}. \quad (3.21)$$

再来用边界条件决定有关常数,由条件(3.6),即  $\left. \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$

出发,将  $x = 0$ ,  $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = 0$  代进(3.21)式,得

$$0 = (\alpha \lambda \sin 0 + \beta \lambda \cos 0) e^{-\lambda^2 at},$$

即应  $\beta = 0$

故

$$\tilde{H}(x, t) = (\alpha \cos \lambda x) e^{-\lambda^2 at}. \quad (3.22)$$

再用边界条件 (3.7), 即  $x = L$  时,  $\tilde{H} = 0$ , 得

$$\alpha(\cos \lambda x) = \alpha \cos \lambda L = 0,$$

则  $\cos \lambda L = 0$ , 由此知  $\lambda = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$ ,

$$\text{故得} \quad \tilde{H}(x, t) = \alpha \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 at}{4L^2}}. \quad (3.23)$$

其解的线性组合仍为其解, 即

$$\tilde{H}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 at}{4L^2}} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L}. \quad (3.24)$$

按傅里叶级数求系数的公式, 参见文献 [9], [12]

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L} dx,$$

当  $f_1(x) = H_0 - h_0 = \text{常数}$  时, 确定

$$\alpha_n = \frac{4(H_0 - h_0)}{(2n+1)\pi} (-1)^n, \quad (3.25)$$

故得

$$H = h_0 + \frac{4(H_0 - h_0)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L}}{(2n+1)} \cdot e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 at}{4L^2}}. \quad (3.26)$$

当  $t$  较大时, 可以只取级数的第一项, 即  $n = 0$  的项, 则又得

$$H \approx h_0 + \frac{4(H_0 - h_0)}{\pi} e^{-\frac{\pi^2 at}{4L^2}} \cos \frac{\pi x}{2L}. \quad (3.27)$$

至此, 便完成了利用分离变量法求解 (3.1) — (3.4) 式所表示的渗流课题的全部过程, 得到了可以实用的公式 (3.26), (3.27), 它们可以用来进行沟渠的非稳定渗流计算。

## 二、算 例

完整排水沟相距 200 米,排水前夕含水层厚度  $H_0 = 10$  米,排水沟水位保持在  $h_0 = 5$  米,含水层的渗透系数  $K = 5$  米/日,给水度  $\mu = 0.1$ 。试求排水开始后第十天,距沟 10, 20, 50 和 80 米处的水位,并绘出水位曲线。

〔解〕 应用公式 (3.27), 根据该公式推导时使用的坐标, 参照图 3-1, 若坐标原点取在二沟之间, 则实际要求的计算断面在  $x = 90, 80, 50$  和 20 米处。

公式 (3.27) 为

$$H \approx h_0 + \frac{4(H_0 - h_0)}{\pi} e^{-\frac{\pi^2 at}{4L^2}} \cos \frac{\pi x}{2L},$$

代进有关值, 则其中

$$\frac{4(H_0 - h_0)}{\pi} = \frac{4(10 - 5)}{3.1416} = 6.37,$$

而 
$$a = \frac{KH_F}{\mu} = \frac{5 \times \frac{10 + 5}{2}}{0.1} = 375 \text{ 米}^2/\text{日}.$$

全部计算过程列于表 3-1 中, 图 3-2 是利用该表资料绘制的降落曲线。

表 3-1 水位  $H_x$  计算表

No.	$x$ (米)	$\frac{\pi x}{2L}$	$\cos \frac{\pi x}{2L}$	$2.52 \cos \frac{\pi x}{2L}$	$H_x = 5 + 2.52 \cos \frac{\pi x}{2L}$
1	$x_1 = 0$	0	1	2.52	7.52
2	$x_2 = 30$	$27^\circ$	0.8910	2.25	7.25
3	$x_3 = 50$	$45^\circ$	0.7071	1.788	6.79
4	$x_4 = 60$	$54^\circ$	0.5818	1.483	6.48
5	$x_5 = 80$	$72^\circ$	0.3090	0.778	5.78
6	$x_6 = 90$	$81^\circ$	0.1564	0.394	5.39
7	$x_7 = 100$	$90^\circ$	0.0000	0	5

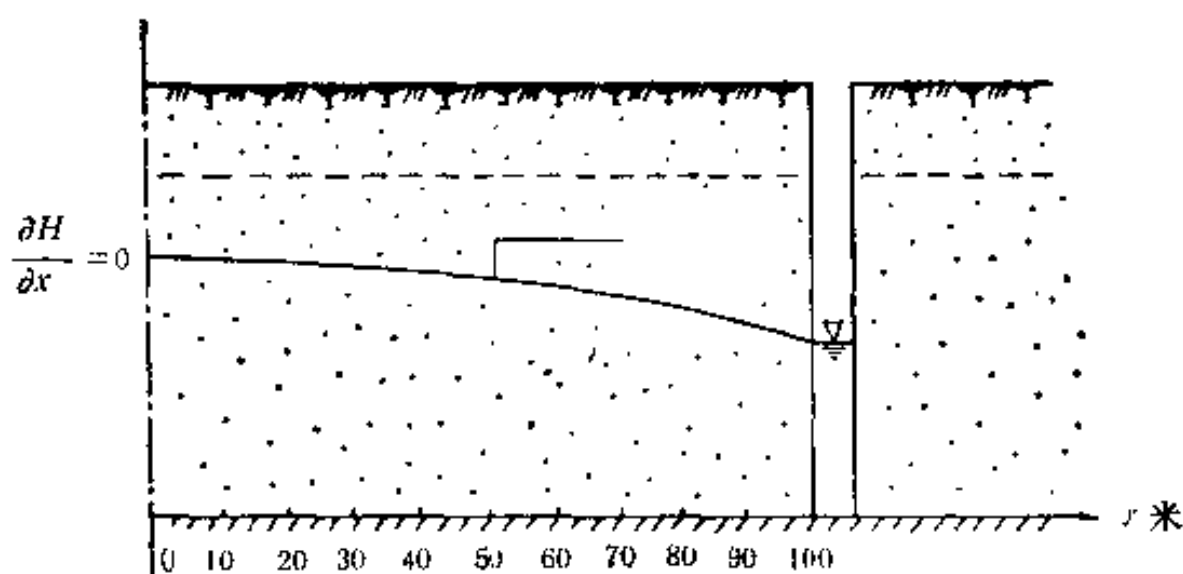


图 3-2 排水后第 10 天的水位曲线

为了推求计算流量的公式, 可先由公式 (3.26) 推导出水位坡降的表达式:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{2(H_0 - h_c)}{L} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right] \cdot e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 x t}{4L^2}} \quad (3.28)$$

将 (3.28) 式代入达西断面流量公式, 在一米宽度的断面上

$$q = H \cdot 1 \cdot K \left( - \frac{\partial H}{\partial x} \right),$$

考虑到推导公式时所用的  $H_0$  即为  $H(x, 0)$ ;  $h_0$  为  $H(L, t)$ , 从而求得计算任意时刻通过任意断面的流量公式为<sup>[13]</sup>

$$q(x, t) = H(x, t) K \left\{ \frac{2[H(x, 0) - H(L, t)]}{L} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 x t}{4L^2}} \right\} \quad (3.29)$$

在  $x = 0$  的边界断面上

$$q(0, t) = H(0, t) K \left\{ \frac{2[H(x, 0) - H(L, t)]}{L} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 x t}{4L^2}} \right\} \quad (3.30)$$

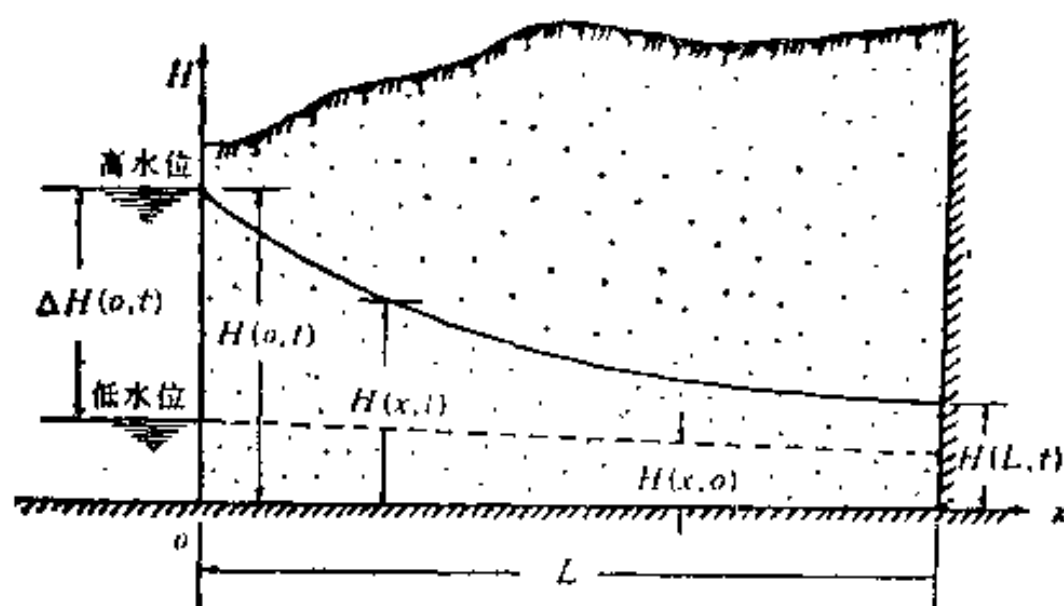


图 3-3 河水向河谷阶地侧向渗补示意图

以上介绍的利用分离变量法求解地下水向沟渠运动的过程，也适用于相反的情况，即河渠水向两岸补给。例如对于如图 3-3 所示的河水位瞬时升高到  $H(0, t)$  之后，向着宽度为  $L$  的有限边界河谷阶地的渗透，其水位计算公式为

$$H(x, t) = H(0, t) - \left\{ \frac{4[H(0, t) - H(x, 0)]}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \exp \left[ -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a t}{4L^2} \right] \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right\}. \quad (3.31)$$

当时间  $t$  相当长时，可使用近似公式

$$H(x, t) = H(0, t) - \left\{ \frac{4[H(0, t) - H(L, t)]}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi x}{2L} \exp \left( -\frac{\pi^2 a t}{4L^2} \right) \right\}. \quad (3.32)$$

为了推求渗流量的计算公式，只需利用公式 (3.31), (3.32) 求出  $H(x, t)$  对  $x$  的微导数，即坡降值  $\frac{\partial H}{\partial x}$ ，并将其代进断面流量公式

$$q(x, t) = H(x, t) \times 1 \times \frac{\partial H}{\partial x}$$

便得任意断面在一米宽度上的渗流量计算公式

$$q(x, t) = H(x, t)K \left\{ \frac{2[H(0, t) - H(x, 0)]}{L} \right. \\ \left. \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \exp \left[ -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a t}{4L^2} \right] \right\}. \quad (3.33)$$

当  $t$  很大时,近似的取

$$q(x, t) \simeq H(x, t)K \left\{ \frac{2[H(0, t) - H(x, 0)]}{L} \right. \\ \left. \cdot e^{-\frac{\pi^2 a t}{4L^2}} \cos \frac{\pi x}{2L} \right\}. \quad (3.34)$$

对于紧靠河水的断面,即在  $x = 0$  处,垂直河流流向通过宽度为一米的断面流量为

$$q(0, t) = H(0, t)K \left\{ \frac{2[H(0, t) - H(x, 0)]}{L} \right. \\ \left. \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a t}{4L^2} \right] \right\}. \quad (3.35)$$

当  $t$  很大时

$$q(0, t) \simeq H(0, t)K \left\{ \frac{2[H(0, t) - H(x, 0)]}{L} e^{-\frac{\pi^2 a t}{4L^2}} \right\}. \quad (3.36)$$

上列计算水位和流量公式的推导,虽然主要目的是为了阐明分离变量法的应用过程,但是所得结果却具有实用价值,不仅可以计算流量和水位,如本章所举例那样;而且可以用于动态预报和水资源的评价等。

## 第四章 傅里叶级数及傅里叶变换法 用于求解渗流课题

第三章介绍了求解渗流课题的分离变量法,该法的适用条件是空间区域的有界性,亦即至少有一个变量的变化范围是有限区域,或者有周期性条件。

如果渗流变量的变化范围不是有限区域,且无周期性条件,则分离变量法失去效力,在这种情况下,本章及下章讲述的积分变换——傅里叶变换及拉普拉斯变换将是解题的有力工具。

应当指出的是,尽管变量变化范围的有限与无限是相互对立的,但在一定条件下,有限区间可转化为无限区间,积分变换便是由此思路而产生的。

### 一、傅里叶级数简介

在微积分学中,大都介绍过把函数 $f(x)$ 展开为幂级数的问题,得出如下结果:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \quad (4.1)$$

在此选用 $x$ 幂的展开式,是因为它是较易处理的简单函数,而且在数值计算及微积分运算方面较易掌握。

但是,在很多工程问题中要用到周期函数。设若 $f(x)$ 为一周期函数,其周期为 $T$ ,亦即 $f(x+T)=f(x)$ ,参见图4-1。从逻辑观点看,将这个 $f(x)$ 展开为最简单的周期函数,即正弦及余弦函数,比之展开为 $x$ 的幂级数更为确当,因此,期望得出如下形式

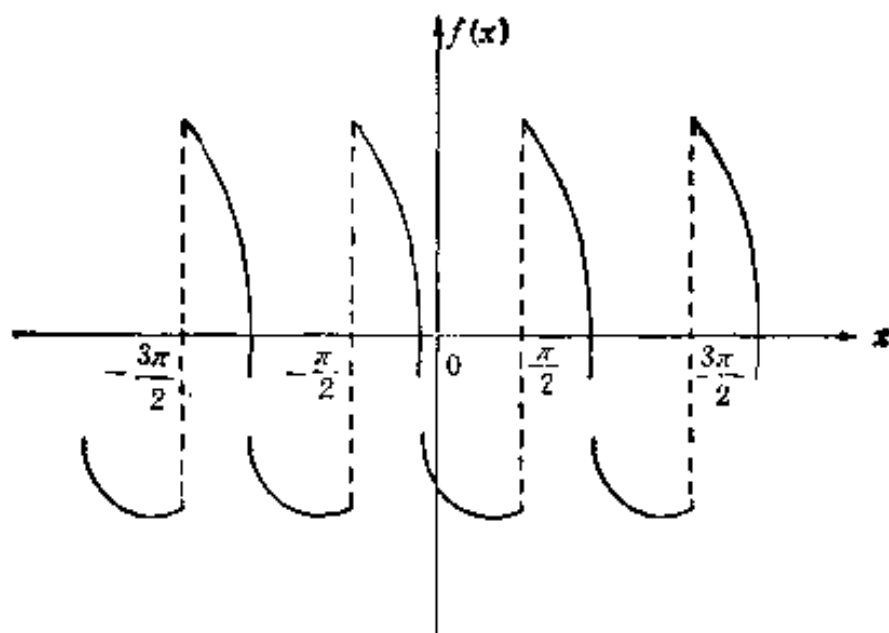


图 4-1 周期函数图

的  $f(x)$  的表达式,即

$$\begin{aligned}
 f(x) &= A_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots \\
 &\quad + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots \\
 &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

读者必定已知,这样的表达式称为傅里叶级数,或者叫做函数  $f(x)$  的傅里叶级数展开式. 作出这样一个周期函数展开式的原因与 (4.1) 式所示普通幂级数的展开情形相似,但其全部用意远不止此,在第三章中已曾有所显示,利用傅里叶级数展开式可以解出许多偏微分方程,并可导出很多重要的推广,如象本章将要介绍的傅里叶变换等.

在此简要回顾了傅里叶级数. 为本章论述的方便,只需摘抄如下的结果,亦即,若  $f(x)$  为  $x$  的周期函数,其周期为  $2\pi$ ,则该函数的傅里叶级数表达式为<sup>[14],[12],[15],[16]</sup>.

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (4.3)$$

其中系数



$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

而在区间  $(-L, L)$  内的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right), \quad (4.5)$$

及

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

从而得出任意周期  $2L$  的函数展开式为

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right), \quad (4.7)$$

及

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

## 二、正弦变换和余弦变换

函数不一直都是周期函数。如图 4-2 所示，假若给出一个由

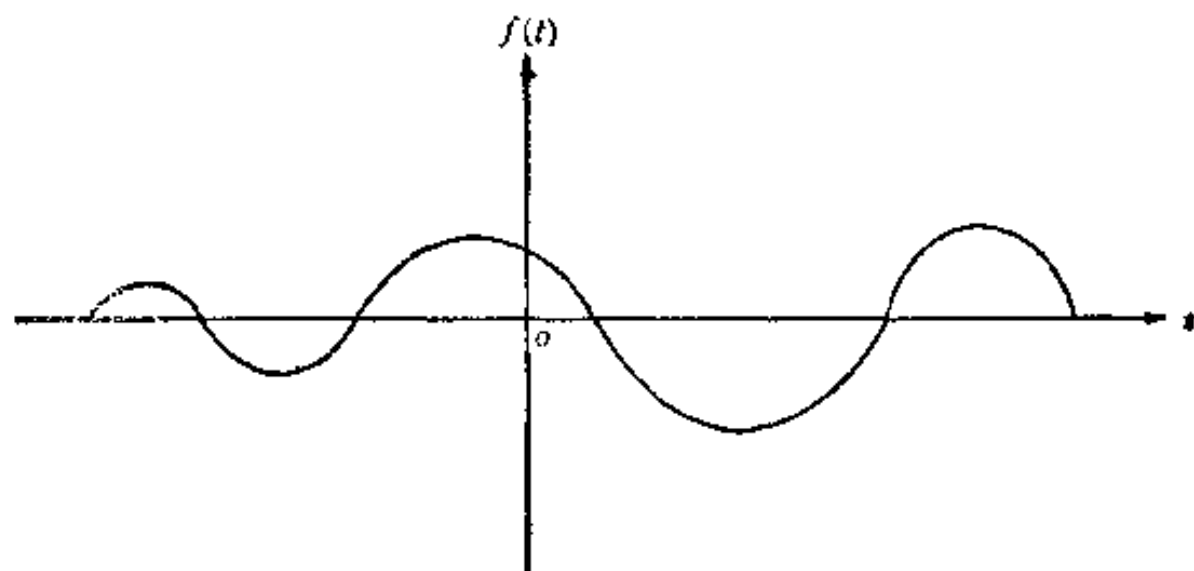


图 4-2 非周期函数图

$-\infty$  延拓至  $+\infty$  的非周期函数  $f(x)$ ，要想为这一函数求出一个与傅里叶级数展开式相类似，但在  $-\infty$  与  $+\infty$  之间正确的表达式，可以这样进行定义一个函数  $f_T(t)$ ，参见文献 [16]，当

$$\left. \begin{aligned} -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \text{ 时, 使 } f_T(t) = f(t), \\ \text{而在其它各点} \quad f_T(t) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

如图 4-3 所示，为  $f_T$  的图象，每隔  $T$  单位重复一次，则得一周

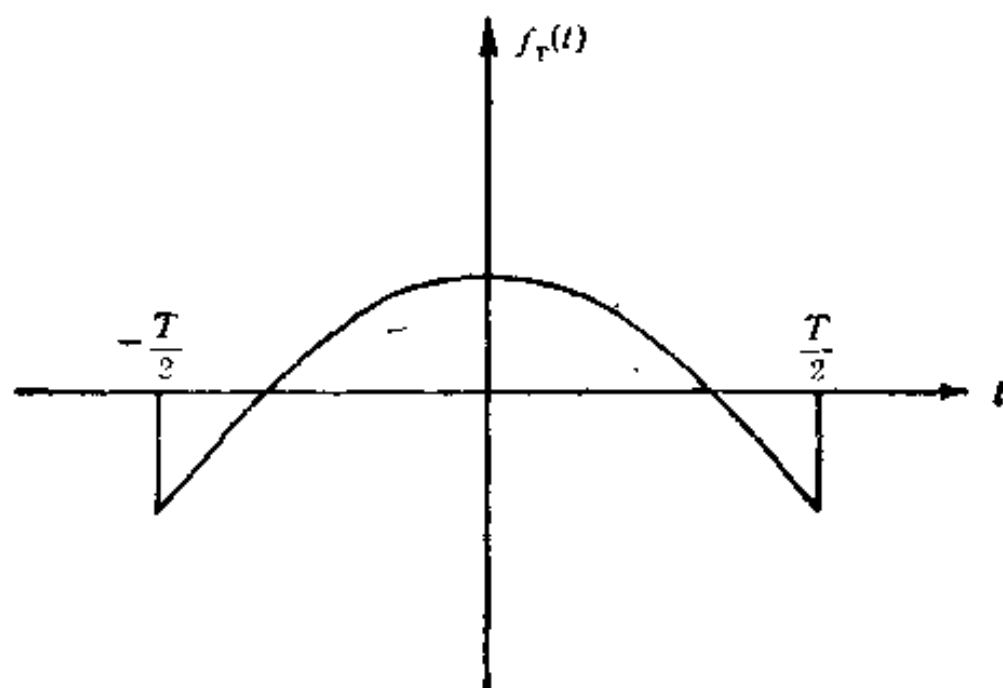


图 4-3  $f_T$  的图象

期为  $T$  的周期函数 (图 4-4)，可以断言，如  $T$  无限增大，则  $f_T(t)$  的傅里叶级数将趋于  $f(t)$  的傅里叶级数。由于函数  $f_T(t)$  已经作为

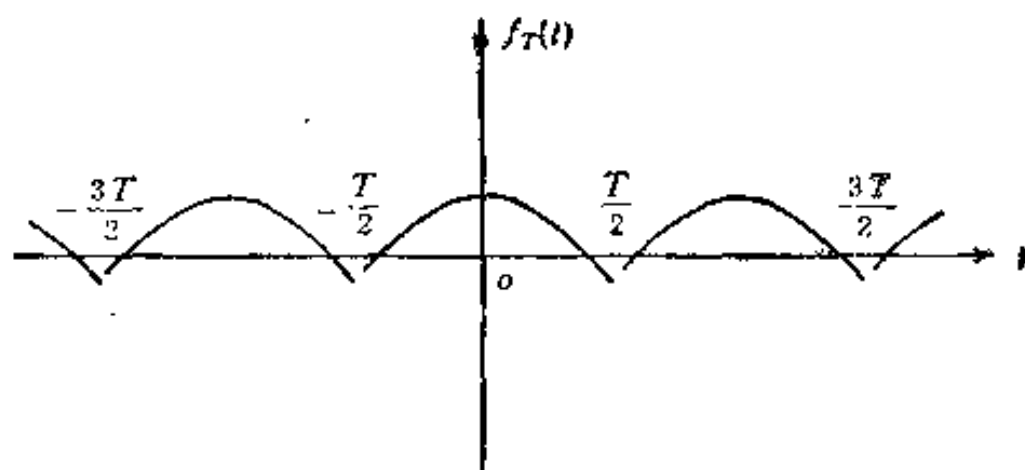


图 4-4 周期为  $T$  的周期函数图

周期函数开拓,故其傅里叶级数展开式将为公式(4.5)及(4.6)的形式,其中  $2L = T$ ,即

$$f_T(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right), \quad (4.10)$$

且

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \cos \frac{2n\pi}{T} t dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \sin \frac{2n\pi}{T} t dt. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

如令  $A_n = \frac{T}{2} a_n$ ,  $B_n = \frac{T}{2} b_n$ ,  $\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ .

$$(4.12)$$

从而

$$f_T(t) = \frac{A_0}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t). \quad (4.13)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \cos \omega_n t dt, \\ B_n &= \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \sin \omega_n t dt. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

再设  $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi(n+1)}{T} - \frac{2n\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}$ ,

$$(4.15)$$

则将(4.15)式代进(4.13)式之后,得

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{A_0}{T} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos \omega_n t) \Delta\omega_n \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} B_n (\sin \omega_n t) \Delta\omega_n. \end{aligned} \quad (4.16)$$

但因  $\omega_0 = 0$ , 故

$$\begin{aligned} \cos \omega_0 t &= 1, \quad \sin \omega_0 t = 0, \\ \frac{A_0}{T} &= \frac{A_0 \Delta\omega_0}{2\pi} = \frac{A_0 \cos \omega_0 t}{2\pi} \Delta\omega_0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

在(4.16)式中加減  $\frac{A_0}{T}$ , 得

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= \frac{A_0}{T} + \frac{A_0 \cos \omega_0 t}{2\pi} \Delta\omega_0 - \frac{A_0}{T} \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\cos \omega_n t) \Delta\omega_n \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\sin \omega_n t) \Delta\omega_n.
\end{aligned}$$

在上式中,  $\frac{A_0}{T} + \frac{A_0 \cos \omega_0 t}{2\pi} \Delta\omega_0$  正好是上式当  $n=0$  时的情况, 故得

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= -\frac{A_0}{T} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(\cos \omega_n t) \Delta\omega_n \\
&\quad + B_n(\sin \omega_n t) \Delta\omega_n]. \quad (4.18)
\end{aligned}$$

可以推断, 当  $T \rightarrow \infty$  时, 由 (4.18) 式表示的无穷和, 必将趋向一个积分式. 现在根据定积分的定义, 用一个有限和来十分逼近的表示这一极限. 为此, 将  $\omega$  轴由 0 至  $T$  的区间分成  $N$  段, 每一段的长度为  $\frac{2\pi}{T}$ , 显然,  $T$  越大,  $N$  越多, 则每一小段的长度将越小.

$$\text{记住 } \omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

则近似的有

$$\int_0^T A(\omega) \cos \omega t d\omega \simeq \sum_{n=0}^{N-1} A(\omega_n) \cos \omega_n t \cdot \Delta\omega_n. \quad (4.19)$$

式中  $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  越大, 近似度越高, 据此, 并注意到

$$\lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{A_0}{T} = 0, \quad (4.20)$$

则 (4.18) 式变为

$$f_T(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (4.21)$$

而

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \\ B(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

方程(4.21)即所谓傅里叶积分,而函数  $A(\omega)$  及  $B(\omega)$  称为函数  $f(t)$  的余弦变换及正弦变换,或称为  $f(t)$  的傅里叶变换或函数分谱,而把  $f(t)$  称为  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$  的逆傅里叶变换.

如  $f(t)$  为偶函数,则  $B(\omega) = 0$ ;

如  $f(t)$  为奇函数,则  $A(\omega) = 0$ .

值得指出,在傅里叶级数中,只能从  $\frac{\omega T}{2\pi}$  的整数值中得到结果,而在傅里叶积分中可以从每一个  $\omega$  的数值中得到结果.

### 三、无限延伸含水层中的非稳定渗流课题

作为应用正弦变换和余弦变换的例子,现举“无限延伸含水层中地下水的一维渗流课题”予以研究.

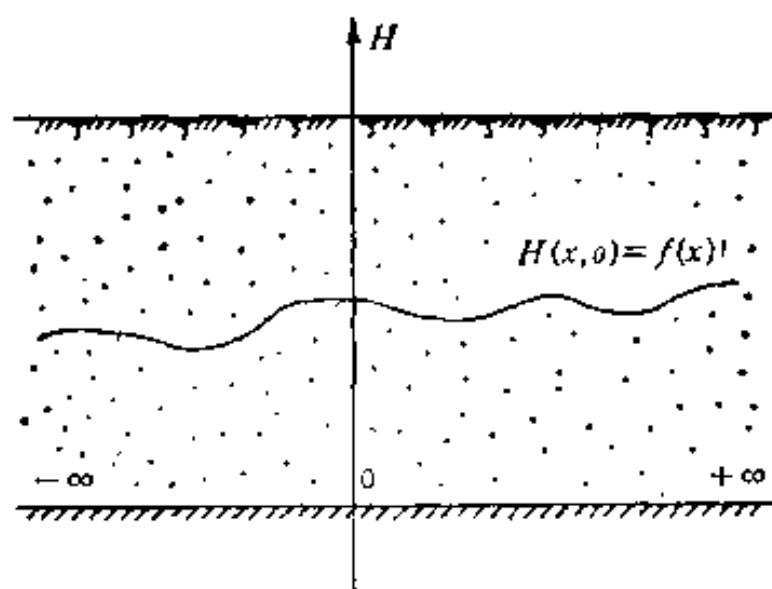


图 4-5 无限延伸含水层中的渗流示意图

如图 4-5 所示,设若起始水位为

$$H(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (4.23)$$

现在推求能够计算任意时刻,在任意断面上的水位  $H(x, t)$

的公式,为此写出线性化了的潜水一维非稳定渗流方程

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (4.24)$$

为了求解该方程,先用分离变量法的开始一步,从而假设

$$H(x, t) = X(x)T(t). \quad (4.25)$$

将(4.25)式代进(4.24)式中,得

$$\begin{aligned} XT' &= aX''T, \quad \text{或} \\ \frac{T'}{aT} &= \frac{X''}{X} = \beta = -\lambda^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

此处,  $\lambda$  为一实常数,由(4.26)式得到的常微分方程为

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad (4.27)$$

$$T' + a\lambda^2 T = 0. \quad (4.28)$$

而它们的通解为

$$X(x) = A' \cos \lambda x + B' \sin \lambda x, \quad (4.29)$$

$$T(t) = C e^{-\lambda^2 a t}. \quad (4.30)$$

从而

$$H(x, t) = X(x)T(t) = A e^{-\lambda^2 a t} \cos \lambda x + B e^{-\lambda^2 a t} \sin \lambda x, \quad (4.31)$$

式中  $A = A'C$ ,  $B = B'C$ .

上面这些推导,我们是熟悉的,因为在前一章讲述分离变量法时,已经针对有限边界中的问题介绍过了。不难回忆,在那时,达到这一步,便可使用已知起始条件和边界条件,确定  $\lambda$  值以及  $A$ ,  $B$  值,从而求得课题的最终解。

但是,现在面对的课题,边界是无限远的,曾在前章中使用的那种边界条件并不存在,因此,我们便不再能够利用有限渗流边界的条件来确定  $\lambda$  值。不仅如此,由于初始函数  $f(x) = H(x, 0)$  是由  $-\infty$  延拓到  $+\infty$ , 就没有必要再为周期函数,因而也就不能再有一般的傅里叶级数展开式。而必须寻求其它的进而求解的途径,从而得到别具形式的解。

由于(4.31)式中的函数  $H(x, t)$  对于任何实数的  $\lambda$  值总能

满足方程 (4.24), 因此, 可写出无穷多个解的连续集合如下:

$$H_\lambda(x, t) = A(\lambda)e^{-\lambda^2 at} \cos \lambda x + B(\lambda)e^{-\lambda^2 at} \sin \lambda x, \quad (4.32)$$

其中  $\lambda$  可取任意实数值. 又由于 (4.32) 式对于任何  $\lambda$  值总能满足线性偏微分方程 (4.24), 因此无穷多个函数  $H(x, t)$  的线性组合

$$H(x, t) = D \int_0^\infty [A(\lambda)e^{-\lambda^2 at} \cos \lambda x + B(\lambda)e^{-\lambda^2 at} \sin \lambda x] d\lambda, \quad (4.33)$$

也必能满足方程 (4.23). 式中  $D$  为任意常数.

至此, 将 (4.33) 式与 (4.21) 式相比较, 便会得到利用正弦变换及余弦变换的启示.

设令  $D = \frac{1}{\pi}$ , 则由 (4.33) 式得

$$H(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [A(\lambda)e^{-\lambda^2 at} \cos \lambda x + B(\lambda)e^{-\lambda^2 at} \sin \lambda x] d\lambda, \quad (4.34)$$

因此, 起始条件  $H(x, 0) = f(x)$  取如下形式, 即

$$H(x, 0) = f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda. \quad (4.35)$$

此式表明, 未知函数  $A(\lambda)$  及  $B(\lambda)$  就是  $f(x)$  的余弦及正弦变换<sup>[9], [16]</sup>, 从而利用正弦变换及余弦变换的公式, 得

$$A(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad (4.36)$$

$$B(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx. \quad (4.37)$$

将 (4.36) 式及 (4.37) 式代入 (4.34) 式, 得

$$\begin{aligned} H(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \right] e^{-\lambda^2 at} \cos \lambda x \right. \\ \left. + \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right] e^{-\lambda^2 at} \sin \lambda x \right\} d\lambda, \end{aligned}$$

亦即

$$H(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left[ \int_0^{\infty} (\cos \lambda \xi \cos \lambda x + \sin \lambda \xi \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 at} d\lambda \right] d\xi. \quad (4.38)$$

(4.38) 式是调换积分次序后得出的。注意三角关系式

$$\cos \lambda \xi \cos \lambda x + \sin \lambda \xi \sin \lambda x = \cos \lambda (\xi - x),$$

从而得

$$H(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left[ \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 at} \cos \lambda (\xi - x) d\lambda \right] d\xi. \quad (4.39)$$

(4.39) 式便是我们所要寻找的解，不论  $f(x)$  取何种形式，它都是所求的解。

还可看出，(4.39) 式中的第二个积分

$$y = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 at} \cos \lambda (\xi - x) d\lambda, \quad (4.40)$$

是一个只包含已知函数的定积分，如能算出，则(4.39)式便可取得更简便的形式，为此，我们将继续推演。由于(4.40)可以直接积分，也可以由积分表查得，参见文献[17]知

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 at} \cos \lambda (\xi - x) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{at}} \exp \left[ -\frac{(\xi - x)^2}{4at} \right]. \quad (4.41)$$

将(4.41)式代入(4.39)式，最终得

$$H(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-(\xi - x)^2 / 4at} d\xi. \quad (4.42)$$

(4.42) 式便是所求课题解的通式，对于具体的  $f(x)$ ，它又具有具体的形式。

#### 四、半无限边界中地下水的一维非稳定渗流

作为灵活应用正弦变换和余弦变换解题的第二个例子，本节举示半无限边界中地下水的一维非稳定渗流课题的一般情形，即起始水位为  $\varphi(x)$ ，而边界水位为时间函数  $f(t)$ 。



为了求解的方便,首先研究图 4-7 所示的情形,在  $x > 0$  处,当  $z = 0$  时,浸润线的方程为

The diagram illustrates a dam cross-section. The horizontal axis is labeled  $x$  and the vertical axis is labeled  $H$ . The dam face is at  $x=0$ . The water level at the dam face is  $H(0, t) = f(t)$ . The water level profile is  $H(x, t)$  and the dam profile is  $\phi(x)$ . The dam face is at  $x=0$  and the water extends to  $x=\infty$ . The dam profile is  $\phi(x)$  and the water level profile is  $H(x, t)$ .

当  $t > 0$  时, 浸润线为  $H(x, t)$ , 而在  $x = 0$  处——即在边界处, 起始水位线交于原点, 亦即

\* 实际上可以不作  $\varphi(0) = 0$  的假设,如图 4-6 所示,  $\varphi(0)$  可以是任意值,例如  $\varphi(0) = h_0$ , 但为推导的方便,此刻只需将坐标向上平移  $h_0$ , 所得到结果便是我们假设的情况.

而在其它时刻,  $H(0, t) = f(t)$ .

对于该课题仍然归结为求解方程

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad (0 < x < +\infty; t > 0), \quad (4.43)$$

其边界条件和起始条件为

$$H(0, t) = f(t), \quad (t > 0), \quad (4.44)$$

$$H(x, 0) = \varphi(x), \quad (x > 0). \quad (4.45)$$

(4.43)–(4.45) 式的解, 将通过寻找两个新函数之和来完成. 令

$$H(x, t) = V(x, t) + U(x, t), \quad (4.46)$$

从而本课题归结为求解下列 (I), (II) 两个新课题:

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}; \\ V(0, t) = 0, \quad a \\ V(x, 0) = \varphi(x); \quad b \end{cases} \quad (4.47)$$

$$(4.48)$$

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \\ U(0, t) = f(t), \quad a \\ U(x, 0) = 0. \quad b \end{cases} \quad (4.49)$$

$$(4.50)$$

首先求解方程组 “(I)”. 亦即在相应的边界条件和起始条件 (4.48) 下求解方程 (4.47), 为此, 可以利用在本章前三节中研究无限边界内渗流课题时所获得的成果.

将 (4.42) 式改写为

$$V(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^\infty [\varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} + \varphi(-\xi) e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4at}}] d\xi, \quad (4.51)$$

当  $x = 0$  时, (4.51) 式变为

$$V(0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^\infty [\varphi(\xi) + \varphi(-\xi)] e^{-\frac{\xi^2}{4at}} d\xi, \quad (4.52)$$

如果  $\varphi(\xi)$  是奇函数, 即若

$$\varphi(\xi) = -\varphi(-\xi), \quad (0 \leq \xi < \infty), \quad (4.53)$$

则(4.52)式将等于零,亦即

$$V(0, t) = 0$$

也就是说,如果  $\varphi(\xi)$  为奇函数, (4.51) 式除了满足(4.47)式外,还能满足(4.48a)的边界条件.

将(4.53)式代入(4.51)式,得

$$V(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^\infty \varphi(\xi) [e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4at}}] d\xi. \quad (4.54)$$

在求得(4.54)式之后,进而求解方程组“(II)”,亦即在边界条件和起始条件为(4.50-a, b)时求解方程(4.49),为此,先从  $f(t) = 1$  的特殊情况开始,亦即

$$H(0, t) = 1, \quad (4.55)$$

对此,不难相信,函数

$$U(x, t) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right), \quad (4.56)$$

将是题“(II)”的解,参见文献[18].

式中

$$\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}} e^{-\xi^2} d\xi. \quad (4.57)$$

由(4.57)式表示的积分式称为“机率积分”或“误差函数”,其符号也可用  $\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$  表示,即

$$\text{erf}(x) = \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi. \quad (4.58)$$

在一些文献中,又把  $1 - \Phi(x)$ , 或即  $1 - \text{erf}(x)$  表示为  $\text{erfc}(x)$  或  $\Phi^*(x)$ , 即

$$1 - \Phi(x) = \Phi^*(x) = \text{erfc}(x). \quad (4.59)$$

顺便指出,符号

$$\text{ierf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \int_x^\infty e^{-u^2} du. \quad (4.60)$$

(4.58), (4.59), (4.60) 表明的符号及其含义读者应当铭记在心,

而不要混淆它们。误差函数  $\Phi(x)$  是个有名的函数，已被造表备用，在许多数学手册中，根据不同的自变量  $x$  值，便可查得  $\Phi(x)$  值，以利计算。

言归正传，假设在  $x = 0$  处，零水位——也就是  $f(t) = 0$  维持到时刻  $\tau$ ，而后等于 1，在这种情况下解表示为  $U_\tau(x, t)$ 。显然，在  $t = \tau$  之前  $U_\tau = 0$ ；此后  $U_\tau$  则与 (4.56) 式相符。

如果用  $t - \tau$  代替  $t$ ，则

$$U_\tau(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } 0 \leq t \leq \tau, \\ 1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}}\right), & \text{当 } t \geq \tau. \end{cases} \quad (4.61)$$

如果在  $x = 0$  处，单位水头（等于 1 的水头）只在时段  $(\tau, \tau + d\tau)$  内保持，而在其余时间都等于零，则有

$$U_\tau(x, t) - U_{\tau+d\tau}(x, t) = -\frac{\partial U_\tau}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.62)$$

如果在  $x = 0$  处，在时段  $(\tau, \tau + d\tau)$  的水位值等于  $f(\tau)$ ，而不等于 1，则得水位变化量为

$$-f(\tau) \frac{\partial U_\tau}{\partial \tau} d\tau. \quad (4.63)$$

由此可以推断，把  $x = 0$  处在所有时刻  $\tau$  的水位变化量加起来，则其结果将等于  $\tau$  由 0 变到  $t$  所引起的总变化量，这样便可找到题“(II)”解的形式为

$$U(x, t) = - \int_0^t f(\tau) \frac{\partial U_\tau}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.64)$$

因为当  $\tau \leq t$  时，由 (4.61) 式

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\tau}{\partial \tau} &= -\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}}} e^{-\xi^2} d\xi \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}}} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}}\right)^2} \right) \right] d\xi, \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \frac{\partial U_{\tau}}{\partial \tau} = - \frac{x}{2 \sqrt{\pi a(t-\tau)^{3/2}}} e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}}. \quad (4.65)$$

将 (4.65) 式表示之  $\frac{\partial U_{\tau}}{\partial \tau}$  代入 (4.64) 式, 得

$$U(x, t) = - \frac{x}{2 \sqrt{a\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}} d\tau. \quad (4.66)$$

引入一个新的积分变量  $\xi$ , 令

$$\xi = \frac{x}{2 \sqrt{a(t-\tau)}}, \quad (4.67)$$

于是

$$\left. \begin{aligned} t - \tau &= \frac{x^2}{4a\xi^2}, & a \\ \tau &= t - \frac{x^2}{4a\xi^2}, & b \end{aligned} \right\} \quad (4.68)$$

且由 (4.67) 式知,  $\tau = 0$  时

$$\xi = \frac{x}{2 \sqrt{at}}; \quad (4.69)$$

而当  $\tau = t$  时,  $\xi = \infty$ ,

将这些表达式代入 (4.66) 式中, 则得

$$U(x, t) = - \frac{x}{2 \sqrt{a\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} \frac{f\left(t - \frac{x^2}{4a\xi^2}\right)}{\left(\frac{x^2}{4a\xi^2}\right)^{3/2}} e^{-\xi^2} d\left(t - \frac{x^2}{4a\xi^2}\right), \quad (4.70)$$

即

$$U(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4a\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi. \quad (4.71)$$

当  $x = 0$  时

$$U(0, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(t - 0) e^{-\xi^2} d\xi$$

$$= f(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi, \quad (4.72)$$

参见文献 [17], 因为

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故知

$$U(0, t) = f(t).$$

从而证明公式 (4.71) 能够满足方程组 “(II)” 的所有求解条件。

按照 (4.54) 及 (4.71) 式求得  $V(x, t)$  及  $U(x, t)$  之后, 便可用 (4.46) 式求得

$$H(x, t) = V(x, t) + U(x, t)$$

亦即

$$\begin{aligned} H(x, t) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4at}} \right] d\xi \\ & + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4a\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi. \end{aligned} \quad (4.73)$$

有了水位计算公式, 则流量公式的推导并无多大困难, 因此, 不再占用篇幅。

## 五、边界水位突然涨落引起的 半无限边界中的非稳定渗流

水库或河渠中的水位可能迅速的变化, 如果这种变化时间与我们考查地下水动态的时间相比是十分短暂的, 为了计算的方便, 便可认为这种变化是瞬时完成的。图 4-8 表示库、渠水位突然上涨的情况: 在观察开始的  $t = 0$  的时刻, 库、渠水位瞬时的从  $h_0$  升高到  $H_0$ 。

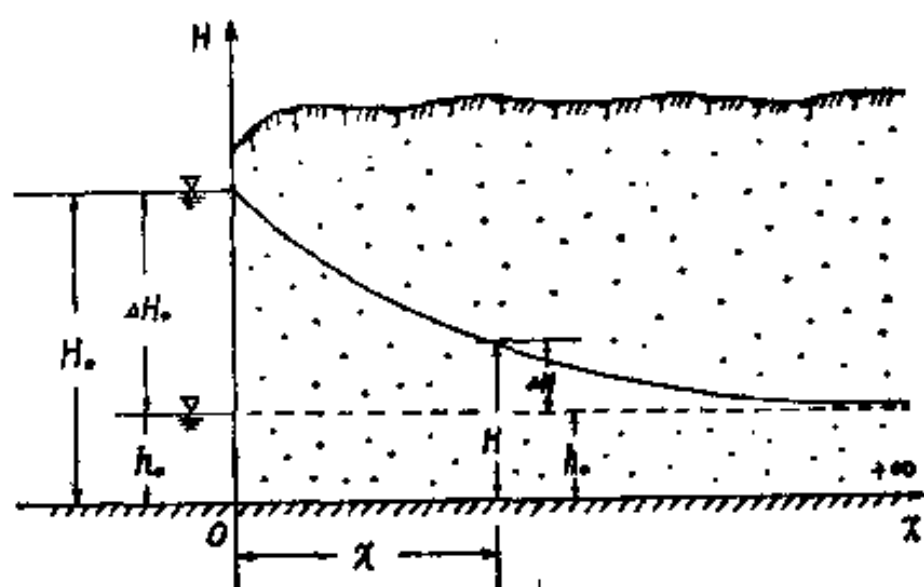


图 4-8 水位突涨时半无限边界中的渗流示意图

### (一) 水位公式的推导

如图 4-8 所示,本课题线性化了的微分方程为

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad (4.74)$$

其求解的起始条件和边界条件为

$$\left. \begin{aligned} H(x, 0) &= h_0, \quad (0 < x < +\infty), & a \\ H(0, t) &= H_0, \quad (t > 0), & b \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

在上式中,令  $H = \tilde{H} + h_0$

则 (4.74) 式变为

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial x^2}. \quad (4.76)$$

相应于 (4.75) 式的条件为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{H}(x, 0) &= 0, & (0 < x < +\infty), & a \\ \tilde{H}(0, t) &= H_0 - h_0 = \Delta H_0 \quad (t > 0), & b \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

比较 (4.76), (4.77) 式与 (4.49), (4.50) 式, 便可发现它们是同

类的,只是在(4.50)中的 $f(t)$ 在(4.77)式中变为 $H_0 - h_0$ ,即

$$f(t) = H_0 - h_0. \quad (4.78)$$

因此,求解(4.49)及(4.50)式所得之结果可以在此直接使用,而只需将式中的 $f(t)$ 换为 $(H_0 - h_0)$ ,由此得

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x, t) &= \frac{2(H_0 - h_0)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \\ &= (H_0 - h_0) \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^0 e^{-\xi^2} d\xi \right], \end{aligned}$$

即

$$\tilde{H}(x, t) = (H_0 - h_0) \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}} e^{-\xi^2} d\xi \right], \quad (4.79)$$

仍因

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (4.80)$$

而

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}} e^{-\xi^2} d\xi = \Phi(\xi), \quad (4.81)$$

且由(4.67)式知

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}},$$

故将(4.80), (4.81)式的关系代进(4.79)式后得

$$\Delta H = \tilde{H}(x, t) = (H_0 - h_0)[1 - \Phi(\xi)]. \quad (4.82)$$

再若设 $H_0 - h_0 = \Delta H(0, t) = \Delta H_0$ , 则(4.82)式变为

$$\Delta H = \Delta H_0[1 - \Phi(\xi)]. \quad (4.83)$$

而计算任意时刻水位的公式为

$$H(x, t) = h_0 + \Delta H_0[1 - \Phi(\xi)]. \quad (4.84)$$

## (二) 算 例

参看图 4-8, 有一水库, 在枯水期库水位及岸内的地下水位高



程由库底算起均为  $h_0 = 4.5$  米, 汛期库水位猛涨至  $H_0 = 10.5$  米, 已知给水度  $\mu = 0.1$ , 渗透系数  $K = 5$  米/日, 不考虑上部入渗, 试计算水位上升至 10.5 米后, 第 1 日、10 日及第 100 日的浸润曲线。

[解] 根据题意, 课题属半无限边界中的渗流, 水位由  $h_0$  涨到  $H_0$ , 可认为是瞬时完成的, 故可套用公式 (4.83) 或 (4.84), 即

$$\Delta H = \Delta H_0 [1 - \Phi(\xi)],$$

$$H = h_0 + \Delta H_0 [1 - \Phi(\xi)].$$

而式中的  $\Phi(\xi) = \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$ 。

为此, 先求出

$$a = \frac{KH_0}{\mu} = \frac{5 \times \left(\frac{10.5 + 4.5}{2}\right)}{0.1} = 375 \text{ 米}^2/\text{日},$$

$$\Delta H_0 = 10.5 - 4.5 = 6 \text{ 米}.$$

$\Phi(\xi)$  值可由数学手册中的误差函数表查取。

全部计算过程列表进行 (表 4-1)。

图 4-9 是根据计算结果画出的不同时刻的浸润线图。

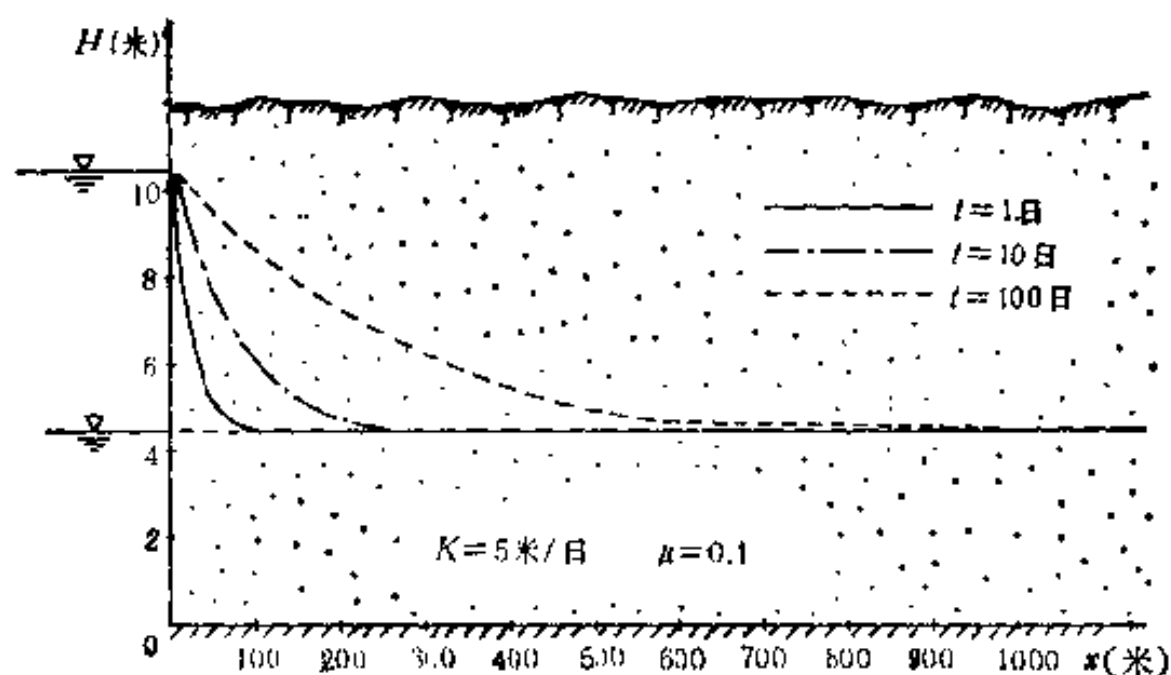


图 4-9 算例的浸润曲线图

表 4-1 例题计算表

$x$ (米)	$\frac{1}{2\sqrt{at}}$	$\frac{x}{2\sqrt{at}}$	$\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$	$1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$ $= \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$	$\Delta H = \Delta H_0 \left[ 1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right]$ (米)	$H = h_0 + \Delta H$ (米)
(1)	(2)	(3) = (1) $\times (2)$	(4)	(5) = 1 - (4)	(6) = $\Delta H_0$ (5)	(7) = $h_0$ + (6)

 $t = 1$  日

5	0.02582	0.1291	0.1458	0.8542	5.1252	9.6252
10	0.02582	0.2582	0.2869	0.7131	4.2786	8.7786
20	0.02582	0.5164	0.5344	0.4665	2.7996	7.2996
40	0.02582	1.0328	0.8559	0.1441	0.8646	5.3646
60	0.02582	1.5492	0.9715	0.0285	0.1710	4.6710
100	0.02582	2.582	0.9997	0.0003	0.0018	4.5018
116	0.02582	2.995	1	0.0000	0.0000	4.50

 $t = 10$  日

5	0.008165	0.0408	0.04601	0.95399	5.7239	10.2239
20	0.008165	0.1633	0.18263	0.81737	4.9042	9.4042
50	0.008165	0.4083	0.43634	0.56366	3.38196	7.8820
100	0.008165	0.8165	0.75178	0.24822	1.4893	5.9893
150	0.008165	1.2248	0.91673	0.08327	0.4996	4.9996
200	0.008165	1.633	0.97907	0.02093	0.1256	4.6256
250	0.008165	2.0413	0.99611	0.00389	0.02334	4.5233
300	0.008165	2.4495	0.99945	0.00055	0.0033	4.5033
367	0.008165	2.9966	0.99998	0.0000	0.0000	4.500

 $t = 100$  日

5	0.002582	0.0129	0.01455	0.98545	5.9127	10.4127
50	0.002582	0.1291	0.14487	0.85513	5.1308	9.6308
100	0.002582	0.2582	0.28819	0.71501	4.29006	8.79006
200	0.002582	0.5164	0.53478	0.46522	2.79132	7.29132
300	0.002582	0.7746	0.7667	0.27333	1.63998	6.13998
400	0.002582	1.0328	0.85586	0.14414	0.86484	5.36484
500	0.002582	1.291	0.93211	0.06783	0.40698	4.90698
700	0.002582	1.8074	0.98940	0.0106	0.06360	4.56360
1000	0.002582	2.582	0.99961	0.00039	0.00234	4.50234
1162	0.002582	3.000	0.99998	0.00002	0.00012	4.50012

## 六、傅里叶变换

前已述及,正弦变换和余弦变换虽然也叫傅里叶变换,但本节所介绍的才是习惯上所说的傅里叶变换。它是根据傅里叶级数的复数形式推导出的傅里叶积分的另一种形式,这个形式具有更重要的意义,即使在求解偏微分方程范围之外——例如线性系统、网络理论等方面也有着广泛的用途。当然,对我们来说,主要还是用来求解渗流方程。毫无疑问,凡是用正弦变换和余弦变换可解的问题,都可用傅里叶变换的复数形式来求解,但是本节所说的傅里叶变换,还为偏微分方程的求解,提供了一个完全不同于分离变量法的方法。

为此,我们把函数  $f_T(t)$  (参见图 4-4) 的傅里叶级数的复数形式写为(参见文献 [16], [19])

$$F(i\omega_n) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega_n t} dt, \quad (4.85)$$

且 
$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(i\omega_n) e^{i\omega_n t}. \quad (4.86)$$

函数  $F(i\omega_n)$  的离散集常被称其为周期函数  $f_T(t)$  的离散分谱。如果应用本章第一节中的记法

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T},$$
$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T},$$

则 (4.86) 式变为

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(i\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n. \quad (4.87)$$

运用我们在介绍正弦变换与余弦变换时的类似论点,可知当  $T \rightarrow \infty$  时, (4.85) 式及 (4.86) 式变为

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (4.88)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.89)$$

函数  $F(i\omega)$  称为  $f(t)$  的分谱或傅里叶变换,  $f(t)$  称为  $F(i\omega)$  的逆傅里叶变换, 而  $F(i\omega)$  及  $f(t)$  又称为傅里叶变换对。

表 4-2 列出了几个函数的变换, 至于更多的函数的傅里叶变换, 可由有关的手册查取。

下面简要的介绍一下傅里叶变换的主要特性。

### 1. 平移特性

傅里叶变换的一个重要特性即所谓“平移特性”, 根据这一特性, 能够用  $f(t)$  的变换计算出  $f(t - \tau)$  ( $\tau$  为一常数)。根据定义

$$\mathcal{F}[f(t - \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-i\omega t} dt$$

在上述积分中作变量代换:  $t = \xi + \tau$ , 则

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t - \tau)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\omega(\xi + \tau)} d\xi \\ &= e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \\ &= e^{-i\omega\tau} F(i\omega). \end{aligned} \quad (4.90)$$

式中  $F(i\omega)$  为  $f(t)$  的傅里叶变换, 因此

$$\mathcal{F}[f(t - \tau)] = e^{-i\omega\tau} \mathcal{F}[f(t)]. \quad (4.91)$$

如以  $t$  为“时间”,  $\tau$  为“时间滞后”, 则由上式可知, 时间上的一个滞后相当于在变换上乘一指数函数。

### 2. 函数 $f(t)$ 的导函数的变换式仍然是个重要的变换式

将  $\mathcal{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt$  的积分式分部积分:

$$\mathcal{F}[f'(t)] = f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + (i\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

因为  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

表 4-2 傅里叶变换表

	$f(t)$	$\mathcal{F}[f(t)]$
1	$f(t)$	$F(i\omega)$
2	$f(t - \tau)$	$F(i\omega)e^{-i\omega\tau}$
3	$f'(t)$	$i\omega F(i\omega)$
4	$f^n(t)$	$(i\omega)^n F(i\omega)$
5	矩形单脉冲 $f(t) = \begin{cases} h, &  t  \leq a \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	$2h \frac{\sin \omega a}{\omega}$
6	$\delta(t)$ (单位脉冲函数)	1
7	$\delta(t - \tau)$	$e^{-i\omega\tau}$
8	$u(t)$	$\frac{1}{i\omega}$
9	$u(t - \tau)$	$e^{i\omega\tau}/i\omega$
10	$u(t)e^{-\alpha t}, \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha + i\omega}$
11	$u(t - \tau)e^{-\alpha t}, \alpha > 0$	$\frac{e^{-i\omega\tau} e^{-\alpha\tau}}{\alpha + i\omega}$
12	$e^{-\alpha t }, \alpha > 0$	$2\alpha/(\alpha^2 + \omega^2)$
13	$u(t)t$	$\frac{1}{(i\omega)^2} = -\frac{1}{\omega^2}$
14	$u(t)\sin at$	$\frac{a}{(i\omega)^2 + a^2} = \frac{a}{a^2 - \omega^2}$
15	$u(t)\cos at$	$\frac{i\omega}{(i\omega)^2 + a^2} = \frac{i\omega}{a^2 - \omega^2}$

则  $\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(i\omega)$ , (4.92)

式中  $F(i\omega)$  为  $f(t)$  的傅里叶变换。由此可知，对  $t$  的微分相当于在原变换上乘以  $i\omega$ 。如当  $t = \pm\infty$  时， $f'(t)$  也等于零，则可

用上述方法计算  $f''(t)$  的傅里叶变换;

$$\mathcal{F}[f''(t)] = (i\omega)^2 F(i\omega) = -\omega^2 F(i\omega),$$

对于更高阶的导函数也可以同样进行。

## 七、应用傅里叶变换求解渗流课题举例

我们仍用第三节中所举课题为例,如图 4-5 所示,课题为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \\ H(x, 0) &= f(x), \quad -\infty < x < +\infty. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{a} \\ \text{b} \end{array} \quad (4.93)$$

首先求未知函数  $H(x, t)$  对于  $x$  的傅里叶变换。应用傅里叶变换公式 (4.88)

$$\mathcal{F}[H(x, t)] = H(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, t) e^{-i\xi x} dx,$$

式中  $\xi$  为对应于  $x$  的变换变量,由表 4-2 知

$$\mathcal{F}_x \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x, t) \right] = (i\xi)^2 H(\xi, t) = -\xi^2 H(\xi, t), \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \mathcal{F} \left[ \frac{\partial}{\partial t} H(x, t) \right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} H(x, t) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, t) e^{-i\xi x} dx \right] = \frac{\partial}{\partial t} H(\xi, t). \end{aligned} \quad (4.95)$$

在方程 (4.93a) 的两端,均按傅里叶变换运算,并应用 (4.94), (4.95) 式,得变换后的方程为

$$\frac{d}{dt} H(\xi, t) = -a\xi^2 H(\xi, t), \quad (4.96)$$

变换后的边界条件 (4.93b) 为

$$H(\xi, 0) = \mathcal{F}_x[H(x, 0)] = \mathcal{F}_x[f(x)] = F(\xi). \quad (4.97)$$

(4.96) 式与 (4.97) 式组成了  $H(\xi, t)$  的常微分方程组。而 (4.96) 式的通解为

$$H(i\xi, t) = A(i\xi) e^{-a\xi^2 t}, \quad (4.98)$$

其中  $A$  为积分常数, 是  $\xi$  的一个函数。从 (4.97) 式表示的边界条件得

$$F(i\xi) = H(i\xi, 0) = A(i\xi)e^0 = A(i\xi),$$

因此,  $H(i\xi, t) = F(i\xi)e^{-a\xi^2 t}$ . (4.99)

所求的解  $H(x, t)$  是  $H(i\xi, t)$  的关于  $x$  的傅里叶逆变换, 由 (4.89) 式得

$$H(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\xi) e^{-\xi^2 a t} e^{i\xi x} d\xi. \quad (4.100)$$

此即所要求的解。由于应用了傅里叶变换的知识, 求解过程是比较简单的。

顺便指出, 公式 (4.100) 与公式 (4.42) 实际上是相同的, 对此可通过如下的换算加以证明。在 (4.100) 式中, 记住

$$F(i\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{-i\eta\xi} d\eta,$$

将该式代入 (4.100) 式得<sup>[37]</sup>

$$\begin{aligned} H(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{-i\eta\xi} d\eta \right] \frac{1}{2\pi} e^{i\xi x} e^{-a\xi^2 t} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-\eta)} e^{-a\xi^2 t} d\xi \right] d\eta. \end{aligned} \quad (4.101)$$

由傅里叶变换表 (见表 4-2) 知

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{1}{2}\xi^2 \sigma^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} x^2},$$

亦即  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-\eta)} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 \sigma^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} x^2}$ . (4.102)

在 (4.102) 式中若将  $x$  换为  $(\eta - x)$ , 并令  $\frac{1}{2}\sigma^2 = at$ , 或即  $\sigma = \sqrt{2at}$ , 即得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(\eta-x)} e^{-a\xi^2 t} d\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sqrt{2at}} e^{-\frac{1}{4at} x^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{1}{4at} (\eta-x)^2}, \end{aligned}$$

故得 
$$H(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} e^{-\frac{1}{4at}(\eta-x)^2} d\eta,$$

亦即

$$H(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{-(\eta-x)^2/4at} d\eta. \quad (4.103)$$

该式与(4.42)式相同.



## 第五章 拉普拉斯变换法及其在 求解渗流课题中的应用举例

在求解渗流微分方程时,除了利用前章介绍的傅氏变换法外,还有所谓拉普拉斯变换法.与前者相比,拉氏变换法用得更为普遍,更为有力.这不仅因为它所受的限制条件更少,而且使用方便.所以介绍拉氏变换的文献甚多,有兴趣者可参阅文献[9],[12],[19],[20],[21].

利用拉普拉斯变换的思想方法与利用傅氏变换的情形相同,也是令一个本函数与一个象函数相对应,然后,在解微分方程时使用对于象函数的较简单的运算,来代替对于本函数的复杂运算.在求得象函数的解之后,再由它的逆变换找到本函数的解.

### 一、拉普拉斯变换的定义及 常用函数的拉氏变换式

设函数  $f(t)$  是定义在区间  $(0, \infty)$  上的函数,用  $e^{-pt}$  乘  $f(t)$  后,再对  $t$  从 0 到  $\infty$  进行积分.若此积分收敛,则此积分确定了一个参量  $P$  的函数.记作  $F(P)$ , 于是

$$F(P) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-Pt} dt. \quad (5.1)$$

这样一来,便通过积分运算对一个已知函数  $f(t)$  确定了另一个函数  $F(P)$ , 而  $F(P)$  称为  $f(t)$  的拉普拉斯变换式,用记号

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-Pt} dt \quad (5.2)$$

表示. 所以

$$L[f(t)] = F(P)$$

已知的函数  $f(t)$  称为本函数，经过变换后所得的函数  $F(P)$  称为象函数。因此，对于每一个本函数对应着一个确定的象函数。

为了深入对拉普拉斯变换定义的理解，下面举示一些求取本函数之象函数的例子。

[例 1] 求函数  $f(t) = 1$ ，当  $t > 0$  时的拉普拉斯变换式。

$$[\text{解}] \quad L[1] = \int_0^{\infty} e^{-Pt} dt = -\frac{e^{-Pt}}{P} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{P},$$

所以当  $P > 0$  时， $L[1] = \frac{1}{P}$ 。

[例 2] 求函数  $f(t) = t$ ， $t > 0$  时的拉普拉斯变换式。

$$[\text{解}] \quad L[t] = \int_0^{\infty} te^{-Pt} dt = -\frac{t}{P} e^{-Pt} + \frac{1}{P} \int_0^{\infty} e^{-Pt} dt \\ = \frac{1}{P^2}, \quad (P > 0)$$

故  $L[t] = \frac{1}{P^2}$ 。

同样可得  $L[t^n] = \frac{n!}{P^{n+1}}$ ， $n$  为正整数

[例 3] 求  $f(t) = e^{Kt}$ ， $t > 0$  的拉普拉斯变换式。

$$[\text{解}] \quad L[e^{Kt}] = \int_0^{\infty} e^{Kt} e^{-Pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(P-K)t} dt \\ = -\frac{1}{P-K} e^{-(P-K)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{P-K}, \quad (P > K)$$

故  $L[e^{Kt}] = \frac{1}{P-K}$ 。

[例 4] 求  $f(t) = \sin Kt$ ， $t > 0$  的拉普拉斯变换式。

$$[\text{解}] \quad L[\sin Kt] = \int_0^{\infty} e^{-Pt} \sin Kt dt \\ = \frac{e^{-Pt}}{s^2 + P^2} (-P \sin Kt - K \cos Kt) \Big|_0^{\infty} \\ = \frac{K}{P^2 + K^2},$$

$$\text{故 } L[\sin Kt] = \frac{K}{p^2 + K^2}.$$

同法可得

$$L[\cos Kt] = \frac{p}{p^2 + K^2}.$$

由上面所举的例子可以看出,本函数是  $t$  的函数,象函数则是  $p$  的函数. 大多数函数的拉普拉斯变换都已被求出列制成表,供实际工作时直接查取使用,参见文献[20]. 在表 5-1 中略列数例,以示此类表的常见格式.

表 5-1 拉普拉斯变换例表

本函数 $f(t)$	象函数 $F(p) = L[f(t)]^*$
1	$\frac{1}{p}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$
$t^n$ ( $n$ 为正整数)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{Kt}$	$\frac{1}{p-K}$
$\sin Kt$	$\frac{K}{p^2 + K^2}$
$\cos Kt$	$\frac{p}{p^2 + K^2}$
$\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{erf}(\sqrt{at})$	$\frac{1}{p \sqrt{p+a}}$
$e^{at} \operatorname{erfc}(\sqrt{at})$	$\frac{1}{\sqrt{p}(\sqrt{p+a})}$

\* 在有的文献中把象函数设为  $\tilde{f}(p)$ .

## 二、拉普拉斯变换的特性

(1) 线性特性: 函数线性组合的拉普拉斯变换等于各函数拉普拉斯变换的线性组合.

若  $\alpha, \beta$  是常数

$$L[f_1(t)] = F_1(P), \quad L[f_2(t)] = F_2(P)$$

$$\text{则} \quad L[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha L[f_1(t)] + \beta L[f_2(t)], \quad (5.3)$$

$$L^{-1}[\alpha F_1(P) + \beta F_2(P)] = \alpha L^{-1}[F_1(P)] + \beta L^{-1}[F_2(P)]. \quad (5.4)$$

(2) 导数的象函数的性质：一个函数求导后取拉普拉斯变换等于这个函数的拉普拉斯变换乘以参变数  $P$ ，再减去函数的初值。即若

$$L[f(t)] = F(P),$$

$$\text{则有} \quad L[f'(t)] = PF(P) - f(0). \quad (5.5)$$

还可以作出如下的推论：

$$\text{若} \quad L[f(t)] = F(P),$$

$$\text{则有} \quad L[f^{(n)}(t)] = P^n F(P) - P^{n-1}f(0) - P^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (\operatorname{Re}(P) > C \quad C \text{ 为函数的增长指数})$$

且若初值  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$  时，则有

$$\left. \begin{aligned} L[f'(t)] &= PF(P), & a \\ L[f''(t)] &= P^2F(P), & b \\ L[f^{(n)}(t)] &= P^nF(P), & c \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

此处所介绍的拉普拉斯变换的微分性质，能将  $f(t)$  的微分方程转化为  $F(P)$  的代数方程，因此它有重要的用途。

(3) 积分性质：一个函数积分后再取拉普拉斯变换等于这个函数的拉普拉斯变换除以复参数  $P$ 。

$$\text{即若} \quad L[f(t)] = F(P),$$

$$\text{则} \quad L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{P} F(P). \quad (5.7)$$

连续应用 (5.7) 式，就可得到

$$L\left\{\int_0^t dt \int_0^t dt \cdots \int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{1}{P^n} F(P). \quad (5.8)$$

(4) 位移特性：一个本函数乘以指数函数  $e^{at}$ ，等于其象函数作位移  $a$ 。

即若  $L[f(t)] = F(P)$ ,

则有  $L[e^{at}f(t)] = F(P-a)$ . ( $P > a$ ) (5.9)

利用该式可求得函数  $t^n e^{at}$ ,  $e^{at} \sin Kt$ ,  $e^{at} \cos Kt$  的拉普拉斯变换式:

$$L[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(P-a)^{n+1}},$$

$$L[e^{at} \sin Kt] = \frac{K}{(P-a)^2 + K^2},$$

$$L[e^{at} \cos Kt] = \frac{P-a}{(P-a)^2 + K^2}.$$

如果非齐次线性方程的右端为函数  $t e^{at}$ ,  $t^n e^{at}$ ,  $e^{at} \sin Kt$  及  $e^{at} \cos Kt$ , 利用此公式便可求解了.

(5) 象函数的导数性质: 象函数的  $n$  阶导数等于本函数乘以  $-t$  的  $n$  次方的拉普拉斯变换.

即  $L[(-t)^n f(t)] = F^{(n)}(P)$  (5.10)

且有  $L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(P)$  (5.11)

利用此式便可求右端为  $t \sin Kt$ ,  $t \cos Kt$  等函数的非齐次线性方程的解.

(6) 延迟特性: 时间函数延迟  $\tau$  后的拉普拉斯变换, 相当于它的象函数乘以指数因子  $e^{-P\tau}$ .

即若  $L[f(t)] = F(P)$ , 又  $t < 0$  时,  $f(t) = 0$ , 则对于任一实数  $\tau$ , 有

$$L[f(t-\tau)] = e^{-P\tau} F(P), \quad (5.12)$$

或  $L^{-1}[e^{-P\tau} F(P)] = f(t-\tau)$ . (5.13)

顺便指出, 函数  $f(t-\tau)$  与  $f(t)$  相比,  $f(t)$  是从  $t=0$  开始有非零值, 而  $f(t-\tau)$  是从  $t=\tau$  开始才有非零值, 即延迟了一个时间  $\tau$ , 从它们的图象来讲  $f(t-\tau)$  的图象是由  $f(t)$  的图象沿  $t$  轴向右平移  $\tau$  而得, 如图 5-1 所示.

(7) 初值特性(初值定理): 函数  $f(t)$  在  $t=0$  时的函数值可以通过  $f(t)$  的拉普拉斯变换  $F(P)$  乘以  $P$ , 取  $P \rightarrow \infty$  时的极限值而得到.

即若  $L[f(t)] = F(P)$ , 且  $\lim_{P \rightarrow \infty} PF(P)$  存在, 则

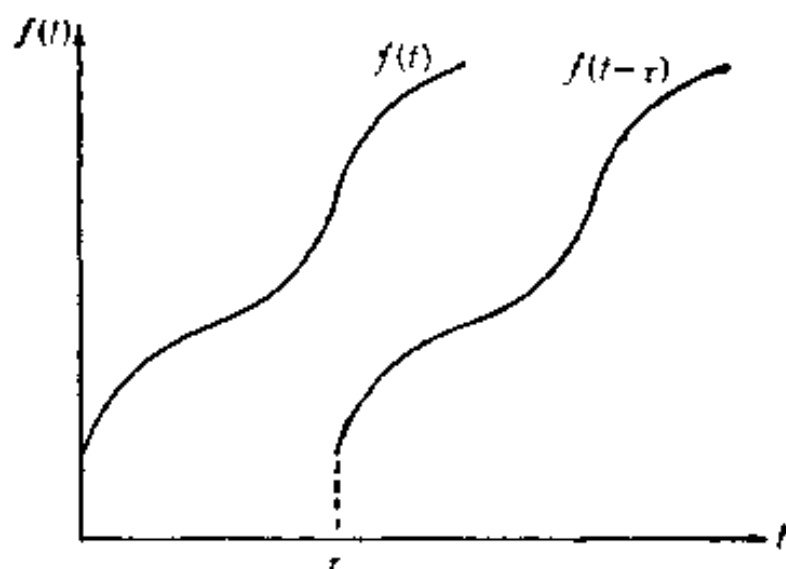


图 5-1 图象沿  $t$  轴平移图

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p), \quad (5.14)$$

或 
$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p). \quad (5.15)$$

拉普拉斯变换的这一性质建立了函数  $f(t)$  在坐标原点的值与函数  $pF(p)$  在无限远点的值之间的关系。

(8) 终值特性(终值定理): 函数  $f(t)$  在  $t \rightarrow \infty$  时的函数值(即稳定值), 可以通过  $f(t)$  的拉普拉斯变换乘以  $p$ , 取  $p \rightarrow 0$  时极限值而得到

即若  $L[f(t)] = F(p)$ , 且  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p), \quad (5.16)$$

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad (5.17)$$

这一性质, 建立了函数  $f(t)$  在无限远处的值与函数  $pF(p)$  在原点的值之间的关系。

在拉普拉斯变换的应用中, 往往先得到  $F(p)$ , 再得到  $f(t)$ , 但是, 有时人们并不关心函数  $f(t)$  的表达式, 而是需要知道  $f(t)$  在  $t \rightarrow \infty$  或  $t \rightarrow 0$  时的性态, 这两个性质给我们解题提供了方便, 它能使我们直接由  $F(p)$  求出  $f(t)$  的两个特殊值  $f(0)$  及  $f(\infty)$ 。

为了便于理解和应用, 将上述特性加以扩展和整理, 并用表 5-2 列出。

表 5-2 拉普拉斯变换重要特性表达式表

No	特 性 表 达 式
1	$L[f(t)] = F(P) = \int_0^{\infty} f(t)e^{Pt}dt,$
2	$L[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha L[f_1(t)] + \beta L[f_2(t)],$
3	$L[Cf(t)] = CL[f(t)], C$ 为常数,
4	$L[f(Ct)] = \frac{1}{C} F\left(\frac{P}{C}\right), C$ 为常数,
5	$L[f(t - C)] = e^{-CP}F(P), t > C, C$ 为正值常数
6	$L[f'(t)] = PF(P) - f(0), f' = \frac{df(t)}{dt},$
7	$L[f''(t)] = P^2F(P) - Pf(0) - f'(0), f'' = d^2f(t)/dt^2,$
8	$L[f^n(t)] = P^nF(P) - P^{n-1}f(0) - P^{n-2}f'(0) \cdots - f^{n-1}(0),$
9	$L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(P),$
10	$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{P}F(P),$
11	$L[e^{at}f(t)] = F(P - a), (P > a),$
12	$L[f(t - \tau)] = e^{-P\tau}F(P),$ 或 $L^{-1}[e^{-P\tau}F(P)] = f(t - \tau),$
13	$L\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_P^{\infty} F(P)dP,$
14	$L\int_a^t f(\tau)d\tau = \frac{1}{P}F(P) + \frac{1}{P}\int_a^0 F(P)dP,$
15	$L[f_1(t)]L[f_2(t)] = L[f_1(t)f_2(t)],$
16	$f_1(t)f_2(t) = \int_0^t f_1(u)f_2(t - u)du, (卷积公式)$
17	$f(0) = \lim_{P \rightarrow \infty} PF(P),$
18	$f(\infty) = \lim_{P \rightarrow 0} PF(P).$

### 三、拉普拉斯逆变换

由拉普拉斯变换的概念可知<sup>[49]</sup>, 函数  $f(t)$  的拉普拉斯变换, 实际上就是  $f(t)u(t)e^{-\beta t}$  的傅里叶变换, 于是当  $f(t)u(t)e^{-\beta t}$  满足傅里叶积分定理的条件时, 按傅里叶积分公式, 在  $f(t)$  连续点处有

$$\begin{aligned} f(t)u(t)e^{-\beta t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(\tau)e^{-\beta\tau}e^{-i\omega\tau}d\tau \right] e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}d\omega \left[ \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-(\beta+i\omega)\tau}d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta+i\omega)e^{i\omega t}d\omega, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

(5.18) 等式两端同乘以  $e^{\beta t}$ , 并考虑到它与积分变量  $\omega$  无关, 则

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta \\ &\quad + i\omega)e^{(\beta+i\omega)t}d\omega, \\ t &> 0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

若令  $\beta + i\omega = P$ , 则得

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \\ &\quad \times F(P)e^{Pt}dP, \\ t &> 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

该式便是从象函数  $F(P)$  求它的本函数  $f(t)$  的一般公式, 该式右端的积分称为拉普拉斯反演积分, 该积分是一个复变函数的积分, 当  $F(P)$  为有理函数时, 积分比较容易, 但一般

而论, 计算这个积分是比较困难的, 但当  $F(P)$  满足一定条件时,

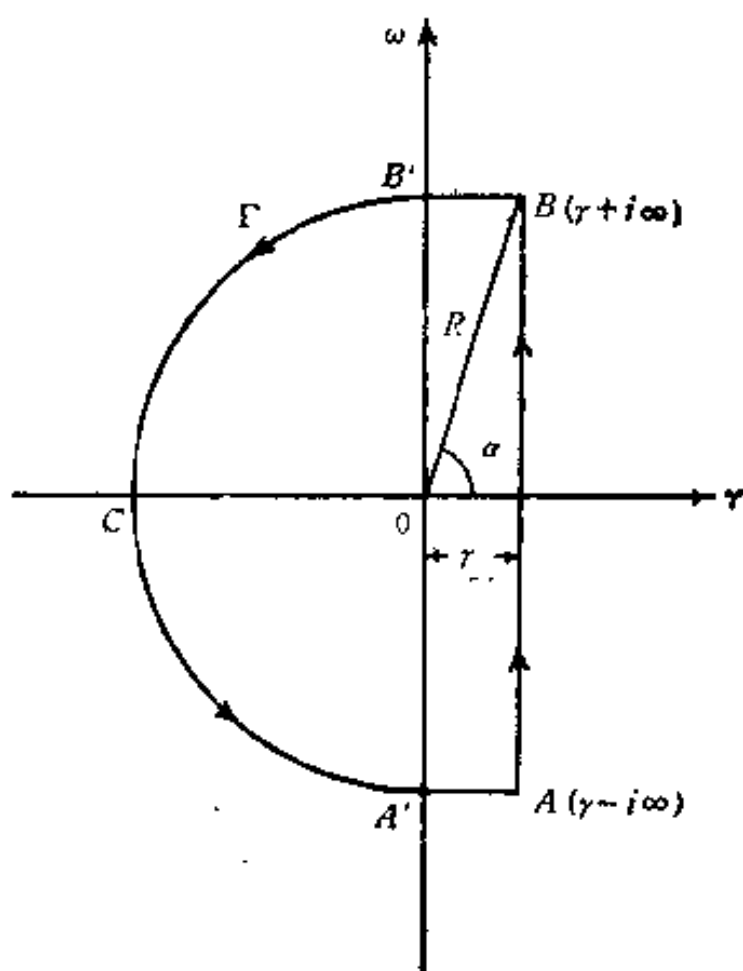


图 5-2  $P$  平面图



便可借助于  $P$  平面中的回路积分的留数方法计算这个反演积分。下面介绍的定理将会提供计算这种反演积分的方法。

这个定理是：若  $P_1, P_2, \dots, P_n$  是函数  $F(P)$  的所有奇点（适当选取  $\beta$  使这些奇点全在  $\operatorname{Re}(P) < \beta$  的范围内），且当  $P \rightarrow \infty$  时， $F(P) \rightarrow 0$ ，则有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(P)e^{Pt}dP = \sum_{K=1}^n \operatorname{Res}_{P=P_K} [F(P)e^{Pt}], \quad (5.21)$$

或即 
$$f(t) = \sum_{K=1}^n \operatorname{Res}_{P=P_K} [F(P)e^{Pt}], \quad t > 0. \quad (5.22)$$

该定理的证明可参见文献 [19], [12].

顺便指出，在应用回路积分时，（1）若  $F(P)$  是  $P$  的单值函数，则采用图 5-2 所示的回路积分；（2）若  $F(P)$  在 origin 有分支点，则应用图 5-3 所示的回路积分，对此可参见文献 [21].

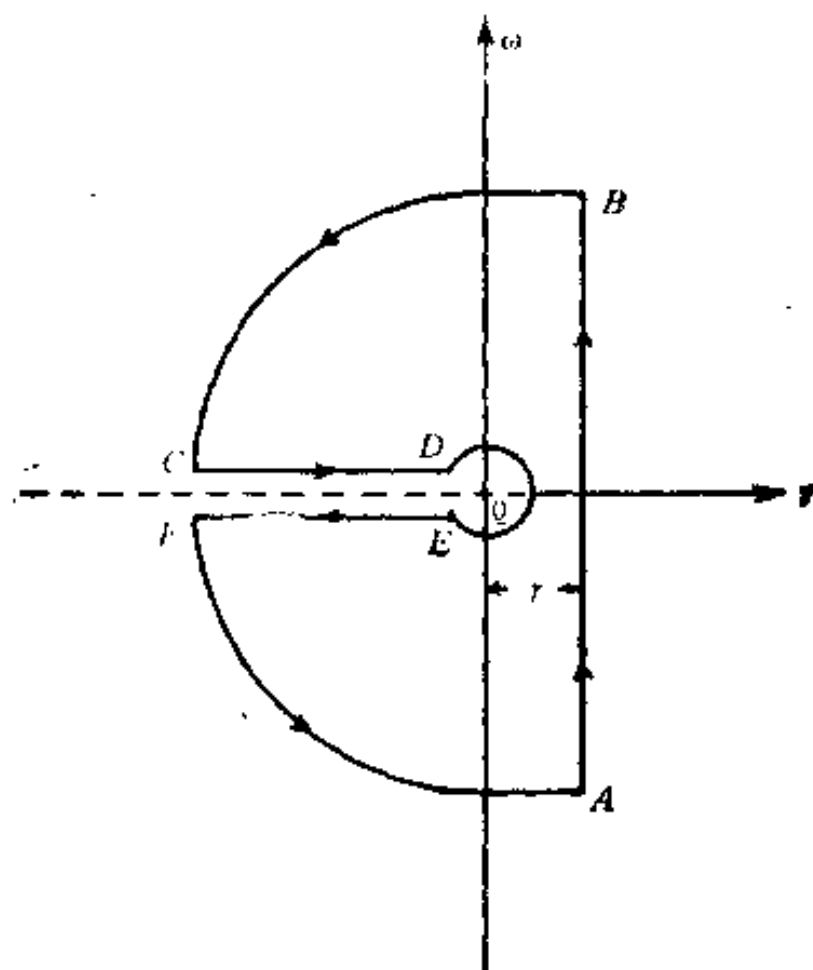


图 5-3 在 origin 有分支的  $P$  平面图

## 四、拉普拉斯变换在求解渗流课题中的应用举例

关于拉普拉斯变换在求解渗流课题中更多的应用,将在第十二章以后的章节中看到,本章仅举简例以使读者及时的加深对于拉普拉斯变换的理解.为了与介绍过的其余方法作比较,仍举前面用过的如图 4-8 所示的半无限含水层中地下水渗流的例子.该例的数学方程为

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad x > 0, t > 0, \quad (5.23)$$

$$\text{边界条件: } H(0, t) = H_0, \quad x = 0, t > 0, \quad (5.24)$$

$$\text{初始条件: } H(x, 0) = h_0, \quad t = 0, x > 0. \quad (5.25)$$

象在第四章中那样(参见图 4-8),如令  $H = \tilde{H} + h_0$ , 则(5.23)~(5.25)式变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial x^2}, & a \\ \tilde{H}(x, 0) &= 0, & b \\ \tilde{H}(0, t) &= H_0 - h_0 = \Delta H_0, & c \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

对水位  $H(x, t)$  进行关于  $t$  的拉普拉斯变换:

$$\bar{H} = \int_0^\infty e^{-pt} \tilde{H} dt, \quad (5.27)$$

$$\text{则} \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} dt. \quad (5.28)$$

对此式进行分部积分,得

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} dt &= [e^{-pt} \tilde{H}] \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} \tilde{H} dt \\ &= p \bar{H}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

(5.26-a) 式之左对  $t$  取拉普拉斯变换,得

$$a \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial x^2} dt = a \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right|_0^{\infty} e^{-pt} \tilde{H} dt = a \frac{\partial^2 \bar{H}(x, P)}{\partial x^2}, \quad (5.30)$$

$$\text{即} \quad a \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial x^2} dt = a \frac{d^2 \bar{H}}{dx^2}. \quad (5.31)$$

而其边界条件 (5.26-b) 式的拉普拉斯变换为

$$\bar{H}(0, P) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \Delta H_0 dt = \frac{\Delta H_0}{P}, \quad (5.32)$$

从而得到辅助方程为:

$$a \frac{d^2 \bar{H}}{dx^2} = P \bar{H}, \quad (x > 0) \quad (5.33)$$

$$\bar{H} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \Delta H_0 dt = \frac{\Delta H_0}{P}, \quad (x = 0) \quad (5.34)$$

到此便会发现, 问题已化简为求解一般的常微分方程 (5.33) 式, 而满足该式在  $x = 0$  和  $x = \infty$  处数值的解是:

$$\bar{H} = \frac{\Delta H_0}{P} e^{-\sqrt{\frac{P}{a}} x}. \quad (5.35)$$

在得到 (5.35) 式之后, 将有两个途径求得本函数.

(1) 应用拉普拉斯变换表可以查得 (可参见文献 [19])

$$\tilde{H} = \Delta H_0 \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2 \sqrt{at}} \right). \quad (5.36)$$

考虑到  $\Delta H_0 = H_0 - h_0$ ,  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \Phi(x)$ ,

则得

$$H(x, t) = h_0 + \tilde{H} = h_0 + \Delta H_0 \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2 \sqrt{at}} \right),$$

而其最终的计算公式为

$$H(x, t) = h_0 + \Delta H_0 \left[ 1 - \Phi \left( \frac{x}{2 \sqrt{at}} \right) \right]. \quad (5.37)$$

此式与我们曾经得到的 (4.94) 式是完全相同的.

(2) 采用回路积分求解反演公式中的积分, 从而求得课题的

解. 对 (5.35) 式采用拉普拉斯变换的反演公式 (5.20), 在此取

$\eta = \frac{x}{\sqrt{a}}$ , 则  $x = \sqrt{a} \eta$ , 从而得:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{(Pt-\eta\sqrt{P})} \frac{dP}{P}, \quad (5.38)$$

采用复平面中的回路积分计算 (5.38) 式. 使用图 5-3 所示的回路 (参看文献 [21]), 亦即被积函数在原点有分支, 为了避开多值性, 如图 5-3 所示, 沿着负实轴取切口, 这样, 在回路上及其内部被积函数就为单值. 而且在回路内没有极点; 所以根据柯西定理, 沿着回路积分等于零, 或者说沿着  $AB$  积分 (这是要确定的) 将等于沿着  $DC$ 、沿着  $FE$  及围绕着原点的小圆积分之和; 由于大圆半径趋于无穷大, 沿着  $BC$  和  $FA$  的积分趋于零. 这是因为

$$|\bar{f}(P)| = \left| \frac{e^{-\eta\sqrt{P}}}{P} \right| < |P|^{-1}.$$

再来分析  $DC$ ,  $FE$  以及沿着小圆的积分.

在  $DC$  上, 记住  $P = \alpha e^{i\pi}$ , 则 (5.38) 式给出

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-i\eta\sqrt{\alpha}} \frac{d\alpha}{\alpha}, \quad (5.39)$$

同理, 在  $FE$  上取  $P = \alpha e^{-i\pi}$ , 使得

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{i\eta\sqrt{\alpha}} \frac{d\alpha}{\alpha} \quad (5.40)$$

$DC$  和  $FE$  上的加在一起为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-\alpha t} (e^{i\eta\sqrt{\alpha}} - e^{-i\eta\sqrt{\alpha}}) \frac{d\alpha}{\alpha},$$

因  $e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$ ,

再令  $\alpha = u^2$ , 则 (5.40) 式变为

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \sin(\eta\sqrt{u^2}) \frac{du}{u} \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \sin(\eta u) \frac{du}{u}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

这是支线积分的结果,对小圆来说求之如下:

因  $P \rightarrow 0$ ,

故知  $e^{Pt-\eta\sqrt{P}} \rightarrow 1$ ,

$$P = Re^{i\theta}$$

$$dP = Rie^{i\theta}d\theta = Pid\theta,$$

$$\frac{dP}{P} = id\theta.$$

故知

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{dP}{P} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} id\theta = 1. \quad (5.42)$$

即由原点之小圆积分结果为 1.

于是根据柯西定理:

$$\int_{AB} + \int_{\underbrace{BC}_{=0}} + \int_{CD} + \int_{\underbrace{0}_{=-1}} + \int_{EF} + \int_{\underbrace{FA}_{=0}} = 0, \quad (5.43)$$

(取 ‘-1’ 因绕圆负方向旋转), 故得

$$\int_{AB} = +1 + \int_{DC} + \int_{FE}. \quad (5.44)$$

从而由 (5.41), (5.44) 式推知反演之结果为

$$\tilde{H} = \Delta H_0 \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \sin(\eta u) \frac{du}{u} \right], \quad (5.45)$$

由积分表可以查知

参见文献 [17] 由积分式 “861.22.” 查出

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u^2 t}}{u} \sin(\eta u) du = \frac{\pi}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{t}} \right), \quad (5.46)$$

将 (5.46) 式代进 (5.45) 式, 得

$$\tilde{H} = \Delta H_0 \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{t}} \right) \right],$$

$$\text{即} \quad \tilde{H} = \Delta H_0 \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\eta}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \quad (5.47)$$

回顾  $\eta = x/\sqrt{a}$ ,  $\tilde{H} = H - h_0$ ,  $\Delta H_0 = H_0 - h_0$ . 最终得

$$H(x, t) = h_0 + (H_0 - h_0) \left[ 1 - \Phi \left( \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right], \quad (5.48)$$

或 
$$H(x, t) = h_0 + \Delta H_0 \left[ 1 - \Phi \left( \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right]. \quad (5.49)$$

可以发现，现在得到的 (5.49) 式与 (5.37) 式及 (4.94) 式完全相同。殊途同归，利用不同的方法得到相同的结果，但可觉察，不同的方法花费的精力不同。使用回路积分反演，显然比查用拉氏变换表麻烦许多，然而这种感觉只是由于所举例题的简单造成的。如果遇到复杂课题，则并非所有结果都能由查表得出，象我们将会在今后遇到的那样，在这种情况下，人们将不再感到回路积分的多余。

## 第六章 贝塞尔函数论要

许多数学物理问题都可以归结为求解微分方程<sup>[27],[23]</sup>：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\pi^2}{x^2}\right)y = 0, \quad (6.1)$$

该方程即所谓贝塞尔方程，而它的解被称为贝塞尔函数或圆柱函数。

对于研究渗流问题，特别是对研究井的非稳定渗流问题来说，贝塞尔函数乃是有力的工具，正如在以后的篇章中将要看到的那样，通过分离变量法或积分变换，我们将会从描述非稳定渗流的偏微分方程中得出(6.1)形式的方程式，而对它的进一步求解，便可利用有关贝塞尔函数的知识来完成。正因为如此，从事渗流研究的人，掌握一定的有关贝塞尔函数及其应用的知识乃是十分必要的。

圆柱函数的系统理论，是由贝塞尔 (Bessel) 1824 年研究动力天文学时基本完成的，故又命名“贝塞尔函数”。

但应指出，涉及该函数的不少内容，在 Я. 伯努利(1703)、Д. 伯努利(1732)、欧拉(1764)、拉格朗日(1769)等人的著作中已经有过介绍。关于贝塞尔函数及其应用有一些很好的著作介绍如文献 [23],[24],[25],[26],[27]等。

在本部分将从实用目的出发，介绍有关贝塞尔函数的基本知识。在以后的篇章将应用这些知识举例解决一些比较典型的渗流课题。

### 一、第一类零阶贝塞尔函数

已如前述，方程式(6.1)，即

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0,$$

称为贝塞尔微分方程, 参数  $n$  的每个值, 是与被称为  $n$  阶的贝塞尔函数的一对基本解相关联, 一般地说,  $n$  可以取任何正值. 在确定的  $n$  值条件下所得方程(6.1)的解, 则称为  $n$  阶贝塞尔函数. 在渗流研究中最常用到的是零阶和一阶贝塞尔函数, 也就是(6.1)中  $n = 0$  和  $n = 1$  所得之解.

贝塞尔函数有所谓第一类和第二类, 关于它们的确切定义将在随后介绍.

本节将介绍第一类零阶贝塞尔函数.

若  $n = 0$ , 则(6.1)式将变为零阶贝塞尔方程:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0, \quad (6.2)$$

或

$$xy'' + y' + xy = 0. \quad (6.3)$$

其通解先认可为:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (6.4)$$

其中  $y_1$  与  $y_2$  是方程(6.2)的特解,  $C_1$  与  $C_2$  是任意常数. 进而推求自变量  $x$  的极小值或极大值所成立的特解的近似式.

根据初始值  $y = a_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = a_1$  来决定特解. 若将这些初始值代入方程(6.2), 则可发现第二项在  $x = 0$  时变为无限大. 但由于方程(6.2)通过点  $x = 0, y = a_0$  的特解的一阶导数, 在  $x = 0$  时应等于零. 因此, 我们将借助指数级数寻求其解, 并设该解可以表示为如下的级数形式:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots, \quad (6.5)$$

将(6.5)逐项微分, 得

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots,$$

$$y'' = 2 \times 1 a_2 + 3 \times 2 a_3 x + 4 \times 3 a_4 x^2 + \cdots.$$

逐项的把表示  $y, y', y''$  的各级数分别乘以  $x, 1, x$ , 然后按同次项



归并整理,得

$$a_1 + (a_0 + 2^2 a_2)x + (a_1 + 3^2 a_3)x^2 + (a_2 + 4^2 a_4)x^3 + \dots, \quad (6.6)$$

若欲使(6.6)式在任何  $x$  值时都等于零,而使级数(6.5)成为方程(6.3)或(6.2)之解,则必须使(6.6)式的各项系数分别为零,即

$$a_1 = 0, \quad a_0 + 2^2 a_2 = 0, \quad a_1 + 3^2 a_3 = 0,$$

$$a_2 + 4^2 a_4 = 0, \quad a_3 + 5^2 a_5 = 0, \quad \dots$$

$$a_{n-2} + n^2 a_n = 0, \quad \dots$$

由这些等式可知,所有的带奇数角标的系数均等于零,这是因为它们通过  $a_1 = 0$  来表示,例如,因  $a_1 = 0$ ,故知  $a_1 + 3^2 a_3 = 0$  时,  $a_3 = 0$ ; 因  $a_3 = 0$ ,故  $a_5 = 0 \dots$ ,从而所有带偶数角标的系数可以通过  $a_0$  表示:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = +\frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2},$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}, \dots$$

故其通式为:

$$\begin{aligned} a_{2m} &= (-1)^m \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2m)^2} \\ &= (-1)^m \left( \frac{a_0}{2^{2m} (m!)^2} \right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

式中  $m = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ .

将这些系数代入(6.5)式,则得  $n = 0$  时贝塞尔方程的解:

$$\begin{aligned} y &= a_0 \left( 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^m \frac{x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} + \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

$$J_0 = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2}, \quad (6.8)$$

(0! 认为其等于 1).

在(6.8)式中若认定  $x = 0$ , 则  $a_0 = y|_{x=0}$ , 且  $a_0$  可选择任意值, 若将其选为 1, 则得函数

$$\begin{aligned} J_0(x) = y &= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

此即称为零阶第一类贝塞尔函数, 它是方程(6.2)在  $y|_{x=0} = 1$ ,  $y'|_{x=0} = 0$  起始条件下的解.

## 二、第二类零阶贝塞尔函数

在第一节中找到了贝塞尔方程

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0,$$

的一个特解:

$$y_1 = J_0(x).$$

为了找出其通解, 则必须求出与  $J_0(x)$  无关的其它解.

根据线性微分方程的求解理论, 当已知二阶线性微分方程的一个特解时, 其通解可借助‘求积法’而求得, 下面顺便复习一下这个理论.

因  $J_0(x) = y_1$  乃是方程(6.2)的一个特解, 引入一个未定函数  $U(x)$ , 令

$$Y = U(x)y_1 = Uy_1, \quad (6.10)$$

将其代入(6.2)式中, 得

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + y &= y_1 U'' + (2y_1' + P(x)y_1)U' \\ &+ (y_1'' + P(x)y_1' + y_1)U = 0, \end{aligned} \quad (6.11)$$

式中  $P(x) = \frac{1}{x}$ .

由于  $y_1$  是方程式(6.2)的一个解, 故(6.11)式右部第三项应  
为零, 由此知

$$y_1 U'' + (2y_1 + P y_1) U' = 0, \quad (6.12)$$

该式又可改写为

$$\frac{U''}{U'} = - \frac{2y_1' + P y_1}{y_1}. \quad (6.13)$$

对(6.13)式两端积分, 得

$$\ln U' = -2 \ln y_1 - \int P dx + \ln C,$$

由此得

$$U' = C y_1^{-2} e^{-\int P dx}. \quad (6.14)$$

再作一次积分, 得

$$U = C \int y_1^{-2} e^{-\int P dx} dx + C_0. \quad (6.15)$$

将(6.15)表示的  $U$  值代入(6.10), 得到(6.2)的通解

$$y = C y_1 \int y_1^{-2} e^{-\int P dx} + C_0 y_1. \quad (6.16)$$

由公式(6.16)可以推知与  $y_1$  线性无关的值

$$y_2 = y_1 \int y_1^{-2} e^{-\int P dx} dx, \quad (6.17)$$

将是方程(6.2)的第二个解.

由(6.9)及(6.11), 知(6.17)中的  $y_1 = J_0(x)$ ,  $P = \frac{1}{x}$ ; 故又有

$$e^{-\int P dx} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x},$$

于是(6.2)的第二个解为

$$y_2 = J_0(x) \int \frac{dx}{x J_0^2(x)}, \quad (6.18)$$

该式之右是直接可以计算的, 但很麻烦, 为了减少工作量, 可将积分号下的  $\frac{1}{x J_0^2(x)}$  展开呈级数处理.

根据公式(6.9), 由于  $J_0(x)$  的级数只包括  $x$  的偶数项, 即

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \quad (6.19)$$

所以  $J_0^2(x)$  也将只包含偶数次项, 而且该级数的自由项仍然为 1, 即

$$\underline{J_0^2(x) = 1 + b_2x^2 + b_4x^4 + b_6x^6 + \dots} \quad (6.20)$$

于是根据级数的理论——参见文献[17], 例如  $\frac{1}{J_0^2(x)}$  也可用只含  $x$  偶数项的级数表示为:

$$\frac{1}{J_0^2(x)} = 1 + C_2x^2 + C_4x^4 + C_6x^6 + \dots, \quad (6.21)$$

因而

$$\frac{1}{xJ_0^2(x)} = \frac{1}{x} + C_2x + C_4x^3 + C_6x^5 + \dots,$$

由此

$$\int \frac{dx}{xJ_0^2(x)} = \ln x + d_2x^2 + d_4x^4 + d_6x^6 + \dots \quad (6.22)$$

推出(6.22)之后, 将其代入(6.18)式中, 并考虑(6.9)式便得(6.2)的第二个解:

$$y_2 = J_0(x) \ln x + (d_2x^2 + d_4x^4 + d_6x^6 + \dots) \left( 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right),$$

或

$$y_2 = J_0(x) \ln x + d_2x^2 + d_4x^4 + d_6x^6 + \dots \quad (6.23)$$

对(6.23)式逐项微分, 得

$$y_2' = J_0'(x) \ln x + J_0(x) \frac{1}{x} + 2d_2x + 4d_4x^3 + 6d_6x^5 + \dots,$$

$$y_2'' = J_0''(x) \ln x + \frac{2}{x} J_0'(x) - \frac{1}{x^2} J_0(x) + 2d_2 + 4 \cdot 3d_4x^2 + \dots$$

用  $x$  乘  $y_2$  式, 用 1 乘  $y_2'$  式, 用  $x$  乘  $y_2''$  式, 将所有之积相加而得:

$$\begin{aligned} xy_2'' + y_2' + xy_2 &= [xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x)] \ln x \\ &+ \left[ J_0(x) \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2} J_0(x) \right] + 2J_0'(x) + 2^2 d_2 x \\ &+ (d_2 + 4^2 d_4) x^3 + (d_4 + 6^2 d_6) x^5 + \dots, \end{aligned}$$

由于  $J_0(x)$  是方程(6.3)的解, 故在上式中

$$xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) = 0,$$

而且第二个括号中的也等于零, 故上面的和式变为:

$$\begin{aligned} xy_2'' + y_2' + xy_2 &= 2J_0'(x) + 2^2 d_2 x + (d_2 + 4^2 d_4) x^3 \\ &+ (d_4 + 6^2 d_6) x^5 + \dots, \end{aligned} \quad (6.24)$$

现在进而计算(6.24)式中的  $2J_0'(x)$  值.

将(6.9)式微分, 得

$$J_0'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} - \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots,$$

于是

$$\begin{aligned} 2J_0'(x) &= -x + \frac{x^3}{2^2 \cdot 2} - \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 3} \\ &+ \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 4} - \dots. \end{aligned}$$

因而方程式(6.3)的左部变为如下形式, 即

$$\begin{aligned} xy_2'' + y_2' + xy_2 &= (2^2 d_2 - 1)x + \left( d_2 + 4^2 d_4 + \frac{1}{2^2 \cdot 2} \right) x^3 \\ &+ \left( d_4 + 6^2 d_6 - \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 3} \right) x^5 + \dots. \end{aligned}$$

为使  $y_2$  成为方程式(6.3)的一个解, 则上式各次  $x$  项前的系数均为零, 亦即

$$2^2 d_2 - 1 = 0, \quad d_2 + 4^2 d_4 + \frac{1}{2^2 \cdot 2} = 0,$$

$$d_4 + 6^2 d_6 - \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 3} = 0, \dots$$

由此可求出  $d_{2K} (K = 1, 2, 3, \dots)$ :

$$d_2 = \frac{1}{2^2},$$

$$\begin{aligned} 4^2 d_4 &= -d_2 - \frac{1}{2^2 \cdot 2} = -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2} \\ &= -\frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

$$d_4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} 6^2 d_6 &= -d_4 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 3} \\ &= \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right), \end{aligned}$$

$$d_6 = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right),$$

...

把这些找到的系数值  $d_{2K}$  代入(6.23)式求得贝塞尔方程(6.3)的第二个解

$$\begin{aligned} y_2 &= J_0(x) \ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots \end{aligned} \quad (6.25)$$

在文献中通常用  $Y_0(x)$  代替  $y_2$ , 根据韦伯 (Weber) 的建议 (参见文献[22]), 取如下形式

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} y_2 + \frac{2}{\pi} J_0(x) (C - \ln 2), \quad (6.26)$$

或即

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left( \ln \frac{x}{2} + C \right)$$

$$+ \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots \right], \quad (6.27)$$

式中

$$C = \ln \gamma, \quad \gamma = e^C, \quad (6.28)$$

$$C = 0.577215665, \quad \gamma = 1.781072418.$$

‘C’被称为欧拉常数。

由(6.27)可看出 $Y_0(x)$ 乃是 $y_2$ 及 $J_0(x)$ 的线性组合,因而它当然是贝塞尔方程的解。其所以要选择(6.27)这样的表达式而又引进C及因子 $\frac{2}{\pi}$ ,其目的是为了当 $x$ 值很大时能够得到 $J_0(x)$ 及 $Y_0(x)$ 的某种简单近似表达式,对此,将在以后介绍。

$Y_0(x)$ 称作第二类零阶贝塞尔函数。在有些文献中采用符号 $N_0(x)$ 代替 $Y_0(x)$ 。

到此,便求得了贝塞尔方程式(6.2)的通解

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x). \quad (6.29)$$

式中 $C_1, C_2$ ——任意常数。

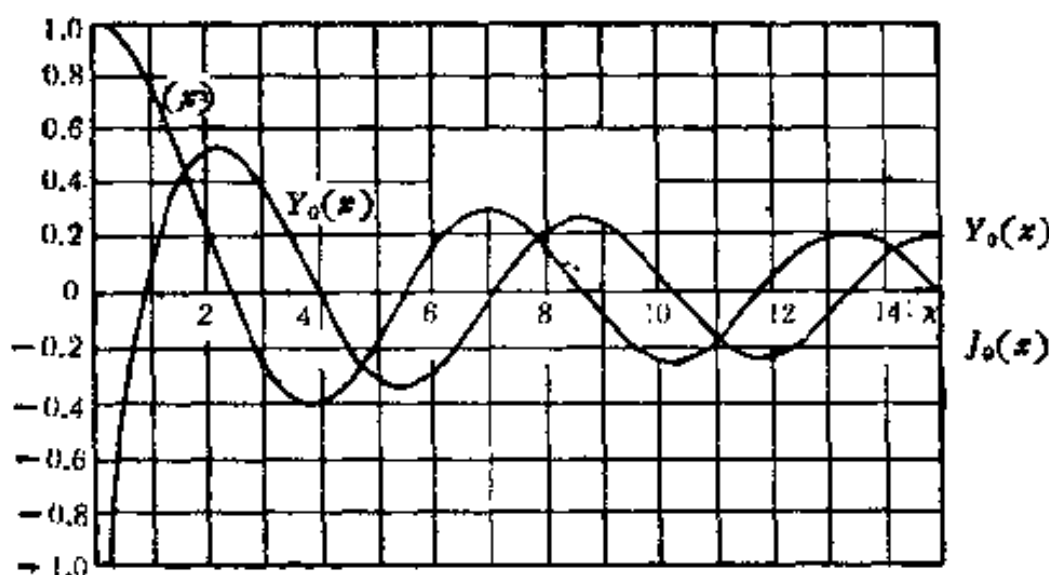


图 6-1 零阶贝塞尔函数

$J_0(x)$  及  $Y_0(x)$  的值画在图 6-1 上, 它们类似振荡衰减曲

线。

从图 6-1 可以看出,函数  $J_0(x)$  有无穷个零点,也就是有无穷多个根。最初几个零点在  $x$  轴上的相应值为 (取小数点后两位):  $\lambda_1 = 2.40$ ;  $\lambda_2 = 5.52$ ;  $\lambda_3 = 8.65$ ;  $\lambda_4 = 11.79$  等。应当指出,当根的排号  $i$  增大时,  $\lambda_i - \lambda_{i-1} \approx \pi$ 。

第二类贝塞尔函数  $Y_0(x)$  当  $x = 0$  时成为无穷大。

### 三、一阶和 $n$ 阶贝塞尔函数

本章的开始已经提到,所谓  $n$  阶贝塞尔函数就是  $n$  阶贝塞尔方程的解,故可谓一阶贝塞尔函数也就是在(6.1)中的  $n = 1$  时的一阶贝塞尔方程

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y = 0 \quad (6.30)$$

的解,  $J_1(x)$  和  $Y_1(x)$  相应于一阶的情况,它们分别被称为“第一类一阶贝塞尔函数”和“第二类一阶贝塞尔函数”。

下面进而熟悉它们的数学形式和具体内容

因为  $J_0(x)$  是方程(6.2),即

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

的解,故若将  $J_0(x)$  代入(6.2)则将有等式

$$J_0'' + \frac{1}{x} J_0' + J_0 = 0. \quad (6.31)$$

将(6.31)式微分之,则得

$$J_0''' - \frac{1}{x^2} J_0 + \frac{1}{x} J_0' + J_0' = 0,$$

此式可改写为

$$(J_0')'' + \frac{1}{x} (J_0')' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) (J_0') = 0. \quad (6.32)$$

该式表明,若将  $J_0'$  看作方程(6.30)中的  $y$ ,则可推知(6.32)式是成



立的,且为一阶贝塞尔方程,而  $J_0$  正是该式的一个解.

由(6.19)知

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

故

$$J_0'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} - \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} - \dots$$

即

$$J_0'(x) = -J_1(x) \quad (6.33)$$

$J_1(x)$  也就是我们所说的“第一类一阶贝塞尔函数”,用级数的形式表示为

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \quad (6.34)$$

或

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \left[ 1 - \frac{1}{1!2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!4!} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \right] \quad (6.35)$$

或表示为

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} n! (n+1)!} \quad (6.36)$$

同理可以推知第二类一阶贝塞尔函数

$$Y_1(x) = -\frac{dY_0(x)}{dx}, \quad (6.37)$$

即

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi} \left( C + \ln \frac{x}{2} \right) J_1(x) - \frac{2}{\pi x} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{K!(K+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2K+1}$$

$$\cdot \left\{ 2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{K} \right) + \frac{1}{K+1} \right\}. \quad (6.38)$$

式中的  $C = 0.577215665$  为欧拉常数.

在求得  $J_1(x)$ ,  $Y_1(x)$  之后, 则得方程(6.30)的通解为

$$y = C_1 J_1(x) + C_2 Y_1(x). \quad (6.39)$$

$J_1(x)$  和  $Y_1(x)$  的值构成的曲线画在图 6-2 上, 它们的图象分别与  $J_0(x)$ ,  $Y_0(x)$  的相似.

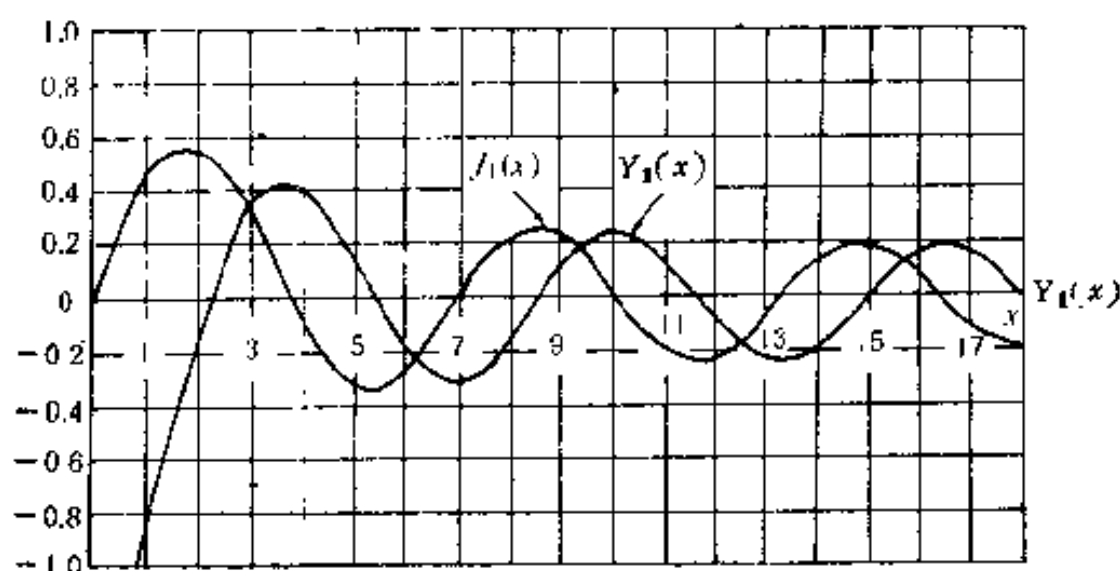


图 6-2 一阶贝塞尔函数图

顺便指出, 进行由  $J_0(x)$  值推演  $J_1(x)$  的类似计算可以得出

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots \right\}, \quad (6.40)$$

或(参看[28])

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{K!(n+K)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2K}, \quad |x| < \infty \quad (6.41)$$

式中的  $K$  加 1 即为项次,  $K = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

第二类贝塞尔函数  $Y_n(x)$  当  $n \geq 2$  时, 它的公式推导较之推演  $J_n(x)$  复杂的多, 其具体推演过程可参见文献[28], [29], [24]

或其他的有关文献,限于本书的目的,在此只写出它的最终形式:

$$\begin{aligned}
 Y_n(x) = & \frac{2}{\pi} J_n(x) \left( \ln \frac{x}{2} + C \right) \\
 & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-K-1)!}{K!} \left( \frac{x}{2} \right)^{-n+2K} \\
 & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{K!(n+K)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2K} \\
 & \cdot \left( \sum_{K=0}^{n+K-1} \frac{1}{K+1} + \sum_{K=0}^{K-1} \frac{1}{K+1} \right), \quad (6.42)
 \end{aligned}$$

式中  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $K = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ .

这样,一般圆柱函数的表达式便是

$$y_n(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x), \quad (6.43)$$

式中  $C_1, C_2$  为待定常数.

## 四、贝塞尔函数的递推公式

在前节中已经求出  $J_0(x), J_1(x); Y_0(x), Y_1(x)$  的公式,其它同类的各阶贝塞尔函数,都可以用相应的零阶和一阶贝塞尔函数来表示,因为贝塞尔函数存在一种循环关系.下面就来寻求反映这种关系的所谓递推公式(参看文献[17],[28]).

先从第一类贝塞尔函数开始.

若设  $n$  为正整数,并将级数(6.41)乘以  $x^n$ ,再对  $x$  求微分,此时即得

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} x^n J_n(x) &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K (2n+2K)}{2^n 2^K K! (n+K)!} x^{2n+2K-1} \\
 &= x^n \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{K! [(n-1)+K]!} \left( \frac{x}{2} \right)^{(n-1)+2K} \\
 &= x^n J_{n-1}(x),
 \end{aligned}$$

亦即

$$\frac{d}{dx} x^n J_n(x) = x^n J_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6.44)$$

同理, 若将级数乘以  $x^{-n}$  则得:

$$-\frac{d}{dx} x^{-n} J_n(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x), \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.45)$$

在公式(6.43), (6.44)中实施微分法, 并除以因子  $x^{\pm n}$ , 便得公式如下:

$$\left. \begin{aligned} J_n'(x) + \frac{n}{x} J_n(x) &= J_{n-1}(x), & a \\ J_n'(x) - \frac{n}{x} J_n(x) &= -J_{n+1}(x), & b \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

该二式相减可得

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (6.47)$$

若二式相加, 则得

$$\underline{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x)}, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6.48)$$

当  $n = 0$  时, 该公式应写为

$$J_0'(x) = -J_1(x). \quad (6.49)$$

上面得到的这些公式即所谓贝塞尔函数的递推公式, 不难相信, 由第一个公式(6.47)可将任何  $n$  阶的贝塞尔函数用零阶与一阶的函数表示出来, 这样便减少了编造贝塞尔函数表的工作量。

通过公式(6.48)可将贝塞尔函数的导数用贝塞尔函数来表出。

从公式(6.38)和(6.42)可以看出  $J_n$  与  $Y_n$  的关系, 这种关系还可表示为其它的形式, 参看文献[30], [27]. 由此不难相信, 对第二类贝塞尔函数  $Y_n$  来说, 与第一类贝塞尔函数具有性质相类似的递推公式(参看文献[27], [25], [23], [17]):

$$\frac{d}{dx} [x^n Y_n(x)] = x^n Y_{n-1}(x), \quad (6.50)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} Y_n(x)] = -x^{-n} Y_{n+1}(x), \quad (6.51)$$

$$Y_{n-1}(x) + Y_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Y_n(x), \quad (6.52)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{n-1}(x) - Y_{n+1}(x) &= 2Y'_n(x) \\ nY_n(x) - xY_{n+1}(x) &= xY'_n(x) \\ -nY_n(x) + xY_{n-1}(x) &= xY'_n(x). \end{aligned} \right\} \quad (6.53)$$

如此等等<sup>1)</sup>。

## 五、方程 $xy'' + y' + a^2xy = 0$ 的积分

在第二节中已经求得了贝塞尔方程(6.3)即

$$xy'' + y' + xy = 0$$

的积分结果为(6.29)式, 即

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x).$$

但在数学物理课题中还常遇到如下形式的方程

$$y'' + \frac{1}{x} y' + a^2 y = 0,$$

或

$$xy'' + y' + a^2xy = 0. \quad (6.54)$$

为了今后将贝塞尔函数应用于求解渗流方程的需要, 在此顺便探讨一下此类方程的积分问题。其思路是设法将(6.54)转化为(6.3)

的形式。为此, 令  $x = \frac{t}{a}$ , 或  $t = xa$ , 并用  $\frac{dy}{dt}$  和  $\frac{d^2y}{dt^2}$  表示

$\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , 遂有:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} a,$$

1) 事实上我们所得到的这些公式不仅当  $n$  为正整数时是正确的, 而且适用于  $n$  为非正整数贝塞尔函数, 在这种情况下, 文献中常用 ' $\nu$ ' 代替 ' $n$ '。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} a \right) = a^2 \frac{d^2y}{dt^2},$$

将求得的这些导数代入(6.54)中则得

$$\left( \frac{t}{a} \right) \left( a^2 \frac{d^2y}{dt^2} \right) + a \frac{dy}{dt} + a^2 \frac{t}{a} y = 0,$$

或

$$t \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + ty = 0. \quad (6.55)$$

即得与(6.3)形式相同的贝塞尔方程, 其积分为

$$y = C_1 J_0(t) + C_2 Y_0(t).$$

由此可知(6.54)型方程的通解为

$$y = C_1 J_0(ax) + C_2 Y_0(ax). \quad (6.56)$$

## 六、包含贝塞尔函数的一些重要公式

本节将继续列举一些公式, 这些公式将是今后研究渗流课题所需要的.

(1) 在第五节中曾讨论过方程式

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + a^2 xy = 0, \quad (6.54)'$$

也就是

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + a^2 xy = 0, \quad (6.57)$$

由于函数  $y_1 = J_0(ax)$  满足上式, 故有

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dJ_0(ax)}{dx} \right) = -a^2 x J_0(ax), \quad (6.58)$$

积分上式而得

$$x \frac{dJ_0(ax)}{dx} = -a^2 \int x J_0(ax) dx + C_1, \quad (6.59)$$

但按公式(6.33)

$$\frac{dJ_0(ax)}{dx} = -aJ_1(ax), \quad (6.60)$$

于是

$$-xaJ_1(ax) = -a^2 \int xJ_0(ax)dx + C_1,$$

或即

$$\int xJ_0(ax)dx = \frac{1}{a} xJ_1(ax) + C, \quad (6.61)$$

对于第二类贝塞尔函数也存在类似的关系

$$\int xY_0(ax)dx = \frac{1}{a} xY_1(ax) + C, \quad (6.62)$$

可以推知,对于  $J_0(ax)$  和  $Y_0(ax)$  的任何线性组合

$$V_0(ax) = AJ_0(ax) + BY_0(ax), \quad (6.63)$$

来说,也存在如下关系式

$$\int xV_0(ax)dx = \frac{1}{a} xV_1(ax) + C, \quad (6.64)$$

式中

$$V_1(ax) = AJ_1(ax) + BY_1(ax); \quad (6.65)$$

且(6.65)中的常数  $A, B$  与(6.63)中的相同.

(2) 由(6.33)知

$$\int x^2 J_1(x)dx = - \int x^2 \frac{dJ_0(x)}{dx} dx, \quad (6.66)$$

对(6.66)施行分部积分

$$\begin{aligned} \int x^2 J_1(x)dx &= - \int x^2 \frac{dJ_0(x)}{dx} dx \\ &= - \underbrace{x^2 J_0(x)} + 2 \int x J_0(x) dx, \end{aligned}$$

再将(6.61)的关系式代入上式则得

$$\int x^2 J_1(x)dx = -x^2 J_0(x) + 2xJ_1(x) + C, \quad (6.67)$$

同理可得

$$\int x^2 Y_1(x) dx = -x^2 Y_0(x) + 2x Y_1(x) + C, \quad (6.68)$$

对于由等式(6.63), (6.65)所定义的函数  $V_0(x)$  和  $V_1(x)$  也将有

$$\int x^2 V_1(x) dx = -x^2 V_0(x) + 2x V_1(x) + C. \quad (6.69)$$

如果回顾公式(6.47), (6.52)中的关系, 则(6.67), (6.68)和(6.69)式还可以写为另一种形式. 例如将式(6.47)用于式(6.67)则得

$$\int x^2 J_1(x) dx = x^2 J_2(x) + C, \quad (6.70)$$

将(6.52)的关系用于(6.68)式则得

$$\int x^2 Y_1(x) dx = x^2 Y_2(x) + C. \quad (6.71)$$

其普遍形式为

$$\int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x) + C, \quad (6.72)$$

$$\int x^n Y_{n-1}(x) dx = x^n Y_n(x) + C. \quad (6.73)$$

至于这些公式的较为详细的推导可参见文献[24], [30]或其它的专门论述.

(3) 用  $2x \frac{dJ_0(x)}{dx}$  乘

$$x \frac{d^2 J_0(ax)}{dx^2} + \frac{dJ_0(ax)}{dx} + a^2 x J_0(ax) = 0,$$

得

$$\begin{aligned} 2x^2 \frac{dJ_0(ax)}{dx} \times \frac{d^2 J_0(ax)}{dx^2} + 2x \left( \frac{dJ_0(ax)}{dx} \right)^2 \\ + 2a^2 x^2 J_0(ax) \frac{dJ_0(ax)}{dx} = 0, \end{aligned}$$

或即

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^2 \left[ \frac{dJ_0(ax)}{dx} \right]^2 \right\} + a^2 x^2 \frac{d[J_0^2(ax)]}{dx} = 0, \quad (6.74)$$



将其积分而得

$$a^2 \int x^2 \frac{d[J_0^2(ax)]}{dx} dx + x^2 \left[ \frac{dJ_0(ax)}{dx} \right] = C_1,$$

将此式进行分部积分,并考虑到关系式(6.60)则得

$$a^2 x^2 J_0^2(ax) - a^2 \int J_0^2(ax) 2x dx + x^2 a^2 J_1^2(ax) = C_1,$$

因此

$$\int x J_0^2(ax) dx = \frac{x^2}{2} [J_0^2(ax) + J_1^2(ax)] + C. \quad (6.75)$$

将该式推论到公式(6.63),得

$$\int x V_0^2(ax) dx = \frac{x^2}{2} [V_0^2(ax) + V_1^2(ax)] + C_1, \quad (6.76)$$

式中  $V_1(ax)$  即为(6.65)表示之函数.

(4) 在贝塞尔函数  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  与  $Y_0(x)$ ,  $Y_1(x)$  之间存在如下重要关系:

$$J_1(x)Y_0(x) - J_0(x)Y_1(x) = \frac{2}{\pi x}, \quad (6.77)$$

该式可以证明如下: 因为  $J_0(x)$  和  $Y_0(x)$  都是方程(6.3), 即  $xy'' + y' + xy = 0$  的解, 因而

$$xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) = 0,$$

$$xY_0''(x) + Y_0'(x) + xY_0(x) = 0.$$

将第一个等式乘以  $Y_0(x)$ , 第二个乘以  $J_0(x)$ , 然后相减得

$$\begin{aligned} x[Y_0(x)J_0''(x) - J_0(x)Y_0''(x)] + [Y_0(x)J_0'(x) \\ - J_0(x)Y_0'(x)] = 0. \end{aligned} \quad (6.78)$$

又因

$$\begin{aligned} [Y_0(x)J_0'(x) - J_0(x)Y_0'(x)]' &= [Y_0(x)J_0''(x) + Y_0'(x)J_0'(x) \\ &\quad - J_0(x)Y_0''(x) - J_0'(x)Y_0'(x)] \\ &= [Y_0(x)J_0''(x) - J_0(x)Y_0''(x)], \end{aligned}$$

将这种关系式代入(6.78)式得

$$\frac{[Y_0(x)J'_0(x) - J_0(x)Y'_0(x)]'}{Y_0(x)J'_0(x) - J_0(x)Y'_0(x)} = -\frac{1}{x},$$

再把(6.33), (6.37)式的关系引入则得

$$\frac{d[J_1(x)Y_0(x) - J_0(x)Y_1(x)]}{J_1(x)Y_0(x) - J_0(x)Y_1(x)} = -\frac{dx}{x},$$

两端取积分则有

$$\ln [J_1(x)Y_0(x) - J_0(x)Y_1(x)] = -\ln x + \ln C,$$

或

$$J_1(x)Y_0(x) - J_0(x)Y_1(x) = \frac{C}{x}. \quad (6.79)$$

从(6.79)可以看出, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $J_1(x)Y_0(x) - J_0(x)Y_1(x)$  将如  $\frac{1}{x}$  一样成为无穷大值, 于是  $C$  值可用如下的极限式来确定

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} x[J_1(x)Y_0(x) - J_0(x)Y_1(x)]. \quad (6.80)$$

从公式(6.19)及图 6-1 可以看出当  $x \rightarrow 0$  时,  $J_0(x)$  趋近于 1; 从公式(6.34)及图 6-2 可以看出当  $x \rightarrow 0$  时,  $J_1(x)$  趋近于零. 但从公式(6.27), (6.38)发现, 由于它们包含着  $\ln x$  和  $\frac{1}{x}$  的项, 故当  $x$  的绝对值趋近于零时, 它们将趋于无穷大, 因而(6.80)方括号中的值将趋于无限大. 现在再来推求(6.80)的极限值. 为此, 先研究在表示  $Y_0(x)$  和  $Y_1(x)$  的公式(6.27)和(6.38)中, 都会遇到的  $\ln x$  与  $x$  的乘积的极限, 即  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$ , 该极限将在求(6.80)式的极限时遇到, 且从极限理论得知

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} x J_1(x) Y_0(x) = 0$$

从而由(6.19), (6.38)式知(6.80)式变为

$$\begin{aligned}
C &= -\lim_{x \rightarrow 0} x J_0(x) Y_1(x) \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0} x J_0(x) \lim_{x \rightarrow 0} Y_1(x) \\
&= -x \cdot 1 \cdot \left(-\frac{2}{\pi x}\right) = \frac{2}{\pi},
\end{aligned}$$

于是便求得了最终结果

$$J_1(x)Y_0(x) - J_0(x)Y_1(x) = \frac{2}{\pi x}.$$

事实上(6.77)是下式

$$J_{n+1}(x)Y_n(x) - J_n(x)Y_{n+1}(x) = \frac{2}{\pi x}, \quad (6.81)$$

的特殊情况,它的推导可参见文献[24].

## 七、贝塞尔函数的渐近公式

当自变量  $x$  很小或很大时,贝塞尔函数有一些渐近的计算公式,它们对于求解渗流问题是有用的.

(1) 自变量  $x$  很小时,由公式(6.19), (6.34)得出下面的渐近公式:

$$J_0(x) \simeq 1 - \frac{x^2}{4} + R, \quad R < \frac{x^4}{64}, \quad (6.82)$$

式中  $R$  为余数.

$$J_1(x) \simeq \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + R, \quad R < \frac{x^5}{384}, \quad (6.83)$$

在求  $Y_0(x)$ ,  $Y_1(x)$  的渐近公式之前,我们先将(6.27), (6.38)中的欧拉常数  $C$  写为另一种形式:

$$C = \ln \gamma, \quad (6.84)$$

又因

$$C = 0.577215665, \quad \gamma = e^C = 1.781072418, \quad (6.85)$$

故

$$\ln \frac{x}{2} + \ln \gamma = \ln x - \ln \frac{2}{\gamma} = 2.302585 \lg x - 0.11593 \dots$$

在  $x \leq 1$  时可有如下近似公式

$$Y_0(x) \simeq \frac{2}{\pi} \left\{ [2.302585 \lg x - 0.11593] J_0(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \dots \right\}, \quad (6.86)$$

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ [2.302585 \lg x - 0.11593] J_1(x) - \frac{1}{x} - \frac{x}{4} + \frac{5x^3}{64} - \frac{17x^5}{4608} - \dots \right\}. \quad (6.87)$$

(2) 自变量  $x$  很大时, 贝塞尔函数具有如下的近似表达式

$$J_n(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right), \quad (6.88)$$

$$Y_n(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right). \quad (6.89)$$

这些公式的推导可参见文献[32], [27].

从而

$$\left\{ \begin{array}{l} J_0(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \end{array} \right. \quad (6.90)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right); \end{array} \right. \quad (6.91)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_0(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \end{array} \right. \quad (6.92)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right). \end{array} \right. \quad (6.93)$$

## 八、两个重要定理

(1) 贝塞尔函数  $J_n(z)$  等于  $e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}$  展开式中  $t^n$  项的系

数,即

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^n. \quad (6.94)^{1)}$$

在(6.94)中  $n$  为整数,若取  $n$  为正整数则该式变为

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) \left[ t^n + (-1)^n \frac{1}{t^n} \right], \quad (6.95)$$

该定理的证明可参见文献[21],[30].

(2) 若在(6.94)中令  $z = x + y$ , 则得如下关系:

$$e^{\frac{1}{2}(x+y)(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x+y) t^n,$$

或即

$$e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} \cdot e^{\frac{1}{2}y(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x+y) t^n, \quad (6.96)$$

故得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x+y) t^n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) t^k \times \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(y) t^l. \quad (6.97)$$

求出等式(6.97)右边两幂级数的乘积然后集项, 再比较等式两边  $t^n$  的系数,得

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) J_{n-k}(y). \quad (6.98)$$

该公式便是脚号  $n$  为整数时贝塞尔函数的加法定理, 对此可参见文献[30],[27],[28].

## 九、贝塞尔函数的正交性

正交函数系在分析数学中占有重要的地位, 研究函数的正交

---

1)  $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$  被称为贝塞尔函数  $J_n(x)$  的母函数.

性对于解决诸如在数学物理方程, 函数的逼近理论等方面遇到的实际问题十分有益.

根据正交函数的定义, 一个函数系  $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \dots$  如存在下列关系(参见文献[23]):

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx &= 0, \quad i \neq j, \\ \int_a^b [\phi_i(x)]^2 dx &\neq 0,\end{aligned}$$

则这一函数系称为在区间  $[a, b]$  上是正交的, 如

$$\int_a^b [\phi_i(x)]^2 dx = a_i \neq 0,$$

则可将  $\phi_i(x)$  正规化, 即可找到一新的函数系

$$\psi_i(x) = \phi_i(x)/\sqrt{a_i},$$

在区间  $[a, b]$  上规格化正交, 也就是说, 适合条件

$$\int_a^b \psi_i(x)\psi_j(x)dx = \delta_{ij},$$

在内积的记法中, 对于函数系  $\{\psi_n(x)\}$ , 如有

$$(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij},$$

则这一函数是规格化正交的.

正交系的最简单的例子, 便是三角函数系  $f_n(x) = \cos nx$ , 它们在区间  $(0, \pi)$  内, 当  $m \neq n$  时

$$\int_0^\pi \cos mx \cos nx dx = 0$$

贝塞尔函数也具有正交性.

从图 6-2 可以看出,  $J_0(x)$  有无穷多个正根, 我们以  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ , 代表这些正根, 此处  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ , 现在我们来证明函数系

$$\left\{ \sqrt{x} J_0\left(\lambda_i \frac{x}{c}\right) \right\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.99)$$

在区间  $[0, c]$  上是正交的, 特别要证明

$$\int_0^C x J_0\left(\lambda_i \frac{x}{C}\right) J_0\left(\lambda_j \frac{x}{C}\right) dx = \frac{C^2}{2} [J_1(\lambda_i)]^2 \delta_{ij}. \quad (6.100)^{1)}$$

为了使证明  $J_0(x)$  函数的正交性方便起见, 引进函数

$$u(x) = \sqrt{x} J_0(\alpha x), \quad v(x) = \sqrt{x} J_0(\beta x), \quad (6.101)$$

其中  $\alpha$  及  $\beta$  为两个常数. 由于  $J_0(x)$  满足贝塞尔方程(6.3),  $J_0(\alpha x)$  必须满足下列方程

$$\begin{aligned} & (\alpha x) \frac{d^2}{d(\alpha x)^2} J_0(\alpha x) + \frac{d}{d(\alpha x)} J_0(\alpha x) + (\alpha x) J_0(\alpha x) \\ &= x \frac{d^2}{dx^2} J_0(\alpha x) + \frac{d}{dx} J_0(\alpha x) + \alpha^2 x J_0(\alpha x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

将(6.101)式中  $J_0(\alpha x)$  代入上式, 则有

$$x(x^{-\frac{1}{2}}u)'' + (x^{-\frac{1}{2}}u)' + \alpha^2 x(x^{-\frac{1}{2}}u) = 0,$$

或

$$x^{\frac{1}{2}}u'' + \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}u + \alpha^2 x^{\frac{1}{2}}u = 0,$$

即

$$4x^{\frac{1}{2}}u'' + (4\alpha^2 x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})u = 0. \quad (6.102)$$

同理可证  $v(x)$  满足方程

$$4x^{\frac{1}{2}}v'' + (4\beta^2 x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})v = 0. \quad (6.103)$$

现在以  $v(x)$  乘(6.102)式;  $u(x)$  乘(6.103)式, 将其结果相减, 则得

$$4x^{\frac{1}{2}}(vu'' - uv'') + 4x^{\frac{1}{2}}(\alpha^2 uv - \beta^2 vu) = 0,$$

或

$$uv'' - vu'' = uv(\alpha^2 - \beta^2). \quad (6.104)$$

在界限 0 至  $x$  间将上式积分, 利用关系式(6.104)则得

1) 所谓函数  $\left\{ \sqrt{x} J_0\left(\lambda_i \frac{x}{C}\right) \right\}$  在区间  $[0, C]$  上正交, 等于是对权函数  $x$  来说:

函数  $J_0\left(\lambda_i \frac{x}{C}\right)$  在区间  $[0, C]$  上正交.

$$\begin{aligned}\int_0^x (uv'' - v u'') dx &= (uv' - v u') \Big|_0^x - \int_0^x u' v' dx + \int_0^x v' u' dx \\ &= (\alpha^2 - \beta^2) \int_0^x u v dx,\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^x u(\xi) v(\xi) d\xi &= [u(x)v'(x) - v(x)u'(x)] \\ &= [u(0)v'(0) - v(0)u'(0)].\end{aligned}$$

由(6.101)中  $u, v$  的定义知

$$\begin{aligned}u(0) &= 0 \cdot J_0(0) = 0, \\ v(0) &= 0 \cdot J_0(0) = 0,\end{aligned}$$

因此上式变为

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^x \xi J_0(\alpha\xi) J_0(\beta\xi) d\xi &= u(x)v'(x) - v(x)u'(x) \\ &= \sqrt{x} J_0(\alpha x) [\sqrt{x} J_0(\beta x)]' \\ &\quad - \sqrt{x} J_0(\beta x) [\sqrt{x} J_0(\alpha x)]' \\ &= \sqrt{x} J_0(\alpha x) \left[ \sqrt{x} J_0'(\beta x) + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} J_0(\beta x) \right] \\ &\quad - \sqrt{x} J_0(\beta x) \left[ \sqrt{x} J_0'(\alpha x) + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} J_0(\alpha x) \right] \\ &= x J_0(\alpha x) J_0'(\beta x) + \frac{1}{2} J_0(\alpha x) J_0(\beta x) \\ &\quad - x J_0(\beta x) J_0'(\alpha x) - \frac{1}{2} J_0(\beta x) J_0(\alpha x) \\ &= x [J_0(\alpha x) J_0'(\beta x) - J_0(\beta x) J_0'(\alpha x)].\end{aligned}\tag{6.105}$$

由(6.49)式知

$$\begin{aligned}J_0'(\alpha x) &= -\alpha J_1(\alpha x), \\ J_0'(\beta x) &= -\beta J_1(\beta x),\end{aligned}$$

将这些关系式代入(6.105)式, 得

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^x \xi J_0(\alpha\xi) J_0(\beta\xi) d\xi &= x [\alpha J_0(\beta x) J_1(\alpha x) \\ &\quad - \beta J_0(\alpha x) J_1(\beta x)].\end{aligned}\tag{6.106}$$



再如令  $x = C$ ,  $\alpha = \frac{\lambda}{C}$ ,  $\beta = \frac{\mu}{C}$ , 则(6.106)式变为

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 - \mu^2) \int_0^C \xi J_0\left(\lambda \frac{\xi}{C}\right) J_0\left(\mu \frac{\xi}{C}\right) d\xi \\ &= C^3 \left[ \frac{\lambda}{C} J_0(\mu) J_1(\lambda) - \frac{\mu}{C} J_0(\lambda) J_1(\mu) \right], \end{aligned}$$

如果  $\lambda$  及  $\mu$  为  $J_0(x)$  的两个不同的根, 则

$$\int_0^C x J_0\left(\lambda \frac{x}{C}\right) J_0\left(\mu \frac{x}{C}\right) dx = 0, \quad \lambda \neq 0 \quad (6.107)$$

这就证明了第一个正交性条件.

如  $\lambda = \mu$  是  $J_0(x) = 0$  的同一零点, 则不能再象前面一样以  $\lambda^2 - \mu^2$  来除方程的两边, 而是直接将(6.106)式对  $\alpha$  微分, 于是得

$$\begin{aligned} & 2\alpha \int_0^x \xi J_0(\alpha\xi) J_0(\beta\xi) d\xi + (\alpha^2 - \beta^2) \int_0^x \xi \frac{d}{d\alpha} J_0(\alpha\xi) J_0(\beta\xi) d\xi \\ &= x \left[ J_0(\beta x) J_1(\alpha x) + \alpha J_0(\beta x) \frac{d}{d\alpha} J_1(\alpha x) \right. \\ & \quad \left. - \beta \frac{d}{d\alpha} J_0(\alpha x) J_1(\beta x) \right]. \end{aligned} \quad (6.108)$$

如令  $x = C$  及  $\alpha = \beta = \frac{\lambda}{C}$ , 此处  $\lambda$  为  $J_0(x) = 0$  的一个根, 则可知  $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ , 因而(6.108)式左边第二个积分等于零, 由于

$$J_0(\beta C) = J_0\left(\frac{\lambda}{C} \cdot C\right) = J_0(\lambda) = 0$$

且因

$$\frac{d}{d\alpha} J_0(\alpha C) = -C J_1(\alpha C) = -C J_1(\lambda),$$

故

$$2 \frac{\lambda}{C} \int_0^C x J_0\left(\lambda \frac{x}{C}\right) dx = C \left[ -\frac{\lambda}{C} (-C) J_1(\lambda) J_1(\lambda) \right];$$

或因  $\lambda \neq 0$ , 故

$$\int_0^C x J_0^2\left(\lambda \frac{x}{C}\right) dx = \frac{C^2}{2} [J_1^2(\lambda)]. \quad (6.109)$$

这里完全证明了贝塞尔函数  $J_0(x)$  的正交性。

在此处应当指出,我们虽然求证的是零阶贝塞尔函数,实际上所得结论可以推论到  $n \geq 0$  的各阶贝塞尔函数,即若  $J_n(x)$  具有无穷多个正根,  $0 < \lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \lambda_3^{(n)} < \dots$ , 则函数

$$J_n\left(\lambda_i^{(n)} \frac{x}{C}\right)$$

对权函数  $x$  来说,在区间  $[0, C]$  上是正交的,且

$$\begin{aligned} & \int_0^C x J_n\left(\lambda_i^{(n)} \frac{x}{C}\right) J_n\left(\lambda_j^{(n)} \frac{x}{C}\right) dx \\ &= \frac{C^2}{2} [J_{n+1}(\lambda_i^{(n)})]^2 \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (6.110)$$

## 十、按贝塞尔函数将任意函数展开为级数

在包括渗流力学在内的许多数学物理课题中,常需将给定的函数  $f(x)$  用贝塞尔函数展开为级数

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\mu_n x) \\ &= a_1 J_0(\mu_1 x) + a_2 J_0(\mu_2 x) + a_3 J_0(\mu_3 x) + \dots, \end{aligned} \quad (6.111)$$

式中  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$  是贝塞尔函数  $J_0(x)$  的正根,即

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n.$$

象傅里叶级数对于三角函数一样,这种展开对于贝塞尔函数的应用是十分重要的,然而这种展开只是在给函数  $f(x)$  加上某些限制的情况下才是可能的.本书将不探讨这些限制,主要着力于为以后章节的使用作准备.

用  $x J_0(\mu_k x)$  乘(6.111)式之右部,并在 0 到 1 之间积分,得

$$\begin{aligned}\int_0^1 x f(x) J_0(\mu_K x) dx &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x J_0(\mu_n x) J_0(\mu_K x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^1 x J_0(\mu_n x) J_0(\mu_K x) dx.\end{aligned}\quad (6.112)$$

根据我们在前节中讨论过的正交性条件(6.107),在(6.112)式中,若  $\mu_n \neq \mu_K$ ,则

$$\int_0^1 x J_0(\mu_n x) J_0(\mu_K x) dx = 0, \quad (6.113)$$

若  $\mu_n = \mu_K$ , 则由(6.109)式推知

$$\int_0^1 x J_0^2(\mu_K x) dx = \frac{1}{2} J_1^2(\mu_K). \quad (6.114)$$

因此,在(6.112)式之右,除了处于第  $K$  项,也就是用  $a_K$  乘的那一项之外,其余的积分全都为零. 于是知

$$\int_0^1 x f(x) J_0(\mu_K x) dx = a_K \frac{1}{2} J_1^2(\mu_K),$$

由此得

$$a_K = \frac{2}{J_1^2(\mu_K)} \int_0^1 x f(x) J_0(\mu_K x) dx. \quad (6.115)$$

应该说明,在贝塞尔函数理论中,应把任意的贝塞尔函数级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k x)$$

与按公式(6.115)决定其系数  $a_k$  的级数的特殊情况加以区别. 该特殊情况的级数被称为函数的傅里叶-贝塞尔级数. 有关这方面的知识还可参阅文献[23],[27]及文献[24]的第十八章.

## 十一、变形(或虚宗量)第一类贝塞尔函数

在前十节中我们介绍的是在贝塞尔方程

$$xy'' + y' + a^2 xy = 0, \quad (6.116)$$

中  $a^2$  始终为正值的情况,例如由(6.3)式表示的便是  $a^2 = +1$ ;

如果  $a^2 = -1$ , 则有方程

$$xy'' + y' - xy = 0, \quad (6.117)$$

对于该方程积分求解所得的结果将是带有虚变数的零阶第一类贝塞尔函数  $J_0(ix)$ .

在第一节中得到的 (6.9) 式的级数, 不仅对实数变数是正确的, 而且也适用于虚变量  $z$ , 即

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots, \quad (6.118)$$

在 (6.118) 式中令  $z = ix$ , 得

$$J_0(ix) = 1 - \frac{i^2 x^2}{2^2} + \frac{i^4 x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{i^6 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots,$$

或

$$J_0(ix) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots, \quad (6.119)$$

由该式可以看出, 虚变量零阶第一类贝塞尔函数仍是实数.

引进一个新符号  $I_0(x)$ , 且令

$$I_0(x) = J_0(ix), \quad (6.120)$$

则得

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots, \quad (6.121)$$

函数  $I_0(x)$  被称为虚变数零阶第一类贝塞尔函数.

除了函数  $I_0(x)$  之外, 在实际中还常用到它的导数

$$\frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x), \quad (6.122)$$

该式在形式上有和 (6.33) 式相似之处.

将 (6.121) 式微分而得

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \cdots, \quad (6.123)$$

$I_1(x)$  被称为虚变量一阶第一类贝塞尔函数.

比较公式(6.123)和(6.34)不难找到, 在虚、实变量的一阶第一类贝塞尔函数之间存在如下关系:

$$I_1(x) = \frac{1}{i} J_1(ix) = -iJ_1(ix). \quad (6.124)$$

不难证明  $I_1(x)$  正是方程

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) y = 0 \quad (6.125)$$

的一个积分结果.

$n$  阶第一类虚变量贝塞尔函数  $I_n(x)$  也可以用  $n$  阶第一类贝塞尔函数  $J_n(x)$  表示为下式

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix). \quad (6.126)$$

而(6.120)式和(6.124)式乃是(6.126)式的特殊情况, 函数  $I_n(x)$  是微分方程

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (6.127)$$

的积分.

任意阶虚变量贝塞尔函数也有类似一般贝塞尔函数的如下递推公式(参见文献[17],[30]):

$$\left. \begin{aligned} I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) &= \frac{2n}{x} I_n(x), \\ I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x) &= 2I'_n(x), \\ \frac{d}{dx} x^n I_n(x) &= x^n I_{n-1}(x). \end{aligned} \right\} \quad (6.128)$$

$I_n(x)$  也有其渐近公式. 如果  $|x|$  很大, 而自变量  $x$  在 0 和  $\pi$  之间, 则<sup>[30]</sup>

$$\begin{aligned} I_n(x) \simeq & \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left\{ 1 - \frac{4n^2 - 1^2}{1! 8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8x)^2} - \dots \right\} \\ & + \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})x}}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x} \left\{ 1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1! 8x} \right. \\ & \left. + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8x)^2} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (6.129)$$

如余数  $R(x) > 0$ , 则第二个级数可以略去.

如  $|x|$  很大, 而自变量在  $-\pi$  和  $0$  之间, 则

$$\begin{aligned}
 I_0(x) \approx & \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left\{ 1 - \frac{4n^2 - 1^2}{1!(8x)} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} - \dots \right\} \\
 & + \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})i\pi}}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x} \left\{ 1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1!(8x)} \right. \\
 & \left. + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right\}. \quad (6.130)
 \end{aligned}$$

同样, 若  $R(x) > 0$ , 则第二个级数可以略去.

如果  $x$  值十分的大时, 则可用更简单的近似公式

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad (6.131)$$

$$I_1(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad (6.132)$$

## 十二、虚宗量第二类贝塞尔函数

关于此类函数在有关文献如[24], [30], [23]中有较系统的介绍, 本节不再详细推演, 只列举一些重要的公式和结论, 以便查用.

$K_0(x)$  称为虚宗量零阶第二类贝塞尔函数, 它是方程式

$$xy'' + y' - xy = 0$$

的与上节求出的  $I_0(x)$  线性无关的另一个解.

$$\begin{aligned}
 K_0(x) = & - \left( C + \ln \frac{x}{2} \right) I_0(x) \\
 & + \frac{\left( \frac{1}{2} x \right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left( \frac{1}{2} x \right)^4}{(2!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \\
 & + \frac{\left( \frac{1}{2} x \right)^6}{(3!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \dots, \quad (6.133)
 \end{aligned}$$

式中  $C = 0.5772157$ ——欧拉常数。

从而方程(6.117)的积分结果可以写为

$$y = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x), \quad (6.134)$$

而方程

$$xy'' + y' - a^2 xy = 0 \quad (6.135)$$

的解可写为

$$y = C_1 I_0(ax) + C_2 K_0(ax); \quad (6.136)$$

而  $n$  阶方程

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (6.137)$$

的解为

$$y = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x). \quad (6.138)$$

对于  $K_n(x)$  在有些文献中叫做麦克唐纳函数。而  $I_n(x)$  和  $K_n(x)$  有时也被称为“修正的贝塞尔函数”。

$K_n(x)$  也具有类似(6.122)式的公式

$$\frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x) \quad (6.139)$$

和类似(6.128)式的关系式(参见文献[17],[26]):

$$\left. \begin{aligned} K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x) &= -2K'_n(x), \\ K_{n-1}(x) - K_{n+1}(x) &= -\frac{2n}{x} K_n(x), \\ \frac{d}{dx} x^n K_n(x) &= -x^n K_{n-1}(x). \end{aligned} \right\} \quad (6.140)$$

$K_n(x)$  的展开式为(参见文献[17])

$$\begin{aligned} K_n(x) &= (-1)^{n+1} \left( C + \ln \frac{x}{2} \right) I_n(x) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p (n-p-1)!}{p!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2p-n} \\ &+ \frac{(-1)^n}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p! (n+p)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2p+n} \end{aligned}$$

$$\cdot \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} + 1 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \right). \quad (6.141)$$

式中  $n$ ——正整数. 当  $p=0$  时最后一个括号内为  $\left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$ . 且当  $n$  为整数时

$$K_{-n}(x) = K_n(x), \quad (6.142)$$

当  $n$  为非整数时

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \{ I_{-n}(x) - I_n(x) \}, \quad (6.143)$$

当  $x$  值很大时,  $K_n(x)$  的渐近表达式为

$$K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[ 1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1! 8x} \right. \\ \left. + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8x)^2} + \cdots \right]. \quad (6.144)$$

参见例如文献[32]还有关系式:

$$I_n(x) K_{n+1}(x) + I_{n+1}(x) K_n(x) = \frac{1}{x}. \quad (6.145)$$

### 十三、第三类贝塞尔函数(汉克尔函数)

汉克尔函数在应用数学中也是很重要的,在此顺便对零阶和一阶的汉克尔函数略作介绍,详细的讲述可参看文献[23], [21], [30].

有些学者在研究中使用  $\frac{2}{\pi} K_0(x)$  和  $-\frac{2}{\pi} K_1(x)$  置换我们在前节中介绍的  $K_0(x)$  和  $K_1(x)$ , 显然,  $\frac{2}{\pi} K_0(x)$  和  $-\frac{2}{\pi} K_1(x)$  仍然是下列方程的相应解,这些方程是



$$\left. \begin{aligned} xy'' + y' - xy &= 0, \\ y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.146)$$

同时设令

$$\frac{2}{\pi} K_0(x) = iH_0^{(1)}(ix), \quad (6.147)$$

$$- \frac{2}{\pi} K_1(x) = H_1^{(1)}(ix). \quad (6.148)$$

在(6.147)和(6.148)等式之右的表达式，当自变量为 $ix$ 时是实数，此处的 $x$ 本身也是实数，于是方程(6.145)的积分结果不仅可以写为(6.136)的形式，也可表示为

$$y = C_1 J_0(ix) + C_2 i H_0^{(1)}(ix). \quad (6.149)$$

对  $H_0^{(1)}(x)$  和  $H_0^{(2)}(x)$  作如下定义：

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iY_0(x), \quad (6.150)$$

$$H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - iY_0(x). \quad (6.151)$$

式中  $J_0(x)$ ,  $Y_0(x)$  就是我们介绍过的一般贝塞尔函数。可以推知  $H_0^{(1)}(x)$  和  $H_0^{(2)}(x)$  是方程

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

的特解。它们被称为零阶汉克尔函数或零阶第三类贝塞尔函数。

根据  $Y_0(x)$  的表达式(6.27)和等式(6.120)可以从(6.150)式推出。

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(ix) &= J_0(ix) + iY_0(ix) \\ &= J_0(x) + i \frac{2}{\pi} J_0(ix) \left( \ln \frac{ix}{2} + C \right) \\ &\quad + i \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2 i^2}{2^2} - \frac{x^4 i^4}{2^2 \cdot 4^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^6 i^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots \right]. \end{aligned} \quad (6.152)$$

又因

$$\ln \frac{x^i}{2} = \ln \frac{x}{2} + \ln i = \ln \frac{x}{2} + \frac{\pi i}{2}$$

$$i^2 = -1, \quad i^4 = 1, \quad i^6 = -1, \dots$$

故有

$$\begin{aligned} iH_0^{(1)}(ix) &= iI_0(x) + i^2 \frac{2}{\pi} I_0(x) \left[ \frac{\pi i}{2} + \ln \frac{x}{2} + C \right] \\ &\quad + i^2 \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) - \dots \right] \\ &= -\frac{2}{\pi} I_0(x) \left( \ln \frac{x}{2} + C \right) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \dots \right] \\ &= \frac{2}{\pi} K_0(x), \end{aligned}$$

即

$$iH_0^{(1)}(ix) = \frac{2}{\pi} K_0(x). \quad (6.153)$$

而公式(6.139)表明  $K_0'(x) = -K_1(x)$ ，故由此通过(6.153)式的关系式可推知

$$H_0^{(1)'}(x) = -H_1^{(1)}(x) \quad (6.154)$$

再将(6.147)式微分可得

$$\frac{2}{\pi} \frac{dK_0(x)}{dx} = i \frac{dH_0^{(1)}(x)}{dx} = i^2 H_0^{(1)}(ix) = -H_0^{(1)'}(ix)$$

进一步由(6.139)和(6.154)式得

$$-\frac{2}{\pi} K_1(x) = H_1^{(1)}(ix). \quad (6.155)$$

若将(6.150)与(6.151)相加,则得

$$H_0^{(1)}(x) + H_0^{(2)}(x) = 2J_0(x), \quad (6.156)$$

由此

$$\begin{aligned} H_0^{(2)}(ix) &= 2J_0(ix) - H_0^{(1)}(ix) \\ &= 2I_0(x) - H_0^{(1)}(ix). \end{aligned} \quad (6.157)$$

从而表明  $H_0^{(2)}(ix)$  可以由  $I_0(x)$  和  $H_0^{(1)}(ix)$  而求得, 因此不必一定编造  $H_0^{(2)}(ix)$  函数表.

一阶汉克尔函数也可类似于(6.150)和(6.151)式来定义

$$H_1^{(1)}(x) = J_1(x) + iY_1(x), \quad (6.158)$$

$$H_1^{(2)}(x) = J_1(x) - iY_1(x). \quad (6.159)$$

它们显然也是方程

$$Y'' + \frac{1}{x} Y' - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) Y = 0$$

的解.

从(6.148), (6.158)和(6.159)式也可以得出

$$H_1^{(1)}(x) + H_1^{(2)}(x) = 2J_1(x) \quad (6.160)$$

或

$$H_1^{(2)}(x) = 2J_1(x) - H_1^{(1)}(x), \quad (6.161)$$

由此

$$\begin{aligned} H_1^{(2)}(ix) &= 2J_1(ix) - H_1^{(1)}(ix) \\ &= 2iI_1(x) - H_1^{(1)}(ix). \end{aligned} \quad (6.162)$$

因此,  $H_1^{(2)}(ix)$  亦无需造表而可间接算出.

## 十四、关于贝塞尔函数表

贝塞尔函数在有些文献中称为柱函数. 因为它能被用来解决物理和工程技术领域中的许多课题, 加上使用方便, 所以造表甚多, 有了这些贝塞尔函数表, 需要时即可查用, 从而可以大大减少计算的工作量. 贝塞尔函数表在一般讲述特殊函数的书籍和有关贝塞尔函数的专著中均有列举, 如文献[24], [26]等, 其中文献[32]比较齐全和精确, 它列举了各种贝塞尔函数, 在其引言部分介绍了表格内容和查用方法. 另一本能较好满足实用需要的是文献[33], 它包含着几种主要的特殊函数的图表, 其中第‘XIII’部分是贝塞尔函数表.

利用这些函数表不仅可以直接查用, 而且可以根据需要查造

针对某些专门课题而派生的包括贝塞尔函数的图表，象我们将要在下面的一些章节中进行的那样，这种工作对于解决有关科技问题也是很有用处的。

随着电子计算机的普遍采用，有时也可以根据本章介绍的有关公式，或者利用有关贝塞尔函数子程序或者直接编拟程序计算贝塞尔函数，有关这方面的知识可参阅有关文献[34]。

## 第七章 无上下补给时均质含水层中 “割离井”的定降深非稳定渗流计算

### 一、“割离井”及渗流计算“割离井法”的概念

所谓“割离井”是指处于不透水或隔水边界中的孤井。从渗流原理看，这种隔水边界可能是：(1)水文地质条件中实际存在的；(2)从渗流力学分析抽象认定的。

上述由水文地质条件形成的“割离井”容易理解，今就第二种情况略作介绍。

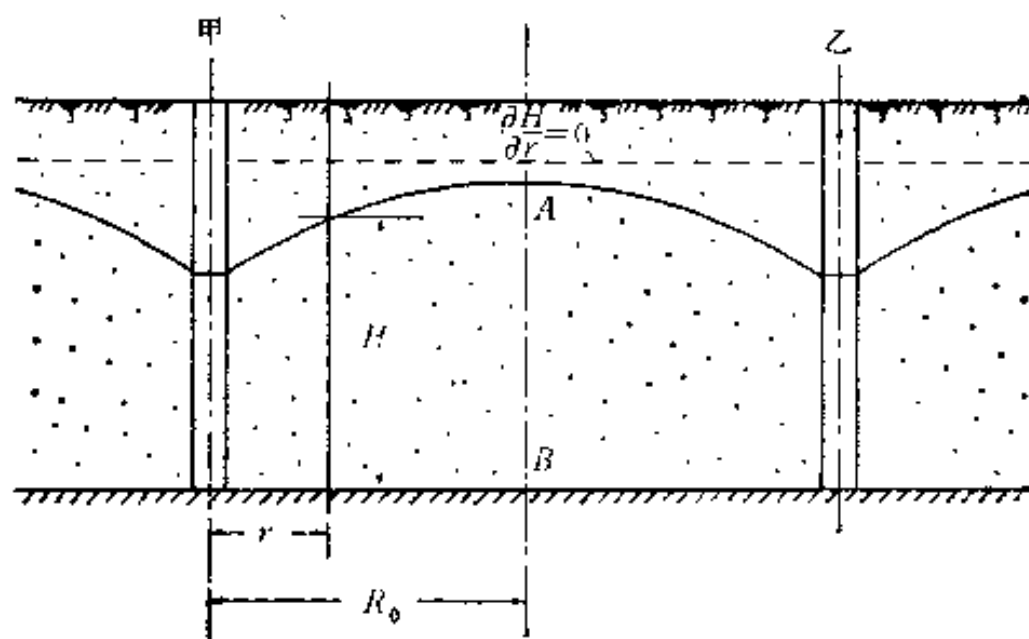


图 7-1 干扰井工作示意图

如图 7-1 所示，是从均布井群中分离出的两个相邻的井，随着工作时间的延续，浸润漏斗不断伸展，直使相邻井的水位降落曲线相接，并在相接处出现分水岭，如图 7-1 所示，在分水岭断面 AB 两侧的水，只流入各自的井中而不互相穿越。在 AB 断面处——亦即在分水岭上水力坡度为零，用数学形式表达则为

$$\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0, \quad (7.1)$$

式中  $H$  为水位;  $r$  是水位为  $H$  的断面距井轴的距离;  $R_0$  被称为取水半径.

由于流量等于流速  $V$  与过水断面  $F$  的乘积, 亦即

$$Q = F \cdot V = FK \frac{\partial H}{\partial r},$$

在上式中若  $\frac{\partial H}{\partial r} = 0$ , 则  $Q = 0$ , 也就是说没有水流从断面  $AB$  正向穿过, 因而  $AB$  断面在这种情况下就象一道隔水边界一样, 我们可称其为“准隔水边界”.

由此可以推想, 如果在井甲的周围均匀分布着工作条件相同的许多井, 则当井群运行时, 这个被我们考查的井甲便可视为一个处于半径为  $R_0$  的封闭周界中的单井的工作状况, 而且具有如 (7.1) 式所示的边界条件.

顺便指出, 基于上述分析, 便可把井孔互相干扰的井群的渗流计算, 简化为针对一个处于隔水周界中的典型井的单井计算, 而该井所占据的范围的边界可转化为圆形边界, 其转化圆的半径亦即取水半径  $R_0$  为:

对方形布井

$$R_0 = \sqrt{\frac{L^2}{\pi}} = 0.564L, \quad (7.2)$$

对梅花形布井

$$R_0 = \sqrt{\frac{0.866L^2}{\pi}} = 0.525L. \quad (7.3)$$

式中  $L$  为井距.

因而井群规划中的水文地质计算, 便归结为解算不同起始条件下位于上述圆筒形不透水边界中的单井的渗流课题.

这种从井群中有条件的分离出一个“割离井”作为典型井进行单井的非稳定流计算, 并从事设计井群的办法是笔者 1964 年提

出,并称其为“割离井法”。

由于潜水含水层存在着明显的滞流效应<sup>1)</sup>,从而在潜水的非稳定渗流计算过程中,可以近似的设取边界,这样便又扩大了“割离井法”的使用范围。

## 二、水位降落曲线计算通式的推导

如图 7-2 所示,为了推导上述“割离井”的水位降落曲线计算公式,可在相应的起始条件和边界条件下直接求解渗流基本方程 (2.19),即

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right], \quad (7.4)$$

起始条件和边界条件为

$$\left. \begin{aligned} H(r, 0) &= f_0(r), & a \\ \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=R_0} &= 0, & b \\ H(r_0, t) &= h_0, & c \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

式中符号已在第二章作过介绍,即如图 7-2 所示

$H = H(r, t)$ ——抽水  $t$  时刻距井  $r$  处之水位(米);

$t$ ——抽水时间(日);

$r$ ——距井轴的距离(米);

$r_0$ ——井的半径(米);

$R_0$ ——井的取水半径(米);

$h_0$ ——进井水位,在忽略水跃值  $\Delta h$  时即为井的动水位,在本课题中为某常数(米);

---

1) 所谓潜水含水层的滞流作用是指在渗流场某处发生水位压力变化时由于地层的阻滞,使这种变化的影响不能在瞬间传递各处,而需经一定时间方能抵达边界。在未波及到边界之前,边界也不对渗流变化施加明显影响。

有关的详细论述请参见:李佩成,1982年,含水层的滞流作用与边界条件的处理,《地下水资源评价理论与方法的研究》,地质矿产部水文地质工程地质研究所选编,地质出版社出版。

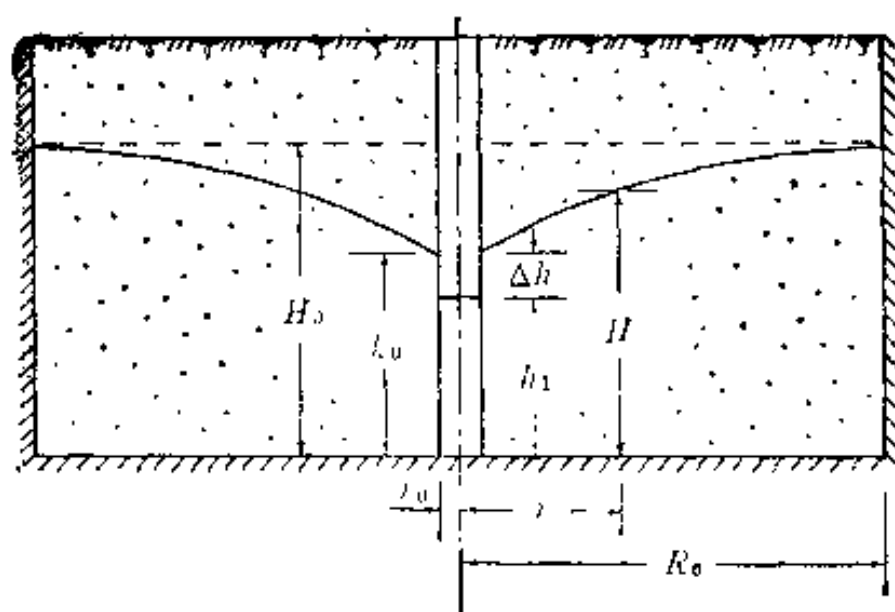


图 7-2 隔水周界中的水井二作示意图

$a = \frac{KH_p}{\mu}$ ——从第二章已知  $a$  被称为水位传导系数 (米<sup>2</sup>/日);

$K$ ——渗透系数 (米/日);

$\mu$ ——给水度, 无量纲;

$H_p$ ——计算时段内的平均含水层厚度, 在本章的计算中可取

$$H_p = \frac{H_0 + h_0}{2};$$

而  $H_0$ ——起始含水层厚度 (米).

为了推导方便, 参看图 7-2, 令

$$H = \bar{H} + h_0. \quad (7.6)$$

再将 (7.6) 代入 (7.4) 而得新的偏微分方程

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{H}}{\partial r} \right), \quad (7.7)$$

相应的起始条件及边界条件变为

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}(r, 0) &= f_0(r) - h_0 = f(r), & a \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} &= 0, & b \\ \bar{H}(r_0, t) &= 0, & c \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$



在本文的公式中如果不再说明, 则  $H, \bar{H}$  分别代表  $H(r, t)$  及  $\bar{H}(r, t)$ .

对(7.7)式使用第三章中介绍过的傅里叶分离变量法, 即令

$$\bar{H}(r, t) = h(r)T(t).$$

或

$$\bar{H}(r, t) = hT. \quad (7.9)$$

式中  $h$  即代表  $h(r)$ , 而  $T$  代表  $T(t)$ . 将(7.9)代入(7.7)式分离变量而得

$$\frac{T}{aT} = \frac{h'' + \frac{1}{r}h'}{h} = -\lambda^2, \quad (7.10)^{1)}$$

由此得

$$T = Ce^{-\lambda^2 at}. \quad (7.11)$$

对  $h(r)$  而言, 由(7.10)式得方程

$$h'' + \frac{1}{r}h' + \lambda^2 h = 0. \quad (7.12)$$

该式便是第六章中介绍过的“零阶贝塞尔方程”, 其特解可用公式(6.29)来表示, 即

$$h = AJ_0(\lambda r) + BY_0(\lambda r). \quad (7.13)$$

将(7.13)式代入(7.9)式则得

$$\bar{H}(r, t) = Ce^{-\lambda^2 at} [AJ_0(\lambda r) + BY_0(\lambda r)]. \quad (7.14)$$

利用边界条件 (7.8-b, c), 并回顾(6.33), (6.37)式, 则有

$$\left. \begin{aligned} AJ_1(\lambda r_0) + BY_1(\lambda r_0) &= 0, \\ AJ_1(\lambda R_0) + BY_1(\lambda R_0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

在(7.15)式中如若  $A \neq B \neq 0$ , 则行列式

$$\begin{vmatrix} J_0(\lambda r_0) & Y_0(\lambda r_0) \\ J_1(\lambda R_0) & Y_1(\lambda R_0) \end{vmatrix} = 0, \quad (7.16)$$

1) 此处令其比值为“ $-\lambda^2$ ”是为了保证其比值始终为负值, 参看(7.11)式, 这种必须的保证, 系由渗流的机理分析而得, 因为我们研究的是非稳定渗流, “ $\lambda$ ”值不能为零, 否则  $T = C$  而违背题意。若其比值为正值, 则表示水位将随时间而无限增长, 这亦与渗流的机理不合, 故而此值取“ $-\lambda^2$ ”。

从而求得确定特征值(固有值)  $\lambda$  的方程式

$$J_0(\lambda r_0)Y_1(\lambda R_0) - Y_0(\lambda r_0)J_1(\lambda R_0) = 0. \quad (7.17)$$

该方程具有无穷多个正实根  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ .

从(7.17)式看出, 可选取

$$\left. \begin{aligned} A &= Y_1(\lambda R_0), \\ B &= -J_1(\lambda R_0), \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

满足方程组(7.15)的条件.

将(7.18)式表示之  $A, B$  代入(7.14), 则有

$$\begin{aligned} \bar{H}(r, t) &= C e^{-\lambda^2 a t} h(\lambda r) \\ &= C e^{-\lambda^2 a t} [J_0(\lambda r)Y_1(\lambda R_0) - Y_0(\lambda r)J_1(\lambda R_0)], \end{aligned} \quad (7.19)$$

再令

$$h(\lambda r) = J_0(\lambda r)Y_1(\lambda R_0) - Y_0(\lambda r)J_1(\lambda R_0), \quad (7.20)$$

且由(7.17)知

$$h(\lambda r_0) = J_0(\lambda r_0)Y_1(\lambda R_0) - Y_0(\lambda r_0)J_1(\lambda R_0) = 0. \quad (7.21)$$

为了确定常数  $C$  值, 可对(7.19)式使用起始条件 (7.8-a), 由此得

$$f(r) = C h(\lambda r),$$

$$C = \frac{f(r)}{h(\lambda r)}.$$

对该式的分子分母同乘以  $r h(\lambda r)$ , 并从  $r_0$  到  $R_0$  进行积分, 则

$$C = \frac{\int_{r_0}^{R_0} r f(r) h(\lambda r) dr}{\int_{r_0}^{R_0} r h^2(\lambda r) dr}. \quad (7.22)$$

现在我们来研究分母的积分结果, 并顺便补充一些贝塞尔函数的知识.

回顾在第六章第六节及第九节进行的工作, 并参阅有关文献 [35], [36], 知

$$\int_{r_0}^{R_0} r h^2(\lambda r) dr = \frac{1}{2} \left\{ r^2 h^2(\lambda r) + \frac{1}{\lambda^2} \left[ r \frac{dh(\lambda r)}{dr} \right]^2 \right\}_{r_0}^{R_0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [r^2 h^2(\lambda r)]_{r_0}^{R_0} \\
&+ \frac{1}{2\lambda^2} \left\{ \left[ r \frac{dh(\lambda r)}{dr} \right]^2 \right\}_{r_0}^{R_0}, \quad (7.23)
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
r \left( \frac{dh(\lambda r)}{dr} \right)_{r=R_0} &= \lambda R_0 \left[ Y_1(\lambda R_0) \frac{d}{d(\lambda r)} J_0(\lambda r) \right. \\
&\quad \left. - J_1(\lambda R_0) \frac{d}{d(\lambda r)} Y_0(\lambda r) \right] \\
&= \lambda R_0 [ -Y_1(\lambda R_0) J_1(\lambda R_0) \\
&\quad + J_1(\lambda R_0) Y_1(\lambda R_0) ] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

亦即

$$\left. \begin{aligned} r \left( \frac{dh(\lambda r)}{dr} \right)_{r=R_0} &= 0, \\ \frac{dh(\lambda r)}{dr} \Big|_{r=R_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

或即

又因

$$\frac{dh(\lambda r)}{dr} = -\lambda h_1(\lambda r), \quad (7.25)$$

式中

$$h_1(\lambda r) = J_1(\lambda r) Y_1(\lambda R_0) - Y_1(\lambda r) J_1(\lambda R_0),$$

故

$$h_1(\lambda R_0) = 0. \quad (7.26)$$

而

$$\begin{aligned}
r \left( \frac{dh(\lambda r)}{dr} \right)_{r=r_0} &= \lambda r_0 [ J_1(\lambda R_0) Y_1(\lambda r_0) \\
&\quad - J_1(\lambda r_0) Y_1(\lambda R_0) ], \quad (7.27)
\end{aligned}$$

再令

$$\frac{J_0(\lambda r)}{J_1(\lambda R_0)} = \frac{Y_0(\lambda r_0)}{Y_1(\lambda R_0)} = \rho. \quad (7.28)$$

则

$$\rho \left( r \frac{dh(\lambda r)}{dr} \right)_{r=r_0} = \lambda r_0 \left[ J_1(\lambda R_0) Y_1(\lambda r_0) \frac{J_0(\lambda r_0)}{J_1(\lambda R_0)} - Y_1(\lambda R_0) J_1(\lambda r_0) \frac{Y_0(\lambda r_0)}{Y_1(\lambda R_0)} \right],$$

即

$$\rho \left( r \frac{dh(\lambda r)}{dr} \right)_{r=r_0} = \lambda r_0 [J_0(\lambda r_0) Y_1(\lambda r_0) - J_1(\lambda r_0) Y_0(\lambda r_0)] . \quad (7.29)$$

由(6.77)式知

$$\left. \begin{aligned} J_0(\lambda r) Y_1(\lambda r) - J_1(\lambda r) Y_0(\lambda r) &= -\frac{2}{\pi \lambda r}, \\ J_0(\lambda r_0) Y_1(\lambda r_0) - J_1(\lambda r_0) Y_0(\lambda r_0) &= -\frac{2}{\pi \lambda r_0}. \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

代(7.30)式之右入(7.29)式,则得

$$\rho \left( r \frac{dh(\lambda r)}{dr} \right)_{r=r_0} = -\frac{2}{\pi},$$

亦即

$$r \frac{dh(\lambda r)}{dr} \Big|_{r=r_0} = -\frac{2}{\rho \pi}, \quad (7.31)$$

故由(7.31)式及(7.25)式得

$$h_1(\lambda r_0) = \frac{2}{\rho \pi \lambda r_0}. \quad (7.32)$$

将(7.24)式,(7.31)式之右代入(7.23)式之中,得

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{R_0} r h^2(\lambda r) dr &= \frac{1}{2} [R_0^2 h^2(\lambda R_0) - r_0^2 h^2(\lambda r_0)] \\ &= \frac{1}{2 \lambda^2} \left[ -\frac{2}{\rho \pi} \right]^2, \end{aligned}$$

根据(7.28)式将  $\rho = \frac{J_0(\lambda r_0)}{J_1(\lambda R_0)}$  代进上式则

$$\int_{r_0}^{R_0} r h^2(\lambda r) dr = \frac{1}{2} [R_0^2 h^2(\lambda R_0) - r_0^2 h^2(\lambda r_0)]$$

$$- \left[ \frac{2}{\lambda^2 \pi^2} \times \frac{J_1^2(\lambda R_0)}{J_0^2(\lambda r_0)} \right]. \quad (7.33)$$

进而研究(7.33)式右端之前项,参看(7.30)式,知

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R_0^2 h^2(\lambda R_0) &= \frac{1}{2} R_0^2 [J_0(\lambda R_0) Y_1(\lambda R_0) - J_1(\lambda R_0) Y_0(\lambda R_0)]^2 \\ &= \frac{1}{2} R_0^2 \left[ -\frac{2}{\pi \lambda R_0} \right]^2 \\ &= \frac{2}{\pi^2 \lambda^2}, \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\frac{1}{2} r_0^2 h^2(\lambda r_0) = \frac{1}{2} r_0^2 [J_0(\lambda r_0) Y_1(\lambda R_0) - J_1(\lambda R_0) Y_0(\lambda r_0)]^2.$$

由(7.17)式知方括号中的值为零,所以

$$\frac{1}{2} r_0^2 h^2(\lambda r_0) = 0. \quad (7.35)$$

将所得(7.34)式、(7.35)式代入(7.33)式得

$$\int_{r_0}^{R_0} r h^2(\lambda r) dr = \frac{2}{\pi^2 \lambda^2} \left[ \frac{J_0^2(\lambda r_0)}{J_0^2(\lambda r_0)} - \frac{J_1^2(\lambda R_0)}{J_0^2(\lambda r_0)} \right], \quad (7.36)$$

再将(7.36)式代进(7.22)式,求得

$$C = \frac{\pi^2 \lambda^2}{2} \times \frac{J_0^2(\lambda r_0)}{J_0^2(\lambda r_0) - J_1^2(\lambda R_0)} \int_{r_0}^{R_0} r f(r) h(\lambda r) dr, \quad (7.37)$$

将C按(7.37)之表达式代进(7.19)式中,则得  $\bar{H}(r, t)$  之公式

$$\begin{aligned} \bar{H}(r, t) &= \frac{\pi^2 \lambda^2}{2} \times \frac{J_0^2(\lambda r_0) h(\lambda r)}{J_0^2(\lambda r_0) - J_1^2(\lambda R_0)} e^{-\lambda^2 a t} \\ &\quad \cdot \int_{r_0}^{R_0} r f(r) h(\lambda r) dr. \end{aligned} \quad (7.38)$$

现在我们将(7.38)式改写为级数形式——亦即用解的线性组合表示所求课题的完全解,则最后得计算水位  $H(r, t)$  的公式

$$\begin{aligned} \bar{H}(r, t) &= \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\quad \cdot \int_{r_0}^{R_0} r f(r) h(\lambda_n r) dr. \end{aligned} \quad (7.39)$$

回顾(7.6)式, 则得求解位于隔水周界均质含水层中完整井非稳定渗流水位计算通式

$$H(r, t) = h_0 + \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 s t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \cdot \int_{r_0}^{R_0} r f(r) h(\lambda_n r) dr. \quad (7.40)$$

### 三、起始水位呈水平时的水位计算公式

在求得通式(7.40)式之后, 进而研究一种常遇的情况, 即当抽水开始时刻地下水位呈水平时的水位计算公式。

在这种情况下, 可认定起始条件为

$$\left. \begin{aligned} H(r, 0) &= f_0(r) = H_0, \\ \bar{H}(r, 0) &= f(r) = H_0 - h_0 = S_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

或

用  $S_0$  置换(7.40)式中的  $f(r)$ , 则有

$$H(r, t) = h_0 + S_0 \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 s t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \cdot \int_{r_0}^{R_0} r h(\lambda_n r) dr. \quad (7.42)$$

参考公式(6.63)及文献[1]知

$$\int_{r_0}^{R_0} r h(\lambda_n r) dr = -\frac{1}{\lambda_n^2} \left[ r \frac{dh(\lambda_n r)}{dr} \right]_{r_0}^{R_0}. \quad (7.43)$$

回顾公式(7.24), (7.31); 并在(7.28)中若取

$$\rho = \frac{J_0(\lambda r_0)}{J_1(\lambda R_0)} \quad (7.44)$$

则

$$\int_{r_0}^{R_0} r h(\lambda_n r) dr = \frac{-2J_1(\lambda_n R_0)}{\lambda_n^2 \pi J_0(\lambda_n r_0)}, \quad (7.45)$$

将(7.45)式代进(7.42), 得  $f(r) = S_0$  时的水位计算式

$$H(r, t) = h_0 - \pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)}, \quad (7.46)$$

如果再令

$$\frac{r_0}{R_0} = x_0, \quad \frac{r}{R} = x, \quad \frac{a}{R_0^2} = \beta, \quad (7.47)$$

则方程(7.4)变为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (7.48)$$

相应的(7.46)式变为更实用的形式

$$H = h_0 - \pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n x_0) J_1(\lambda_n) h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta t}}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)}. \quad (7.49)$$

式中

$$h(\lambda_n x) = J_0(\lambda_n x) Y_1(\lambda_n) - J_1(\lambda_n) Y_0(\lambda_n x) \quad (7.50)$$

$\lambda_n$  值可由(7.51)式

$$J_0(\lambda_n x_0) Y_1(\lambda_n) - Y_0(\lambda_n x_0) J_1(\lambda_n) = 0 \quad (7.51)$$

求出。

## 四、井的出水量计算公式

在生产实践中,除了需要把握地下水的水位变化之外,常常还需要控制和预测井孔涌水量的大小及变化,下面我们对此加以研究。

就某一时刻而言,根据达西流量公式,井的涌水量可用下式表示:

$$Q = 2\pi K h_0 r_0 \left( \frac{\partial H}{\partial r} \right)_{r=r_0}, \quad (7.52)$$

根据(7.46)式,  $\frac{\partial H}{\partial r}$  可表示为

$$\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ h_0 - \pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \right\}_{r=r_0}$$

$$= -\pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \frac{\partial h(\lambda_n r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0}, \quad (7.53)$$

由公式(7.31)和(7.28)知

$$\frac{\partial h(\lambda_n r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\frac{2}{\rho \pi r_0} = -\frac{2J_1(\lambda_n R_0)}{\pi r_0 J_0(\lambda_n r_0)}. \quad (7.54)$$

将(7.54)式代入(7.53)式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= -\pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\quad \cdot \frac{-2J_1(\lambda_n R_0)}{\pi r_0 J_0(\lambda_n r_0)}, \end{aligned}$$

亦即

$$\frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{S_0}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1^2(\lambda_n R_0) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)}. \quad (7.55)$$

将(7.55)代入(7.52)式即得

$$Q = 2\pi K h_0 S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1^2(\lambda_n R_0) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)}. \quad (7.56)$$

如令  $\frac{r_0}{R_0} = x_0$ ,  $\frac{r}{R_0} = x$ ,  $\frac{a}{R_0^2} = \beta$ , 则得

$$Q = 4\pi K h_0 S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda_n) e^{-\lambda_n^2 \beta t}}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)}. \quad (7.57)$$

此式为计算涌水量的基本公式。

## 五、公式的简化, 计算图表的绘制与应用

### (一) 水位变化曲线计算公式的简化及其计算图表

由前节可知, 如果由(7.51)式求得 $\lambda_n$ 值, 再用(7.50)式算出 $h(\lambda_n, x)$ 便可代入(7.49)式中求解不同时期的水位变化曲线。从理



表 7-1 水位系数表

$X_0$	$\lambda_m$	$X$ $D_m$	$X = 0.01$	0.05	0.1	0.2	0.4	0.7	1.0
0.01	$\lambda_1 = 0.717$	$D_1 = +0.3786$	$D_1 h_1$	-0.1221	-0.1860	-0.2414	-0.2939	-0.3273	-0.3361
	$\lambda_2 = 4.290$	$D_2 = -0.1735$	$D_2 h_2$	-0.0298	-0.0418	-0.0492	-0.0370	+0.0049	+0.0258
	$\lambda_3 = 7.550$	$D_3 = +0.1510$	$D_3 h_3$	-0.0222	-0.0298	-0.0278	+0.0019	+0.0106	-0.0127
	$\lambda_4 = 10.770$	$D_4 = -0.1391$	$D_4 h_4$	-0.0187	-0.0233	-0.0137	+0.0126	-0.0097	+0.0082
0.005	0.667	+0.3500	-0.0437	-0.1557	-0.2035	-0.2523	-0.2976	-0.3266	-0.3340
	4.214	-0.1465	-0.0096	-0.0309	-0.0392	-0.0435	-0.0312	+0.0047	+0.0221
	7.446	+0.1235	-0.0070	-0.0220	-0.0264	-0.0278	+0.0026	-0.0085	-0.0105
	10.664	-0.1165	-0.0051	-0.0181	-0.0204	-0.0107	+0.0108	-0.0083	+0.0070
0.002	0.606	+0.3157	-0.0910	-0.1845	-0.2245	-0.2644	-0.3018	-0.3255	-0.3317
	4.146	-0.1216	-0.0152	-0.0300	-0.0355	-0.0375	-0.0258	+0.0044	+0.0187
	7.364	+0.1010	-0.0105	-0.0204	-0.0228	-0.0185	+0.0028	+0.0068	-0.0087
	10.560	-0.0932	-0.0083	-0.0163	-0.0168	-0.0079	+0.0088	-0.0067	+0.0056

0.001	0.569	+0.2957	-0.1175	-0.2010	-0.2362	-0.2711	-0.3042	-0.3249	-0.3303
	4.111	-0.1084	-0.0170	-0.0287	-0.0329	-0.0340	-0.0229	+0.0041	+0.0168
	7.320	+0.0889	-0.0115	-0.0190	-0.0206	-0.0162	+0.0028	+0.0060	-0.0077
	10.499	-0.0790	-0.0091	-0.0147	-0.0145	-0.0063	+0.0075	-0.0057	+0.0048
0.0003	0.516	+0.2660	-0.1536	-0.2216	-0.2508	-0.2796	-0.3067	-0.3237	-0.3282
	4.057	-0.0882	-0.0181	-0.0258	-0.0285	-0.0284	-0.0185	+0.0037	+0.0138
	7.257	+0.0710	-0.0117	-0.0164	-0.0171	-0.0128	+0.0026	+0.0047	-0.0062
	10.436	-0.0643	-0.0091	-0.0126	-0.0120	-0.0048	+0.0062	-0.0047	+0.0039
0.0001	0.486	+0.2498	-0.1721	-0.2326	-0.2585	-0.2840	-0.3080	-0.3232	-0.3271
	4.030	-0.0779	-0.0179	-0.0239	-0.0258	-0.0254	-0.0163	+0.0033	+0.0123
	7.230	+0.0632	-0.0114	-0.0151	-0.0154	-0.0114	+0.0024	+0.0038	-0.0056
	10.400	-0.0557	-0.0088	-0.0113	-0.0104	-0.0040	+0.0054	-0.0041	+0.0034

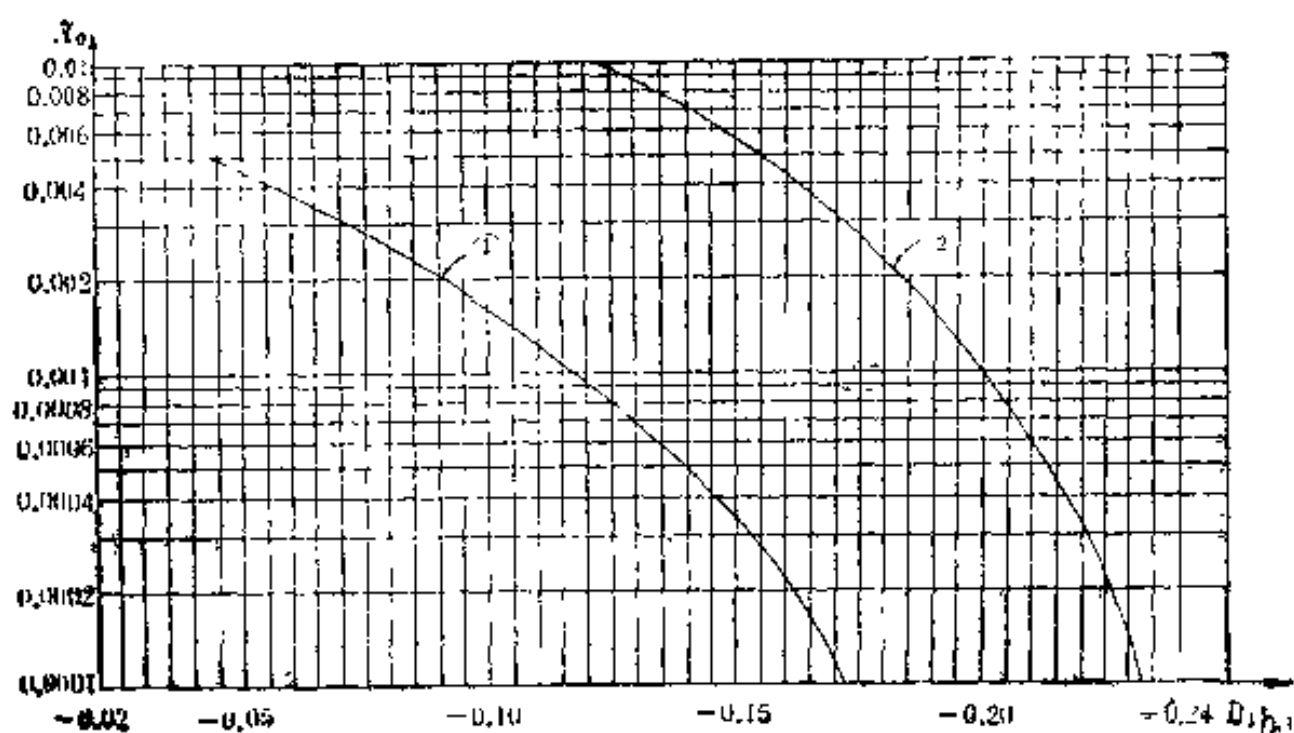


图 7-3-a<sub>1</sub>  $x_0-D_1h_1$  关系曲线

曲线所标的顺序号代表不同计算断面的曲线，其中

①  $x = \frac{r}{R_0} = 0.01$ ; ②  $x = \frac{r}{R_0} = 0.05$

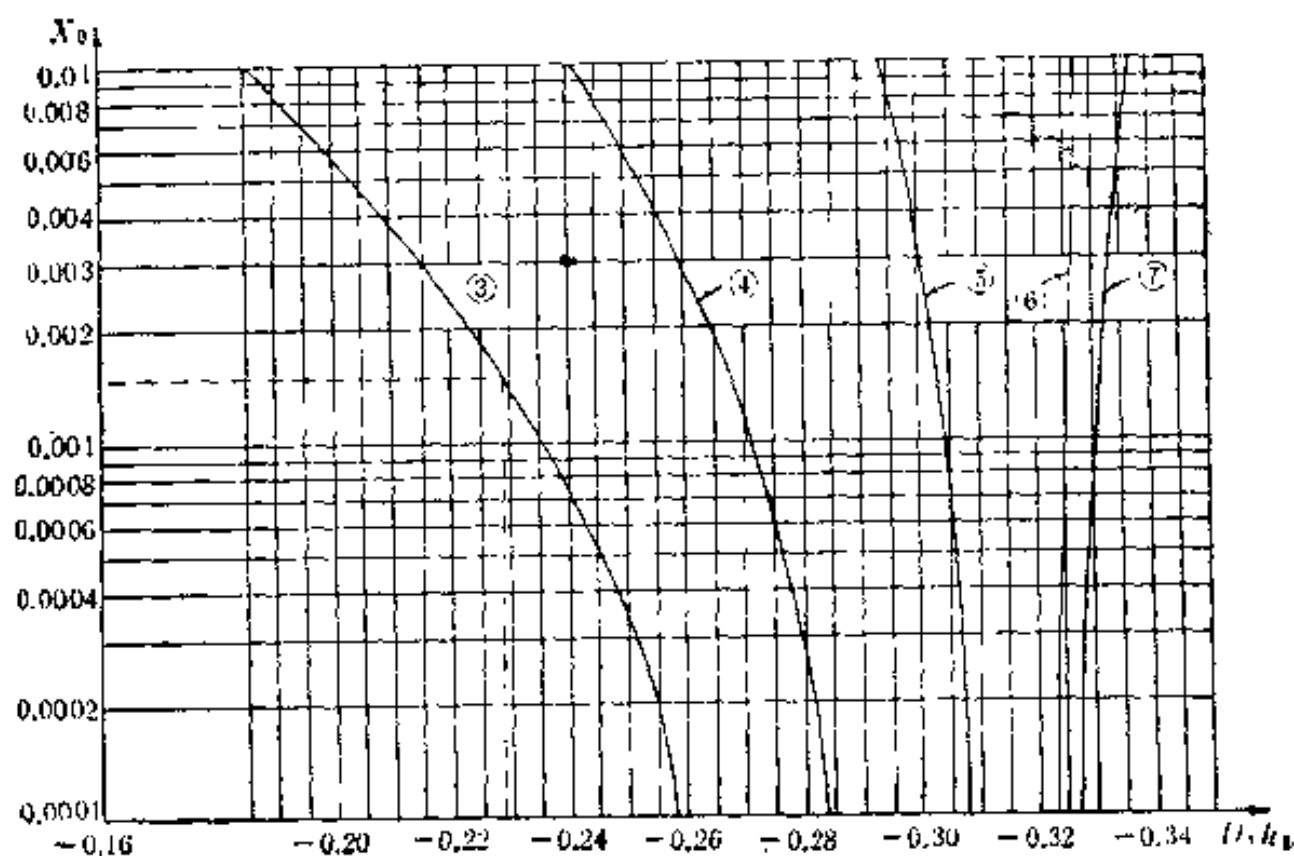


图 7-3-a<sub>2</sub>  $x_0-D_1h_1$  关系曲线

曲线所注顺序号代表不同计算断面的曲线

③  $x = \frac{r}{R_0} = 0.1$ ; ④  $x = 0.2$ ; ⑤  $x = 0.4$ ; ⑥  $x = 0.7$ ; ⑦  $x = 1.0$

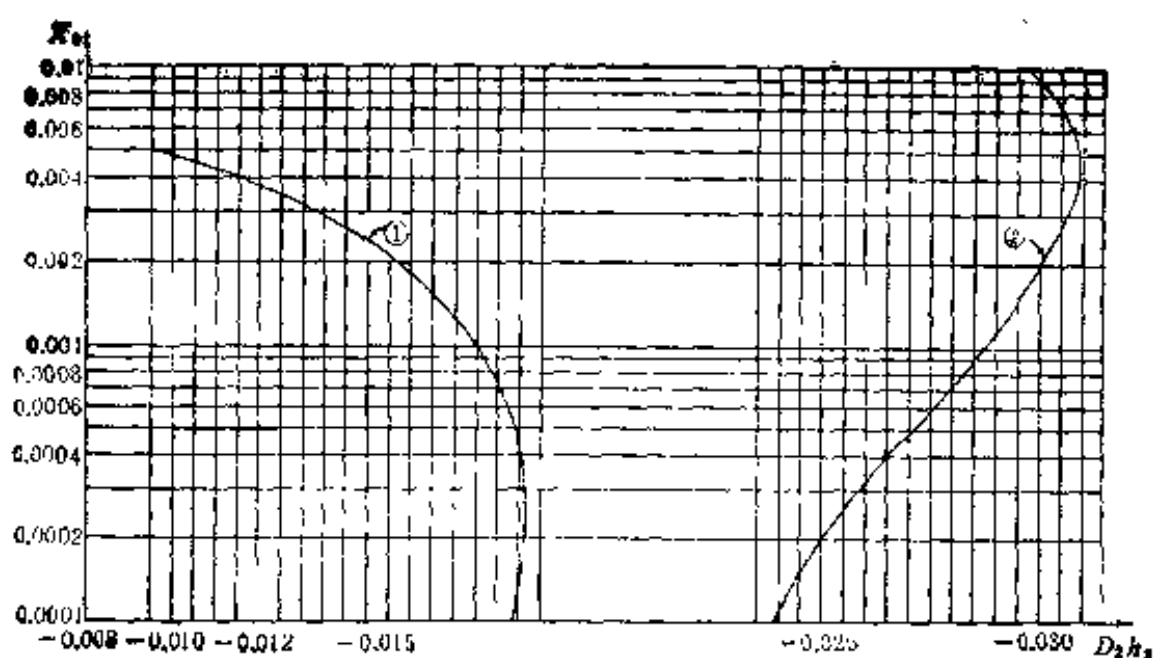


图 7-3-b<sub>1</sub>  $x_0-D_2 h_1$  关系曲线

①  $x = \frac{r}{R_0} = 0.01$ ; ②  $x = \frac{r}{R_0} = 0.05$

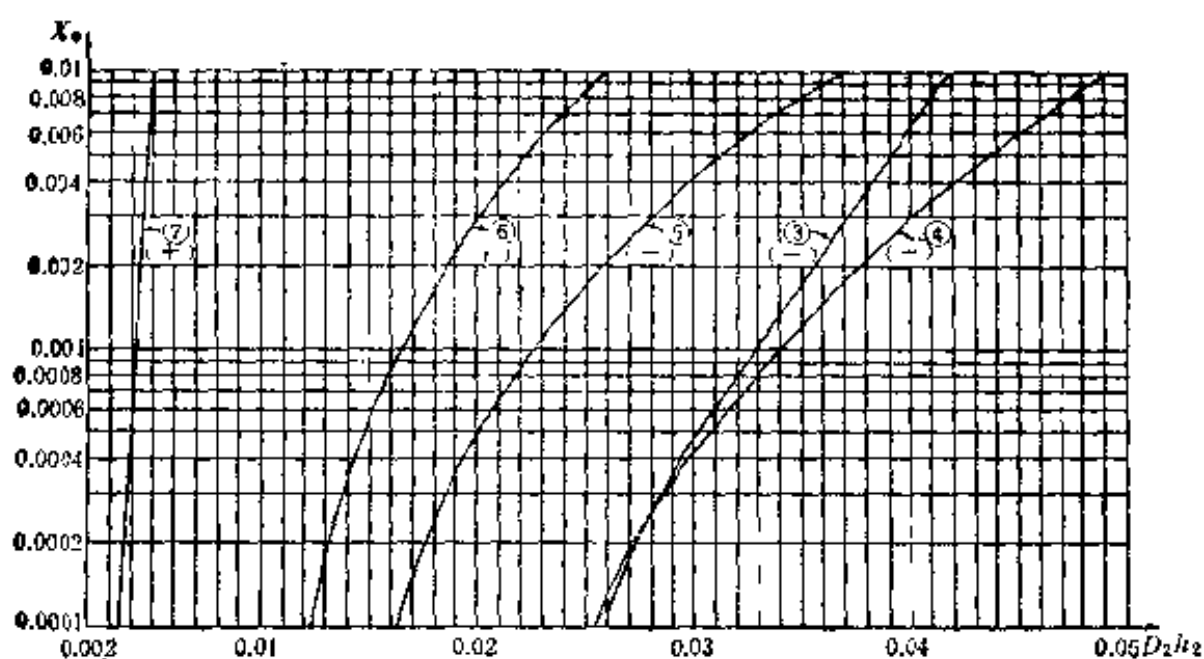


图 7-3-b<sub>2</sub>  $x_0-D_2 h_2$  关系曲线

③  $x = \frac{r}{R_0} = 0.1$ ; ④  $x = 0.2$ ; ⑤  $x = 0.4$  ⑥  $x = 0.7$  ⑦  $x = 1.0$

$D_2 h_2$  坐标所标数值为绝对值, 数值之取正负均在曲线上注明(+)或(-)

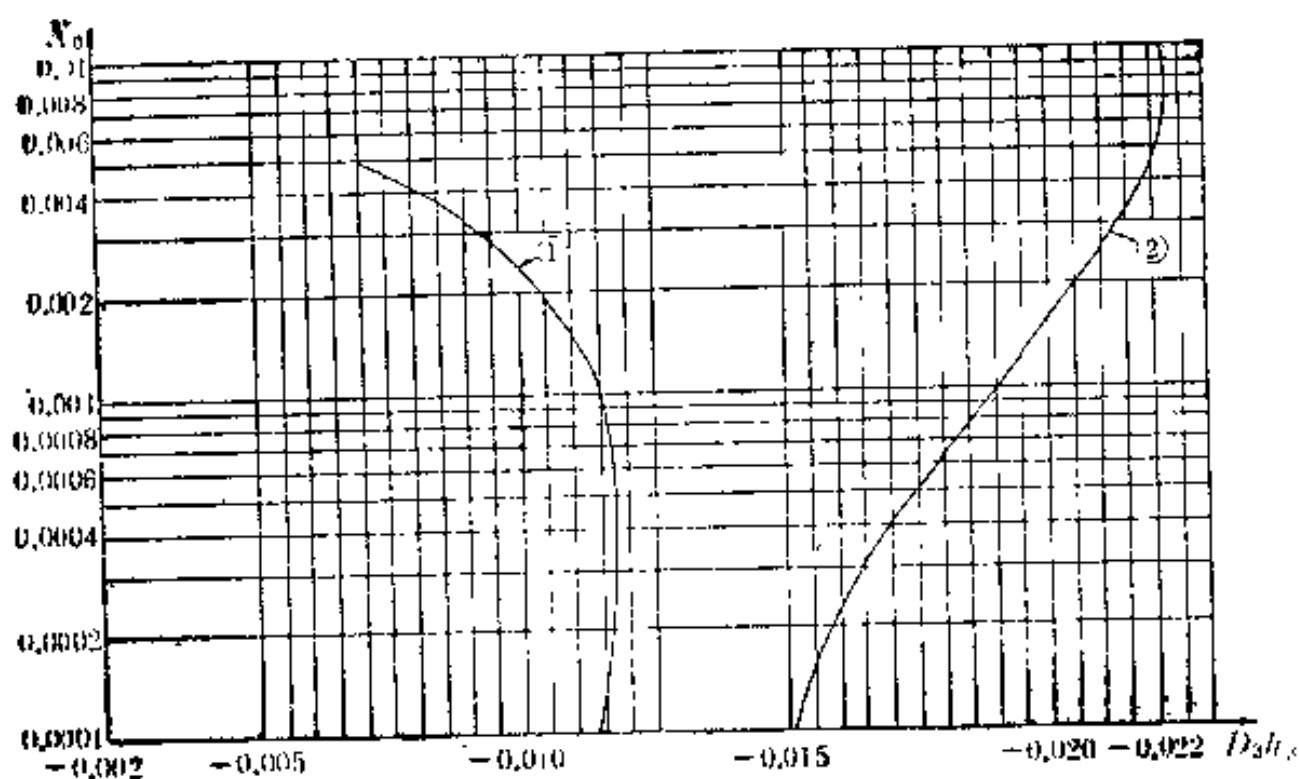


图 7-3-c<sub>1</sub>  $x_0-D_3h_3$  关系曲线

①  $x = 0.01$ ; ②  $x = 0.05$

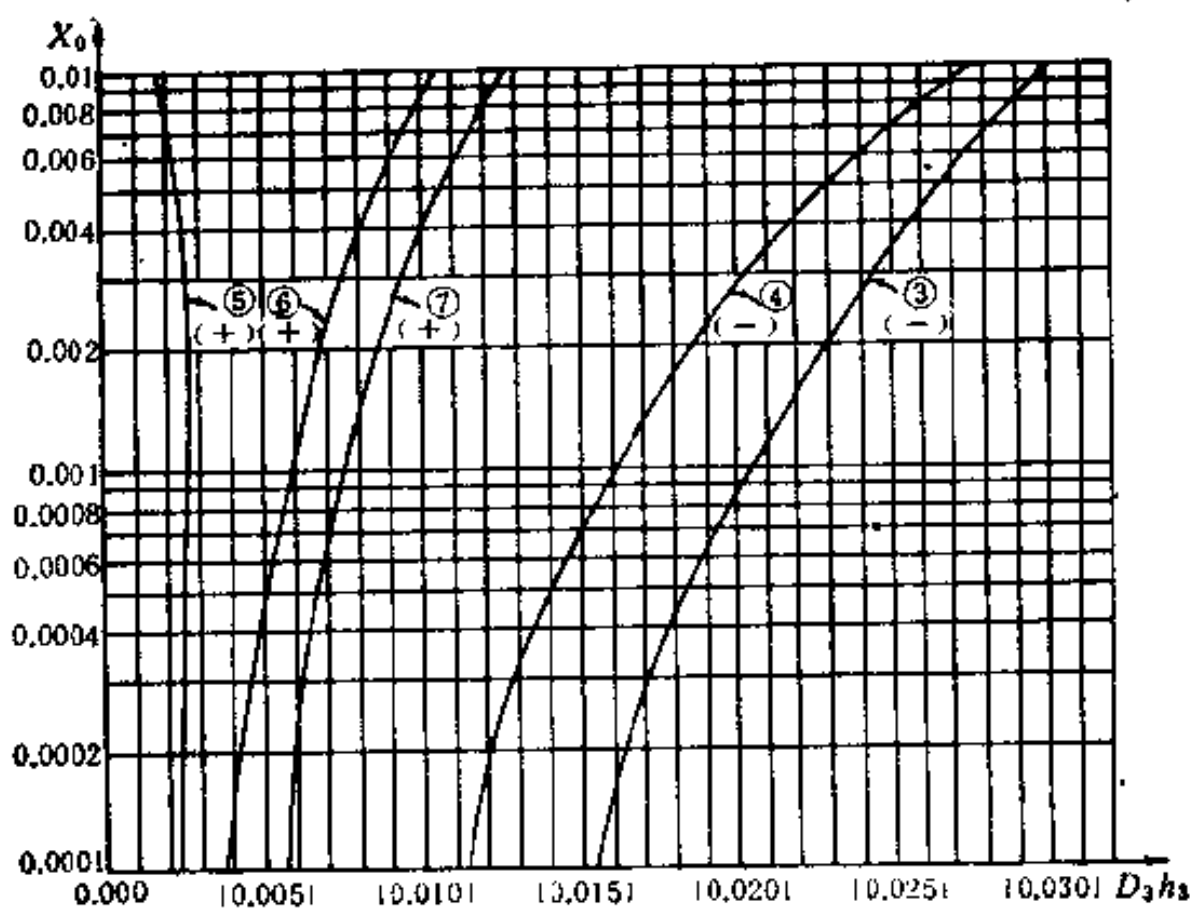


图 7-3-c<sub>2</sub>  $x_0-D_3h_3$  关系曲线

③  $x = 0.1$ ; ④  $x = 0.2$ ; ⑤  $x = 0.4$ ; ⑥  $x = 0.7$ ; ⑦  $x = 1.0$   
 $D_3h_3$  坐标所标数值为绝对值,数值取正、负均在曲线侧注明(+)或(-)

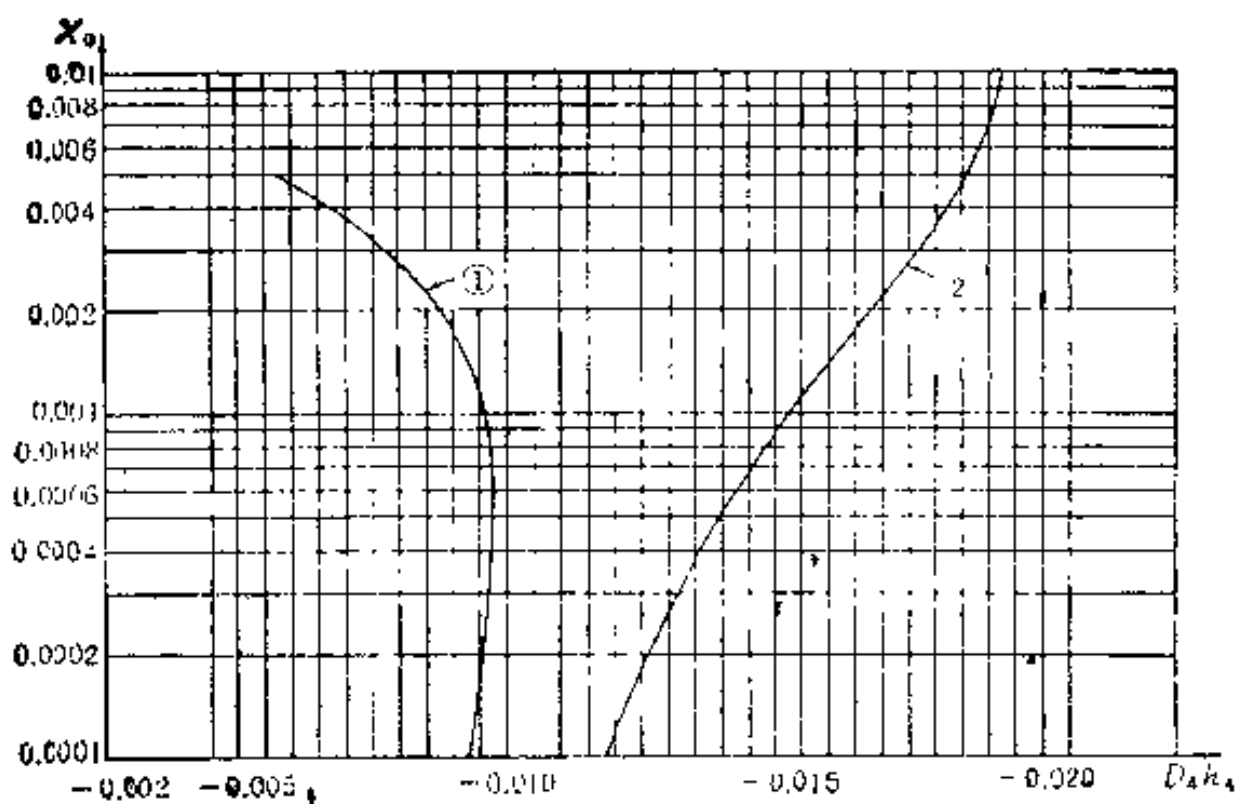


图 7-3-d<sub>1</sub>  $x_0-D_4h_4$  关系曲线

①  $x = 0.01$ ; ②  $x = 0.05$

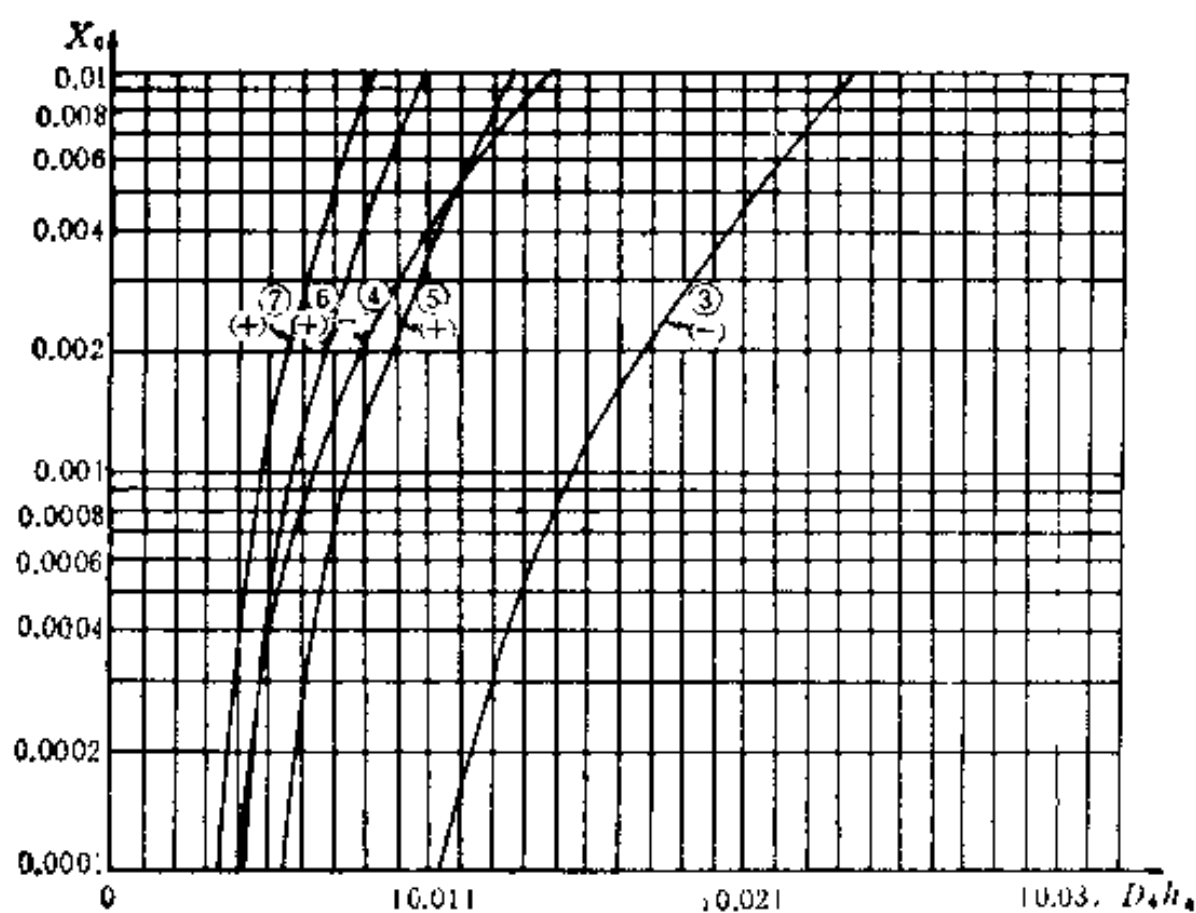


图 7-3-d<sub>2</sub>  $x_c-D_4h_4$  关系曲线

③  $x = 0.1$  ④  $x = 0.2$  ⑤  $x = 0.4$  ⑥  $x = 0.7$  ⑦  $x = 1.0$

$D_4h_4$  坐标所标之值为绝对值, 所查数值之正负均在曲线上注明(+)或(-)

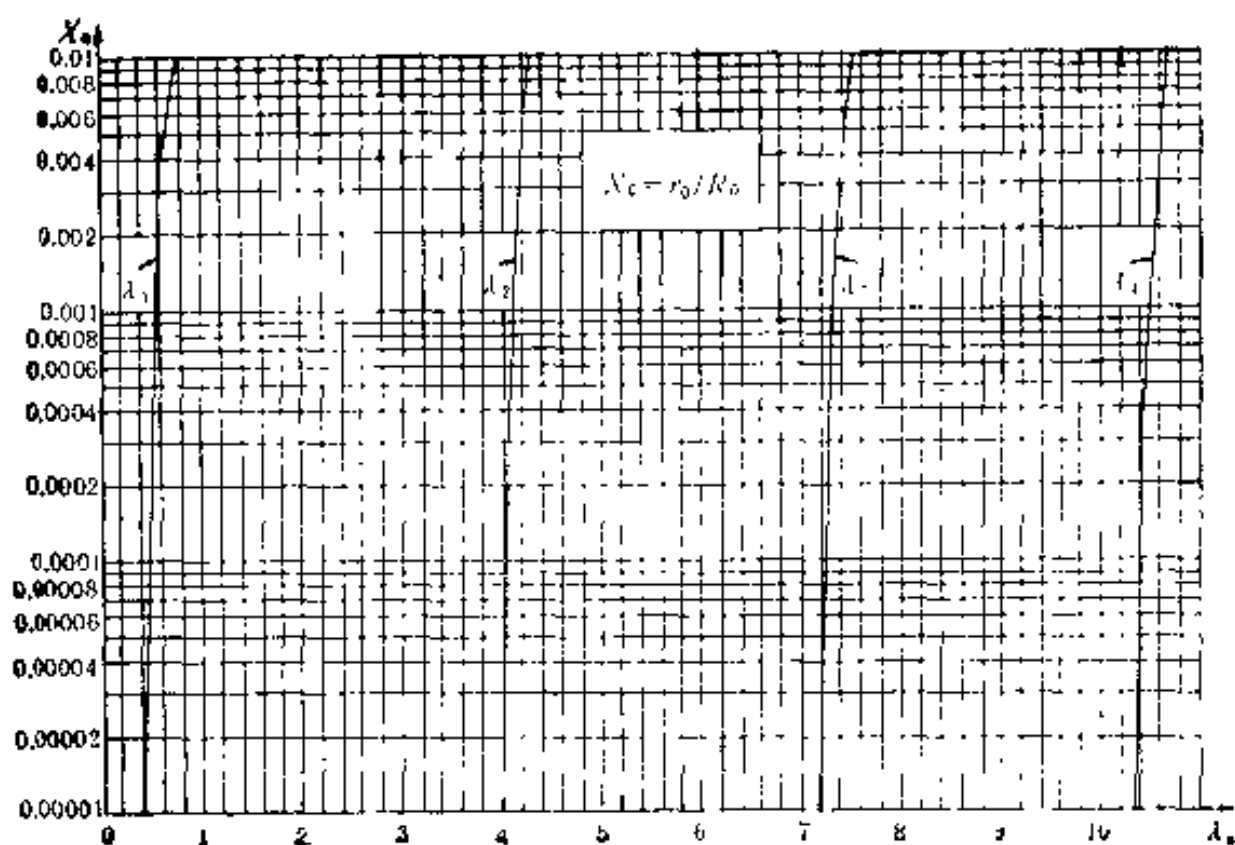


图 7-4  $\lambda_n - x_0$  关系曲线

论上讲这是可行的。但对实际工作者来说则觉得比较繁难。为此将需简化。

针对讨论的具体问题,由于贝塞尔函数收敛较快,因而就实际需要而言,只要取(7.49)式中级数的前四项——亦即相应于  $\lambda_1$  计算到  $\lambda_4$ ,便可满足精度要求。至于  $x$  值,只要算出有限个控制断面上的水位变化,便可作出水位曲线。

基于上述分析,将(7.49)式简化为

$$H = h_0 + \left\{ -\pi S_0 \sum_{n=1}^4 D_n h_n e^{-\lambda_n^2 \beta t} \right\}. \quad (7.58)$$

式中

$$D_n = \frac{J_0(\lambda_n x_0) J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)} \quad (7.59)$$

称为水位系数。

再取  $x = \frac{r}{R_0} = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.7$  及  $1.0$  个断面,

针对不同的  $x$  算出相应于  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  的  $D_n, h_n$  值, 列出辅助计算表——“水位系数表”(表 7-1)。并绘成水位系数  $D, h_n$  图(图 7-3.a—d) 以便查取那些表 7-1 中未能包含的  $D_n$  和  $h_n$  值。表中未包括的  $\lambda_n$  值可由图 7-4 中找出。

这样, 则在应用公式(7.58)进行计算时, 只需利用这些图表查出相应的  $D_n, h_n$  值代进其中便能很快的得出结果(参见算例 1)。

## (二) 涌水量公式之简化及其辅助计算图表

公式(7.57)对于实用者仍显复杂, 故亦根据前面说过的原理加以简化。在(7.57)式中取级数之前四项, 将其变为

$$Q = 4\pi K h_0 S_0 \sum_{n=1}^4 B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t} \quad (7.60)$$

式中

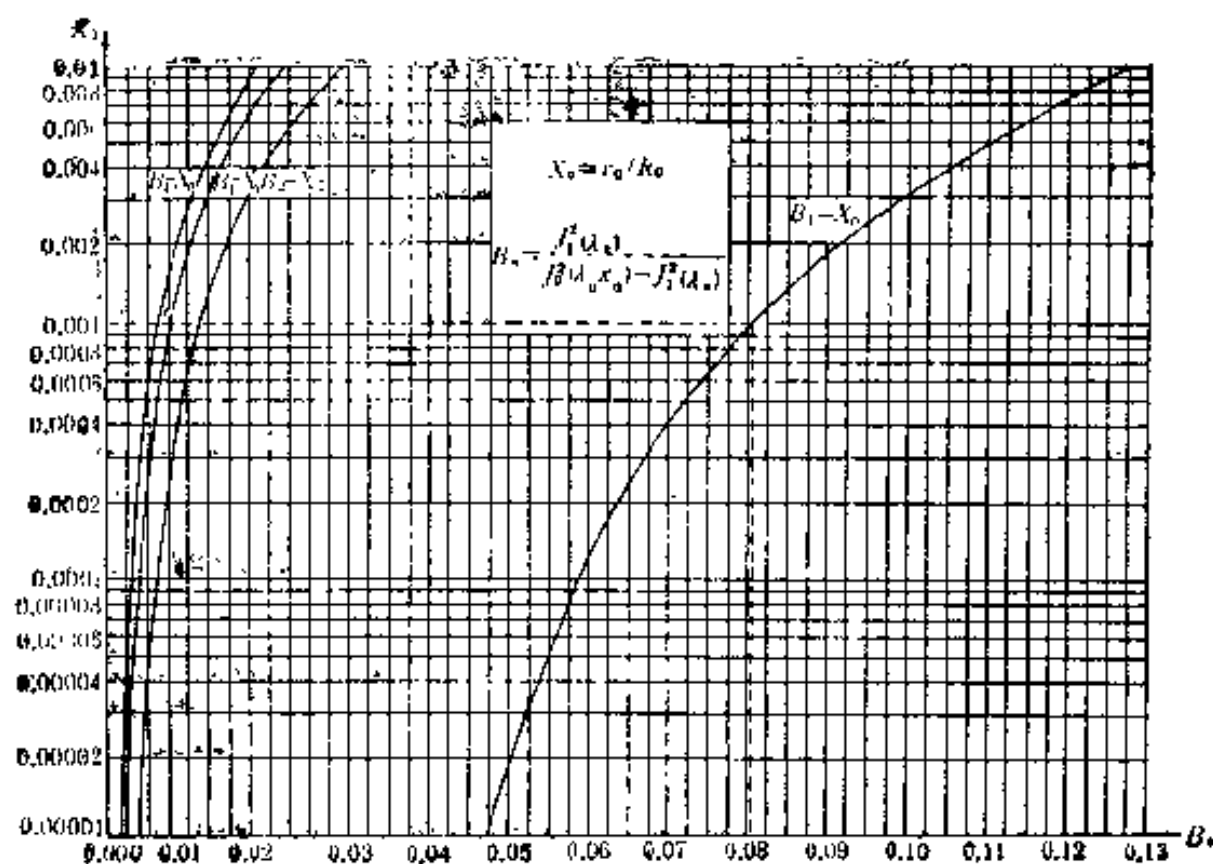


图 7-5  $B_n-x_0$  关系曲线图



$$B_s = \frac{J_1^2(\lambda_s)}{J_0^2(\lambda_s x_0) - J_1^2(\lambda_s)} \quad (7.61)$$

称为流量系数。

针对不同的 $x_0$ 值,我们又编绘出流量系数表(表 7-2)和流量系数图(图 7-5)借助这些图表,则可以相当简便的计算出井在任一时刻的涌水量,对此可参见算例 1。

表 7-2 流量系数表

$x_0$	$\lambda_s$	$B_s$	$x_0$	$\lambda_s$	$B_s$
0.2	1.42	0.4489	0.002	0.606	0.0913
	5.68	0.2755		4.15	0.0146
	9.69	0.2653		7.36	0.0101
	13.70	0.3240		10.56	0.0086
0.1	1.10	0.2871	0.001	0.569	0.0806
	4.97	0.1351		4.11	0.0116
	8.50	0.1222		7.32	0.0078
	12.10	0.1172		10.50	0.0063
0.01	0.717	0.1273	0.0001	0.486	0.0587
	4.29	0.0293		4.03	0.0063
	7.55	0.0223		7.23	0.0040
	10.77	0.0191		10.40	0.0031
0.005	0.667	0.1104	0.00001	0.431	0.0474
	4.21	0.0210		3.99	0.0039
	7.45	0.0150		7.18	0.0024
	10.66	0.0134		10.34	0.0017

## 六、算 例

圆形隔水边界的中心有一潜水完整井处于如下工作条件:

- (1) 含水层起始厚度  $H_0 = 20$  米,底板可看作水平的;
- (2) 含水层渗透系数  $K = 5$  米/日;
- (3) 给水度  $\mu = 0.1$ ;

- (4) 井的取水半径  $R_0 = 200$  米, 井的半径  $r_0 = 1$  米;  
 (5) 工作期间不计入渗;  
 (6) 井在吸程不变的情况下工作, 水位降深  $S_0 = 6$  米.

### (一) 水位曲线计算

需要预报井在工作过程中第 1, 2, 5, 10, 15, 20, 25, 30 各天的水位变化曲线.

应用公式(7.58)即

$$H = h_0 + \left[ -\pi S_0 \sum_{n=1}^4 D_n h_n (\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta t} \right].$$

由于  $\frac{r_0}{R_0} = \frac{1}{200} = 0.005$ , 因而  $D_n h_n$  可以直接从表 7-1 中查取.

在初步规划计算中, 我们取

$$H_p = \frac{H_0 + h_0}{2} = \frac{20 + 14}{2} = 17 \text{ 米},$$

作为平均含水层厚度;

则

$$\beta = \frac{a}{R_0^2} = \frac{KH_p}{\mu R_0^2} = \frac{5 \times 17}{0.1 \times 200^2} = 0.02125$$

下面借助表 7-1 分段进行计算.

1. 在  $x = 0.01$ , 即  $r = xR_0 = 0.01 \times 200 = 2$  米处的断面上

$$\therefore x_0 = \frac{r_0}{R_0} = \frac{1}{200} = 0.005, \text{ 故直接查表 7-1 得表 7-3.}$$

表 7-3  $D_n h_n$  计算表

$\lambda_1$	0.667	$D_1 h_1$	-0.0413
$\lambda_2$	4.214	$D_2 h_2$	-0.0096
$\lambda_3$	7.446	$D_3 h_3$	-0.0070
$\lambda_4$	10.664	$D_4 h_4$	-0.0051

将这些值代入(7.58)式求出

(1) 当  $t = 1$  日时,

$$\begin{aligned}
 H &= h_0 + \left[ -\pi S_0 \sum_{n=1}^4 D_n h_n(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \theta t} \right] \\
 &= 14 + \left\{ -3.1416 \times 6 \left[ \frac{-0.0413}{e^{0.667^2 \times 0.02125 \times 1}} + \frac{-0.0096}{e^{4.214^2 \times 0.02125 \times 1}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{-0.007}{e^{7.446^2 \times 0.02125 \times 1}} + \frac{-0.0051}{e^{10.664^2 \times 0.02125 \times 1}} \right] \right\} \\
 &= 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.0413}{(1.0095)^1} + \frac{-0.0096}{(1.458)^1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{-0.007}{(3.245)^1} + \frac{-0.0051}{(11.21)^1} \right] \right\} \\
 &= 14.944 \text{ 米;}
 \end{aligned}$$

(2) 当  $t = 2$  日时,

$$\begin{aligned}
 H &= 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.0413}{e^{0.00945 \times 2}} + \frac{-0.0096}{e^{0.377 \times 2}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{-0.0070}{e^{1.178 \times 2}} + \frac{-0.0051}{e^{2.417 \times 2}} \right] \right\} \\
 &= 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.0413}{(1.0095)^2} + \frac{-0.0096}{(1.458)^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{-0.0070}{(3.245)^2} + \frac{-0.0051}{(11.21)^2} \right] \right\} \\
 &= 14.848 \text{ 米;}
 \end{aligned}$$

(3) 当  $t = 5$  日时,

$$\begin{aligned}
 H &= 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.0413}{(1.0095)^5} + \frac{-0.0096}{(1.458)^5} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{-0.0070}{(3.245)^5} + \frac{-0.0051}{(11.21)^5} \right] \right\} \\
 &= 14.767 \text{ 米;}
 \end{aligned}$$

(4) 当  $t = 10$  日时,

$$H = 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.0413}{(1.0095)^{10}} + \frac{-0.0096}{(1.458)^{10}} + \text{略} \right] \right\}$$

$$= 14.713 \text{ 米};$$

(5) 当  $t = 15$  日时,

$$H = 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.0413}{(1.0095)^{15}} + \frac{-0.0096}{(1.458)^{15}} \right] \right\}$$

$$= 14.676 \text{ 米};$$

(6) 当  $t = 20$  日时,

$$H = 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.0413}{(1.0095)^{20}} \right] \right\}$$

$$= 14.645 \text{ 米};$$

(7) 当  $t = 25$  日时,

$$H = 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.0413}{(1.0095)^{25}} \right] \right\}$$

$$= 14.615 \text{ 米};$$

(8) 当  $t = 30$  日时;

$$H = 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.0413}{(1.0095)^{30}} \right] \right\}$$

$$= 14.587 \text{ 米}.$$

2. 在  $x = 0.05$ , 即  $r = 0.05 \times 200 = 10$  米的断面上

$\therefore x_0 = 0.005$ , 查表 7-1 得表 7-4.

表 7-4  $D_n h_n$  值计算表

$\lambda_1$	0.667	$D_1 h_1$	-0.1557
$\lambda_2$	4.214	$D_2 h_2$	-0.0309
$\lambda_3$	7.446	$D_3 h_3$	-0.0220
$\lambda_4$	10.664	$D_4 h_4$	-0.0181

将这些值代入(7.58)式算出

(1) 当  $t = 1$  日时,

$$H = h_0 + \left\{ -\pi S_0 \sum_{n=1}^4 D_n h_n (\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta t} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.1557}{(1.0095)^1} + \frac{-0.0309}{(1.458)^1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{-0.0220}{(3.245)^1} + \frac{-0.0181}{(11.21)^1} \right] \right\} \\
&= 14 + \{ 18.85 [ 0.1539 + 0.0213 \\
&\quad + 0.0071 + 0.0061 ] \} \\
&= 17.465 \text{ 米;}
\end{aligned}$$

(2) 当  $t = 2$  日时,

$$\begin{aligned}
H &= 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.1557}{(1.0095)^2} + \frac{-0.0309}{(1.458)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{-0.0220}{(3.245)^2} + \frac{-0.0181}{(11.21)^2} \right] \right\} \\
&= 17.185 \text{ 米;}
\end{aligned}$$

(3) 当  $t = 5$  日时,

$$\begin{aligned}
H &= 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.1557}{(1.0095)^5} + \frac{-0.0309}{(1.458)^5} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{-0.0220}{(3.245)^5} + \text{略} \right] \right\} \\
&= 16.885 \text{ 米;}
\end{aligned}$$

(4) 当  $t = 10$  日时,

$$\begin{aligned}
H &= 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.1557}{(1.0095)^{10}} + \frac{-0.0309}{(1.458)^{10}} + \text{略} \right] \right\} \\
&= 16.682 \text{ 米;}
\end{aligned}$$

(5) 当  $t = 15$  日时,

$$\begin{aligned}
H &= 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.1557}{(1.0095)^{15}} + \frac{-0.0309}{(1.458)^{15}} \right] \right\} \\
&= 16.550 \text{ 米;}
\end{aligned}$$

(6) 当  $t = 20$  日时,

$$\begin{aligned}
H &= 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.1557}{(1.0095)^{20}} \right] \right\} \\
&= 16.428 \text{ 米;}
\end{aligned}$$

(7) 当  $t = 25$  日时,

$$H = 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.1557}{(1.0095)^{25}} \right] \right\}$$

$$= 16.319 \text{ 米};$$

(8) 当  $t = 30$  日时,

$$H = 14 + \left\{ -18.85 \left[ \frac{-0.1557}{(1.0095)^{30}} \right] \right\}$$

$$= 16.209 \text{ 米}.$$

3. 按照上列计算方法和步骤,便可以容易地算出其余  $r=20, 40, 80, 140, 200$  米处断面在各个时期的水位变化值,现将全部计

表 7-5 地下水位降落曲线计算成果表

断面 (距井 $r$ 米处)	时间 (日)	1	2	5	10	15	20	25	30
2		14.994	14.848	14.767	14.713	14.638	14.688	14.628	14.537
10		17.465	17.185	16.885	16.682	16.550	16.428	16.319	16.209
20		18.558	18.158	17.769	17.489	17.307	17.174	17.027	16.888
40		19.421	19.082	18.661	18.337	18.131	17.936	17.785	17.615
80		19.921	19.767	19.436	19.113	18.873	18.639	18.430	18.222
140		20.002	19.987	19.892	19.604	19.344	19.118	18.867	18.637
200		20.004	19.989	19.946	19.718	19.467	19.467	18.973	18.750

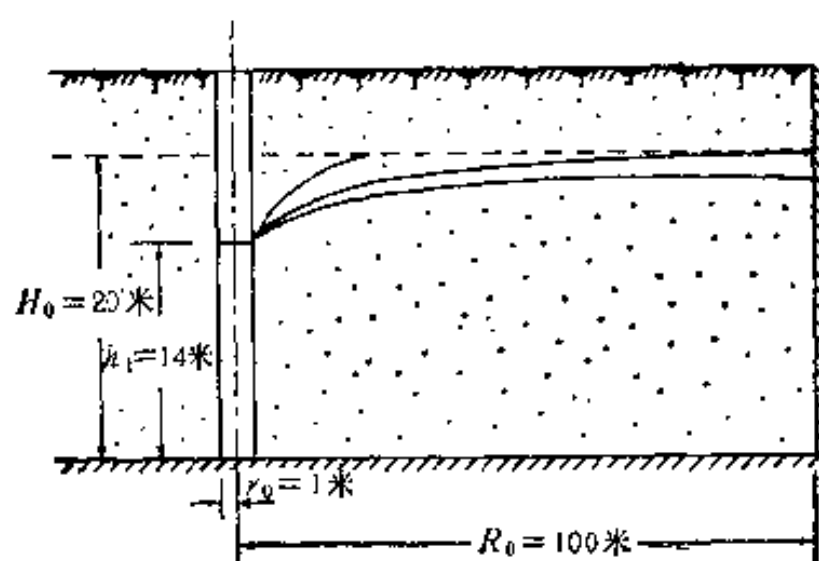


图 7-6 浸润曲线图

上线  $t = 1$  天; 中线  $t = 10$  天; 下线  $t = 30$  天

算结果列入表 7-5.

图 7-6 是根据表 7-5 所列成果绘制的  $t = 1, 10, 30$  日时的三条水位曲线.

## (二) 几点说明

1. 在推得(7.58)式的过程中,我们已经指出过(7.49)式中所包含的级数收敛快的特性,从而提出只计算前几项的和,通过本节的算例亦可以看到这一点.特别是当  $t$  值增大,即抽水时间较长时,起决定作用的主要是级数中的第一项.因此,对预报长期抽水后的水位变化来说,作为初步计算,也可用公式

$$H = h_0 + \{ -\pi S_0 D_1 h_1(\lambda_1 x) e^{-\lambda_1^2 \beta t} \}. \quad (7.62)$$

2. 通过上例可以发现在计算过程中应注意的技巧:

(1) 对同一断面来说,不同时段算式中之相应项所不同者只在分母,而分母之不同只表现在方次“ $i$ ”之不同.因此,在计算过程中可以利用已算过的分母而只配给相应的乘方即可.例如在上例中当  $t = 1$  日时算得第一项之分母为 1.0095,则当  $t = 2$  日时为  $(1.0095)^2$ ,  $t = 5$  日时为  $(1.0095)^5$  等.

(2) 如果要求的计算时段对各个断面都是相同的,那么在计算时方括号中的分母即除数  $e^{-\lambda_n^2 \beta t}$  之值可直接取用计算第一断面时的相应值.如上例所示.

这样则计算工作量又可以大为减少.

## (三) 涌水量预测算例

有一完整井其所处条件及工作条件与上面所举之例相同.试求抽水开始后 1, 2, 5, 10, 15, 20, 直至 30 各天之涌水量,并绘制涌水量变化曲线.

根据公式(7.60)式计算,并借助表 7.2 查取相应的  $B_n$  值.

已知

$$x_0 = \frac{r_0}{R_0} = \frac{1}{200} = 0.005$$

$$h_0 = 14 \text{ 米}$$

$$S_0 = H_0 - h_0 = 20 - 14 = 6 \text{ 米}$$

又

$$\beta = \frac{a}{R_0^2} = \frac{KH_P}{\mu R_0^2} = \frac{5 \times \left( \frac{20 + 14}{2} \right)}{0.1 \times 200^2} = 0.02125$$

故当  $t = t_1 = 1$  日时,

$$B_1 e^{-\lambda_1^2 \beta t_1} = 0.1104 e^{-0.667^2 \times 0.02125 \times 1} = \frac{0.1104}{(1.0095)^1} = 0.1094,$$

$$B_2 e^{-\lambda_2^2 \beta t_1} = 0.0210 e^{-4.214^2 \times 0.02125 \times 1} = \frac{0.0210}{(1.458)^1} = 0.0144,$$

$$B_3 e^{-\lambda_3^2 \beta t_1} = 0.0150 e^{-7.446^2 \times 0.02125 \times 1} = \frac{0.0150}{(3.245)^1} = 0.00463,$$

$$B_4 e^{-\lambda_4^2 \beta t_1} = 0.0134 e^{-10.664^2 \times 0.02125 \times 1} = \frac{0.0134}{(11.21)^1} = 0.0012.$$

将诸值代入(7.60)式得

表 7-6 出水量计算成果表

$t$ (日)	$B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t}$				$\sum_{n=1}^4 B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t}$	$Q = 5277.888 \sum_{n=1}^4 B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t}$ (吨/日)
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$		
1	0.1094	0.0144	0.0046	0.0012	0.1296	684.014
2	0.1084	0.0097	0.0014	0.001	0.1196	631.235
5	0.1052	0.00308	0.00004	略	0.1083	571.701
10	0.1004	0.00045	略	—	0.1009	532.275
15	0.0958	0.00007	—	—	0.0958	505.991
20	0.0914	略	—	—	0.0914	482.399
25	0.0872	—	—	—	0.0872	460.232
30	0.0831	—	—	—	0.0831	438.592



$$\begin{aligned}
 Q_1 &= 4\pi K h_0 S_0 \sum_{n=1}^4 B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t_1} \\
 &= 4 \times 3.1416 \times 5 \times 14 \times 6 \\
 &\quad \times (0.1094 + 0.0144 + 0.0046 + 0.0012) \\
 &= 5277.888 \times (0.1296) \\
 &= 684.014 \text{ (吨/日)}.
 \end{aligned}$$

参照本节之几点说明，将全部计算过程列入表 7-6。

图 7-7 是根据表 7-6 所列计算成果绘制的涌水量变化曲线。

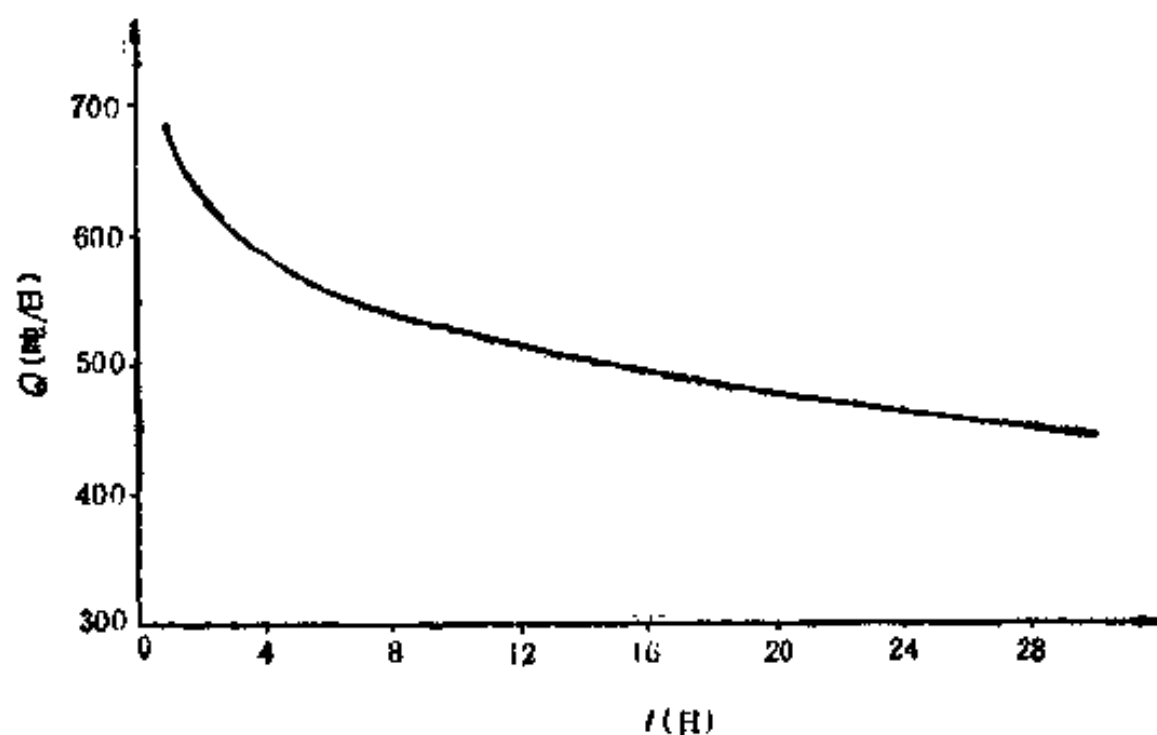


图 7-7 出水量随时间变化曲线

# 第八章 有上部入渗时均质 含水层中割离井的非稳定 渗流计算

在水文地质及井灌、井排工作中，也会遇到有上部入渗的情况。这种情况的发生可能由于大气降水所引起，也可能由于灌溉、排水等的渗漏而造成。从时间上观察，入渗可能存在于抽水的全过程，也可能存在于部分过程，入渗强度可能是均值的，也可能是随着时间（有时也随着地点）而变化的，在本章将研究此类课题。

## 一、水位变化计算公式的推导

如果在井的工作过程中存在着随时间而变化的上部入渗  $\Delta w(t)$ ，并令  $\Delta w(t)/\mu = f(t)$ ，（‘ $\mu$ ’代表给水度），参见公式(2.18)，在这种情况下，经过线性化了的渗流基本方程变为

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) + f(t), \quad (8.1)$$

这是一个非齐次偏微分方程。

对于我们所研究的课题，任务归结为在

$$\left. \begin{aligned} H(r, 0) &= H_0, & a \\ H(r_0, t) &= h_0, & b \\ \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=R_0} &= 0, & c \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

的边界条件和起始条件下求解方程式(8.1)。式中所用符号参见图 8-1。

$H_0$ ——起始水位； $H$ ——抽水开始后  $t$  时距井  $r$  处的水位；  
 $h_0$ ——抽水时井壁外进水水位； $R_0$ ——含水层圆形隔水边界到井

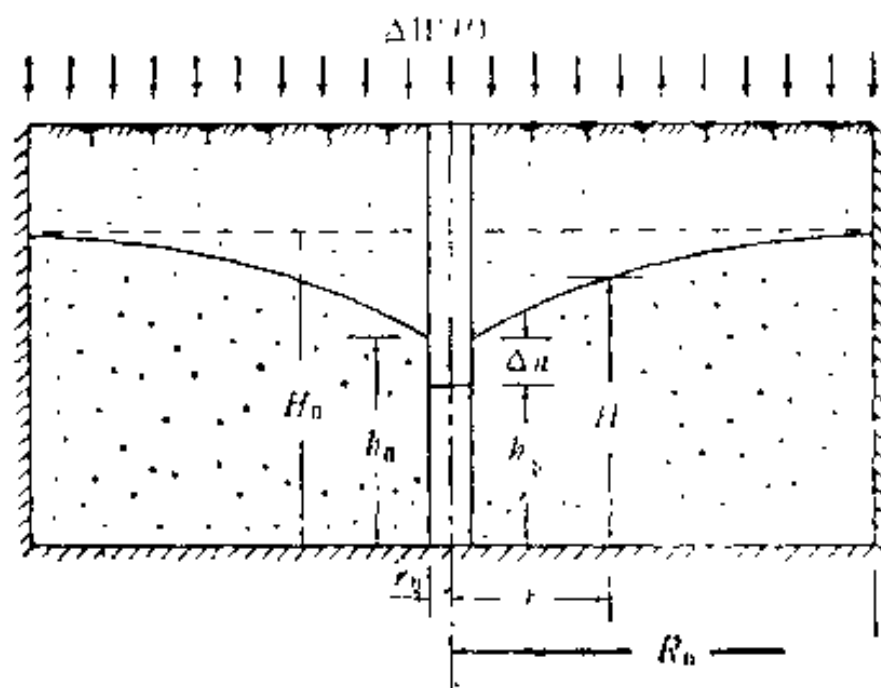


图 8-1 有上部入渗时潜水完整井示意图

心的距离;  $r_0$ ——井的半径;  $t$ ——抽水时间;  $a = T / \mu = KH_p / \mu$ ——水位传导系数(米<sup>2</sup>/日);  $K$ ——渗透系数(米/日);  $H_p$ ——抽水过程中含水层计算厚度(米)。

在此需要引进两个新函数  $U(r, t)$ ,  $V(r, t)$  参见文献[37], [38], 并令

$$H(r, t) = U(r, t) + V(r, t), \quad (8.3)$$

同时,  $U(r, t)$  的选择应能使其满足齐次方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad (8.4)$$

以及相应的起始条件和边界条件

$$\left. \begin{aligned} U(r, 0) &= H_0, & a \\ U(r_0, t) &= h_0, & b \\ \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_0} &= 0, & c \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

而函数  $V(r, t)$  的挑选应使其满足非齐次方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + f(t), \quad (8.6)$$

以及齐次方程的起始条件和边界条件

$$\left. \begin{aligned} V(r, 0) &= 0, & a \\ V(r_0, t) &= 0, & b \\ \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R_0} &= 0, & c \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

如果符合上述选择条件,则不难相信方程式(8.4)–(8.7)也会满足在条件(8.2)下的(8.1)式.

关于方程式(8.4)在条件(8.5)之下的解,我们已在第七章中研究过了,其结果为

$$U = h_0 - \pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 \pi t}}{J_0^2(\lambda_n r) - J_1^2(\lambda_n R_0)}. \quad (8.8)$$

现在的主要任务是在条件(8.7)之下求解(8.6)式.

设令(8.6)之解具有级数的形式

$$V(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) h(\lambda_n r), \quad (8.9)$$

式中

$$h(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r) Y_1(\lambda_n R_0) - J_1(\lambda_n R_0) Y_0(\lambda_n r), \quad (8.10)$$

参见公式(7.21)、(7.26),由于

$$h(\lambda_n r_0) = 0, \quad (8.11)$$

$$h_1(\lambda_n r) = J_1(\lambda_n r) Y_1(\lambda_n R_0) - J_1(\lambda_n R_0) Y_1(\lambda_n r), \quad (8.12)$$

及

$$h_1(\lambda_n R_0) = 0,$$

即

$$\frac{\partial h(\lambda_n r)}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = -\lambda_n h_1(\lambda_n R_0) = 0, \quad (8.13)$$

因而(8.9)这种形式的解,可以满足(8.7-b, c)式两个条件.

这样一来,问题归结为寻找(8.9)的系数  $A_n(t)$ .

我们将(8.6)式的“自由项”也化为包括函数  $h(\lambda_n r)$  的级数,

即

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) h(\lambda_n r). \quad (8.14)$$

将(8.14)式的两端,均乘以  $rh(\lambda_n r)$ , 并沿  $r$  从  $r_0 \rightarrow R_0$  积分得

$$\int_{r_0}^{R_0} r f(t) h(\lambda_n r) dr = G_n(t) \int_{r_0}^{R_0} r h^2(\lambda_n r) dr, \quad (8.15)$$

由此

$$G_n(t) = \frac{f(t) \int_{r_0}^{R_0} r h(\lambda_n r) dr}{\int_{r_0}^{R_0} r h^2(\lambda_n r) dr}, \quad (8.16)$$

由(7.36)式知

$$\int_{r_0}^{R_0} r h^2(\lambda_n r) dr = \frac{2}{\pi^2 \lambda_n^2} \left[ \frac{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)}{J_0^2(\lambda_n r_0)} \right]. \quad (8.17)$$

而按(7.45)式

$$\int_{r_0}^{R_0} r h(\lambda_n r) dr = \frac{-2J_1(\lambda_n R_0)}{\lambda_n^2 \pi J_0(\lambda_n r_0)}. \quad (8.18)$$

将(8.17)、(8.18)代进(8.16), 得

$$G_n(t) = - \frac{\pi J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) f(t)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)}. \quad (8.19)$$

我们再把(8.9)、(8.14)代入(8.6), 则又得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dA_n(t)}{dt} h(\lambda_n r) &= a \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \left[ \frac{d^2 h(\lambda_n r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh(\lambda_n r)}{dr} \right] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) h_n(\lambda_n r). \end{aligned} \quad (8.20)$$

考虑到  $h(\lambda_n r)$  乃是零阶贝塞尔方程的解(参见公式(7.12)及(7.20)), 可知

$$\frac{d^2 h(\lambda_n r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh(\lambda_n r)}{dr} = -\lambda_n^2 h(\lambda_n r), \quad (8.21)$$

因而(8.20)可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{dA_n(t)}{dt} + a\lambda_n^2 A_n(t) - G_n(t) \right] h(\lambda_n r) = 0. \quad (8.22)$$

由于  $h(\lambda_n r) \neq 0$ , 故

$$\frac{dA_n(t)}{dt} + a\lambda_n^2 A_n(t) - G_n(t) = 0,$$

或

$$\frac{dA_n(t)}{dt} + a\lambda_n^2 A_n(t) = G_n(t). \quad (8.23)$$

由常微分方程理论<sup>[39], [40]</sup>而知一阶线性方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x).$$

之通解为

$$y = e^{-\int p dx} \left[ C + \int Q e^{\int p dx} dx \right],$$

故可推断(8.23)之解为

$$A_n(t) = e^{-\int a\lambda_n^2 dt} \left[ \int G_n(t) e^{\int a\lambda_n^2 dt} dt + C \right],$$

即

$$A_n(t) = e^{-a\lambda_n^2 t} \left[ \int G_n(t) e^{a\lambda_n^2 t} dt + C \right]. \quad (8.24)$$

为了确定常数  $C$ , 可以利用起始条件 (8.7-a), 我们在(8.9)式中使用之, 即得

$$V(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0) h(\lambda_n r) = 0. \quad (8.25)$$

因为  $h(\lambda_n r) \neq 0$ , 故必

$$A_n(0) = 0.$$

又因  $t = 0$  时  $f(t) = 0$ , 故由(8.19)知  $G(0) = 0$ , 从而可知在(8.24)中  $C = 0$ , 于是(8.24)变为

$$A_n(t) = e^{-\lambda_n^2 at} \int_0^t G_n(t) e^{\lambda_n^2 at} dt. \quad (8.26)$$

将所得的由(8.19)式表达之  $G_n(t)$  代进(8.26)式, 而得

$$A_n(t) = e^{-\lambda_n^2 at} \int_0^t - \frac{\pi J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} f(t) e^{\lambda_n^2 at} dt,$$

或

$$A_n(t) = - \frac{\pi J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} e^{-\lambda_n^2 a t} \int_0^t f(\tau) e^{a \lambda_n^2 \tau} d\tau. \quad (8.27)$$

再将我们求得的  $A_n(t)$  代进(8.9)式, 便找到了(8.6), (8.7)方程组之解

$$V(r, t) = - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} e^{-\lambda_n^2 a t} \cdot h(\lambda_n r) \int_0^t f(\tau) e^{a \lambda_n^2 \tau} d\tau. \quad (8.28)$$

最后, 我们把(8.28)和(8.8)式加在一起, 则得方程(8.1)在条件(8.2)下之通解为

$$H(r, t) = h_0 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \cdot \left[ (H_0 - h_0) + \int_0^t f(\tau) e^{a \lambda_n^2 \tau} d\tau \right]. \quad (8.29)$$

如按我们曾经用过的办法

令

$\frac{r}{R_0} = x, \frac{r_0}{R_0} = x_0$ , 则(8.29)式变成新的形式

$$H(r, t) = h_0 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta t} \cdot \left[ (H_0 - h_0) + \int_0^t f(\tau) e^{\lambda_n^2 \beta \tau} d\tau \right]. \quad (8.30)$$

式中

$$\beta = \frac{a}{R_0^2},$$

$$D_n = \frac{J_0(\lambda_n x_0) J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)}.$$

而  $D_n$  或  $D_n h_n(\lambda_n x)$  之值, 可由表 7-1 或图 7-3 查取, 当然也可按公式直接计算。

在得知  $f(t)$  函数之后,便可按(8.29)或(8.30)式,求其具体解答。

## 二、关于出水量的计算公式

当得知(8.29)和(8.30)式中的函数  $f(t)$  的具体形式之后,求出  $\frac{\partial H}{\partial r}$  的表达式,我们便可利用基本公式

$$Q = 2\pi K h_0 \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_0}$$

求出流量的实用计算公式,对此将在下面用实例予以说明。

## 三、入渗强度为常数时水位降落曲线及出水量的计算公式

### (一) 水位降落曲线计算公式

如果在抽水的全过程中,入渗强度可视为常数,并用  $\Delta w$  来表示,也就是说公式(8.29)或(8.30)中的

$$f(t) = \frac{\Delta w}{\mu} = \text{常数} \quad (8.31)$$

则

$$\begin{aligned} \int_0^t f(t) e^{\lambda_s^2 \beta t} dt &= \int_0^t \frac{\Delta w}{\mu} e^{\lambda_s^2 \beta t} dt \\ &= \frac{\Delta w}{\mu \beta \lambda_s^2} [e^{\lambda_s^2 \beta t}]_0^t \\ &= \frac{\Delta w R_0^2}{KH_p \lambda_s^2} (e^{\lambda_s^2 \beta t} - 1). \end{aligned} \quad (8.32)$$

式中  $\Delta w$  的单位为米/日。

将(8.32)式代入(8.30)式得



$$H = h_0 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta t} \cdot \left[ (H_0 - h_0) + \frac{\Delta w R_0^2}{\lambda_n^2 K H_p} (e^{\lambda_n^2 \beta t} - 1) \right], \quad (8.33)$$

或即

$$H = \left[ h_0 - \pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta t} \right] + \left[ \frac{-\pi \Delta w R_0^2}{K H_p} \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) \frac{1}{\lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}) \right]. \quad (8.34)$$

可以看出(8.34)式中前一个方括号中包括的项,即是(7.49)式所表达之水位值,亦即不考虑入渗时的水位值——这一点只要在(8.34)式中令  $\Delta w = 0$  便可证明,我们现在用  $H_1$  代表之,于是(8.34)式可以改写为

$$H = H_1 + \left[ \frac{-\pi \Delta w R_0^2}{K H_p} \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) \frac{1}{\lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}) \right], \quad (8.35)$$

式中

$$H_1 = h_0 - \pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta t}. \quad (8.36)$$

公式(8.34)、(8.35)、(8.33)式均可用来计算水位,可视计算的方便而选择。

## (二) 井涌水量的计算公式

仍从基本公式

$$Q = 2\pi K h_0 \left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r_0} \quad (8.37)$$

来推求。为此,先根据(8.34)式决定  $\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r_0}$  之值。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial r} &= \frac{1}{R_0} \frac{\partial H}{\partial x} \\
&= \frac{1}{R_0} \left\{ -\pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n x_0) J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \beta t} \frac{\partial h(\lambda_n x)}{\partial x} \right. \\
&\quad - \frac{\pi \Delta \omega R_0^2}{KH_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n x_0) J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)} \\
&\quad \left. \cdot \frac{\partial h(\lambda_n x)}{\partial x} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}) \right\}. \quad (8.38)
\end{aligned}$$

由(7.31), (7.28)式知

$$\left. \frac{\partial h(\lambda_n x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = -\frac{2}{\rho \pi x_0} = -\frac{2J_1(\lambda_n)}{\pi x_0 J_0(\lambda_n x_0)}. \quad (8.39)$$

将(8.39)代入(8.38)式则

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r_0} &= \frac{1}{R_0} \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x=x_0} \\
&= \frac{1}{R_0} \left\{ -\pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n x_0) J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{-2J_1(\lambda_n)}{\pi x_0 J_0(\lambda_n x_0)} e^{-\lambda_n^2 \beta t} \right. \\
&\quad - \frac{\pi \Delta \omega R_0^2}{KH_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n x_0) J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)} \\
&\quad \left. \cdot \frac{-2J_1(\lambda_n)}{\pi x_0 J_0(\lambda_n x_0)} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2} [1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}] \right\},
\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r_0} &= \frac{1}{r_0} \left\{ 2S_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\Delta \omega R_0^2}{KH_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} B_n (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}) \right\}. \quad (8.40)
\end{aligned}$$

式中

$$B_n = \frac{J_1^2(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)}. \quad (8.41)$$

将(8.40)代入(8.37)式得到计算流量的公式

$$Q = 4\pi K h_0 \left[ S_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t} + \frac{\Delta w R_0^2}{KH_p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} B_n (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}) \right], \quad (8.42)$$

或

$$Q = 4\pi K h_0 S_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t} + \frac{4\pi \Delta w h_0 R_0^2}{H_p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} B_n (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}). \quad (8.43)$$

(8.43)式之右第一项即是由公式(7.5)式所求之涌水量,也就是无人渗时井的涌水量,在此另用  $Q_1$  代表之,即

$$Q_1 = 4\pi K h_0 S_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t}, \quad (8.44)$$

因而当存在上部入渗时,井孔涌水量的计算公式可写为

$$Q = Q_1 + \frac{4\pi \Delta w h_0 R_0^2}{H_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} B_n (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}). \quad (8.45)$$

(8.42)、(8.43)、(8.45)式均为计算涌水量的公式,可根据计算过程,择取方便者而用之。

## 四、算 例

为了便于比较,同时为了避免重复已经用实例作过说明的某些计算过程,这里所举的算例仍用第二部分所举例题之基本资料。

### (一) 浸润曲线计算

圆形隔水边界中心有一潜水完整井,处于下述工作条件:

- (1) 含水层厚度  $H_0 = 20$  米, 底板可视为水平的;
- (2) 给水度  $\mu = 0.1$ ;
- (3) 渗透系数  $K = 5$  米/日;
- (4) 隔水边界半径  $R_0 = 200$  米;
- (5) 井的半径  $r_0 = 1$  米;
- (6) 井在降程不变的情况下工作, 其  $s_0 = 6$  米;
- (7) 在水井工作过程中存在着上部入渗  $\Delta w$ , 其值为 0.004 米/日。

需要预报在井的工作过程中第 1, 2, 5, 10, 15, 20, 25 直至 30 各天的水位变化。

应用公式(8.35), 即

$$H = H_1 + \left[ \frac{-\pi \Delta w R_0^2}{KH_p} \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) \cdot \frac{1}{\lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}) \right],$$

式中  $H_1$  之值已在第二部分算例中求出, 可直接从表 7-6 中抄用。下面计算(8.35)之第二项, 其中

$$\frac{-\pi \Delta w R_0^2}{KH_p} = \frac{-3.1416 \times 0.004 \times 200^2}{5 \times \frac{14 + 20}{2}} = -5.9136,$$

$D_n h_n(\lambda_n x)$  以及  $e^{-\lambda_n^2 \beta t}$  之计算过程同前, 现只将计算结果列入表 8-1、表 8-2 中。

在表 8-1 和表 8-2 中列出了第一天和第十天的计算成果, 对于  $t = 2, 5, 15, 20, 25, 30$  各天的计算过程从略, 只将其全部计算结果列入表 8-3 中。

在表 8-3 中  $H$  是有人渗时的水位值;  $H_1$  是无人渗时的水位值, 是为了对比而列出的。从同一时段的水位曲线对比中, 可以看出地下水位因上部入渗而抬高的情况, 而且, 时间延续越长, 水位上升越高。当然, 这也与该井的抽水能力有关, 如果要求设计的井

表 8-1 有上部入渗时地下水位计算表 ( $t = 1$  日)

No  H(米) z(米)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	$H_1$	$-\frac{\pi \Delta \omega R_0^2}{KH_P}$	$D_s h(\lambda, x)$	$\frac{1}{\lambda_s^2} (1 - e^{-\lambda_s^2 \beta t})$	$H_2 = (2) \times \sum (3) \times (4)$	$H = H_1 + H_2$
2	14.944	-5.9136	$D_1 h_1 = -0.0413$	0.0202	0.0067	14.951
			$D_2 h_2 = -0.0096$	0.0177		
			$D_3 h_3 = -0.0070$	0.0126		
			$D_4 h_4 = -0.0051$	0.0080		
10	17.465	-5.9136	-0.1557	0.0202	0.0244	17.489
			-0.0309	0.0177		
			-0.0220	0.0126		
			-0.0181	0.0080		
20	18.558	-5.9136	-0.2035	0.0202	0.0313	18.589
			-0.0392	0.0177		
			-0.0264	0.0126		
			-0.0204	0.0080		

40	19.421	-5.9136	-0.2523 -0.0435 -0.0228 -0.0107	0.0202 0.0177 0.0126 0.0080	0.0370	19.458
80	19.921	-5.9136	-0.2976 -0.0312 +0.0026 +0.0108	0.0202 0.0177 0.0126 0.0080	0.0380	19.959
140	(20.002)	-5.9136	-0.3266 +0.0047 +0.0085 -0.0083	0.0202 0.0177 0.0126 0.0080	0.0383	(20.040)
200	(20.004)	-5.9136	-0.3340 +0.0221 -0.0105 +0.0070	0.0202 0.0177 0.0126 0.0080	0.0384	(20.038)

表 8-2 有上部入渗时地下水水位计算表 ( $t = 10$  日)

No $\begin{matrix} r \\ \text{(米)} \end{matrix}$ $\begin{matrix} H \\ \text{(米)} \end{matrix}$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	$H_1$	$\frac{-\pi \Delta \omega R_0^2}{KH_p}$	$D_s h(\lambda, s)$	$\frac{1}{\lambda_s^2} (1 - e^{-\lambda_s^2 \theta})$	$H_2 = (2) \times \Sigma(3) \times (4)$	$H = H_1 + H_2$
2	14.713	-5.9136	-0.0413	0.2046	0.0541	14.767
			-0.0096	0.0550		
			-0.0070	0.0180		
			-0.0051	0.0087		
10	16.682	-5.9136	-0.1557	0.2046	0.2018	16.884
			-0.0309	0.0550		
			-0.0220	0.0180		
			-0.0181	0.0087		
20	17.489	-5.9136	-0.2035	0.2046	0.2629	17.757
			-0.0392	0.0550		
			-0.0264	0.0180		
			-0.0204	0.0087		

40	18.337	-5.9136	-0.2523 -0.0435 -0.0228 -0.0107	0.2046 0.0550 0.0180 0.0087	0.3224	18.659
80	19.113	-5.9136	-0.2976 -0.0312 +0.0026 +0.0108	0.2046 0.0550 0.0180 0.0087	0.3688	19.482
140	19.604	-5.9136	-0.3266 +0.0047 +0.0085 -0.0083	0.2046 0.0550 0.0180 0.0087	0.3931	19.997
200	19.718	-5.9136	-0.3340 +0.0221 -0.0105 +0.0070	0.2046 0.0550 0.0180 0.0087	0.3977	20.116



表 8-3 地下水位计算成果表

断面 (距井心 r 米处)		水位(米)		时间 (日)		1	2	5	10	15	20	25	30
2	$H_1$					14.944	14.848	14.767	14.713	14.676	14.645	14.628	14.587
	$H$					14.951	14.861	14.796	14.766	14.753	14.745	14.735	14.729
10	$H_1$					17.465	17.185	16.885	16.682	16.550	16.428	16.319	16.209
	$H$					17.489	17.233	16.992	16.884	16.837	16.802	17.771	16.735
20	$H_1$					18.558	18.158	17.769	17.489	17.327	17.174	17.027	17.888
	$H$					18.589	18.220	17.908	17.752	17.701	17.662	17.616	17.575
40	$H_1$					19.421	19.082	18.661	18.337	18.131	17.936	17.785	17.615
	$H$					19.458	19.156	18.831	18.659	18.591	18.538	18.513	18.463
80	$H_1$					19.921	19.767	19.436	19.113	18.873	18.639	18.430	18.222
	$H$					19.959	19.847	19.626	19.482	19.404	19.338	19.276	19.210
140	$H_1$					20.002	19.987	19.892	19.604	19.344	19.118	18.867	18.637
	$H$					20.04 <sup>①</sup>	20.068	20.090	19.997	19.914	19.874	19.784	19.712
200	$H_1$					20.004	19.989	19.946	19.718	19.467	19.206	18.973	18.750
	$H$					20.038	20.070	20.145	20.116	20.046	19.974	19.911	19.843
备 注		① 出现大于起始水位(20 米)的数字,系水位因入渗而有上升所致											

群对地下水位的控制有一定指标,而第一次的计算结果表明设计能力还不能满足,便可修改设计方案,再行计算,以便选择合理规划方案。

在图 8-2 中画出了有人渗和无人渗两种情况下,抽水第十天的水位曲线。

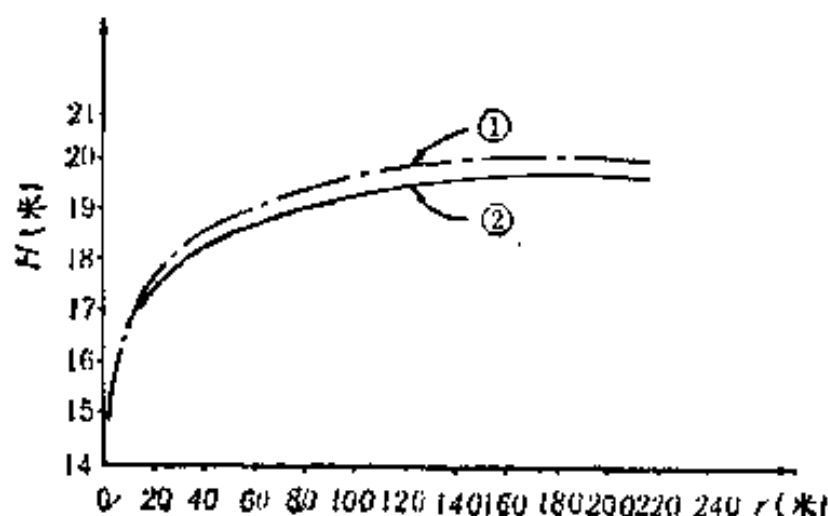


图 8-2 水位变化曲线图

①-有上部入渗时的水位曲线 ②-无上部入渗时的水位曲线

## (二) 涌水量计算

有一口完整井,其工作条件与本节所举之例相同,试求抽水开始后 1, 2, 5, 10, 15, 20, 25 直至 30 各天之涌水量。

由于已在第七章中计算过无人渗情况下同类井的涌水量,因而选用公式(8.45),即

$$Q = Q_1 + \frac{4\pi\Delta wh_0 R_0^2}{H_P} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} B_n (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}).$$

式中  $Q_1 = 4\pi K h_0 S_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t}$  之值可直接从表 7-6 中抄取,下面计算(8.45)式之第二项,即

$$\frac{4\pi\Delta wh_0 R_0^2}{H_P} = \frac{4 \times 3.1415 \times 0.004 \times 14 \times 200^2}{17} = 1656.$$

表 8-4 涌水量计算成果表

№	(1)	(2)	(3)				(4)	(5)	(6)
$t$ (日)	$Q_1$ (吨/日)	$\frac{4\pi\Delta wh_0 R_0^2}{H_P}$	$B_n \frac{1}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n^2 R_0^2 / t})$				$\sum_{n=1}^4 B_n \frac{1}{\lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 R_0^2 / t})$	$Q_2 = (2) \times (4)$	$Q = Q_1 + Q_2$
			$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$			
1	684.014	1656	0.00223	0.00037	0.00019	0.00011	0.00290	4.802	688.816
2	631.235	1656	0.00471	0.00064	0.00024	0.00012	0.00573	9.489	640.724
5	571.701	1656	0.01140	0.00091	0.00027	0.00012	0.01270	21.031	592.732
10	532.275	1656	0.02259	0.00116	0.00027	0.00012	0.02414	39.976	572.251
15	505.991	1656	0.03272	0.00118	0.00027	0.00012	0.03429	56.784	562.775
20	482.399	1656	0.04323	0.00118	0.00027	0.00012	0.04480	74.189	556.688
25	460.232	1656	0.05255	0.00118	0.00027	0.00012	0.05412	89.623	549.855
30	438.592	1656	0.06147	0.00118	0.00027	0.00012	0.06304	104.394	542.986
备注	$Q_1 = 4\pi K h_0 S_0 \sum_{n=1}^4 B_n e^{-\lambda_n^2 R_0^2 / t}$ , 其值为表 4 的计算结果								

计算结果如表 8-4 所列。

从表 8-4 所列  $Q_1$  与  $Q$  值的对比中可发现，就我们所研究的问题而言，在无人渗情况下，涌水量将随着抽水时间的延续而减小，但当存在入渗时，涌水量起初由大到小，然后经过某一时段又开始回升，如图 8-3 所示。这种变化的程度将取决于井的工作特性以及入渗强度和过程。预报出水量的变化，也是正确设计井群所要求的资料之一。

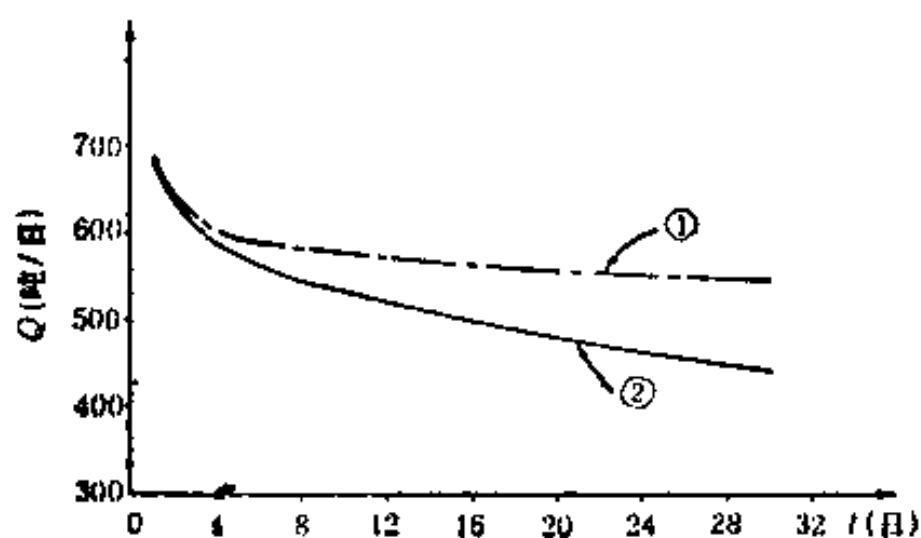


图 8-3 涌水量变化曲线图

① 有上部入渗时涌水量变化曲线 ② 无上部入渗时的涌水量变化曲线

## 第九章 停止抽水后水位恢复 过程预报公式的推导

水井,特别是灌排井的运行常有周期性的特点,因此,不仅需要掌握井在运行期间的地下水运动规律,而且希望预报在停抽之后地下水位的恢复情况。

在本章中,我们将用贝塞尔函数等有关知识,推求具有实用价值的公式,并举例说明其用法。所得成果,将有助于研究井或坑塘回灌的地下水运动问题。

### 一、预报通式的推导

如图9-1所示,在无人渗的情况下,在水位恢复之前,也就是抽水刚要停止的时刻,潜水的水面曲线处于①的状态,在停抽之后,在水头差的作用下,水位便进入恢复过程;水位(或者说潜水面)随着时间的推移而趋于平衡,在邻近井管的区域水位上升,在距井管远的地方水位继续下降。这种现象一直延续到水位完全恢复为止。因此,水位的恢复过程也是重力的均衡过程。

在上述恢复过程中,潜水的运动仍然可以用下面的公式表示:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right]^* \quad (9.1)$$

式中:  $H$ ——在恢复过程  $\tau$  时刻距井  $r$  处之水位,以米计;

$\tau$ ——水位恢复时间,以昼夜计;

---

\* 在公式(9.1)中用希腊字母 ' $\tau$ ' 表示水位恢复时间,以便与抽水过程中代表时间的 ' $t$ ' 相区别。

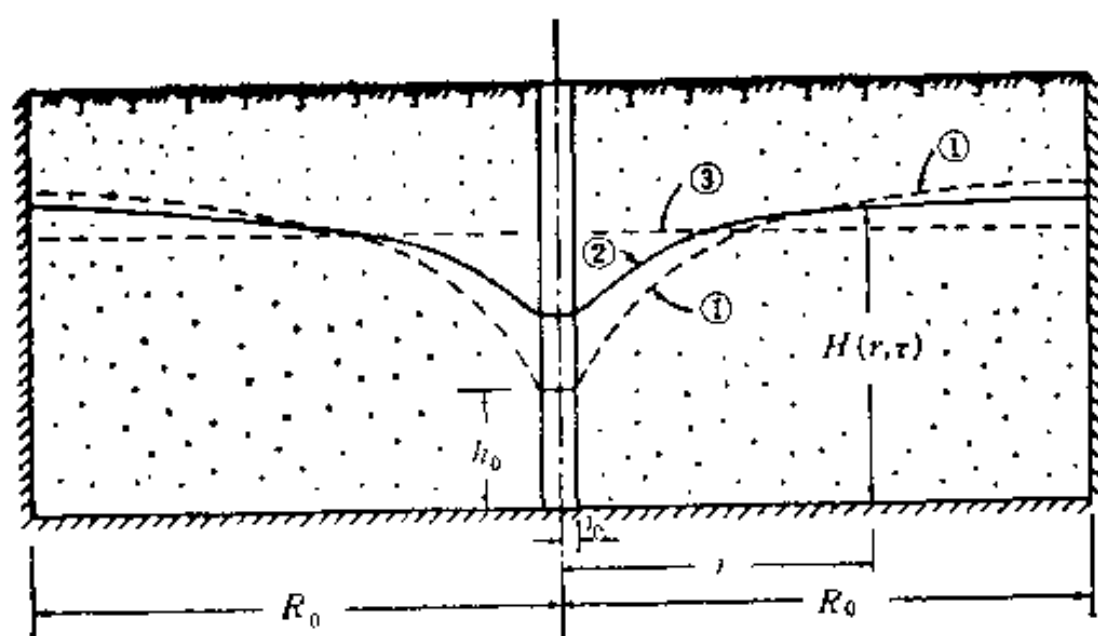


图 9-1 潜水水位恢复过程示意图

① 恢复开始前水位曲线 ② 恢复开始后  $t$  时水位曲线 ③ 完全恢复后的水位曲线  $H(r, t)$ —— $t$  时  $r$  处的水深  $R_0$ ——周界半径  $r_w$ ——井的半径  $h_0$ ——停抽时的井水位

$a = \frac{KH_p}{\mu}$ ——水位传导系数, 以米/昼夜计;

$H_p$ ——计算时段内采用的平均含水层厚度, 以米计;

$\mu$ ——容水度 (或给水度), 以含水层体积的份数计 (如 0.1, 0.15, ...).

其余符号参见图 9-1 及其说明。

对于本章所研究的课题, 除了有公式(9.1)之外, 还存在起始条件

$$H(r, t)_{t=0} = f(r)$$

及边界条件

$$\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0.$$

但是, 还需寻找一个边界条件, 才能求解上述课题。

实际的观测表明, 在停抽之后井筒中的水位一开始迅速上升并接近于井壁外侧的地下水水位, 这一现象对于口径较小的井表现更为明显. 因而, 在这种情况下可以认为地下水的浸润线是对称

的光滑曲线,其对称轴与井轴相重合,从而可假设一补充边界条件

$$\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0.$$

该条件的存在还有这样一个理由:虽然地下水继续向井内流动,但在事实上井的出水量却等于零。

进行了上述分析之后,可知课题归结为在

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=R_0} &= 0, & a \\ \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= 0, & b \\ H(r, \tau) \Big|_{\tau=0} &= f(r), & c \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

的边界条件和起始条件下求解方程 (9.1), 即:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right].$$

为此,将使用分离变量法,于是令

$$H(r, \tau) = A_0 + h(r)T(\tau) = A_0 + hT \quad (9.3)$$

式中  $A_0$ ——常数项; 增加该项的理由, 将在本章的第六节中阐述。

把(9.3)代进(9.1)中,分离变量而得

$$\frac{T'}{aT} = \frac{h'' + \frac{1}{r} h'}{h} = -\alpha^2, \quad (9.4)$$

由此

$$T = C_1 e^{-\alpha^2 a \tau}. \quad (9.5)$$

对于函数  $h(r)$  又得到贝塞尔方程

$$h'' + \frac{1}{r} h' + \alpha^2 h = 0. \quad (9.6)$$

其解为

$$h(r) = AJ_0(\alpha r) + BY_0(\alpha r), \quad (9.7)$$

式中  $J_0$ ——零阶第一类贝塞尔函数;

$Y_0$ ——零阶第二类贝塞尔函数。

于是

$$H(r, \tau) = A_0 + hT,$$

变为

$$H(r, \tau) = A_0 + [AJ_0(\alpha r) + BY_0(\alpha r)]Ce^{-\alpha^2 \tau}, \quad (9.8)$$

为了寻找特征值，可将条件式(9.2-a)和(9.2-b)代进方程式(9.8)中，于是得

$$\left. \begin{aligned} AJ_1(\alpha R_0) + BY_1(\alpha R_0) &= 0, & a \\ AJ_1(\alpha r_0) + BY_1(\alpha r_0) &= 0. & b \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

式中  $J_1$ ——一阶第一类贝塞尔函数；

$Y_1$ ——一阶第二类贝塞尔函数。

如果  $r_0 \rightarrow 0$ ，则  $J_1(\alpha r_0) = 0$ ， $Y_1(\alpha r_0) \rightarrow \infty$ ，因此由式(9.9-b)确定  $B = 0$ 。

由于  $A$  和  $B$  不能同时为零，否则意味着公式(9.8)表示的水头(压力)将和时间  $\tau$  及距离  $r$  无关，这当然是违背题意的。

于是从式(9.9-a)知

$$AJ_1(\alpha R_0) = 0$$

或即

$$J_1(\alpha R_0) = 0. \quad (9.10)$$

将  $B = 0$  代入(9.8)式得

$$H(r, \tau) = A_0 - DJ_0(\alpha r)e^{-\alpha^2 \tau}, \quad (9.11)$$

式中

$$-D = AC.$$

为了确定  $A_0$  和  $D$ ，利用条件(9.2-c)，于是

$$f(r) = A_0 - DJ_0(\alpha r), \quad (9.12)$$

将(9.12)式的两端同乘以  $r$ ，然后取上下限  $r_0(r_0 \rightarrow 0)^*$  到  $R_0$  进行积分，得

---

\* 关于  $r_0 \rightarrow 0$  是按数学上的理由取的，参看图 9-1，并不意味着作者推导的结果仅适用于小口径的井。



$$\begin{aligned} \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{r_0}^{R_0} r f(r) dr &= A_0 \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{r_0}^{R_0} r dr - D \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{r_0}^{R_0} r J_0(\alpha r) dr \\ &= \frac{A_0}{2} R_0^2 - D \left[ \frac{R_0}{\alpha} J_1(\alpha R_0) \right], \end{aligned} \quad (9.13)$$

由公式(9.10)知  $J_1(\alpha R_0) = 0$ , 因此

$$A_0 = \frac{2}{R_0^2} \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{r_0}^{R_0} r f(r) dr, \quad (9.14)$$

为了确定(9.12)中的  $D$  值, 将(9.12)式两端先用  $r J_0(\alpha r)$  乘之, 再沿  $r$  从  $r = r_0 (r_0 \rightarrow 0)$  到  $R_0$  积分, 得

$$\begin{aligned} \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{r_0}^{R_0} r f(r) J_0(\alpha r) dr &= A_0 \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{r_0}^{R_0} r J_0(\alpha r) dr \\ &\quad - D \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{r_0}^{R_0} r J_0^2(\alpha r) dr. \end{aligned} \quad (9.15)$$

在(9.15)中, 由于

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{r_0}^{R_0} r J_0(\alpha r) dr = \frac{R_0}{\alpha} J_1(\alpha R_0) = 0, \quad (9.16)$$

而根据(6.75)式及(9.10)式

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{r_0}^{R_0} r J_0^2(\alpha r) dr = \frac{R_0^2}{2} J_0^2(\alpha R_0), \quad (9.17)$$

因此

$$D = \frac{2 \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{r_0}^{R_0} r J_0(\alpha r) f(r) dr}{R_0^2 J_0^2(\alpha R_0)}. \quad (9.18)$$

将求得的  $A_0$  和  $D$  值代入(9.11)式, 取解的级数形式则得计算水位恢复过程的公式

$$H(r, \tau) = \frac{2}{R_0^2} \int_{r_0 \rightarrow 0}^{R_0} r f(r) dr$$

$$= \frac{2}{R_0^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_i r) \int_{r_0 \rightarrow 0}^{R_0} r J_0(\alpha_i r) f(r) dr}{J_0^2(\alpha_i R_0)} e^{-\alpha_i^2 \tau}, \quad (9.19)$$

如令  $\frac{r}{R_0} = x$ ,  $\frac{r_0}{R_0} = x_0 \rightarrow 0$ ,  $\frac{R_0}{R_0} = 1$ ,  $\frac{\alpha}{R_0^2} = \beta$  则公式 (9.19) 变为

$$H(x, \tau) = 2 \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x f(x) dx - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_i x) \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) f(x) dx}{J_0^2(\alpha_i)} e^{-\beta \alpha_i^2 \tau}, \quad (9.20)$$

式中  $\alpha_i$  是方程

$$J_1(\alpha_i) = 0 \quad (9.21)$$

的根。

## 二、抽水终止时水位为常数情况下的预报公式

将  $f(r) = h_0$  代入 (9.19) 式, 得

$$H(r, \tau) = \frac{2h_0}{R_0^2} \int_{r_0 \rightarrow 0}^{R_0} r dr - \frac{2h_0}{R_0^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_i r) \int_0^{R_0} r J_0(\alpha_i r) dr}{J_0^2(\alpha_i R_0)} e^{-\alpha_i^2 \tau}.$$

考虑公式 (9.16) 所表达的情况, 则知上式中的

$$H(r, \tau) = \frac{2h_0}{R_0^2} \left( \frac{1}{2} R_0^2 \right) - 0 = \text{常数},$$

或

$$H(r, \tau) = h_0.$$

这就是说, 如果起始水位是水平的, 则前述的水位恢复现象不会发生, 这个结论已为事实所证实, 而且也间接证明了在推导公式 (9.19) 和 (9.20) 时, 我们所采用条件的正确性。

### 三、公式(9.20)在预报停止抽水后水位恢复过程时的应用

如果抽水延续  $t_0$  昼夜之后停止, 则可把终止抽水的时刻看作恢复的开始时刻, 根据公式(7.58), 在抽水的  $t_0$  时刻, 其水面曲线的方程为

$$H(x, t)_{t=t_0} = h_0 - \pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta t}$$

式中

$$D_n = \frac{J_0(\lambda_n x_0) J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)}$$

已如前述, 由于抽水终止的时刻  $t_0$  正好是恢复过程的开始时刻  $\tau = 0$ ; 因而  $t_0$  时刻的水位曲线, 也就是  $\tau_0$  时刻的起始水位曲线, 亦即

$$\begin{aligned} f(x) = H(x, \tau)|_{\tau=0} &= H(x, t)|_{t=t_0} \\ &= h_0 - \pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0}, \end{aligned} \quad (9.22)^{1)}$$

式中

$$h(\lambda_n x) = J_0(\lambda_n x) Y_1(\lambda_n) - J_1(\lambda_n) Y_0(\lambda_n x), \quad (9.23)$$

将(9.22)代入(9.20)式, 得

$$\begin{aligned} H(x, \tau) &= 2 \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x \left\{ h_0 - \pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0} \right\} dx \\ &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left[ J_0(\alpha_i x) \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) \left\{ h_0 - \pi S_0 \right. \right. \\ &\quad \cdot \left. \left. \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0} \right\} dx \right] / J_0^2(\alpha_i) e^{\alpha_i \beta_i} \end{aligned}$$

---

1) 式中的  $\beta_0$  代表抽水阶段的参数  $\frac{a}{R_0^2}$  之值, 它和水位恢复阶段的参数  $\beta$  也可能是同一个值。

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 h_0 x dx - 2\pi S_0 \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0} dx \\
&\quad - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_i x) \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 h_0 x J_0(\alpha_i x) dx}{J_0^2(\alpha_i) e^{\alpha_i^2 \beta \tau}} \\
&\quad + 2\pi S_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ J_0(\alpha_i x) \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) \right. \\
&\quad \cdot e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0} / J_0^2(\alpha_i) e^{\alpha_i^2 \beta \tau} \Big\}.
\end{aligned}$$

考虑公式(9.16), 亦即  $\int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) dx = 0$ , 求得

$$\begin{aligned}
H(x, \tau) &= h_0 - 2\pi S_0 \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0} dx \\
&\quad + 2\pi S_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left[ J_0(\alpha_i x) \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 J_0(\alpha_i x) \right. \\
&\quad \cdot \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0} \Big] / J_0^2(\alpha_i) e^{\alpha_i^2 \beta \tau} \\
&= h_0 + h_1 + h_2.
\end{aligned} \tag{9.24}$$

该式中的  $S_0$  代表  $t_0$  时刻的水位降  $S$  值.

我们研究一下(9.24)式右端的第二项, 即

$$h_1 = -2\pi S_0 \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0} dx, \tag{9.25}$$

或即

$$\begin{aligned}
h_1 &= -2\pi S_0 \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x [D_1 h(\lambda_1 x) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0} \\
&\quad + D_2 h(\lambda_2 x) e^{-\lambda_2^2 \beta_0 t_0} + \dots] dx,
\end{aligned} \tag{9.26}$$

该式是可以积分的. 例如先拿第一项来说

$$\int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x D_1 h(\lambda_1 x) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0} dx = D_1 e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0} \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x h(\lambda_1 x) dx. \tag{9.27}$$

参阅公式(7.45)知

$$\int_{x_0}^1 x h(\lambda x) dx = \frac{-2J_1(\lambda_1)}{\lambda_1^2 \pi J_0(\lambda_1 x_0)}, \quad (9.28)$$

考虑到  $x_0 \rightarrow 0$ ,  $J_0(0) = 1$ , 则

$$\int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x h(\lambda_1 x) dx = \frac{-2J_1(\lambda_1)}{\pi \lambda_1^2}, \quad (9.29)$$

将(9.29)式代入(9.27), 得

$$\int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x D_1 h(\lambda_1 x) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0} dx = \frac{-2D_1 J_1(\lambda_1) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0}}{\pi \lambda_1^2}. \quad (9.30)$$

由此可以推知

$$h_1 = -2\pi S_0 \left\{ -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} D_n J_1(\lambda_n) e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0} \right\},$$

或即

$$h_1 = 4S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} D_n J_1(\lambda_n) e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0}. \quad (9.31)$$

现在转而推求方程式(9.24)右部的第三项, 亦即

$$\begin{aligned} h_1 = 2\pi S_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left[ J_0(\alpha_i x) \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) \right. \\ \left. \cdot \sum_{n=1}^{\infty} D_n h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0} \right] / J_0^2(\alpha_i) e^{\alpha_i^2 \beta_0 \tau}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

为此先确定

$$\int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) [D_1 h(\lambda_1 x) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0} + D_2 h(\lambda_2 x) e^{-\lambda_2^2 \beta_0 t_0} + \dots] dx$$

这个公式也可以分项进行积分, 例如对第一项

$$\begin{aligned} & \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) D_1 h(\lambda_1 x) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0} dx \\ &= D_1 e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0} \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) [J_0(\lambda_1 x) Y_1(\lambda_1) \\ & \quad - J_1(\lambda_1) Y(\lambda_1 x)] dx. \end{aligned} \quad (9.33)$$

在公式(9.33)中  $J_1(\lambda_1)$  和  $Y_1(\lambda_1)$  都是常数, 同时当  $\alpha_i \neq \lambda_1$

时, 参见公式(6.113)则有

$$\int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) J_0(\lambda_i x) dx = 0. \quad (9.34)$$

因此, (9.33)式的积分简化为

$$\begin{aligned} & \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) D_1 h(\lambda_i x) e^{-\lambda_i^2 \beta_0 t_0} dx \\ &= D_1 e^{-\lambda_i^2 \beta_0 t_0} J_1(\lambda_i) \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) Y_0(\lambda_i x) dx. \end{aligned} \quad (9.35)$$

为了积分(9.35)式, 设令

$$J_0(\alpha_i x) = u, \quad (9.36)$$

$$Y_0(\lambda_i x) = v. \quad (9.37)$$

因为  $J_0(\alpha_i x)$  与  $Y_0(\lambda_i x)$  是贝塞尔方程的解, 于是存在等式

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{du}{dx} \right) + \alpha_i^2 u = 0, \quad (9.38)$$

和

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dv}{dx} \right) + \lambda_i^2 v = 0. \quad (9.39)$$

将(9.38)式和(9.39)式分别乘以  $v$  和  $u$  然后相减, 得

$$uv(\alpha_i^2 - \lambda_i^2) + \frac{1}{x} \left[ v \frac{d}{dx} \left( x \frac{du}{dx} \right) - u \frac{d}{dx} \left( x \frac{dv}{dx} \right) \right] = 0$$

由此,

$$\begin{aligned} (\alpha_i^2 - \lambda_i^2) \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x uv dx &= \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x \frac{1}{x} \left[ u \frac{d}{dx} \left( x \frac{dv}{dx} \right) \right. \\ &\quad \left. - v \frac{d}{dx} \left( x \frac{du}{dx} \right) \right] dx \\ &= \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 \left[ \frac{d}{dx} \left( ux \frac{dv}{dx} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{dx} \left( vx \frac{du}{dx} \right) \right] dx \end{aligned}$$

亦即

$$(\alpha_i^2 - \lambda_i^2) \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x uv dx = \left[ x \left( u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right] \Big|_{x_0 \rightarrow 0}^1. \quad (9.40)$$

考虑公式(9.36), (9.37), 则有

$$\begin{aligned}
 (\alpha_i^2 - \lambda_1^2) \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x u v dx &= (\alpha_i^2 - \lambda_1^2) \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) Y_0(\lambda_1 x) dx \\
 &= \left[ J_0(\alpha_i x) \cdot \frac{d}{dx} Y_0(\lambda_1 x) \right. \\
 &\quad \left. - Y_0(\lambda_1 x) \cdot \frac{d}{dx} J_0(\alpha_i x) \right] \Big|_{x_0 \rightarrow 0}^1 \\
 &= [\alpha_i J_1(\alpha_i) Y_0(\lambda_1) - \lambda_1 J_0(\alpha_i) Y_1(\lambda_1)].
 \end{aligned}$$

根据公式(9.21),  $J_1(\alpha_i) = 0$ , 求得

$$\int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) Y_0(\lambda_1 x) dx = - \frac{\lambda_1 Y_1(\lambda_1) J_0(\alpha_i)}{(\alpha_i^2 - \lambda_1^2)}. \quad (9.41)$$

将(9.41)代入(9.35), 得

$$\begin{aligned}
 &\int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) D_1 h(\lambda_1 x) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0} dx \\
 &= D_1 e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0} J_1(\lambda_1) \int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) Y_0(\lambda_1 x) dx \\
 &= - \frac{\lambda_1 D_1 J_1(\lambda_1) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0}}{(\alpha_i^2 - \lambda_1^2)} [J_0(\alpha_i) Y_1(\lambda_1)]. \quad (9.42)
 \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}
 &\int_{x_0 \rightarrow 0}^1 x J_0(\alpha_i x) D_2 h(\lambda_2 x) e^{-\lambda_2^2 \beta_0 t_0} dx \\
 &= - \frac{\lambda_2 D_2 J_1(\lambda_2) e^{-\lambda_2^2 \beta_0 t_0}}{(\alpha_i^2 - \lambda_2^2)} [J_0(\alpha_i) Y_1(\lambda_2)]
 \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
 h_2 &= - 2\pi S_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ J_0(\alpha_i x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n D_n J_1(\lambda_n) e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0}}{(\alpha_i^2 - \lambda_n^2)} \right. \\
 &\quad \left. \cdot [J_0(\alpha_i) Y_1(\lambda_n)] \right\} / J_0^2(\alpha_i) e^{\alpha_i^2 \beta_0 \tau},
 \end{aligned}$$

或即

$$h_2 = - 2\pi S_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ J_0(\alpha_i x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n D_n J_1(\lambda_n) Y_1(\lambda_n)}{(\alpha_i^2 - \lambda_n^2)} e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0} / \right.$$

$$J_0(\alpha_i) \} e^{-\alpha_i^2 \beta \tau} . \quad (9.43)$$

将(9.31)和(9.43)式代入(9.24)中,最终得到公式

$$\begin{aligned} H(x, \tau) = & h_0 + 4S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} D_n J_1(\lambda_n) e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0} \\ & - 2\pi S_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_i x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n D_n J_1(\lambda_n) Y_1(\lambda_n)}{(\alpha_i^2 - \lambda_n^2)} e^{-\lambda_n^2 \beta_0 t_0}}{J_0(\alpha_i)} e^{-\alpha_i^2 \beta \tau} . \end{aligned} \quad (9.44)$$

## 四、公式的简化,计算图表的绘制与应用

通过前面的推导,得到了公式(9.44),该式是可以求解的,如能使用快速电子计算机,则该式并不算十分复杂.然而,当利用手算时,对于实际工作者来说却是比较繁难的,为此便有简化的必要.

在第七章中,我们已经讨论过这类公式的简化问题.针对本文所研究的课题,除了公式(9.44)所包含的级数与(7.49)式在形式上相似外,就研究水位恢复问题而言,水井停抽以前的工作时间  $t_0$  一般总是比较长的.基于上述原因,公式中包括“ $t_0$ ”的级数只需取其前数项,其精度即可满足生产实践的要求.

下面我们试取  $n=1, n=2, n=3$  和  $n=4$  简化(9.44)式,并相应举例加以验证.

### 1. 取 $n=1$ 时

在(9.44)式中的级数若只取  $n=1$  的一项,则得

$$\begin{aligned} H(x, \tau) = & h_0 + 4S_0 \frac{1}{\lambda_1^2} D_1 J_1(\lambda_1) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0} \\ & - 2\pi S_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_i x) \frac{\lambda_1 D_1 J_1(\lambda_1) Y_1(\lambda_1)}{(\alpha_i^2 - \lambda_1^2)} e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0}}{J_0(\alpha_i)} e^{-\alpha_i^2 \beta \tau} , \end{aligned}$$



表 9-1  $C_{\mu}$  值表

$x$				0.00	0.05	0.10	0.25	0.50	0.70	1.00
$x_1$	$\lambda_1$	$\alpha_1$	$C_{\mu 1}$	$C_{11}$	0.1876	0.1824	0.1483	0.0516	-0.0255	-0.0762
				$C_{12}$	-0.0716	-0.0651	-0.0271	0.0282	0.0152	-0.0222
0.01	$\lambda_2 = 4.290$	$\alpha_1 = 3.8317$	$C_{11}$	0.2317	0.2253	0.1935	0.1832	0.0637	-0.0315	-0.0942
		$\alpha_2 = 7.0156$	$C_{12}$	0.0367	0.0333	-0.0693	0.0139	-0.0144	-0.0078	0.0114
0.005	0.667	3.8317	$C_{11}$	0.1989	0.1935	0.1573	0.1573	0.0547	-0.0270	-0.0809
		7.0156	$C_{12}$	-0.0762	-0.0693	-0.0288	0.0300	0.0162	-0.0236	
0.002	4.214	3.8317	$C_{21}$	0.2923	0.2843	0.2311	0.2311	0.0804	-0.0397	-0.1188
		7.0156	$C_{22}$	0.0375	0.0341	0.0142	-0.0148	-0.0080	0.0116	
0.002	0.606	3.8317	$C_{11}$	0.2148	0.2089	0.1698	0.1698	0.0591	-0.0292	-0.0873
		7.0156	$C_{12}$	-0.0826	-0.0750	-0.0313	0.0325	0.0176	-0.0256	

0.002	4.146	3.8317	$C_{11}$	0.3737	0.3703	0.3601	0.2928	0.1019	-0.0503	-0.1505
		7.0156	$C_{22}$	0.0393	0.0381	0.0346	0.0144	-0.0150	-0.0081	0.0118
0.001	0.569	3.8317	$C_{11}$	0.2280	0.2259	0.2197	0.1786	0.0644	-0.0307	-0.0918
		7.0156	$C_{12}$	-0.0899	-0.0872	-0.0792	-0.0330	0.0343	0.0186	-0.0270
	4.111	3.8317	$C_{21}$	0.4286	0.4247	0.4130	0.3358	0.1168	-0.0577	-0.1726
		7.0156	$C_{22}$	0.0395	0.0383	0.0348	0.0145	-0.0151	-0.0082	0.0119
0.0003	0.516	3.8317	$C_{11}$	0.2468	0.2445	0.2378	0.1934	0.0673	-0.0332	-0.0994
		7.0156	$C_{12}$	-0.0975	-0.0945	-0.0859	-0.0358	0.0372	0.0201	-0.0293
	4.057	3.8317	$C_{21}$	0.5459	0.5409	0.5261	0.4277	0.1488	-0.0734	-0.2199
		7.0156	$C_{22}$	0.0397	0.0385	0.0350	0.0146	-0.0151	-0.0082	0.0119
0.0001	0.486	3.8317	$C_{11}$	0.2591	0.2567	0.2497	0.2030	0.0706	-0.0349	-0.1044
		7.0156	$C_{12}$	-0.1025	-0.0994	-0.0903	-0.0376	0.0391	0.0211	-0.0308
	4.030	3.8317	$C_{21}$	0.6279	0.6222	0.6051	0.4919	0.1712	-0.0845	-0.2529
		7.0156	$C_{22}$	0.0398	0.0386	0.0351	0.0146	-0.0152	-0.0082	0.0119

或即

$$\begin{aligned}
 H(x, \tau) = h_0 + \frac{2}{\lambda_1} & \left[ \frac{2S_0 D_1 J_1(\lambda_1) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0}}{\lambda_1} \right] \\
 & - \left[ \frac{2S_0 D_1 J_1(\lambda_1) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0}}{\lambda_1} \right] \\
 & \times \left[ \pi \lambda_1^2 Y_1(\lambda_1) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_i x) e^{-\alpha_i^2 \beta \tau}}{J_0^2(\alpha_i) (\alpha_i^2 - \lambda_1^2)} \right]. \quad (9.45)
 \end{aligned}$$

在(9.45)式中令

$$\frac{2S_0 D_1 J_1(\lambda_1)}{\lambda_1} e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0} = L_1, \quad (9.46)$$

则(9.45)式变为

$$H(x, \tau) = h_0 + \frac{2L_1}{\lambda_1} - \pi \lambda_1^2 L_1 Y_1(\lambda_1) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_i x) e^{-\alpha_i^2 \beta \tau}}{(\alpha_i^2 - \lambda_1^2) J_0(\alpha_i)}. \quad (9.47)$$

在(9.47)式中包含  $\alpha_i$  的级数, 由于  $\alpha_i$  具有较大的值, 而随  $i$  的增大  $\alpha_i$  值增大较快, 因而该级数收敛更快. 据作者从理论上进行的初步分析, 以及利用水力积分仪所作的模拟计算对比, 以及通过实际算例考查的结果, 认为只取该级数的前两项便能满足生产实践的精度要求, 如此, 则(9.47)式可写为

$$H(x, \tau) = h_0 + \frac{2L_1}{\lambda_1} - \pi \lambda_1^2 L_1 Y_1(\lambda_1) \sum_{i=1}^2 \frac{J_0(\alpha_i x) e^{-\alpha_i^2 \beta \tau}}{(\alpha_i^2 - \lambda_1^2) J_0(\alpha_i)}, \quad (9.48)$$

在(9.48)式中若令

$$\frac{Y_1(\lambda_1) J_0(\alpha_i x)}{(\alpha_i^2 - \lambda_1^2) J_0(\alpha_i)} = C_i, \quad (9.49)$$

则得

$$H(x, \tau) = h_0 + \frac{2L_1}{\lambda_1} - \pi \lambda_1^2 L_1 [C_1 e^{-\alpha_1^2 \beta \tau} + C_2 e^{-\alpha_2^2 \beta \tau}]. \quad (9.50)$$

我们把  $L_1$  定名为“水位恢复系数”; 把  $C_i$  称为“水位恢复计

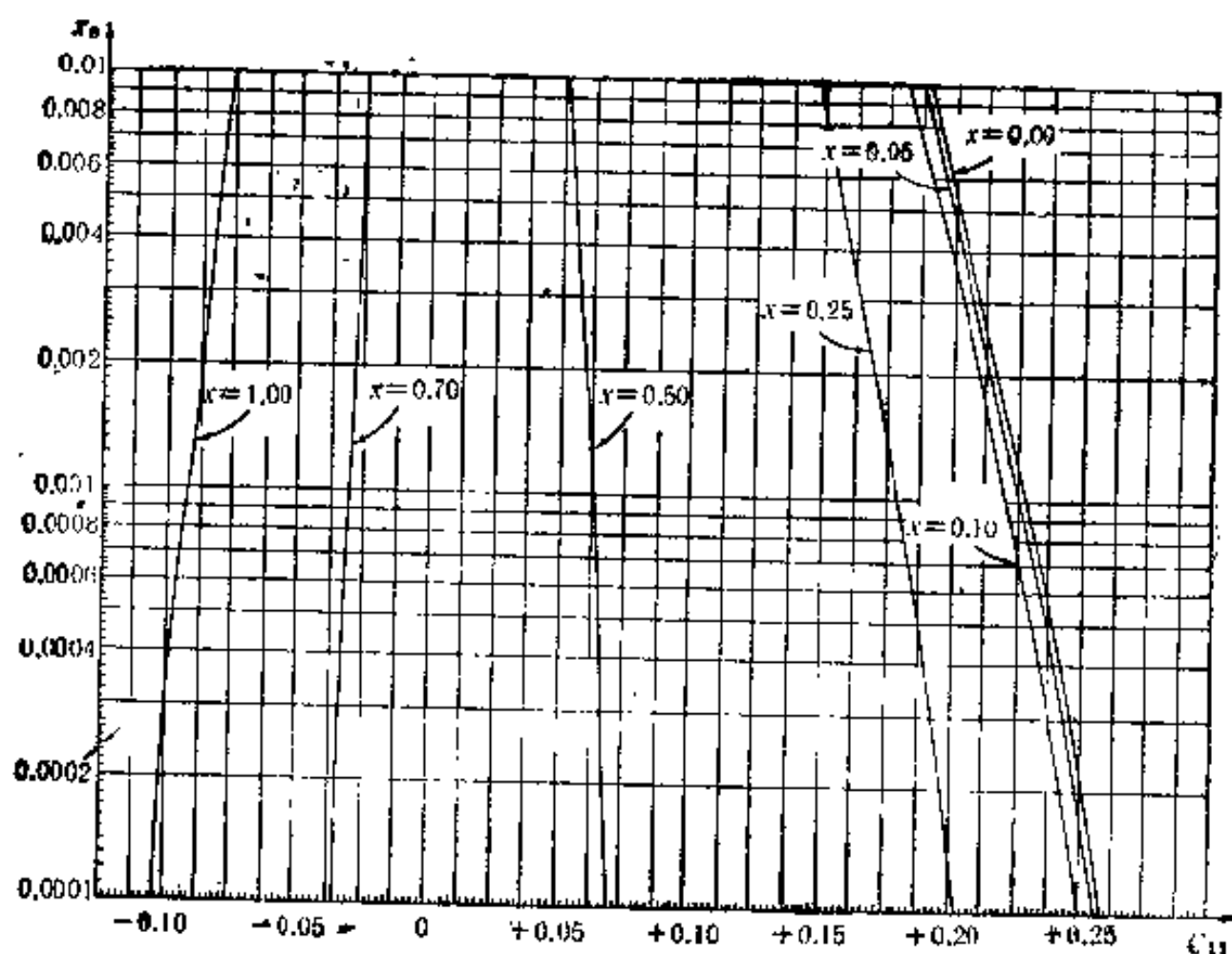


图 9-2a  $x_0-C_{11}$  关系曲线

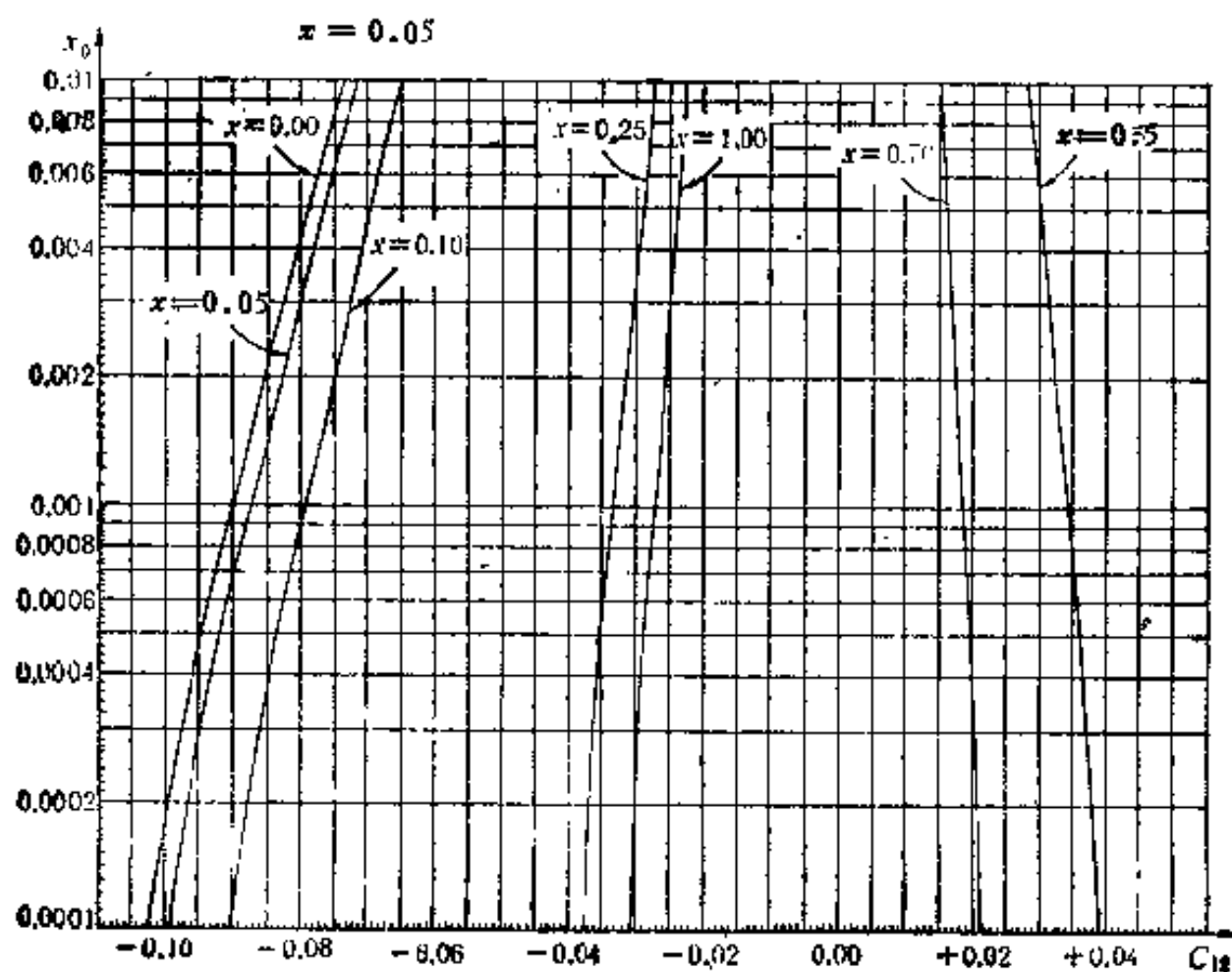


图 9-2b  $x_0-C_{12}$  关系曲线

算参数”。

有了上述公式,可按照不同的  $x_0 = \frac{r_0}{R_0}$  值选取相应的  $\lambda_1$  值,针对这些  $x_0$  值、 $\lambda_1$  值和  $\alpha_1, \alpha_2$  值计算出对应于不同  $x = \frac{r}{R_0}$  的  $C_1, C_2$  值,并将其编绘成  $C_i$  值表(见表 9-1)和  $C_i$  曲线(见图 9-2,图 9-3)。顺便指出,  $\alpha_i$  乃是方程  $J_1(\alpha_i) = 0$  的根。

## 五、算 例

有一口潜水完整井,处于下述工作条件:

- (1) 含水层起始厚度  $H_0 = 20$  米,底板可看作水平的;
- (2) 含水层渗透系数  $K = 5$  米/日; (3) 给水度  $\mu = 0.1$ ;
- (4) 井的取水半径  $R_0 = 200$  米,井的半径  $r_0 = 1$  米;
- (5) 井在降深不变的情况下工作,水位降  $S_0 = 6$  米;
- (6) 工作期间不计入渗。

抽水延续十天而终止,现需预报停抽后 1, 2, 3, 5 和第 10 天

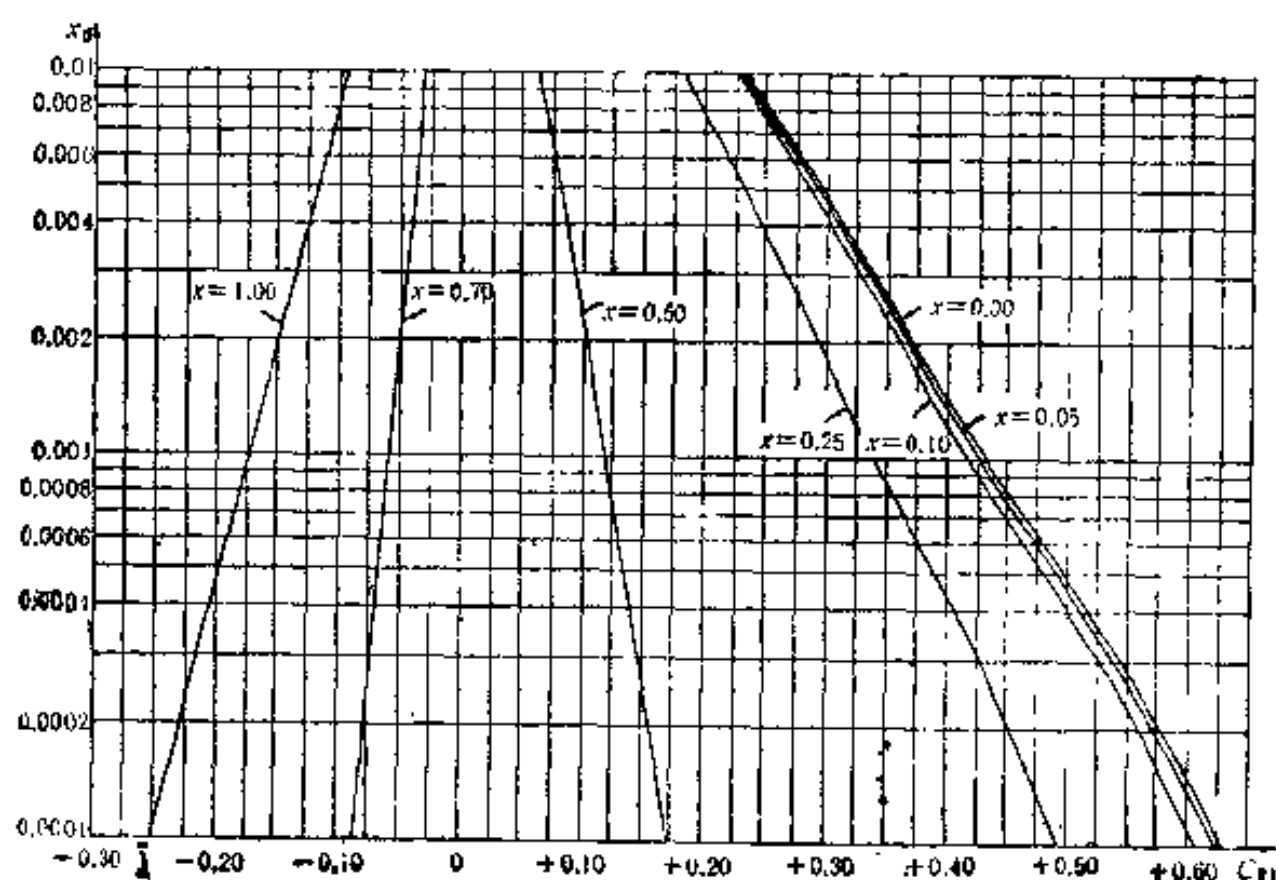


图 9-3a  $x_0-C_{21}$  关系曲线

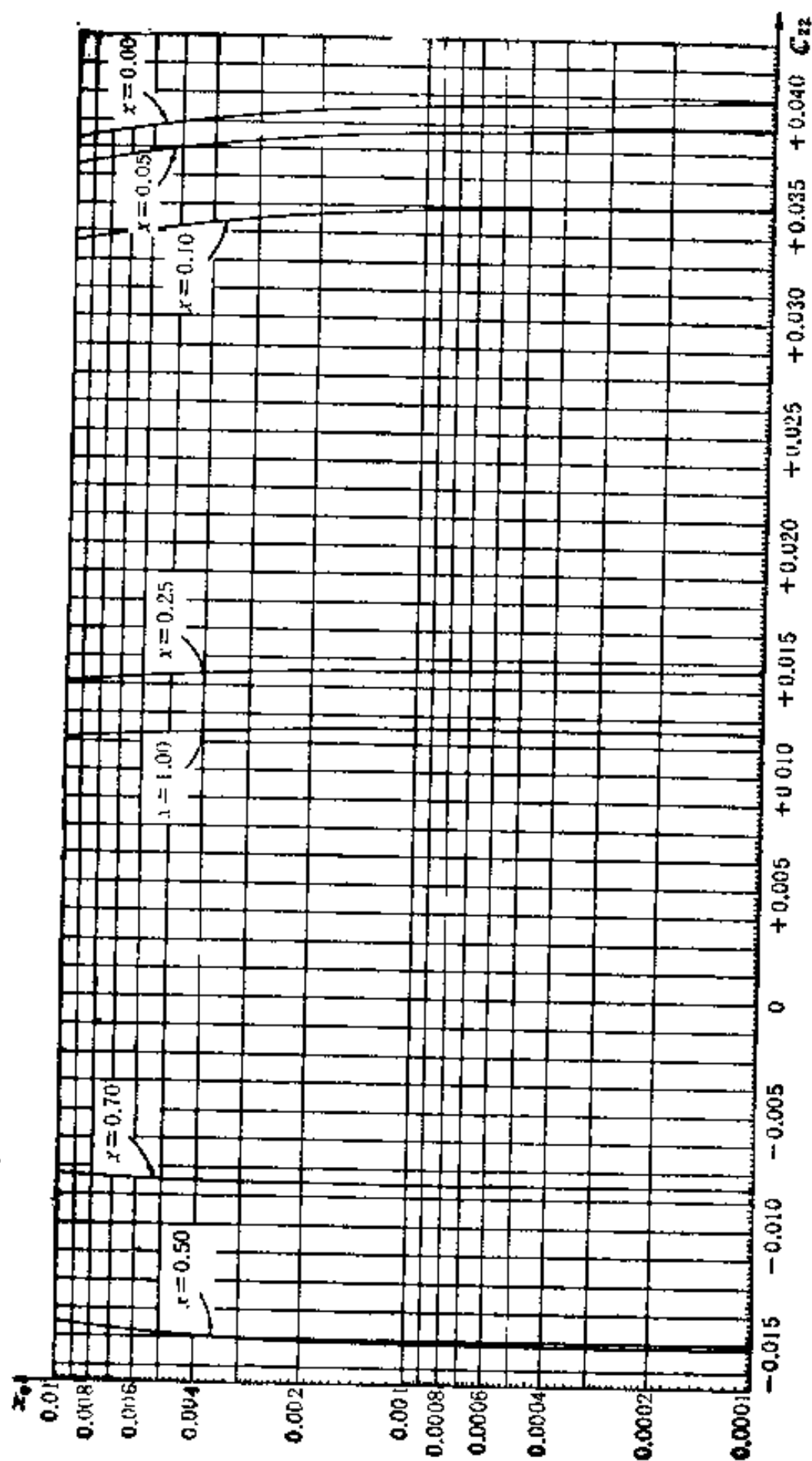


图 9-3 b  $x_0-C_{zz}$  关系曲线

的水位曲线。

解：因  $x_0 = \frac{r_0}{R_0} = \frac{1}{200} = 0.005$ ，故由表 7-1 查得  $\lambda_1 = 0.667$ ，

$D_1 = 0.350$ ，

而含水层厚度

$$H_p = \frac{H_0 + h_0}{2} = \frac{20 + 14}{2} = 17 \text{ 米，}$$

$$\beta_0 = \frac{a_0}{R_0^2} = \frac{KH_p}{\mu} / R_0^2 = \frac{5 \times 17}{0.1} / 200^2 = 0.02125.$$

利用贝塞尔函数表，当  $\lambda_1 = 0.667$  时查得

$$J_1(\lambda_1) = J_1(0.667) = +0.3154,$$

于是由(9.46)式算出

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{2S_0 D_1 J_1(\lambda_1)}{\lambda_1} e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0} \\ &= \frac{2 \times 6 \times 0.35 \times 0.3154}{0.667} e^{-0.667^2 \times 0.02125 \times 10} \\ &= 1.81. \end{aligned}$$

$C_i$  值可根据不同的  $x = \frac{r}{R_0}$  值由表 9-1 中查取，将查出的

$C_i$  值和算出的  $L_1 = 1.81$  值代进(9.50)式，则可进行各断面在不同时段的水位恢复计算。

(1) 在  $x = \frac{r}{R_0} = 0.000$  即井心处

由表 9-1 查出  $\alpha_1 = 3.8317$ ， $\alpha_2 = 7.0156$ ； $C_1 = +0.2008$ ， $C_2 = -0.0786$ ，若取  $\beta = 0.02125$ ，则

当  $t = 1$  日时

$$\begin{aligned} H(0, 1) &= h_0 + \frac{2L_1}{\lambda_1} - \pi \lambda_1^2 L_1 [C_1 e^{-\alpha_1^2 \beta t} + C_2 e^{-\alpha_2^2 \beta t}] \\ &= 14 + \frac{2 \times 1.81}{0.667} - 3.1415 \times 0.667^2 \times 1.81 \\ &\quad \times [2.008 \times e^{-3.8317^2 \times 0.02125 \times 1} - 0.0786 \times \end{aligned}$$

表 9-2  $H(0, \tau)$  计算表

$\tau$ (昼夜)	$h_0$ (米)	$\frac{2L}{\lambda_1}$ (米)	$\pi\lambda_1^2 L$ (米)	$C_1 e^{-\alpha_1^2 \beta \tau}$ (5)	$C_2 e^{-\alpha_2^2 \beta \tau}$ (6)	$H(x, \tau) = (2) + (3) - (4)[(5) + (6)] = (7)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	14	5.427	2.53	0.2008/1.366	-0.0786/2.845	19.1250
2	14	5.427	2.53	0.2008/1.366 <sup>2</sup>	-0.0786/2.845 <sup>2</sup>	19.1793
3	14	5.427	2.53	0.2008/1.366 <sup>3</sup>	-0.0786/2.845 <sup>3</sup>	19.2363
5	14	5.427	2.53	0.2008/1.366 <sup>5</sup>	-0.0786/2.845 <sup>5</sup>	19.3213
10	14	5.427	2.53	0.2008/1.366 <sup>10</sup>	-0.0786/2.845 <sup>10</sup>	19.4046

表 9-3  $H(0.05, x)$  计算表

$\tau$ (昼夜)	$h_0$ (米)	$\frac{2L}{\lambda_1}$ (米)	$\pi\lambda_1^2 L$ (米)	$C_1 e^{-\alpha_1^2 \beta \tau}$ (5)	$C_2 e^{-\alpha_2^2 \beta \tau}$ (6)	$H(x, \tau) = (2) + (3) - (4)[(5) + (6)] = (7)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	14	5.427	2.53	0.1990/1.366	-0.0762/2.845	19.1261
2	14	5.427	2.53	0.1990/1.366 <sup>2</sup>	-0.0762/2.845 <sup>2</sup>	19.1810
3	14	5.427	2.53	0.1990/1.366 <sup>3</sup>	-0.0762/2.845 <sup>3</sup>	19.2379
5	14	5.427	2.53	0.1990/1.366 <sup>5</sup>	-0.0762/2.845 <sup>5</sup>	19.322
10	14	5.427	2.53	0.1990/1.366 <sup>10</sup>	-0.0762/2.845 <sup>10</sup>	19.4048



表 9-4  $H(0.1, \tau)$  计算表

$\tau$ (昼夜)	$h_0$ (米)	$\frac{2L}{\lambda_1}$ (米)	$\pi\lambda_1^2 L$ (米)	$C_1 e^{-\alpha_1^2 \beta \tau}$	$C_2 e^{-\alpha_2^2 \beta \tau}$	$H(x, \tau) = (2) + (3) - (4) [(5) + (6)]$ (米)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	14	5.427	2.53	0.1935/1.366	-0.0693/2.845	19.1302
2	14	5.427	2.53	0.1935/1.366 <sup>2</sup>	-0.0693/2.845 <sup>2</sup>	19.1863
3	14	5.427	2.53	0.1935/1.366 <sup>3</sup>	-0.0693/2.845 <sup>3</sup>	19.2426
5	14	5.427	2.53	0.1935/1.366 <sup>5</sup>	-0.0693/2.845 <sup>5</sup>	19.3251
10	14	5.427	2.53	0.1935/1.366 <sup>10</sup>	-0.0693/2.845 <sup>10</sup>	19.4054

表 9-5 水位恢复曲线计算成果表

<div> <div>时间 <math>\tau</math> (昼夜)</div> <div><math>x</math>      <math>r</math> (米)</div> </div>		1	2	3	5	10
0.00	0	19.1250	19.1793	19.2363	19.3213	19.4046
0.05	10	19.1253	19.1807	19.2378	19.3222	19.4048
0.10	20	19.1302	19.1863	19.2426	19.3251	19.4054
0.25	50	19.1613	19.2227	19.2741	19.3438	19.4094
0.50	100	19.2991	19.3435	19.3694	19.3975	19.4209
0.70	140	19.4626	19.4585	19.4520	19.4411	19.4300
1.00	200	19.5978	19.5440	19.5099	19.4703	19.4360
备注	$x = \frac{r}{R_0}$ ; 井底高程为零; $r$ 为井轴到计算断面的距离.					

$$\times e^{-7.0156^2 \times 0.02125 \times 1}]$$

$$= 19.1250 \text{ 米.}$$

其余时刻在  $x = 0$  处的全部水位恢复值计算列入表 9-2 中。

(2) 在  $x = \frac{r}{R_0} = 0.05$ , 即  $r = 10$  米处,

查表得:  $\lambda_1 = 0.667$ ,  $\alpha_1 = 3.8317$ ,  $\alpha_2 = 7.0156$ ;  $C_1 = 0.1990$ ,

$C_2 = -0.0762$ 。将这些数字代进公式(9.50), 将全部考查时段的恢复水位值计算列入表 9-3 中。

(3) 在  $x = 0.1$ , 即  $r = 20$  米断面处的计算过程及结果如表 9-4 所列。

对上列诸表进行分析便可发现, 许多数值在计算中是相同的, 例如在(1), (2), (3), (4)栏中的数值, 至于(5), (6)栏其分母之不同仅仅表现在  $\tau$  的变化, 因而其它断面的计算并无大异, 无须重复, 今将全部计算成果列在表 9-5 中。

2. 取  $n = 1, n = 2$  两项时

在公式(9.44)中, 若取  $n = 1$  和  $n = 2$ , 而  $i$  仍取  $i = 1, i = 2$  两项, 则得

$$\begin{aligned} H(x, \tau) = & h_0 + 4S_0 \left[ \frac{1}{\lambda_1^2} D_1 J_1(\lambda_1) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\lambda_2^2} D_2 J_1(\lambda_2) e^{-\lambda_2^2 \beta_0 t_0} \right] \\ & - 2\pi S_0 \sum_{i=1}^2 \left\{ J_0(\alpha_i x) \left[ \frac{\lambda_i D_i J_1(\lambda_i) Y_1(\lambda_i)}{(\alpha_i^2 - \lambda_i^2)} e^{-\lambda_i^2 \beta_0 t_0} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\lambda_i D_i J_1(\lambda_i) Y_1(\lambda_i)}{(\alpha_i^2 - \lambda_i^2)} e^{-\lambda_i^2 \beta_0 t_0} \right] / J_0(\alpha_i) e^{\alpha_i^2 \beta \tau} \right\}, \end{aligned}$$

或即

$$\begin{aligned} H(x, \tau) = & h_0 + \frac{2}{\lambda_1} \left[ \frac{2S_0 D_1 J_1(\lambda_1) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0}}{\lambda_1} \right] \\ & - \left[ \frac{2S_0 D_1 J_1(\lambda_1) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0}}{\lambda_1} \right] \\ & \times \left[ \pi \lambda_1^2 Y_1(\lambda_1) \sum_{i=1}^2 \frac{J_0(\alpha_i x) e^{-\alpha_i^2 \beta \tau}}{J_0(\alpha_i) (\alpha_i^2 - \lambda_i^2)} \right] \\ & + \frac{2}{\lambda_2} \left[ \frac{2S_0 D_2 J_1(\lambda_2) e^{-\lambda_2^2 \beta_0 t_0}}{\lambda_2} \right] \end{aligned}$$

$$- \left[ \frac{2S_0 D_2 J_1(\lambda_2) e^{-\lambda_2^2 \beta_0 t_0}}{\lambda_2} \right] \\ \times \left[ \pi \lambda_2^2 Y_1(\lambda_2) \sum_{i=1}^2 \frac{J_0(\alpha_i x) e^{-\alpha_i^2 \beta \tau}}{J_0(\alpha_i)(\alpha_i^2 - \lambda_2^2)} \right]. \quad (9.51)$$

在(9.51)式中仍令

$$\frac{2S_0 D_1 J_1(\lambda_1) e^{-\lambda_1^2 \beta_0 t_0}}{\lambda_1} = L_1,$$

再令


$$\frac{2S_0 D_2 J_1(\lambda_2) e^{-\lambda_2^2 \beta_0 t_0}}{\lambda_2} = L_2, \quad (9.52)$$

则(9.51)式简化为

$$H(x, \tau) = h_0 + \frac{2L_1}{\lambda_1} - \pi \lambda_1^2 L_1 Y_1(\lambda_1) \sum_{i=1}^2 \frac{J_0(\alpha_i x) e^{-\alpha_i^2 \beta \tau}}{(\alpha_i^2 - \lambda_1^2) J_0(\alpha_i)} \\ + \frac{2L_2}{\lambda_2} - \pi \lambda_2^2 L_2 Y_1(\lambda_2) \sum_{i=1}^2 \frac{J_0(\alpha_i x) e^{-\alpha_i^2 \beta \tau}}{(\alpha_i^2 - \lambda_2^2) J_0(\alpha_i)}. \quad (9.53)$$

再令(9.53)式中的

表 9-6 取  $n = 1-2$  时的水位恢复计算值表

		时间 $\tau$ (昼夜)				
		1	2	3	5	10
0.00	0	19.1078	19.1673	19.2278	19.3172	19.4042
0.05	10	19.1091	19.1691	19.2295	19.3181	19.4045
0.10	20	19.1137	19.1721	19.2345	19.3211	19.4051
0.25	50	19.1484	19.2136	19.2677	19.3407	19.4093
0.50	100	19.2876	19.3410	19.3678	19.3969	19.4213
0.70	140	19.4658	19.4609	19.4539	19.4425	19.4308
1.00	200	19.6050	19.5495	19.5142	19.4729	19.4371

$$\left. \begin{aligned} \frac{Y_1(\lambda_1)J_0(\alpha_i x)}{(\alpha_i^2 - \lambda_1^2)J_0(\alpha_i)} &= C_{1i}, \\ \frac{Y_1(\lambda_2)J_0(\alpha_i x)}{(\alpha_i^2 - \lambda_2^2)J_0(\alpha_i)} &= C_{2i}, \end{aligned} \right\} \quad (9.54)$$

则(9.53)式又变为

$$\begin{aligned} H(x, \tau) = h_0 + \frac{2L_1}{\lambda_1} - \pi\lambda_1^2 L_1 \sum_{i=1}^2 C_{1i} e^{-\alpha_i^2 \tau} + \frac{2L_2}{\lambda_2} \\ - \pi\lambda_2^2 L_2 \sum_{i=1}^2 C_{2i} e^{-\alpha_i^2 \tau}. \end{aligned} \quad (9.55)$$

利用(9.55)式仍按前例资料计算的水位恢复值列入表 9.6 中。

### 3. 取含 $n$ 级数的前三项

若取  $n=1, n=2, n=3$ , 则由(9.44)式得

$$H(x, \tau) = h_0 + \sum_{n=1}^3 \left[ \frac{2L_n}{\lambda_n} - \pi\lambda_n^2 L_n \sum_{i=1}^2 C_{ni} e^{-\alpha_i^2 \tau} \right], \quad (9.56)$$

式中

$$C_{ni} = \frac{Y_1(\lambda_n)J_0(\alpha_i x)}{(\alpha_i^2 - \lambda_n^2)J_0(\alpha_i)}, \quad (9.57)$$

$$L_n = \frac{2S_0 D_n J_1(\lambda_n) e^{-\lambda_n^2 \rho_0' \rho_0}}{\lambda_n}, \quad (9.58)$$

$$n = 1, 2, 3; i = 1, 2.$$

仍用前例资料,由(9.56)式可得  $n=1, 2, 3$  时的水位恢复计算值列入表 9-7 中。

由计算过程发现,随着项数  $n$  的增多,级数迅速收敛。表 9-7 中的对比数字也证明了这一点。例如  $n$  取两项和三项的计算结果在取四位数时完全一样。因此,对本例而言,用  $n$  标明的级数仅取两项已足够精确了。

图 9-4 是取  $n=1, 2$  两项时根据表 9-7 绘制的不同时刻水位恢复曲线。

表 9-7  $n$  取不同项时的水位恢复计算成果表

<div> <div>时间 <math>\tau</math> (昼夜)</div> <div> <math>x</math>  <math>r</math> (米) </div> </div>		1	2	3	5	10
0.00	0	$n = 1; 19.1250$	19.1793	19.2363	19.3213	19.4046
		$n = 1, 2; 19.1078$	19.1673	19.2278	19.3172	19.4042
		$n = 1, 2, 3; 19.1078$	19.1673	19.2278	19.3172	19.4042
0.05	10	$n = 1; 19.1253$	19.1807	19.2378	19.3222	19.4048
		$n = 1, 2; 19.1091$	19.1691	19.2295	19.3181	19.4045
		$n = 1, 2, 3; 19.1091$	19.1691	19.2295	19.3181	19.4045
0.10	20	$n = 1; 19.1302$	19.1863	19.2426	19.3251	19.4045
		$n = 1, 2; 19.1137$	19.1721	19.2345	19.3211	19.4051
		$n = 1, 2, 3; 19.1137$	19.1721	19.2345	19.3211	19.4045
0.25	50	$n = 1; 19.1613$	19.2227	19.2741	19.3438	19.4094
		$n = 1, 2; 19.1484$	19.2136	19.2677	19.3407	19.4093
		$n = 1, 2, 3; 19.1484$	19.2136	19.2677	19.3407	19.4093
0.50	100	$n = 1; 19.2991$	19.3435	19.3694	19.3975	19.4209
		$n = 1, 2; 19.2876$	19.3410	19.3678	19.3969	19.4213
		$n = 1, 2, 3; 19.2876$	19.3410	19.3678	19.3969	19.4213
0.70	140	$n = 1; 19.4626$	19.4585	19.4520	19.4411	19.4300
		$n = 1, 2; 19.4658$	19.4609	19.4539	19.4425	19.4308
		$n = 1, 2, 3; 19.4658$	19.4609	19.4539	19.4425	19.4308
1.00	200	$n = 1; 19.5978$	19.5440	19.5099	19.4703	19.4360
		$n = 1, 2; 19.6050$	19.5495	19.5142	19.4729	19.4371
		$n = 1, 2, 3; 19.6050$	19.5495	19.5142	19.4729	19.4371

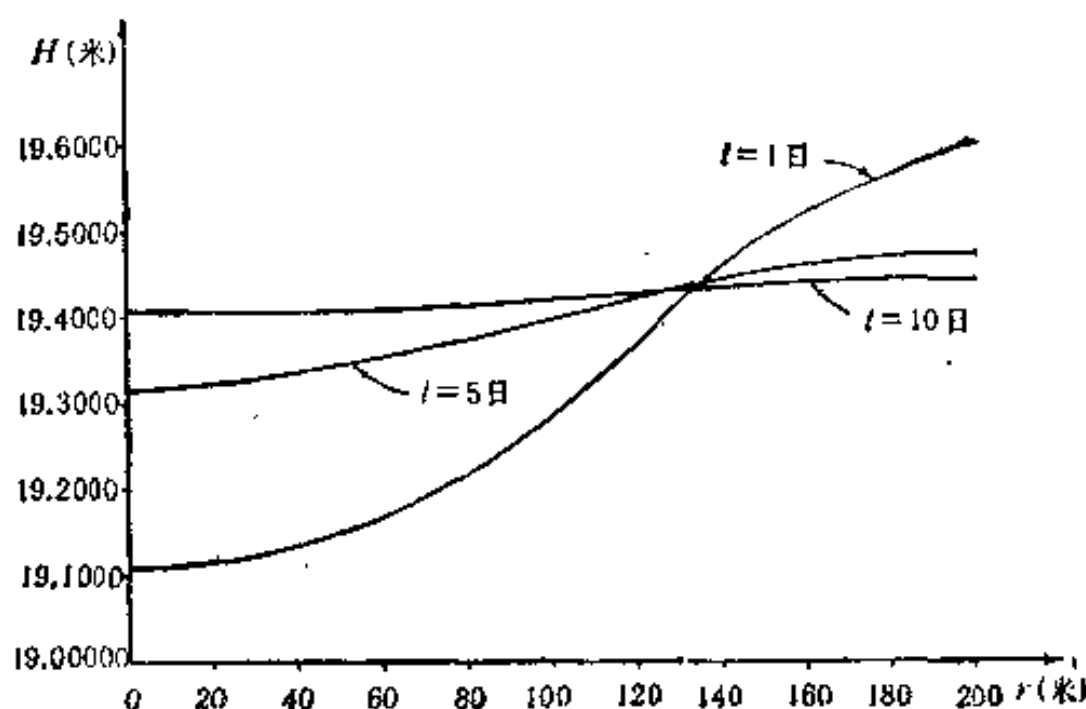


图 9-4 水位恢复曲线图

## 六、关于推导公式(9.19)和(9.20)的几点说明

1. 在求得通用公式 (9.19), (9.20) 之后, 又把它们简化为 (9.48), (9.50), (9.55) 及 (9.56) 的形式, 并举算例说明其应用. 现在尚需解释的是, 为什么在求解基本方程 (9.1), 推导公式 (9.19) 和 (9.20) 时, 需要采用 (9.3) 那种分离变量的形式, 也就是说为什么要在一般形式中加入一个常数项  $A_0$  呢? 而这个  $A_0$  在其它一些情况下, 例如在第七章的公式 (7.9) 中并未出现.

对本课题, 如果象 (7.9) 那样去掉  $A_0$ , 而采用

$$H(r, \tau) = h(r)T(\tau), \quad (9.59)$$

则将解出另一种结果:

$$H(r, \tau) = -\frac{2}{R_0^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_i r) \int_{r_0 \rightarrow 0}^{\infty} r J_0(\alpha_i r) f(r) dr}{J_0^2(\alpha_i R_0)} e^{-\alpha_i^2 \tau}. \quad (9.60)$$

该式与 (9.19) 式相比缺少一项

$$\frac{2}{R_0^2} \int_{r_0 \rightarrow 0}^{R_0} r f(r) dr.$$

当利用公式(9.60)求解本文第二节中的课题  $f(r) = h_0$  时, 将会得到一个错误的结果  $H(r, \tau) = 0$ . 其所以会出现这种情况是由于本文中所研究的课题与我们在第七章中所讨论的课题具有不同的物理内涵. 不透水边界中的地下水, 水位恢复之后的水深不应为零, 而应当是停抽后最初各种水位的某个平均值, 也就是实际含水层的总体积(包括水在内)除以含水层的面积. 从数学概念上来说, 就应在(9.50)式中加入一个常数项, 这就象在傅里叶级数的余弦展开式中增加那个常数项一样.

2. 由公式(9.19), (9.20)以及表 9-5, 图 9-4 还可以得出如下结论:

(1) 水位恢复速度开始很快, 随后逐渐变慢;

(2) 在公式(9.19)中, 当  $\tau \rightarrow \infty$  时,  $H(r, \tau) = 2 \int_{r_0 \rightarrow 0}^{R_0} r f(r) dr$ ,

这在理论上表明只有在时间无限长时, 水位才能完全恢复, 实际的观测表明恢复过程的完成, 的确需要很长的时间;

(3) 在水位等于平均水位的断面上, 在恢复过程中这里只会发生水的侧向流动, 而水位保持不变.

## 第十章 井水位及边界水位均为 定值时割离井的渗流计算

前几章探讨了井中水位降固定而外边界不透水的课题。本章将研究另外一种典型情况,即井仍为单井,它具有一个半径为  $R_0$  的取水周界,该周界不再是隔水的,而是定水位供水边界,井中的工作水位亦为常数。

在抽水开始时刻,地下水面呈某种曲面  $H(r, 0) = f(r)$ 。

### 一、水位计算公式的推导

表征该课题的方程式仍为(2.19)式,即

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right), \quad r_0 \leq r \leq R_0 \quad (10.1)$$

边界条件和起始条件为

$$H(r_0, t) = H_1 = \text{const}, \quad (10.2)$$

$$H(R_0, t) = H_2 = \text{const}, \quad (10.3)$$

$$H(r, 0) = f(r). \quad (10.4)$$

式中的符号参看图 7-2 及其说明。

该课题的解答即归结为寻求满足条件(10.2)–(10.4)的方程(10.1)的解。为此,参见文献[36],[37],[38],可将  $H(r, t)$  分成两个函数,即

$$H(r, t) = R(r) + U(r, t), \quad (10.5)$$

该二函数应这样选取:函数  $R(r)$  只是半径  $r$  的函数,且能满足常微分方程

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} = 0, \quad (10.6)$$



及边界条件

$$R(r) = H_1, \quad (10.7)$$

$$R(R_0) = H_2. \quad (10.8)$$

而函数  $U(r, t)$  能够满足方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad (10.9)$$

及为零的边界条件:

$$U(r_0, t) = 0, \quad (10.10)$$

$$U(R_0, t) = 0; \quad (10.11)$$

以及起始条件

$$U(r, 0) = f(r) - R(r). \quad (10.12)$$

所选择的(10.5)式中两个函数不仅能满足方程(10.1),而且能够满足方程(10.2)——(10.4). 为了验证,可将(10.5)式代入(10.1)式,得

$$\frac{dR}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = a \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + a \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right)$$

由于函数  $R$  不随时间而变,因此  $\frac{dR}{dt} = 0$ ,又由于  $R$  及  $U$  满足方程(10.6)和(10.9),从而也就满足方程(10.1). 同时边界条件(10.2)和(10.3)也能得到满足,因为按照(10.7), (10.8), (10.10), (10.11)式

$$H(r_0, t) = R(r_0) + U(r_0, t) = H_1 + 0 = H_1,$$

$$H(R_0, t) = R(R_0) + U(R_0, t) = H_2 + 0 = H_2.$$

且因

$$H(r, 0) = R(r) + U(r, 0) = R(r) + f(r) - R(r) = f(r),$$

所以边界条件(10.4)也就得到满足.

现在通过求解辅助函数寻求课题的解.

方程(10.6)——(10.8)的求解是十分简单的,令

$$\frac{dR}{dr} = w,$$

将其代入(10.6)式,得

$$\frac{dw}{dr} + \frac{w}{r} = 0,$$

亦即

$$\frac{dw}{w} = -\frac{dr}{r},$$

积分而得

$$\ln w = -\ln r + \ln C_1,$$

即

$$w = \frac{C_1}{r},$$

从而

$$\frac{dR}{dr} = \frac{C_1}{r},$$

再次分离变量积分而得

$$R(r) = C_1 \ln r + C_2. \quad (10.13)$$

式中的  $C_1, C_2$  可利用边界条件(10.7), (10.8)决定, 即

$$\left. \begin{aligned} C_1 \ln r_0 + C_2 &= H_1, \\ C_1 \ln R_0 + C_2 &= H_2, \end{aligned} \right\}$$

由此, 得

$$C_1 = \frac{H_2 - H_1}{\ln \frac{R_0}{r_0}}, \quad C_2 = \frac{H_1 \ln R_0 - H_2 \ln r_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}}.$$

将  $C_1, C_2$  代入(10.13)式, 则得函数

$$R(r) = \frac{1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \left[ H_1 \ln \frac{R_0}{r} + H_2 \ln \frac{r}{r_0} \right]. \quad (10.14)$$

这里所得的由(10.14)表达的函数  $R(r)$  便是满足边界条件(10.7), (10.8)的承压地下水向井孔作稳定运动的方程式<sup>1)</sup>。该式

1) 潜水的浸润线公式可导出为

$$H^2 = \frac{1}{\lg \frac{R_0}{r_0}} \left( H_1^2 \lg \frac{r}{r_0} + H^2 \lg \frac{R_0}{r} \right).$$

可以由裘布依公式直接推得。

下面进一步寻找辅助方程(10.9)–(10.12)的解。为此，我们再次使用傅里叶分离变量法，设令

$$U(r, t) = \rho(r)\theta(t), \quad (10.15)$$

(10.15)式中的函数  $\rho$  只与距离  $r$  有关，而函数  $\theta$  只与时间  $t$  有关，将(10.15)式代进(10.9)式，得

$$a\theta' = a\left(\rho''\theta + \frac{1}{r}\rho'\theta\right),$$

即

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{a\left(\rho'' + \frac{1}{r}\rho'\right)}{\rho}. \quad (10.16)$$

至此，与求解隔水边界时的分析一样，可令

$$\frac{\theta'}{a\theta} = \frac{\left(\rho'' + \frac{1}{r}\rho'\right)}{\rho} = -\eta^2, \quad (10.17)$$

由此，得

$$\frac{\theta'}{a\theta} = -\eta^2, \quad (10.18)$$

$$\rho'' + \frac{1}{r}\rho' + \eta^2\rho = 0, \quad (10.19)$$

从而，得

$$\theta = De^{-a\eta^2 t}. \quad (10.20)$$

式中  $D$  为待定常数。

而方程(10.19)为贝塞尔方程，其通解为

$$\rho = AJ_0(\eta r) + BY_0(\eta r), \quad (10.21)$$

故知(10.9)式的解为

$$U(r, t) = De^{-\eta^2 t}[AJ_0(\eta r) + BY_0(\eta r)]. \quad (10.22)$$

为了确定(10.22)式中的常数，可利用边界条件(10.10)，(10.11)，由此知

$$\left. \begin{aligned} A J_0(\eta r_0) + B Y_0(\eta r_0) &= 0, & a) \\ A J_0(\eta R_0) + B Y_0(\eta R_0) &= 0. & b) \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

系数  $A$  和  $B$  不能同时为零, 否则 (10.22) 式表示的水位将始终为零, 这将与理不通, 这同讨论 (7.15) 式时的情况相同, 若要

$A \neq B \neq 0$ , 则应使行列式

$$\begin{vmatrix} J_0(\eta r_0) & Y_0(\eta r_0) \\ J_0(\eta R_0) & Y_0(\eta R_0) \end{vmatrix} = 0, \quad (10.24)$$

或即

$$J_0(\eta R_0) Y_0(\eta r_0) - J_0(\eta r_0) Y_0(\eta R_0) = 0. \quad (10.25)$$

由此可知, 课题的特征值  $\eta$  便是方程 (10.25) 的根. 换言之, 特征值  $\eta$  可由方程 (10.25) 求得.

可以证明, 由 (10.25) 式表示的这个特征方程, 没有复根, 但有正实根群  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ , 且与解 (10.22) 的形式相对应,

即

$$U_n(r, t) = D_n e^{-a\eta_n^2 t} [A_n J_0(\eta_n r) + B_n Y_0(\eta_n r)]. \quad (10.26)$$

由 (10.23a) 又知

$$\frac{B}{A} = - \frac{J_0(\eta r_0)}{Y_0(\eta r_0)}, \quad (10.27)$$

因而

$$\begin{aligned} U_n(r, t) &= D_n e^{-a\eta_n^2 t} \left[ A_n J_0(\eta_n r) - \frac{A_n J_0(\eta_n r_0)}{Y_0(\eta_n r_0)} Y_0(\eta_n r) \right] \\ &= \frac{D_n A_n}{Y_0(\eta_n r_0)} e^{-a\eta_n^2 t} [J_0(\eta_n r) Y_0(\eta_n r_0) \\ &\quad - J_0(\eta_n r_0) Y_0(\eta_n r)], \end{aligned} \quad (10.28)$$

若令

$$C_n = \frac{D_n A_n}{Y_0(\eta_n r_0)}, \quad (10.29)$$

$$V_0(\eta_n r) = J_0(\eta_n r) Y_0(\eta_n r_0) - J_0(\eta_n r_0) Y_0(\eta_n r), \quad (10.30)$$

则 (10.28) 式可改写为

$$U_n(r, t) = C_n e^{-a\eta_n^2 t} V_0(\eta_n r), \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (10.31)$$

而无穷级数的和

$$U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\eta_n^2 t} V_0(\eta_n r), \quad (10.32)$$

也正是方程(10.9)的解。

为了确定系数 $C_n$ ，可利用起始条件(10.12)，设若在(10.32)中令 $t = 0$ ，则得

$$f(r) - R(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n V_0(\eta_n r), \quad (10.33)$$

将等式(10.33)之两端同乘 $rV_0(\eta_K r)$ ，并在 $r_0$ 至 $R_0$ 区间积分之，得

$$\begin{aligned} & \int_{r_0}^{R_0} r f(r) V_0(\eta_K r) dr - \int_{r_0}^{R_0} r R(r) V_0(\eta_K r) dr \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_{r_0}^{R_0} r V_0(\eta_n r) V_0(\eta_K r) dr. \end{aligned} \quad (10.34)$$

可以证明，在(10.34)式中对于 $n \neq K$ 的情况<sup>[1]</sup>

$$\int_{r_0}^{R_0} r V_0(\eta_n r) V_0(\eta_K r) dr = 0, \quad (10.35)$$

亦即级数的所有项均为零。

这个结果可以证明如下，参见文献[4]：

因为

$$\begin{aligned} & \int_{r_0}^{R_0} r V_0(\eta_n r) V_0(\eta_K r) dr \\ &= \frac{1}{\eta_K^2 - \eta_n^2} \left[ r V_0(\eta_n r) \frac{dV_0(\eta_K r)}{dr} - r V_0(\eta_K r) \frac{dV_0(\eta_n r)}{dr} \right]_{r_0}^{R_0} \\ &= \frac{1}{\eta_K^2 - \eta_n^2} [\eta_K r V_0(\eta_n r) V_1(\eta_K r) - \eta_n r V_0(\eta_K r) V_1(\eta_n r)]_{r_0}^{R_0} \\ &= \frac{1}{\eta_K^2 - \eta_n^2} [\eta_K R_0 V_0(\eta_n R_0) V_1(\eta_K R_0) - \eta_n R_0 V_0(\eta_K R_0) V_1(\eta_n R_0) \\ & \quad - \eta_K r_0 V_0(\eta_n r_0) V_1(\eta_K r_0) + \eta_n r_0 V_0(\eta_K r_0) V_1(\eta_n r_0)], \end{aligned} \quad (10.36)$$

式中 $V_0(\eta r)$ 按(10.30)式确定，而

$$V_1(\eta r) = J_1(\eta r)Y_0(\eta r_0) - J_0(\eta r_0)Y_1(\eta r), \quad (10.37)$$

显然, 如果  $\eta$  是方程(10.25)的根, 则因

$$V_0(\eta R_0) = J_0(\eta R_0)Y_0(\eta r_0) - J_0(\eta r_0)Y_1(\eta R_0); \quad (10.38)$$

而

$$J_0(\eta R_0)Y_0(\eta r_0) - J_0(\eta r_0)Y_0(\eta R_0) = 0,$$

故知

$$V_0(\eta R_0) = 0. \quad (10.39)$$

从而在(10.36)式中, 右端的前两项为零.

又由(10.30)式知

$$V_0(\eta r_0) = J_0(\eta r_0)Y_0(\eta r_0) - J_0(\eta r_0)Y_0(\eta r_0) = 0, \quad (10.40)$$

故在(10.36)式中的右端后两项亦为零, 从而可证, 当  $n \neq K$  时

$$\int_{r_0}^{R_0} r V_0(\eta_n r) V_0(\eta_K r) dr = 0. \quad (10.35)$$

亦即函数系

$$V_0(\eta_1 r), V_0(\eta_2 r), V_0(\eta_3 r), \dots$$

在区间  $[r_0, R_0]$  上对所有的  $r$  是正交的.

于是可知, 级数(10.34)除了  $n = K$  的一项之外, 其余的项均为零. 因而(10.34)式可改写为

$$\begin{aligned} & \int_{r_0}^{R_0} r f(r) V_0(\eta_K r) dr = \int_{r_0}^{R_0} r R(r) V_0(\eta_K r) dr \\ & = C_K \int_{r_0}^{R_0} r V_0^2(\eta_K r) dr. \end{aligned} \quad (10.41)$$

根据公式(6.76)

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{R_0} r V_0^2(\eta_K r) dr &= \left\{ \frac{r^2}{2} [V_0^2(\eta_K r) + V_1^2(\eta_K r)] \right\}_{r_0}^{R_0} \\ &= \frac{R_0^2}{2} [V_0^2(\eta_K R_0) + V_1^2(\eta_K R_0)] \\ &\quad - \frac{r_0^2}{2} [V_0^2(\eta_K r_0) + V_1^2(\eta_K r_0)], \end{aligned}$$

式中  $V_0(\eta r)$ ,  $V_1(\eta r)$  仍为(10.30)及(10.37)式表示之函数, 于是当注意到公式(10.38)及(10.39)时, 则得

$$\int_{r_0}^{R_0} r V_0^2(\eta_K r) dr = \frac{1}{2} [R_0^2 V_1^2(\eta_K R_0) - r_0^2 V_1^2(\eta_K r_0)]; \quad (10.42)$$

由公式(6.77)知

$$J_1(x) Y_0(x) - J_0(x) Y_1(x) = \frac{2}{\pi x}, \quad (10.43)$$

故

$$\begin{aligned} V_1(\eta_K r_0) &= J_1(\eta_K r_0) Y_0(\eta_K r_0) - J_0(\eta_K r_0) Y_1(\eta_K r_0) \\ &= \frac{2}{\pi \eta_K r_0}; \end{aligned} \quad (10.44)$$

又从公式(10.25)知

$$Y_0(\eta r_0) = \frac{J_0(\eta r_0) Y_0(\eta R_0)}{J_0(\eta r_0)}, \quad (10.45)$$

从而

$$\begin{aligned} V_1(\eta_K R_0) &= J_1(\eta_K R_0) Y_0(\eta_K r_0) - J_0(\eta_K r_0) Y_1(\eta_K R_0) \\ &= \frac{J_1(\eta_K R_0) J_0(\eta_K r_0) Y_0(\eta_K R_0)}{J_0(\eta_K R_0)} - J_0(\eta_K r_0) Y_1(\eta_K R_0) \\ &= \frac{J_0(\eta_K r_0)}{J_0(\eta_K R_0)} [J_1(\eta_K R_0) Y_0(\eta_K R_0) \\ &\quad - J_0(\eta_K R_0) Y_1(\eta_K R_0)], \end{aligned} \quad (10.46)$$

考虑(10.43)式的关系,则(10.46)式变为

$$V_1(\eta_K R_0) = \frac{J_0(\eta_K r_0)}{J_0(\eta_K R_0)} \frac{2}{\pi \eta_K R_0}. \quad (10.47)$$

将(10.44)式、(10.47)式表示之关系代入(10.42)式中,得

$$\int_{r_0}^{R_0} r V_0^2(\eta_K r) dr = \frac{2[J_0^2(\eta_K r_0) - J_0^2(\eta_K R_0)]}{\pi^2 \eta_K^2 J_0^2(\eta_K R_0)}, \quad (10.48)$$

在求得(10.48)式之后,将其代入(10.41)式,便可确定  $C_K$  值,

即

$$\begin{aligned} C_K &= \frac{\pi^2 \eta_K^2 J_0^2(\eta_K R_0)}{2[J_0^2(\eta_K r_0) - J_0^2(\eta_K R_0)]} \left\{ \int_{r_0}^{R_0} r f(r) V_0(\eta_K r) dr \right. \\ &\quad \left. - \int_{r_0}^{R_0} r R(r) V_0(\eta_K r) dr \right\}. \end{aligned} \quad (10.49)$$

将(10.49)式表示之  $C_K$  代入(10.32)式,得

$$\begin{aligned}
 U(r, t) = & \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2 J_0^2(\eta_n R_0) \int_{r_0}^{R_0} r f(r) V_0(\eta_n r) dr}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} \\
 & \cdot e^{-a\eta_n^2 t} V_0(\eta_n r) - \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \\
 & \cdot \frac{\eta_n^2 J_0^2(\eta_n R_0) \int_{r_0}^{R_0} r R(r) V_0(\eta_n r) dr}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} e^{-a\eta_n^2 t} V_0(\eta_n r).
 \end{aligned}
 \tag{10.50}$$

由于  $R(r)$  已经求出如公式(10.14)所示,故知

$$\begin{aligned}
 \int_{r_0}^{R_0} r R(r) V_0(\eta_n r) dr = & \frac{1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \int_{r_0}^{R_0} r \left[ H_1 \ln \frac{R_0}{r} \right. \\
 & \left. + H_2 \ln \frac{r}{r_0} \right] V_0(\eta_n r) dr
 \end{aligned}$$

上式的积分采用分部积分法,为此设令

$$u = H_1 \ln \frac{R_0}{r} + H_2 \ln \frac{r}{r_0};$$

$$dv = r V_0(\eta_n r) dr;$$

于是

$$du = (H_2 - H_1) \frac{dr}{r};$$

又由式(6.64)知

$$v = \frac{r}{\eta_n} V_1(\eta_n r), \tag{10.51}$$

从而

$$\begin{aligned}
 \int_{r_0}^{R_0} r R(r) V_0(\eta_n r) dr = & \frac{1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \left\{ \left[ \left( H_1 \ln \frac{R_0}{r} + H_2 \ln \frac{r}{r_0} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \frac{r}{\eta_n} V_1(\eta_n r) \right]_{r_0}^{R_0} - \frac{H_2 - H_1}{\eta_n} \int_{r_0}^{R_0} V_1(\eta_n r) dr \right\}
 \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \left\{ \left[ H_2 \ln \frac{R_0}{r_0} \times \frac{R_0}{\eta_n} V_1(\eta_n R_0) - H_1 \ln \frac{R_0}{r_0} \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{r_0}{\eta_n} V_1(\eta_n r_0) + \frac{H_2 - H_1}{\eta_n^2} V_0(\eta_n r) \right]_{r_0}^{R_0} \right\} \quad (10.52)$$

將 (10.47)、(10.44)、(10.39) 及 (10.40) 式表示之关系代入 (10.52) 式, 則得

$$\int_{r_0}^{R_0} r R(r) V_0(\eta_n r) dr = H_2 \frac{R_0}{\eta_n} \frac{2}{\pi \eta_n R_0} \frac{J_0(\eta_n r_0)}{J_0(\eta_n R_0)} \\ - H_1 \frac{r_0}{\eta_n} \frac{2}{\pi \eta_n r_0} \\ = \frac{2[H_2 J_0(\eta_n r_0) - H_1 J_0(\eta_n R_0)]}{\pi \eta_n^2 J_0(\eta_n R_0)}, \quad (10.53)$$

將所得积分值 (10.53) 代入 (10.50) 式, 並將所得結果与 (10.14) 式相加, 則得 (10.1) — (10.4) 式之解为

$$H(r, t) = \frac{1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \left[ H_1 \ln \frac{R_0}{r} + H_2 \ln \frac{r}{r_0} \right] \\ + \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2 J_0^2(\eta_n R_0) \int_{r_0}^{R_0} r f(r) V_0(\eta_n r) dr}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} e^{-\eta_n^2 t} V_0(\eta_n r) \\ - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_2 J_0(\eta_n r_0) - H_1 J_0(\eta_n R_0)}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} J_0(\eta_n R_0) e^{-\eta_n^2 t} V_0(\eta_n r). \quad (10.54)$$

## 二、起始水位为常数时的水位计算公式

对此

$$H(r, 0) = f(r) = H_0 = \text{const}, \quad (10.55)$$

則因

$$\int_{r_0}^{R_0} r f(r) V_0(\eta_n r) dr = H_0 \int_{r_0}^{R_0} r V_0(\eta_n r) dr, \quad (10.56)$$

故由(6.64)式知

$$\begin{aligned}
 \int_{r_0}^{R_0} r f(r) V_0(\eta_n r) dr &= H_0 \int_{r_0}^{R_0} r V_0(\eta_n r) dr \\
 &= H_0 \frac{1}{\eta_n} [r V_1(\eta_n r)]_{r_0}^{R_0} \\
 &= \frac{H_0}{\eta_n} [R_0 V_1(\eta_n R_0) - r_0 V_1(\eta_n r_0)].
 \end{aligned} \tag{10.57}$$

考虑到关系式(10.44)及(10.47),得

$$\begin{aligned}
 \int_{r_0}^{R_0} r f(r) V_0(\eta_n r) dr &= H_0 \int_{r_0}^{R_0} r V_0(\eta_n r) dr \\
 &= \frac{2H_0}{\pi \eta_n^2} \cdot \frac{J_0(\eta_n r_0) - J_0(\eta_n R_0)}{J_0(\eta_n R_0)}.
 \end{aligned} \tag{10.58}$$

将此式代入(10.53)式中,则得起始水位呈水平时的解为

$$\begin{aligned}
 H(r, t) &= \frac{1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \left[ H_1 \ln \frac{R_0}{r} + H_2 \ln \frac{r}{r_0} \right] \\
 &\quad + \pi H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\eta_n R_0)}{J_0(\eta_n r) + J_0(\eta_n R_0)} e^{-\pi \eta_n^2 t} V_0(\eta_n r) \\
 &\quad - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_2 J_0(\eta_n r_0) - H_1 J_0(\eta_n R_0)}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} \\
 &\quad \cdot J_0(\eta_n R_0) e^{-\pi \eta_n^2 t} V_0(\eta_n r).
 \end{aligned} \tag{10.59}$$

### 三、水位计算公式的另一种形式

如果由(10.27)式,令

$$B = - \frac{A J_0(\eta R_0)}{Y_0(\eta R_0)}, \tag{10.60}$$

将(10.60)代入(10.28)式,得

$$U_n(r, t) = \frac{D_n A_n}{Y_0(\eta_n R_0)} e^{-\pi \eta_n^2 t} [J_0(\eta_n r) Y_0(\eta_n R_0)$$

$$\begin{aligned}
& - J_0(\eta_n R_0) Y_0(\eta_n r)] \\
& = E_n e^{-a \eta_n^2 t} U_0(\eta_n r). \quad (10.61)
\end{aligned}$$

式中

$$E_n = \frac{D_n A_n}{Y_0(\eta_n R_0)}, \quad (10.62)$$

$$U_0(\eta_n r) = J_0(\eta_n r) Y_0(\eta_n R_0) - J_0(\eta_n R_0) Y_0(\eta_n r), \quad (10.63)$$

因而当  $t = 0$  时, 考虑边界条件(10.12), 得

$$f(r) - R(r) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n U_0(\eta_n r). \quad (10.64)$$

可以推断, 在用  $U_0(\eta_n r)$  置换  $V_0(\eta_n r)$  之后, 便可以得出新的计算水位的公式,

按照特征方程(10.25)

$$Y_0(\eta r_0) = \frac{J_0(\eta r_0) Y_0(\eta R_0)}{J_0(\eta R_0)}, \quad (10.65)$$

则(10.30)式可写为

$$\begin{aligned}
V_0(\eta r) & = J_0(\eta r) Y_0(\eta r_0) - J_0(\eta r_0) Y_0(\eta r) \\
& = \frac{J_0(\eta r_0)}{J_0(\eta R_0)} [J_0(\eta r) Y_0(\eta R_0) - J_0(\eta R_0) Y_0(\eta r)].
\end{aligned} \quad (10.66)$$

在(10.66)式方括号中所包含的即为(10.63)式表示之  $U_0(\eta_n r)$ , 因此  $V_0(\eta r)$  与  $U_0(\eta r)$  存在如下关系:

$$V_0(\eta r) = \frac{J_0(\eta r_0)}{J_0(\eta R_0)} U_0(\eta r), \quad (10.67)$$

从而

$$\begin{aligned}
& \int_{r_0}^{R_0} r f(r) V_0(\eta_n r) dr = \int_{r_0}^{R_0} r R(r) V_0(\eta_n r) dr \\
& = \frac{J_0(\eta_n r_0)}{J_0(\eta_n R_0)} \int_{r_0}^{R_0} r f(r) U_0(\eta_n r) dr \\
& = \frac{J_0(\eta_n r_0)}{J_0(\eta_n R_0)} \int_{r_0}^{R_0} r R(r) U_0(\eta_n r) dr, \quad (10.68)
\end{aligned}$$

进而可知,用函数  $U_0(\eta_n r)$  代替  $V_0(\eta_n r)$  后,计算水位  $H$  的通式 (10.54) 变为:

$$\begin{aligned}
 H(r, t) = & \frac{1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \left[ H_1 \ln \frac{R_0}{r} + H_2 \ln \frac{r}{r_0} \right] \\
 & + \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2 J_0^2(\eta_n r_0) \int_{r_0}^{R_0} r f(r) U_0(\eta_n r) dr}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} \\
 & \times e^{-a \eta_n^2 t} U_0(\eta_n r) \\
 & - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_2 J_0(\eta_n r_0) - H_1 J_0(\eta_n R_0)}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} \\
 & \times e^{-a \eta_n^2 t} J_0(\eta_n r_0) U_0(\eta_n r). \quad (10.69)
 \end{aligned}$$

同理,当起始水位为水平时,即当

$$f(r) = H_0 \text{ 时,}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{r_0}^{R_0} r f(r) U_0(\eta_n r) dr &= H_0 \int_{r_0}^{R_0} r U_0(\eta_n r) dr \\
 &= H_0 \frac{J_0(\eta_n R_0)}{J_0(\eta_n r_0)} \int_{r_0}^{R_0} r V_0(\eta_n r) dr, \quad (10.70)
 \end{aligned}$$

由(10.58)式知

$$H_0 \int_{r_0}^{R_0} r V_0(\eta_n r) dr = \frac{2H_0}{\pi \eta_n^2} \frac{J_0(\eta_n r_0) - J_0(\eta_n R_0)}{J_0(\eta_n R_0)},$$

从而

$$\begin{aligned}
 & \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2 J_0(\eta_n r_0) \int_{r_0}^{R_0} r f(r) U_0(\eta_n r) dr}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} \\
 &= \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2 J_0(\eta_n r_0) \frac{2H_0}{\pi \eta_n^2} \frac{J_0(\eta_n R_0)}{J_0(\eta_n r_0)} \frac{J_0(\eta_n r_0) - J_0(\eta_n R_0)}{J_0(\eta_n R_0)}}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} \\
 &= \pi H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\eta_n r_0)}{J_0(\eta_n r_0) + J_0(\eta_n R_0)}, \quad (10.71)
 \end{aligned}$$

将(10.71)式代入(10.69)式得

$$\begin{aligned}
 H(r, t) = & \frac{1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \left[ H_1 \ln \frac{R_0}{r} + H_2 \ln \frac{r}{r_0} \right] \\
 & + \pi H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\eta_n r_0)}{J_0(\eta_n r_0) + J_0(\eta_n R_0)} \\
 & \times e^{-a\eta_n^2 t} U_0(\eta_n r) \\
 & - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_2 J_0(\eta_n r_0) - H_1 J_0(\eta_n R_0)}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} \\
 & \times e^{-a\eta_n^2 t} J_0(\eta_n r_0) U_0(\eta_n r). \quad (10.72)
 \end{aligned}$$

## 四、出水量公式推导

### (一) 任意断面流量公式

根据计算流量 $Q$ 的基本公式,任一断面的

$$Q = F \cdot v = 2\pi K H_1 r \left( \frac{\partial H}{\partial r} \right), \quad (10.73)$$

而由(10.54)式知

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial r} = & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \left[ H_1 \ln \frac{R_0}{r} + H_2 \ln \frac{r}{r_0} \right] \right. \\
 & + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2 J_0^2(\eta_n R_0) \int_{r_0}^{R_0} r f(r) V_0(\eta_n r) dr}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} \right. \\
 & \times e^{-a\eta_n^2 t} V_0(\eta_n r) \Big\} \\
 & - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_2 J_0(\eta_n r_0) - H_1 J_0(\eta_n R_0)}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} \right.
 \end{aligned}$$

$$\cdot J_0(\eta_n R_0) e^{-a\eta_n^2 t} V_0(\eta_n r) \Big\}, \quad (10.74)$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \left[ H_1 \ln \frac{R_0}{r} + H_2 \ln \frac{r}{r_0} \right] \right\} = \frac{H_2 - H_1}{r \ln \frac{R_0}{r_0}}, \quad (10.75)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2 J_0^2(\eta_n R_0) \int_{r_0}^{R_0} r f(r) V_0(\eta_n r) dr}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} V_0(\eta_n r) e^{-a\eta_n^2 t} \right. \\ &= \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2 J_0^2(\eta_n R_0) \frac{\partial}{\partial r} \int_{r_0}^{R_0} r f(r) V_0(\eta_n r) dr}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} V_0(\eta_n r) e^{-a\eta_n^2 t}, \end{aligned} \quad (10.76)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_2 J_0(\eta_n r_0) - H_1 J_0(\eta_n R_0)}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} J_0(\eta_n R_0) V_0(\eta_n r) e^{-a\eta_n^2 t} \right\} \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} -\eta_n \frac{H_2 J_0(\eta_n r_0) - H_1 J_0(\eta_n R_0)}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} J_0(\eta_n R_0) V_1(\eta_n r) e^{-a\eta_n^2 t}, \end{aligned} \quad (10.77)$$

应说明的是,在推导(10.77)式时使用了如下关系,即

$$\frac{\partial}{\partial r} V_0(\eta_n r) = -\eta_n V_1(\eta_n r), \quad (10.78)$$

而由(10.37)式知

$$V_1(\eta_n r) = J_1(\eta_n r) Y_0(\eta_n r_0) - Y_1(\eta_n r) J_0(\eta_n r_0).$$

将(10.75), (10.76), (10.77)式代进(10.74)式中,再将所得之  $\frac{\partial H}{\partial r}$  代进(10.73)式, 便得计算任意断面流量公式

$$\begin{aligned} Q = & 2\pi r H_1 K \left\{ \frac{H_2 - H_1}{r \ln \frac{R_0}{r_0}} \right. \\ & + \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2 J_0^2(\eta_n R_0) \frac{\partial}{\partial r} \int_{r_0}^{R_0} r f(r) V_0(\eta_n r) dr}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} \end{aligned}$$

$$\times V_0(\eta_n r) e^{-\alpha \eta_n^2 t} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \cdot \frac{H_2 J_0(\eta_n r_0) - H_1 J_0(\eta_n R_0)}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} J_0(\eta_n R_0) V(\eta_n r) e^{-\alpha \eta_n^2 t} \quad (10.79)$$

## (二) 当起始水位为水平时任意断面的流量公式

若  $H(r, t)|_{t=0} = f(r) = H_0$  时, 在(10.79)式中

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \int_{r_0}^{R_0} r f(r) V_0(\eta_n r) dr &= H_0 \frac{\partial}{\partial r} \int_{r_0}^{R_0} r V_0(\eta_n r) dr \\ &= H_0 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{-1}{\eta_n^2} r \frac{dV_0(\eta_n r)}{dr} \right\}_{r_0}^{R_0} \\ &= H_0 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{-1}{\eta_n^2} (-\eta_n r) [J_1(\eta_n r) Y_0(\eta_n r_0) \right. \\ &\quad \left. - Y_1(\eta_n r) J_0(\eta_n r_0)] \right\}_{r_0}^{R_0} \\ &= H_0 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{R_0}{\eta_n} [J_1(\eta_n R_0) Y_0(\eta_n r_0) - Y_1(\eta_n R_0) J_0(\eta_n r_0)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_0}{\eta_n} [J_1(\eta_n r_0) Y_0(\eta_n r_0) - Y_1(\eta_n R_0) J_0(\eta_n r_0)] \right\} \quad (10.80) \end{aligned}$$

可以发现, (10.80)式之右均为不随  $r$  变化的常数, 因此, 它的导数为零, 即

$$H_0 \frac{\partial}{\partial r} \int_{r_0}^{R_0} r V_0(\eta_n r) dr = 0 \quad (10.81)$$

将(10.81)式代入(10.79)式, 得到起始水位为水平时任意断面的流量为

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi r K H_1 \left\{ \frac{H_2 - H_1}{r \ln \frac{R_0}{r_0}} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{H_2 J_0(\eta_n r_0) - H_1 J_0(\eta_n R_0)}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} J_0(\eta_n R_0) \right\} \end{aligned}$$

$$\times V_1(\eta_n r) e^{-a\eta_n^2 t} \Big\}. \quad (10.82)$$

### (三) 井的出水量公式

井的出水量, 亦即  $r = r_0$ ,  $H = H_1 = h_0$  时的出水量

$$\begin{aligned} Q = 2\pi r_0 h_0 K \Big\{ & \frac{H_2 - h_0}{r_0 \ln \frac{R_0}{r_0}} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \\ & \times \frac{H_2 J_0(\eta_n r_0) - h_0 J_0(\eta_n R_0)}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} J_0(\eta_n R_0) \\ & \times V_1(\eta_n r_0) e^{-a\eta_n^2 t} \Big\}, \end{aligned} \quad (10.83)$$

由(10.44)式知(10.83)式中的

$$\begin{aligned} V_1(\eta_n r_0) &= J_1(\eta_n r_0) Y_0(\eta_n r_0) - Y_1(\eta_n r_0) J_0(\eta_n r_0) \\ &= \frac{2}{\pi \eta_n r_0}, \end{aligned}$$

故得井的出水量公式

$$\begin{aligned} Q = 2\pi K h_0 \Big\{ & \frac{H_2 - h_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_2 J_0(\eta_n r_0) - H_1 J_0(\eta_n R_0)}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} \\ & \cdot J_0(\eta_n R_0) e^{-a\eta_n^2 t} \Big\}, \end{aligned}$$

或即

$$\begin{aligned} Q = 4\pi K h_0 \Big\{ & \frac{H_2 - h_0}{2 \ln \frac{R_0}{r_0}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_2 J_0(\eta_n r_0) - H_1 J_0(\eta_n R_0)}{J_0^2(\eta_n r_0) - J_0^2(\eta_n R_0)} \\ & \cdot J_0(\eta_n R_0) e^{-a\eta_n^2 t} \Big\}. \end{aligned} \quad (10.84)$$



## 五、公式的改型

在方程(10.1)—(10.4)中,象从前作过的那样,若用  $\frac{r}{R_0} = x$  代替  $r$ ,且令  $x_0 = \frac{r_0}{R_0}$ ,则前面推导的水位及流量计算公式,将会变为更有利于计算的形式.

公式(10.54)变为

$$\begin{aligned}
 H(r, t) = & \frac{1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \left[ H_1 \ln \frac{R_0}{r} + H_2 \ln \frac{r}{r_0} \right] \\
 & + \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2 J_0^2(\eta_n) \int_{x_0}^1 x f(x) V_0(\eta_n x) dx}{J_0^2(\eta_n x_0) - J_0^2(\eta_n)} e^{-\beta \eta_n^2 t} V_0(\eta_n x) \\
 & - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_2 J_0(\eta_n x_0) - H_1 J_0(\eta_n)}{J_0^2(\eta_n x_0) - J_0^2(\eta_n)} J_0(\eta_n) e^{-\beta \eta_n^2 t} V_0(\eta_n x),
 \end{aligned}
 \tag{10.85}$$

式中  $\beta = \frac{a}{R_0^2}$ .

当  $f(r) = H_0$  时,由(10.59)式得

$$\begin{aligned}
 H(r, t) = & \frac{1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \left[ H_1 \ln \frac{R_0}{r} + H_2 \ln \frac{r}{r_0} \right] \\
 & + \pi H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\eta_n R_0)}{J_0(\eta_n x_0) + J_0(\eta_n)} e^{-\beta \eta_n^2 t} V_0(\eta_n x) \\
 & - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_2 J_0(\eta_n x_0) - H_1 J_0(\eta_n)}{J_0^2(\eta_n x_0) - J_0^2(\eta_n)} \\
 & \times J_0(\eta_n) e^{-\beta \eta_n^2 t} V_0(\eta_n x),
 \end{aligned}
 \tag{10.86}$$

若认定  $H_1 = h_0$  为进井水位, 则可在(10.86)式中用  $h_0$  代替  $H_1$  进行计算,

用  $x = \frac{r}{R_0}$  置换  $r$ , 且令  $x_0 = \frac{r_0}{R_0}$  时的井出水量公式为

$$Q = 4\pi K h_0 \left\{ \frac{H_2 - h_0}{2 \ln \frac{R_0}{r_0}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_2 J_0(\eta_n x_0) - h_0 J_0(\eta_n)}{J_0^2(\eta_n x_0) - J_0^2(\eta_n)} \cdot J_0(\eta_n) e^{-\beta \eta_n^2 t} \right\}. \quad (10.87)$$

至此, 便得到内外边界给出水位情况下的水井非稳定渗流计

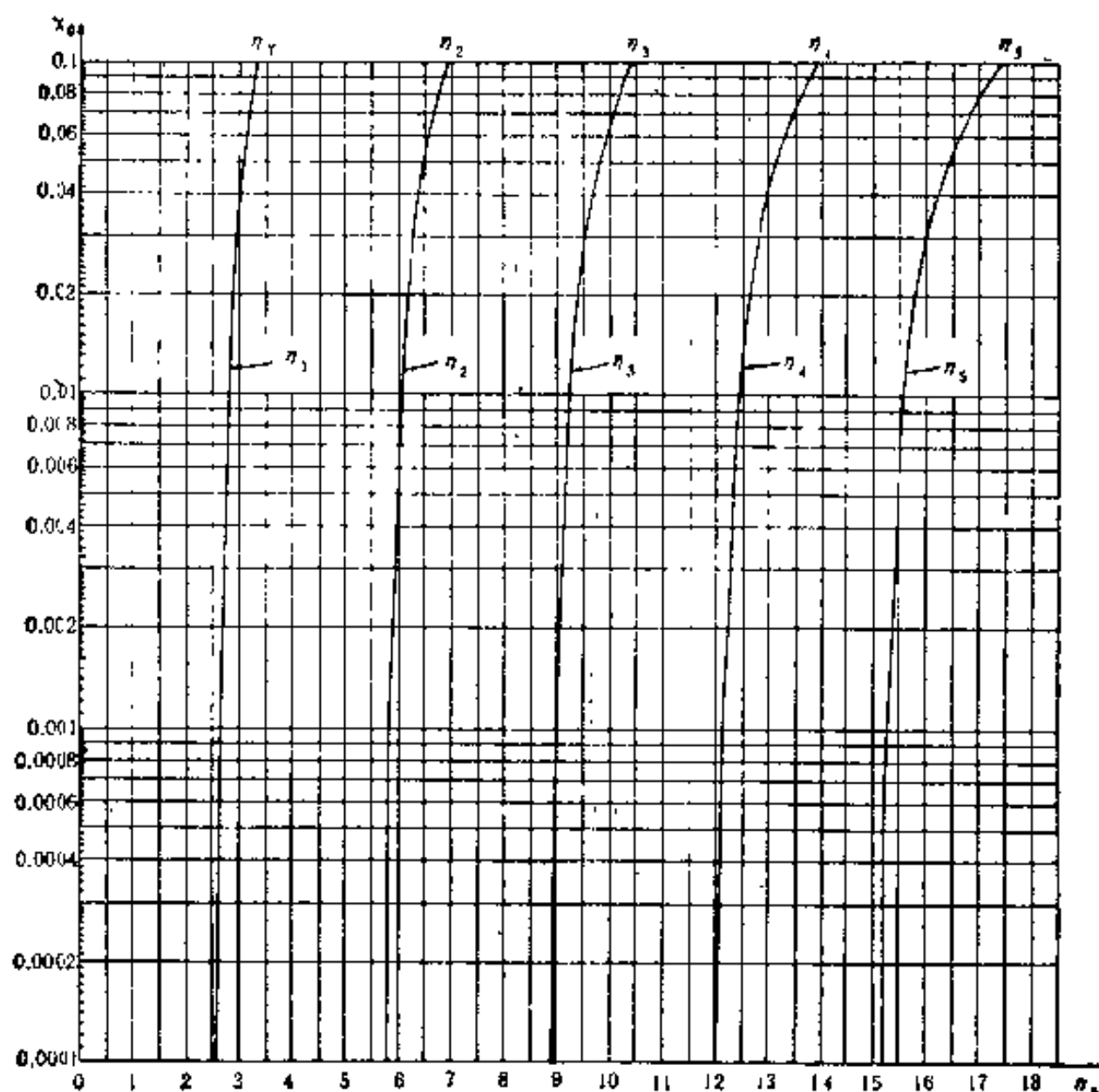


图 10-1  $x_0$ - $\eta_n$  关系曲线图

算公式——水位公式和流量公式。有了第七章—第九章进行此类计算的知识,则应用本章诸公式并无特殊的困难。前已提及,利用备有贝塞尔函数软件的计算机进行计算则更为方便。在缺乏上述设备时可以利用表 10-1 中列出的  $\eta_n$  代进公式计算。由于式中贝塞尔函数收敛很快,一般计算四项(即  $n = 1-4$ )已足够准确了。

表 10-1  $\eta_n$  值表

$\eta_n \backslash x_0$	0.0001	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1
$\eta_1$	2.58712	2.62970	2.65481	2.74189	2.80092	2.88422	3.06440	3.31385
$\eta_2$	5.72360	5.77670	5.80898	5.92653	6.01090	6.13580	6.42539	6.85743
$\eta_3$	8.86983	8.93017	8.96766	9.10878	9.21416	9.37539	9.76674	10.37720
$\eta_4$	12.01707	12.08332	12.12514	12.28683	12.41136	12.60679	13.09746	13.88614
$\eta_5$	15.16420	15.23554	15.28119	15.46170	15.60432	15.83283	16.42188	17.38928
备注	$\eta_n$ 为方程 $J_0(\eta_n)Y_0(\eta_n x_0) - J_0(\eta_n x_0)Y_0(\eta_n) = 0$ 的根; $x_0 = \frac{r_0}{R_0}$							

$x_0-\eta_n$  关系曲线描绘在图 10-1 中。

# 第十一章 内外边界分别为水位或流量时井孔的非稳定渗流计算

## 一、通式的推导

在七、八两章针对井水位为常数的割离井推导了非稳定渗流计算公式，第十章研究了内外边界均为给定水位的情况。本章将介绍内外边界分别为水位及流量的课题。对此可能有两种情况，第一种情况是内边界  $r = r_0$  处，或者说井中的水位为已知的时间函数，而外边界  $r = R_0$  处存在着随时间而变化的流量补给。第二种情况恰与上述相反，即在  $r = r_0$  处已知流量，而在  $r = R_0$  处已知水位。

对于这两种情况，我们可以求取计算的通式，亦即将  $r_0$  和  $R_0$  用  $r_1$  和  $r_2$  来代表，而它们—— $r_1$  和  $r_2$  究竟那个代表  $r_0$  或  $R_0$  是可以随意认定的。

至此，本课题的基本方程仍为 (2.19) 式，即

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right), \quad (11.1)$$

而求解条件为

$$\left. \begin{aligned} H(r_1, t) &= f_1(t), & a) \\ r \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_2} &= f_2(t), & b) \\ H(r, 0) &= g(r), & c) \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

为了求解该课题将利用迪尤阿梅尔 (Дюамль) 定理，参见文献 [36], [35], [41] 该定理可简述如下。

如若  $H_0(r, t)$  是方程 (11.1) 的一个解，且当  $t = 0$  时变为零，而当  $r = r_0$  时等于 1，则

$$H(r, t) = \int_0^t f(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} H_0(r, t - \tau) d\tau \quad (11.3)$$

便是方程 (11.1) 的解, 而该解同样在  $t = 0$  时等于零, 但在  $r = r_0$  时却有  $f(t)$ .

依据该定理, 可从固定边界值情况下求得的解引出边界条件为变数时的解.

现在便来寻求满足上述所有条件 (11.2) 时方程 (11.1) 的解. 为此, 预先给出最简单的解  $H_1, H_2, H_3$ . 它们取决于如下条件:

$$\left. \begin{aligned} (H_1, H_2, H_3) &= (1, 0, 0), & \text{当 } r = r_1 \text{ 时,} & \text{a} \\ r_2 \frac{\partial}{\partial r} (H_1, H_2, H_3) &= (0, 1, 0), & \text{当 } r = r_2 \text{ 时,} & \text{b} \\ (H_1, H_2, H_3) &= (0, 0, g(r)), & \text{当 } t = 0 \text{ 时,} & \text{c} \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

按照上述定理, 如果依据这些表达式建立方程

$$\begin{aligned} H(r, t) = H_3(r, t) + \int_0^t & \left[ f_1(\tau) \frac{\partial H_1(r, t - \tau)}{\partial \tau} \right. \\ & \left. + f_2(\tau) \frac{\partial H_2(r, t - \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau, \end{aligned} \quad (11.5)$$

则方程 (11.2) 的所有条件将会得到满足, 而  $H_1, H_2, H_3$  可用如下的方法求得. 即引进一个函数  $h(\lambda_n r)$ , 且令

$$h(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r) Y_1(\lambda_n r_2) - J_1(\lambda_n r_2) Y_0(\lambda_n r). \quad (11.6)$$

由 (7.25), (7.26) 式知

$$h'(\lambda_n r_2) = 0, \quad (11.7)$$

而  $\lambda_n$  的选择应能使

$$h(\lambda_n r_1) = 0, \quad (11.8)$$

参见方程 (7.17), 亦即  $\lambda_n$  应是

$$J_0(\lambda_n r_1) Y_1(\lambda_n r_2) - Y_0(\lambda_n r_1) J_1(\lambda_n r_2) = 0 \quad (11.9)$$

的根.

至此, 参见 [42] 则可将  $H_1, H_2, H_3$  展开如下:

$$H_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n h(\lambda_n r) e^{-a\lambda_n^2 t}, \quad (11.10)$$

$$H_2 = \ln \frac{r}{r_1} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n h(\lambda_n r) e^{-a\lambda_n^2 t}, \quad (11.11)$$

$$H_3 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n h(\lambda_n r) e^{-a\lambda_n^2 t}. \quad (11.12)$$

可以看出, 当  $r = r_1$ ,  $r = r_2$  时, 因为有 (11.7), (11.8) 式的关系, 则无论 (11.10), (11.11) 和 (11.12) 式中的常数  $A_n$ ,  $B_n$  及  $C_n$  为何值, 由诸式表示之  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  均能满足 (11.4-a) 和 (11.4-b) 两个条件. 但要满足条件 (11.4-c), 亦即要想满足  $t = 0$  时的起始条件, 则需恰当的选择上述常数. 以使  $t = 0$  时 (11.10,) (11.11) 和 (11.12) 式变为

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n h(\lambda_n r) = -1, \quad (11.13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n h(\lambda_n r) = -\ln \frac{r}{r_0}, \quad (11.14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n h(\lambda_n r) = \mathcal{F}(r). \quad (11.15)$$

这些等式之左的级数便是已经多次涉及到的傅里叶-贝塞尔级数. 它们和傅里叶级数形式十分相似. 而且  $A_n$ ,  $B_n$  和  $C_n$  的确定可以用类似于傅里叶级数求系数的类似方法. 这种方法从第七章开始已经用过.

下面便来确定这些常数.

为了求  $A_n$ , 先用  $rh(\lambda_n r)dr$  乘 (11.13) 式之两端, 再将它们由  $r_1$  到  $r_2$  进行积分, 则

$$A_n = \frac{-\int_{r_1}^{r_2} rh(\lambda_n r)dr}{\int_{r_1}^{r_2} rh^2(\lambda_n r)dr}. \quad (11.16)$$

由公式 (7.45), (7.36) 知

$$\int_{r_1}^{r_2} r h(\lambda_n r) dr = \frac{-2J_1(\lambda_n r_2)}{\lambda_n^2 \pi J_0(\lambda_n r_1)}, \quad (11.17)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} r h^2(\lambda_n r) dr = \frac{2}{\pi^2 \lambda_n^2} \left[ \frac{J_0^2(\lambda_n r_1) - J_1^2(\lambda_n r_2)}{J_0^2(\lambda_n r_1)} \right]. \quad (11.18)$$

将 (11.17), (11.18) 式代进 (11.16) 式, 得

$$A_n = \frac{\pi J_1(\lambda_n r_2) J_0(\lambda_n r_1)}{[J_0^2(\lambda_n r_1) - J_1^2(\lambda_n r_2)]}. \quad (11.19)$$

为了确定  $B_n$ , 仍用  $r h(\lambda_n r) dr$  乘 (11.14) 式之两端, 并由  $r_1$  到  $r_2$  积分之, 得

$$\begin{aligned} B_n &= \int_{r_1}^{r_2} r h^2(\lambda_n r) dr \\ &= - \int_{r_1}^{r_2} (\ln r - \ln r_1) r h(\lambda_n r) dr, \end{aligned}$$

亦即

$$B_n = \frac{\ln r_1 \int_{r_1}^{r_2} r h(\lambda_n r) dr - \int_{r_1}^{r_2} r h(\lambda_n r) \ln r dr}{\int_{r_1}^{r_2} r h^2(\lambda_n r) dr}. \quad (11.20)$$

由第六章介绍的贝塞尔函数的知识可以证明 (可参看[35])

$$\begin{aligned} &\int_{r_1}^{r_2} r h(\lambda_n r) \ln r dr \\ &= \frac{1}{\lambda_n^2} \left[ h(\lambda_n r) - r \frac{dh(\lambda_n r)}{dr} \ln r \right]_{r_1}^{r_2}, \end{aligned} \quad (11.21)$$

考虑到 (11.8), (7.30), (11.7) 以及 (7.31) 式的关系, 便可由 (11.21) 式得

$$\begin{aligned} &\int_{r_1}^{r_2} r h(\lambda_n r) \ln r dr \\ &= \frac{1}{\lambda_n^2} \left\{ [h(\lambda_n r)] \Big|_{r_1}^{r_2} - \left[ r \frac{dh(\lambda_n r)}{dr} \ln r \right] \Big|_{r_1}^{r_2} \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda_n^2} \left\{ -\frac{2}{\pi \lambda_n r_2} - \frac{2J_1(\lambda_n r_2)}{\pi J_0(\lambda_n r_1)} \ln r_1 \right\}; \end{aligned} \quad (11.22)$$

而由 (11.17) 式知

$$\ln r_1 \int_{r_1}^{r_2} r h(\lambda_n r) dr = \frac{-2J_1(\lambda_n r_2)}{\lambda_n^2 \pi J_0(\lambda_n r_1)} \ln r_1, \quad (11.23)$$

再将 (11.18), (11.22), (11.23) 式代进 (11.20) 式, 便求得

$$B_n = \frac{\pi J_0(\lambda_n r_1)}{\lambda_n r_2 [J_0^2(\lambda_n r_1) - J_1^2(\lambda_n r_2)]}. \quad (11.24)$$

同理可得

$$C_n = \frac{\int_{r_1}^{r_2} r g(r) h(\lambda_n r) dr}{\int_{r_1}^{r_2} r h^2(\lambda_n r) dr}. \quad (11.25)$$

在 (11.25) 式的分母中代进 (11.18) 式的关系, 则得

$$C_n = \frac{\pi^2 \lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n r_1)}{2 [J_0^2(\lambda_n r_1) - J_1^2(\lambda_n r_2)]} \\ \times \int_{r_1}^{r_2} r g(r) h(\lambda_n r) dr, \quad (11.26)$$

将求得的系数  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  的表达式代进方程式 (11.10), (11.11) 及 (11.12) 可找到  $H_1$ ,  $H_2$  及  $H_3$  的函数形式为

$$H_1 = 1 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_1) J_1(\lambda_n r_2) h(\lambda_n r) e^{-a \lambda_n^2 t}}{J_0^2(\lambda_n r_1) - J_1^2(\lambda_n r_2)}, \quad (11.27)$$

$$H_2 = \ln \frac{r}{r_1} + \frac{\pi}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_1) h(\lambda_n r) e^{-a \lambda_n^2 t}}{\lambda_n [J_0^2(\lambda_n r_1) - J_1^2(\lambda_n r_2)]}, \quad (11.28)$$

$$H_3 = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n r_1) h(\lambda_n r) e^{-a \lambda_n^2 t}}{J_0^2(\lambda_n r_1) - J_1^2(\lambda_n r_2)} \\ \times \int_{r_1}^{r_2} r g(r) h(\lambda_n r) dr. \quad (11.29)$$

将求出的  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  之表达式代进 (11.5) 式, 得

$$H(r, t) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n r_1) h(\lambda_n r) e^{-a \lambda_n^2 t}}{J_0^2(\lambda_n r_1) - J_1^2(\lambda_n r_2)} \\ \times \int_{r_1}^{r_2} r g(r) h(\lambda_n r) dr \\ + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_1) J_1(\lambda_n r_2) h(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n r_1) - J_1^2(\lambda_n r_2)}$$



$$\begin{aligned}
& \times \int_0^t f_1(\tau) \frac{\partial e^{-a\lambda_n^2(t-\tau)}}{\partial t} d\tau \\
& + \frac{\pi}{r_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\lambda_n r_1) h(\lambda_n r)}{\lambda_n [J_0^2(\lambda_n r_1) - J_1^2(\lambda_n r_2)]} \\
& \times \int_0^t f_2(\tau) \frac{\partial e^{-a\lambda_n^2(t-\tau)}}{\partial t} d\tau.
\end{aligned}$$

整理后得

$$\begin{aligned}
H(r, t) = & \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r_1) h(\lambda_n r) e^{-a\lambda_n^2 t}}{J_0^2(\lambda_n r_1) - J_1^2(\lambda_n r_2)} \\
& \times \left[ \frac{\pi}{2} J_0(\lambda_n r_1) \int_{r_1}^{r_2} r g(r) h(\lambda_n r) dr \right. \\
& \quad - a J_1(\lambda_n r_2) \int_0^t f_1(\tau) e^{a\lambda_n^2 \tau} d\tau \\
& \quad \left. - \frac{a}{\lambda_n r_2} J_0(\lambda_n r_1) \int_0^t f_2(\tau) e^{a\lambda_n^2 \tau} d\tau \right]. \quad (11.30)
\end{aligned}$$

这便是我们寻求的内外边界分别给出水位及流量时计算水位曲线的通式。从原则上讲，利用公式(11.30)可以求解任何已知  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  和  $g(r)$  的课题。下面将研究一些更具体的情况。

## 二、内边界给出水位,外边界给出流量的课题

如果具体到内边界  $r = r_0$  处水位为已知时间函数,而在外边界  $r = R_0$  处给出流量。对于这种课题其定解条件(11.2)变为

$$\left. \begin{aligned} H(r_0, t) &= f_1(t), & a) \\ r \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=R_0} &= f_2(t), & b) \\ H(0, r) &= g(r), & c) \end{aligned} \right\} \quad (11.31)$$

有了这些条件(11.31-a, b, c)以及相应的方程式(11.1),便可模仿推求(11.30)的过程而求得新的计算公式。然而,有了通式(11.30)之后,上述过程不再需要重复,而只需在(11.30)式中使用  $R_0$ ,  $r_0$  分别置换  $r_2$  和  $r_1$  即可,从而求得公式

$$\begin{aligned}
H(r, t) = & \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-a \lambda_n^2 t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\
& \times \left[ \frac{\pi}{2} J_0(\lambda_n r_0) \int_{r_0}^{R_0} r g(r) h(\lambda_n r) dr \right. \\
& - a J_1(\lambda_n R_0) \int_0^t f_1(\tau) e^{-a \lambda_n^2 \tau} d\tau \\
& \left. - \frac{a}{\lambda_n R_0} J_0(\lambda_n r_0) \int_0^t f_2(\tau) e^{-a \lambda_n^2 \tau} d\tau \right]. \quad (11.32)
\end{aligned}$$

该式便是当内边界（井孔）给出随时间变化的水位，外边界（ $R_0$  处）给出随时间变化的流量，而起始水位为任意曲面时课题的解。

### 三、井水位稳定为常数，起始水位水平的割离井渗流计算

该课题便是我们曾在第七章中讨论过的情况，现在当求得 (11.30), (11.32) 式之后，对于它的求解，只需将相应的定解条件代进 (11.32) 中整理即得。

为此，将

$$\left. \begin{aligned}
H(r_0, t) = f_1(t) = h_0 \text{ (井中水位), a} \\
r \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = f_2(t) = 0, \quad \text{b} \\
H(r, 0) = g(r) = H_0 \text{ (起始水位), c}
\end{aligned} \right\} \quad (11.33)$$

代进 (11.32) 式，得

$$\begin{aligned}
H(r, t) = & \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-a \lambda_n^2 t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\
& \times \left\{ \frac{\pi}{2} H_0 J_0(\lambda_n r_0) \int_{r_0}^{R_0} r h(\lambda_n r) dr \right. \\
& \left. - a h_0 J_1(\lambda_n R_0) \int_0^t e^{-a \lambda_n^2 \tau} d\tau - 0 \right\}; \quad (11.34)
\end{aligned}$$

由 (11.17) 可知在 (11.34) 式中的

$$\int_{r_0}^{R_0} r h(\lambda_n r) dr = \frac{-2J_1(\lambda_n R_0)}{\lambda_n^2 \pi J_0(\lambda_n r_0)}, \quad (11.35)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{a\lambda_n^2 \tau} d\tau &= \frac{1}{a\lambda_n^2} [e^{a\lambda_n^2 \tau}]_0^t \\ &= \frac{1}{a\lambda_n^2} e^{a\lambda_n^2 t} - \frac{1}{a\lambda_n^2}, \end{aligned} \quad (11.36)$$

将 (11.35), (11.36) 式代进 (11.34) 式, 则

$$\begin{aligned} H(r, t) &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-a\lambda_n^2 t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\pi}{2} H_0 J_0(\lambda_n r_0) \left[ \frac{-2J_1(\lambda_n R_0)}{\lambda_n^2 \pi J_0(\lambda_n r_0)} \right] \right. \\ &\quad \left. - a h_0 J_1(\lambda_n R_0) \left[ \frac{1}{a\lambda_n^2} e^{a\lambda_n^2 t} - \frac{1}{a\lambda_n^2} \right] \right\} \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-a\lambda_n^2 t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \left\{ \frac{-H_0 J_1(\lambda_n R_0)}{\lambda_n^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{h_0 J_1(\lambda_n R_0)}{\lambda_n^2} e^{a\lambda_n^2 t} + \frac{h_0 J_1(\lambda_n R_0)}{\lambda_n^2} \right\}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} H(r, t) &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-a\lambda_n^2 t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\quad \times \left\{ \frac{J_1(\lambda_n R_0)}{\lambda_n^2} (-H_0 - h_0 e^{a\lambda_n^2 t} + h_0) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi J_1(\lambda_n R_0) J_0(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-a\lambda_n^2 t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\quad \times \{-h_0 e^{a\lambda_n^2 t} - S_0\}, \end{aligned} \quad (11.37)$$

式中  $S_0 = H_0 - h_0$ , 故即

$$\begin{aligned} H(r, t) &= -h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi J_1(\lambda_n R_0) J_0(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^0}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\quad - S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-a\lambda_n^2 t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)}. \end{aligned} \quad (11.38)$$

由 (11.19), (11.13) 式知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r)}{[J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)]} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} A_n h(\lambda_n r) = -1. \quad (11.39)$$

将此关系代进 (11.38) 式, 便可证明

$$H(r, t) = h_0 - \pi S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 s t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)}. \quad (11.40)$$

殊途同归, 该式便是第七章中推导的公式 (7.46). 读者可能发现, 由公式 (11.32) 推求 (11.40) 式, 亦即 (7.46) 式是比较简便的, 但是, 这并不排斥第七章那种直接利用分离变量法进而应用贝塞尔函数推导公式的必要性. 因为本书希望读者得到的不仅是某个具体的公式, 而希望能够掌握较多的推求公式的方法. 除此之外, 第七章的内容从数理分析的角度看, 还能通过实例加深对分离变量法以及第六章所讲内容的掌握, 有利于学习以后的有关章节.

关于流量的计算公式, 只要记住公式

$$Q = 2\pi K h_0 r \left( \frac{\partial H}{\partial r} \right)_{r=r_0}$$

便不难得出了.

## 四、井水位随时间呈直线均匀下降时割离井的渗流计算

本章将利用第一节的研究井水位随时间呈直线均匀下降的情况, 通过公式推导及具体算例举一反三, 以便读者更进一步掌握处理其它可能遇到的求解类似课题的步骤和方法.

### (一) 水位计算公式的推导

如图 11-1 所示, 抽水期间, 井水位随时间均匀下降. 在这种

情况下,抽水后任一时刻的井水位  $h_r$  可表示如下:

$$h_r = H_0 - m\tau, \quad (11.41)$$

式中  $m$ ——水位下降线的斜率,其值等于任意两相邻时刻间的水位差  $\Delta h$  除以该时段  $\Delta t$ 。

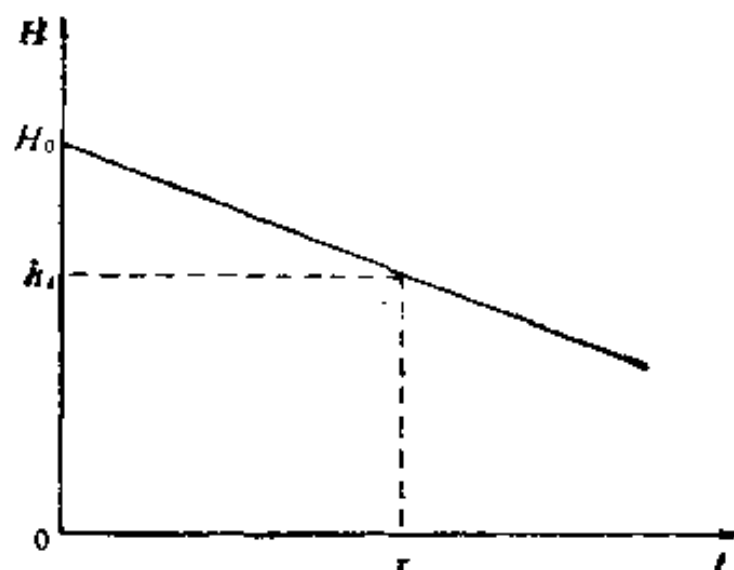


图 11-1 井水位呈直线下降示意图

$H$ ——井水位坐标  $t$ ——时间坐标  $H_0$ ——起始水位

因此,该课题归结为求解如下的方程组,即方程式

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) \quad (11.42)$$

及相应的边界条件及起始条件

$$\left. \begin{aligned} H(r_0, t) &= H_0 - mt, & a \\ r \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=R_0} &= 0, & b \\ H(r, 0) &= H_0, & c \end{aligned} \right\} \quad (11.43)$$

为此,可利用第一节中导出的公式 (11.32), 即

$$\begin{aligned} H(r, t) &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-a \lambda_n^2 t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\times \left[ \frac{\pi}{2} J_0(\lambda_n r_0) \int_{r_1}^{R_0} r g(r) h(\lambda_n r) dr \right. \\ &\quad \left. - a J_1(\lambda_n R_0) \int_0^t f_1(\tau) e^{a \lambda_n^2 \tau} d\tau \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{a}{\lambda_n R_0} J_0(\lambda_n r_0) \int_0^t f_2(\tau) e^{a\lambda_n^2 \tau} d\tau \Big],$$

将

$$\left. \begin{aligned} g(r) &= H(r, 0) = H_0, & a \\ h(\tau) &= H(r_0, \tau) = H_0 - m\tau, & b \\ f_2(\tau) &= r \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0, & c \end{aligned} \right\} \quad (11.44)$$

代进(11.32)式,则

$$\begin{aligned} H(r, t) &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\times \left[ \frac{\pi}{2} J_0(\lambda_n r_0) H_0 \int_{r_0}^{R_0} r h(\lambda_n r) dr \right. \\ &\quad \left. - a J_1(\lambda_n R_0) \int_0^t (H_0 - m\tau) e^{a\lambda_n^2 \tau} d\tau \right], \end{aligned}$$

或即

$$\begin{aligned} H(r, t) &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\times \left[ \frac{\pi}{2} J_0(\lambda_n r_0) H_0 \int_{r_0}^{R_0} r h(\lambda_n r) dr \right. \\ &\quad \left. - a J_1(\lambda_n R_0) H_0 \int_0^t e^{a\lambda_n^2 \tau} d\tau \right. \\ &\quad \left. + a m J_1(\lambda_n R_0) \int_0^t \tau e^{a\lambda_n^2 \tau} d\tau \right]. \quad (11.45) \end{aligned}$$

由公式(7.45)知

$$\int_{r_0}^{R_0} r h(\lambda_n r) dr = \frac{-2J_1(\lambda_n R_0)}{\lambda_n^2 \pi J_0(\lambda_n r_0)},$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{a\lambda_n^2 \tau} d\tau &= \left[ \frac{1}{a\lambda_n^2} e^{a\lambda_n^2 \tau} \right]_0^t \\ &= \left[ \frac{1}{a\lambda_n^2} e^{a\lambda_n^2 \tau} - \frac{1}{a\lambda_n^2} \right]; \end{aligned}$$

$$\int_0^t \tau e^{a\lambda_n^2 \tau} d\tau = \left[ e^{a\lambda_n^2 \tau} \left( \frac{\tau}{a\lambda_n^2} - \frac{1}{a^2 \lambda_n^4} \right) \right]_0^t$$

$$= \left[ \frac{t}{a\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 at} - \frac{1}{a^2\lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2 at} + \frac{1}{a^2\lambda_n^4} \right],$$

将上面这些关系式代入 (11.45) 式, 得

$$\begin{aligned} H(r, t) &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 at}}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\quad \times \left[ -H_0 + H_0 + \frac{m}{a\lambda_n^2} \right] \\ &\quad + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\quad \times \left[ -H_0 + mt - \frac{m}{a\lambda_n^2} \right], \end{aligned}$$

上式整理如下

$$\begin{aligned} H(r, t) &= -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\quad \times \left[ H_0 - mt + \frac{m}{a\lambda_n^2} - \frac{m}{a\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 at} \right] \\ &= -\pi (H_0 - mt) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\quad - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\quad \times \left[ \frac{m}{a\lambda_n^2} - \frac{m}{a\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 at} \right]. \end{aligned} \quad (11.46)$$

在 (11.46) 式中的右端第一个级数, 由公式 (11.39) 知

$$\begin{aligned} &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n h(\lambda_n r) = 1. \end{aligned}$$

故知 (11.46) 式实为

$$H(r, t) = (H_0 - mt) - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)}$$

$$\times \left[ \frac{m}{a\lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 a t}) \right]. \quad (11.47)$$

(11.47) 式便是井水位呈斜率为  $m$  的直线下降时, 计算井区任一点水位的公式。显然, 该式是完全满足 (11.44) 式表明的定解条件的:

(1) 当  $t = 0$  时, (11.47) 式变为

$$H(r, 0) = H_0 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ \times \left[ \frac{m}{a\lambda_n^2} (1 - e^0) \right],$$

即  $H(r, 0) = H_0$ , 满足了条件 (11.44-a);

(2) 当  $r = r_0$  时, 由公式 (7.21) 知  $h(\lambda_n r_0) = 0$ , 故 (11.47) 式变为

$$H(r_0, t) = (H_0 - mt) - 0 = H_0 - mt,$$

满足了条件 (11.44-b);

(3) 当  $r = R_0$  时, 由 (7.24) 知

$$\left. \frac{dh(\lambda_n r)}{dr} \right|_{r=R_0} = -\lambda_n h_1(\lambda_n r) = 0.$$

故由 (11.47) 式可知  $H(R_0, t) = 0$ , 满足了最后一个条件, 即 (11.44-c)。

回顾 (7.47) 式, 即

$$\frac{r_0}{R_0} = x_0, \quad \frac{r}{R_0} = x, \quad \frac{a}{R_0^2} = \beta,$$

则 (11.47) 式可变为

$$H(r, t) = (H_0 - mt) - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n x_0) J_1(\lambda_n) h(\lambda_n x)}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)} \\ \times \left[ \frac{m}{\beta \lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}) \right]. \quad (11.48)$$

考虑到 (7.59) 式表示的关系, 则水位公式可简化为

$$H(r, t) = (H_0 - mt)$$



$$= \frac{\pi m}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} D_n h(\lambda_n x) (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}), \quad (11.49)$$

或

$$H(r, t) = (H_0 - mt) - \frac{\pi m}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} D_n h(\lambda_n x) (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}). \quad (11.50)$$

公式(11.48), (11.49) 及 (11.50) 都是可以实际用于计算的公式, 而且在第七章中得到的辅助计算图表, 都可以在此应用。若有适宜的计算机, 则不必利用上述图表, 而可按要求的精度直接利用公式(11.48) 进行计算。

## (二) 流量公式的推导

将公式(11.47) 对  $r$  求导, 并代进  $r = r_0$ , 则

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r_0} &= -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\quad \times \left. \frac{\partial h(\lambda_n r)}{\partial r} \right|_{r=r_0} \left[ \frac{1}{a \lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}) \right], \end{aligned} \quad (11.51)$$

由(7.54) 式知

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h(\lambda_n r)}{\partial r} \right|_{r=r_0} &= -\frac{2}{\rho \pi r_0} \\ &= -\frac{2 J_1(\lambda_n R_0)}{\pi r_0 J_0(\lambda_n r_0)}. \end{aligned} \quad (11.52)$$

将(11.52) 式代进(11.51) 式, 得

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r_0} &= -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r_0) J_1(\lambda_n R_0)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \\ &\quad \times \left[ -\frac{2 J_1(\lambda_n R_0)}{\pi r_0 J_0(\lambda_n r_0)} \right] \left[ \frac{1}{a \lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}) \right], \end{aligned}$$

即

$$\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \frac{2m}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda_n R_0)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)}$$

$$\times \left[ \frac{1}{a\lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 a t}) \right]. \quad (11.53)$$

將  $\frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0}$  的表达式 (11.53) 代进达西流量公式, 得

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi r_0 h_1 K \left( \frac{\partial H}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_0} \\ &= 2\pi r_0 h_1 K \left\{ \frac{2m}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda_n R_0)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \right. \\ &\quad \times \left. \left[ \frac{1}{a\lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 a t}) \right] \right\}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi K m (H_0 - mt) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda_n R_0)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R_0)} \right. \\ &\quad \times \left. \left[ \frac{1}{a\lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 a t}) \right] \right\}. \quad (11.54) \end{aligned}$$

若仍令

$$\frac{r_0}{R_0} = x_0, \quad \frac{r}{R_0} = x, \quad \frac{a}{R_0^2} = \beta,$$

并考虑到 (7.61) 式, 即

$$B_n = \frac{J_1^2(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)},$$

则

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi K m (H_0 - mt) \sum_{n=1}^{\infty} B_n \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{\beta \lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}) \right], \quad (11.55) \end{aligned}$$

或

$$Q = 4\pi K m (H_0 - mt) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta \lambda_n^2} B_n (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}). \quad (11.56)$$

公式 (11.55), (11.56) 式的运算可利用第七章有关图表。

### (三) 算 例

有一完整井在如下条件下工作:

- (1) 含水层厚度  $H_0 = 20$  米, 底板可视为水平的,
- (2) 含水层渗透系数  $K = 5$  米/日,
- (3) 给水度  $\mu = 0.1$ ,
- (4) 井所处的外边界为隔水边界, 其取水半径  $R_0 = 200$  米,
- (5) 井孔半径  $r_0 = 1$  米,
- (6) 工作期间不计垂直入渗,
- (7) 井在工作期间井水位  $h_t$  随时间均匀下降, 即在任一时刻  $t$ , 井的工作水位  $h_t = H_0 - mt$  而  $m = 0.6$ .

现需预报井开泵后第 10 天的水位曲线及井的出水量.

#### 1. 水位曲线的计算

水位计算可利用公式 (11.50), 即

$$H(r, t) = (H_0 - mt) - \frac{\pi m}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} D_n h(\lambda_n x) (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}).$$

抽水的第十天, 其井水位为

$$h_t = H_0 - mt = 20 - 0.6 \times 10 = 14 \text{ 米},$$

参考第七章算例中求出的第十天边界水位值,

可取平均含水层厚度

$$H_p = \frac{20 + 14}{2} = 17 \text{ 米},$$

故得 
$$\beta = \frac{a}{R_0^2} = \frac{KH_p}{\mu R_0^2} = \frac{5 \times 17}{0.1 \times 200^2} = 0.02125,$$

据此, 并利用第七章算例已得到的部分资料计算如下:

- (1) 在  $x = 0.01$ , 即  $r = xR_0 = 0.01 \times 200 = 2$  米处

因  $x_0 = \frac{r_0}{R_0} = \frac{1}{200} = 0.005$ , 直接利用表 7-3, 并将有关的

值代进 (11.50) 式, 得

$$\begin{aligned}
 H(r, t) &= (20 - 6) - \frac{3.1416 \times 0.6}{0.02125} \\
 &\times \left\{ \frac{1}{0.6672} (-0.0413)(1 - e^{-0.667^2 \times 0.02125 \times 10}) \right. \\
 &+ \frac{1}{4.214^2} (-0.0096)(1 - e^{-4.214^2 \times 0.02125 \times 10}) \\
 &+ \frac{1}{7.446^2} (-0.0070)(1 - e^{-7.446^2 \times 0.02125 \times 10}) \\
 &\left. + \frac{1}{10.664^2} (-0.0051)(1 - e^{-10.664^2 \times 0.02125 \times 10}) \right\} \\
 &= 14 - 88.704 \{-0.00837 - 0.00053 \\
 &\quad - 0.00013 - 0.000045\} = 14.805 \text{ 米;}
 \end{aligned}$$

(2) 在  $x = 0.05$ , 即  $r = 0.05 \times 200 = 10$  米的断面上利用表 7-4 的有关数值

$$\begin{aligned}
 H(r, t) &= 14 - 88.704 \left\{ \frac{-0.1557}{0.667^2} (1 - 0.90979) \right. \\
 &\quad + \frac{-0.0309}{4.214^2} (1 - 0.02297) \\
 &\quad \left. + \frac{-0.0220}{7.446^2} (1 - 0.0000076) \right\} \\
 &= 14 - 88.704 \{-0.03157 - 0.00170 - 0.00040\} \\
 &= 16.986 \text{ 米;}
 \end{aligned}$$

(3) 在  $x = 0.1$ , 即  $r = 20$  米的断面上

$$\begin{aligned}
 H(r, t) &= 14 - 88.704 \left\{ \frac{-0.2035}{0.667^2} (0.09021) \right. \\
 &\quad + \frac{-0.0392}{4.214^2} (0.97703) \\
 &\quad \left. + \frac{-0.0264}{7.446^2} (0.999992) \right\} = 17.894 \text{ 米;}
 \end{aligned}$$

(4) 在  $x = 0.2$ , 即  $r = 40$  米的断面上

$$\begin{aligned}
 H(r, t) = & 14 - 88.704 \left\{ \frac{-0.2523}{0.667^2} (0.09021) \right. \\
 & + \frac{-0.0435}{4.214^2} (0.97703) \\
 & \left. + \frac{-0.0228}{7.446^2} (1) \right\} = 18.714 \text{ 米;}
 \end{aligned}$$

(5) 在  $x = 0.4$ , 即  $r = 80$  米的断面上

$$\begin{aligned}
 H(r, t) = & 14 - 88.704 \left\{ \frac{-0.2976}{0.667^2} (0.09021) \right. \\
 & + \frac{-0.0312}{4.214^2} (0.97703) \\
 & \left. + \frac{+0.0026}{7.446^2} (1) \right\} = 19.501 \text{ 米;}
 \end{aligned}$$

(6) 在  $x = 0.7$ , 即  $r = 140$  米的断面上

$$\begin{aligned}
 H(r, t) = & 14 - 88.704 \left\{ \frac{-0.3266}{0.667^2} (0.09021) \right. \\
 & + \frac{+0.0047}{4.214^2} (0.97703) \\
 & \left. + \frac{+0.0085}{7.446^2} (1) \right\} = 19.841 \text{ 米;}
 \end{aligned}$$

(7) 在  $x = 1.0$ , 即  $r = 200$  米的断面上

$$\begin{aligned}
 H(r, t) = & 14 - 88.704 \left\{ \frac{-0.3340}{0.667^2} (0.09021) \right. \\
 & + \frac{+0.0221}{4.214^2} (0.97703) \\
 & \left. + \frac{-0.0105}{7.446^2} (1) \right\} = 19.916 \text{ 米.}
 \end{aligned}$$

图 11-2 是按照算出的数值绘出的第十天的水位曲线图。

## 2. 出水量计算

应用公式 (11.56) 计算, 即

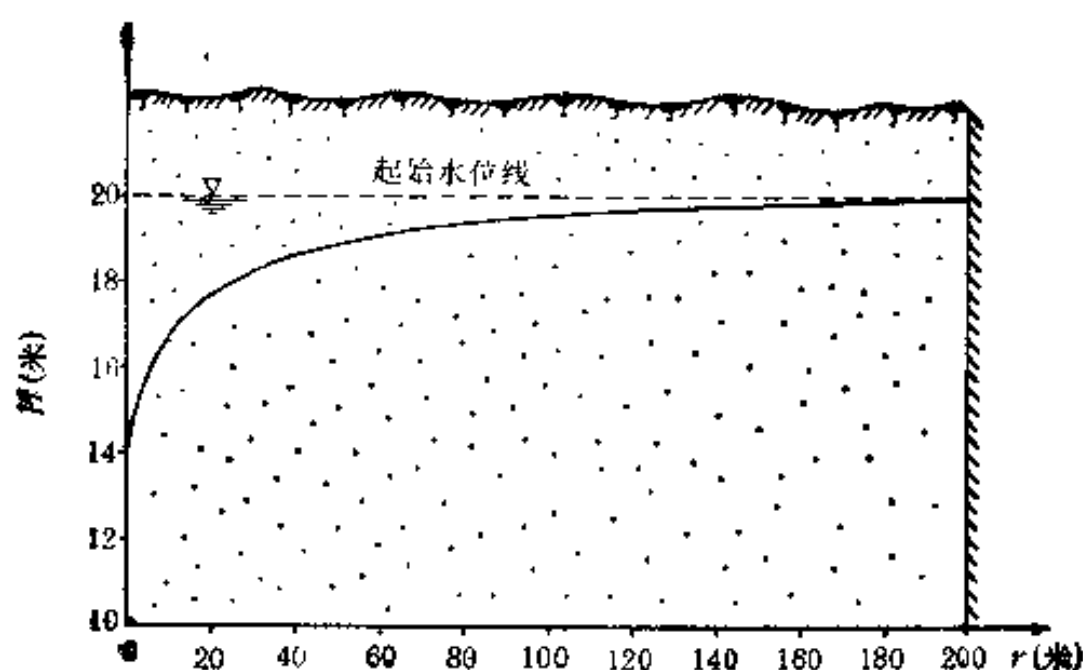


图 11-2 第十天的水位降落曲线

$$Q = 4\pi Km(H_0 - mt) \sum_{n=1}^4 \frac{1}{\beta \lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t})$$

代进有关的已知值, 当  $t = 10$  天时,

$$Q = 4\pi \times 5 \times 0.6(20 - 0.6 \times 10) \sum_{n=1}^4 \frac{1}{\beta \lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t})$$

即

$$\begin{aligned} Q &= 527.788 \left\{ \frac{1}{0.02125 \times 0.667^2} \right. \\ &\quad \times 0.1104(1 - e^{-0.02125 \times 0.667^2 \times 10}) \\ &\quad + \frac{1}{0.02125 \times 4.214^2} \times 0.0210(1 - e^{-0.02125 \times 4.214^2 \times 10}) \\ &\quad + \frac{1}{0.02125 \times 7.446^2} \times 0.0150(1 - e^{-0.02125 \times 7.446^2 \times 10}) \\ &\quad + \frac{1}{0.02125 \times 10.664^2} \times 0.0134(1 - e^{-0.02125 \times 10.664^2 \times 10}) \\ &= 527.788 \{ 1.053448 + 0.054372 \\ &\quad + 0.012732 + 0.000555 \} \end{aligned}$$

$\approx 591.787$  米<sup>3</sup>/日。

参见表 7-6, 本例中  $t = 10$  天的流量 591.787 米<sup>3</sup>/日大于井水位固定在 14 米时第十天的流量 532.275 米<sup>3</sup>/日。这一事实是容易理解的, 因为在本例中, 十天以前的井水位降均小于第七章例题中的值, 因而出水量较小, 含水层厚度消减较少。

## 五、内边界为流量, 外边界给出水位的课题

与第二节讨论的问题相反, 如果在  $r = r_0$  处已知井的出水量, 而在  $r = R_0$  处的外边界上知道水位值, 对于该课题的求解归结为在定解条件

$$\left. \begin{aligned} H(R_0, t) &= f_1(t), & a \\ r \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= f_2(t), & b \\ H(r, 0) &= g(r), & c \end{aligned} \right\} \quad (11.57)$$

下求解方程 (11.1)。

已如前述, 这种求解, 当然可以参照推导公式 (11.30) 的类似过程进行。但是直接由通式 (11.30) 推求则将更为方便。为此, 只需在公式 (11.30) 中取  $r_0$  置换  $r_2$ , 而用  $R_0$  置换  $r_1$ 。但是必须注意, 这种置换应使积分号变为  $\int_{R_0}^{r_0}$ , 如果按习惯写为  $\int_{r_0}^{R_0}$  则需变号, 于是得

$$\begin{aligned} H(r, t) = & -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 s t}}{J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)} \\ & \times \left[ \frac{\pi}{2} J_0(\lambda_n R_0) \int_{r_0}^{R_0} r g(r) h(\lambda_n r) dr \right. \\ & + a J_1(\lambda_n r_0) \int_0^t f_1(\tau) e^{-\lambda_n^2 s \tau} d\tau \\ & \left. + \frac{a}{\lambda_n r_0} J_0(\lambda_n R_0) \int_0^t f_2(\tau) e^{-\lambda_n^2 s \tau} d\tau \right], \quad (11.58) \end{aligned}$$

该式便是起始水位为  $g(r)$ , 在  $r = R_0$  的边界上已知水位

为  $f_1(t)$ ，而在  $r = r_0$  处，即在井中已知出水量时计算  $H(r, t)$  的公式。

应当再次说明，公式 (11.58) 中的

$$h(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r) Y_1(\lambda_n r_0) - J_1(\lambda_n r_0) Y_0(\lambda_n r), \quad (11.59)$$

而  $\lambda_n$  为方程

$$J_0(\lambda_n R_0) Y_1(\lambda_n r_0) - Y_0(\lambda_n R_0) J_1(\lambda_n r_0) = 0. \quad (11.60)$$

的根。

如同曾经在第七章中进行过的那样，如令

$$\frac{r_0}{R_0} = x_0, \quad \frac{r}{R_0} = x, \quad \frac{a}{R_0^2} = \beta, \quad (11.61)$$

则基本方程 (11.1) 变为

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (11.62)$$

从而公式 (11.58) 变为

$$\begin{aligned} H(x, t) = & -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n) h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta t}}{J_0^2(\lambda_n) - J_1^2(\lambda_n x_0)} \\ & \times \left[ \frac{\pi}{2} J_0^2(\lambda_n) \int_{x_0}^1 x g(x) h(\lambda_n x) dx \right. \\ & + \beta J_1(\lambda_n x_0) \int_0^t f_1(\tau) e^{-\lambda_n^2 \beta \tau} d\tau \\ & \left. + \frac{\beta}{\lambda_n x_0} J_0(\lambda_n) \int_0^t f_2(\tau) e^{-\lambda_n^2 \beta \tau} d\tau \right]. \quad (11.63) \end{aligned}$$

从而  $\lambda_n$  变为方程

$$J_0(\lambda_n) Y_1(\lambda_n x_0) - J_1(\lambda_n x_0) Y_0(\lambda_n) = 0 \quad (11.64)$$

的根，对于不同的  $x_0$  值可求得  $\lambda_n$  值。

若知井的出水量  $Q$ ，则

$$f_2(t) = \frac{Q}{2\pi K h_0} = q(t). \quad (11.65)$$

式中  $Q$ ——井的出水量，可能是常数，也可能是变数； $K$ ——渗透系数； $h_0$ ——井壁处的含水层厚度，或即通常所指的从井底算



起的井水位值。

对于承压含水层的井一般认为含水层厚度不变,且常用 $M$ 取代 $h_0$ 来表示,对于潜水井,其水位 $h_0$ 可能是随时间而变化的。

有了公式(11.58), (11.63), 在具体得知函数 $g(r)$ ,  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ 之后,则计算任一时刻在任意 $r$ 处的水位 $H(r, t)$ 并无多大困难。

## 六、几种特殊定解条件下 第五节课题的计算公式

### (一) 起始水位为水平时

在这种情况下,起始条件(11.57-c)变为

$$g(r) = H_0, \quad (11.66)$$

将 $g(r) = H_0$ 代进(11.58)式,考虑到(11.17)式表示的关系,则知

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2} J_0(\lambda_n R_0) H_0 \int_{r_0}^{R_0} r h(\lambda_n r) dr \\ &= \frac{H_0 J_1(\lambda_n r_0)}{\lambda_n^2}, \end{aligned} \quad (11.67)$$

由此便可求得,当起始水位呈水平时,公式(11.58)变为

$$\begin{aligned} H(r, t) = & -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-a \lambda_n^2 t}}{J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)} \\ & \times \left[ \frac{H_0 J_1(\lambda_n r_0)}{\lambda_n^2} + a J_1(\lambda_n r_0) \int_0^t f_1(\tau) e^{\lambda_n^2 a \tau} d\tau \right. \\ & \left. + \frac{a}{\lambda_n r_0} J_0(\lambda_n R_0) \int_0^t f_2(\tau) e^{\lambda_n^2 a \tau} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (11.68)$$

参见公式(11.63), 则知(11.68)式亦可改写为

$$H(x, t) = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n) h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 t}}{J_0^2(\lambda_n) - J_1^2(\lambda_n x_0)}$$

$$\times \left[ \frac{H_0 J_1(\lambda_n x_0)}{\lambda_n^2} + \frac{\beta}{\lambda_n x_0} J_0(\lambda_n) \int_0^t f_2(\tau) e^{\lambda_n^2 \beta \tau} d\tau \right. \\ \left. + \beta J_1(\lambda_n x_0) \int_0^t f_1(\tau) e^{\lambda_n^2 \beta \tau} d\tau \right]. \quad (11.69)$$

(二) 起始水位呈水平,  $f_1(t) = H(R_0, t) = H_R = \text{常数}$

在这种情况下 (11.57) 式变为

$$\left. \begin{aligned} H(R_0, t) &= f_1(t) = H_R, & a \\ r \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= f_2(t), & b \\ H(r, 0) &= g(r) = H_0, & c \end{aligned} \right\} \quad (11.70)$$

对此,

$$\begin{aligned} & a J_1(\lambda_n r_0) \int_0^t f_1(\tau) e^{\lambda_n^2 \beta \tau} d\tau \\ &= a J_1(\lambda_n r_0) H_R \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta \tau} d\tau \\ &= a H_R J_1(\lambda_n r_0) \left( \frac{1}{a \lambda_n^2} e^{\lambda_n^2 \beta t} - \frac{1}{a \lambda_n^2} \right), \end{aligned} \quad (11.71)$$

将 (11.67), (11.71) 式的关系代进 (11.58) 式, 得

$$\begin{aligned} H(r, t) &= -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 \beta t}}{J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)} \\ &\times \left[ \frac{H_0 J_1(\lambda_n r_0)}{\lambda_n^2} + a H_R J_1(\lambda_n r_0) \right. \\ &\times \left( \frac{1}{a \lambda_n^2} e^{\lambda_n^2 \beta t} - \frac{1}{a \lambda_n^2} \right) \\ &\left. + \frac{a}{\lambda_n r_0} J_0(\lambda_n R_0) \int_0^t f_2(\tau) e^{\lambda_n^2 \beta \tau} d\tau \right], \end{aligned}$$

亦即

$$H(r, t) = -\pi H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n R_0) J_1(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 \beta t}}{J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi H_R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n R_0) J_1(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)} \\
&+ \pi H_R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n R_0) J_1(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)} \\
&- \frac{a \pi}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n J_0^2(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)} \\
&\times \int_0^t f_2(\tau) e^{\lambda_n^2 a \tau} d\tau.
\end{aligned}$$

由公式 (11.13), (11.19) 知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi J_0(\lambda_n R_0) J_1(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)} = -1,$$

故将上式整理后得

$$\begin{aligned}
H(r, t) &= H_R - \pi(H_0 - H_R) \sum_{n=1}^{\infty} \\
&\times \frac{J_0(\lambda_n R_0) J_1(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)} \\
&- \frac{a \pi}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n J_0^2(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)} \\
&\times \int_0^t f_2(\tau) e^{\lambda_n^2 a \tau} d\tau,
\end{aligned} \tag{11.72}$$

参见公式 (11.63) 同理由 (11.72) 式可得

$$\begin{aligned}
H(x, t) &= H_R - \pi(H_0 - H_R) \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n) J_1(\lambda_n x_0) h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta t}}{J_0^2(\lambda_n) - J_1^2(\lambda_n x_0)} \\
&- \frac{a \pi}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n J_0^2(\lambda_n) h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta t}}{J_0^2(\lambda_n) - J_1^2(\lambda_n x_0)} \\
&\times \int_0^t f_2(\tau) e^{\lambda_n^2 \beta \tau} d\tau.
\end{aligned} \tag{11.73}$$

(三) 若  $f_1(t) = H_R$ ,  $g(r) = H_0$ , 而  $f_2(t) = q = \text{常数}$

在这种情况下, 由于

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\lambda_n r_0} J_0(\lambda_n R_0) \int_0^t f_2(\tau) e^{-\lambda_n^2 a \tau} d\tau \\ &= \frac{aq}{\lambda_n r_0} J_0(\lambda_n R_0) \int_0^t e^{-\lambda_n^2 a \tau} d\tau \\ &= \frac{aq}{\lambda_n r_0} J_0(\lambda_n R_0) \left( \frac{1}{a\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 a t} - \frac{1}{a\lambda_n^2} \right), \end{aligned} \quad (11.74)$$

由关系式 (11.14), (11.24), (11.68) 可推得

$$\begin{aligned} & -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)} \\ & \times \left[ \frac{aq}{\lambda_n r_0} J_0(\lambda_n R_0) \left( \frac{1}{a\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 a t} - \frac{1}{a\lambda_n^2} \right) \right. \\ & \left. - -q \left( -\ln \frac{r}{R_0} \right) + \frac{\pi q}{r_0} \right. \\ & \left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 a t}}{\lambda_n [J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)]} \right], \end{aligned} \quad (11.75)$$

即

$$\begin{aligned} H(r, t) &= H_R - \pi(H_0 - H_R) \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n R_0) J_1(\lambda_n r_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 a t}}{J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)} \\ & + q \left( \ln \frac{r}{R_0} \right) - \frac{\pi q}{r_0} \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 a t}}{\lambda_n [J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)]}, \end{aligned} \quad (11.76)$$

或即

$$H(x, t) = H_R - \pi(H_0 - H_R)$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n) J_1(\lambda_n x_0) h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta t}}{J_0^2(\lambda_n) - J_1^2(\lambda_n x_0)} \\
& + q(\ln x) - \frac{\pi q}{x_0} \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\lambda_n) h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta t}}{\lambda_n [J_0^2(\lambda_n) - J_1^2(\lambda_n x_0)]}, \quad (11.77)
\end{aligned}$$

记住式中的

$$x = \frac{r}{R_0}, \quad x_0 = \frac{r_0}{R_0}, \quad \beta = \frac{a}{R_0^2}.$$

而  $\lambda_n$  为方程

$$J_0(\lambda_n) Y_1(\lambda_n x_0) - J_1(\lambda_n x_0) Y_0(\lambda_n) = 0$$

的根。

(四) 当  $f_1(t) = H_0 = g(r)$ , 而  $f_2(t) = q = \text{常数}$  时

对此, 由 (11.76) 式可推知

$$H(r, t) = H_0 - \frac{\pi q}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\lambda_n R_0) h(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 \beta t}}{\lambda_n [J_0^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)]}, \quad (11.78)$$

或

$$H(x, t) = H_0 - \frac{\pi q}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\lambda_n) h(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \beta t}}{\lambda_n [J_0^2(\lambda_n) - J_1^2(\lambda_n x_0)]}. \quad (11.79)$$

至此, 又得到了一系列可供使用的公式。

## 第十二章 出水量为常数时 割离井的渗流计算

在水文地质实践中有时需要井的出水量保持稳定,而且流场的外边界没有补给,或者说补给量为零,从而外边界可看成隔水边界。

### 一、水位曲线计算公式的推导

该课题归结为求解如下方程:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) \quad (12.1)$$

其边界条件及起始条件为

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = q_0 = \text{常数}, \quad a \\ \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0, \quad b \\ H(r, 0) = H_0 = \text{常数}, \quad c \end{array} \right\} \quad (12.2)$$

式中  $q_0$ ——是某个其值等于  $\frac{Q_0}{2\pi K r_0 h_p}$  的常数,也可称其为单位

出水量;即

$$q_0 = \frac{Q_0}{2\pi r_0 h_p K} \quad (12.3)$$

$Q_0$ ——井的出水量,对本课题  $Q_0$  亦为常数;

$h_p$ ——地下水进井处的含水层平均厚度,对潜水井可认为是从井底算起的井水位,对承压井常用含水层厚度  $M$  代替  $h_p$ ;

$K$ ——渗透系数;

$r_0$ ——井的半径。

该课题将用拉普拉斯变换法求解。参见第五章，为此，用  $e^{-pt}$  同乘 (12.1) 式两端，并按时间  $t$  从 0 到  $\infty$  积分，从而有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial H}{\partial t} dt &= a \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} dt \\ &+ \frac{a}{r} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial H}{\partial r} dt. \end{aligned} \quad (12.4)$$

在对 (12.4) 式进行积分时，在等式之左使用分部积分法，得

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial H}{\partial t} dt &= [e^{-pt} H(r, t)]_0^{\infty} \\ &+ p \int_0^{\infty} e^{-pt} H(r, t) dt. \end{aligned} \quad (12.5)$$

因为水位值总是个有限值，因此，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} H(r, t) = 0. \quad (12.6)$$

考虑 (12.2-c)，即  $H(r, 0) = H_0$ ，并利用公式 (5.1) 即

$$\bar{f}(P) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (12.7)$$

则公式 (12.5) 可改写为

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial H}{\partial t} dt = -H_0 + p\bar{H}(r, P). \quad (12.8)$$

在 (12.4) 式右端两项中改变积分和微分的先后次序，并利用 (12.7) 式，则得

$$\begin{aligned} &a \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} dt + \frac{a}{r} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial H}{\partial r} dt \\ &= a \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[ \int_0^{\infty} e^{-pt} H(r, t) dt \right] \\ &+ \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \int_0^{\infty} e^{-pt} H(r, t) dt \right] \\ &= a \frac{\partial^2 \bar{H}(r, P)}{\partial r^2} + \frac{a}{r} \frac{\partial \bar{H}(r, P)}{\partial r}. \end{aligned} \quad (12.9)$$

将 (12.8)，(12.9) 式代进 (12.4) 式，得

$$-H_0 + P\bar{H}(r, P) = a \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial r^2} + \frac{a}{r} \frac{\partial \bar{H}}{\partial r}. \quad (12.10)$$

得到(12.10)式之后,便可觉察,该式只包含一个变数及其导数,因此,它可以被写为常微分方程.

$$r \frac{d^2 \bar{H}}{dr^2} + \frac{d\bar{H}}{dr} - r \frac{P}{a} \left( \bar{H} - \frac{H_0}{P} \right) = 0. \quad (12.11)$$

微分方程(12.11),已能自动满足起始条件(12.2-c).若令

$$\bar{H} - \frac{H_0}{P} = \bar{h}, \quad (12.12)$$

则(12.11)式变为

$$r \frac{d^2 \bar{h}}{dr^2} + \frac{d\bar{h}}{dr} - \frac{P}{a} r \bar{h} = 0; \quad (12.13)$$

$$\text{再令} \quad \frac{P}{a} = \eta \quad (12.14)$$

则将(12.13)式变为贝塞尔方程

$$r \frac{d^2 \bar{h}}{dr^2} + \frac{d\bar{h}}{dr} - \eta r \bar{h} = 0. \quad (12.15)$$

参看公式(6.134), (6.136), 该式的通解为

$$\bar{h} = C_1 I_0(\sqrt{\eta} r) + C_2 K_0(\sqrt{\eta} r). \quad (12.16)$$

式中  $I_0(\sqrt{\eta} r)$  及  $K_0(\sqrt{\eta} r)$  被称为虚宗量零阶第一类及第二类贝塞尔函数.

下面将进而确定常数  $C_1$  及  $C_2$ .

由边界条件(12.2-b), 即

$$\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0$$

推知

$$0 = C_1 I'_0(\sqrt{\eta} R_0) + C_2 K'_0(\sqrt{\eta} R_0). \quad (12.17)$$

由公式(6.139), (6.122) 知

$$\left. \begin{aligned} K'_0(x) &= -K_1(x), \\ I'_0(x) &= I_1(x). \end{aligned} \right\} \quad (12.18)$$



故由 (12.17), 推知

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{K_1(\sqrt{\eta} R_0)}{I_1(\sqrt{\eta} R_0)}. \quad (12.19)$$

而由边界条件 (12.2-a) 知

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{q_0}{P}. \quad (12.20)$$

将 (12.20) 所示关系代进 (12.16) 式, 得

$$\frac{q_0}{P} = \sqrt{\eta} [C_1 I_1(\sqrt{\eta} r_0) - C_2 K_1(\sqrt{\eta} r_0)]. \quad (12.21)$$

从而由关系式 (12.19), (12.21) 推得

$$C_1 = \frac{K_1(\sqrt{\eta} R_0) q_0}{a \eta^{3/2} [I_1(\sqrt{\eta} r_0) K_1(\sqrt{\eta} R_0) - I_1(\sqrt{\eta} R_0) K_1(\sqrt{\eta} r_0)]}, \quad (12.22)$$

$$C_2 = \frac{I_1(\sqrt{\eta} R_0) q_0}{a \eta^{3/2} [I_1(\sqrt{\eta} r_0) K_1(\sqrt{\eta} R_0) - I_1(\sqrt{\eta} R_0) K_1(\sqrt{\eta} r_0)]}. \quad (12.23)$$

将 (12.22), (12.23) 所示之  $C_1$ ,  $C_2$  代进 (12.16) 式, 得

$$\bar{h}(r, P) = \frac{q_0 [I_1(\sqrt{\eta} r) K_1(\sqrt{\eta} R_0) + K_1(\sqrt{\eta} r) I_1(\sqrt{\eta} R_0)]}{a \eta^{3/2} [I_1(\sqrt{\eta} r_0) K_1(\sqrt{\eta} R_0) - I_1(\sqrt{\eta} R_0) K_1(\sqrt{\eta} r_0)]}. \quad (12.24)$$

求得 (12.24) 式之后, 再来研究该式的右端, 亦即

$$\frac{q_0 [I_1(\sqrt{\eta} r) K_1(\sqrt{\eta} R_0) + K_1(\sqrt{\eta} r) I_1(\sqrt{\eta} R_0)]}{a \eta^{3/2} [I_1(\sqrt{\eta} r_0) K_1(\sqrt{\eta} R_0) - I_1(\sqrt{\eta} R_0) K_1(\sqrt{\eta} r_0)]}. \quad (12.25)$$

由于虚宗量贝塞尔函数  $I_1$  和  $K_1$  在自变量为实数时发散, 因

此, 方程 (12.24) 除了当  $\eta = 0$  时存在极点外, 将只在  $\eta$  为虚数时才有一系列极点.

$\eta = 0$  时的极点可以这样确定, 即对小的自变量  $z$ , 将  $K_0(z)$ 、 $K_1(z)$ 、 $I_0(z)$ 、 $I_1(z)$  均展开至二次项, 参见文献 [42], [26] 可有一系列近似式, 即

$$\left. \begin{aligned} I_0(z) &\simeq J_0(iz) = 1 + \left(\frac{1}{2}z\right)^2, \\ I_1(z) &\simeq i^{-1}J_1(iz) = \frac{1}{2}z, \\ K_0(z) &\simeq -\left(C + \ln \frac{z}{2}\right)I_0(z) + \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^2}{(1!)^2}, \\ K_1(z) &\simeq -K'_0(z) = \frac{1}{2}z. \end{aligned} \right\} \quad (12.26)$$

式中  $C$  为欧拉常数,  $C = 0.577215665$ .

将 (12.26) 式中之  $z$  用  $\sqrt{\eta}r$  代换后代进 (12.24) 式, 整理之, 并设此时之  $\bar{h}(r, P)$  为  $\bar{h}_1(r, P)$ , 得

$$\begin{aligned} \bar{h}_1(r, P) = & \frac{q_0}{a\eta} \left[ \frac{R_0^2 r_0}{2(R_0^2 - r_0^2)} - \frac{r_0 r^2}{2(R_0^2 - r_0^2)} \right. \\ & \left. + \frac{R_0^2 r_0}{(R_0^2 - r_0^2)} \ln \frac{r}{R_0} \right] - \frac{2q_0 r_0}{a\eta^2(R_0^2 - r_0^2)} \\ & + \frac{q_0 r^2 R_0^2 r_0}{4a(R_0^2 - r_0^2)} - \frac{q_0 r^2 R_0^2 r_0}{8a(R_0^2 - r_0^2)}, \end{aligned}$$

因为  $\eta = \frac{P}{a}$ , 故

$$\begin{aligned} \bar{h}_1(r, P) = & \frac{q_0}{P} \left\{ \frac{r_0}{(R_0^2 - r_0^2)} \left[ R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{R_0^2 - r^2}{2} \right] \right\} - \frac{2aq_0}{P^2} \left( \frac{r_0}{R_0^2 - r_0^2} \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{q_0 R_0^2 r^2 r_0}{4a(R_0^2 - r_0^2)} \left( \ln \frac{r}{R_0} - 1 \right). \quad (12.27)$$

对上式进行拉氏逆变换,得

$$\begin{aligned} h_1(r, t) = q_0 \left\{ \frac{r_0}{R_0^2 - r_0^2} \left[ R^2 \ln \frac{r}{R_0} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{R_0^2 - r^2}{2} \right] - \frac{2aq_0 r_0 t}{(R_0^2 - r_0^2)} \right. \\ \left. + \left[ \frac{q_0 R_0^2 r^2 r_0}{4a(R_0^2 - r_0^2)} \left( \ln \frac{r}{R_0} - 1 \right) \delta(t) \right] \right\}. \quad (12.28) \end{aligned}$$

参看文献 [19], 式 (12.28) 中  $\delta(t)$  为狄拉克 (Dirac) 函数, 对于  $t \neq 0$  的数, 其值为零, 故 (12.28) 式变为

$$\begin{aligned} h_1(r, t) = -q_0 \left\{ \frac{r_0}{R_0^2 - r_0^2} \right. \\ \left. \times \left( 2at - R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} - \frac{R_0^2 - r^2}{2} \right) \right\} \\ \text{或} \quad h_1(r, t) = q_0 \left\{ \frac{r_0}{R_0^2 - r_0^2} \right. \\ \left. \times \left( R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} + \frac{R_0^2 - r^2}{2} - 2at \right) \right\}. \quad (12.29) \end{aligned}$$

现在进而确定当  $\eta$  为负值时方程式 (12.24) 的根。对此使用拉氏逆变换, 参看公式 (5.19), 知

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{Pt} F(P) dP,$$

该变换的积分可用回路积分来完成, 其积分路线与顺着负轴有缺口的弧线相吻合 (图 12-1)。

由于 (12.24) 式是偶函数, 因此, 顺着负轴沿缺口上边和下边积分时所得积分结果为零, 对此可参看公式 (5.43) 或文献 [21]。但是, 顺着实轴存在着极点。

参看文献 [19], 由于

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(P) e^{Pt} dP \\ &= \sum_{K=1}^n \text{Res} F(P) e^{Pt}, \\ \text{即 } f(t) &= \sum_{K=1}^n \text{Res} F(P) e^{Pt}, \\ & \quad t > 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.30)$$

因而，可借助留数计算确定该积分。为此，令

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{P}{a} = u^2 e^{i\pi}, \\ \text{或 } P &= au^2 e^{i\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (12.31)$$

将(12.31)式表示之 $P$ 代进(12.30)式，并记住 $F(P) = \bar{h}(r, P)$ ，则有

$$\begin{aligned} h_2(r, t) &= H(r, t) - H_0 \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{Pt} \bar{h}(r, \eta) dP \\ &= \frac{q_0}{2\pi i} \\ &\times \oint \frac{e^{au^2 e^{i\pi} t} [I_0(ue^{\frac{i\pi}{2}} r) K_1(ue^{\frac{i\pi}{2}} R_0) + K_0(ue^{\frac{i\pi}{2}} r) I_1(ue^{\frac{i\pi}{2}} R_0)]}{\alpha(u^2 e^{i\pi})^{3/2} [I_1(ue^{\frac{i\pi}{2}} r_0) K_1(ue^{\frac{i\pi}{2}} R_0) - I_1(ue^{\frac{i\pi}{2}} R_0) K_1(ue^{\frac{i\pi}{2}} r_0)]} \\ &\times d(au^2 e^{i\pi}), \end{aligned} \quad (12.32)$$

因  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ ,  $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ ;

而  $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ ,

故

$$h_2(r, t) = \frac{q_0}{2\pi i}$$

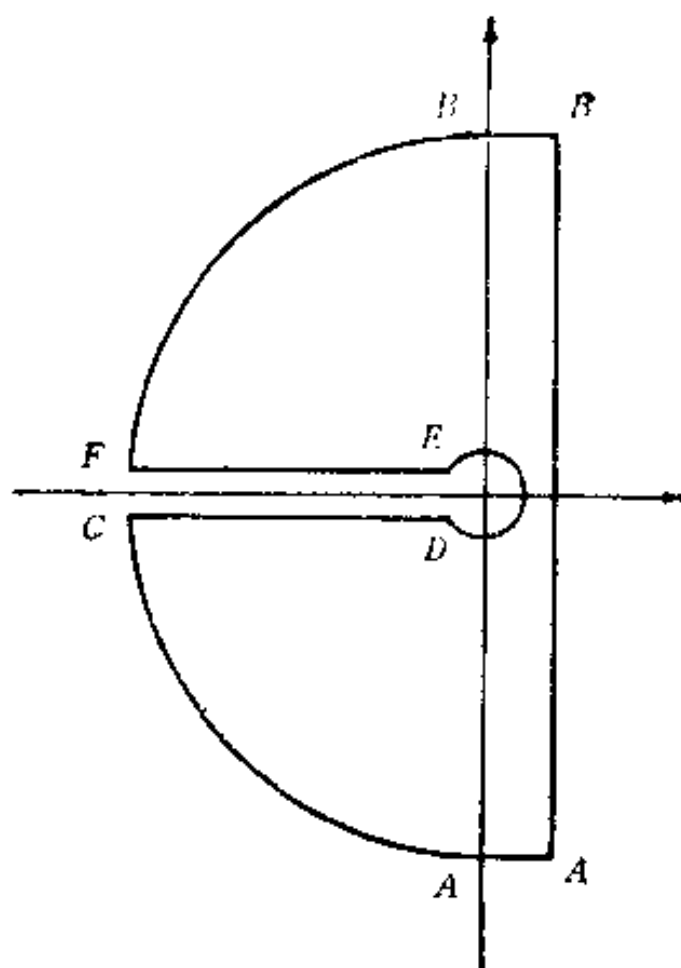


图 12-1 积分回路图

$$\times \oint_{\lambda_1, \lambda_2, \dots} \frac{e^{-au^2t} [I_0(iur)K_1(iuR_0) + K_0(iur)I_1(iuR_0)]}{-iau^3 [I_1(iur_0)K_1(iuR_0) - I_1(iuR_0)K_1(iur_0)]} \\ \times (-2audu)$$

亦即

$$h_2(r, t) = \frac{q_0}{\pi i} \\ \times \oint_{\lambda_1, \lambda_2, \dots} \frac{e^{-au^2t} [I_0(iur)K_1(iuR_0) + K_0(iur)I_1(iuR_0)]}{iu^2 [I_1(iur_0)K_1(iuR_0) - I_1(iuR_0)K_1(iur_0)]} du. \quad (12.33)$$

参见 [36], [42], 存在如下关系:

$$\left. \begin{aligned} I_0(\pm iz) &= J_0(z), \\ K_0(\pm iz) &= \pm \frac{\pi i}{2} [-J_0(z) \pm iY_0(z)], \\ I_1(\pm iz) &= \pm iJ_1(z), \\ K_1(\pm iz) &= \pm \frac{\pi}{2} [-J_1(z) \pm iY_1(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (12.34)$$

从而 (12.33) 式可变为

$$h_2(r, t) = \frac{q_0}{\pi i} \\ \times \oint_{\lambda_1, \lambda_2, \dots} \frac{e^{-au^2t} i [J_0(ur)Y_1(uR_0) - J_1(uR_0)Y_0(ur)]}{u^2 i [J_1(uR_0)Y_1(ur) - J_1(ur_0)Y_1(uR_0)]} du \\ = -\frac{q_0}{\pi i} \\ \times \oint_{\lambda_1, \lambda_2, \dots} \frac{e^{-au^2t} [J_1(uR_0)y_0(ur) - y_1(uR_0)J_0(ur)] du}{u^2 [J_1(uR_0)y_1(ur_0) - J_1(ur_0)Y_1(uR_0)]}. \quad (12.35)$$

式中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  为方程 (12.36) 的根, 该方程为

$$J_1(\lambda_n R_0)Y_1(\lambda_n r_0) - J_1(\lambda_n r_0)Y_1(\lambda_n R_0) = 0, \quad (12.36)$$

方程 (12.35) 的留数计算, 参见文献 [43], [19]; 依据留数计算公式, 等于级数

$$= 2q_0 \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}^{\infty} \frac{e^{-a\lambda_n^2 t} [J_1(\lambda_n R_0)Y_0(\lambda_n r) - Y_1(\lambda_n R_0)J_0(\lambda_n r)]}{\lambda_n^2 \lim_{u \rightarrow \lambda_n} \frac{d}{du} [J_1(uR_0)Y_1(ur_0) - J_1(ur_0)Y_1(uR_0)]}, \quad (12.37)$$

参看第六章第四节,应用贝塞尔函数递推公式:

$$\left. \begin{aligned} J_0'(z) &= -J_1(z), \\ J_1'(z) &= J_0(z) - J_1(z)/z, \\ Y_0'(z) &= -Y_1(z), \\ Y_1'(z) &= Y_0(z) - Y_1(z)/z. \end{aligned} \right\} \quad (12.38)$$

并考虑到公式 (12.36), 可将 (12.37) 式变为

$$\begin{aligned} & -2q_0 \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} [J_1(\lambda_n R_0) Y_0(\lambda_n r) - Y_1(\lambda_n R_0) J_0(\lambda_n r)] / \\ & \lambda_n^2 \{ r_0 [J_1(\lambda_n R_0) Y_0(\lambda_n r_0) - J_0(\lambda_n r_0) Y_1(\lambda_n R_0)] \\ & + R_0 [Y_1(\lambda_n r_0) J_0(\lambda_n R_0) - J_1(\lambda_n r_0) Y_0(\lambda_n R_0)] \}. \end{aligned} \quad (12.39)$$

由公式 (12.36) 又可知

$$\frac{J_1(\lambda_n r_0)}{J_1(\lambda_n R_0)} = \frac{Y_1(\lambda_n r_0)}{Y_1(\lambda_n R_0)} = \rho, \quad (12.40)$$

用 (12.40) 式表示的相应  $\rho$  乘 (12.39) 式之分子和分母, 得

$$\begin{aligned} & -2q_0 \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} [J_1(\lambda_n r_0) Y_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n r) Y_1(\lambda_n r_0)] / \\ & \lambda_n^2 \left\{ r_0 [J_1(\lambda_n r_0) Y_0(\lambda_n r_0) - J_0(\lambda_n r_0) Y_1(\lambda_n r_0)] \right. \\ & + R_0 J_1(\lambda_n r_0) Y_1(\lambda_n r_0) \\ & \times \left[ \frac{J_0(\lambda_n R_0) Y_1(\lambda_n R_0) - J_1(\lambda_n R_0) Y_0(\lambda_n R_0)}{J_1(\lambda_n R_0) Y_1(\lambda_n R_0)} \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

考虑到公式 (7.30) 所表示之关系则上式可改写为

$$\begin{aligned} & -2q_0 \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} [J_1(\lambda_n r_0) Y_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n r) Y_1(\lambda_n r_0)] / \\ & \lambda_n^2 \left\{ r_0 \frac{2}{\pi \lambda_n r_0} + R_0 J_1(\lambda_n r_0) Y_1(\lambda_n r_0) \right. \\ & \times \left[ \frac{-2}{\pi \lambda_n R_0} / J_1(\lambda_n R_0) Y_1(\lambda_n R_0) \right] \left. \right\}, \end{aligned}$$

或即

$$= \pi q_0 \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}^{\infty} e^{-a\lambda_n^2 t} [J_1(\lambda_n r_0) Y_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n r) Y_1(\lambda_n r_0)] /$$

$$\lambda_n \left\{ \frac{J_1(\lambda_n R_0) Y_1(\lambda_n R_0) - J_1(\lambda_n r_0) Y_1(\lambda_n r_0)}{J_1(\lambda_n R_0) Y_1(\lambda_n R_0)} \right\}. \quad (12.41)$$

对 (12.41) 式再次利用 (12.40) 式的关系, 得

$$= \pi q_0 \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}^{\infty} e^{-a\lambda_n^2 t} [J_1(\lambda_n r_0) Y_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n r) Y_1(\lambda_n r_0)] /$$

$$\lambda_n \left\{ \frac{J_1(\lambda_n R_0) Y_1(\lambda_n R_0) \frac{J_1(\lambda_n R_0)}{Y_1(\lambda_n R_0)} - J_1(\lambda_n r_0) Y_1(\lambda_n r_0) \frac{J_1(\lambda_n r_0)}{Y_1(\lambda_n r_0)}}{J_1(\lambda_n R_0) Y_1(\lambda_n R_0) J_1(\lambda_n R_0) / Y_1(\lambda_n R_0)} \right\},$$

亦即

$$= \pi q_0 \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}^{\infty} e^{-a\lambda_n^2 t} J_1^2(\lambda_n R_0) [J_1(\lambda_n r_0) Y_0(\lambda_n r)$$

$$- J_0(\lambda_n r) Y_1(\lambda_n r_0)] / \lambda_n [J_1^2(\lambda_n R_0) - J_1^2(\lambda_n r_0)]. \quad (12.42)$$

如令

$$\frac{r_0}{R_0} = x_0, \quad \frac{r}{R_0} = x, \quad a/R^2 = \beta^2,$$

则 (12.42) 式变为

$$h_2(r, t) = -\pi q_0 R_0 \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}^{\infty} J_1^2(\lambda_n) [J_1(\lambda_n x_0) Y_0(\lambda_n x)$$

$$- J_0(\lambda_n x) Y_1(\lambda_n x_0)] e^{-\beta^2 \lambda_n^2 t} / \lambda_n [J_1^2(\lambda_n)$$

$$- J_1^2(\lambda_n x_0)] \quad (12.43)$$

而 (12.36) 式变为

$$J_1(\lambda_n) Y_1(\lambda_n x_0) - J_1(\lambda_n x_0) Y_1(\lambda_n) = 0. \quad (12.44)$$

将 (12.44) 式与 (12.29) 式相加, 并考虑 (12.32) 式表示之关系则得

$$H(r, t) = H_0 + h(r, t) = H_0 + h_1(r, t) + h_2(r, t)$$

$$= H_0 - q_0 \left[ \frac{r_0}{R_0^2 - r_0^2} \left( 2at - R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} - \frac{R_0^2 - r^2}{2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \pi R_0 q_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_1^2(\lambda_n) [J_1(\lambda_n x_0) Y_0(\lambda_n x) \\
& - J_0(\lambda_n x) Y_1(\lambda_n x_0)] e^{-\beta^2 \lambda_n^2 t} / \lambda_n [J_1^2(\lambda_n) - J_1^2(\lambda_n x_0)]
\end{aligned} \quad (12.45)$$

参见 (7.50) 式, 即令此处之

$$h(\lambda_n x) = J_0(\lambda_n x) Y_1(\lambda_n x_0) - J_1(\lambda_n x_0) Y_0(\lambda_n x), \quad (12.46)$$

则得

$$\begin{aligned}
H(r, t) = H_0 - q_0 \left\{ \left[ \frac{r_0}{R_0^2 - r_0^2} \left( 2at - R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} - \frac{R_0^2 - r^2}{2} \right) \right] \right. \\
\left. - \pi R_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda_n) h(\lambda_n x) e^{-\beta^2 \lambda_n^2 t}}{\lambda_n [J_1^2(\lambda_n) - J_1^2(\lambda_n x_0)]} \right\}. \quad (12.47)
\end{aligned}$$

式中  $\lambda_n$  为 (12.44) 式之根。

顺便指出, 如果对 (12.39) 式施用关系式

$$\frac{J_1(\lambda_n x_0)}{J_1(\lambda_n)} = \frac{Y_1(\lambda_n x_0)}{Y_1(\lambda_n)},$$

则得  $H(r, t)$  之另一形式的公式

$$\begin{aligned}
H(r, t) = H_0 - q_0 \left\{ \left[ \frac{r_0}{R_0^2 - r_0^2} \left( 2at - R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} - \frac{R_0^2 - r^2}{2} \right) \right] \right. \\
\left. - \pi R_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n) J_1(\lambda_n x_0) h(\lambda_n x) e^{-\beta^2 \lambda_n^2 t}}{\lambda_n [J_1^2(\lambda_n) - J_1^2(\lambda_n x_0)]} \right\}. \quad (12.48)
\end{aligned}$$

$$\text{此处之 } h(\lambda_n x) = J_0(\lambda_n x) Y_1(\lambda_n) - J_1(\lambda_n) Y_0(\lambda_n x), \quad (12.49)$$

式中之  $\lambda_n$  仍为方程 (12.44) 即

$$J_1(\lambda_n) Y_1(\lambda_n x_0) - J_1(\lambda_n x_0) Y_1(\lambda_n) = 0$$

之根。

为了避免与第七、八、九诸章中所用之  $\lambda_n$  值, 亦即由

$$J_0(\lambda_n x_0) Y_1(\lambda_n) - Y_0(\lambda_n x_0) J_1(\lambda_n) = 0$$

求出之  $\lambda_n$  相混淆, 在本章所得之公式中将  $\lambda_n$  另用  $\xi$  加以替换, 从而公式 (12.45), (12.47), (12.48) 变为如下形式, 即



表 12-1

$\xi_n \backslash x_0$	0.0001	0.0005	0.001
$\xi_1$	3.83170	3.83170	3.83172
$\xi_2$	7.01559	7.01559	7.01563
$\xi_3$	10.17347	10.17349	10.17355
$\xi_4$	13.32369	13.32373	13.32383
$\xi_5$	16.47063	16.47067	16.47084
备注	$\xi_n$ 为方程 $J_1(\xi_n)Y_1(\xi_n x_0) -$		

$$H(r, t) = H_0 - q_0 \left[ \frac{r_0}{R_0^2 - r_0^2} \left( 2at - R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} - \frac{R_0^2 - r^2}{2} \right) \right] \\ + \pi R_0 q_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_1^2(\xi_n) [J_1(\xi_n x_0) Y_0(\xi_n x) \\ - J_0(\xi_n x) Y_1(\xi_n x_0)] e^{-\beta^2 \xi_n^2 t} / \xi_n [J_1^2(\xi_n) - J_1^2(\xi_n x_0)], \quad (12.50)$$

$$H(r, t) = H_0 - q_0 \left\{ \left[ \frac{r_0}{R_0^2 - r_0^2} \left( 2at - R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} - \frac{R_0^2 - r^2}{2} \right) \right] \right. \\ \left. - \pi R_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\xi) h(\xi x) e^{-\beta^2 \xi_n^2 t}}{\xi_n [J_1^2(\xi) - J_1^2(\xi_n x_0)]} \right\}. \quad (12.51)$$

式中

$$h(\xi_n x) = J_0(\xi_n x) Y_1(\xi_n x_0) - J_1(\xi_n x_0) Y_0(\xi_n x), \quad (12.52)$$

而

$$H(r, t) = H_0 - q_0 \left\{ \left[ \frac{r_0}{R_0^2 - r_0^2} \left( 2at - R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} - \frac{R_0^2 - r^2}{2} \right) \right] \right. \\ \left. + \pi R_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_n) J_1(\xi_n x_0) h(\xi x) e^{-\beta^2 \xi_n^2 t}}{\xi_n [J_1^2(\xi) - J_1^2(\xi_n x_0)]} \right\}. \quad (12.53)$$

该式中之

$$h(\xi_n x) = J_0(\xi_n x) Y_1(\xi) - J_1(\xi) Y_0(\xi_n x), \quad (12.54)$$

$\zeta_n$  值表

0.005	0.008	0.01	0.05	0.1
3.83200		3.83288	3.86032	3.94091
7.01656		7.01945	7.10454	7.33041
10.17550		10.18151	10.34730	10.74821
13.32716		13.33734	13.60045	14.18840
16.47591		16.49126	16.86353	17.64299

$J_1(\zeta_n x_0)Y_1(\zeta_n) = 0$  之根

而式中之  $\zeta_n$  由下式决定,该式即

$$J_1(\zeta_n)Y_1(\zeta_n x_0) - J_1(\zeta_n x_0)Y_1(\zeta_n) = 0. \quad (12.55)$$

$\zeta$  的前五个根列入表 12-1 中。

## 二、对公式 (12.50)、(12.51) 及 (12.53) 的说明

上面推导出的公式 (12.50), (12.51), (12.53) 均包含两个不同部分,第一部分表明水位  $H(r, t)$  与时间  $t$  的线性关系;第二部分是一个包括贝塞尔函数的级数,表明水位(或水头压力)随时间呈负指数形式的衰减变化。当  $\frac{r_0}{R_0}$  很小,例如当

$$\frac{r_0}{R_0} = x_0 < 0.01$$

而井的工作时间较长,亦即时间  $t$  值较大时,该级数的计算结果其值甚小,与公式的第一部分相比在实际工程计算中可以忽略不计。

因此,当  $x_0 = \frac{r_0}{R_0}$

很小而  $t$  值较大时公式 (12.50), (12.51), (12.53) 可以简化为

$$H(r, t) \simeq H_0 - q_0 \left[ \frac{r_0}{R_0^2 - r_0^2} \times \left( 2at - R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} - \frac{R_0^2 - r^2}{2} \right) \right], \quad (12.56)$$

或

$$H(r, t) = H_0 - \frac{Q}{2\pi KM} \times \left[ \frac{2at}{R_0^2} - \ln \frac{r}{R_0} + \frac{r^2}{2R^2} - \frac{1}{2} \right]. \quad (12.57)$$

### 三、算 例

有一凿于承压含水层中的完整井, 井径 0.610 米, 井的隔水边界半径  $R_0 = 2000$  米, 出水量  $Q = 2700$  米<sup>3</sup>/日, 含水层厚度  $M = 30$  米, 渗透系数  $K = 41$  米/日, 给水度  $\mu = 0.000205$ , 初始水头  $H_0 = 85$  米, 试求  $t = 1$  小时、1 日、10 日抽水时刻在距井  $r = 0.305$  米、100 米、200 米、500 米、1000 米及 2000 米处的水头值, 并作水头变化曲线。

解: 应用公式 (12.56), 即

$$H(r, t) = H_0 - q_0 \left[ \frac{r_0}{R_0^2 - r_0^2} \times \left( 2at - R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} - \frac{R_0^2 - r^2}{2} \right) \right]$$

计算如下:

已知  $H_0 = 85$  米,

$$q_0 = \frac{Q}{2\pi r_0 MK} = \frac{2700}{2\pi \times 0.305 \times 30 \times 41} = 1.145457$$

$$\frac{r_0}{R_0^2 - r_0^2} = \frac{0.305}{2000^2 - 0.305^2} = 7.6 \times 10^{-8}$$

表 12-2 水头曲线计算表

t (日)	r (米)	$2at = 1.2 \times 10^7 t$	$R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} = 2000 \ln \frac{r}{2000}$	$\frac{R_0^2 - r^2}{2} = \frac{2000^2 - r^2}{2}$	$H = H_0 - q_0 \cdot \left[ \frac{r_0}{R_0^2 - r_0^2} (2at - R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} - \frac{R_0^2 - r_0^2}{2}) \right]$ (米)
		(1)	(2)	(3)	(4) = 85 - 1.14546 \cdot \{7.6 \times 10^{-8} [(1) - (2) - (3)]\}
$\frac{1}{24}$	0.305	$5 \times 10^5$	$-3.515 \times 10^7$	$2.000 \times 10^6$	82.070
	100	$5 \times 10^5$	$-1.198 \times 10^7$	$1.995 \times 10^6$	84.087
	200	$5 \times 10^5$	$-9.210 \times 10^5$	$1.980 \times 10^6$	84.327
	500	$5 \times 10^5$	$-5.545 \times 10^5$	$1.875 \times 10^6$	84.637
	1000	$5 \times 10^5$	$-2.773 \times 10^5$	$1.500 \times 10^6$	84.846
	2000	$5 \times 10^5$	0	0	84.957
1	0.305	$1.2 \times 10^7$	$-3.515 \times 10^7$	$2.000 \times 10^6$	81.069
	100	$1.2 \times 10^7$	$-1.198 \times 10^7$	$1.995 \times 10^6$	83.086
	200	$1.2 \times 10^7$	$-9.210 \times 10^5$	$1.980 \times 10^6$	83.326
	500	$1.2 \times 10^7$	$-5.545 \times 10^5$	$1.875 \times 10^6$	83.636
	1000	$1.2 \times 10^7$	$2.773 \times 10^5$	$1.500 \times 10^6$	83.845
	2000	$1.2 \times 10^7$	0	0	83.955
10	0.305	$1.2 \times 10^8$	$-3.515 \times 10^7$	$2.000 \times 10^6$	71.668
	100	$1.2 \times 10^8$	$-1.198 \times 10^7$	$1.995 \times 10^6$	73.683
	200	$1.2 \times 10^8$	$-9.210 \times 10^5$	$1.980 \times 10^6$	73.924
	500	$1.2 \times 10^8$	$-5.545 \times 10^5$	$1.875 \times 10^6$	74.234
	1000	$1.2 \times 10^8$	$-2.773 \times 10^5$	$1.500 \times 10^6$	74.443
	2000	$1.2 \times 10^8$	0	0	74.553

$$2at = 2 \frac{41 \times 30}{0.000205} t = 1.2 \times 10^7 t,$$

故当  $t = 1/24$  日, 在  $r = 100$  米处

$$H(r, t) = 85 - 1.14546 \{ 7.6 \times 10^{-8} [5 \times 10^7 - (-1198293) - 1995000] \} = 84.087 \text{ 米}.$$

其余计算过程及结果列入表 12-2 中。

图 12-2 是根据计算结果绘制的水头变化曲线。

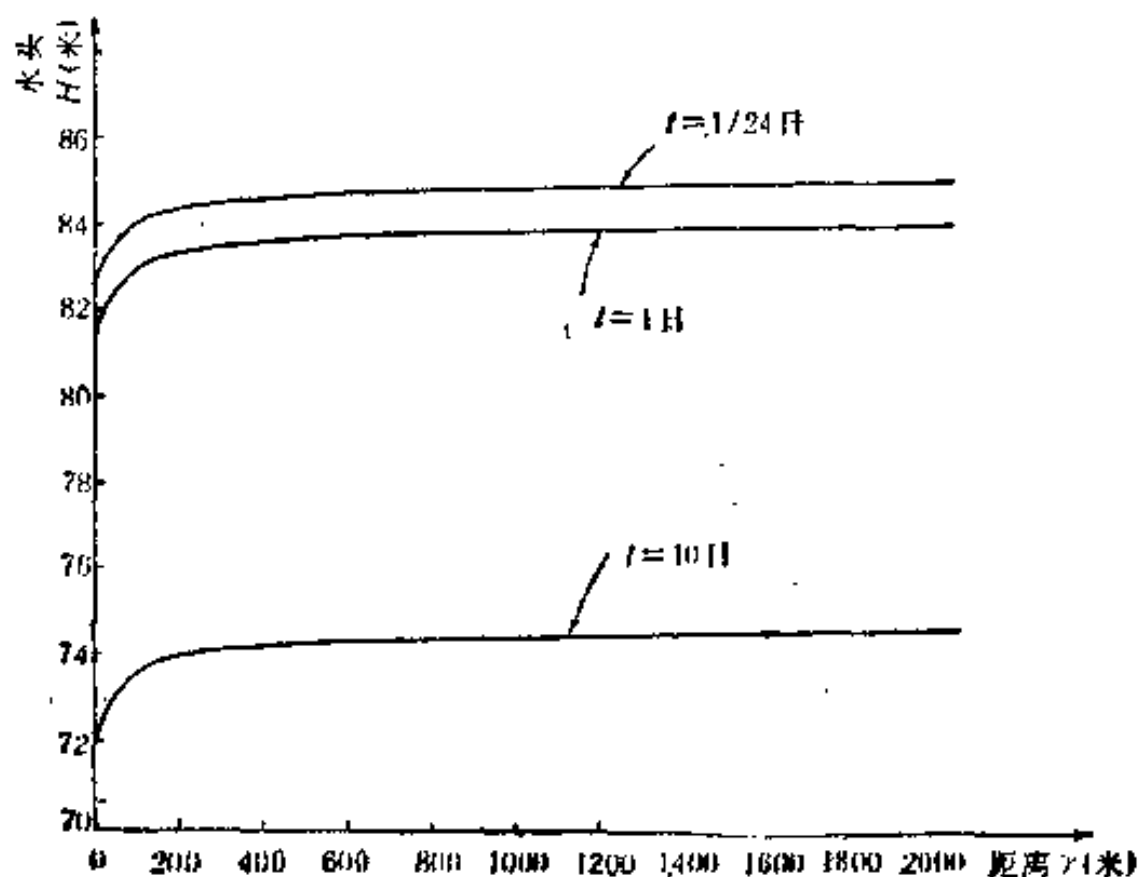


图 12-2 水头曲线图

# 第十三章 存在越流补给时地下水向割离井的非稳定渗流

## 一、基本渗流方程及其拉氏变换

在本书的第二章曾推导了存在越流补给时地下水向井孔渗流的基本方程,如图 13-1 所示,该系统的方程为

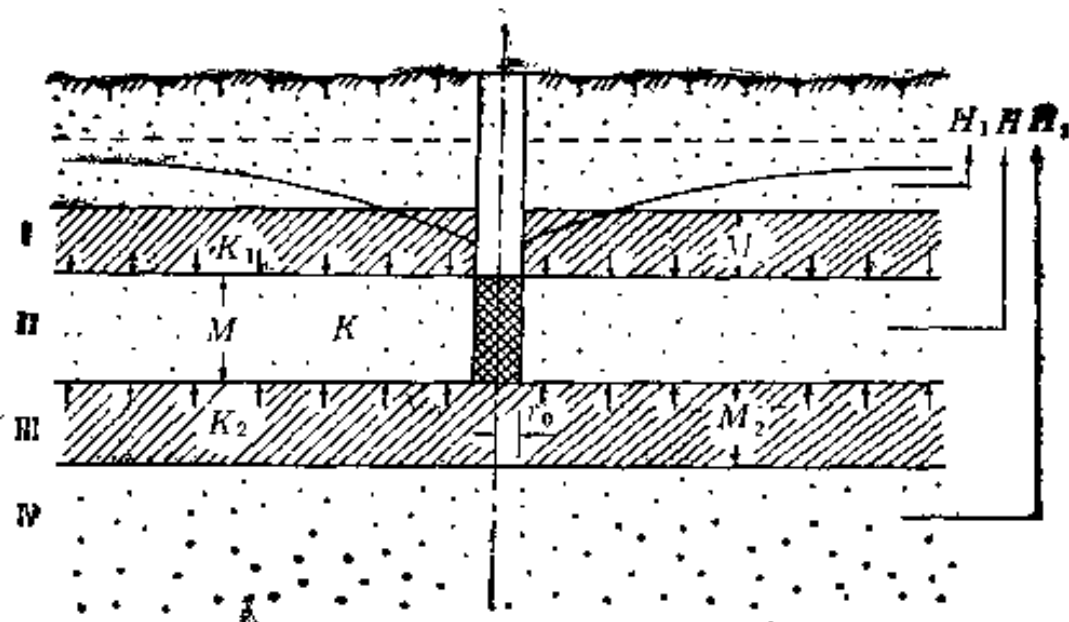


图 13-1 有越流时的井流示意图

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right] + \frac{K_1}{\mu_1} \frac{H_1 - H}{M_1} + \frac{K_2}{\mu_1} \frac{H_2 - H}{M_2} \quad (13.1)$$

式中  $a = \frac{KM}{\mu_1}$  ——主含水层的压力传导系数;

$\mu_1$  ——主含水层的弹性给水度;

$K$  ——主含水层的渗透系数;

$M$  ——主含水层的厚度;

$K_1, K_2$ ——上部及下部弱透水层的渗透系数;

$M_1, M_2$ ——上部及下部弱透水层的厚度;

$H, H_1, H_2$ ——分别为主含水层, 上部及下部弱透水层的水位值 (参见图 13-1)。

对方程 (13.1) 的求解将使用拉普拉斯变换法。为此可参看本书第五章, 对方程 (13.1) 按时间  $t$  施行拉氏变换, 即先对 (13.1) 式之两端同乘  $e^{-pt}$ , 并在  $t = 0$  到  $\infty$  区间积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial H}{\partial t} dt &= a \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} dt \\ &+ \frac{a}{r} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial H}{\partial r} dt \\ &+ \frac{K_1 H_1}{M_1 \mu_1} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt - \frac{K_1}{M_1 \mu_1} \int_0^{\infty} H e^{-pt} dt \\ &+ \frac{K_2 H_2}{M_2 \mu_2} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \\ &- \frac{K_2}{M_2 \mu_2} \int_0^{\infty} H e^{-pt} dt, \end{aligned} \quad (13.2)$$

对 (13.2) 式之左进行分部积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial H}{\partial t} dt &= [e^{-pt} H(r, t)]_{t=0}^{t=\infty} \\ &+ p \int_0^{\infty} e^{-pt} H(r, t) dt. \end{aligned} \quad (13.3)$$

由于时间  $t$  无论延续多久, 作为水位  $H(r, t)$  总是有限的, 因而

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} H(r, t) = 0; \quad (13.4)$$

再若假定起始水位呈水平, 即有

$$H(r, 0) = H_0 \quad (13.5)$$

式中  $H_0$  为常数。

参见 (5.28) 式, 若令

$$\bar{H} = \bar{f}(P) = \int_0^{\infty} e^{-Pt} f(t) dt, \quad (13.6)$$

则知

$$\int_0^{\infty} e^{-Pt} \frac{\partial H}{\partial t} dt = -H_0 + P\bar{H}(r, P). \quad (13.7)$$

现在, 进而整理 (13.2) 式等号之右, 其前两项可变为

$$\begin{aligned} & a \int_0^{\infty} e^{-Pt} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} dt + \frac{a}{r} \int_0^{\infty} e^{-Pt} \frac{\partial H}{\partial r} dt \\ &= a \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int_0^{\infty} e^{-Pt} H(r, t) dt \\ &+ \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\infty} e^{-Pt} H(r, t) dt \\ &= a \frac{\partial^2 \bar{H}(r, P)}{\partial r^2} + \frac{a}{r} \frac{\partial \bar{H}(r, P)}{\partial r}. \end{aligned} \quad (13.8)$$

而 (13.2) 式右端之后四项为:

$$\begin{aligned} & \frac{K_1 H_1}{M_1 \mu_1} \int_0^{\infty} e^{-Pt} dt - \frac{K_1}{M_1 \mu_1} \int_0^{\infty} H e^{-Pt} dt \\ &+ \frac{K_2 H_2}{M_2 \mu_2} \int_0^{\infty} e^{-Pt} dt - \frac{K_2}{M_2 \mu_2} \int_0^{\infty} H e^{-Pt} dt \\ &= \frac{K_1 H_1}{PM_1 \mu_1} [e^{-Pt}]_0^{\infty} - \frac{K_1}{M_1 \mu_1} \bar{H} \\ &+ \frac{K_2 H_2}{PM_2 \mu_2} [e^{-Pt}]_0^{\infty} - \frac{K_2 \bar{H}}{M_2 \mu_2} \\ &= \frac{K_1 H_1}{PM_1 \mu_1} - \frac{K_1}{M_1 \mu_1} \bar{H} \\ &+ \frac{K_2 H_2}{PM_2 \mu_2} - \frac{K_2}{M_2 \mu_2} \bar{H}. \end{aligned} \quad (13.9)$$

将 (13.7), (13.8), (13.9) 式代进 (13.2) 式, 得

$$P\bar{H}(r, P) - H_0 = a\bar{H}''(r, P) + \frac{a}{r} \bar{H}'(r, P)$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{K_1 H_1}{P M_1 \mu_1} - \frac{K_1}{M_1 \mu_1} \bar{H}(r, P) \\
& + \frac{K_2 H_2}{P M_2 \mu_2} - \frac{K_2}{M_2 \mu_2} \bar{H}(r, P),
\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}
a \bar{H}' + \frac{a}{r} \bar{H}' + \frac{K_1 H_1}{P M_1 \mu_1} - \frac{K_1}{\mu_1 M_1} \bar{H} \\
+ \frac{K_2 H_2}{P M_2 \mu_2} - \frac{K_2}{M_2 \mu_2} \bar{H} \\
- P \bar{H} + H_0 = 0.
\end{aligned} \tag{13.10}$$

在 (13.10) 式中若令

$$\gamma_1 = \frac{K_1}{M_1 \mu_1}, \quad \gamma_2 = \frac{K_2}{M_2 \mu_2}. \tag{13.11}$$

并记住

$$a = \frac{KM}{\mu_1},$$

则 (13.10) 式变为

$$\begin{aligned}
\bar{H}'' + \frac{1}{r} \bar{H}' + \frac{\gamma_1 H_1}{a P} \\
- \frac{\gamma_1 \bar{H}}{a} + \frac{\gamma_2 H_2}{a P} - \frac{\gamma_2 \bar{H}}{a} \\
- \frac{P}{a} \bar{H} + \frac{H_0}{a} = 0,
\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}
\bar{H}'' + \frac{1}{r} \bar{H}' - \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + P}{a} \right) \bar{H} \\
+ \frac{1}{a} \left( \frac{\gamma_1 H_1}{P} + \frac{\gamma_2 H_2}{P} + H_0 \right) = 0,
\end{aligned}$$

或即

$$\bar{H}'' + \frac{1}{r} \bar{H}' - \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + P}{a} \bar{H}$$

$$\times \left[ \bar{H} - \frac{H_0}{\gamma_1 + \gamma_2 + p} - \frac{\beta}{p(p + \gamma_1 + \gamma_2)} \right] = 0. \quad (13.12)$$

式中

$$\beta = \gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 \quad (13.13)$$

(13.12) 式便是以

$$\left( \bar{H} - \frac{H_0}{p + \gamma_1 + \gamma_2} - \frac{\beta}{p(p + \gamma_1 + \gamma_2)} \right)$$

为未知函数的零阶贝塞尔方程, 其通解为

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{H_0}{p + \gamma_1 + \gamma_2} - \frac{\beta}{p(p + \gamma_1 + \gamma_2)} \\ &= C_1 I_0(\omega r) + C_2 K_0(\omega r). \end{aligned} \quad (13.14)$$

式中  $I_0(\omega r)$ ,  $K_0(\omega r)$  分别为虚宗量零阶第一类和第二类贝塞尔函数, 对此, 可参见第六章第十一节, 而

$$\omega = \sqrt{\frac{p + \gamma_1 + \gamma_2}{a}}. \quad (13.15)$$

$C_1$ ,  $C_2$  为待定常数。

在推得起始水位为常数  $H_0$  情况下的通式 (13.14) 式之后, 便可用来求解不同边界条件下存在越流补给的非稳定渗流课题。

## 二、存在越流时割离井非稳定 渗流计算公式的推导

对于本书课题其起始条件与边界条件可表示为

$$\left. \begin{aligned} H(r, 0) &= H_0, & a \\ H(r_0, t) &= h_0, & b \\ \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=R_0} &= 0, & c \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

经拉氏变换后 (13.16) 式变为

$$\left. \begin{aligned} L[H(r, 0)] &= \frac{H_0}{P}, & \text{a} \\ L[H(r_0, t)] &= \frac{h_0}{P}, & \text{b} \\ L\left[\frac{\partial H}{\partial r}\right]_{r=R_0} &= 0, & \text{c} \end{aligned} \right\} \quad (13.17)$$

### (一) 水位公式的推导

由前节已知 (13.13) 式的通解为

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{H_0}{P + \gamma_1 + \gamma_2} - \frac{\beta}{P(P + \gamma_1 + \gamma_2)} \\ &= C_1 I_0(\omega r) + C_2 K_0(\omega r). \end{aligned}$$

由边界条件 (13.17c) 知

$$\omega C_1 I_1(\omega R) - \omega C_2 K_1(\omega R) = 0,$$

即

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{K_1(\omega R)}{I_1(\omega R)}.$$

或

$$C_1 = C_2 \frac{K_1(\omega R)}{I_1(\omega R)}. \quad (13.18)$$

再由 (13.17b) 式知

$$\begin{aligned} \frac{h_0}{P} &= \frac{H_0}{P + \gamma_1 + \gamma_2} - \frac{\beta}{P(P + \gamma_1 + \gamma_2)} \\ &= C_2 \frac{K_1(\omega R)}{I_1(\omega R)} I_0(\omega r_0) + C_2 K_0(\omega r_0), \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{h_0}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma_1 + \gamma_2} - \frac{\beta}{P(P + \gamma_1 + \gamma_2)} \\ &\quad \times \left[ \frac{I_1(\omega R)}{I_0(\omega r_0) K_1(\omega R) + K_0(\omega r_0) I_1(\omega R)} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{若令 } U(R, r_0) = I_0(\omega r_0) K_1(\omega R) + K_0(\omega r_0) I_1(\omega R), \quad (13.19)$$

则

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \left[ \frac{h_0}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma_1 + \gamma_2} - \frac{\beta}{P(P + \gamma_1 + \gamma_2)} \right] \frac{I_1(\omega R)}{U(R, r_0)}, & a \\ C_1 &= \left[ \frac{h_0}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma_1 + \gamma_2} - \frac{\beta}{P(P + \gamma_1 + \gamma_2)} \right] \frac{K_1(\omega R)}{U(R, r_0)}. & b \end{aligned} \right\} \quad (13.20)$$

将 (13.20) 式表示之  $C_1, C_2$  代进 (13.14) 式, 从而得出方程 (13.12) 在条件 (13.17) 式时的解为

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{H_0}{P + \gamma_1 + \gamma_2} + \frac{\beta}{P(P + \gamma_1 + \gamma_2)} \\ &\times \left[ \frac{h_0}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma_1 + \gamma_2} - \frac{\beta}{P(P + \gamma_1 + \gamma_2)} \right] \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)}. \end{aligned} \quad (13.21)$$

式中  $U(R, r) = I_0(\omega r)K_1(\omega R) + K_0(\omega r)I_1(\omega R)$ . (13.22)

若再令

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad (13.23)$$

则 (13.21) 式变为

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{H_0}{P + \gamma} + \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \\ &+ \left[ \frac{h_0}{P} - \frac{H_0}{P(P + \gamma)} - \frac{\beta}{(P + \gamma)} \right] \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)}. \end{aligned} \quad (13.24)$$

根据拉氏逆变换原理(参见第五章), 方程的解取如下形式:

$$\begin{aligned} H &= H_0 e^{-\gamma t} + \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \\ &+ \frac{h_0}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &- \frac{H_0}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)} \frac{d\lambda}{(\lambda + \gamma)} \end{aligned}$$

$$-\frac{\beta}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda + \gamma)} \quad (13.25)$$

为了计算 (13.25) 式中包含的积分, 可利用留数理论<sup>[21]</sup>, 即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} f(x) dx \\ &= \sum \text{Res 关于 } a_1, \\ & \quad a_2 \cdots a_k. \quad (13.26) \end{aligned}$$

从图 13-2 可以看出被积函数是存在留数的, 因而可利用 (13.26) 式求积:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{e^{\lambda t} U(R, r)}{U(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &= \sum \text{Res} \left[ \frac{U(R, r)}{U(R, r_0) \lambda} \right] e^{\lambda t} \end{aligned}$$

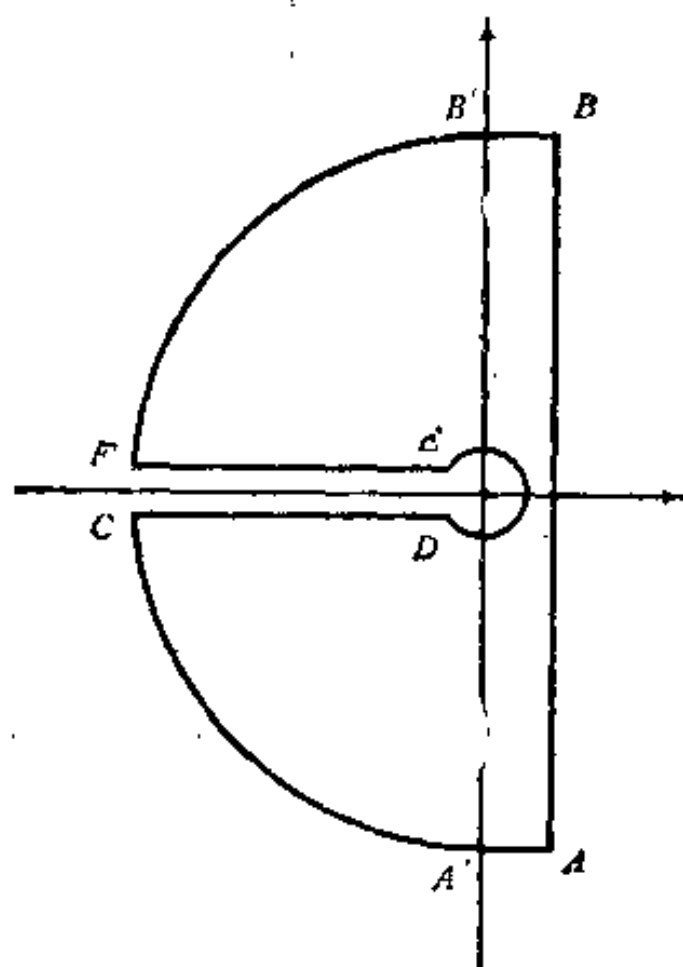


图 13-2 积分回路图

$$= \frac{U(R, r)}{U(R, r_0) p=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(R, r) e^{p_n t}}{\frac{d}{dp} [p U(R, r_0)]_{p=p_n}} \quad (13.27)$$

同理

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)} \frac{d\lambda}{(\lambda + \gamma)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{\lambda=\lambda_n} \left[ \frac{U(R, r)}{U(R, r_0) (\lambda + \gamma)} e^{\lambda t} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(R, r) e^{-\lambda_n t}}{[U(R, r_0)(\lambda + \gamma)]'} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(R, r) e^{\lambda_n t}}{U(R, r_0) + (\lambda_n + \gamma)U'(R, r_0)} \\
&= \frac{U(R, r) e^{-\gamma t}}{U(R, r_0)_{P=-\gamma}} + \frac{U(R, r) e^{P_n t}}{\frac{d}{dP} [(P + \gamma)U(R, r_0)]_{P=P_n}} \quad (13.28)
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda + \gamma)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res} \left[ \frac{U(R, r) e^{\lambda_n t}}{U(R, r_0) \lambda_n (\lambda_n + \gamma)} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(R, r) e^{\lambda_n t}}{[U(R, r_0) \lambda (\lambda + \gamma)]'_{\lambda=\lambda_n}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} U(R, r) e^{\lambda_n t} / [U(R, r_0)(\lambda_n + \gamma) \\
&\quad + \lambda_n U(R, r_0) + \lambda_n (\lambda_n + \gamma) U'(R, r_0)] \\
&= \frac{U(R, r)}{r U(R, r_0)_{P=0}} + \frac{U(R, r) e^{-\gamma t}}{-\gamma U(R, r_0)_{P=-\gamma}} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(R, r) e^{P_n t}}{\frac{d}{dP} [P_n (P_n + \gamma) U(R, r_0)]_{P=P_n}} \quad (13.29)
\end{aligned}$$

记住  $P_n$  为  $U(R, r_0) = 0$  的根。亦即由 (13.19) 式, 即

$$I_0(\omega r_0) K_1(\omega R) + I_1(\omega R) K_0(\omega r_0)_{P=P_n} = 0 \quad (13.30)$$

决定。由贝塞尔函数理论知<sup>[17]</sup>

$$\left. \begin{aligned}
I_0(x) &= J_0(ix) \\
I_1(x) &= -iJ_1(ix) \\
K_0(x) &= \frac{\pi i}{2} [J_0(ix) + iy_0(ix)] \\
K_1(x) &= -\frac{\pi}{2} [J_1(ix) + iy_1(ix)]
\end{aligned} \right\} \quad (13.31)$$

从而可以证明

$$\begin{aligned} U(R, r_0) &= I_0(i\omega r_0)K_1(i\omega R) + I_1(i\omega R)K_0(i\omega r_0) \\ &= -\frac{\pi i}{2} [J_0(i\omega r_0)y_1(i\omega R) \\ &\quad - J_1(i\omega R)y_0(i\omega r_0)]. \end{aligned} \quad (13.32)$$

若令

$$x_0 = \frac{r_0}{R},$$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= i\omega R = i\sqrt{\frac{P_n + \gamma}{a}} \cdot R, \\ P_n &= \frac{-\alpha_n^2 a}{R^2} - \gamma \end{aligned} \quad (13.33)$$

则得

$$U(R, r_0) = -\frac{\pi i}{2} [J_0(\alpha_n x_0)y_1(\alpha_n) - J_1(\alpha_n)y_0(\alpha_n x_0)]. \quad (13.34)$$

若  $P = P_n$  为 (13.34) 式之根, 则有

$$J_0(\alpha_n x_0)y_1(\alpha_n) - J_1(\alpha_n)y_0(\alpha_n x_0) = 0. \quad (13.35)$$

为了求得 (13.27), (13.28) 及 (13.29) 式之积分, 现在先确定和式中包含之导数, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dP} [PU(R, r_0)] &= U(R, r_0) + PU'(R, r_0), \quad a \\ \frac{d}{dP} [(P + \gamma)U(R, r_0)] &= U(R, r_0) \\ &\quad + (P + \gamma)U'(R, r_0), \quad b \\ \frac{d}{dP} [P(P + \gamma)U(R, r_0)] &= (2P + \gamma)U(R, r_0) \\ &\quad + P(P + \gamma)U'(R, r_0). \quad c \end{aligned} \right\} \quad (13.36)$$

对  $U'(R, r_0)$  求之如下:

由 (13.34) 式知

$$U(R, r_0) = -\frac{\pi i}{2} [J_0(\alpha x_0)y_1(\alpha) - J_1(\alpha)y_0(\alpha x_0)],$$

故

$$\frac{dU(R, r_0)}{dP} = \frac{dU(R, r_0)}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dP}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dP} &= \frac{d}{dP} \left( i \sqrt{\frac{P+\gamma}{a}} R \right) \\ &= \frac{iR}{2 \sqrt{(P+\gamma) \cdot a}} \end{aligned} \quad (13.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU(R, r_0)}{d\alpha} &= -\frac{\pi i}{2} [J_0(\alpha x_0) y'_1(\alpha) \\ &\quad + y_1(\alpha) J'_0(\alpha x_0) - J_1(\alpha) y'_0(\alpha x_0) \\ &\quad - y_0(\alpha x_0) J'_1(\alpha)]. \end{aligned}$$

由公式 (6.45), (6.53) 式知

$$\left. \begin{aligned} J_0(\alpha x_0) &= -x_0 J_1(\alpha x_0), \\ J'_1(\alpha) &= J_0(\alpha) - \frac{1}{\alpha} J_1(\alpha), \\ y'_0(\alpha x_0) &= -x_0 y_1(\alpha x_0), \\ y'_1(\alpha) &= y_0(\alpha) - \frac{1}{\alpha} y_1(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (13.38)$$

将 (13.38) 式表示之关系代进上式得

$$\begin{aligned} \frac{dU(R, r_0)}{d\alpha} &= -\frac{\pi}{2} i \left\{ J_0(\alpha x_0) \left[ y_0(\alpha) - \frac{1}{\alpha} y_1(\alpha) \right] \right. \\ &\quad \left. - y_1(\alpha) x_0 J_1(\alpha x_0) + J_1(\alpha) x_0 y_1(\alpha x_0) \right. \\ &\quad \left. - y_0(\alpha x_0) \left[ J_0(\alpha) - \frac{1}{\alpha} J_1(\alpha) \right] \right\} \\ &= -\frac{\pi}{2} i \left\{ [J_0(\alpha x_0) y_0(\alpha) - y_0(\alpha x_0) J_0(\alpha)] \right. \\ &\quad \left. + x_0 [J_1(\alpha) y_1(\alpha x_0) - y_1(\alpha) J_1(\alpha x_0)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha} [J_1(\alpha) y_0(\alpha x_0) - y_1(\alpha) J_0(\alpha x_0)] \right\}. \end{aligned}$$

由 (13.35) 式知, 当  $P = P_*$  时

$$J_0(\alpha_* x_0) y_1(\alpha_*) - J_1(\alpha_*) y_0(\alpha_* x_0) = 0,$$



从而上式在  $P = P_*$  时变为

$$\begin{aligned} \frac{dU(R, r_0)}{d\alpha_n} = & -\frac{\pi i}{2} \{ y_0(\alpha_n) J_0(\alpha_n x_0) - y_0(\alpha_n x_0) J_0(\alpha_n) \\ & + x_0 [y_1(\alpha_n x_0) J_1(\alpha_n) - y_1(\alpha_n) J_1(\alpha_n x_0)] \}_{P=P_*}, \end{aligned}$$

或即

$$\begin{aligned} \frac{dU(R, r_0)}{d\alpha_n} = & -\frac{\pi i}{2} \left\{ J_0(\alpha_n x_0) J_0(\alpha_n) \right. \\ & \times \left[ \frac{y_0(\alpha_n)}{J_0(\alpha_n)} - \frac{y_0(\alpha_n x_0)}{J_0(\alpha_n x_0)} \right] - x_0 J_1(\alpha_n x_0) J_1(\alpha_n) \\ & \times \left. \left[ \frac{y_1(\alpha_n)}{J_1(\alpha_n)} - \frac{y_1(\alpha_n x_0)}{J_1(\alpha_n x_0)} \right] \right\}_{P=P_*}. \end{aligned}$$

按照 (13.35) 式知, 当  $P = P_*$  时

$$\frac{Y_0(\alpha_n x_0)}{J_0(\alpha_n x_0)} = \frac{Y_1(\alpha_n)}{J_1(\alpha_n)}, \quad (13.39)$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{dU(R, r_0)}{d\alpha_n} = & -\frac{\pi i}{2} \left\{ J_0(\alpha_n x_0) J_0(\alpha_n) \right. \\ & \times \left[ \frac{Y_0(\alpha_n)}{J_0(\alpha_n)} - \frac{Y_1(\alpha_n)}{J_1(\alpha_n)} \right] - x_0 J_1(\alpha_n x_0) J_1(\alpha_n) \\ & \times \left[ \frac{Y_0(\alpha_n x_0)}{J_0(\alpha_n x_0)} - \frac{Y_1(\alpha_n x_0)}{J_1(\alpha_n x_0)} \right] \Big\} \\ = & -\frac{\pi i}{2} \left\{ \frac{J_0(\alpha_n x)}{J_1(\alpha_n)} [Y_0(\alpha_n) J_1(\alpha_n) - Y_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n)] \right. \\ & - \frac{x_0 J_1(\alpha_n)}{J_0(\alpha_n x_0)} [Y_0(\alpha_n x_0) J_1(\alpha_n x_0) \\ & \left. - Y_1(\alpha_n x_0) J_0(\alpha_n x_0)] \right\}. \end{aligned}$$

由 (6.77) 式知

$$J_1(x) Y_0(x) - J_0(x) Y_1(x) = \frac{2}{\pi x},$$

故得

$$\begin{aligned} \frac{dU(R, r_0)}{d\alpha_n} &= -\frac{\pi i}{2} \left\{ \frac{J_0(\alpha_n x_0)}{J_1(\alpha_n)} \left[ \frac{2}{\pi \alpha_n} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_0 J_1(\alpha_n)}{J_0(\alpha_n x_0)} \left[ \frac{2}{\pi \alpha_n x_0} \right] \right\} \\ &= -\frac{\pi i}{2} \left\{ \frac{2}{\pi \alpha_n} \left[ \frac{J_0(\alpha_n x_0)}{J_1(\alpha_n)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{J_1(\alpha_n)}{J_0(\alpha_n x_0)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

亦即

$$\frac{dU(R, r_0)}{d\alpha_n} = \frac{i}{\alpha_n} \frac{J_1^2(\alpha_n) - J_0^2(\alpha_n x_0)}{J_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n x_0)}. \quad (13.40)$$

从而由 (13.40) 及 (13.37) 式得

$$\begin{aligned} U'(R, r_0) &= \frac{dU(R, r_0)}{dP} \\ &= \left[ \frac{i}{\alpha_n} \frac{J_1^2(\alpha_n) - J_0^2(\alpha_n x_0)}{J_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n x_0)} \right] \left[ \frac{iR}{2\sqrt{(P+\gamma)a}} \right]_{P=P_n} \\ &= \frac{R}{2\alpha_n \sqrt{(P+\gamma) \cdot a}} \frac{J_0^2(\alpha_n x_0) - J_1^2(\alpha_n)}{J_0(\alpha_n x_0) J_1(\alpha_n)}. \end{aligned} \quad (13.41)$$

由 (13.31) 式知

$$J_0(i\omega r_0) = I_0(\omega r_0),$$

$$J_1(i\omega R) = iI_1(\omega R);$$

故 
$$U'(R, r_0) = \frac{1}{2i(P+\gamma)} \left[ \frac{I_0^2(\omega r_0) + I_1^2(\omega R)}{iI_0(\omega r_0)I_1(\omega R)} \right],$$

即 
$$U'(R, r_0) = \frac{-1}{2(P+\gamma)} \left[ \frac{I_0^2(\omega r_0) + I_1^2(\omega R)}{I_0(\omega r_0)I_1(\omega R)} \right]. \quad (13.42)$$

若令

$$\frac{d}{dP} U(R, r)_{P=P_n} = \frac{1}{A_n(\alpha_n)}, \quad (13.43)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} A_n(\alpha_n) &= -\frac{2(P_n + \gamma)I_0(\omega r_0)I_1(\omega R)}{[I_0^2(\omega r_0) + I_1^2(\omega R)]}, \quad \text{a} \\ A_n(\alpha_n) &= \frac{2i(P_n + \gamma)I_0(\alpha_n r_0)J_1(\alpha_n)}{J_0^2(\alpha_n x_0) - J_1^2(\alpha_n)}, \quad \text{b} \end{aligned} \right\} \quad (13.44)$$

式中  $x_0 = \frac{r_0}{R}$ .

将公式 (13.36-a, b, c) 分别代进 (13.27), (13.28), (13.29) 式及 (13.27), (13.28), (13.29) 式, 并用 (13.43) 式之关系, 则得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{e^{\lambda s} U(R, r)}{U(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)_{P=0}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(R, r)e^{P_n s}}{U(R, r) + P_n \frac{1}{A_n(\alpha_n)_{P=P_n}}} \end{aligned}$$

由 (13.35) 式, 因  $U(R, r_0)_{P=P_n} = 0$ , 故得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{e^{\lambda s} U(R, r)}{U(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)_{P=0}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\alpha_n)U(R, r)e^{P_n s}}{P_n} \end{aligned} \quad (13.45)$$

同理得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{e^{\lambda s} U(R, r)}{U(R, r_0)} \frac{d\lambda}{s+1} \\ &= \frac{U(R, r)e^{-\gamma s}}{U(R, r_0)_{P=-\gamma}} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(R, r)e^{P_n s}}{U(R, r_0) + (P_n + \gamma)U'(R, r_0)_{P=P_n}} \\ &= \frac{U(R, r)e^{-\gamma s}}{U(R, r_0)_{P=-\gamma}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\alpha_n)U(R, r)e^{P_n s}}{(P_n + \gamma)_{P=P_n}} \end{aligned} \quad (13.46)$$

而

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{e^{\lambda t} U(R, r)}{U(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda + \gamma)} \\ &= \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)_{P=0}} + \frac{U(R, r)e^{-\gamma t}}{-\gamma U(R, r_0)_{P=-\gamma}} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\alpha) U(R, r) e^{P_n t}}{P_n(P_n + \gamma)_{P=P_n}}, \end{aligned} \quad (13.47)$$

将 (13.45), (13.46), (13.47) 式代进 (13.25) 式中, 得

$$\begin{aligned} H &= H_0 e^{-\gamma t} + \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + h_0 \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)_{P=0}} \\ &+ h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\alpha) U(R, r) e^{P_n t}}{P_n}_{P=P_n} - H_0 \frac{U(R, r) e^{-\gamma t}}{U(R, r_0)_{P=-\gamma}} \\ &- H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\alpha) U(R, r) e^{P_n t}}{(P_n + \gamma)_{P=P_n}} - \beta \frac{U(R, r)}{\gamma U(R, r_0)_{P=0}} \\ &- \beta \frac{U(R, r) e^{-\gamma t}}{-\gamma U(R, r_0)_{P=-\gamma}} - \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\alpha) U(R, r) e^{P_n t}}{P_n(P_n + \gamma)_{P=P_n}}, \end{aligned}$$

或即

$$\begin{aligned} H(r, t) &= H_0 e^{-\gamma t} + \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \\ &+ \left( h_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right) \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)_{P=0}} \\ &- \left( H_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right) \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)_{P=-\gamma}} e^{-\gamma t} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\alpha) U(R, r) \left[ \frac{h_0}{P_n} \right. \\ &\left. - \frac{H_0}{P_n + \gamma} - \frac{\beta}{P_n(P_n + \gamma)} \right] e^{P_n t}_{P=P_n}. \end{aligned} \quad (13.48)$$

参见 (13.33) 式

$$\alpha = i \sqrt{\frac{P + \gamma}{a}} \times R$$

故当  $P = -\gamma$  时,  $\alpha = 0$ , 由此并参见 (13.32) 式, 知

$$\frac{U(R, r)}{U(R, r_0)} = \frac{J_0(0)Y_1(0) - J_1(0)Y_0(0)}{J_0(0)Y_1(0) - J_1(0)Y_0(0)} = 1. \quad (13.49)$$

由 (13.48), (13.49) 式最终得到计算水位的公式为

$$\begin{aligned} H(r, t) = & \frac{\beta}{\gamma} + \left( h_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right) \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)_{P=0}} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\alpha_n) U_n(R, r) \left[ \frac{h_0}{P_n} - \frac{H_0}{P_n + \gamma} \right. \\ & \left. - \frac{\beta}{P_n(P_n + \gamma)} \right] e^{P_n t} \quad (13.50) \end{aligned}$$

记住式中  $\alpha_n = \sqrt{\frac{P_n + \gamma}{a}} \times R. \quad (13.51)$

## (二) 出水量公式的推导

已知  $Q = 2\pi r K M \left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r_0}, \quad (13.52)$

而  $\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \left( h_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right) \frac{U'(R, r)}{U(R, r_0)_{P=0}} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\alpha_n) U'(R, r) \times \left[ \frac{h_0}{P_n} - \frac{H_0}{P_n + \gamma} - \frac{\beta}{P_n(P_n + \gamma)} \right] e^{P_n t}. \quad (13.53)$

而式中之

$$\begin{aligned} \left. \frac{dU(R, r)}{dr} \right|_{r=r_0} &= \frac{d}{dr} [K_1(\omega R) I_0(\omega r) \\ &+ K_0(\omega r) I_1(\omega R)]_{r=r_0} \\ &= \omega K_1(\omega R) I_1(\omega r_0) - \omega K_1(\omega r_0) I_1(\omega R), \end{aligned}$$

或即  $U'(R, r)_{r=r_0} = \omega I_1(\omega R) I_1(\omega r_0) \left[ \frac{K_1(\omega R)}{I_1(\omega R)} - \frac{K_1(\omega r_0)}{I_1(\omega r_0)} \right], \quad (13.54)$

又因当  $P = P_n$  时

$$U(R, r_0)_{P=P_n} = K_1(\omega R)I_0(\omega r_0) + K_0(\omega r_0)I_1(\omega R) = 0,$$

或即

$$\frac{K_1(\omega R)}{I_1(\omega R)} = -\frac{K_0(\omega r_0)}{I_0(\omega r_0)}. \quad (13.55)$$

由此知

$$U'(R, r)|_{\substack{r=r_0 \\ P=P_n}} = -\omega I_1(\omega R)I_1(\omega r_0) \times \left[ \frac{K_0(\omega r_0)I_1(\omega r_0) + K_1(\omega r_0)I_0(\omega r_0)}{I_0(\omega r_0)I_1(\omega r_0)} \right].$$

参见文献[32], 由于

$$K_0(\omega r_0)I_1(\omega r) + K_1(\omega r_0)I_0(\omega r_0) = \frac{1}{\omega r_0}, \quad (13.56)$$

$$\text{故得} \quad U'(R, r)|_{\substack{P=P_n \\ r=r_0}} = -\frac{1}{r_0} \frac{I_1(\omega R)}{I_0(\omega r_0)}. \quad (13.57)$$

而当  $P = 0$  时, 令

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{0+\gamma}{a}} = \omega_0, & \text{a} \\ \alpha &= i\sqrt{\frac{\tau}{a}} \cdot R = \alpha_0, & \text{b} \end{aligned} \right\} \quad (13.58)$$

$$\text{则} \quad U'(R, r)|_{\substack{P=0 \\ r=r_0}} = \omega_0 [K_1(\omega_0 R)I_1(\omega_0 r_0) - K_1(\omega_0 r_0)I_1(\omega_0 R)]_{P=0, r=r_0}.$$

若再令

$$\begin{aligned} \frac{U'(R, r)}{U(R, r_0)} \Big|_{\substack{P=0 \\ r=r_0}} &= \frac{\omega_0 [K_1(\omega_0 R)I_1(\omega_0 r_0) - K_1(\omega_0 r_0)I_1(\omega_0 R)]}{K_1(\omega_0 R)I_0(\omega_0 r_0) + K_0(\omega_0 r_0)I_1(\omega_0 R)} \\ &= \omega_0 D_0, \end{aligned} \quad (13.59)$$

$$\text{即得} \quad D_0 = \frac{K_1(\omega_0 R)I_1(\omega_0 r_0) - K_1(\omega_0 r_0)I_1(\omega_0 R)}{K_1(\omega_0 R)I_0(\omega_0 r_0) + K_0(\omega_0 r_0)I_1(\omega_0 R)}. \quad (13.60)$$

将 (13.60), (13.57) 式代进 (13.53) 及 (13.52) 中, 得

$$\begin{aligned}
Q = 2\pi KM \left\{ r_0 \left( h_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right) \omega_0 D_0 \right. \\
- \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\alpha_n) \left[ \frac{h_0}{P_n} - \frac{H_0}{P_n + \gamma} \right. \\
\left. \left. - \frac{\beta}{P_n(P_n + \gamma)} \right] \times \frac{I_1(\omega R)}{I_0(\omega r_0)} e^{P_n t} \right\}. \quad (13.61)
\end{aligned}$$

考虑到

$$\begin{aligned}
A_n(\alpha_n) &\times \frac{I_1(\omega R)}{I_0(\omega r_0)} \\
&= \frac{2i(P_n + \gamma)J_0(\alpha_n x_0)J_1(\alpha)}{[J_0^2(\alpha_n x_0) - J_1^2(\alpha_n)]} \times \frac{-iJ_1(\alpha_n)}{J_0(\alpha_n x_0)} \\
&= \frac{2(P_n + \gamma)J_1^2(\alpha_n)}{J_0^2(\alpha_n x_0) - J_1^2(\alpha_n)} = B_n(\alpha_n). \quad (13.62)
\end{aligned}$$

则可得计算流量的公式

$$\begin{aligned}
Q = 2\pi KM \left\{ r_0 \left( h_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right) \omega_0 D_0 \right. \\
- \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\alpha_n) \left[ \frac{h_0}{P_n} - \frac{H_0}{P_n + \gamma} \right. \\
\left. \left. - \frac{\beta}{P_n(P_n + \gamma)} \right] e^{P_n t} \right\}. \quad (13.63)
\end{aligned}$$

### 三、算 例

含水岩组的结构形式如图 13-1 所示,主含水层的厚度为  $M = 24$  米,渗透系数  $K = 20$  米/日,弹性给水度  $\mu_e = 0.01$ ; 下部弱透水层的厚度  $M_2 = 5$  米,渗透系数  $K_2 = 0.1$  米/日; 上部弱透水层的厚度  $M_1 = 7$  米,渗透系数  $K_1 = 0.2$  米/日. 上部及下部弱透水层的水位分别用  $H_1$  及  $H_2$  表示,主含水层的水位为  $H$ , 并孔穿透整个主含水层并直接由该层取水,并孔半径  $r_0 = 0.2$  米,隔水边界半径为 200 米.

抽水前, 主含水层及上、下弱透水层水头处于同一水位为 42 米, 即  $H_1 = H_2 = H(r, 0) = H_0 = 42$  米, 抽水时主井水位降  $S_0$  等于 6 米。

试计算抽水后第 1, 6, 12 小时及第 1, 2, 5 天的水位曲线以及相应的流量值。

### (一) 水位曲线的计算

应用公式 (13.50), 即

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{\beta}{\gamma} + \left( h_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right) \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)} \Big|_{P=0} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\alpha_n) U_n(R, r) \\
 & \times \left[ \frac{h_0}{P_n} - \frac{H_0}{P_n + \gamma} - \frac{\beta}{P_n(P_n + \gamma)} \right] e^{P_n t} \quad P=P_n.
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 &= \frac{K_1}{M_1 \mu_1} + \frac{K_2}{M_2 \mu_2} \\
 &= \frac{0.2}{7 \times 0.01} + \frac{0.1}{5 \times 0.01} = 4.857,
 \end{aligned}$$

$$\beta = \gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 = 2.857 \times 42 + 2 \times 42 = 203.994.$$

1. 计算式右  $U(R, r)/U(R, r_0)|_{P=0}$  项

因为  $U(R, r_0) = I_0(\omega r_0) K_1(\omega R) + I_1(\omega R) K_0(\omega r_0)$ 。

且当  $P = 0$  时,

$$\begin{aligned}
 \omega &= \sqrt{\frac{P + \gamma}{a}} = \sqrt{\frac{0 + \gamma_1 + \gamma_2}{a}} \\
 &= \sqrt{\frac{\gamma \mu_1}{KM}} = \sqrt{\frac{4.875 \times 0.01}{20 \times 24}} = 0.01,
 \end{aligned}$$

故得



$$\begin{aligned}
U(R, r_0) &= I_0(0.01 \times 0.2)K_1(0.01 \times 200) \\
&\quad + I_1(0.01 \times 200)K_0(0.01 \times 0.2) \\
&= I_0(0.002)K_1(2) + I_1(2)K_0(0.02) \\
&= 1 \times 0.1399 + 1.5906 \times 6.3306 = 10.2094.
\end{aligned}$$

在如上计算中,  $I_0(0.002)$ ,  $K_1(2)$ ,  $I_1(2)$  均由贝塞尔函数表查得, 而  $K_0(0.002)$  因表中无值故用 (6.133) 式计算, 即

$$\begin{aligned}
K_0(0.002) &= - \left\{ 0.5772 \right. \\
&\quad \left. + \ln \frac{0.002}{2} \right\} I_0(0.002) = 6.3306.
\end{aligned}$$

而

$$U(R, r) = I_0(\omega r)K_1(\omega R_0) + I_1(\omega R_0)K_0(\omega r)$$

之计算, 针对  $r$  除井孔本身外再计算四个点, 即  $r = 20$  米, 40 米, 100 米和 200 米处.

(1)  $r = 20$  米的断面处

$$\begin{aligned}
U(R, r) &= I_0(0.01 \times 20)K_1(0.01 \times 200) \\
&\quad + I_1(0.01 \times 200)K_0(0.01 \times 20) \\
&= I_0(0.2)K_1(2) + I_1(2)K_0(0.2) \\
&= 1.01 \times 0.1399 + 1.5906 \times 1.7527 \\
&= 2.9291,
\end{aligned}$$

(2)  $r = 40$  米处

$$U(R, r) = I_0(0.4)K_1(2) + I_1(2)K_0(0.4) = 1.9183,$$

(3)  $r = 100$  米处

$$U(R, r) = I_0(1)K_1(2) + I_1(2)K_0(1) = 0.8468,$$

(4)  $r = 200$  米处

表 13-1  $U(R, r)/U(R, r_0)$  计算成果表

$r$	20	40	100	200
$\frac{U(R, r)}{U(R, r_0)}$	0.2869	0.1879	0.0829	0.0490

$$U(R, r) = I_0(2)K_1(2) + I_1(2)K_0(2) = 0.500,$$

由此得  $U(R, r)/U(R, r_0)$  值列入表 13-1 中。

$$2. \text{ 计算 } \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\alpha_n) U(R, r)_{r=p_n}$$

由 (13.44) 及 (13.34) 知

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\alpha_n) U(R, r)_{r=p_n} \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(P_n + \gamma) [J_0(\alpha_n x_0) J_1(\alpha_n)]}{J_0^2(\alpha_n x_0) - J_1^2(\alpha_n)} \\ & \quad \times [J_0(\alpha_n x) Y_1(\alpha_n) - J_1(\alpha_n) Y_0(\alpha_n x)]. \end{aligned}$$

根据在第七章取得的经验及计算结果, 上列级数取 4 项精度即能充分保证。故取  $n = 1, 2, 3, 4$ , 式中的  $\alpha_n$ , 已如前述, 乃是方程

$$J_0(\alpha_n x_0) Y_1(\alpha_n) - J_1(\alpha_n) Y_0(\alpha_n x_0) = 0$$

的根, 其值为

$$\alpha_1 = 0.5678, \quad \alpha_2 = 4.1108,$$

$$\alpha_3 = 7.3204, \quad \alpha_4 = 10.4986.$$

将  $\alpha_n$  值及相应的其它值代进公式 (13.33) 可求得 (参见表 13-2)

$$P_1 = -\frac{\alpha_1^2}{R_0^2} a - \gamma = -5.2451, \quad P_2 = -25.1354,$$

$$P_3 = -69.1629, \quad P_4 = -137.1217.$$

(1) 计算

$$E(\alpha) = \frac{(P_n + \gamma) [J_0(\alpha_n x_0) J_1(\alpha_n)]}{J_0^2(\alpha_n x_0) - J_1^2(\alpha_n)}.$$

(2) 计算  $J_0(\alpha_n x) Y_1(\alpha_n) - J_1(\alpha_n) Y_0(\alpha_n x)$ : (参见表 13-3)

$$3. \text{ 计算 } \frac{h_0}{P_n} - \frac{H_0}{P_n + \gamma} - \frac{\beta}{P_n(P_n + \gamma)} = G(P_n) \text{ (参见表 13-4).}$$

表 13-2  $E(\alpha)$  值计算表

$n$	$P_n$	$P_n + \gamma$	$E(\alpha) = \frac{(P_n + \gamma)J_0(\alpha, x_0)J_1(\alpha_n)}{J_0^2(\alpha_n x_0) - J_1^2(\alpha_n)}$
1	-5.2451	-0.3881	$\frac{-0.3881J_0(0.5687 \times 0.001)J_1(0.5687)}{J_0^2(0.5687 \times 0.001) - J_1^2(0.5687)}$ $= -0.11445$
2	-25.1345	-20.278	$\frac{-20.278J_0(4.1108 \times 0.001)J_1(4.1108)}{J_0^2(4.1108 \times 0.001) - J_1^2(4.1108)}$ $= 2.1988$
3	-69.1629	-64.3059	$\frac{-64.3059J_0(7.3204 \times 0.001)J_1(7.3204)}{J_0^2(7.3204 \times 0.001) - J_1^2(7.3204)}$ $= -5.7159$
4	-137.1217	-132.2647	$\frac{-132.2647J_0(10.4986 \times 0.001)J_1(10.4986)}{J_0^2(0.0104986) - J_1^2(10.4986)}$ $= 10.4511$

#### 4. 计算水位值

利用上列所得有关数据计算如下

当  $t = 1$  小时, 即  $\tau = 0.04167$  日

①  $x = 0.1$ , 即  $r = R_0 x = 200 \times 0.1 = 20$  米,

$$H(0.1, 0.04167) = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\begin{aligned} & + \left( h_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right) \frac{U(R, r)}{U(R, r_0)} \Big|_{r=0} + \sum_{n=1}^4 A_n(\alpha_n) \\ & \times \left[ \frac{h_0}{P_n} - \frac{H_0}{P_n + \gamma} - \frac{\beta}{P_n(P_n + \gamma)} \right] e^{P_n \tau} \\ & = \frac{203.904}{4.857} + \left( 36 - \frac{203.994}{4.857} \right) 0.2869 \\ & + 3.1416 \{ [(-0.11445)(-0.8003) \\ & \times (1.1439)] e^{-5.2451 \times 0.04167} \\ & + [(2.1988)(0.3041)(0.2388)] \\ & \times e^{-25.1354 \times 0.04167} + [(-5.7159) \end{aligned}$$

表 13-3  $F(x)$  值计算表

$r$ (米)	$x$	$n$	$\alpha_n$	$F(x) = J_0(\alpha_n x)Y_1(\alpha_n) - J_1(\alpha_n)Y_0(\alpha_n x)$
20	0.1	1	0.5678	$J_0(0.05687)Y_1(0.5687) - J_1(0.5687) \times Y_0(0.05687) = -0.8003$
		2	4.1108	$J_0(0.41108)Y_1(4.1108) - J_1(4.1108) \times Y_0(0.41108) = 0.3041$
		3	7.3204	$J_0(0.73204)Y_1(7.3204) - J_1(7.3204) \times Y_0(0.73204) = -0.2321$
		4	10.4986	$J_0(1.04986)Y_1(10.4986) - J_1(10.4986) \times Y_0(1.04986) = 0.1836$
40	0.2	1	0.5678	-0.9188
		2	4.1108	+0.3279
		3	7.3204	-0.1826
		4	10.4986	+0.07969
100	0.5	1	0.5678	-1.0622
		2	4.1108	+0.1288
		3	7.3204	+0.1013
		4	10.4986	-0.04811
200	1.0	1	0.5678	-1.1194
		2	4.1108	-0.1549
		3	7.3204	-0.0870
		4	10.4986	-0.0606

表 13-4  $G(P_n)$  计算表

$n$	$\frac{h_0}{P_n}$ (1)	$\frac{H_0}{P_n + \gamma}$ (2)	$\frac{\beta}{P_n(P_n + \gamma)}$ (3)	$(4) = (1) - (2) - (3)$ (4)
1	$36 / -5.2451$ $= -6.8635$	$42 / -5.245 + 4.857$ $= -108.2195$	$\frac{203.994}{-5.2451(-5.2451 + 4.857)}$ $= 100.2121$	1.1439
2	$36 / -25.1345$ $= -1.4322$	-2.0712	0.4002	0.2388
3	$36 / -69.1629$ $= -0.5205$	-0.6531	0.0459	0.0867
4	$36 / -69.1629$ $= -0.2625$	-0.3175	0.0112	0.0438

$H_0 = 42$  米,  $h_0 = 36$  米,  $\gamma = 4.857$ ,  $\beta = 203.994$ .

$$\begin{aligned}
& \times (-0.2321)(0.0867)]e^{-69.1629 \times 0.04167} \\
& + [(10.4511)(0.1836)(0.0438)]e^{-137.1217 \times 0.0417} \} \\
& = 40.2786 + 3.1416\{[0.1048]0.8037 \\
& + [0.1596]0.3509 + [0.1151] \\
& \times 0.0560 + [0.0839]0.0033\} \\
& = 40.7403 \text{ 米,}
\end{aligned}$$

② 当  $r = 40$  米, 即  $x = 0.2$  时

$$\begin{aligned}
H(0.2, 0.04167) &= 42 - 6(0.1879) \\
&+ \pi\{[(-0.1145)(-0.9188)(1.1439)] \\
&\times 0.8037 + [(2.1998)(0.3279)(0.2388)]0.3509 \\
&+ [(-5.7159)(-0.1826) \times (0.0867)]0.0560 \\
&+ [(10.4511)(0.0797)(0.0438)]0.0033\} \\
&= 40.8726 + 3.1416\{0.0967 + 0.0604 \\
&+ 0.0051 + 0.0001\} = 41.3825 \text{ 米,}
\end{aligned}$$

③ 当  $r = 100$  米, 即  $x = 0.5$  时

$$\begin{aligned}
H(0.5, 0.04167) &= 42 - 6(0.0829) \\
&+ \pi\{[(-0.1145)(-1.0622)(1.1439)] \\
&\times 0.8037 + [(2.1998)(0.1288)(0.2388)]0.3509 \\
&+ [(-5.7159)(0.1013)(0.0867)] \\
&\times 0.0560 + [(10.4511)(-0.04811) \\
&\times (0.0438)]0.0033\} = 41.9192 \text{ 米,}
\end{aligned}$$

④ 当  $r = 200$  米, 即  $x = 1$  时

$$\begin{aligned}
H(1, 0.04167) &= 42 - 6(0.0490) \\
&+ \pi\{(-0.1053)(-1.1194) \\
&+ (0.1843)(-0.1549) \\
&+ (-0.0278)(-0.0870) \\
&+ (0.0015)(-0.0606)\} = 41.9938 \text{ 米.}
\end{aligned}$$

通过上列计算可以看出, 在同一时段针对不同的  $x$  值进行计算时, 级数项内变化的只是

$$[J_0(\alpha_n x)Y_1(\alpha_n) - J_1(\alpha_n)Y_0(\alpha_n x)] = F(x),$$

因此,在针对某一  $x$  值完成计算之后,可以将除了  $F(x)$  数值之外的其余数值的乘积直接利用,如象在前面当  $t = 0.04167$  日时针对  $x = 1$  进行计算那样.如此,则使其计算工作量大大减轻.当然,在利用电子计算机计算时,这种简化未必是重要的.

其余的计算—— $t = 6$  小时, 0.5 日, 1 日, 2 日, 5 日其过程

表 13-5 水位  $H(r, t)$  计算成果表

时间 $t$ (日)	0.04167	0.25	0.5	1	2	5
$r$ (米)	(1 小时)	(6 小时)	(12 小时)			
20	40.7403	40.3682	40.3025	40.2805	40.2786	40.2786
40	41.3825	40.9755	40.9000	40.8746	40.8726	40.8726
100	41.9192	41.5145	41.5055	41.5046	41.5023	41.5023
200	41.9938	41.8297	41.7395	41.7085	41.7061	41.7061

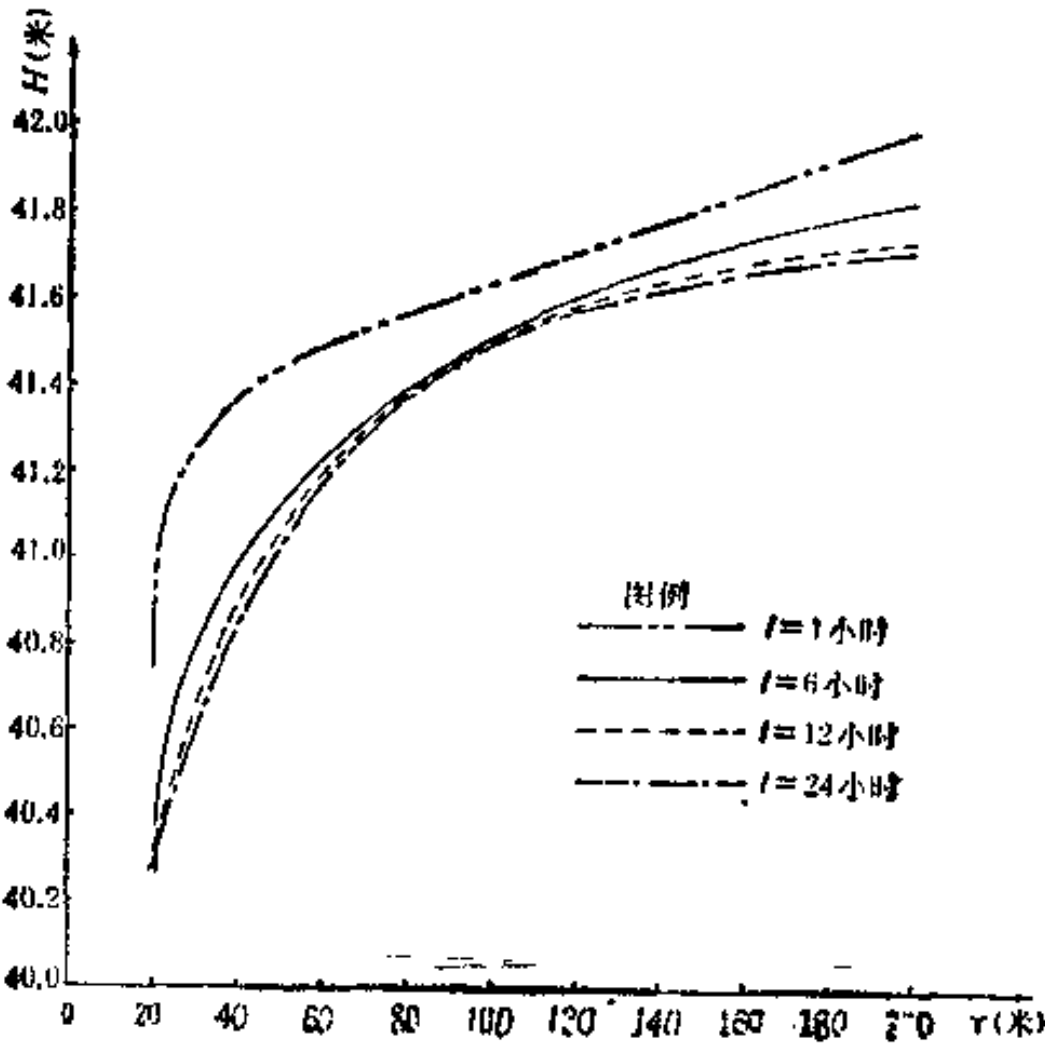


图 13-3 水位曲线图

与  $t = 1$  小时的无异。因此,作为举例不必一一写出,只将全部计算成果列入表 13-5 中。

图 13-3 是根据表 13-5 中所列资料绘制的不同时刻的水位曲线图。

将该图中的曲线与第七章无越流情况下所得水位曲线作分析比较便可发现,图 13-3 中的曲线随着时间的延长很快接近,也就是水位很快趋于稳定,这在表 13-5 中也可以看出。发生这种现象的原因是由于越流的存在。也就是说,当水位下降增大,激发的越流补给量足以补偿地下水的提取量时,水位便趋于稳定,这一现象与第七章介绍的含水层一直处于疏干状态,水位持续下降的情况是不相同的。

上述补给和疏干过程的差异从流量计算中也将发现。也就是说,存在越流的割离井,其流量也将较快的趋于稳定,而不象无越流时的持续削减,直至为零。

## (二) 出水量的计算

出水量的计算可用公式 (13.63), 即

$$Q = 2\pi KM \left\{ r_0 \left( h_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right) \omega_0 D_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\alpha_n) \left[ \frac{h_0}{P_n} - \frac{H_0}{P_n + \gamma} - \frac{\beta}{P_n(P_n + \gamma)} \right] e^{-P_n t} \right\}$$

式中

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{\gamma}{a}} = \sqrt{\frac{\gamma \mu_t}{KM}} = \sqrt{\frac{4.857 \times 0.01}{20 \times 24}} = 0.01, \\ D_0 &= \frac{K_1(\omega_0 R) I_1(\omega_0 r_0) - K_1(\omega_0 r_0) I_1(\omega_0 R)}{K_1(\omega_0 R) I_0(\omega_0 r_0) + K_0(\omega_0 r_0) I_1(\omega_0 R)} \\ &= \{ K_1(0.01 \times 200) I_1(0.01 \times 0.2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - K_1(0.01 \times 0.2)I_1(0.01 \times 200)\} / \\
& [K_1(0.01 \times 200)I_0(0.01 \times 0.2) \\
& + K_0(0.01 \times 0.2)I_1(0.01 \times 200)] \\
& = \frac{K_1(2)I_1(0.002) - K_1(0.002)I_1(2)}{K_1(2)I_0(0.002) + K_0(0.002)I_1(2)} \\
& = \frac{(0.1399)(0.001) - (500)(1.5906)^*}{(0.1399)(1) + (6.3306)(1.5906)} \\
& = \frac{-795.299}{+10.2094} = -77.8992.
\end{aligned}$$

$$B_n(\alpha_n) = \frac{2(P_n + \gamma)J_1^2(\alpha_n)}{J_0^2(\alpha_n x_0) - J_1^2(\alpha_n)},$$

其计算结果如表 13-6 所列。

$$G(P_n) = \frac{h_0}{P_n} - \frac{H_0}{P_n + \gamma} - \frac{\beta}{P_n(P_n + \gamma)}$$

已知如表 13-4 所列。

将所有的已知值代进公式 (13.63)，计算  $Q$  值如下：

(1) 当  $t = 1$  小时  $= 0.04167$  日时，

$$\begin{aligned}
Q &= 2\pi \times 20 \times 24 \{0.2(36 - 42) \times 0.01 \\
&\quad \times (-79.8992) - (-0.0625)(1.1439)\}
\end{aligned}$$

---

\* 函数表中未包括自变量很小的函数  $I_1(0.002)$ ， $K_0(0.002)$ ， $K_1(0.002)$  均由近似公式计算。

$$\because I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots$$

$$\therefore I_1(0.002) = \frac{0.002}{2} + \dots = 0.001$$

$$\because K_0(x) = -\left(c + \ln \frac{x}{2}\right)I_0(x) = -\left(0.5772 + \ln \frac{x}{2}\right)I_0(x)$$

$$\therefore K_0(0.002) = -\left(0.5772 + \ln \frac{0.002}{2}\right)I_0(0.002) = 6.3306$$

$$\because K_1(x) = \frac{1}{x}$$

$$\therefore K_1(0.002) = 1/0.002 = 500$$

表 13-6  $B_s(\alpha_s)$  计算表

$n$	$P_n$	$\alpha_n$	$(P_n + r)$	$J_1(\alpha_n)$	$J_0(\alpha_n x_0)$	$B_s(\alpha_n) = \frac{2[(4) \times (5)^2]}{(6)^2 - (5)^2}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	-5.2451	0.5687	-0.3881	+0.2730	1	-0.0625
2	-25.1354	4.1108	-20.2780	-0.1070	0.9996	-0.4699
3	-69.1629	7.32041	-64.3059	+0.0882	0.9986	-1.0098
4	-137.1217	10.4986	-132.2647	-0.0786	0.9972	-1.6491
备注		$r = 4.857, x_0 = 0.01$				

$$\begin{aligned}
 & \times e^{-5.245 \times 0.04167} + (-0.4699)(0.2388) \\
 & \times e^{-25.1354 \times 0.04167} + (-1.0098)(0.0867) \\
 & \times e^{-69.1629 \times 0.04167} + (-1.6491)(0.0438) \\
 & \times e^{-137.1217 \times 0.04167} \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = 3015.9289 \{ 0.9348 - [(-0.0575) \\
 & \quad - 0.0394 - 0.0049 - 0.0002] \} \\
 & = 3015.9289 \{ 0.9348 + 0.102 \} = 3126.915 \text{ 米}^3/\text{日},
 \end{aligned}$$

(2) 当  $t = 6$  小时  $= 0.25$  日时

$$\begin{aligned}
 Q & = 3015.928 \{ 0.9348 \\
 & \quad - [(-0.0625)(1.1439)e^{-5.245 \times 0.25} \\
 & \quad + (-0.4699)(0.2388)e^{-25.1354 \times 0.25} \\
 & \quad + (-1.0098)(0.0867) \times e^{-69.1629 \times 0.25} + \text{略}] \} \\
 & = 3015.928 \{ 0.9348 - [-0.0193 - 0.0002 - \text{略}] \} \\
 & = 2878.1009 \text{ 米}^3/\text{日},
 \end{aligned}$$

(3) 当  $t = 12$  小时  $= 0.5$  日时

$$\begin{aligned}
 Q & = 3015.928 \{ 0.9348 - [(-0.0625)(1.1439)e^{-5.245 \times 0.5} \\
 & \quad + (-0.4699)(0.2388)e^{-25.1354 \times 0.5}] \} \\
 & = 3015.928 \{ 0.9348 - [-0.0052 - \text{略}] \} \\
 & = 2834.9372 \text{ 米}^3/\text{日},
 \end{aligned}$$

(4) 当  $t = 1$  日时

$$Q = 3015.9289 \{ 0.9348 - [(-0.0625)(1.1439)e^{-5.245 \times 1}] \}$$
$$= 2820.4275 \text{ 米}^3/\text{日},$$

(5) 当  $t = 2$  日时

$$Q = 3015.9289 \{ 0.9348 - [(-0.0625)(1.1439)e^{-5.245 \times 2}] \}$$
$$= 2819.2963 \text{ 米}^3/\text{日},$$

(6) 当  $t = 5$  日时

$$Q = 3015.9289 \{ 0.9348 \} = 2819.2903 \text{ 米}^3/\text{日}.$$

图 13-4 是按照计算出的数值绘制的出水量随时间变化的曲线。由该曲线可以看出在有充分的越流补给时，承压地下水的出水量很快趋于稳定。

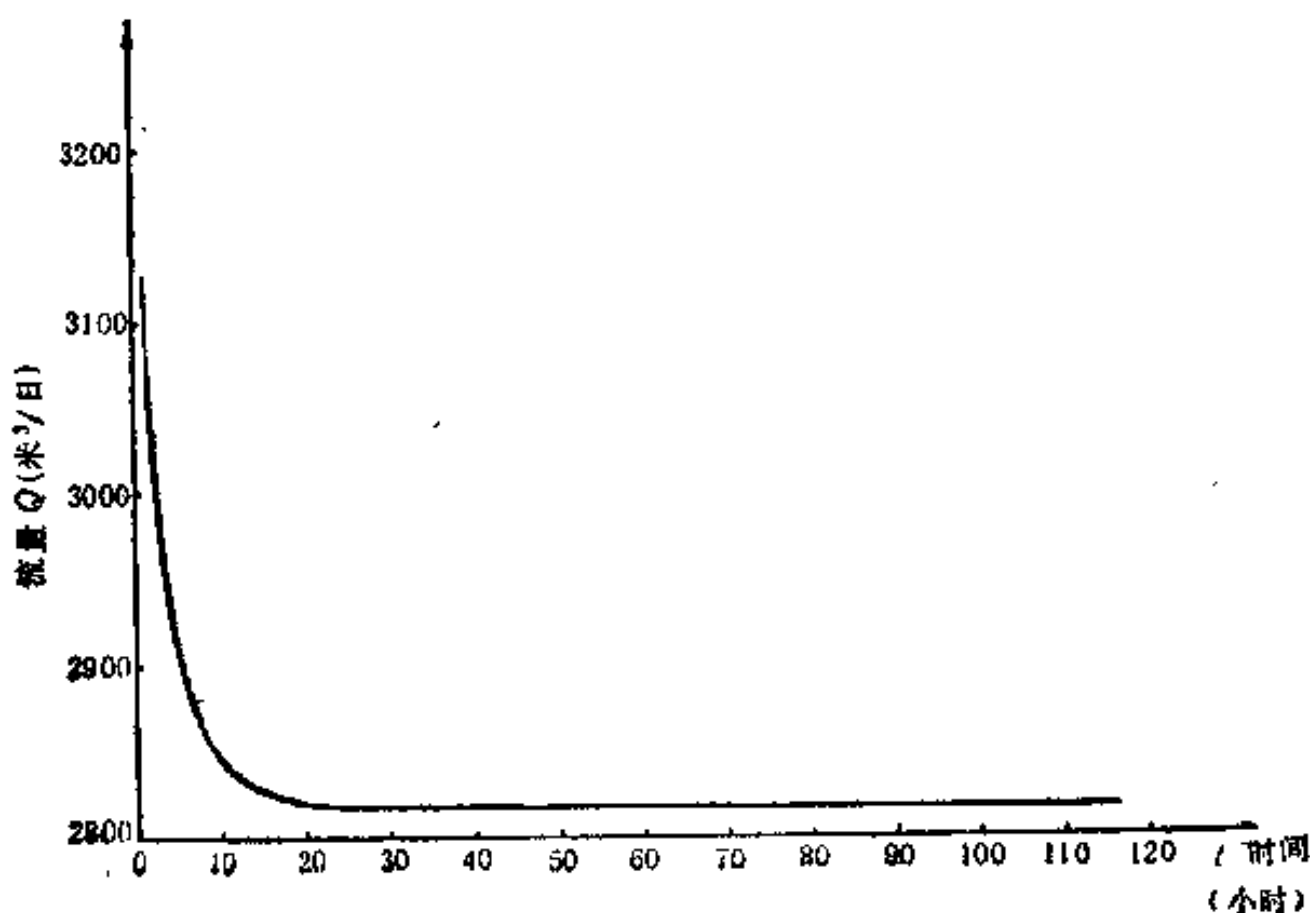


图 13-4 出水量变化曲线

#### 四、关于稳定渗流公式

在公式 (13.50) 和 (13.63) 中可以发现，当时间  $t$  很长，或者

说在理论上当时间趋于无穷大时 ( $t \rightarrow \infty$ ), 则公式中包含的级数值将趋于零。这样便得到存在越流补给时, 割离井的稳定渗流公式:

$$H(r) = \frac{\beta}{\gamma} + \left( h_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right) \frac{u(R, r)}{u(R, r_0)} \Big|_{r=r_0}, \quad (13.64)$$

$$Q = 2\pi r_0 K M \omega_0 D_0 \left( h_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right). \quad (13.65)$$

## 第十四章 存在越流时地下水向位于广阔含水层中井孔的非稳定渗流

在第十三章中介绍了有越流时地下水向割离井的非稳定渗流。然而位于广阔含水层中的非割离井的计算也是渗流研究中的重要课题。在本章将介绍两种情况：

1. 含水层可视为无限广阔，而且井的影响半径却是有限的；
2. 不仅含水层可视为无限广阔，而井的影响半径也非常大，可看作无限大。

下面将分别研究。

### 一、存在上下越流，含水层无限广阔，而井的影响半径有限时地下水向井孔的渗流

#### (一) 水位公式的推导

关于本节课题的基本方程仍然与(13.1)相同，即

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right] + \frac{K_1 H_1 - H}{\mu_1 M_1} + \frac{K_2 H_2 - H}{\mu_2 M_2} \quad (14.1)$$

式中的符号仍然是

$a = \frac{KM}{\mu_1}$ ——主含水层的压力传导系数；

$\mu_1$ ——主含水层的弹性给水度；

$K, M$ ——分别为主含水层的渗透系数及层厚；

$K_1, K_2; M_1, M_2$ ——分别为上部及下部弱透水层的渗透系

数及层厚；

$H, H_1, H_2$ ——分别为主含水层，上部及下部弱透水层的水位值（参见图 13-1）。

现在的问题归结为在如下的起始条件及边界条件下，求解方程 (14.1)，这些条件是

$$\left. \begin{aligned} H(r, 0) &= H_0 \quad r_0 \leq r \leq R, & a \\ H(r_0, t) &= h_0 \quad t > 0, & b \\ H(R, t) &= h_e \quad t > 0, & c \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

这里  $R$ ——井的影响半径。

为求解本课题，仍然使用拉氏变换法，得到的方程便是 (13.12)，即

$$\begin{aligned} \bar{H}'' + \frac{1}{r} \bar{H}' - \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + P}{a} \\ \times \left[ \bar{H} - \frac{H_0}{\gamma_1 + \gamma_2 + P} \right. \\ \left. - \frac{\beta}{P(P + \gamma_1 + \gamma_2)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (14.3)$$

$$\text{式中 } \beta = \gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2. \quad (14.4)$$

若再令  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  则上式变为

$$\begin{aligned} \bar{H}'' + \frac{1}{r} \bar{H}' - \frac{P + \gamma}{a} \\ \times \left[ \bar{H} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (14.5)$$

该式是以  $\left( \bar{H} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right)$  为未知函数的零阶贝塞尔

尔方程，其通解为

$$\begin{aligned} \bar{H} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \\ = C_1 I_0(\omega r) + C_2 K_0(\omega r). \end{aligned} \quad (14.6)$$

式中  $I_0(\omega r)$ ,  $K_0(\omega r)$  分别为虚宗量零阶第一类和第二类贝塞尔函数, 对此, 可参见第六章第十一节。而

$$\omega = \sqrt{\frac{P + \gamma}{a}}. \quad (14.7)$$

$C_1$ ,  $C_2$  为待定常数, 可用起始条件和边界条件确定。

相应于 (14.2) 式, 经过拉氏变换的定解条件为

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}(r, 0) &= \frac{H_0}{P}, \quad r_0 \leq r \leq R & a) \\ \bar{H}(r_0, t) &= \frac{h_0}{P}, \quad t > 0 & b) \\ \bar{H}(R, t) &= \frac{h_c}{P}, \quad t > 0 & c) \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

将条件 (14.8-b, c) 代进通解 (14.6) 中得二方程。

$$\left. \begin{aligned} \frac{h_0}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \\ &= C_1 I_0(\omega r_0) + C_2 K_0(\omega r_0), \\ \frac{h_c}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \\ &= C_1 I_0(\omega R) + C_2 K_0(\omega R). \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

解 (14.9) 式得

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \left[ \frac{h_0}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] K_0(\omega r_0) \\ \left[ \frac{h_c}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] K_0(\omega R) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_0(\omega r_0) & K_0(\omega r_0) \\ I_0(\omega R) & K_0(\omega R) \end{vmatrix}}, \quad (14.10)$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} I_0(\omega r_0) & \left[ \frac{h_0}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] \\ I_0(\omega R) & \left[ \frac{h_c}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_0(\omega r_0) & K_0(\omega r_0) \\ I_0(\omega R) & K_0(\omega R) \end{vmatrix}}. \quad (14.11)$$

故得

$$\begin{aligned}
 \bar{H} &= \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \\
 &= \left\{ \left[ \frac{h_0}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] K_0(\omega R) \right. \\
 &\quad - \left[ \frac{h_c}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] K_0(\omega r_0) / \\
 &\quad \left. A(R, r_0) \right\} \times I_0(\omega r) \\
 &\quad + \left\{ \left[ \frac{h_c}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] I_0(\omega r_0) \right. \\
 &\quad - \left[ \frac{h_0}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] I_0(\omega R) / \\
 &\quad \left. A(R, r_0) \right\} \times K_0(\omega r) \\
 &= \left[ \frac{h_c}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] \\
 &\quad \times \frac{K_0(\omega R) I_0(\omega r) - I_0(\omega R) K_0(\omega r)}{A(R, r_0)} \\
 &\quad + \left[ \frac{h_c}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] \\
 &\quad \times \frac{I_0(\omega r_0) K_0(\omega r) - K_0(\omega r_0) I_0(\omega r)}{A(R, r_0)},
 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
 \bar{H} &= \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \\
 &= \left[ \frac{h_0}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] \frac{A(R, r)}{A(R, r_0)} \\
 &\quad + \left[ \frac{h_c}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] \frac{A(r, r_0)}{A(R, r_0)}.
 \end{aligned}$$

(14.12)



式中

$$\left. \begin{aligned} A(R, r) &= K_0(\omega R)I_0(\omega r) - I_0(\omega R)K_0(\omega r), \\ A(r, r_0) &= K_0(\omega r)I_0(\omega r_0) - I_0(\omega r)K_0(\omega r_0), \\ A(R, r_0) &= K_0(\omega R)I_0(\omega r_0) - I_0(\omega R)K_0(\omega r_0). \end{aligned} \right\} \quad (14.13)$$

而  $P_n$  为  $A(R, r_0) = 0$  的根, 亦即由 (14.13) 式知

$$K_0(\omega R)I_0(\omega r_0) - I_0(\omega R)K_0(\omega r_0)_{P=P_n} = 0. \quad (14.14)$$

参看 (13.31) 式, 由于

$$I_0(z) = J_0(iz)$$

$$K_0(z) = \frac{\pi}{2} i [J_0(iz) + iY_0(iz)]$$

$$\begin{aligned} A(R, r) &= \frac{\pi}{2} i [J_0(i\omega R) + iY_0(i\omega R)]J_0(i\omega r) \\ &\quad - \frac{\pi}{2} i [J_0(i\omega r) + iY_0(i\omega r)]J_0(i\omega R) \\ &= \frac{\pi}{2} [Y_0(i\omega r)J_0(i\omega R) - Y_0(i\omega R)J_0(i\omega r)] \\ &= \frac{\pi}{2} E(r, R), \end{aligned} \quad (14.15)$$

$$\text{即} \quad E(r, R) = J_0(i\omega R)Y_0(i\omega r) - Y_0(i\omega R)J_0(i\omega r). \quad (14.16)$$

同理得

$$\begin{aligned} A(r_0, r) &= \frac{\pi}{2} [Y_0(i\omega r_0)J_0(i\omega r) - Y_0(i\omega r)J_0(i\omega r_0)] \\ &= \frac{\pi}{2} E(r_0, r), \end{aligned} \quad (14.17)$$

$$\begin{aligned} E(r_0, r) &= [Y_0(i\omega r_0)J_0(i\omega r) \\ &\quad - J_0(i\omega r_0)Y_0(i\omega r)]. \end{aligned} \quad (14.18)$$

由此, 方程的解 (14.12) 式变为

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{H_0}{P + \gamma} + \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \\ &\quad + \left[ \frac{h_0}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)} \end{aligned}$$

$$+ \left[ \frac{h_e}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] \frac{E(r_0, r)}{E(R, r_0)}. \quad (14.19)$$

为了求得原方程的解,对(14.19)式施行拉氏逆变换(参见第五章),即

$$\begin{aligned} H = & H_0 e^{-\gamma t} + \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \\ & + \frac{h_0}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ & - \frac{H_0}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda + \gamma} \\ & - \frac{\beta}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda + \gamma)} \\ & + \frac{h_e}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(r_0, r)}{E(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ & - \frac{H_0}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(r_0, r)}{E(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda + \gamma} \\ & - \frac{\beta}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(r_0, r)}{E(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda + \gamma)}. \end{aligned} \quad (14.20)$$

为了计算(14.20)式中的积分项,象在第十三章所做的那样,可利用留数理论[参见图13-2及公式(13.26)],从而得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ & = \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)_{P=0}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(R, r) e^{P_n t}}{\frac{d}{dP} [PE(R, r_0)]_{P=P_n}}, \quad (14.21) \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda + \gamma} \\ & = \frac{E(R, r) e^{-\gamma t}}{E(R, r_0)_{P=-\gamma}} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(R, r) e^{P_n t}}{\frac{d}{dP} [(P+\gamma)E(R, r_0)]_{P=P_n}}, \quad (14.22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda+\gamma)} \\ &= \frac{E(R, r)}{\gamma E(R, r_0)_{P=0}} + \frac{E(R, r) e^{-\gamma t}}{-\gamma E(R, r_0)_{P=-\gamma}} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(R, r) e^{P_n t}}{\frac{d}{dP} [P(P+\gamma)E(R, r_0)]_{P=P_n}}, \quad (14.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(r_0, r)}{E(R, r)} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{E(r_0, r)}{E(R, r_0)_{P=0}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(r_0, r) e^{P_n t}}{\frac{d}{dP} [PE(R, r_0)]_{P=P_n}}, \quad (14.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(r_0, r)}{E(R, r_0)} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda+\gamma} \\ &= \frac{E(r_0, r) e^{-\gamma t}}{E(R, r_0)_{P=-\gamma}} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(r_0, r) e^{P_n t}}{\frac{d}{dP} [(P+\gamma)E(R, r_0)]_{P=P_n}}, \quad (14.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(r_0, r)}{E(R, r)} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda+\gamma)} \\ &= \frac{E(r, r_0)}{\gamma E(R, r_0)_{\lambda=P=0}} + \frac{E(r, r_0) e^{-\gamma t}}{-\gamma E(R, r_0)_{P=-\gamma}} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(r, r_0) e^{P_n t}}{\frac{d}{dP} [P(P+\gamma)E(R, r_0)]_{P=P_n}}. \quad (14.26) \end{aligned}$$

由(14.14)式知, (14.21) — (14.26) 式中的  $P_*$  是方程

$$E(R, r_0) = 0$$

的根, 亦即

$$\begin{aligned} E(R, r_0)_{P=P_*} &= J_0(i\omega R)Y_0(i\omega r_0) \\ &- Y_0(i\omega R)J_0(i\omega r_0)|_{P=P_*} = 0 \end{aligned} \quad (14.27)$$

若令

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{r_0}{R}, \\ \alpha &= i\omega R = i\sqrt{\frac{P+\gamma}{a}} \times R, \\ P &= -\frac{\alpha^2 a}{R^2} - \gamma \end{aligned} \quad (14.28)$$

同时记住

$$\omega = \sqrt{\frac{P+\gamma}{a}},$$

则(14.27)式变为

$$\begin{aligned} E(R, r_0)_{P=P_*} &= J_0(\alpha)Y_0(\alpha x_0) \\ &- Y_0(\alpha)J_0(\alpha x_0) = 0, \end{aligned} \quad (14.29)$$

或即当  $P = P_*$  时

$$J_0(\alpha)Y_0(\alpha x_0) - Y_0(\alpha)J_0(\alpha x_0) = 0. \quad (14.30)$$

为了计算(14.21) — (14.26) 式表示的和, 在此先求  $E'_{P_*}(R, r_0)$ .

已知 
$$P_* = -\frac{\alpha^2 a}{R^2} - \gamma,$$

又 
$$\frac{d}{dP_*} E(R, r_0) = \frac{dE(R, r_0)}{d\alpha} \times \frac{d\alpha}{dP}. \quad (14.31)$$

上式中

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dP} &= \frac{d}{dP} \left( i\sqrt{\frac{P+\gamma}{a}} \cdot R \right) \\ &= \frac{iR}{2\sqrt{(P+\gamma)a}}. \end{aligned} \quad (14.32)$$

而 
$$\frac{dE(R, r_0)}{d\alpha} = [Y'_0(\alpha x_0)J_0(\alpha) + Y_0(\alpha x_0)J'_0(\alpha) - Y'_0(\alpha)J_0(\alpha x_0) - Y_0(\alpha)J'_0(\alpha x_0)].$$

由公式 (6.33), (6.37) 知

$$\begin{aligned} J'_0(x) &= -J_1(x), \\ Y'_0(x) &= -Y_1(x). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \frac{dE(R, r_0)}{d\alpha} &= [-x_0 Y_1(\alpha x_0)J_0(\alpha) - Y_0(\alpha x_0)J_1(\alpha) \\ &\quad + Y_1(\alpha)J_0(\alpha x_0) + x_0 Y_0(\alpha)J_1(\alpha x_0)] \\ &= x_0[Y_0(\alpha)J_1(\alpha x_0) - Y_1(\alpha x_0)J_0(\alpha)] \\ &\quad + [Y_1(\alpha)J_0(\alpha x_0) - Y_0(\alpha x_0)J_1(\alpha)] \\ &= x_0 J_0(\alpha)J_1(\alpha x_0) \left[ \frac{Y_0(\alpha)}{J_0(\alpha)} - \frac{Y_1(\alpha x_0)}{J_1(\alpha x_0)} \right] \\ &\quad + Y_1(\alpha)Y_0(\alpha x_0) \left[ \frac{J_0(\alpha x_0)}{Y_0(\alpha x_0)} - \frac{J_1(\alpha)}{Y_1(\alpha)} \right]; \end{aligned}$$

由公式 (14.30) 知

$$\frac{Y_0(\alpha)}{J_0(\alpha)} = \frac{Y_0(\alpha x_0)}{J_0(\alpha x_0)}, \quad (14.33)$$

故知

$$\begin{aligned} \frac{dE(R, r_0)}{d\alpha} &= x_0 J_0(\alpha)J_1(\alpha x_0) \\ &\quad \times \left[ \frac{Y_0(\alpha x_0)}{J_0(\alpha x_0)} - \frac{Y_1(\alpha x_0)}{J_1(\alpha x_0)} \right] \\ &\quad + Y_1(\alpha)Y_0(\alpha x_0) \left[ \frac{J_0(\alpha)}{Y_0(\alpha)} - \frac{J_1(\alpha)}{Y_1(\alpha)} \right] \\ &= x_0 \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0)} [Y_0(\alpha x_0)J_1(\alpha x_0) - Y_1(\alpha x_0)J_0(\alpha x_0)] \\ &\quad + \frac{Y_0(\alpha x_0)}{Y_0(\alpha)} [J_0(\alpha)Y_1(\alpha) - Y_0(\alpha)J_1(\alpha)]; \end{aligned}$$

又由公式 (6.77) 知

$$J_1(x)Y_0(x) - J_0(x)Y_1(x) = \frac{2}{\pi x},$$

将其代进上式后得

$$\begin{aligned} \frac{dE(R, r_0)}{d\alpha} &= x_0 \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0)} \left( -\frac{2}{\pi \alpha x_0} \right) \\ &\quad + \frac{Y_0(\alpha x_0)}{Y_0(\alpha)} \left( -\frac{2}{\pi \alpha} \right) \\ &= \frac{2}{\pi \alpha} \left[ \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0)} - \frac{Y_0(\alpha x_0)}{Y_0(\alpha)} \right] \\ &= \frac{2}{\pi \alpha} \frac{J_0(\alpha)Y_0(\alpha) - J_0(\alpha x_0)Y_0(\alpha x_0)}{J_0(\alpha x_0)Y_0(\alpha)}. \end{aligned} \quad (14.34)$$

参见公式 (14.33) 或因

$$\frac{Y_0(\alpha x_0)}{Y_0(\alpha)} = \frac{J_0(\alpha x_0)}{J_0(\alpha)}, \quad (14.35)$$

将 (14.35) 式代进 (14.34) 式中得

$$\frac{dE(R, r_0)}{d\alpha} = \frac{2}{\pi \alpha} \frac{J_0^2(\alpha) - J_0^2(\alpha x_0)}{J_0(\alpha)J_0(\alpha x_0)}. \quad (14.36)$$

将 (14.32), (14.36) 式代进 (14.31) 式中, 得

$$\begin{aligned} \frac{dE(R, r_0)}{dP} &= \frac{iR}{2\sqrt{(P+\gamma) \cdot a}} \\ &\quad \times \left[ \frac{J_0^2(\alpha) - J_0^2(\alpha x_0)}{J_0(\alpha)J_0(\alpha x_0)} \cdot \frac{2}{\pi i \sqrt{\frac{P+\gamma}{a}} \cdot R} \right] \\ &= \frac{1}{\pi(P+\gamma)} \times \frac{J_0^2(\alpha) - J_0^2(\alpha x_0)}{J_0(\alpha)J_0(\alpha x_0)}. \end{aligned} \quad (14.37)$$

$$\text{令} \quad D^{-1}(\alpha x_0, \alpha) = \frac{J_0^2(\alpha x_0) - J_0^2(\alpha)}{J_0(\alpha)J_0(\alpha x_0)}, \quad (14.38)$$

则

$$\frac{dE(R, r_0)}{dP} = - \frac{D^{-1}(\alpha x_0, \alpha)}{\pi(P + \gamma)}.$$

因

$$D^{-1}(\alpha x_0, x_0) = \frac{1}{D(\alpha x_0, x_0)},$$

故得

$$\frac{dE(R, r_0)}{dP} = - \frac{1}{\pi(P + \gamma)D(\alpha x_0, \alpha)}. \quad (14.39)$$

将所得之(14.39)式代进(14.21)–(14.26)式中,并考虑到

$$E(R, r_0)_{P=P_n} = 0,$$

则得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)_{P=0}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(R, r) e^{P_n t}}{P_n \frac{1}{\pi(P_n + \gamma)D(\alpha x_0, \alpha)}} \\ &= \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)_{P=0}} - \pi \\ & \quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(R, r) D(\alpha x_0, \alpha)}{P_n / (P_n + \gamma)} e^{P_n t} P_n \\ &= \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)_{P=0}} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} E(R, r) \\ & \quad \times D(\alpha x_0, \alpha) \left(1 + \frac{\gamma}{P_n}\right) e^{P_n t} P_n; \end{aligned} \quad (14.40)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda + \gamma} \\ &= \frac{E(R, r) e^{-\gamma t}}{E(R, r_0)_{P=-\gamma}} \\ & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(R, r) e^{P_n t}}{E(R, r_0) + (P + \gamma) \frac{1}{-\pi(P + \gamma)D(\alpha x_0, \alpha)_{P=P_n}}} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda + \gamma} \\ &= \frac{E(R, r)e^{-\gamma t}}{E(R, r_0)_{P=-\gamma}} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} E(R, r) D(\alpha x_0, \alpha) e^{P_n t} \Big|_{P=P_n}; \end{aligned} \quad (14.41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda + \gamma)} \\ &= \frac{E(R, r)}{\gamma E(R, r_0)_{P=0}} + \frac{E(R, r)e^{-\gamma t}}{-\gamma E(R, r_0)_{P=-\gamma}} \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(R, r) D(\alpha x_0, \alpha) e^{P_n t}}{P_n} \Big|_{P=P_n}; \end{aligned} \quad (14.42)$$

同理

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(r_0, r)}{E(R, r_0)} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{E(r_0, r)}{E(R, r_0)_{P=0}} - \pi \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(r_0, r) D(\alpha x_0, \alpha)}{P_n} (P_n + \gamma) e^{P_n t} \Big|_{P=P_n}; \end{aligned} \quad (14.43)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(r_0, r)}{E(R, r_0)} \frac{d\lambda}{\lambda + \gamma} \\ &= \frac{E(r_0, r)e^{-\gamma t}}{E(R, r_0)_{\lambda=P=-\gamma}} \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} E(r_0, r) D(\alpha x_0, \alpha) e^{P_n t} \Big|_{P=P_n}; \end{aligned} \quad (14.44)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{\lambda t} \frac{E(r_0, r)}{E(R, r_0)} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda + \gamma)} \\ &= \frac{E(r_0, r)}{\gamma E(r_0, r)_{\lambda=P=0}} + \frac{E(r_0, r)e^{-\gamma t}}{-\gamma E(R, r_0)_{\lambda=P=-\gamma}} \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(r_0, r) D(\alpha x_0, \alpha) e^{P_n t}}{P_n} \Big|_{P=P_n}. \end{aligned} \quad (14.45)$$



将 (14.40) — (14.45) 式代进 (14.20) 式, 即得所求水位曲线方程为

$$\begin{aligned}
 H = & H_0 e^{-\gamma t} + \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \\
 & + h_0 \left[ \frac{E(R, r)}{E(R, r_0)_{P=0}} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} E(R, r) D(\alpha x_0, \alpha) \right. \\
 & \times \left. \left( \frac{P + \gamma}{P} \right) e^{\frac{P}{P_n} t} \right] - H_0 \left[ \frac{E(R, r) e^{-\gamma t}}{E(R, r_0)_{P=-\gamma}} \right. \\
 & - \pi \sum_{n=1}^{\infty} E(R, r) D(\alpha x_0, \alpha) e^{\frac{P}{P_n} t} \left. \right] \\
 & - \beta \left[ \frac{E(R, r)}{\gamma E(R, r_0)_{P=0}} - \frac{E(R, r) e^{-\gamma t}}{\gamma E(R, r_0)_{P=-\gamma}} \right. \\
 & - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(R, r) D(\alpha x_0, \alpha) e^{\frac{P}{P_n} t}}{P_n} \left. \right] \\
 & + h_e \left[ \frac{E(r_0, r)}{E(R, r_0)_{P=0}} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} E(r_0, r) \right. \\
 & \times D(\alpha x_0, \alpha) \frac{P_n + \gamma}{P_n} e^{\frac{P}{P_n} t} \left. \right] \\
 & - H_0 \left[ \frac{E(r_0, r) e^{-\gamma t}}{E(R, r_0)_{P=-\gamma}} \right. \\
 & - \pi \sum_{n=1}^{\infty} E(r_0, r) D(\alpha x_0, \alpha) e^{\frac{P}{P_n} t} \left. \right] \\
 & - \beta \left[ \frac{E(r_0, r)}{\gamma E(R, r_0)_{P=0}} - \frac{E(r_0, r) e^{-\gamma t}}{\gamma E(R, r_0)_{P=-\gamma}} \right. \\
 & - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(r_0, r) D(\alpha x_0, \alpha) e^{\frac{P}{P_n} t}}{P_n} \left. \right].
 \end{aligned}$$

到此, 因

$$\frac{E(R, r)}{E(R, r_0)} = \frac{J_0(\alpha) Y_0(\alpha x) - Y_0(\alpha) J_0(\alpha x)}{J_0(\alpha) Y_0(\alpha x_0) - Y_0(\alpha) J_0(\alpha x_0)}$$

而  $\alpha = i\sqrt{\frac{P+\gamma}{a}} \times R$ , 故当  $P = -\gamma$  时,  $\alpha = 0$ , 由此

$$\frac{E(R, r)}{E(R, r_0)_{P=-\gamma}} = \frac{J_0(0)Y_0(0) - Y_0(0)J_0(0)}{J_0(0)Y_0(0) - Y_0(0)J_0(0)} = 1. \quad (14.46)$$

将 (14.46) 式代进上式并整理之得

$$\begin{aligned} H(r, t) = & \frac{\beta}{\gamma} (1 + e^{-\gamma t}) - H_0 e^{-\gamma t} \\ & + \frac{h_c E(R, r) + h_c E(r_0, r)}{E(R, r_0)_{P=0}} \\ & - \frac{\beta}{\gamma} \left[ \frac{E(R, r) + E(r_0, r)}{E(R, r_0)} \right]_{P=0} \\ & - \pi h_0 \sum_{n=1}^{\infty} E(R, r) D(\alpha x_0, \alpha) \frac{P+\gamma}{P} e^{\frac{P_n t}{P}} \\ & - \pi h_c \sum_{n=1}^{\infty} E(r_0, r) D(\alpha x_0, \alpha) \frac{P+\gamma}{P} e^{\frac{P_n t}{P}} \\ & + \pi H_0 \sum_{n=1}^{\infty} D(\alpha x_0, \alpha) [E(R, r) \\ & + E(r_0, r)] e^{\frac{P_n t}{P}} \\ & + \pi \beta \sum_{n=1}^{\infty} D(\alpha x_0, \alpha) [E(R, r) \\ & + E(r_0, r)] \frac{e^{\frac{P_n t}{P}}}{P} \quad (14.47) \end{aligned}$$

此式便是所要推求的存在上下越流, 含水层无限广阔而井的影响半径有限时地下水向井孔渗流的非稳定运动方程。

式中

$$\left. \begin{aligned} E(R, r) &= J_0(i\omega R)Y_0(i\omega r) - Y_0(i\omega R)J_0(i\omega r), \\ \text{或 } E(R, r) &= J_0(\alpha)Y_0(\alpha x) - Y_0(\alpha)J_0(\alpha x); \end{aligned} \right\} \quad (14.48)$$

$$\left. \begin{aligned} E(R, r_0) &= J_0(i\omega R)Y_0(i\omega r_0) - Y_0(i\omega R)J_0(i\omega r_0), \\ \text{或 } E(R, r_0) &= J_0(\alpha)Y_0(\alpha x_0) - Y_0(\alpha)J_0(\alpha x_0); \end{aligned} \right\} \quad (14.49)$$

$$\left. \begin{aligned} E(r_0, r) &= J_0(i\omega r_0)Y_0(i\omega r) - Y_0(i\omega r_0)J_0(i\omega r), \\ \text{或 } E(r_0, r) &= J_0(\alpha x_0)Y_0(\alpha x) - Y_0(\alpha x_0)J_0(\alpha x); \end{aligned} \right\} \quad (14.50)$$

由 (14.29), (14.30) 式知

$$E(R, r_0)_{P=P_n} = 0.$$

$P_n$  为  $J_0(\alpha)Y_0(\alpha x_0) - Y_0(\alpha)J_0(\alpha x_0) = 0$  的根。

$$\text{而 } D(\alpha x_0, \alpha) = \frac{J_0(\alpha)J_0(\alpha x_0)}{J_0^2(\alpha x_0) - J_0^2(\alpha)}. \quad (14.51)$$

若抽水时间足够长,或者说在理论上可认为  $t \rightarrow \infty$ ,则由前章第四节可知所有含  $e^{P_n t}$  的项趋近于零,故得(因  $P$  实为 0 或负值)

$$\begin{aligned} H(r, \infty) &= \frac{\beta}{\gamma} + \frac{h_0 E(R, r) + h_e E(r_0, r)}{E(R, r_0)} \Big|_{P=0} \\ &\quad - \frac{\beta}{\gamma} \left[ \frac{E(R, r) + E(r_0, r)}{E(R, r_0)} \right]_{P=0} \\ &= H(r). \end{aligned} \quad (14.52)$$

此式即上述情况下的井孔稳定渗流水位计算公式。

## (二) 出水量计算公式的推导

由达西流量公式知:

$$Q = 2\pi r K M \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \quad (14.53)$$

式中  $M$ ——主含水层厚度,其余符号同前。

将 (14.47) 式表示之水位  $H(r, t)$  对  $r$  求导,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= \left[ \frac{h_0 E'(R, r) + h_e E'(r_0, r)}{E(R, r_0)} \right]_{P=0} \\ &\quad - \frac{\beta}{\gamma} \left[ \frac{E'(R, r) + E'(r_0, r)}{E(R, r_0)} \right]_{P=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \pi h_0 \sum_{n=1}^{\infty} E'(R, r) D(\alpha x_0, \alpha) \frac{P + \gamma}{P} e^{P z'} \right]_{P=P_n} \\
& - \left[ \pi h_0 \sum_{n=1}^{\infty} E'(r_0, r) D(\alpha x_0, \alpha) \frac{P + \gamma}{P} e^{P z'} \right]_{P=P_n} \\
& + \left[ \pi H_0 \sum_{n=1}^{\infty} D(\alpha x_0, \alpha) \right. \\
& \times [E'(R, r) + E'(r_0, r)] e^{P z'} \Big]_{P=P_n} \\
& + \pi \beta \sum_{n=1}^{\infty} D(\alpha x_0, \alpha) \left[ E'(R, r) \right. \\
& \left. + E'(r_0, r) \frac{e^{P z'}}{P} \right]_{P=P_n}. \tag{14.54}
\end{aligned}$$

由 (14.48) 式知

$$\begin{aligned}
E(R, r) &= J_0(\alpha) Y_0(\alpha x) - Y_0(\alpha) J_0(\alpha x), \\
E(r_0, r) &= J_0(\alpha x_0) Y_0(\alpha x) - Y_0(\alpha x_0) J_0(\alpha x),
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
E'(R, r) \Big|_{r=r_0} &= \frac{\partial E(R, r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \\
&= \frac{\partial}{\partial r} \left[ J_0(\alpha) Y_0 \left( \alpha \frac{r}{R_0} \right) \right. \\
&\quad \left. - Y_0(\alpha) J_0 \left( \alpha \frac{r}{R} \right) \right]_{r=r_0} \\
&= -J_0(\alpha) \frac{\alpha}{R_0} Y_1(\alpha x_0) + Y_0(\alpha) \frac{\alpha}{R_0} J_1(\alpha x_0) \\
&= \frac{\alpha}{R_0} [Y_0(\alpha) J_1(\alpha x_0) - J_0(\alpha) Y_1(\alpha x_0)] \\
&= \frac{\alpha}{R_0} \left\{ J_0(\alpha) J_1(\alpha x_0) \left[ \frac{Y_0(\alpha)}{J_0(\alpha)} - \frac{Y_1(\alpha x_0)}{J_1(\alpha x_0)} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

因由公式 (14.30) 知:

$$\frac{Y_0(\alpha)}{J_0(\alpha)} = \frac{Y_0(\alpha x_0)}{J_0(\alpha x_0)},$$

$$\begin{aligned}
\text{故 } E'(R, r)|_{r=r_0} &= \frac{\alpha}{R_0} \left\{ \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0)} [J_1(\alpha x_0) Y_0(\alpha x_0) \right. \\
&\quad \left. - J_0(\alpha x_0) Y_1(\alpha x_0)] \right\} \\
&= \frac{\alpha}{R_0} \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0)} \times \frac{2}{\pi \alpha x_0} \\
&= \frac{2}{\pi r_0} \times \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0)}
\end{aligned}$$

即

$$E'(R, r)|_{r=r_0} = \frac{2}{\pi r_0} \times \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0)} \quad (14.55)$$

同理得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} [E(r_0, r)]|_{r=r_0} &= \frac{\partial}{\partial r} [J_0(\alpha x_0) Y_0(\alpha x) \\
&\quad - Y_0(\alpha x_0) J_0(\alpha x)]|_{r=r_0} \\
&= -J_0(\alpha x_0) \frac{\alpha}{R_0} Y_1(\alpha x_0) \\
&\quad + Y_0(\alpha x_0) \frac{\alpha}{R_0} J_1(\alpha x_0) \\
&= \frac{\alpha}{R_0} [Y_0(\alpha x_0) J_1(\alpha x_0) \\
&\quad - Y_1(\alpha x_0) J_0(\alpha x_0)] \\
&= \frac{\alpha}{R_0} \times \frac{2}{\pi \alpha x_0} = \frac{2}{\pi r_0}
\end{aligned} \quad (14.56)$$

将 (14.55), (14.56) 代进 (14.54) 式得

$$\frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \left\{ \left[ \frac{h_0 \frac{2J_0(\alpha)}{\pi r_0 J_1(\alpha x_0)} + h_c \frac{2}{\pi r_0}}{E(R, r_0)} \right] \right\} \Big|_{r=r_0}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\beta}{\gamma} \left[ \frac{\frac{2J_0(\alpha)}{\pi r_0 J_0(\alpha x_0)} + \frac{2}{\pi r_0}}{E(R, r_0)} \right]_{P=0} \\
& - \left[ \pi h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(\alpha)}{\pi r_0 J_0(\alpha x_0)} \right. \\
& \quad \times D(\alpha x_0, \alpha) \frac{P + \gamma}{P} e^{P_n t} \left. \right]_{P=P_n} \\
& - \left[ \pi h_e \sum_{n=1}^{\infty} D(\alpha x_0, \alpha) \frac{2}{\pi r_0} \frac{P + \gamma}{P} e^{P_n t} \right]_{P=P_n} \\
& + \pi H_0 \sum_{n=1}^{\infty} D(\alpha x_0, \alpha) \left[ \frac{2J_0(\alpha)}{\pi r_0 J_0(\alpha x_0)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{\pi r_0} \right] e^{P_n t} \Big|_{P=P_n} \\
& + \pi \beta \sum_{n=1}^{\infty} D(\alpha x_0, \alpha) \left\{ \frac{2J_0(\alpha)}{\pi r_0 J_0(\alpha x_0)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{\pi r_0} \right\} \frac{e^{P_n t}}{P} \Big|_{P=P_n} \Big|_{r=r_0},
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0} & = \left\{ \frac{2}{\pi r_0} \left[ \frac{h_0 J_0(\alpha) + h_e J_0(\alpha x_0)}{E(R, r) J_0(\alpha x_0)} \right]_{P=0} \right. \\
& - \frac{2\beta}{\pi r_0 \gamma} \left[ \frac{J_0(\alpha) + J_0(\alpha x_0)}{E(R, r_0) J_0(\alpha x_0)} \right]_{P=0} \\
& - \frac{2h_0}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0)} D(\alpha x_0, \alpha) \frac{P + \gamma}{P} e^{P_n t} \Big|_{P=P_n} \\
& - \frac{2h_e}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} D(\alpha x_0, \alpha) \frac{P + \gamma}{P} e^{P_n t} \Big|_{P=P_n} \\
& + \frac{2H_0}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} D(\alpha x_0, \alpha) \left[ \frac{J_0(\alpha) + J_0(\alpha x_0)}{J_0(\alpha x_0)} \right] e^{P_n t} \Big|_{P=P_n} \\
& + \frac{2\beta}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} D(\alpha x_0, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\times \left[ \frac{J_0(\alpha) + J_0(\alpha x_0)}{J_0(\alpha x_0)} \right] \frac{e^{P_{n'}}}{P} \Big|_{P=P_n} \Big|_{r=r_0},$$

或 
$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = & \left\{ \frac{2}{\pi r_0} \left[ \frac{h_0 J_0(\alpha) + h_c J_0(\alpha x_0)}{E(R, r_0) J_0(\alpha x_0)} \right]_{P=0} \right. \\ & - \frac{2\beta}{\pi r_0 \gamma} \left[ \frac{J_0(\alpha) + J_0(\alpha x_0)}{E(R, r_0) J_0(\alpha x_0)} \right]_{P=0} \\ & - \frac{2h_0}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0)} \\ & \times \frac{J_0(\alpha) J_0(\alpha x_0)}{J_0^2(\alpha x_0) - J_0^2(\alpha)} \frac{P + \gamma}{P} e^{P_{n'}} \Big|_{P=P_n} \\ & - \frac{2h_c}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha) J_0(\alpha x_0)}{J_0^2(\alpha x_0) - J_0^2(\alpha)} \frac{P + \gamma}{P} e^{P_{n'}} \Big|_{P=P_n} \\ & + \frac{2H_0}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha) J_0(\alpha x_0)}{J_0^2(\alpha x_0) - J_0^2(\alpha)} \\ & \times \frac{J_0(\alpha) + J_0(\alpha x_0)}{J_0(\alpha x_0)} e^{P_{n'}} \Big|_{P=P_n} \\ & + \frac{2\beta}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha) J_0(\alpha x_0)}{J_0^2(\alpha x_0) - J_0^2(\alpha)} \\ & \times \left. \frac{J_0(\alpha) + J_0(\alpha x_0)}{J_0(\alpha x_0)} \frac{e^{P_{n'}}}{P} \Big|_{P=P_n} \right\} \Big|_{r=r_0}, \end{aligned}$$

经整理得

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = & \frac{2}{\pi r_0} \left\{ \frac{h_0 J_0(\alpha) + h_c J_0(\alpha x_0)}{E(R, r_0) J_0(\alpha x_0)} \right\} \Big|_{P=0} \\ & - \frac{\beta}{\gamma} \left[ \frac{J_0(\alpha) + J_0(\alpha x_0)}{E(R, r_0) J_0(\alpha x_0)} \right] \Big|_{P=0} \\ & - \pi h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\alpha)}{J_0^2(\alpha x_0) - J_0^2(\alpha)} \frac{P + \gamma}{P} e^{P_{n'}} \Big|_{P=P_n} \\ & - \pi h_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha) J_0(\alpha x_0)}{J_0^2(\alpha x_0) - J_0^2(\alpha)} \frac{P + \gamma}{P} e^{P_{n'}} \Big|_{P=P_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \pi H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0) - J_0(\alpha)} e^{P_n r} \Big|_{P=P_n} \\
& + \pi \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0) - J_0(\alpha)} \frac{e^{P_n r}}{P} \Big|_{P=P_n} \Big\} \Big|_{r=r_0}. \quad (14.57)
\end{aligned}$$

将 (14.57) 式代进 (14.53) 式中, 得

$$\begin{aligned}
Q &= 2\pi r_0 K M \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \\
&= 2\pi r_0 K M \times \frac{2}{\pi r_0} \left\{ \frac{h_0 J_0(\alpha) + h_c J_0(\alpha x_0)}{E(R, r_0) J_0(\alpha x_0)} \Big|_{P=0} \right. \\
&\quad - \frac{\beta}{\gamma} \times \frac{J_0(\alpha) + J_0(\alpha x_0)}{E(R, r_0) J_0(\alpha x_0)} \Big|_{P=0} \\
&\quad - \pi h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\alpha)}{J_0^2(\alpha x_0) - J_0^2(\alpha)} \frac{P + \gamma}{P} e^{P_n r} \Big|_{P=P_n} \\
&\quad - \pi h_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha) J_0(\alpha x_0)}{J_0^2(\alpha x_0) - J_0^2(\alpha)} \frac{P + \gamma}{P} e^{P_n r} \Big|_{P=P_n} \\
&\quad + \pi H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0) - J_0(\alpha)} e^{P_n r} \Big|_{P=P_n} \\
&\quad \left. + \pi \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0) - J_0(\alpha)} \frac{e^{P_n r}}{P} \Big|_{P=P_n} \right\} \Big|_{r=r_0},
\end{aligned}$$

再整理后得:

$$\begin{aligned}
Q &= 4\pi K M \left\{ \frac{J_0(\alpha) \left[ h_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right] + J_0(\alpha x_0) \left[ h_c - \frac{\beta}{\gamma} \right]}{\pi E(R, r_0) J_0(\alpha x_0)} \Big|_{P=0} \right. \\
&\quad - h_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(\alpha x_0, \alpha)}{J_0(\alpha x_0)} \frac{P + \gamma}{P} e^{P_n r} \Big|_{P=P_n} \\
&\quad - h_c \sum_{n=1}^{\infty} D(\alpha x_0, \alpha) \frac{P + \gamma}{P} e^{P_n r} \Big|_{P=P_n} \\
&\quad \left. + H_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0) - J_0(\alpha)} e^{P_n r} \Big|_{P=P_n} \right\}
\end{aligned}$$



$$+ \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha)}{J_0(\alpha x_0) - J_0(\alpha)} \left. \frac{e^{p_n t}}{p} \right|_{p=p_n} \Bigg|_{r=r_0} \quad (14.58)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时

$$Q = 4\pi K M \left\{ \frac{J_0(\alpha) \left[ h_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right] + J_0(\alpha x_0) \left[ h_e - \frac{\beta}{\gamma} \right]}{E(R, r_0) J_0(\alpha x_0)} \right\} \Bigg|_{r=r_0} \quad (14.59)$$

此式即为相应的稳定渗流公式。

## 二、含水层无限广阔,影响半径很大 且存在越流时井孔的非稳定渗流

前节介绍了无限广阔含水层中井孔影响半径较小情况下的渗流计算问题,在本节将研究影响半径很大时的井流计算问题。对此,可将井的作用半径看为无穷大,并且认为在无穷远处的侧向补给量为零,亦即当  $r \rightarrow \infty$  时,

$$\frac{\partial H}{\partial r} = 0.$$

因而,本节的任务归结为在新的定解条件下,求解方程(13.1),即

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right] \\ + \frac{K_1 H_1 - H}{\mu_1 M_1} + \frac{K_2 H_2 - H_1}{\mu_2 M_2}, \end{aligned} \quad (14.60)$$

这些新的定解条件是:

起始条件

$$H(r, 0) = H_0 = \text{const.}, \quad r_0 \leq r < \infty \quad (14.61)$$

边界条件

$$\left. \begin{aligned} H(r_0, t) = h_0 = \text{const.}, \quad t > 0 & \quad \text{a} \\ \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad t > 0 & \quad \text{b} \end{aligned} \right\} \quad (14.62)$$

## (一) 水位计算公式的推导

该课题的求解方法仍采用拉氏变换法, 设令  $\bar{H}$  的拉氏变换为  $\bar{H}$ , 且

$$\bar{H} = \bar{f}(P) = \int_0^{\infty} e^{Pt} f(t) dt. \quad (14.63)$$

参看本书第十三章中 (13.6) — (13.10) 式的推演过程, (14.60) 式变为

$$\begin{aligned} a\bar{H}'' + \frac{a}{r}\bar{H}' + \frac{K_1 H_1}{PM_1 \mu_t} - \frac{K}{\mu_t M_1} \bar{H} \\ + \frac{K_2 H_2}{PM_2 \mu_t} - \frac{K_2 \bar{H}}{M_2 \mu_t} - P\bar{H} + H_0 = 0. \end{aligned} \quad (14.64)$$

在 (14.64) 式中若令

$$\gamma_1 = \frac{K_1}{M_1 \mu_t}, \quad \gamma_2 = \frac{K_2}{M_2 \mu_t}, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad (14.65)$$

而  $a = \frac{KM}{\mu_t}$ , 则 (14.64) 式变为

$$\begin{aligned} \bar{H}'' + \frac{1}{r}\bar{H}' - \frac{\gamma + P}{a} \\ \times \left[ \bar{H} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (14.66)$$

式中  $\beta = \gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2$ , (14.67)

(14.66) 式便是以  $\left[ \bar{H} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right]$  为未知函数的零

阶贝塞尔方程, 其通解为

$$\begin{aligned} \bar{H} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \\ = C_1 I_0(\omega r) + C_2 K_0(\omega r). \end{aligned} \quad (14.68)$$

参见第六章第十一节, 可知  $I_0(\omega r)$ ,  $K_0(\omega r)$  分别为虚宗量零阶

第一类和第二类贝塞尔函数,而

$$\omega = \sqrt{\frac{P + \gamma_1 + \gamma_2}{a}} = \sqrt{\frac{P + \gamma}{a}}, \quad (14.69)$$

$C_1, C_2$  为待定常数.

经拉氏变换后求解 (14.68) 的起始条件和边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}(r, 0) &= \frac{H_0}{P}, \quad r_0 \leq r < \infty, & a \\ \bar{H}(r_0, t) &= \frac{h_0}{P} \quad t > 0, & b \\ \left. \frac{\partial \bar{H}}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} &= 0 \quad t > 0, & c \end{aligned} \right\} \quad (14.70)$$

将条件 (14.70) 代进 (14.68) 式,得 (14.71)

$$\left. \frac{dH}{dr} \right|_{r \rightarrow \infty} = C_1 \omega I_1(\omega r) - C_1 \omega K_1(\omega r) = 0. \quad (14.71)$$

按照贝塞尔函数的性质,当  $r \rightarrow \infty$  时,  $I_1(\omega r) \rightarrow \infty$ , 因此,要使上式为零,必须  $C_1 = 0$ , 故 (14.68) 式变为

$$\bar{H} = \frac{H_0}{P + \gamma} + \frac{\beta}{P(P + \gamma)} = C_2 K_0(\omega r). \quad (14.72)$$

再将 (14.70) 式表示之条件代进 (14.72) 式,得

$$\frac{h_0}{P} = \frac{H_0}{P + \gamma} + \frac{\beta}{P(P + \gamma)} = C_2 K_0(\omega r_0). \quad (14.73)$$

由此得

$$C_2 = \frac{1}{K_0(\omega r_0)} \left[ \frac{h_0}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right]. \quad (14.74)$$

将 (14.74) 式表示之  $C_2$  代进 (14.72) 式,得

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{H_0}{P + \gamma} + \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \\ &+ \left[ \frac{h_0}{P} - \frac{H_0}{P + \gamma} - \frac{\beta}{P(P + \gamma)} \right] \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)}. \end{aligned} \quad (14.75)$$

为了求出  $H(r, t)$ , 对 (14.75) 式施行拉氏逆变换,即

$$\begin{aligned}
H(r, t) = & H_0 e^{-\gamma r} + \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-\gamma r}) \\
& + \frac{h_0}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{Pt} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \frac{dP}{P} \\
& - \frac{H_0}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{Pt} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \frac{dP}{P + \gamma} \\
& - \frac{\beta}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{Pt} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \frac{dP}{P(P + \gamma)}. \quad (14.76)
\end{aligned}$$

为了进行方程中包含的积分计算,利用图 14-1 所示的回路积分。由于  $\frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)}$  是有界函数,所以在图 14-1 的积分回路中,根据柯西定理:

$$\begin{aligned}
& \int_{BB'} + \int_{B'F} \\
& + \int_{FE} + \int_{C_A} \\
& + \int_{DC} + \int_{CA'} \\
& + \int_{A'A} + \int_{AB} \\
& = 0. \quad (15.77)
\end{aligned}$$

在大圆半径趋于无穷大和小圆半径趋于零的情况下,曲线  $BB'$ ,  $B'F$ ,  $CA'$ ,  $A'A$  上的积分为零。

在  $FE$  段上,假设

$$P = a\rho^2 e^{i\pi} - \gamma, \quad (14.78)$$

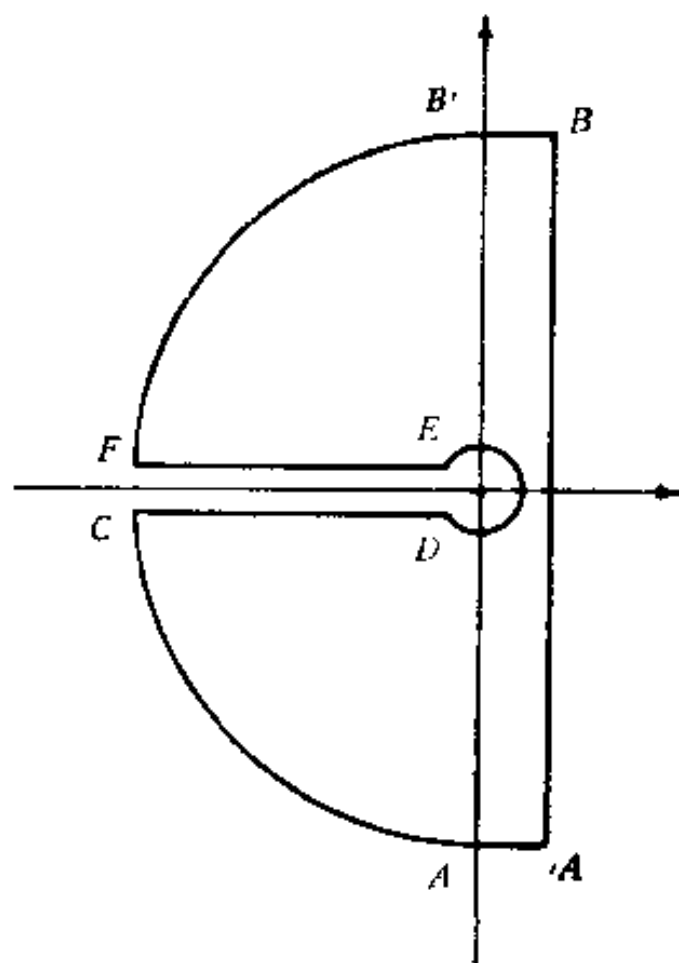


图 14-1 积分回路图

$$A = e^{Pt} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \frac{1}{P}, \quad (14.79)$$

$$\int_{FE} A dP = \int_{-\infty}^0 A dP$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-i}^{\infty} \sqrt{\frac{\gamma}{a}} e^{(a\rho^2 e^{i\pi} - \gamma)\tau} \frac{K_0(r\rho e^{\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{\frac{\pi}{2}i})} \times \frac{2a\rho e^{i\pi} d\rho}{a\rho^2 e^{i\pi} - \gamma} \\
&= - \int_{-i}^0 \sqrt{\frac{\gamma}{a}} e^{-(a\rho^2 + \gamma)\tau} \frac{K_0(r\rho e^{\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{\frac{\pi}{2}i})} \times \frac{2\rho d\rho}{\rho^2 + \frac{\gamma}{a}} \\
&\quad - \int_0^{\infty} e^{-(a\rho^2 + \gamma)\tau} \frac{K_0(r\rho e^{\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{\frac{\pi}{2}i})} \times \frac{2\rho d\rho}{\rho^2 + \frac{\gamma}{a}}; \quad (14.80)
\end{aligned}$$

在  $DC$  段上, 假设

$P = a\rho^2 e^{-i\pi} - \gamma$ , 则

$$\begin{aligned}
\int_{DC} AdP &= \int_0^{-\infty} AdP \\
&= \int_i^{\infty} \sqrt{\frac{\gamma}{a}} e^{-(a\rho^2 + \gamma)\tau} \frac{K_0(r\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})} \frac{2\rho d\rho}{\rho^2 + \frac{\gamma}{a}} \\
&= \int_i^0 \sqrt{\frac{\gamma}{a}} e^{-(a\rho^2 + \gamma)\tau} \frac{K_0(r\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})} \frac{2\rho d\rho}{\rho^2 + \frac{\gamma}{a}} \\
&\quad + \int_0^{\infty} e^{-(a\rho^2 + \gamma)\tau} \frac{K_0(r\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})} \frac{2\rho d\rho}{\rho^2 + \frac{\gamma}{a}}. \quad (14.81)
\end{aligned}$$

在 (14.80) 式和 (14.81) 式中, 令  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{a}}$ , 则

$$\begin{aligned}
&\int_{DC} AdP + \int_{FE} AdP \\
&= \int_{i\omega_0}^0 e^{-(a\rho^2 + \gamma)\tau} \frac{K_0(r\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})} \frac{2\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0} \\
&\quad + \int_0^{\infty} e^{-(a\rho^2 + \gamma)\tau} \frac{K_0(r\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})} \frac{2\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{-i\omega_0}^0 e^{-(a\rho^2+r)t} \frac{K_0(r\rho e^{\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{\frac{\pi}{2}i})} \frac{2\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0} \\
& - \int_0^\infty e^{-(a\rho^2+r)t} \frac{K_0(r\rho e^{\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{\frac{\pi}{2}i})} \frac{2\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0}. \quad (14.82)
\end{aligned}$$

在 (14.82) 式中

$$\begin{aligned}
& \int_{i\omega_0}^0 e^{-(a\rho^2+r)t} \frac{K_0(r\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})} \frac{2\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0} \\
& - \int_{-i\omega_0}^0 e^{-(a\rho^2+r)t} \frac{K_0(r\rho e^{\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{\frac{\pi}{2}i})} \frac{2\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0} \\
& = \int_{i\omega_0}^0 e^{-(a\rho^2+r)t} \left[ \frac{K_0(-r\rho i)}{K_0(-r_0\rho i)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{K_0(-r\rho i)}{K_0(-r_0\rho i)} \right] \frac{2\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0} = 0, \quad (14.83)
\end{aligned}$$

所以, (14.83) 式变为

$$\begin{aligned}
& \int_{FE} AdP + \int_{DC} AdP \\
& = 2 \int_0^\infty e^{-(a\rho^2+r)t} \left[ \frac{K_0(r\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})} \right. \\
& \quad \left. - \frac{K_0(r\rho e^{\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{\frac{\pi}{2}i})} \right] \frac{2\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0}. \quad (14.84)
\end{aligned}$$

参见文献 [36], 由贝塞尔函数公式知

$$\begin{aligned}
K_0(z e^{\pm \frac{\pi}{2}i}) &= \pm \frac{\pi i}{2} [-J_0(z) \pm iY_0(z)] \\
&= \mp \frac{\pi i}{2} [J_0(z) \mp iY_0(z)], \quad (14.85)
\end{aligned}$$

因而

$$\left. \begin{aligned}
K_0(r\rho e^{-\frac{\pi}{2}i}) &= \frac{\pi}{2} i[J_0(r\rho) + iy_0(r\rho)], \\
K_0(r\rho e^{\frac{\pi}{2}i}) &= -\frac{\pi}{2} i[J_0(r\rho) - iy_0(r\rho)], \\
K_0(r_0\rho e^{-\frac{\pi}{2}i}) &= \frac{\pi}{2} i[J_0(r_0\rho) + iy_0(r_0\rho)], \\
K_0(r_0\rho e^{\frac{\pi}{2}i}) &= -\frac{\pi}{2} i[J_0(r_0\rho) - iy_0(r_0\rho)].
\end{aligned} \right\} \quad (14.86)$$

由此可以推出

$$\begin{aligned}
& \frac{K_0(r\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{-\frac{\pi}{2}i})} - \frac{K_0(r\rho e^{\frac{\pi}{2}i})}{K_0(r_0\rho e^{\frac{\pi}{2}i})} \\
&= \frac{\frac{\pi i}{2} [J_0(r\rho) + iy_0(r\rho)]}{\frac{\pi i}{2} [J_0(r_0\rho) + iy_0(r_0\rho)]} \\
&\quad - \frac{-\frac{\pi i}{2} [J_0(r\rho) - iy_0(r\rho)]}{-\frac{\pi i}{2} [J_0(r_0\rho) - iy_0(r_0\rho)]} \\
&= \frac{2i[J_0(r_0\rho)y_0(r\rho) - J_0(r\rho)y_0(r_0\rho)]}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)}. \quad (14.87)
\end{aligned}$$

将(14.87)代入(14.84)式,得

$$\begin{aligned}
& \int_{FE} AdP + \int_{DC} AdP \\
&= 4i \int_0^\infty e^{-(\alpha\rho^2 + \gamma)\tau} \left[ \frac{J_0(r_0\rho)y_0(r\rho) - J_0(r\rho)y_0(r_0\rho)}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)} \right] \\
&\quad \times \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0} \quad (14.88)
\end{aligned}$$

在小圆上,设  $P = \varepsilon e^{i\varphi}$ , 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^\varepsilon} AdP = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} e^{\varepsilon e^{i\varphi}}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{\varepsilon e^{i\varphi} + \gamma}{a}}\right)}{K_0\left(r_0\sqrt{\frac{\varepsilon e^{i\varphi} + \gamma}{a}}\right)} \times \frac{i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K_0(\omega_0 r)}{K_0(\omega_0 r_0)} d\varphi = \frac{K_0(\omega_0 r)}{K_0(\omega_0 r_0)}. \quad (14.89)
\end{aligned}$$

考虑到 (14.88) 及 (14.89) 式, 则

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{Pt} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \frac{dP}{P} \\
& = \frac{K_0(\omega_0 r)}{K_0(\omega_0 r_0)} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(a\rho^2 + \gamma)t} \\
& \quad \times \left[ \frac{J_0(r_0\rho)y_0(r\rho) - J_0(r\rho)y_0(r_0\rho)}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)} \right] \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0}. \quad (14.90)
\end{aligned}$$

同理可求得:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{Pt} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \times \frac{dP}{P + \gamma} \\
& = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} e^{Pt} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \times \frac{dP}{P + \gamma} \\
& = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(a\rho^2 + \gamma)t} \\
& \quad \times \left[ \frac{J_0(r_0\rho)y_0(r\rho) - J_0(r\rho)y_0(r_0\rho)}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)} \right] \frac{d\rho}{\rho}. \quad (14.91)
\end{aligned}$$

式中的

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} e^{Pt} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \frac{dP}{P + \gamma} \text{ 计算如下:}$$

若令  $P = \varepsilon e^{i\varphi} - \gamma$ , 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 则上式变为

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} e^{Pt} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \times \frac{dP}{P + \gamma} \\
& = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} e^{(\varepsilon e^{i\varphi} - \gamma)t}
\end{aligned}$$



$$\times \frac{K_0\left(\sqrt{\frac{\varepsilon e^{i\varphi} - \gamma + \gamma}{a}} r\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{\varepsilon e^{i\varphi} - \gamma + \gamma}{a}} r_0\right)} \times \frac{i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi} - \gamma + \gamma}, \quad (14.92)$$

因 
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K_0(\sqrt{\varepsilon e^{i\varphi}/a} r)}{K_0(\sqrt{\varepsilon e^{i\varphi}/a} r_0)} = 1, \quad (14.93)$$

故

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} e^{P_1} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \times \frac{dP}{P + \gamma} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\gamma_1} d\varphi = e^{-\gamma_1}. \end{aligned} \quad (14.94)$$

将(14.94)代入(14.91)式,得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{P_1} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \frac{dP}{P + \gamma} \\ &= e^{-\gamma_1} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\alpha\rho^2 + \gamma)s} \\ & \quad \times \left[ \frac{J_0(r_0\rho)y_0(r\rho) - J_0(r\rho)y_0(r_0\rho)}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)} \right] \frac{d\rho}{\rho}. \end{aligned} \quad (14.95)$$

进而计算(14.76)式之最末项。参考以上的推演过程:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{P_1} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \frac{dP}{P(P + \gamma)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{P_1} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \left[ \frac{1}{\gamma P} - \frac{1}{\gamma(P + \gamma)} \right] dP \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{1}{\gamma} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{P_1} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \frac{dP}{P} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\gamma} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{P_1} \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} \frac{dP}{P + \gamma} \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{K_0(\omega_0 r)}{K_0(\omega_0 r_0)} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{(\alpha\rho^2 + \gamma)s} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \frac{J_0(r_0\rho)y_0(r\rho) - J_0(r\rho)y_0(r_0\rho)}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)} \right] \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0} \Bigg\} \\
& - \frac{1}{\gamma} \left\{ e^{-\gamma t} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(a\rho^2 + \gamma)t} \right. \\
& \times \left[ \frac{J_0(r_0\rho)y_0(r\rho) - J_0(r\rho)y_0(r_0\rho)}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)} \right] \frac{d\rho}{\rho} \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{14.96}$$

将(14.90), (14.95), (14.96)式代进(14.76)式,得

$$\begin{aligned}
H &= H_0 e^{-\gamma t} + \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \\
&+ h_0 \left\{ \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(a\rho^2 + \gamma)t} \right. \\
&\times \left[ \frac{J_0(r_0\rho)y_0(r\rho) - J_0(r\rho)y_0(r_0\rho)}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)} \right] \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0} \Bigg\} \\
&- H_0 \left\{ e^{-\gamma t} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(a\rho^2 + \gamma)t} \right. \\
&\times \left[ \frac{J_0(r_0\rho)y_0(r\rho) - J_0(r\rho)y_0(r_0\rho)}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)} \right] \frac{d\rho}{\rho} \Bigg\} \\
&- \frac{\beta}{\gamma} \left\{ \frac{K_3(\omega_0 r)}{K_3(\omega_0 r_0)} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(a\rho^2 + \gamma)t} \right. \\
&\times \left[ \frac{J_0(r_0\rho)y_0(r\rho) - J_0(r\rho)y_0(r_0\rho)}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)} \right] \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0} \Bigg\} \\
&- e^{-\gamma t} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(a\rho^2 + \gamma)t} \\
&\times \left[ \frac{J_0(r_0\rho)y_0(r\rho) - J_0(r\rho)y_0(r_0\rho)}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)} \right] \frac{d\rho}{\rho} \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{14.97}$$

在上式中,令

$$E(r, r_0, \rho) = \frac{J_0(r_0\rho)y_0(r\rho) - J_0(r\rho)y_0(r_0\rho)}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)}.$$

則(14.97)式变为

$$\begin{aligned}
 H = & H_0 e^{-\gamma t} + \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \\
 & + h_0 \left[ \frac{K_0(\omega_0 r)}{K_0(\omega_0 r_0)} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(a\rho^2 + \gamma)t} E(r, r_0, \rho) \right. \\
 & \times \left. \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0} \right] - H_0 e^{-\gamma t} \\
 & + \frac{2H_0}{\pi} \int_0^\infty e^{-(a\rho^2 + \gamma)t} E(r, r_0, \rho) \frac{d\rho}{\rho} \\
 & - \frac{\beta}{\gamma} \frac{K_0(\omega_0 r)}{K_0(\omega_0 r_0)} + \frac{2\beta}{\pi r} \int_0^\infty e^{-(a\rho^2 + \gamma)t} \\
 & \times E(r, r_0, \rho) \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + \omega_0} + \frac{\beta}{\gamma} e^{-\gamma t} \\
 & - \frac{2\beta}{\gamma \pi} \int_0^\infty e^{-(a\rho^2 + \gamma)t} E(r, r_0, \rho) \frac{d\rho}{\rho}.
 \end{aligned}$$

再整理上式得:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{\beta}{\gamma} + \left( h_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right) \frac{K_0(\omega_0 r)}{K_0(\omega_0 r_0)} \\
 & + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty E(r, r_0, \rho) e^{-(a\rho^2 + \gamma)t} \\
 & \times \left[ \frac{H_0}{\rho^2} - \frac{h_0}{\rho^2 + \omega_0} + \frac{\beta}{\gamma(\rho^2 + \omega_0)} - \frac{\beta}{\gamma \rho^2} \right] \rho d\rho.
 \end{aligned} \tag{14.98}$$

记住式中:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{K_1}{M_1 \mu_t} + \frac{K_2}{M_2 \mu_t};$$

$$a = \frac{KM}{\mu_t};$$

$$\beta = \gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{P + \gamma}{a}}, \quad \omega_0 = \sqrt{P/a};$$

$$E(r, r_0, \rho) = \frac{J_0(r_0\rho)y_0(r\rho) - J_0(r\rho)y_0(r_0\rho)}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)}.$$

## (二) 出水量公式的推导

$$\text{由于} \quad Q = 2\pi r KM \left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r_0}. \quad (14.99)$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r_0} &= \left( h_0 - \frac{\beta}{\gamma} \right) - \frac{\omega_0 K_1(\omega_0 r_0)}{K_0(\omega_0 r_0)} \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty E'(r, r_0, \rho) \big|_{r=r_0} e^{-(\alpha\rho^2 + \tau)\rho} \\ &\quad \times \left[ \frac{H_0}{\rho^2} - \frac{h_0}{\rho^2 + \omega_0} + \frac{\beta}{\gamma(\rho^2 + \omega_0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{\gamma\rho^2} \right] \rho d\rho. \end{aligned} \quad (14.100)$$

在(14.100)式中:

$$\begin{aligned} E'(r, r_0, \rho) \big|_{r=r_0} &= \frac{-\rho J_0(r_0\rho)y_1(r_0\rho) + \rho J_1(r_0\rho)y_0(r_0\rho)}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)} \\ &= \frac{\rho[J_1(r_0\rho)y_0(r_0\rho) - J_0(r_0\rho)y_1(r_0\rho)]}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)} \end{aligned}$$

因为

$$J_1(r_0\rho)y_0(r_0\rho) - J_0(r_0\rho)y_1(r_0\rho) = \frac{2}{\pi\rho r_0} \quad (14.101)$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad E'(r, r_0, \rho) \big|_{r=r_0} &= \frac{\rho}{J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)} \times \frac{2}{\pi\rho r_0} \\ &= \frac{2}{\pi r_0 [J_0^2(r_0\rho) + y_0^2(r_0\rho)]} \end{aligned} \quad (14.102)$$

将(14.100), (14.102)式代进(14.99)式, 便得流量的计算公式

$$Q = 2\pi KM r_0 \left( \frac{\beta}{\gamma} - h_0 \right) \omega_0 \frac{K_1(\omega_0 r_0)}{K_0(\omega_0 r_0)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{\pi^2 r_0} \int_0^{\infty} e^{-(s\rho^2 + \gamma)s} \\
& \times \frac{\left[ \frac{H_0}{\rho^2} - \frac{h_0}{\rho^2 + \omega_0} + \frac{\beta}{\gamma(\rho^2 + \omega_0)} - \frac{\beta}{\gamma\rho^2} \right]}{J_0^2(r_0\rho) + Y_0^2(r_0\rho)} \rho d\rho. \quad (14.103)
\end{aligned}$$

## 第十五章 “割离井”公式在 生产实践中的应用问题

本章之前介绍了渗流研究的主要解析方法,求得一系列典型课题的计算公式,列举了算例,主要目的在于说明方法及理论公式本身。在本章将通过简述圆形隔水边界中割离井公式在不同课题中的应用,举示本书中渗流计算公式——作者完成的或引证他人的——在生产实践中应用的可能方向及广阔前景。

### 一、“割离井”公式用于测算水文地质参数

测算水文地质参数乃是水文地质工作者和地下水开发利用工作者常需完成的任务。本章介绍如何利用第七章中推得的公式及相应的思路测算这些参数。

#### 1. 计算的具体步骤

在第七章中我们推得公式(7.58)及(7.60),亦即

$$H = h_0 + \left\{ -\pi S_0 \sum_{n=1}^4 D_n h_n e^{-\lambda_n^2 \beta t} \right\}, \quad (15.1)$$

$$Q = 4\pi K h_0 S_0 \sum_{n=1}^4 B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t}. \quad (15.2)$$

回顾在第七章中的说明,在上式中

$$D = \frac{J_0(\lambda_n x_0) J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)}, \quad (15.3)$$

$$B = \frac{J_1^2(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n x_0) - J_1^2(\lambda_n)}, \quad (15.4)$$

$$h_n = h(\lambda_n x) = J_0(\lambda_n x) y_1(\lambda_n) - J_1(\lambda_n) y_0(\lambda_n x). \quad (15.5)$$

$J_0, J_1$ ——第一类零阶和一阶贝塞尔函数;

$Y_0, Y_1$ ——第二类零阶和一阶贝塞尔函数;

$\lambda_n$ ——贝塞尔方程的特征值,可由方程式

$$J_0(\lambda_n x_0) y_1(\lambda_n) - y_0(\lambda_n x_0) J_1(\lambda_n) = 0 \quad (15.6)$$

求出。 $\lambda$  的角注 ‘ $n$ ’ 表示在级数中所取 ‘ $\lambda$ ’ 值的项数,在我们公式中取其四项,亦即  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , 就足够精确了。

$$x_0 = \frac{r_0}{R_0}, \quad x = \frac{r}{R_0},$$

$e$ ——自然对数之底,其值为 2.71828;

$t$ ——抽水延续的时间,可取昼夜或日计。

$$\beta = a/R_0^2 \quad (15.7)$$

$$a = Kh_p/\mu \quad (15.8)$$

$a$ ——水位传导系数,它的因次是  $L^2/T$ , 单位可用米<sup>2</sup>/日,因为  $\beta = a/R_0^2$ , 所以  $\beta$  的因次为  $L^2/T \cdot L^2 = T^{-1}$ , 作者建议将  $\beta$  称作“渗流扩展系数”,单位可用 1/日;

$K$ ——渗透系数,米/日;

$\mu$ ——给水度;

$h_p$ ——平均水深,也就是浸润线以下的含水层的平均厚度,以米计;

其余符号如图 7-2 所示。

将 (15.2) 式改写为

$$K = \frac{Q}{4\pi K h_0 S_0 \sum_{n=1}^4 B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t}}. \quad (15.9)$$

(15.1) 式和 (15.9) 式即为求解参数的联立方程。

通过非稳定抽水试验,可以测得在某个  $t$  时刻井的取水半径  $R_0$  值,相应的出水量  $Q$  值,井水位  $h_0$ , 降深  $S_0$  及距抽水井  $r$  处的水位  $H$  值。有了这些数值,便可代入 (15.1), (15.9) 中,解出  $\beta$ ,

$K$ , 进而推算出  $a$  和  $\mu$ , 其具体步骤如下:

(1) 根据已知的

$$x_0 = \frac{r_0}{R_0}, \quad x = \frac{r}{R_0}$$

值, 应用有关图表查出相应的  $\lambda_s, D_s h_s$  值, 当然  $D_s h_s$  也可以不用图表而直接计算, 对此可参看本节例题;

(2) 将已知的  $h_0, S_0, D_s h_s, \lambda_s$  以及时间  $t$  值代入 (15.1) 式;

(3) 解出该式中仅存的未知数  $\beta$  值. 为此, 可用试算法, 亦即设取若干个不同的  $\beta$  值, 求得对应的  $H$  值, 然后作出 “ $\beta \sim H$  关系曲线”, 再由实测的  $H$  值查出相应的  $\beta$  值;

(4) 应用  $B_s \sim x_0$  关系表或曲线, 查取对应于已知  $x_0$  值的  $B_s$  值;

(5) 将已知的  $Q, h_0, S_0, B_s, \lambda_s$  以及由 (15.1) 式求出的  $\beta$  值代入 (15.9) 中, 从而求出尚存的唯一的未知数——渗透系数  $K$  值;

(6) 由于

$$\beta = \frac{Kh_p}{\mu} / R_0^2 = \frac{a}{R_0^2},$$

所以  $a = \beta R_0^2$ . (15.10)

因而, 在将  $R_0$  和  $\beta$  值代入 (15.10) 式之后, 便可求出传导系数  $a$  值;

(7) 由于  $a = \frac{Kh_p}{\mu}$

所以,  $\mu = \frac{Kh_p}{a} = \frac{Kh_p}{\beta R_0^2}$  (15.11)

故将已知的  $K, h_p, a$  值或  $\beta, R_0$  值代入 (16.11) 式中便可求出给水度  $\mu$  值.

完成这些步骤之后则所有的渗透参数  $a, K, \mu, \beta$  都被求出来了.



## 2. 算例

有一潜水含水层,其厚度  $H_0 = 20$  米, 试验井穿透含水层到达不透水底板。井径 2 米,亦即  $r = 1$  米; 在该井上进行定落程的抽水试验,并将水位降  $S_0$  固定为 6 米,从而  $h_0 = H - S_0 = 14$  米。

在抽水试验进行到  $t = 2$  昼夜时,观察到水位变动刚刚波及到距主井 200 米的观测孔中,而在距主井 10 米,亦即  $r = 10$  米的观测孔内此刻水位下降 2.815 米,或即

$$H = 20 - 2.815 = 17.185 \text{ 米,}$$

这时井的出水量  $Q = 631.235$  米<sup>3</sup>/日。

根据上述抽水试验资料计算渗透系数如下。

已知资料计有:

$t = 2$  日,  $H_0 = 20$  米,  $S_0 = 6$  米,  $h_0 = 14$  米,  $r = 10$  米,  $H = 17.185$  米,  $Q = 631.235$  米<sup>3</sup>/日。并将  $t = 2$  日时候的水位扩展远度 200 米定为取水半径或即“准隔水边界”的半径。即

$$R_0 = 200 \text{ 米}$$

应用这些资料根据公式 (15.1), (15.8) 计算,

先求出

$$x = \frac{r}{R_0} = \frac{10}{200} = 0.05,$$

$$x_0 = \frac{r_0}{R_0} = \frac{1}{200} = 0.005,$$

据此,由表 7-1 查出相应于  $x_0 = 0.005$ ,  $x = 0.05$  的  $\lambda_n$ ,  $D_n h_n$  及  $B_n$  值列入表 15-1 中

将已知诸值代入公式 (15.1), 即

$$H = h_0 + \left\{ -\pi S_0 \sum_{n=1}^4 D_n h_n e^{-\lambda_n^2 \beta t} \right\}$$

再设取若干  $\beta$  值,用试算法求出相应于实测  $H$  的  $\beta$  值,进而依据该  $\beta$  值算出所求参数。

表 15-1  $\lambda_n$ ,  $D_n h_n$  及  $B_n$  值表

$\lambda_1$	0.667	$D_1 h_1$	-0.1557	$B_1$	0.1104
$\lambda_2$	4.214	$D_2 h_2$	-0.0309	$B_2$	0.0210
$\lambda_3$	7.446	$D_3 h_3$	-0.0220	$B_3$	0.0150
$\lambda_4$	10.664	$D_4 h_4$	-0.0181	$B_4$	0.0134

具体进行如下:

(1) 设  $\beta_1 = 0.00425$ , 则

$$\begin{aligned}
 H &= 14 + \left\{ -18.8496 \left[ \frac{-0.1557}{e^{0.887774 \times 0.00425}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{-0.0309}{e^{35.3156 \times 0.00425}} + \frac{-0.0220}{e^{110.98533 \times 0.00425}} + \frac{-0.0181}{e^{227.2712 \times 0.00425}} \right] \right\} \\
 &= 14 + \left\{ -18.8496 \left[ \frac{-0.1557}{1.004} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{-0.0309}{1.163} + \frac{-0.0220}{1.6025} + \frac{-0.0181}{2.627} \right] \right\} \\
 &= 17.832 \text{ 米,}
 \end{aligned}$$

即  $H = 17.832 \text{ 米} > 17.185 \text{ 米}$  实测值.

(2) 再设一个比较大的  $\beta$  值, 令  $\beta = 0.0425$ , 则

$$\begin{aligned}
 H &= 14 + \left\{ -18.8496 \left[ \frac{-0.1557}{e^{0.0378}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{-0.0309}{e^{1.5094}} + \frac{-0.0220}{e^{4.7126}} + \frac{-0.0181}{e^{9.659}} \right] \right\} \\
 &= 14 + \left\{ -18.8496 \left[ \frac{-0.1557}{1.039} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{-0.0309}{4.524} + \frac{-0.0220}{5.160} + \text{略} \right] \right\} \\
 &= 16.953 \text{ 米,}
 \end{aligned}$$

即  $H = 16.953 < 17.185 \text{ 米}$  实测值.

看来,差值又从相反的方向增大,故知实际的 $\beta$ 值应在0.004到0.0425之间。

(3) 设令 $\beta = 0.007$ , 则

$$\begin{aligned} H &= 14 + \left\{ -18.8496 \left[ \frac{-0.1557}{e^{0.889778 \times 0.007}} + \frac{-0.0309}{e^{35.5136 \times 0.007}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{-0.0220}{e^{110.88583 \times 0.007}} + \frac{-0.0181}{e^{227.2712 \times 0.007}} \right] \right\} \\ &= 14 + \{-18.8496 \times [-0.192686]\} \\ &= 17.632 \text{ 米,} \end{aligned}$$

即 $H = 17.632$ 米 $> 17.185$ 米之实测值。

(4) 设令 $\beta = 0.01$  则

$$\begin{aligned} H &= 14 + \left\{ -18.8496 \left[ \frac{-0.1557}{e^{0.008898}} + \frac{-0.0309}{e^{0.356156}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{-0.0220}{e^{1.108858}} + \frac{-0.0181}{e^{2.272712}} \right] \right\} \\ &= 17.489 \text{ 米,} \end{aligned}$$

$H = 17.489$ 米 $> 17.185$ 米之实测值,但已相当接近。

(5) 再设 $\beta = 0.02$ , 则得

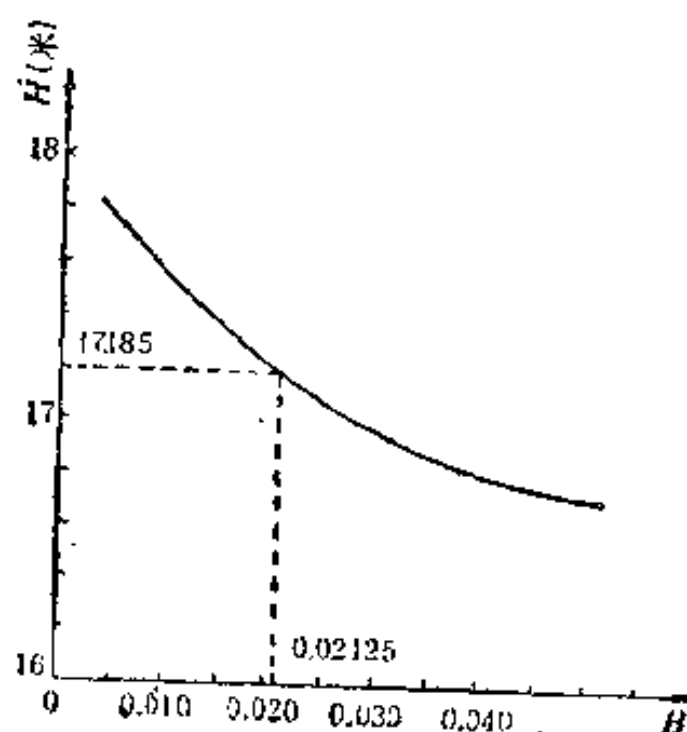


图 15-1  $\beta$ - $H$  关系曲线

$H = 17.213$  米  $> 17.185$  米之实测值,已经十分接近。

至此,我们已经得到了大于和小于实测水位“17.185 米”之一系列  $H$  值,据此可以作  $\beta \sim H$  关系曲线如图 15-1 所示。

在该图上,当  $H = 17.185$  米时,沿着箭头所指的方向反查出对应之  $\beta$  值为

$$\beta = 0.02125$$

求出  $\beta$  之后,按照‘1’中介绍的步骤再用公式 (15.9) 即

$$K = \frac{Q}{4\pi h_0 \sum_{n=1}^4 B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t}}$$

将已知值

$t = 2$  日,  $h_0 = 14$  米,  $S = 6$  米,  $Q = 631.235$  米<sup>3</sup>/日,  $\beta = 0.02125$  1/日。

以及表 (15-1) 中所列之相应的  $\lambda_n$ ,  $B_n$  值代进 (15.9) 式中, 则可求出  $K$  值, 亦即

$$\begin{aligned} K &= \frac{Q}{4\pi h_0 S_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t}} \\ &= \frac{631.235}{4 \times 3.1416 \times 14 \times 6 \times 0.1025} \end{aligned}$$

即得

$$K = 5 \text{ 米/日,}$$

$$\text{因} \quad \beta = \frac{Kh_F}{\mu R_0^2} = \frac{a}{R_0^2},$$

$$\text{故} \quad a = BR_0^2 = 0.02125 \times 200^2 = 850 \text{ 米}^2/\text{日}.$$

$$\text{又因} \quad a = \frac{Kh_F}{\mu},$$

$$\text{从而} \quad \mu = \frac{Kh_F}{a} = \frac{5 \times 17}{850} = \frac{85}{850} = 0.1,$$

至此,则全部的渗透参数都被求出来了;

$K = 5$  米/日,  $\mu = 0.1$ ,  $a = 850$  米<sup>2</sup>/日  $\approx 8.5 \times 10^4$  米/日,  
 $\beta = 0.02125 = 2.125 \times 10^{-2}$ /日。

从算例可以看出,借助辅助图表用该方法整理资料进行计算,并无艰深困难的数学问题,只要注意技巧,按部就班地进行,计算过程也不复杂。如有包含“e”键的电子计算器相助,则尤感轻松,一组资料只要几个小时就可算出。即使在  $x$  和  $x_0$  值不能从表中直接查取的情况下,为了避免查图或求插值所造成的误差,而需直接用公式计算  $D_n$ ,  $h_n$ ,  $B_n$  时,也并不十分繁难!

### 3. 割离井抽水试验的特殊要求

顺便介绍一下使用“割离井”确定渗流参数时对于抽水试验的特殊要求。

(1) 最主要的特点是抽水试验为定水位的,即抽水降深  $S_0$  保持不变,而出水量却是变动的。

(2) 抽水试验一定要有观测孔,而且最少要两个,为了测得最大的降深从而提高计算  $H$  的精度,用于观测水位  $H$  的观测孔应距主井较近,例如 50 米以内;而另一个观测取水半径  $R_0$  的观测孔应当较远一些,以保证水位降波及  $R_0$  之前,能够在水位观测孔中观测到明显的水位下降值。

但该孔也不要太远,以便排除可能实际存在的某种边界的干扰,同时避免抽水时间过长而使非稳定抽水试验的价值降低。为此,应使  $R_0$  明显地小于一般所说的影响半径的经验数值。

(3) 由于在该法的计算中,水位  $H$  值,波及时间  $t$  值,以及井的半径  $r_0$  值均处于十分敏感的地位,因此要求对它们的观测尽量精确。

## 二、在资源评价中利用“割离井” 公式计算均布井群的开采能力

开发地下水的井群,尤其是排灌井群,一般都规模较大,井群

数目较多,实际形成井网。为了控制灌溉面积,合理开发水源,在分布面积较广的潜水含水层中,井群中的井孔大都近乎均匀分布。图 15-2、图 15-3 所示的是两种比较理想的情况;前者井孔呈方形布置,而后者井孔呈梅花状。

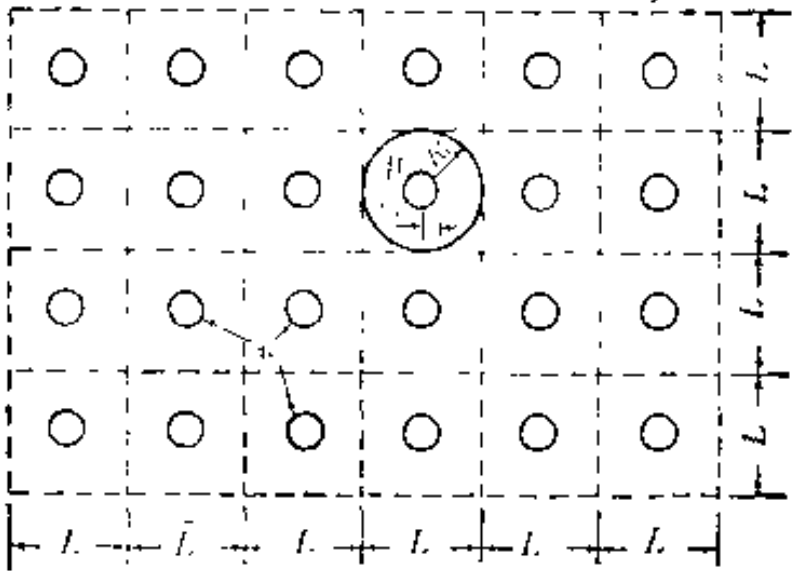


图 15-2 方形布井井群示意图

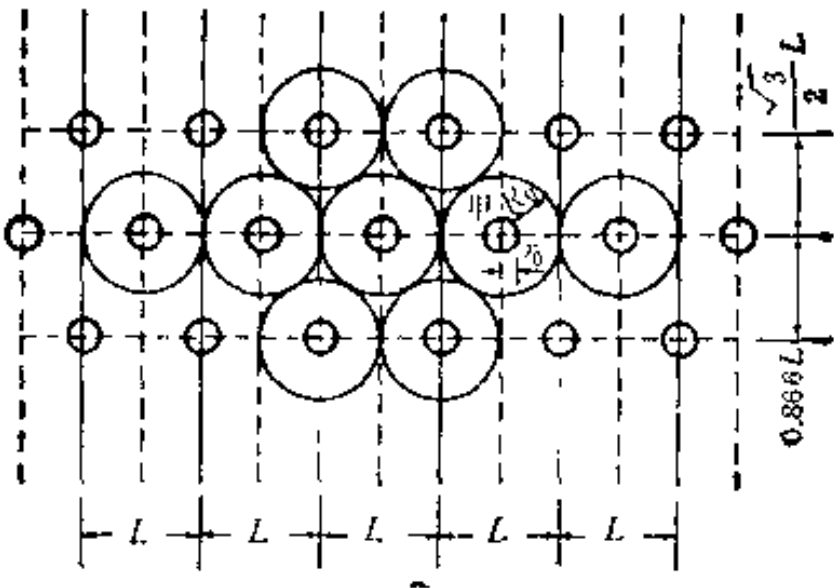


图 15-3 梅花形布井井群示意图

已如在第七章中所述,若这些井以大致相等的降深同时较长时期的抽水,如象抗旱季经常出现的那样,则这种运行结果反映在渗流特性方面,便造成井的取水范围不断扩大,水位降落漏斗不断伸展,直使相邻井的水位降落曲线相接,并在相接处——如图 7-1

所示的  $A$  点——出现“分水岭”。在分水岭断面两边的水只流入各自一边的井中而不互相穿越。

在分水岭形成的同时，井的工作也进入干扰状态，其结果井的取水区不但不能继续扩大，而且由于水位从分水岭开始下降，含水层厚度变薄，地下水的蓄储量被不断开采。如果补给的累计量（降水入渗，人工补渗，灌溉回归入渗等）能够补偿开采量，则水位又将得到恢复。

从如上的分析可以发现：在上述条件下工作的井群中的每个井，实际上可以被当作以分水岭周界为隔水边界割离出来的单井，这就是“割离井”的实质。

所谓“割离井法”计算均布井群的开采能力，就是在需要评价的面积上（或按水文地质条件分小区的面积上）均匀布井，然后从井群中选出典型井作为“割离井”来研究，从而可以利用笔者提出的“割离井”法公式，将已知的参数即给水度  $\mu$ ，渗透系数  $K$ ，含水层厚度  $H_0$ ，代进设计的  $S_0$  和取水半径  $R_0$ （周界半径）及开采时间  $t$ ，

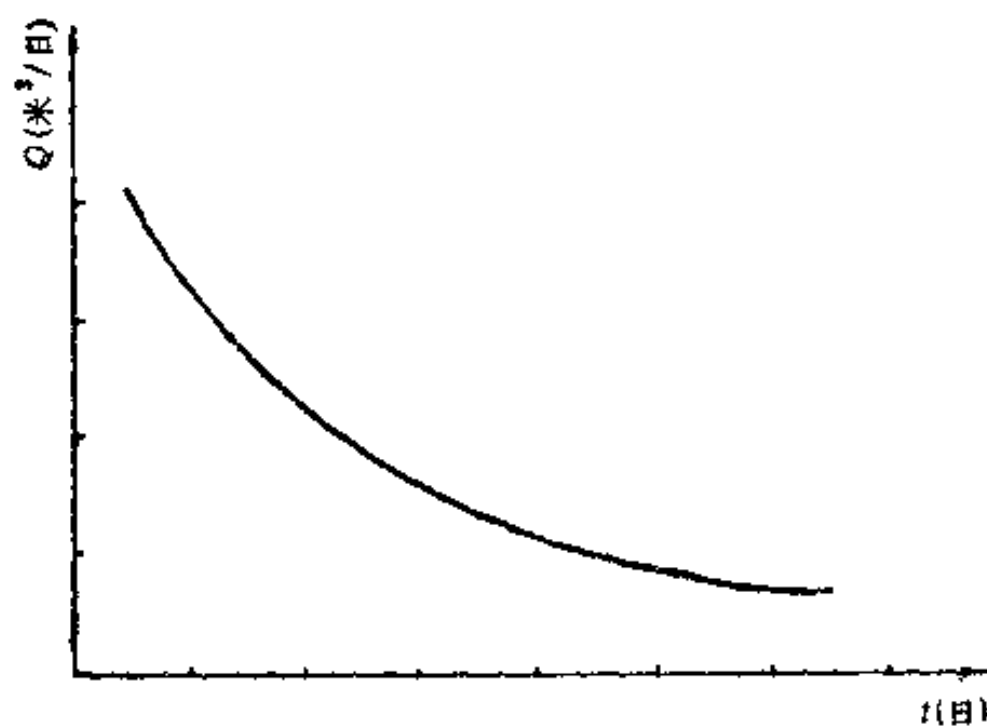


图 15-4 出水量变化图

等，从而算出该单井（典型井）在任一时刻的出水量及出水量过程线，如图（15-4）所示。

单井的出水量乘以井数，便得到井群的总开采能力。而图中  $Q \sim t$  曲线与时间座标所包之面积，即为该井在  $t$  时间内抽出的总水量  $V_{\text{井}}$ ，而井群在  $t$  时内抽出的水量  $V_{\text{井}}$  等于井数乘以  $V_{\text{井}}$ ，即

$$V_{\text{井}} = n \cdot V_{\text{井}}. \quad (15.12)$$

为了求得“隔离井”在  $t$  时内开采的全部水量，也可推导出相应的公式直接计算，而不必象上面所说的那样，利用出水量过程线求积的办法。

为此，可写出公式 (15.2)，即

$$Q = 4\pi K h_0 S_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 \beta t}.$$

将上式从 0 至  $t$  积分

$$V_{\text{井}} = \int_0^t Q dt = 4\pi K h_0 S_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^t e^{-\lambda_n^2 \beta t} dt,$$

即

$$V_{\text{井}} = \frac{4\pi K h_0 S_0}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 \beta t}). \quad (15.13)$$

在向 (15.13) 式代进拟定的开采时间之后，便可算出单井的开采量  $V_{\text{井}}$ ，而  $n$  个井的总开采量仍按 (15.12) 式计算。

〔例〕为了发展井灌的需要，计划从面积为 400 平方公里的含水层中开采地下水，含水层厚度（系指充水部分） $H_0 = 20$  米，渗透系数  $K = 5$  米/日，给水度  $\mu = 0.1$ 。第一方案拟用大口井开发<sup>1)</sup>，井的半径  $r_0 = 1$  米，抽水时井内降深  $S_0 = 6$  米，连续 30 天抽水，试计算井群的开采量。

〔解〕：应用割离井法，在计算中设割离井的取水半径

$$R_0 = 200 \text{ 米}$$

1) 此处所说采用大口井，是为了  $r_0$  取较大值，其实在实际工作中未必采用大口井，也可以选取小口径竖井，如果为了计算的方便，可设取一个较大假设的  $r_0$ ，并以该  $r_0$  处的水位  $S$  作为  $S_0$ ，进行计算，在此不会有严重的错误。



表 15-2 用割离井法评价可开采资源计算表

s	$\frac{B_n}{\lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 \rho t})$				$\sum_{n=1}^s \frac{B_n}{\lambda_n^2} \times (1 - e^{-\lambda_n^2 \rho t})$	$\frac{4\pi K h_0 S_0}{\beta}$	$V_M = (7) \times (6)$ 米 <sup>3</sup>	平均水位降 $\bar{S} = V_M / f \cdot \mu$ (米)
(日)	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0.002335	0.000372	0.000187	0.000107	0.003001	248370.62	745.36	0.0593
2	0.004648	0.000627	0.000245	0.000117	0.005637	248370.62	1400.07	0.1114
5	0.011457	0.001003	0.000270	0.000118	0.012848	248370.62	3191.07	0.2539
10	0.022385	0.001155	0.000271	0.000118	0.023929	248370.62	5943.26	0.4729
15	0.032809	0.001178	0.000271	0.000118	0.034376	248370.62	8537.99	0.6794
20	0.042751	0.001182	0.000271	0.000118	0.044322	248370.62	11008.28	0.8760
25	0.052234	0.001182	0.000271	0.000118	0.053805	248370.62	13363.58	1.0634
30	0.061280	0.001182	0.000271	0.000118	0.062851	248370.62	15610.34	1.2422

(即取井距为 400 米), 据此用已知的有关资料, 列出具体的计算过程如表 15-2 所示。

从表 15-2 计算的结果可以看出, 采用上述的布井方案, 估计开采 30 天可得到的水量按 (15.12) 式

$$\begin{aligned} V_{\text{总}} &= n \cdot V_{\text{单}} = \frac{F}{f} V_{\text{单}} \\ &= \frac{400(1000 \times 1000)}{200^2 \cdot \pi} \times 15610.34 \\ &\approx 5000 \text{ 万米}^3. \end{aligned}$$

式中  $F$ ——布井总面积, 在本例中为 400 平方公里;

$f$ ——单井取水面积, 单位为米<sup>2</sup>。

在表中末栏中列出了平均水位降值, 以便和要求控制的水位相比较, 并根据条件进行评价。

### 三、“割离井”法用于井群布局设计

参看图 15-2、图 15-3 及图 7-1, 按照割离井法介绍的思路, 可以把井距为  $L$  的井群的工作状态, 分解为处于影响半径(取水半径)  $R_0 = 0.564L$  (方形布井, 参见公式(7.2))或  $R_0 = 0.525L$  (梅花形布井, 参见公式(7.3))的割离边界中工作的单井来研究。因此, 在设计井群时, 我们可以利用公式 (7.58), (7.60) 按如下进行井群布局设计:

1. 设取一个井距  $L$  值, 并依照公式 (7.2) 或 (7.3) 求出转换的取水半径  $R_0$ 。

2. 在已知含水层厚度  $H_0$ , 渗透系数  $K$ , 给水度  $\mu$  及井的设计半径  $r_0$  的情况下, 设取一个井中水位降  $S_0$  值。

3. 将上述已知值代进公式 (7.58) 设计不同时期, 不同地点的水位值, 其过程参见第七章算例, 从而可得出表 7-5 及图 7-3 所列表的水位~时间~地点关系成果, 这些成果对于研究排水井群的布局是特别需要的, 因为对排水来说, 需要知道距井不同远度上不

同时刻的排水效果。因此

4. 如果由‘3’所得排水效果符合要求，则可认定所选择的井中水位降  $S_0$  值及井距  $L$  值是合适的，并以此布井。

如果计算表明的排水效果不符合要求，则需另行选用  $L$  值或  $S_0$  值，或调整其中之一重新进行演算直至符合要求为止。

5. 出水量  $Q$  的计算，对于设计灌溉井，供水井是特别重要的，在选定  $S_0$  及  $R_0$  后可按公式 (7.60) 计算  $Q$ ，像在第七章算例那样，在求出不同时期的流量之后，可与任务书的要求相对比，若不满足，则可调整  $S_0$ ， $R_0$  进行重算，直至达到要求，此刻的  $R_0$ ，或者说相应的  $L$  便是设计的井距，便可以按此布井。

顺便指出，井群布局是一个综合技术，经济，环境条件的选优过程，本文所述只涉及该过程中需要进行的渗流计算问题。

## 参 考 文 献

- [1] Коллинз Р. 1964, Течения жидкостей через пористые материалы (Перевод с английского Р.Л. Салганика), Издательство «МИР», М.
- [2] Леибензон Л. С., 1947, Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Огиз Гостехиздат. стр. 11
- [3] Бондаренко Н.Ф., 1973, Физика движения подземных вод. Гидрометеониздат, Ленинград. стр.5
- [4] Scheidgger A.E. 著, 1984. 多孔介质中的渗流物理 (王鸿勋等译), 石油工业出版社, p. 91, 521.
- [5] Irmaу S., 1958, On the theoretical derivation of darcy and forchheimer formulas. *Trans. of Am. Geophys. Union*, **39**, No.4, p. 702—707.
- [6] Шестаков В.М., 1979, Динамика подземных вод. Изд-во Моск. М. ун-та. стр. 207.
- [7] Мироненко В. А., 1983, Динамика подземных вод. “Недра”, М.
- [8] Копляков Н.С., Гливер Э.Б., Смирнов М.М., 1962, Дифференциальные уравнения математической физики. Государственное издательство физико-математической литературы. М.
- [9] Spiegel M.R., 1979, 高等数学的理论和习题 (谢国瑞等译), 上海科学技术出版社.
- [10] 南京大学数学系计算数学专业编, 1979, 偏微分方程, 科学出版社.
- [11] Камке Э. (Dr. E. Kamke), 1965, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. перевод с Немецкого С. В. Фомина. “Наука”, М. стр. 405, 248.
- [12] Романовский П.И., 1961, Ряды фурье—теория поля—аналитические и специальные функции—преобразование лапласа. Государственное издательство физико-математической литературы. М., стр. 295.
- [13] 李佩成、赵尔慧主编, 1981, 地下水利用, 水利电力出版社.
- [14] Паплаускас А.Б., 1966, Тригонометрические ряды. “Наука”, М.
- [15] 樊映川等编, 1958, 高等数学讲义(下册), 人民教育出版社.
- [16] Miller K.S., 1953, Partial differential equations in engineering problems. Prentice-hall, Book Co. Inc.
- [17] Двайт Г.Б., 1964 Таблицы интегралов и другие математические формулы (Левя Н.В.Перевод с Английского). “Наука”, М. стр. 200, 207, 18—19, 99, 164, 166, 186, 169.
- [18] Араманович И. Г. и Левин В. И. 1964, Уравнения математической физики. Изд-во “Наука”, стр. 159.
- [19] 南京工学院数学教研组编, 1978, 积分变换, 人民教育出版社.

- [20] Дёч Г., 1965, Руководство к практическому применению преобразования лапласа. «Наука», М.
- [21] Батт М. 著, 1976, Землеуе математическое (郑沼真译), 科学出版社, pp. 284, 297, 139, 159, 297, 32.
- [22] 卡曼 T.V., 比奥 M.A., 1959, 工程中的数学方法(高庆琳等译), 科学出版社, p.46.
- [23] 王竹溪、郭敦仁, 1979, 特殊函数概论, 科学出版社, p. 405, 41, 406.
- [24] Watson G.N., 1953, A treatise on the theory of Bessel Functions. New York, p. 61, 77.
- [25] Вотсон Г.Н., 1949, Теория беселевых функций. Изд. ИЖЛ М., стр. 71.
- [26] Грей Э., Мэтьюз Г.Б., 1953, Функции бесселя и их приложения к физике и механике. Изд. ИЖЛ М., стр. 32, 167.
- [27] 列别捷夫 Н.Н., 1957, 特殊函数及应用 (张燮译), 高等教育出版社, p. 124, 125, 148, 153.
- [28] Кузнецов Д.С., 1965, Специальные функции. «Высшая школа». М., стр. 10, 113, 148, 157.
- [29] 南京工学院编, 1979, 数学物理方程与特殊函数, 人民教育出版社, p.99.
- [30] Андре Анго, 1965, Математика для электрон-радиоинженеров. «Наука», М., стр. 374, 384, 386, 397, 396, 387.
- [31] Канторович М. М., 1964, Операционные исчисления и процессы в электрических цепях, «Наука», М.
- [32] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., 1964, Специальные функции формулы и графики таблицы. «Наука», М., стр. 222.
- [33] Чистова Э. А., 1958, Таблицы функций бесселя от действительного аргумента и интегралов от них. Издат. Академии наук СССР. М.
- [34] 中国科学院沈阳计算技术研究所等编, 1976, 电子计算机常用算法, 科学出版社, p. 447.
- [35] Моррис Маскет, 1949, Течение однородных жидкостей в пористой среде (Перевод М.А. Геймана). Гостоптехиздат. М., стр. 521, 35.
- [36] Карслоу Г. и Егер Д., 1964, Теплопроводность твердых тел (Перевод А.А. Померанцева). «Наука», М., стр. 203, 479.
- [37] 梁昆淼编, 1960, 数学物理方法, 人民教育出版社, p. 54, 66.
- [38] Miler K.S., 1957, 工程中的偏微分方程(张致中译), 上海科学技术出版社, p. 115, 102.
- [39] Grahville W.A. 等, 1951, 微积分学(周梦麟译), 龙门联合书局, p.374.
- [40] Камке Е., 1965, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям (Перевод с немецкого С.В. Формина). «Наука», М., стр.38.
- [41] Francis B.Hildebrand, 1962, Advanced calculus for applications. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, p.250.
- [42] Кристиан Н. 1961, Подземная гидравлика, том I. «Гостоптехиздат»

М., стр. 272.

- [43] Фукс Б.А. и Шабат Б.В., 1964, Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. "Наука", М., стр. 184.

[ G e n e r a l   I n f o r m a t i o n ]

书名 = 地下水非稳定渗流解析法

作者 =

页数 = 3 3 3

S S 号 = 0

出版日期 =

封面  
书名  
版权  
前言  
目录  
正文