

# **Camada equivalente aplicada ao processamento e interpretação de dados de campos potenciais**

Vanderlei C. Oliveira Jr.

2016



**Observatório  
Nacional**



# Integral de continuação para cima

Vanderlei C. Oliveira Jr.

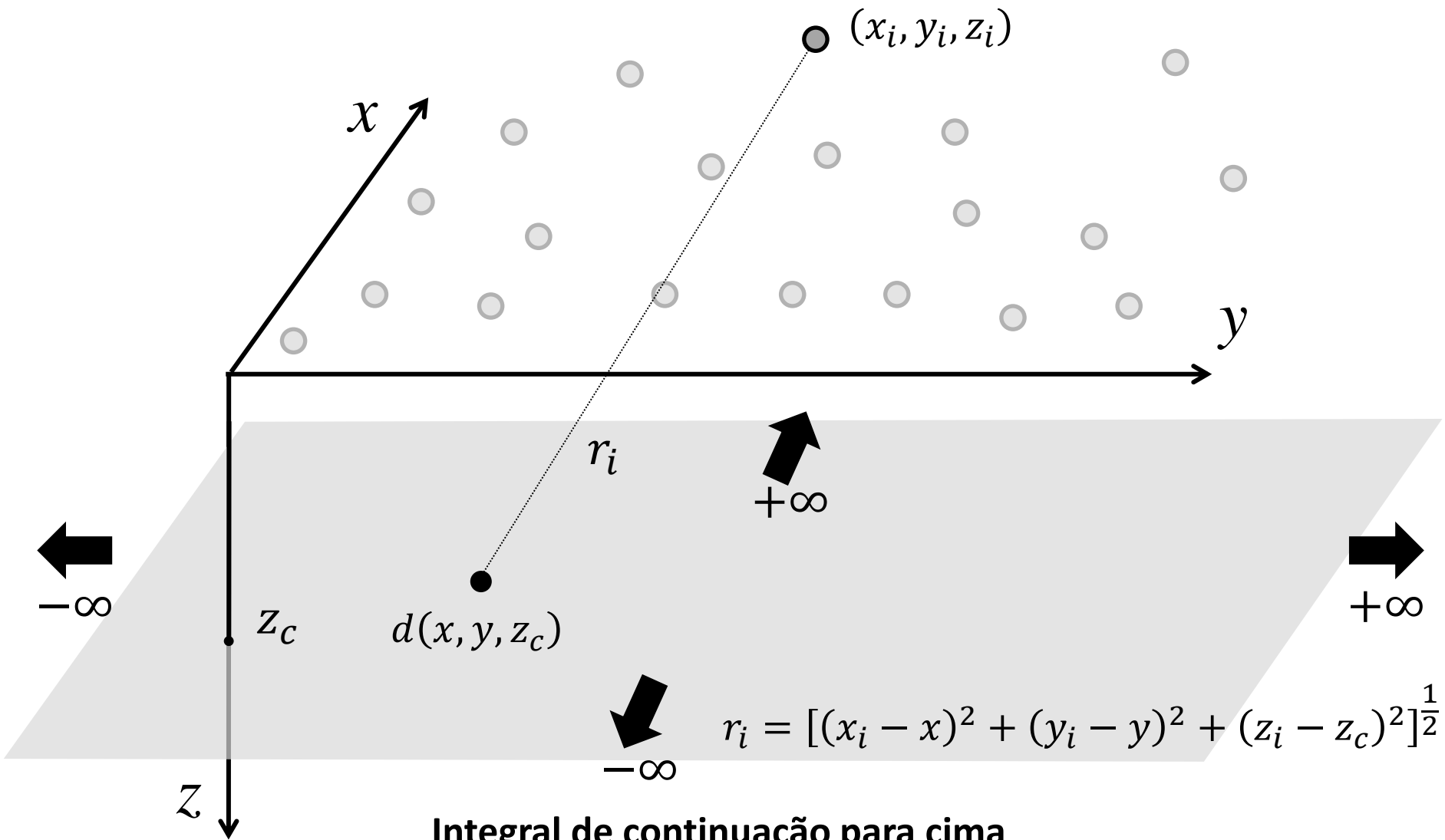
2016



Observatório  
Nacional

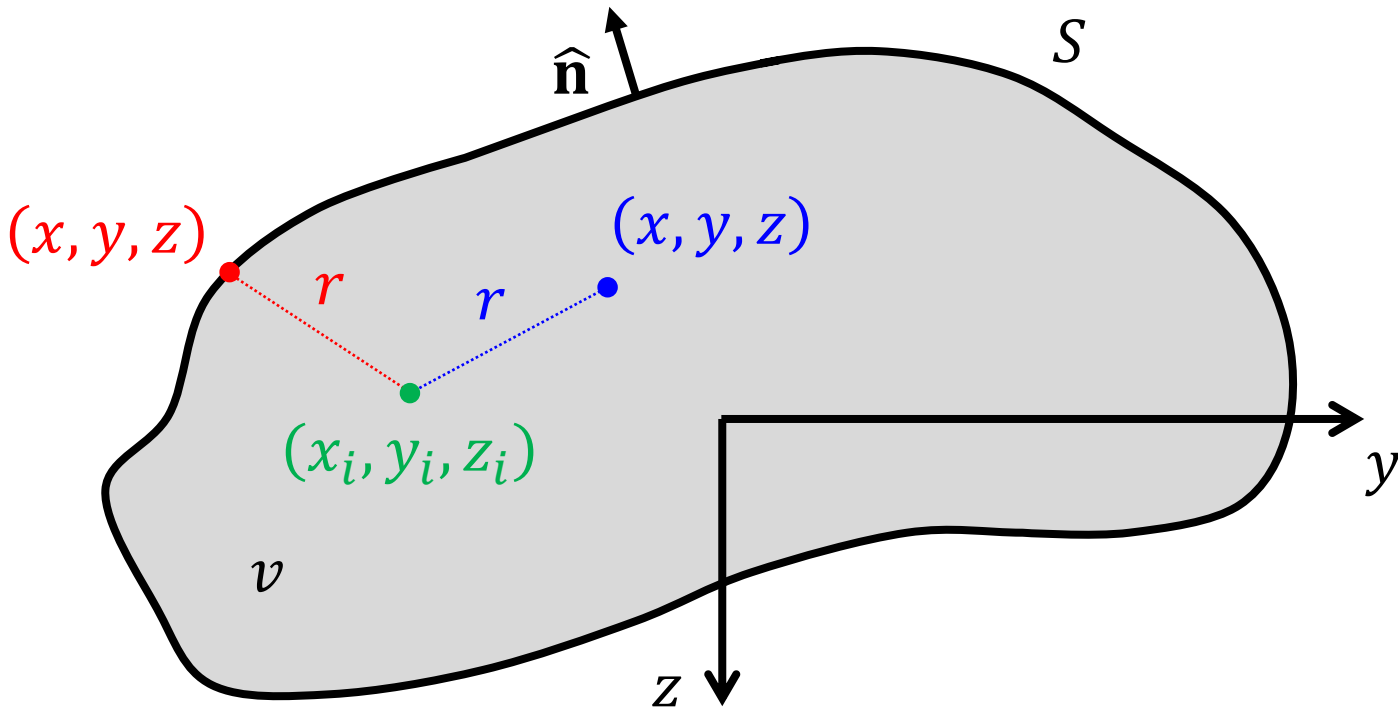


Tal como mencionado anteriormente, a técnica da camada equivalente é baseada em uma equação integral chamada **integral de continuação para cima** (Skeels, 1947; Henderson and Zietz, 1949; Henderson, 1960; Roy, 1962; Bhattacharyya, 1967; Henderson, 1970; Twomey, 1977; Blakely, 1996)



$$d(x_i, y_i, z_i) = \frac{z_c - z_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x, y, z_c)}{r_i^3} dx dy, \quad z_c > z_i$$

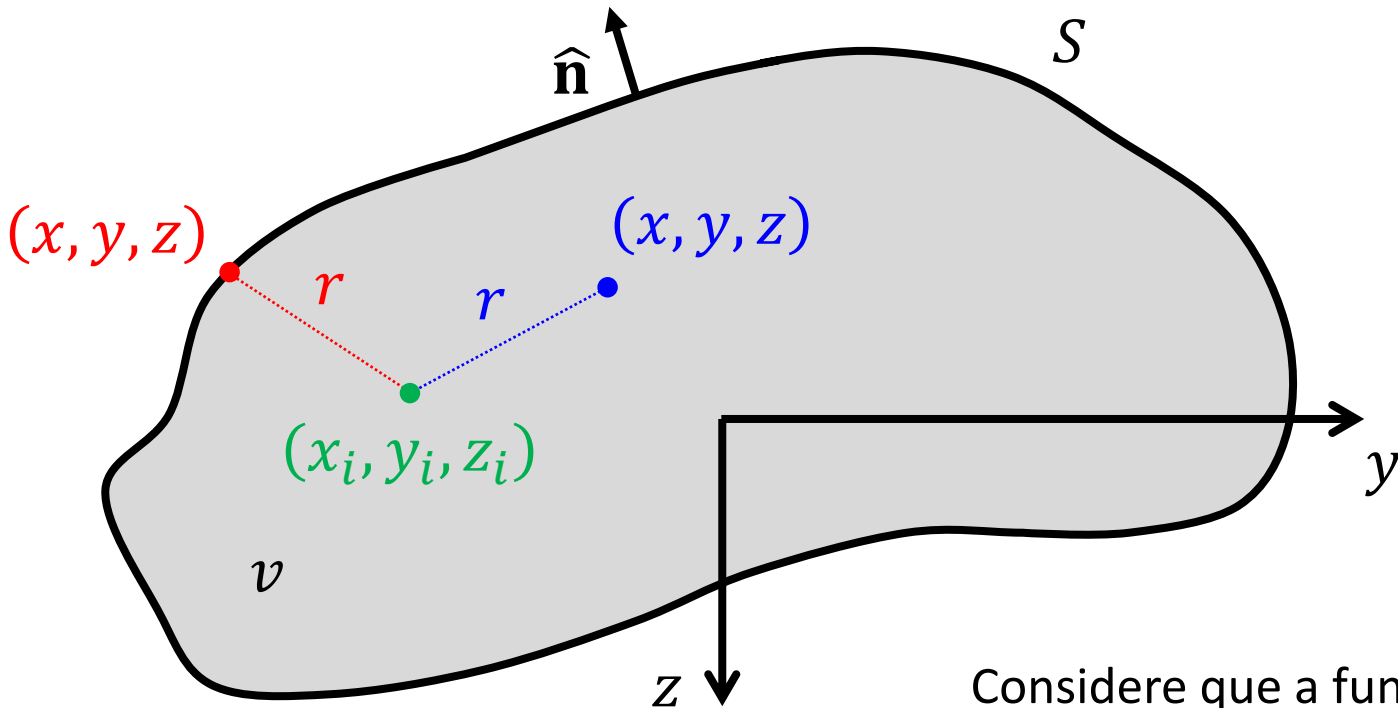
A integral de continuação para cima é deduzida a partir das **identidades de Green** (Green, 1871; Kellogg, 1929)



$$U_i \equiv U(x_i, y_i, z_i) \quad r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \iiint_v \frac{1}{r} \nabla^2 U \, dv - \frac{1}{4\pi} \iint_S U \left( \nabla \frac{1}{r} \right)^T \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r} \nabla U^T \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

Terceira identidade de Green (Kellogg, 1929)



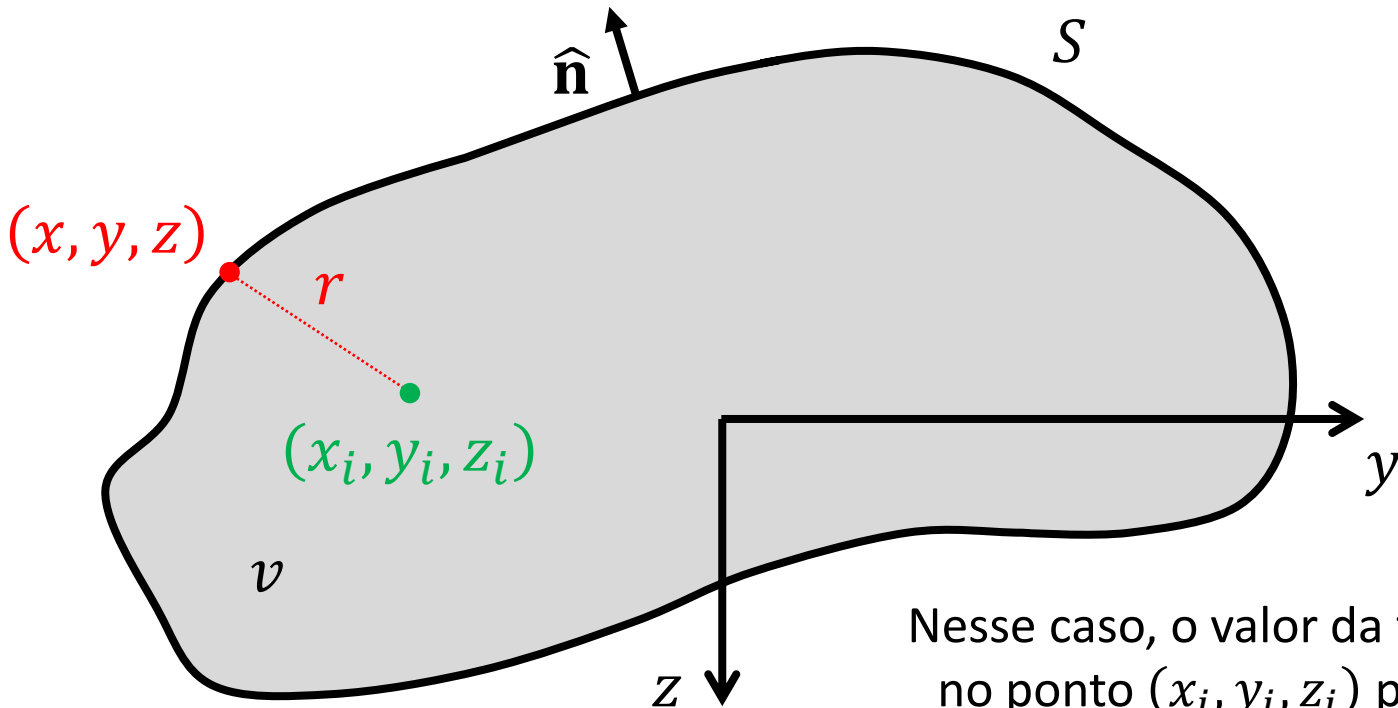
Considere que a função  $U$  seja harmônica no volume  $v$

$$U_i \equiv U(x_i, y_i, z_i)$$

$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \iiint_v \frac{1}{r} \cancel{\nabla^2 U} dv - \frac{1}{4\pi} \iint_S U \left( \nabla \frac{1}{r} \right)^T \hat{n} - \frac{1}{r} \nabla U^T \hat{n} dS$$

= 0

Terceira identidade de Green (Kellogg, 1929)



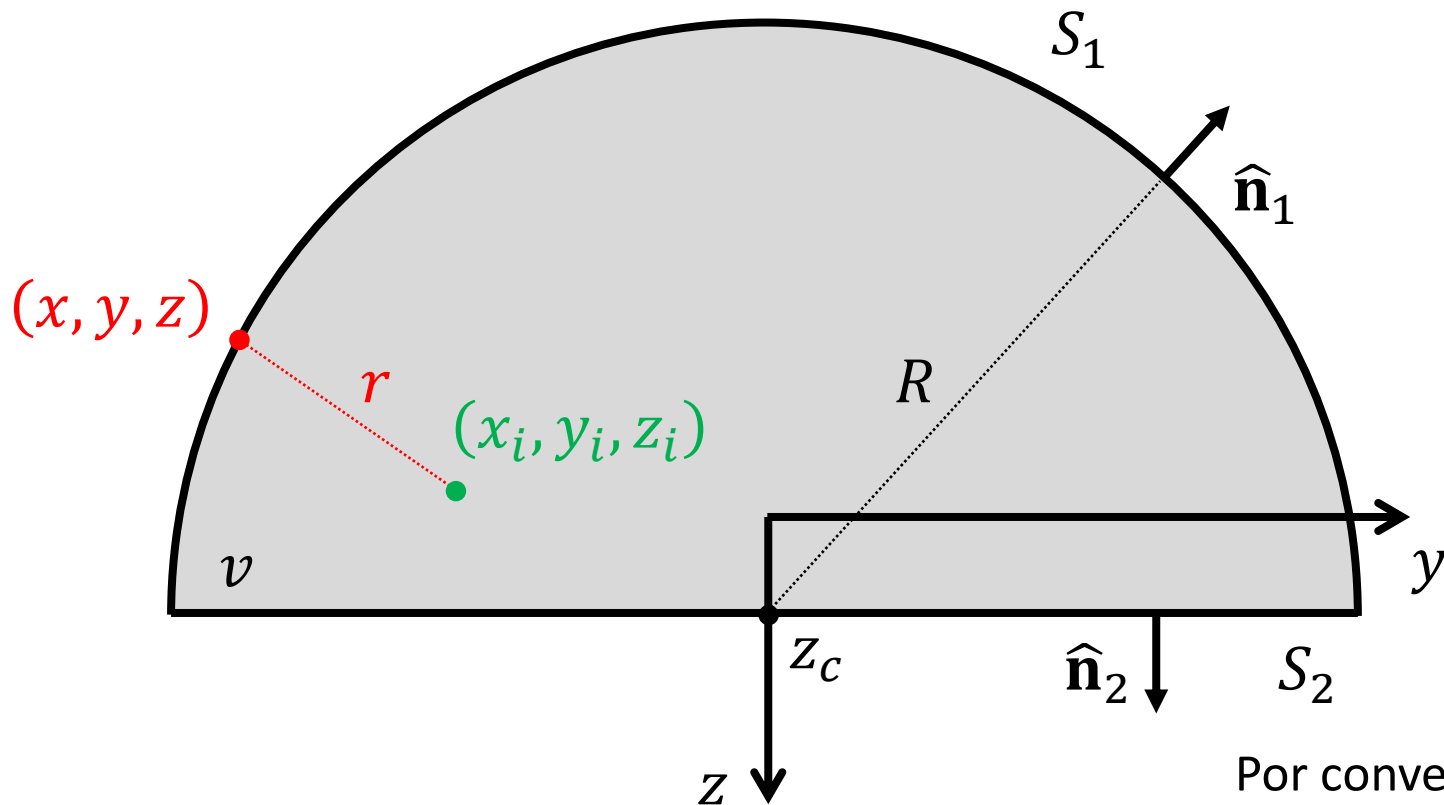
Nesse caso, o valor da função  $U$  no ponto  $(x_i, y_i, z_i)$  pode ser determinado a partir de uma combinação entre os valores de  $U$  e de suas primeiras derivadas sobre a superfície  $S$

$$U_i \equiv U(x_i, y_i, z_i)$$

$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \iint_S U \left( \nabla \frac{1}{r} \right)^T \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r} \nabla U^T \hat{\mathbf{n}} dS$$

**Terceira identidade de Green (Kellogg, 1929)**



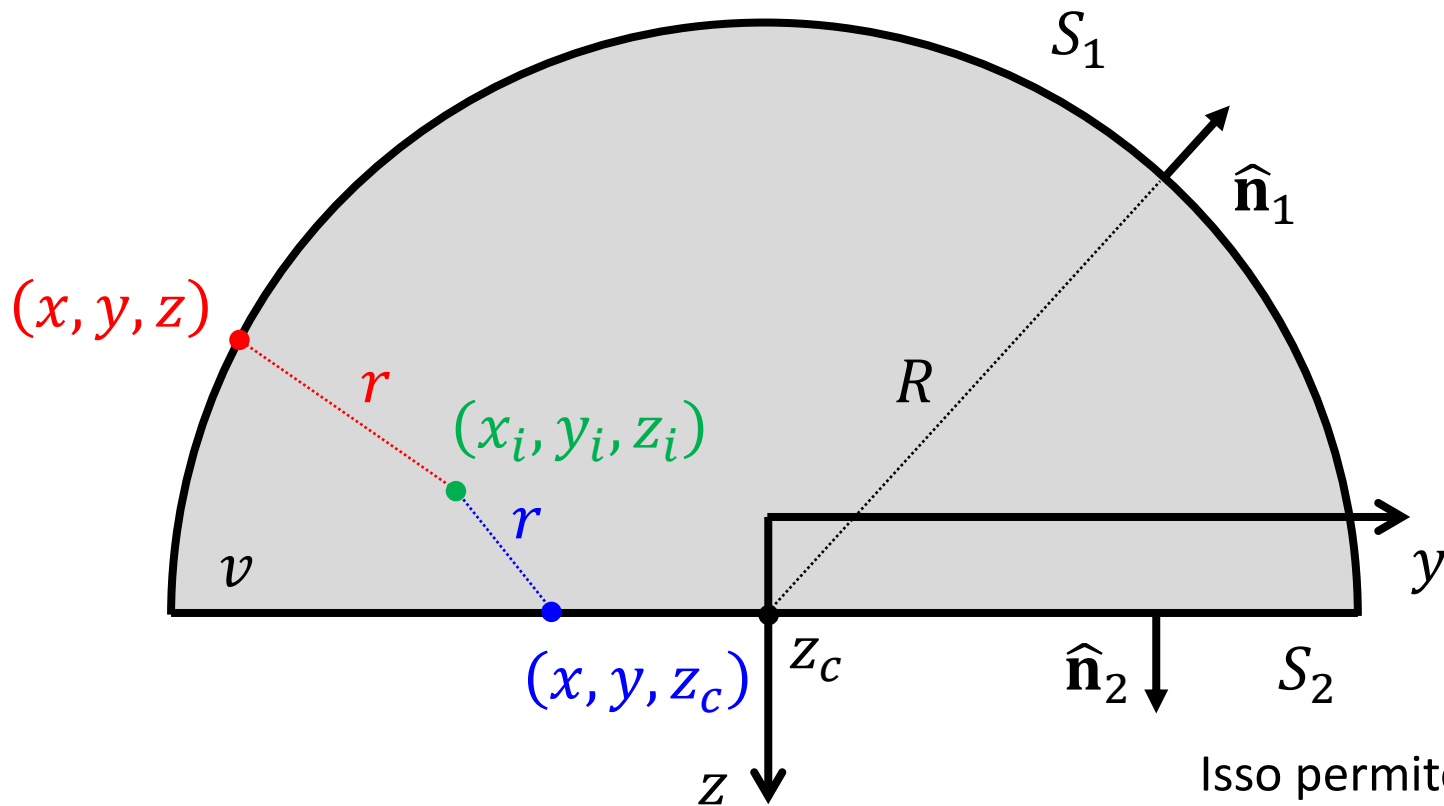


Por conveniência,  
considere uma região  $v$   
limitada por uma  
semiesfera  $S_1$  de raio  $R$   
e um plano horizontal  
 $S_2$  localizado em  $z_c$ ,  
acima das fontes

$$U_i \equiv U(x_i, y_i, z_i)$$

$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \iint_S U \left( \nabla \frac{1}{r} \right)^T \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r} \nabla U^T \hat{\mathbf{n}} dS$$

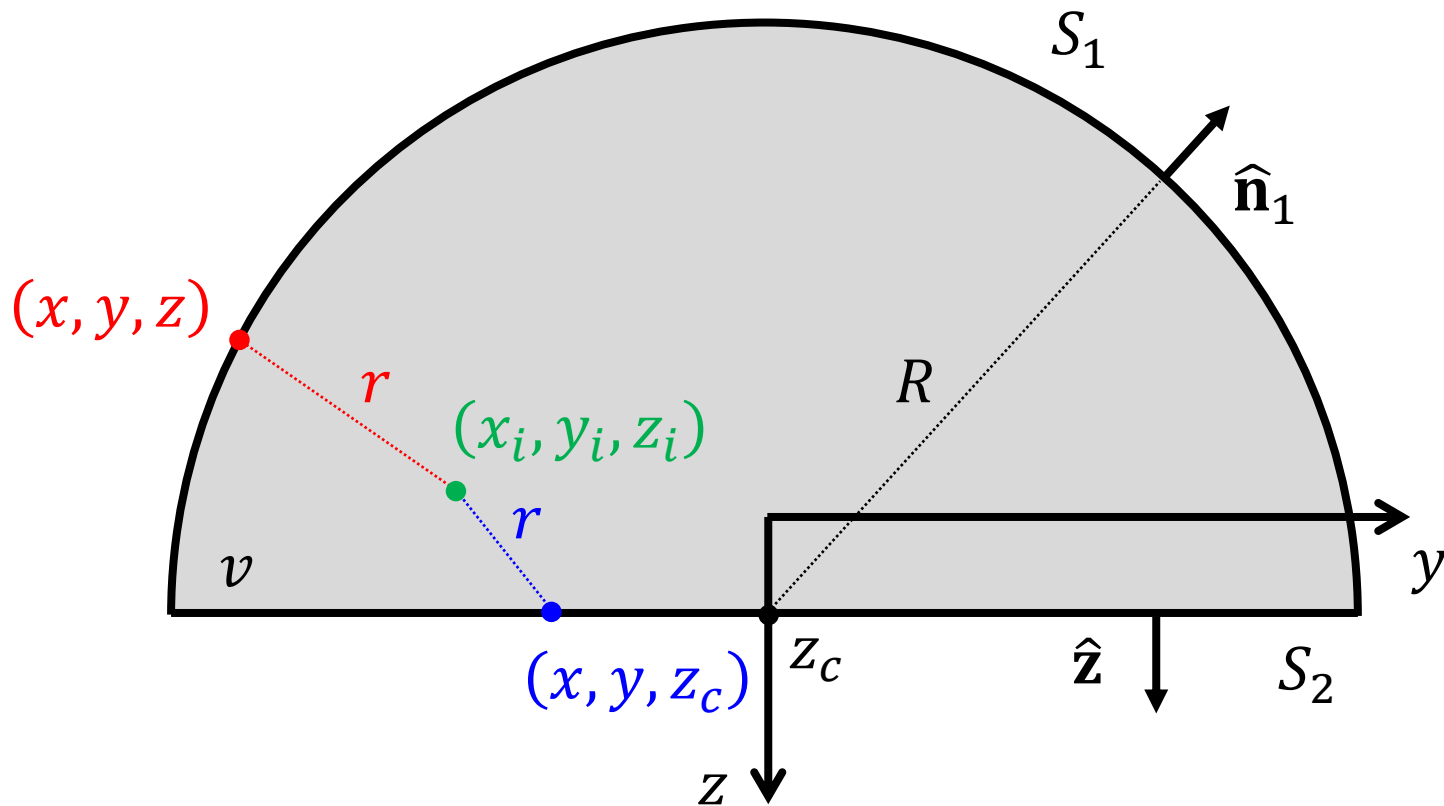
**Terceira identidade de Green (Kellogg, 1929)**



$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} U \left( \nabla \frac{1}{r} \right)^T \hat{\mathbf{n}}_1 - \frac{1}{r} \nabla U^T \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 +$$

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} U \left( \nabla \frac{1}{r} \right)^T \hat{\mathbf{n}}_2 - \frac{1}{r} \nabla U^T \hat{\mathbf{n}}_2 dS_2$$

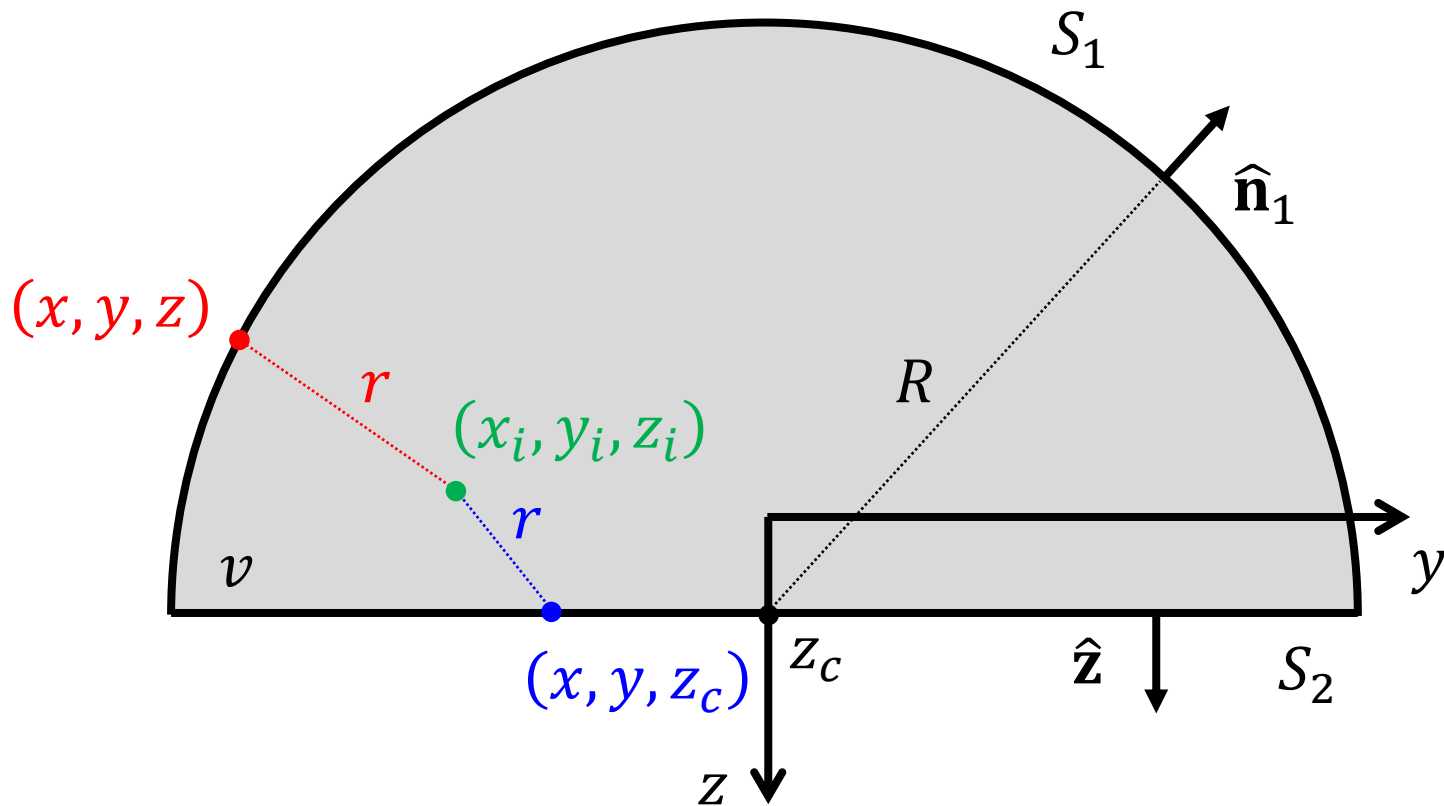
Isso permite dividir a integral de superfície em duas partes, uma avaliada sobre  $S_1$  e a outra avaliada sobre  $S_2$



$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} U \left( \nabla \frac{1}{r} \right)^T \hat{n}_1 - \frac{1}{r} \nabla U^T \hat{n}_1 dS_1 +$$

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} U \left( \nabla \frac{1}{r} \right)^T \hat{z} - \frac{1}{r} \nabla U^T \hat{z} dxdy$$

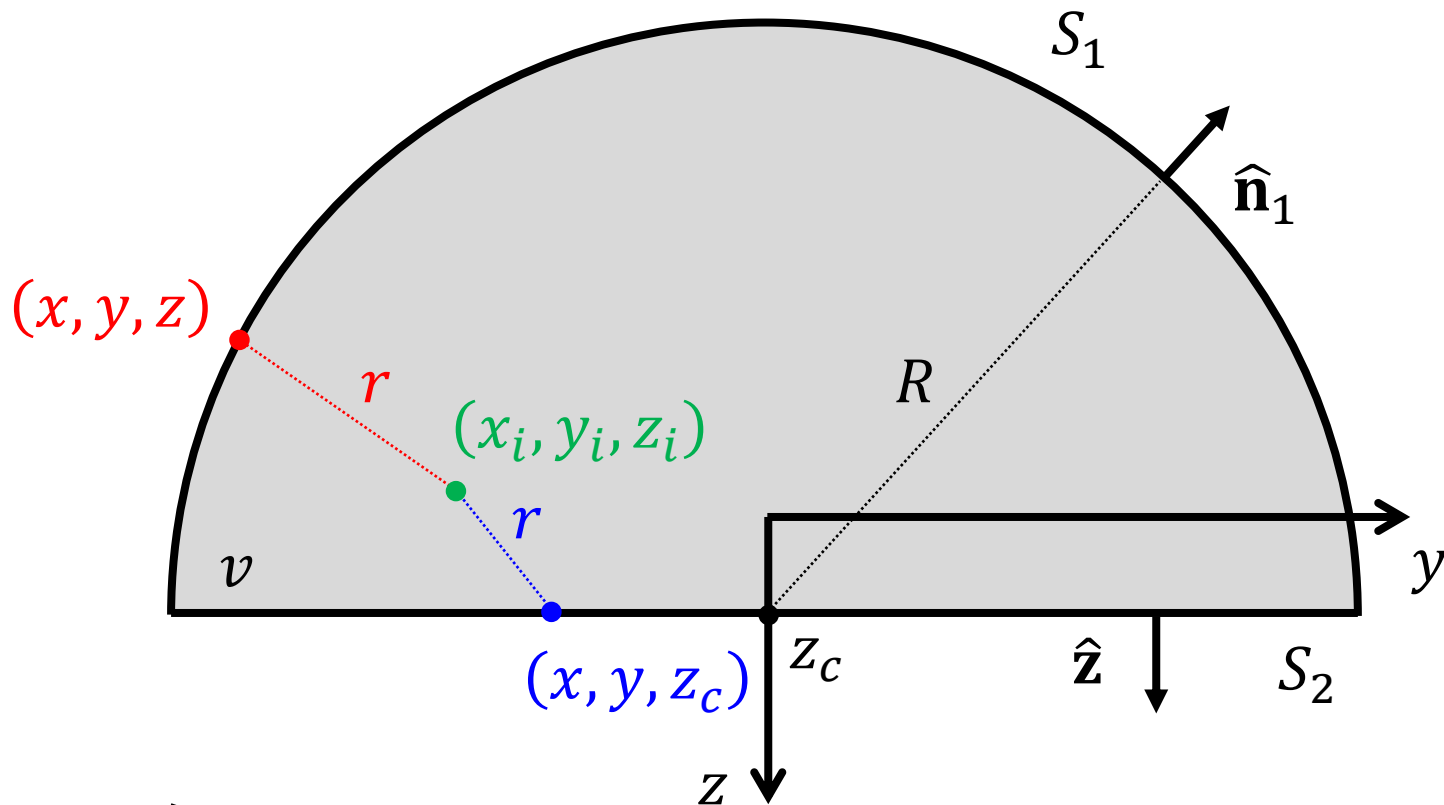
Note que a normal  $\hat{n}_2$  coincide com o vetor unitário  $\hat{z}$  na direção do eixo  $z$  e que o elemento de área  $dS_2 = dxdy$



$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} U \left( \nabla \frac{1}{r} \right)^T \hat{\mathbf{n}}_1 - \frac{1}{r} \nabla U^T \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 +$$

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

Consequentemente, as derivadas na direção de  $\hat{\mathbf{n}}_2$  equivalem à derivada parcial em relação à coordenada  $z$

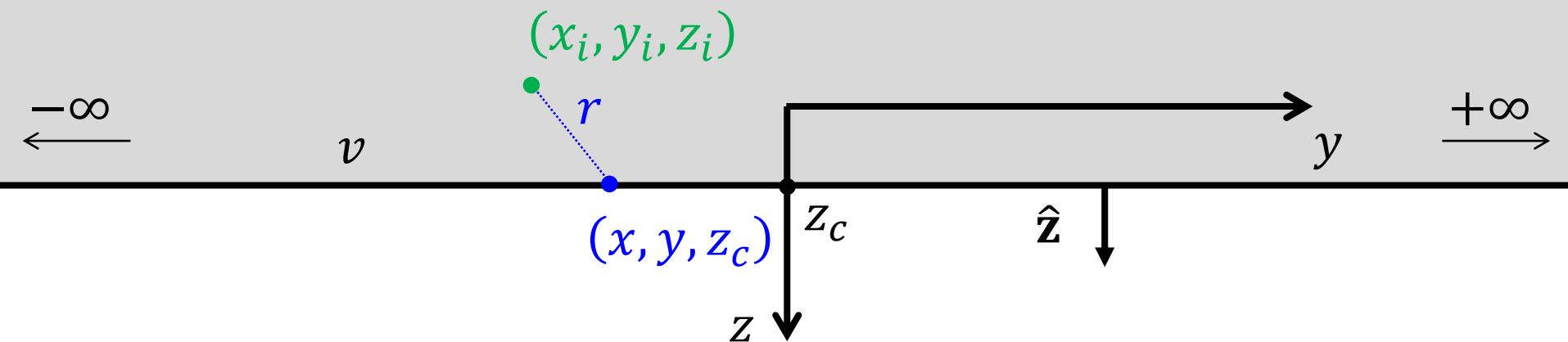


$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} U \left( \nabla \frac{1}{r} \right)^T \hat{\mathbf{n}}_1 - \frac{1}{r} \nabla U^T \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 +$$

= 0

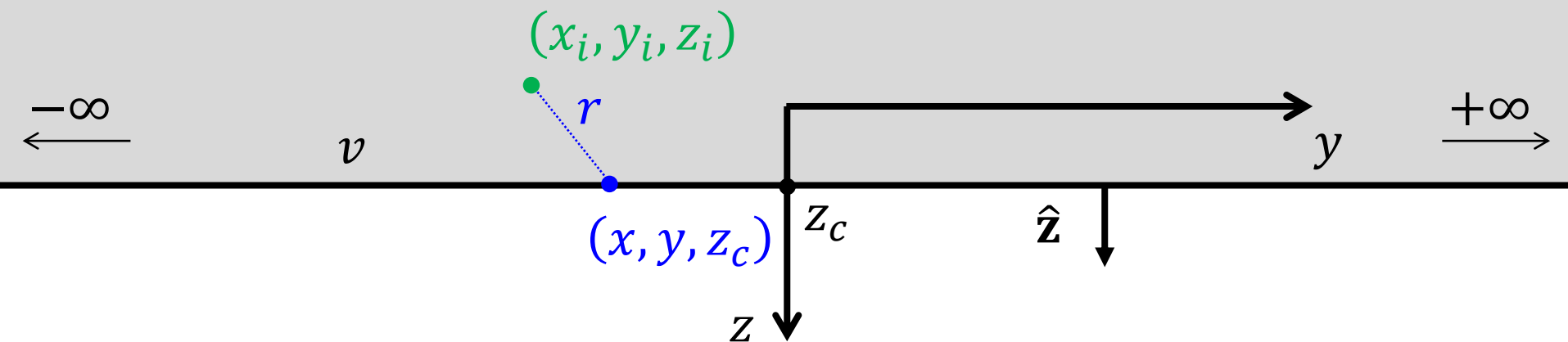
$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

No limite  $R \rightarrow \infty$ , a  
integral sobre a superfície  
 $S_1$  tende a zero



$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

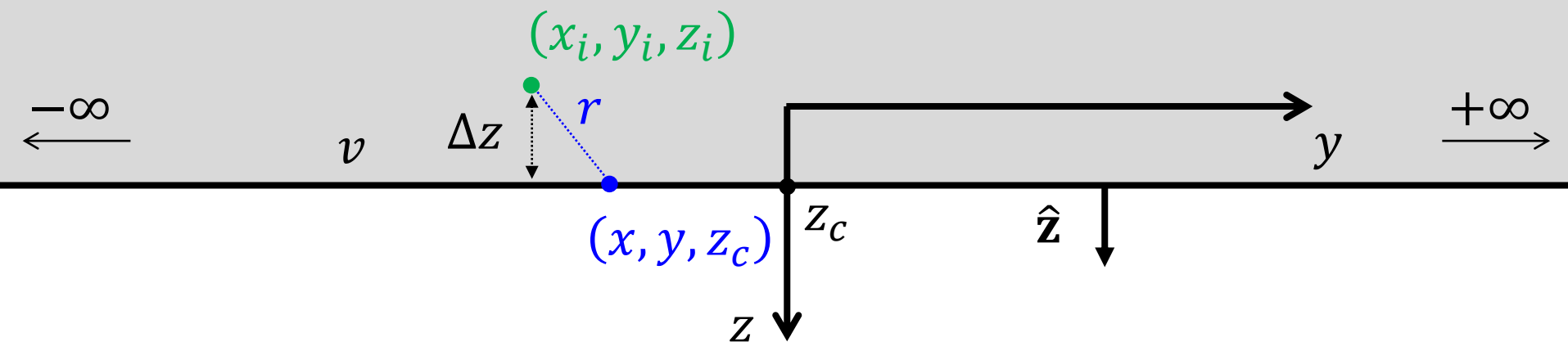
Note que, neste caso, o valor da função  $U$  no ponto  $(x_i, y_i, z_i)$  é determinado por uma combinação entre os seus valores e os de sua derivada parcial em relação à coordenada  $z$  sobre o plano horizontal  $z_c$



$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$



Para deduzir a integral de  
continuação para cima, é  
necessário remover o termo que  
envolve a derivada parcial de  $U$

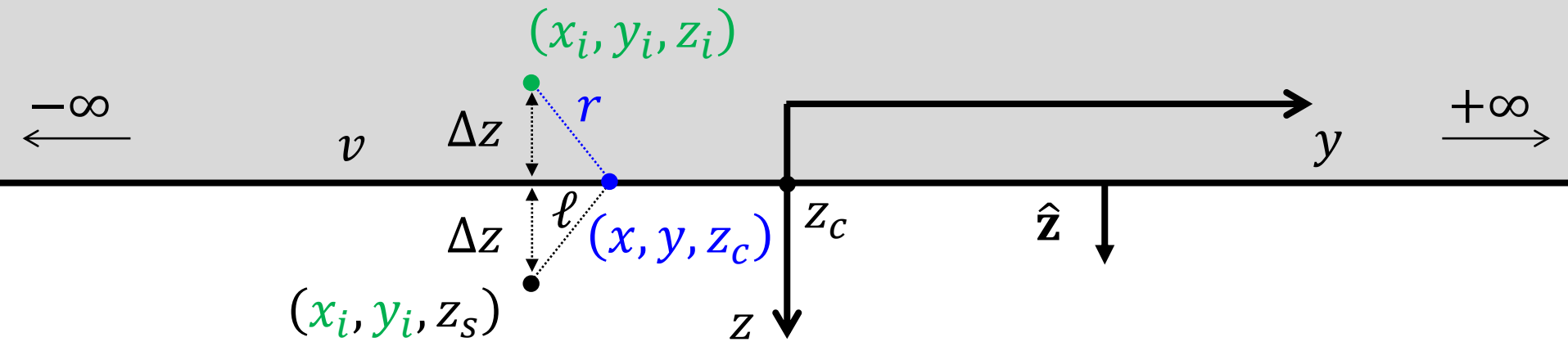


$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

Para tanto, considere  
 $z_i = z_c - \Delta z$ , em que  $\Delta z > 0$



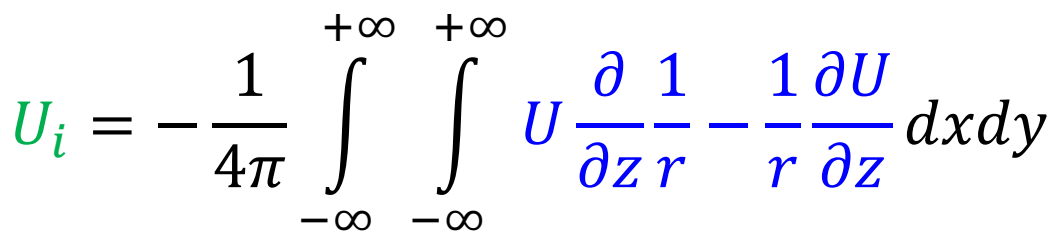
$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_s)^2}}$$



$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

O próximo passo consiste em definir a função inverso da distância entre um ponto  $(x, y, z_c)$  e o ponto  $(x_i, y_i, z_s)$

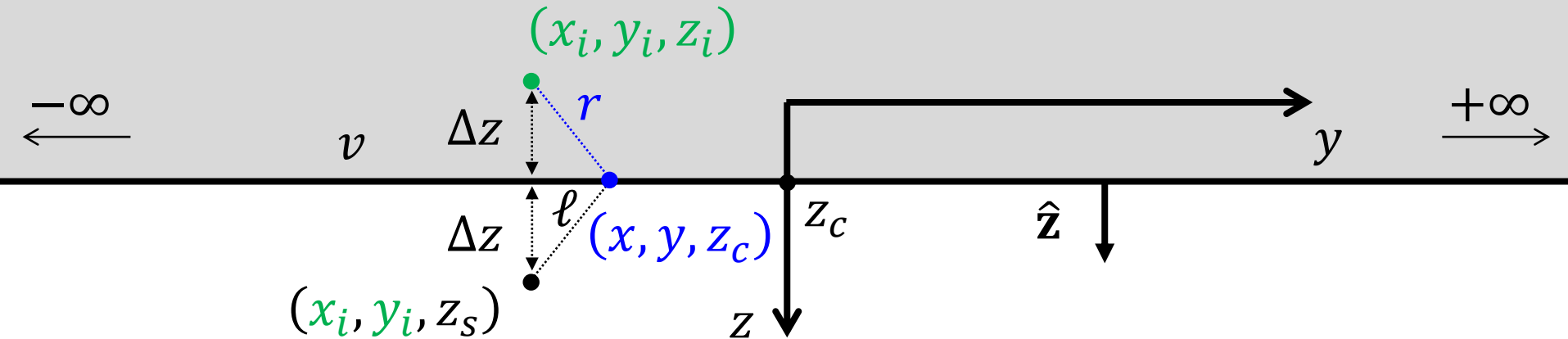
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_i)^2}}$$



Note a diferença entre esta nova função  $1/\ell$  e a função  $1/r$

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_s)^2}}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_i)^2}}$$



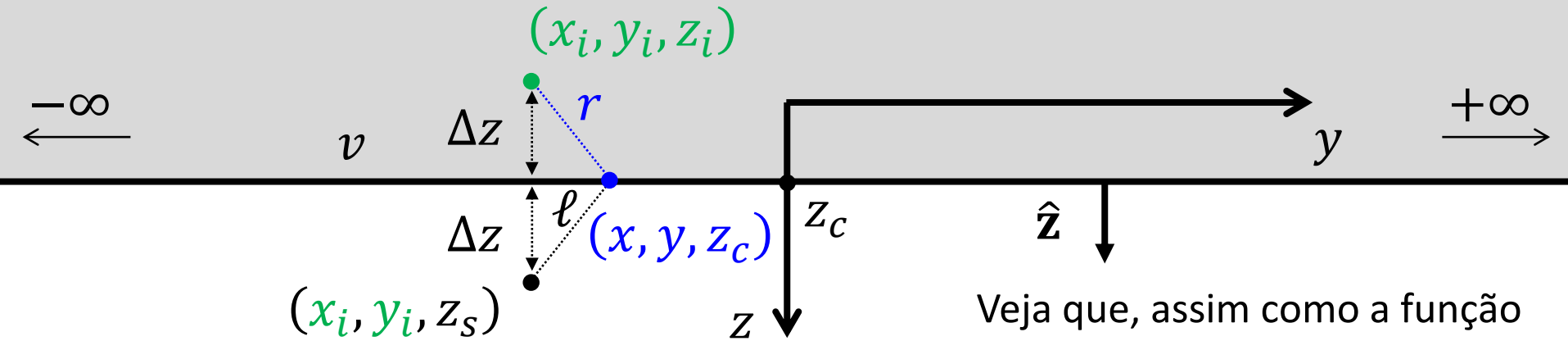
$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

Sendo assim, de acordo com a segunda identidade de Green

$$\iiint_v U \nabla^2 \frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell} \nabla^2 U dv = \iint_S U \left( \nabla \frac{1}{\ell} \right)^T \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{\ell} \nabla U^T \hat{\mathbf{n}} dS$$

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_s)^2}}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_i)^2}}$$



$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

= 0                      = 0

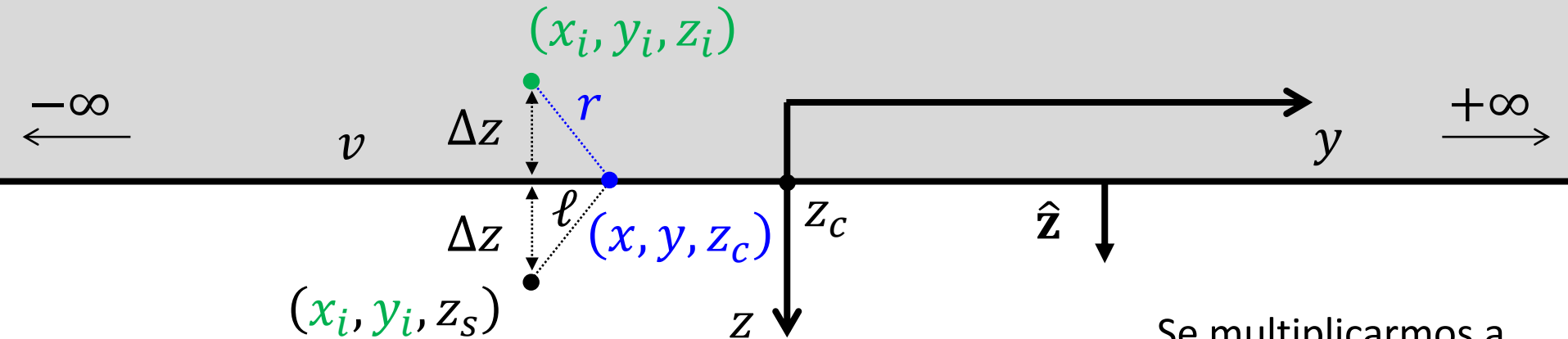
Veja que, assim como a função  $U$ , a função  $1/\ell$  é harmônica em todo o volume  $v$

Além disso, assim como fizemos anteriormente, considere  $R \rightarrow \infty$

$$\iiint_v U \cancel{\nabla^2} \frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell} \cancel{\nabla^2} U dv = \iint_S U \left( \nabla \frac{1}{\ell} \right)^T \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{\ell} \nabla U^T \hat{\mathbf{n}} dS$$

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_s)^2}}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_i)^2}}$$



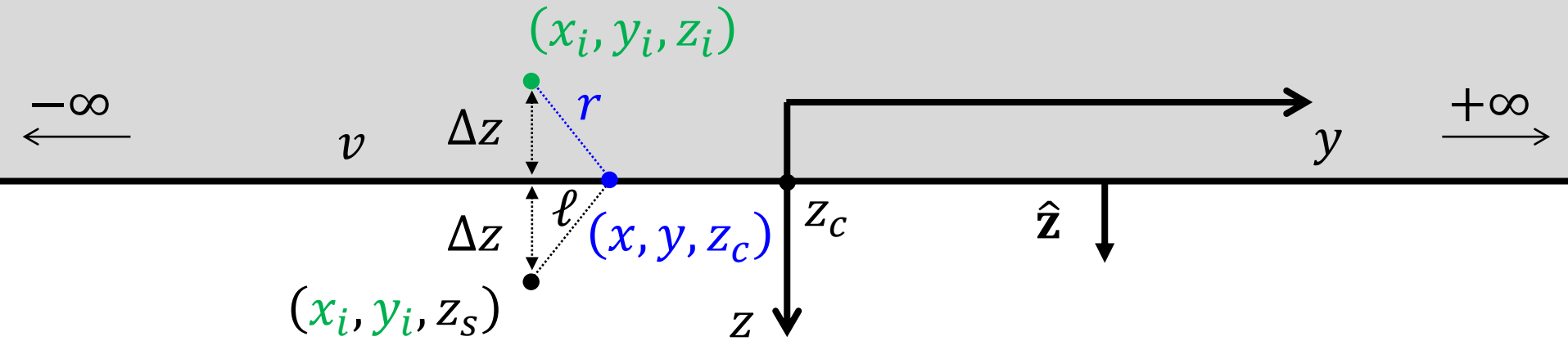
$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

Se multiplicarmos a equação abaixo por  $1/4\pi$  e somarmos o resultado na equação acima...

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell} \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_s)^2}}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_i)^2}}$$

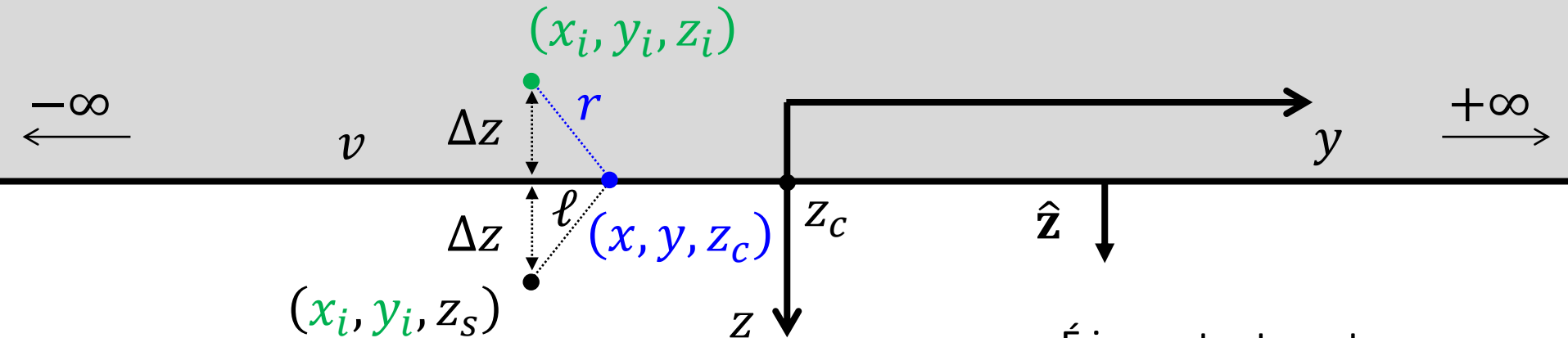


$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\ell} \right) - \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\ell} \right) \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_s)^2}}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_i)^2}}$$



$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

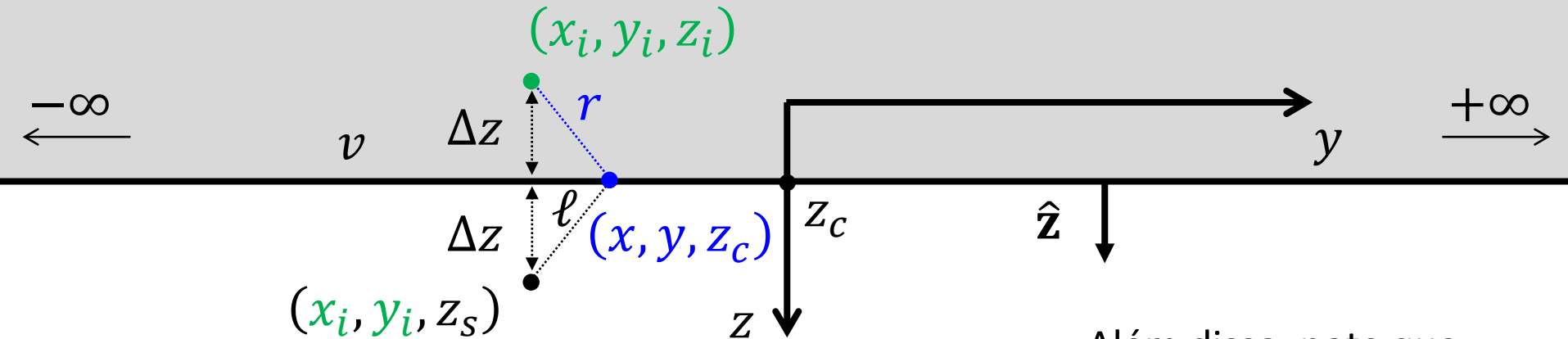
É importante notar que,  
como  $z_s = z_c + \Delta z$  e  
 $z_i = z_c - \Delta z$ , então  
 $1/\ell = 1/r$

$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\ell} \right) - \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\ell} \right) \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

= 0

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_s)^2}}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_i)^2}}$$



Além disso, note que

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\ell} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}$$

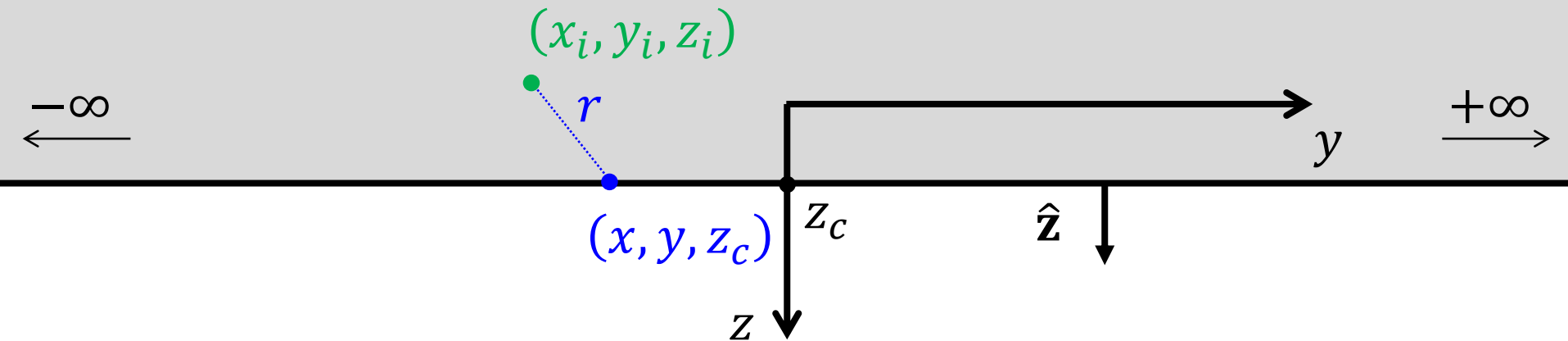
$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \left( \cancel{\frac{1}{r}} - \frac{1}{\ell} \right) - \left( \cancel{\frac{1}{r}} - \frac{1}{\ell} \right) \frac{\partial U}{\partial z} dx dy$$

$\nearrow = 2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}$ 
 $\nearrow = 0$



$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_i)^2}}$$

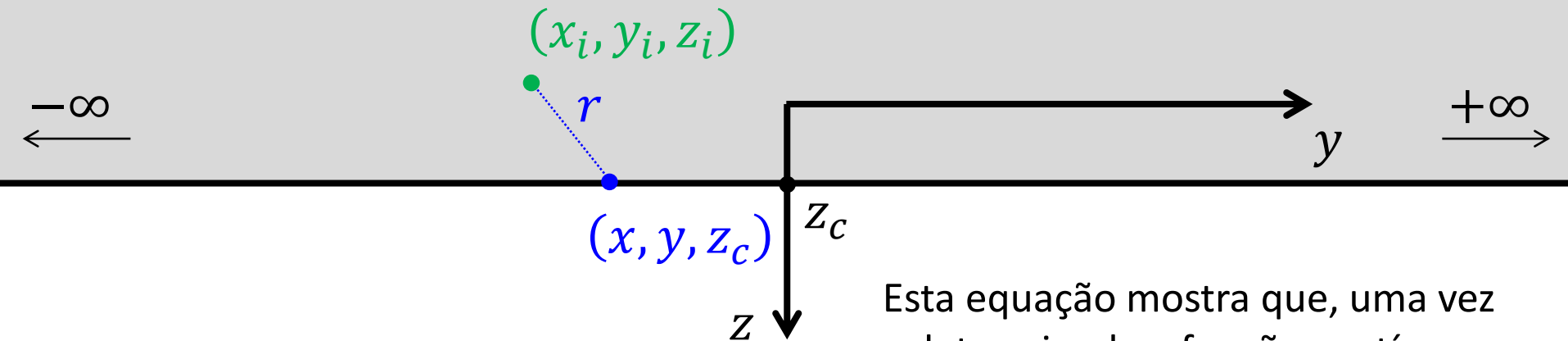


$$U_i = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} dx dy$$

**Integral de continuação para cima**  
(Henderson, 1960, 1970)

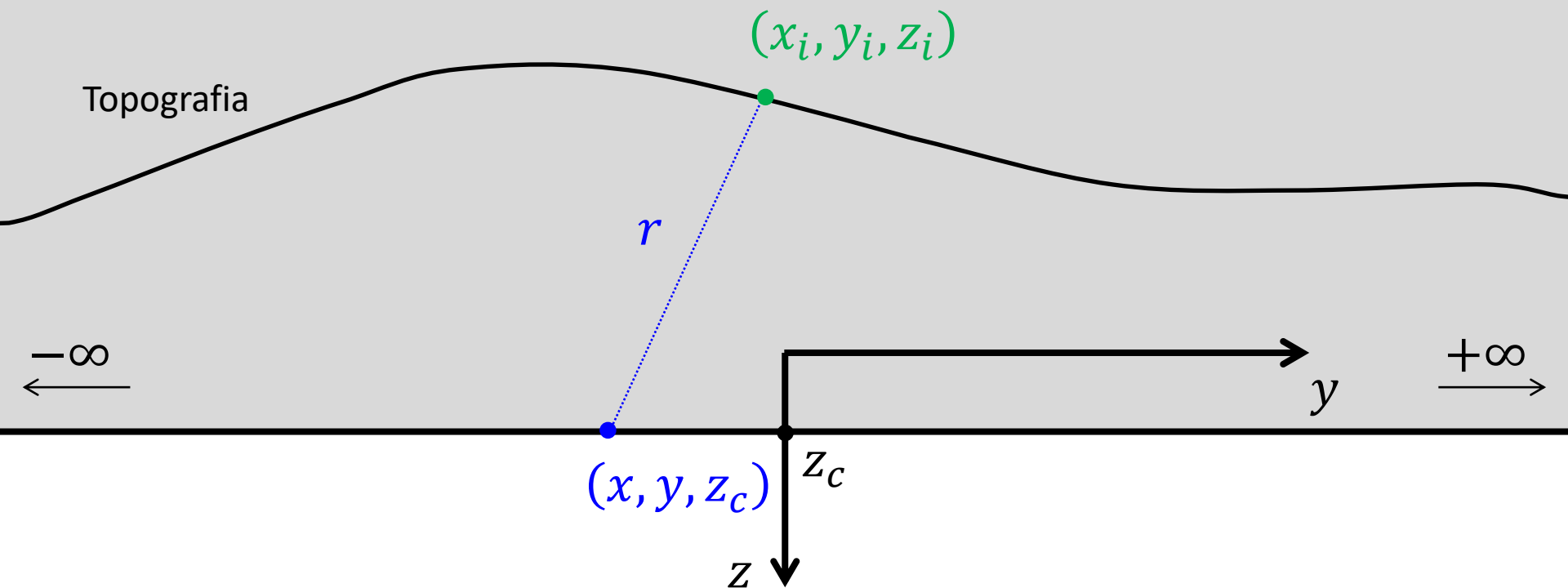
$$= \frac{z_c - z_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, y, z_c)}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z_c)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_c - z_i)^2}}$$



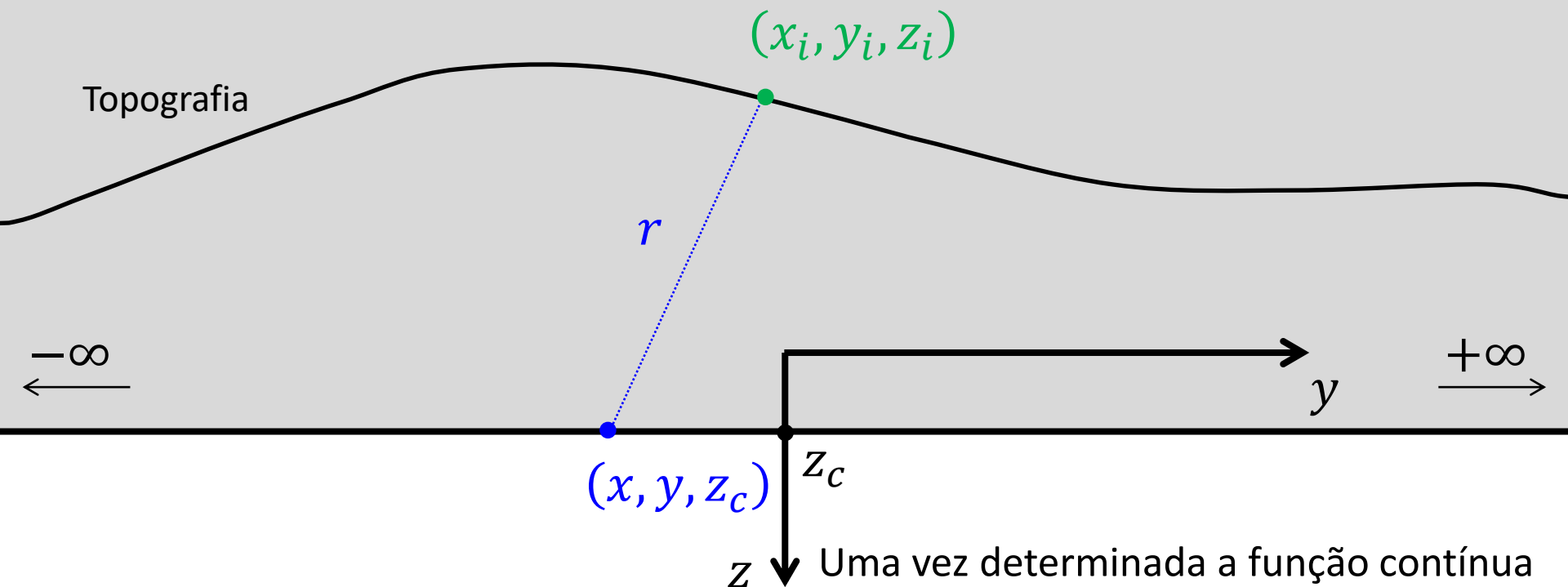
Esta equação mostra que, uma vez determinada a função contínua  $U(x, y, z_c)$  sobre o plano horizontal infinito  $z_c$ , é possível determinar  $U_i$  em qualquer ponto acima deste plano

$$U_i = \frac{z_c - z_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, y, z_c)}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z_c)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy$$



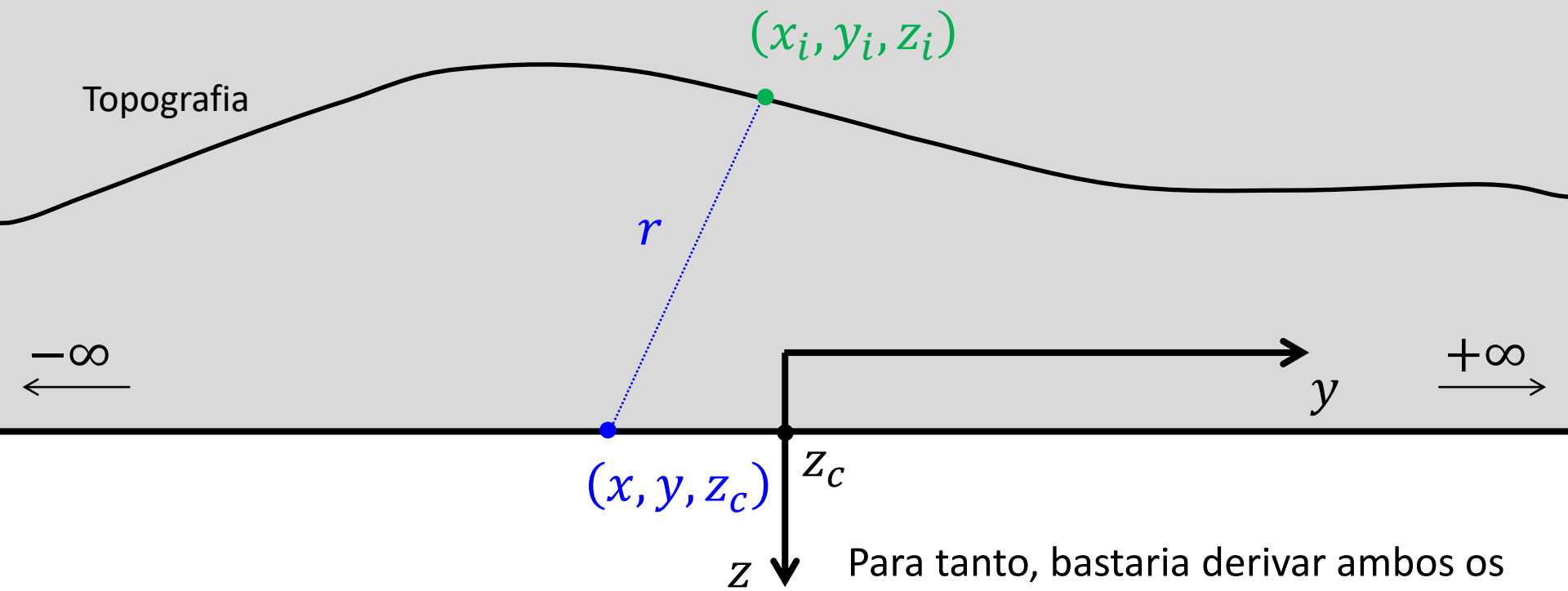
Note que o ponto  $(x_i, y_i, z_i)$  pode estar em qualquer lugar acima do plano  $z_c$

$$U_i = \frac{z_c - z_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, y, z_c)}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z_c)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy$$



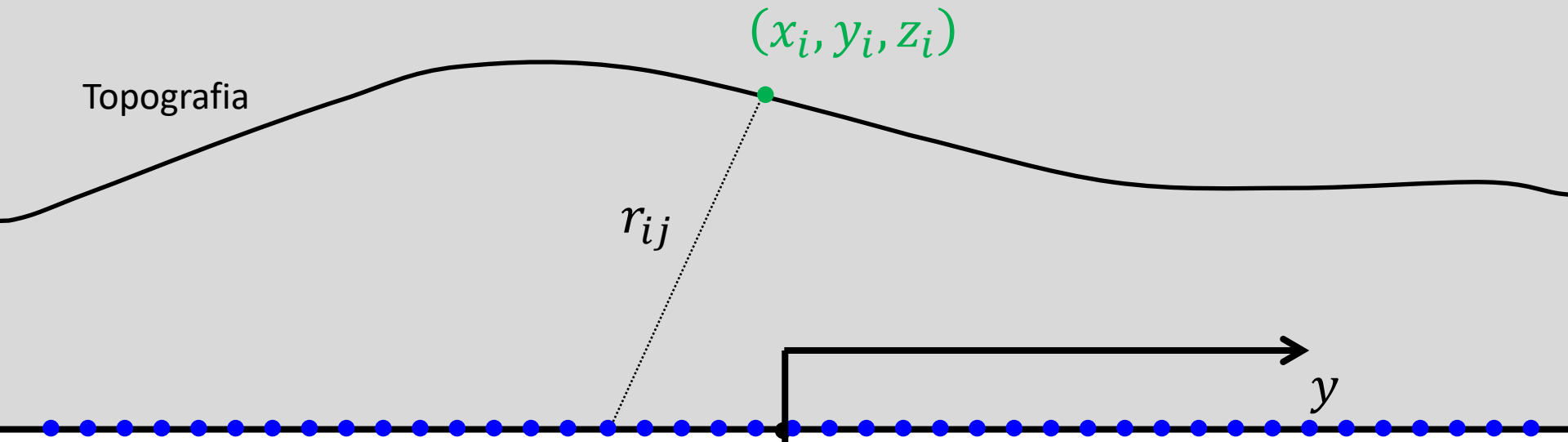
Uma vez determinada a função contínua  $U(x, y, z_c)$  sobre o plano horizontal infinito, seria possível, por exemplo, calcular a  $\partial_z U_i$

$$U_i = \frac{z_c - z_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, y, z_c)}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z_c)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy$$



Para tanto, bastaria derivar ambos os lados da equação abaixo em relação à variável  $z$  do **ponto de observação**

$$U_i = \frac{z_c - z_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, y, z_c)}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z_c)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy$$

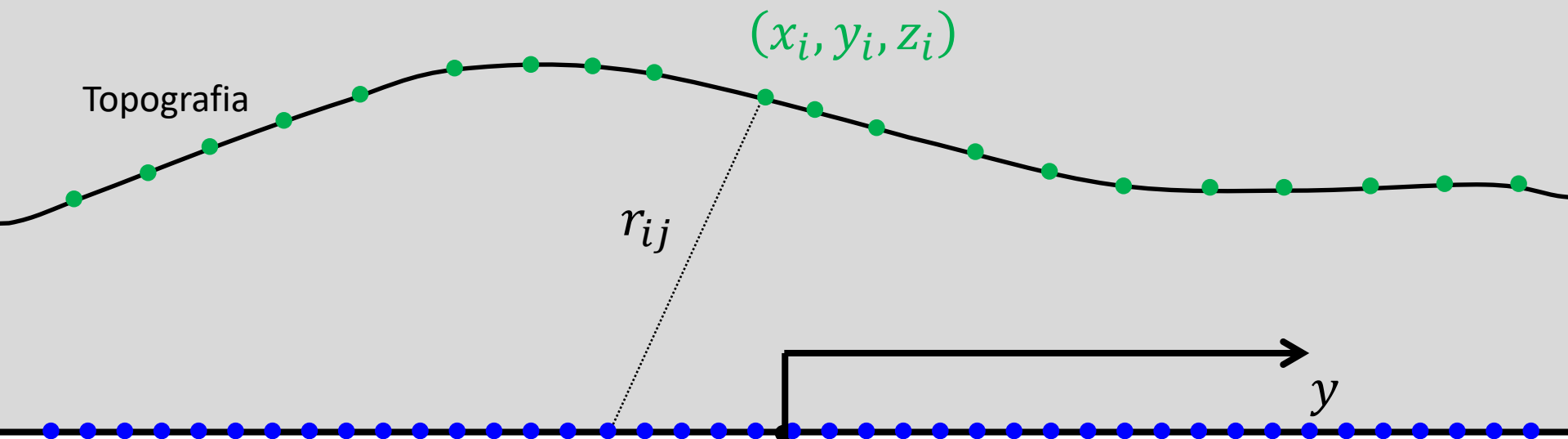


$$U_i \approx \sum_{j=1}^M \overbrace{\left( \frac{U_j \Delta S_j}{2\pi} \right)}^{p_j} \left( \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3} \right)$$

$$r_{ij} = \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_c)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

O que se faz na prática é discretizar esta integral em um conjunto finito de  $M$  pontos  $(x_j, y_j, z_c)$ , transformando-a em uma somatória

$$U_i = \frac{z_c - z_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, y, z_c)}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z_c)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy$$

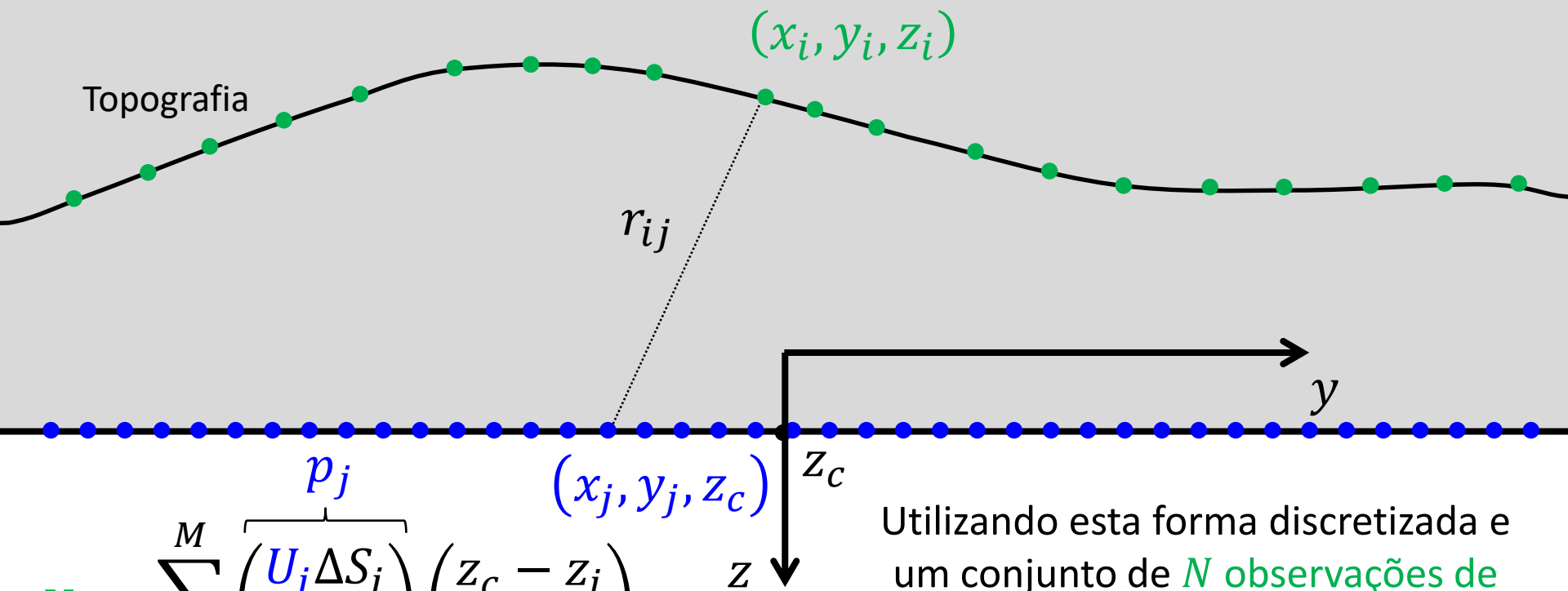


$$U_i \approx \sum_{j=1}^M \left( \overbrace{\frac{U_j \Delta S_j}{2\pi}}^{p_j} \right) \left( \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3} \right)$$

$$r_{ij} = \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_c)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Utilizando esta forma discretizada e um conjunto de  $N$  observações de um campo potencial sobre a superfície, é possível estimar os coeficientes  $p_j$  por meio da solução de um **sistema linear**

$$U_i = \frac{z_c - z_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, y, z_c)}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z_c)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy$$



$$U_i \approx \sum_{j=1}^M \left( \overbrace{\frac{U_j \Delta S_j}{2\pi}}^{p_j} \right) \left( \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3} \right)$$

$$r_{ij} = \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_c)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Utilizando esta forma discretizada e um conjunto de  $N$  observações de um campo potencial sobre a superfície, é possível estimar os coeficientes  $p_j$  por meio da solução de um **sistema linear**

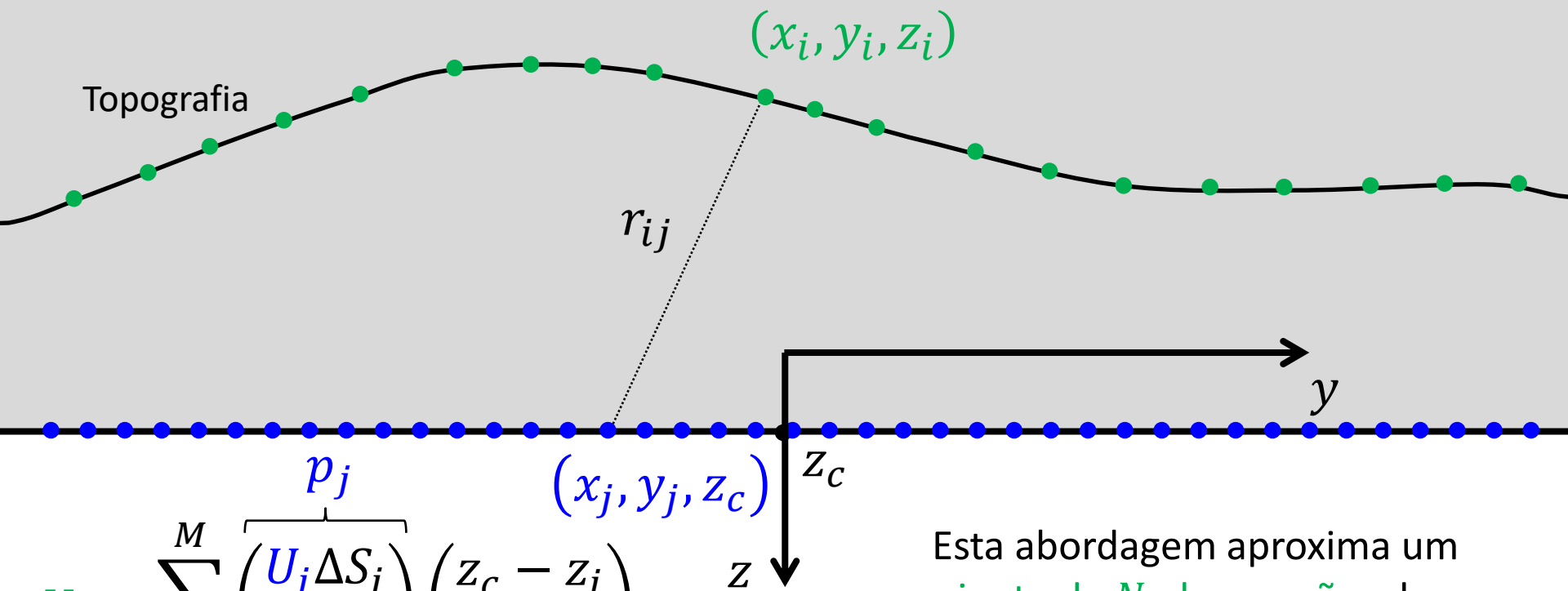
$$[\mathbf{U}]_i = U_i$$

$$[\mathbf{p}]_j = p_j$$

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3}$$

$$\mathbf{U}_{N \times 1} = \mathbf{A}_{N \times M} \mathbf{p}_{M \times 1}$$





$$U_i \approx \sum_{j=1}^M \left( \overbrace{\frac{U_j \Delta S_j}{2\pi}}^{p_j} \right) \left( \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3} \right)$$

$$r_{ij} = \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_c)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

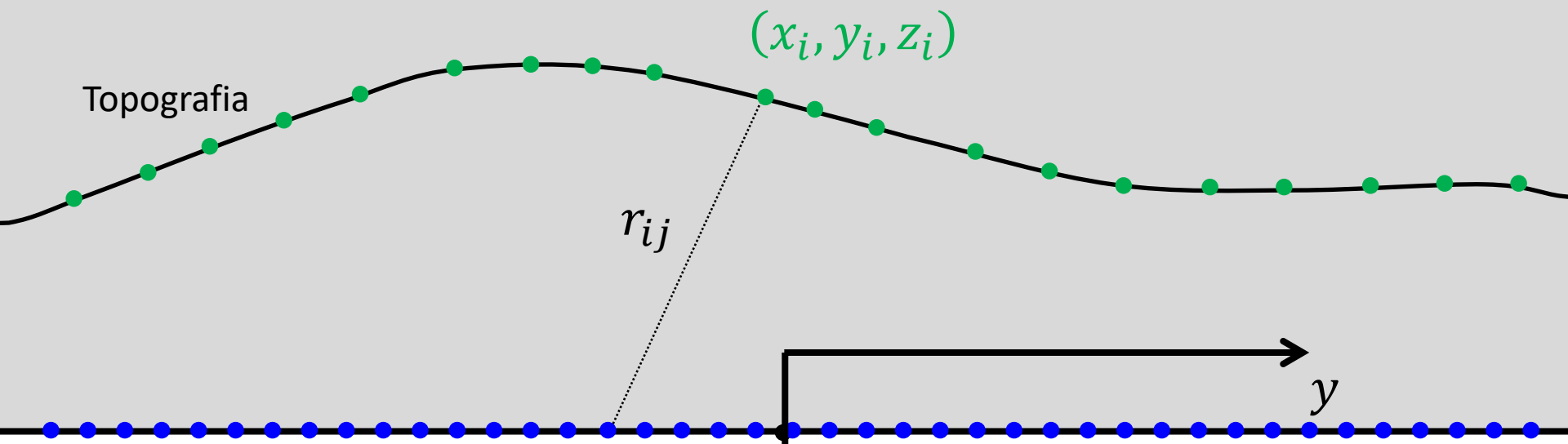
Esta abordagem aproxima um conjunto de  $N$  observações de um campo potencial por uma combinação linear de  $M$  **funções harmônicas**, sendo  $p_j$  os coeficientes

$$[\mathbf{U}]_i = U_i$$

$$[\mathbf{p}]_j = p_j$$

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3}$$

$$\mathbf{U}_{N \times 1} = \mathbf{A}_{N \times M} \mathbf{p}_{M \times 1}$$



$$U_i \approx \sum_{j=1}^M \left( \overbrace{\left( \frac{U_j \Delta S_j}{2\pi} \right)}^{p_j} \right) \left( \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3} \right)$$

$$r_{ij} = \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_c)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

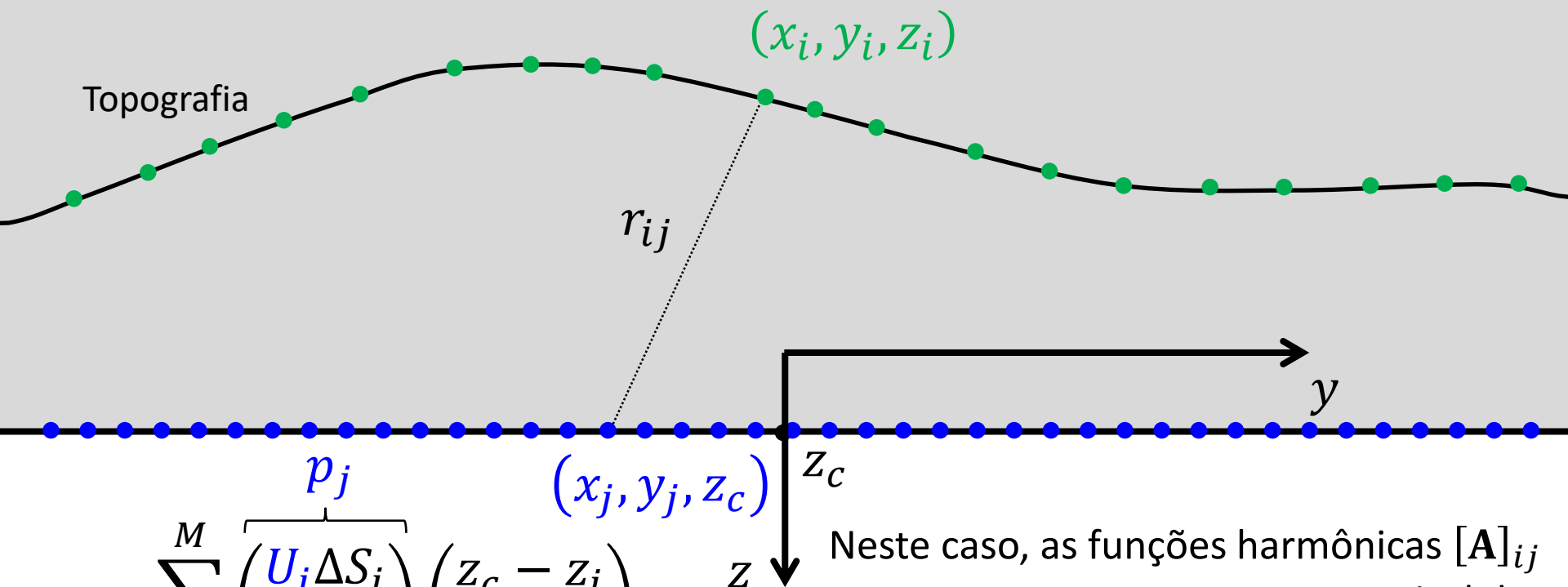
Esta abordagem aproxima um conjunto de  $N$  observações de um campo potencial por uma combinação linear de  $M$  **funções harmônicas**, sendo  $p_j$  os coeficientes

$$[\mathbf{U}]_i = U_i$$

$$[\mathbf{p}]_j = p_j$$

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3}$$

$$\mathbf{U}_{N \times 1} = \mathbf{A}_{N \times M} \mathbf{p}_{M \times 1}$$



$$U_i \approx \sum_{j=1}^M \left( \overbrace{\frac{U_j \Delta S_j}{2\pi}}^{p_j} \right) \left( \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3} \right)$$

$$r_{ij} = \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_c)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

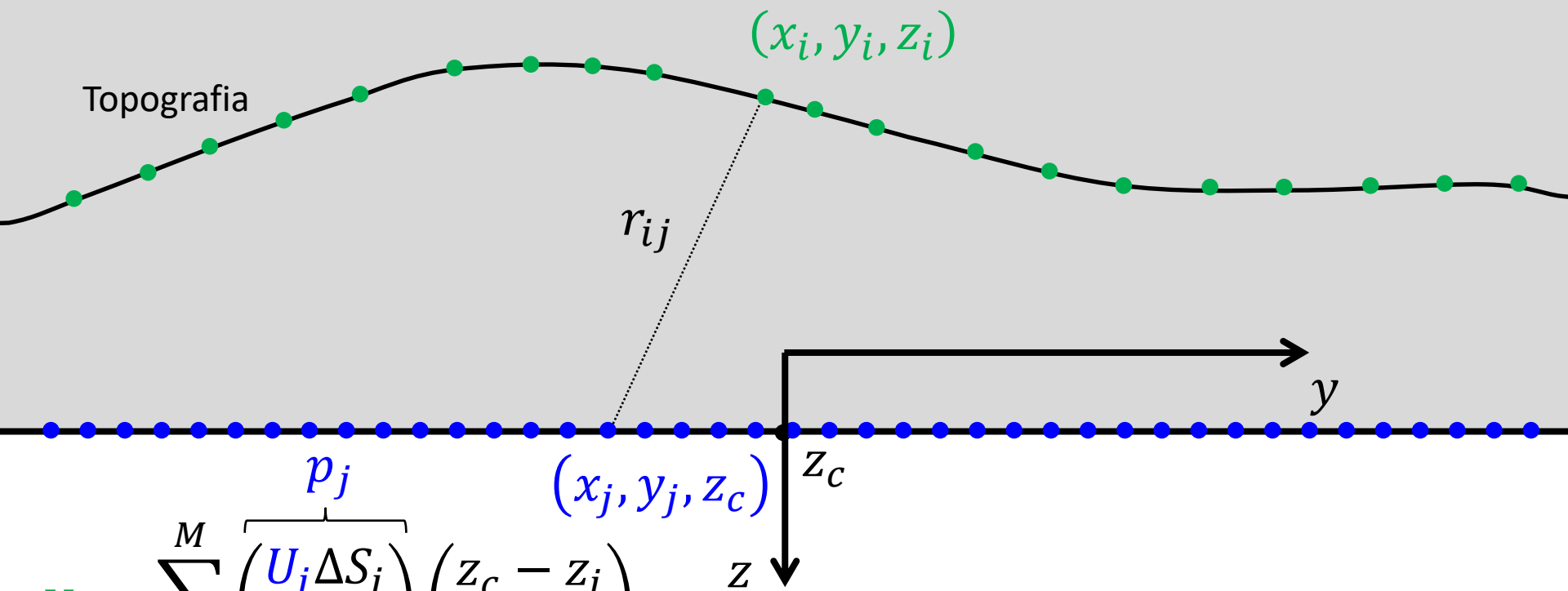
$$[\mathbf{U}]_i = U_i$$

$$[\mathbf{p}]_j = p_j$$

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3}$$

Neste caso, as funções harmônicas  $[\mathbf{A}]_{ij}$  representam a componente vertical da atração gravitacional exercida, no ponto  $(x_i, y_i, z_i)$ , por uma esfera fictícia centrada no ponto  $(x_j, y_j, z_c)$ , com volume  $v_j$  e densidade  $\rho_j = 1/(G v_j)$ , em que  $G$  é a constante gravitacional

$$\mathbf{U}_{N \times 1} = \mathbf{A}_{N \times M} \mathbf{p}_{M \times 1}$$



$$U_i \approx \sum_{j=1}^M \left( \overbrace{\frac{U_j \Delta S_j}{2\pi}}^{p_j} \right) \left( \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3} \right)$$

$$r_{ij} = \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_c)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

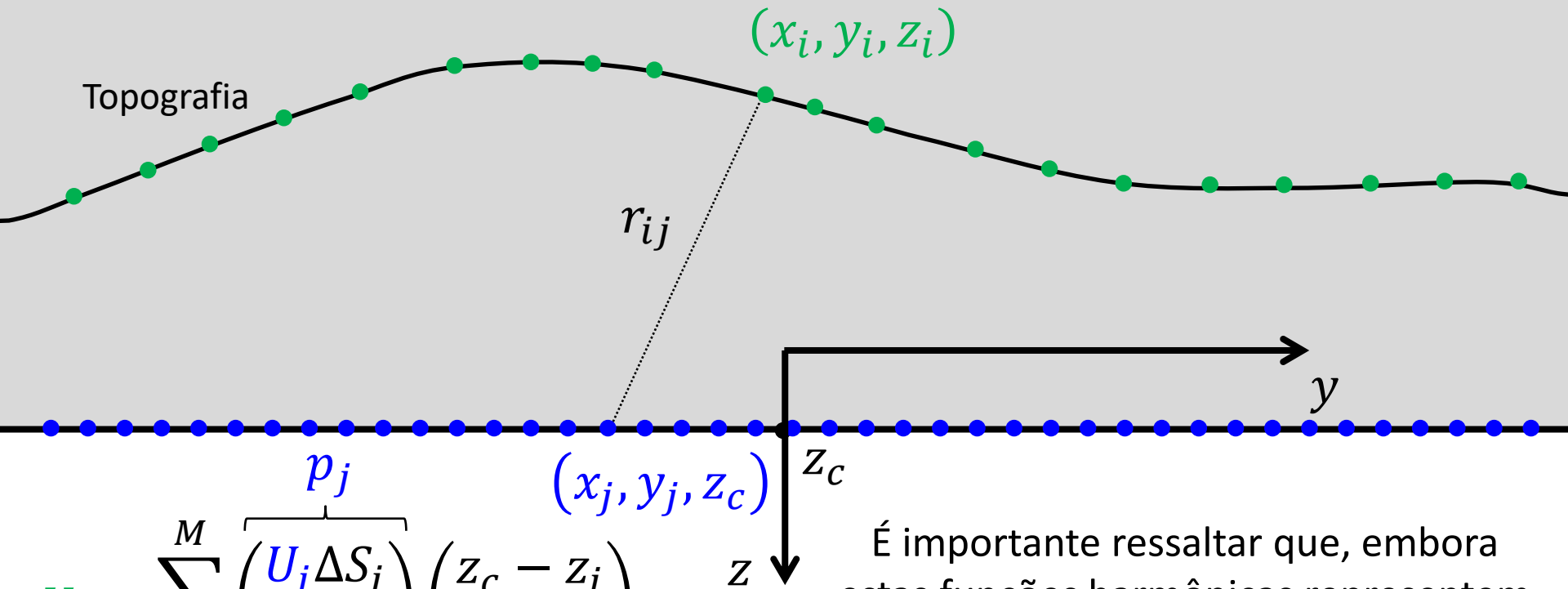
Estas esferas fictícias são denominadas  
**fontes equivalentes**

$$[\mathbf{U}]_i = U_i$$

$$[\mathbf{p}]_j = p_j$$

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3}$$

$$\mathbf{U}_{N \times 1} = \mathbf{A}_{N \times M} \mathbf{p}_{M \times 1}$$



$$U_i \approx \sum_{j=1}^M \left( \frac{U_j \Delta S_j}{2\pi} \right) \left( \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3} \right)$$

$$r_{ij} = \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_c)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

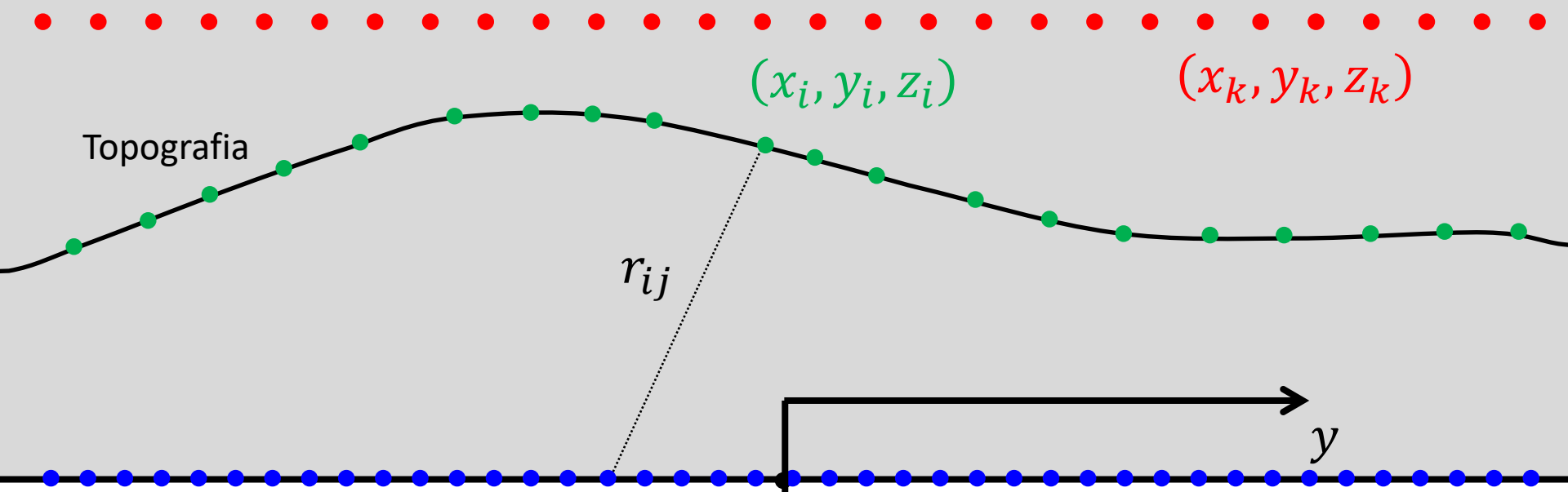
É importante ressaltar que, embora estas funções harmônicas representem um efeito gravitacional, isso não impede que, por exemplo, o campo potencial observado seja uma anomalia de campo total, por mais esquisito que isso possa parecer

$$[\mathbf{U}]_i = U_i$$

$$[\mathbf{p}]_j = p_j$$

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3}$$

$$\mathbf{U}_{N \times 1} = \mathbf{A}_{N \times M} \mathbf{p}_{M \times 1}$$



$$U_i \approx \sum_{j=1}^M \left( \frac{U_j \Delta S_j}{2\pi} \right) \left( \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3} \right)$$

$$r_{ij} = \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_c)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

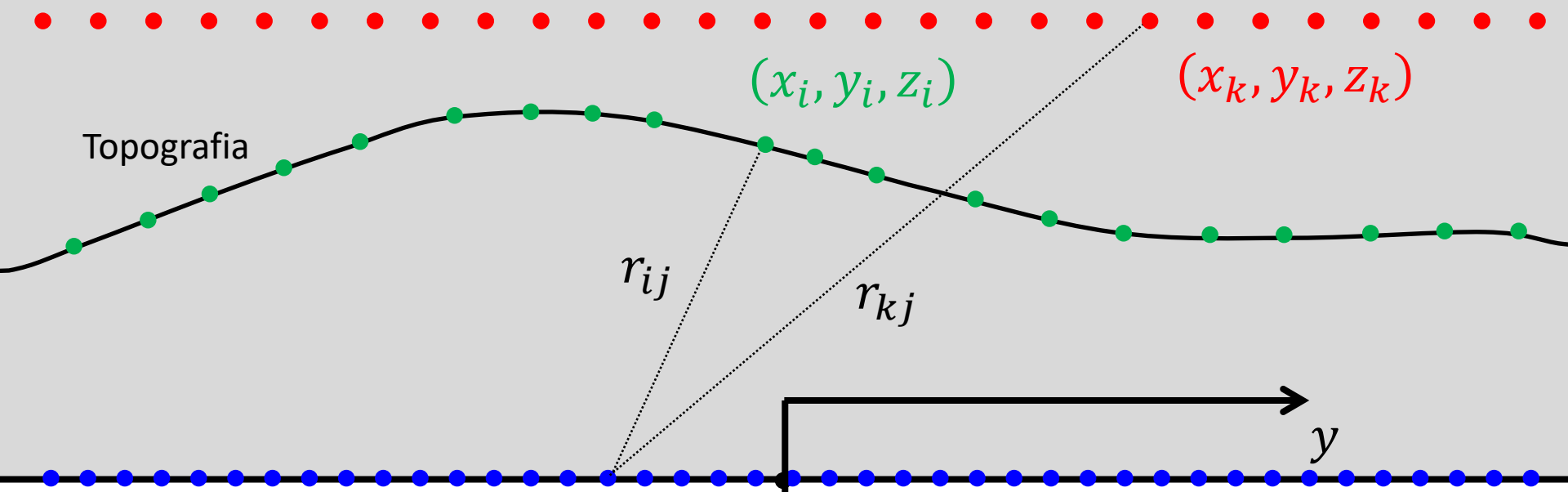
Uma vez resolvido o sistema linear para os coeficientes  $\mathbf{p}$ , é possível calcular o campo potencial, por exemplo, em um conjunto de  $L$  pontos  $(x_k, y_k, z_k)$  localizados em um plano horizontal acima das observações

$$[\mathbf{U}]_i = U_i$$

$$[\mathbf{p}]_j = p_j$$

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \frac{z_c - z_i}{r_{ij}^3}$$

$$\mathbf{U}_{N \times 1} = \mathbf{A}_{N \times M} \mathbf{p}_{M \times 1}$$



$$\tilde{U}_k \approx \sum_{j=1}^M \left( \frac{U_j \Delta S_j}{2\pi} \right) \left( \frac{z_c - z_k}{r_{kj}^3} \right)$$

Para tanto, bastaria modificar as funções harmônicas

$$r_{kj} = \left[ (x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_c)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{U}}]_k &= \tilde{U}_k \\ [\mathbf{p}]_j &= p_j \end{aligned}$$

$$[\mathbf{T}]_{kj} = \frac{z_c - z_k}{r_{kj}^3}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{L \times 1} = \mathbf{T}_{L \times M} \mathbf{p}_{M \times 1}$$

Esta abordagem, contudo, restringe a aplicação da técnica da camada equivalente para o caso em que as fontes equivalentes estão localizadas sobre um plano horizontal



Esta abordagem, contudo, restringe a aplicação da técnica da camada equivalente para o caso em que as fontes equivalentes estão localizadas sobre um plano horizontal

Outra limitação desta abordagem é a utilização de funções harmônicas que representam o efeito gravitacional das fontes equivalentes

Esta abordagem, contudo, restringe a aplicação da técnica da camada equivalente para o caso em que as fontes equivalentes estão localizadas sobre um plano horizontal

Outra limitação desta abordagem é a utilização de funções harmônicas que representam o efeito gravitacional das fontes equivalentes

A seguir, vamos generalizar a integral de continuação para cima com o intuito de remover estas duas restrições

# Referências

- Bhattacharyya, B. K., 1967, Some general properties of potential fields in space and frequency domain: a review: *Geoexploration*, 5, 127-143.
- Blakely, R. J., 1996, *Potential theory in gravity and magnetic applications*: Cambridge University Press.
- Green, G., 1871, *Mathematical papers of the late George Green*, ed. Ferrers, N. M., London: MacMillan and Co., Cambridge University Press.
- Henderson, R. G., e Zietz, I., 1949, The upward continuation of anomalies in total magnetic intensity fields: *GEOPHYSICS*, 14, 517-534.
- Henderson, R. G., 1960, A comprehensive system of automatic computation in magnetic and gravity interpretation: *GEOPHYSICS*, 25, 569-585.
- Henderson, R. G., 1970, On the validity of the use of the upward continuation integral for total magnetic intensity data: *GEOPHYSICS*, 35, 916-919.
- Kellogg, O. D., 1929, *Foundations of potential theory*: Frederick Ungar Publishing Company.
- Roy, A., 1962, Ambiguity in geophysical interpretation: *GEOPHYSICS*, 27, 90-99.
- Skeels, D. C., 1947, Ambiguity in gravity interpretation: *GEOPHYSICS*, 12, 43-56.
- Twomey, S., 1977, *Introduction to the mathematics of inversion in remote sensing and indirect measurements*: Dover Publications, Inc.