Camada equivalente aplicada ao processamento e interpretação de dados de campos potenciais

Vanderlei C. Oliveira Jr.

2016

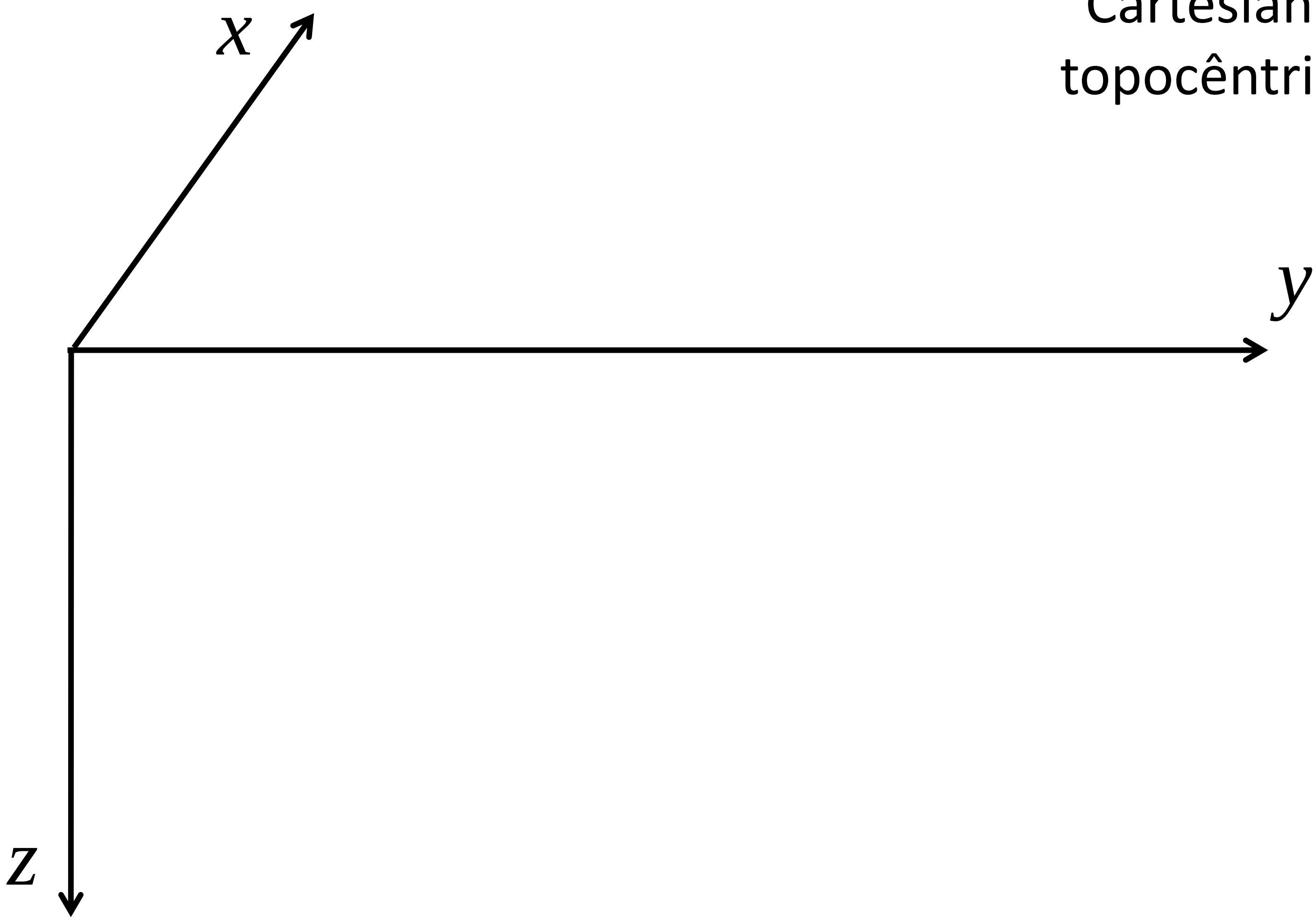
Identidades de Green

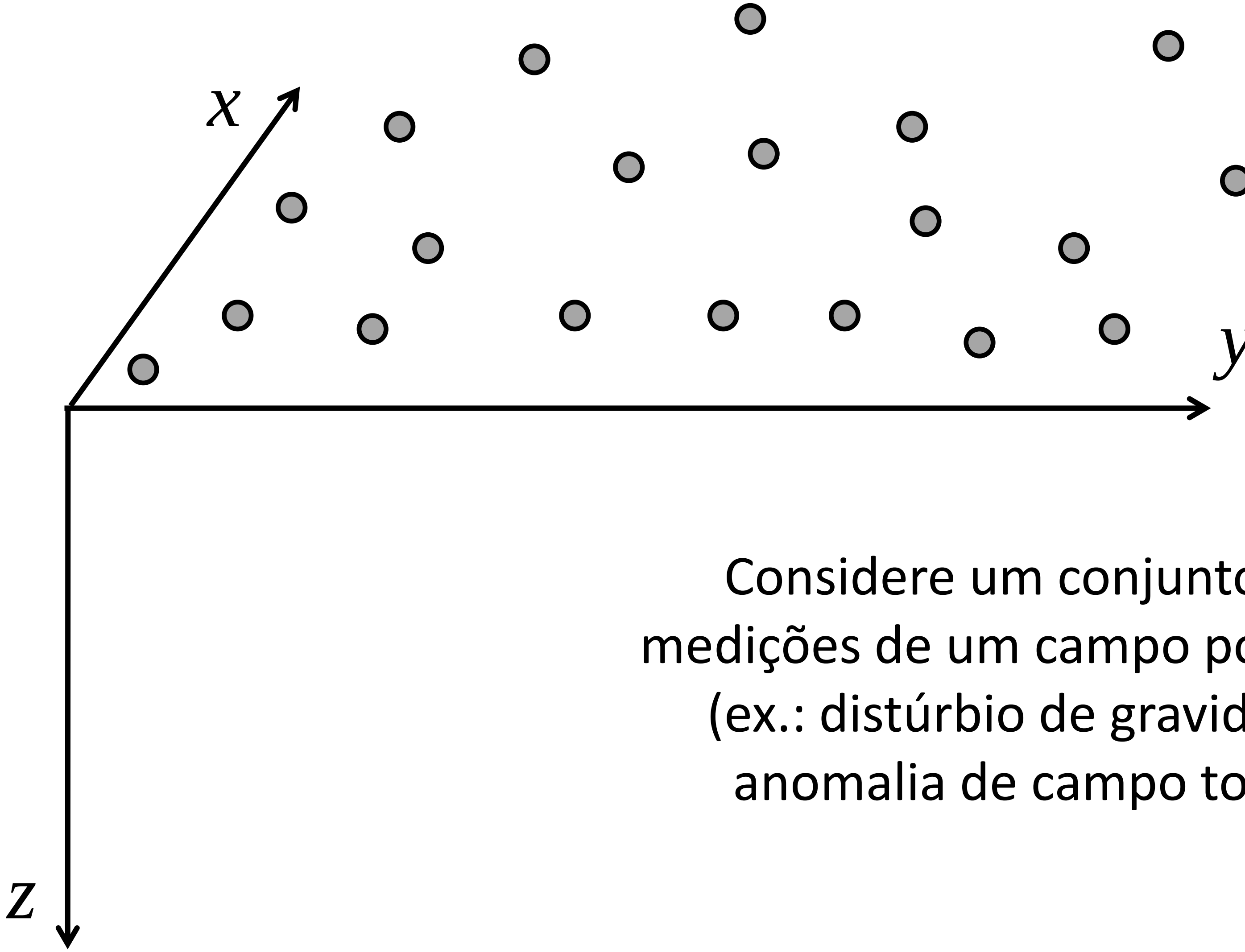
Vanderlei C. Oliveira Jr.

2016

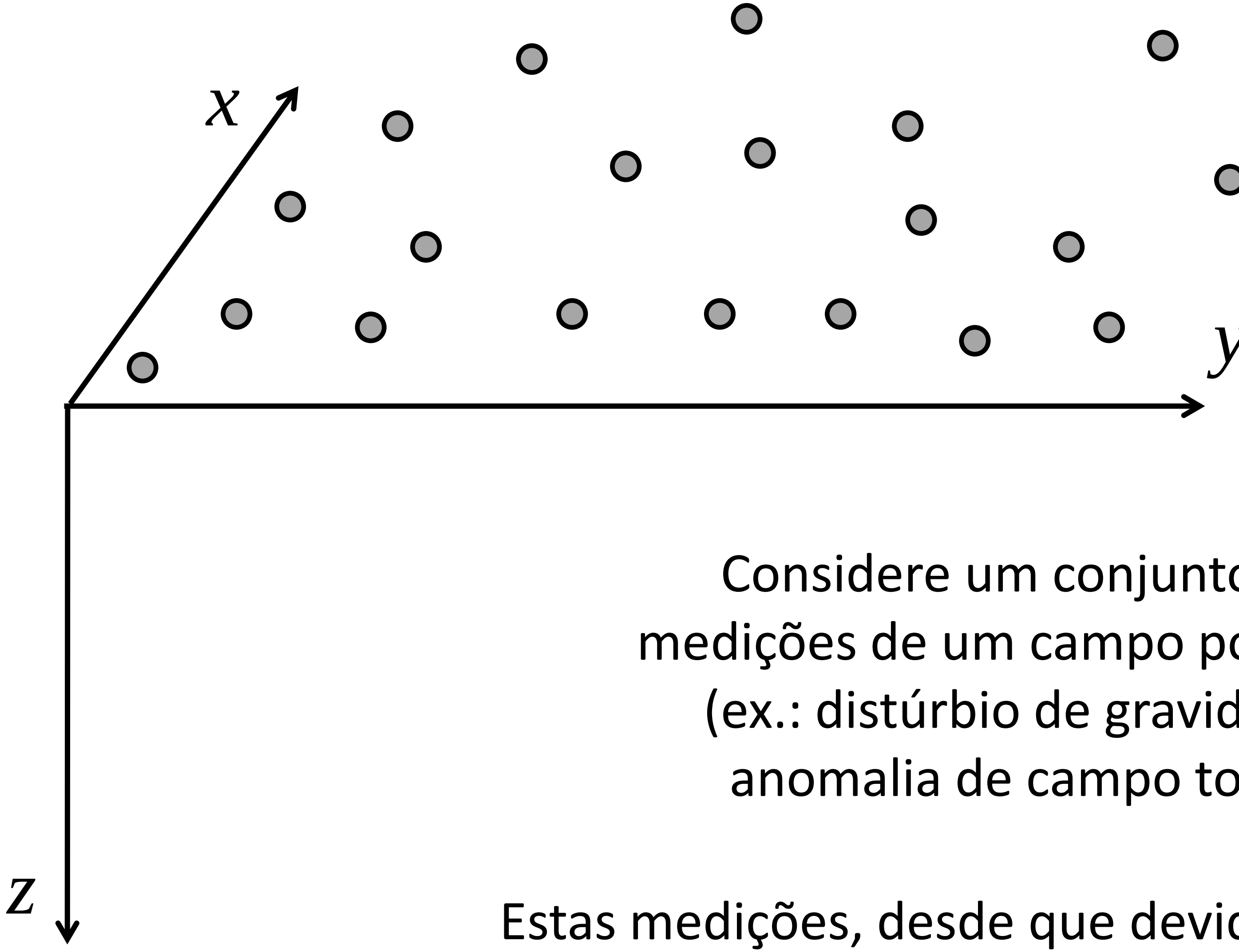
A técnica da camada equivalente é baseada em uma equação integral chamada **integral de continuação para cima** (Skeels, 1947; Henderson and Zietz, 1949; Henderson, 1960; Roy, 1962; Bhattacharyya, 1967; Henderson, 1970; Twomey, 1977; Blakely, 1996)

Considere um sistema
Cartesiano
topocêntrico



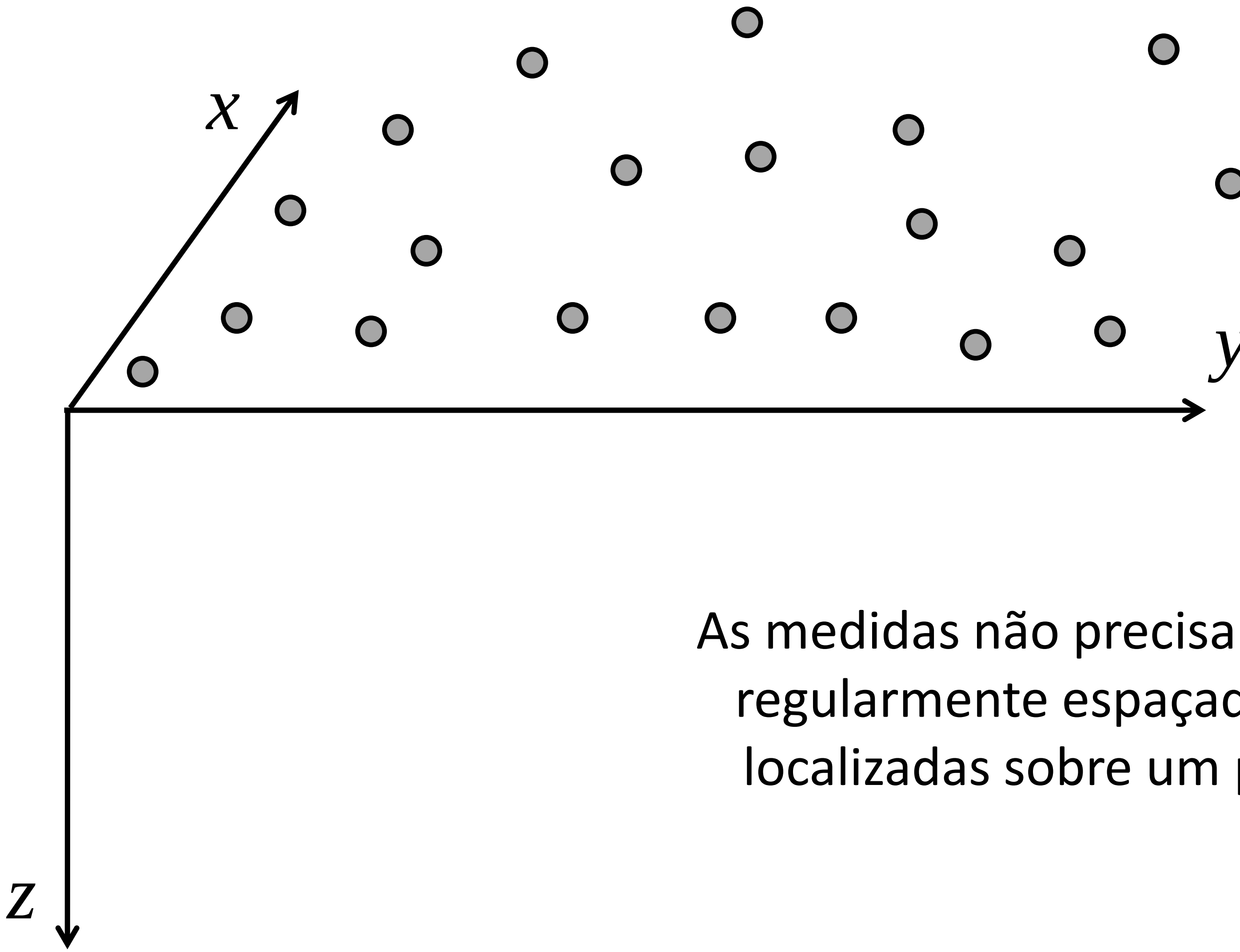


Considere um conjunto de medições de um campo potencial (ex.: distúrbio de gravidade, anomalia de campo total)

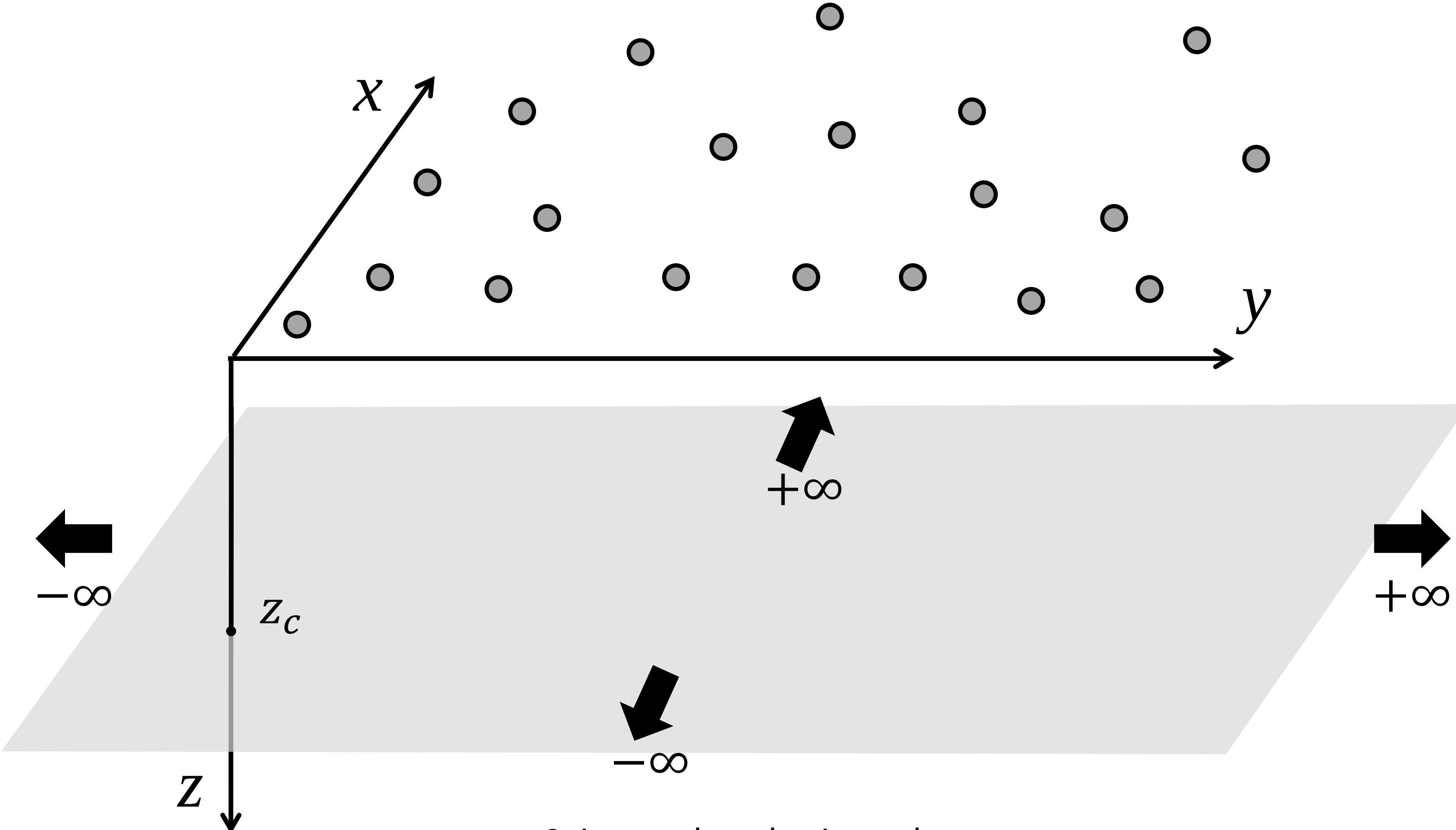


Considere um conjunto de medições de um campo potencial (ex.: distúrbio de gravidade, anomalia de campo total)

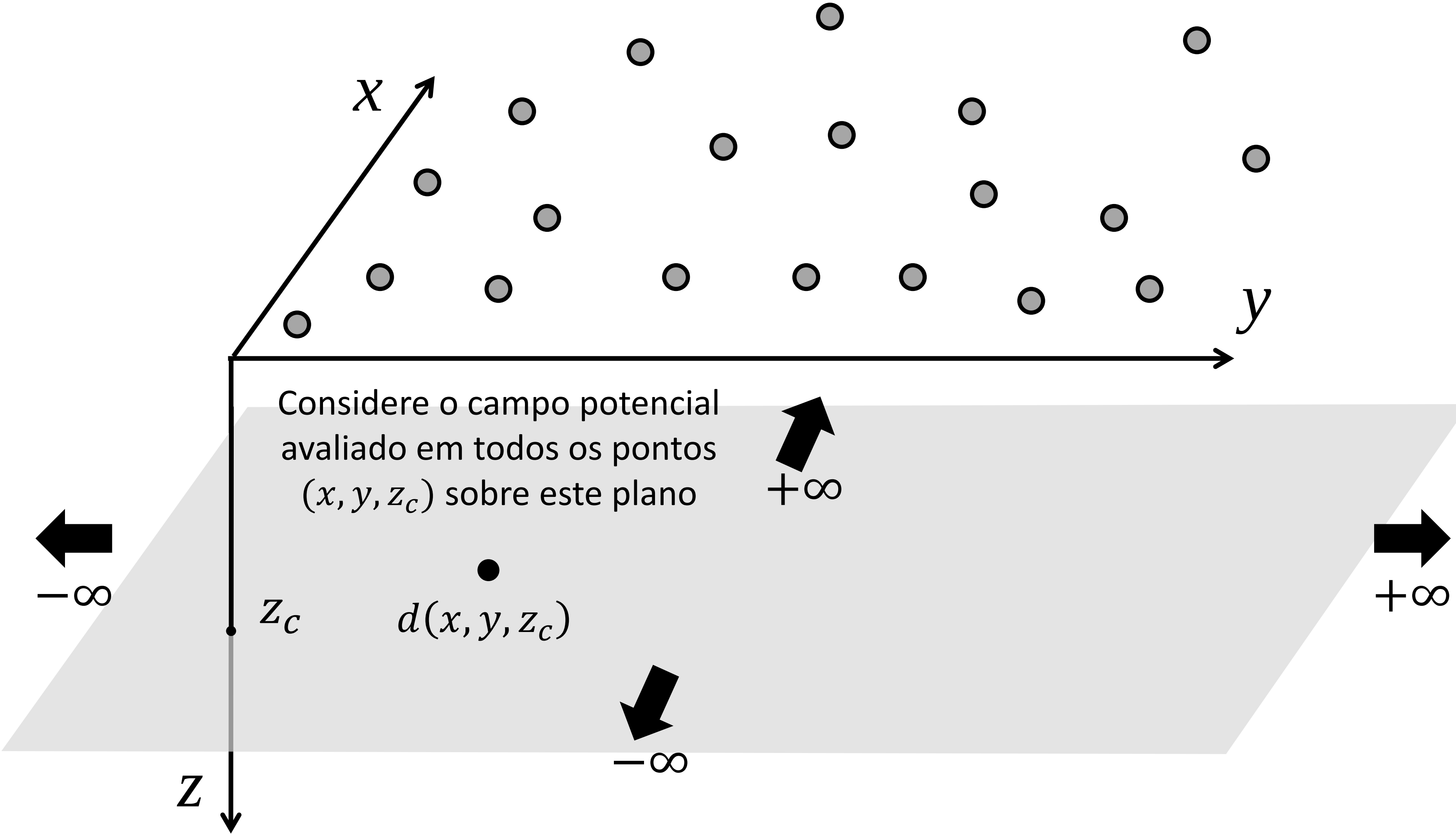
Estas medições, desde que devidamente corrigidas, representam os valores de uma determinada função harmônica avaliada nos pontos de observação



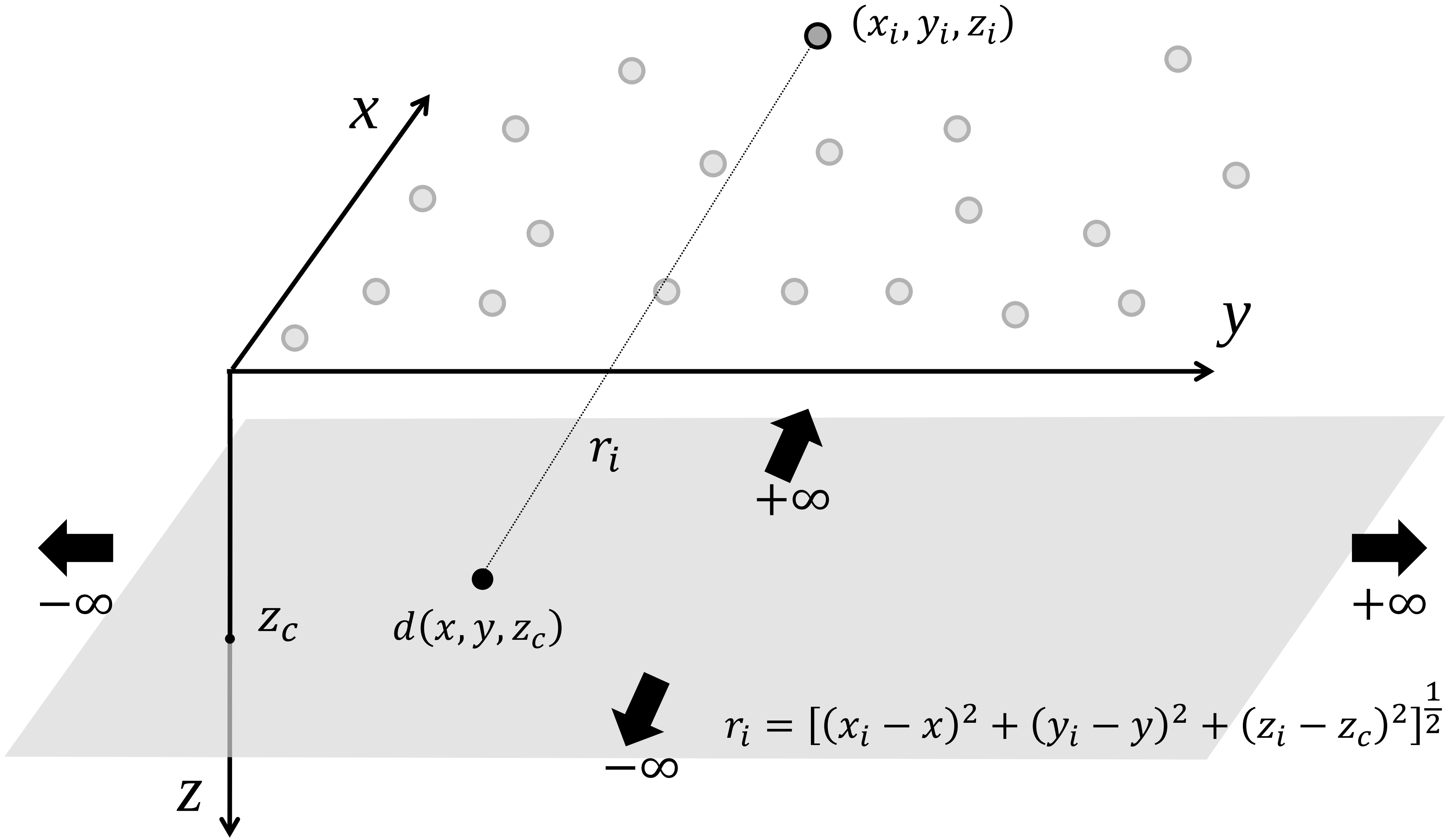
As medidas não precisam estar regularmente espaçadas ou localizadas sobre um plano



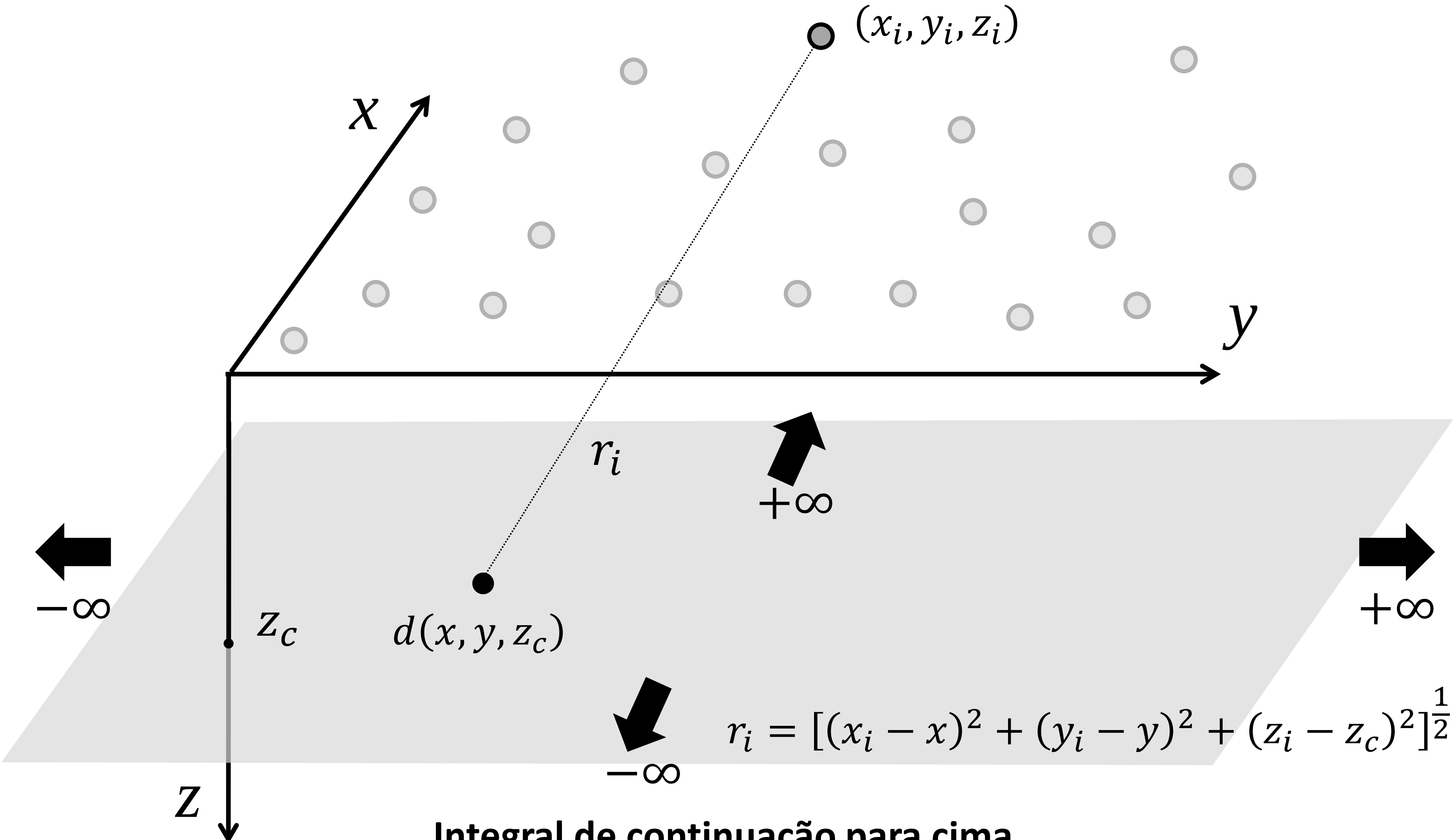
Seja um plano horizontal localizado em uma profundiade z_c acima das fontes e que se estenda para o infinito em x e y



x
y
z
Considere o campo potencial avaliado em todos os pontos (x, y, z_c) sobre este plano
$+\infty$
$-\infty$
$+\infty$
z_c
$d(x, y, z_c)$
$-\infty$



(x_i, y_i, z_i)
x
y
r_i
$+\infty$
$-\infty$
$+\infty$
z_c
$d(x, y, z_c)$
$r_i = [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z_c)^2]^{\frac{1}{2}}$
$-\infty$
z



Integral de continuação para cima

$$d(x_i, y_i, z_i) = \frac{z_c - z_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x, y, z_c)}{r_i^3} dxdy \ , \qquad z_c > z_i$$

De onde vem esta equação?

Integral de continuação para cima

$$d(x_i, y_i, z_i) = \frac{z_c - z_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x, y, z_c)}{r_i^3} dxdy \ , \qquad z_c > z_i$$

Esta equação é deduzida a partir das **identidades de Green** (Green, 1871; Kellogg, 1929)

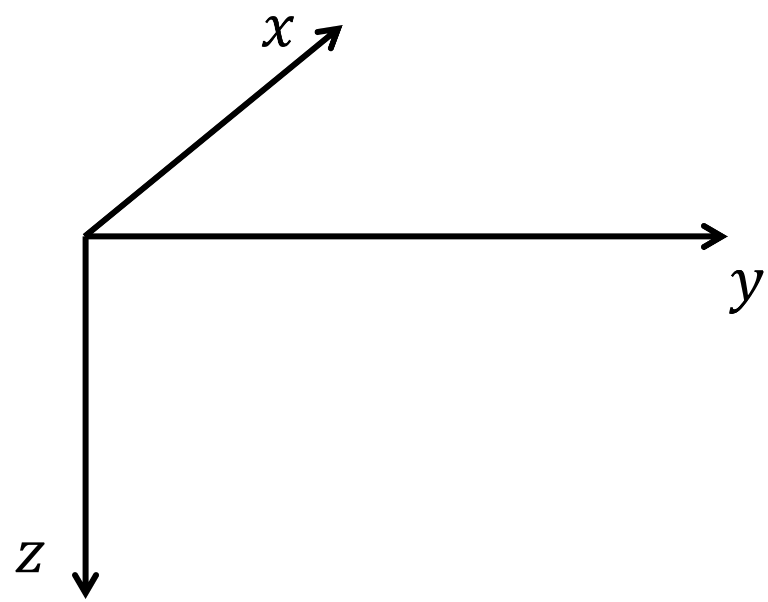
As identidades de Green são extremamente importantes no estudo de funções harmônicas

Integral de continuação para cima

$$d(x_i, y_i, z_i) = \frac{z_c - z_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x, y, z_c)}{r_i^3} dxdy \ , \qquad z_c > z_i$$

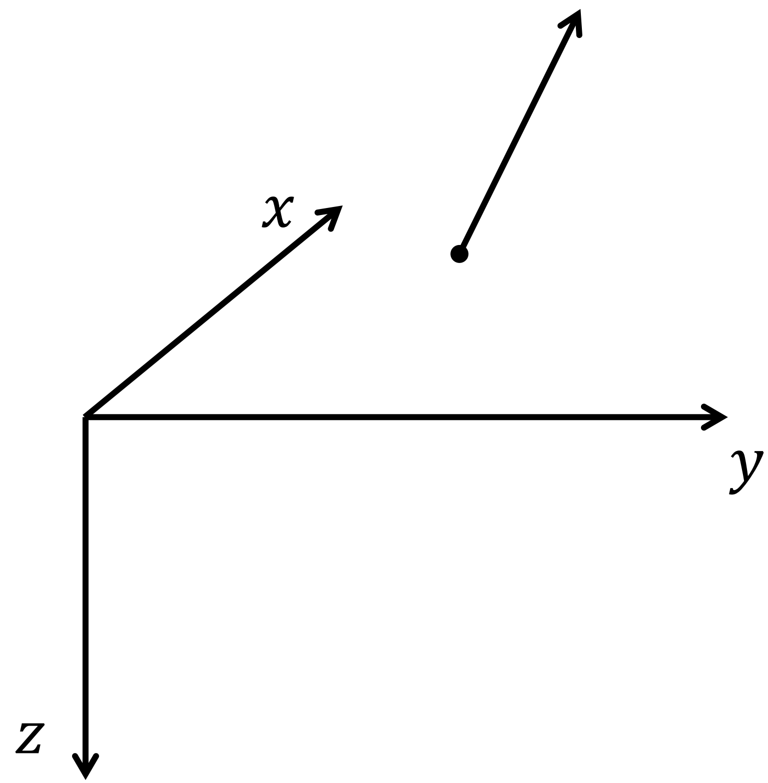
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Campo vetorial



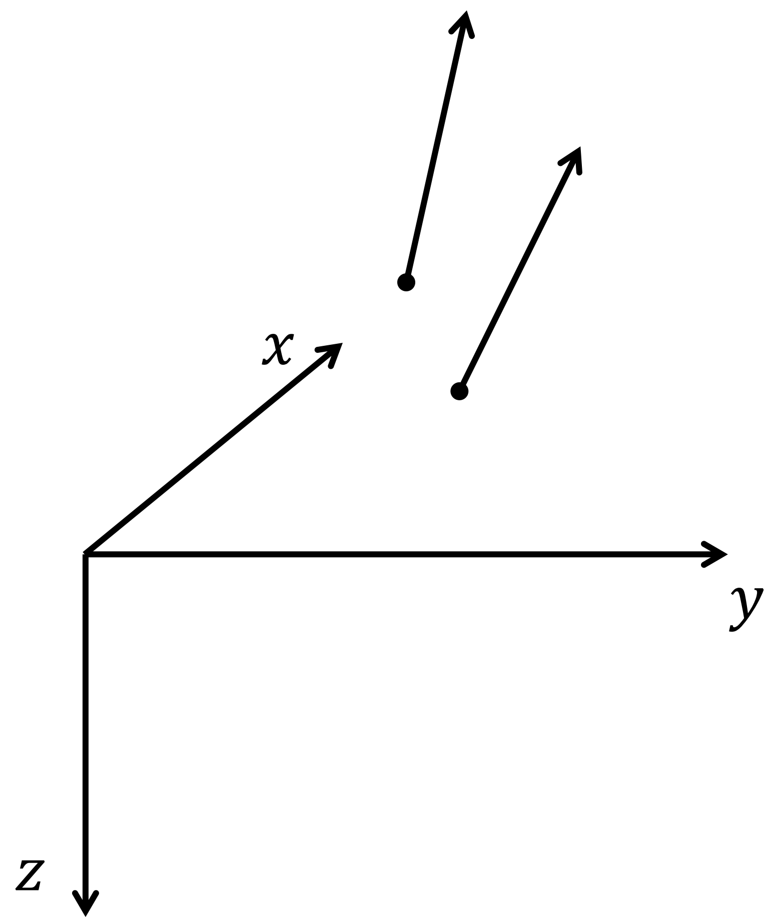
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Campo vetorial



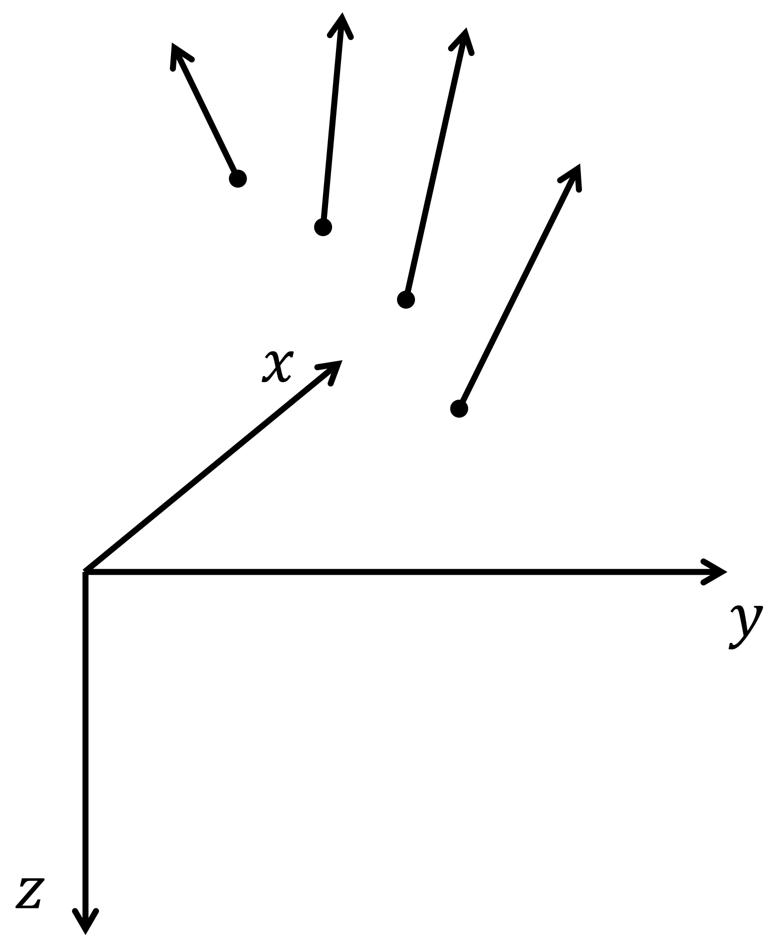
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

Campo vetorial



$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{bmatrix}$$

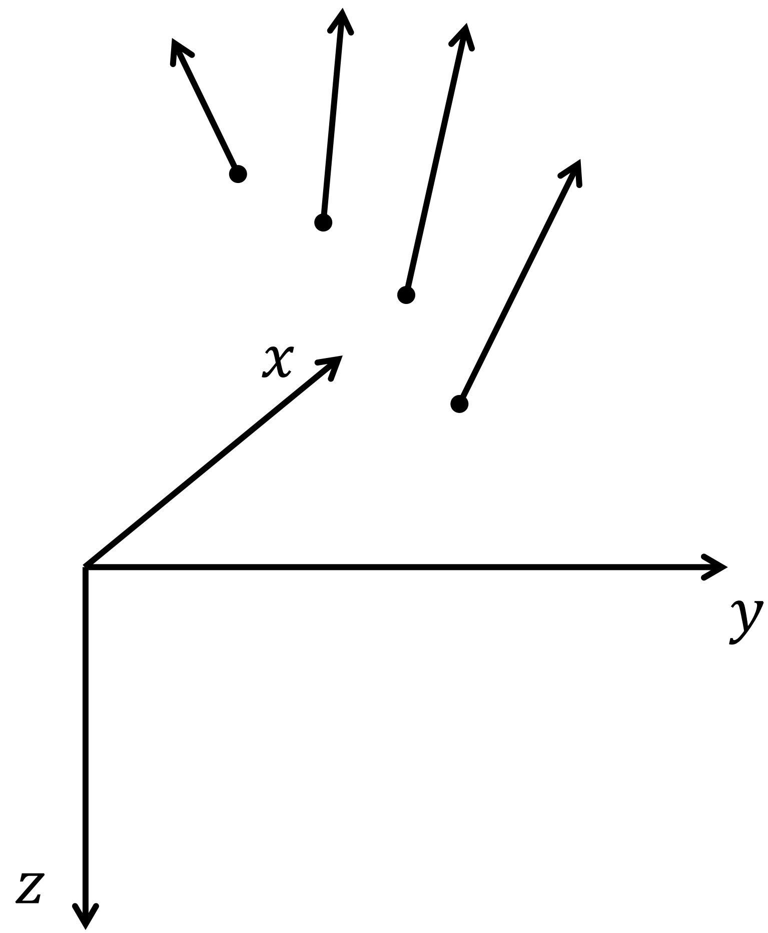
Campo vetorial



$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} \\ &= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z \end{aligned}$$

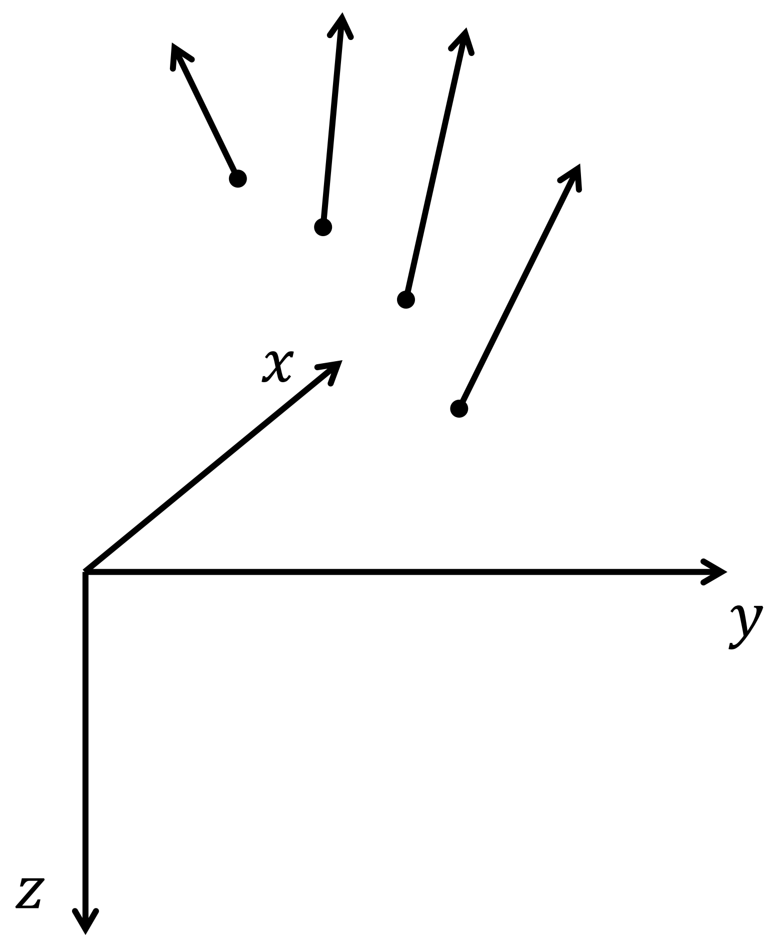


$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Por simplicidade, as coordenadas onde o campo e suas componentes são calculados foram omitidas

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{n} \\ &= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z \end{aligned}$$

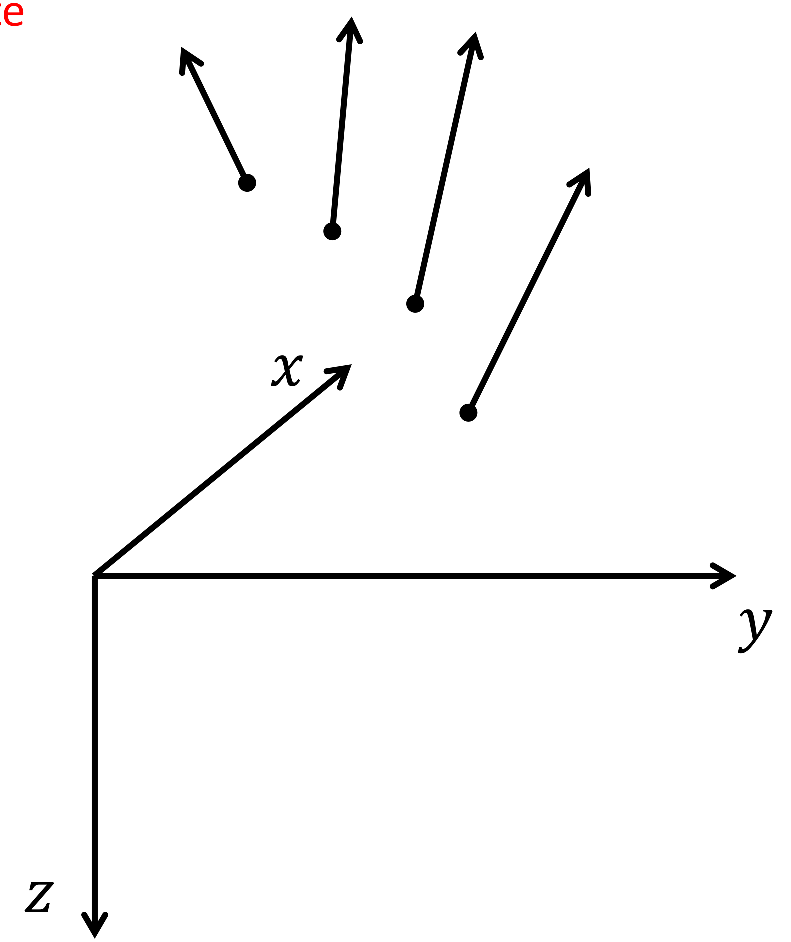


$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

Divergente de $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}$$
$$= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z$$

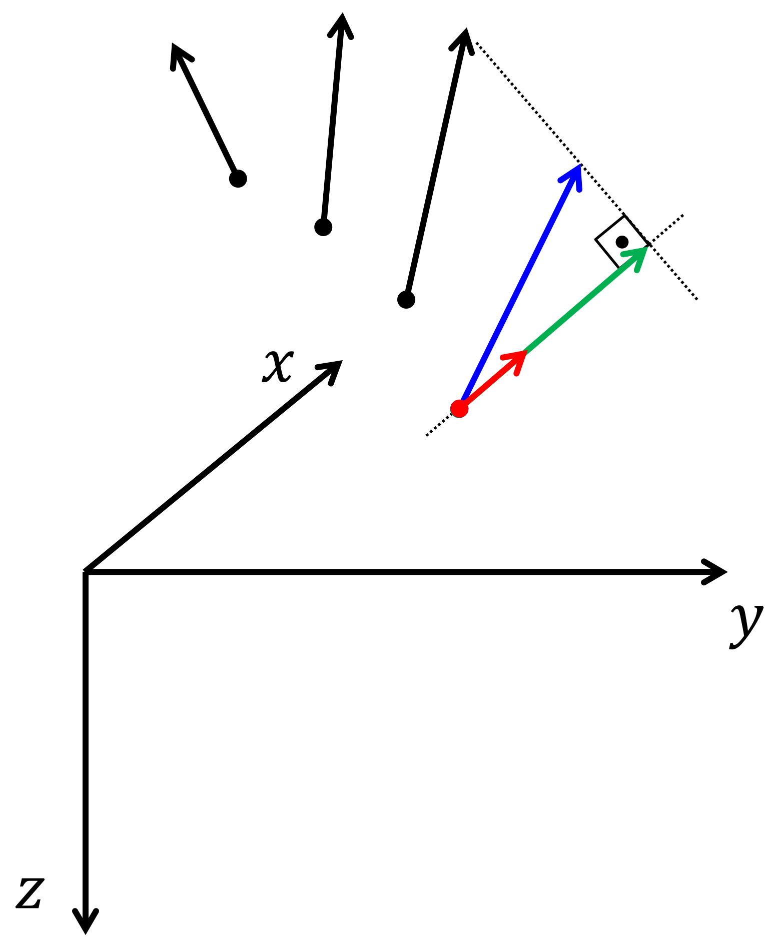


$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} \\ &= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z \end{aligned}$$

Componente de **F** na direção do vetor **n**



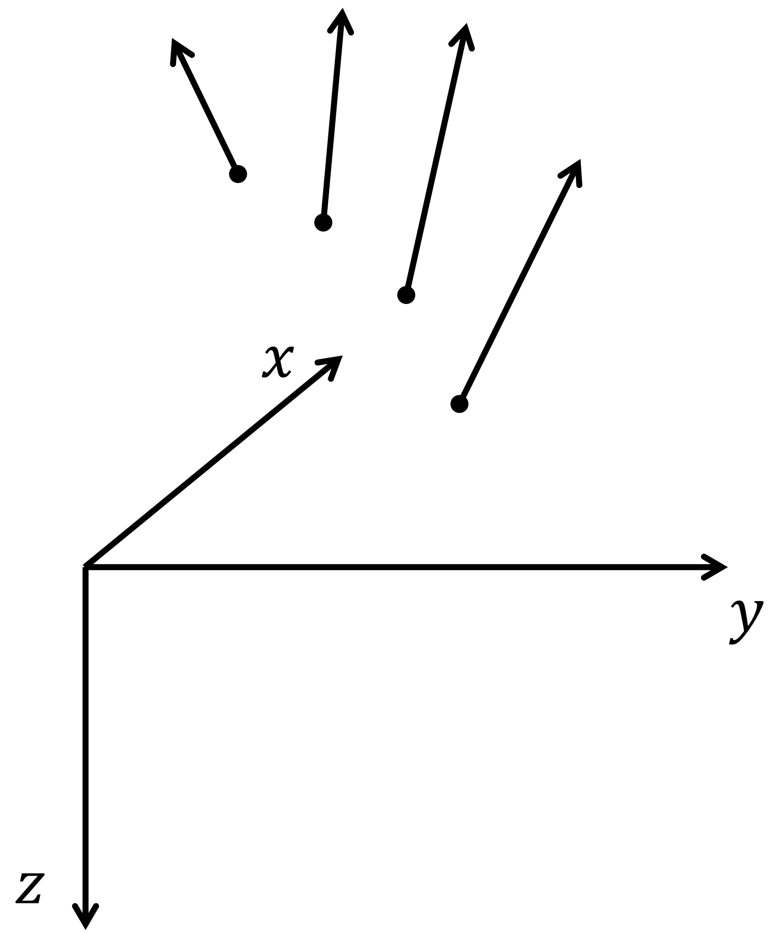
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} \\ &= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z \end{aligned}$$

$$\iiint\limits_v \nabla \cdot \mathbf{F} \; dv = \iint\limits_S \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} \; dS$$

Teorema da divergência,
Teorema de Gauss ou
Teorema de Green
(Kellogg, 1929)



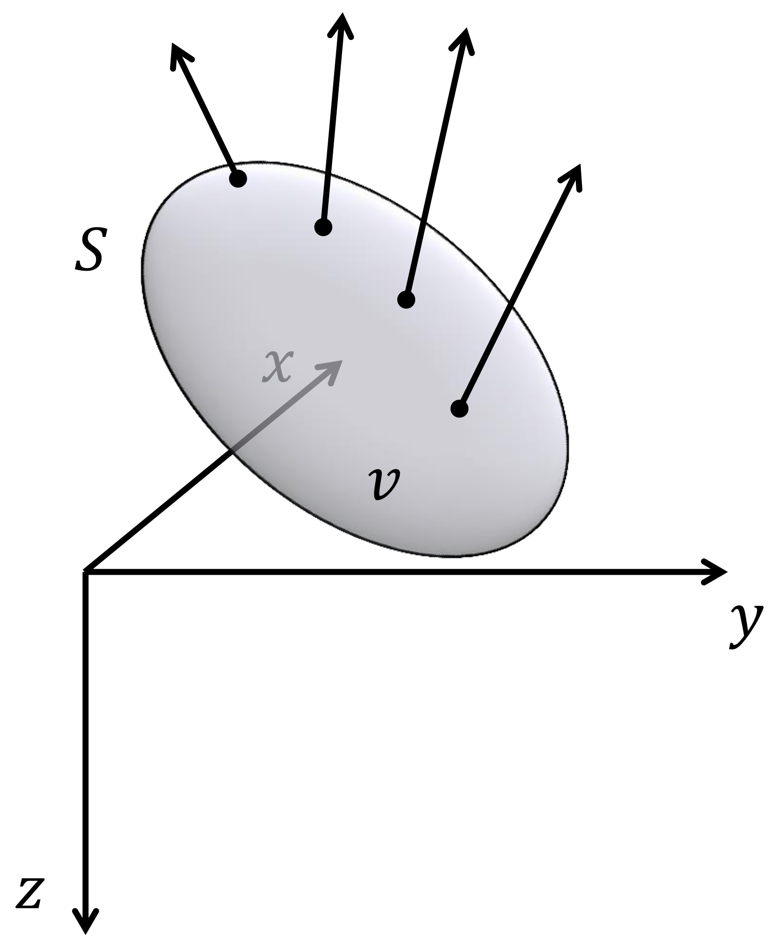
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} \\ &= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z \end{aligned}$$

$$\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F}\ dv = \iint_S \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\ dS$$

Teorema da divergência,
Teorema de Gauss ou
Teorema de Green
(Kellogg, 1929)



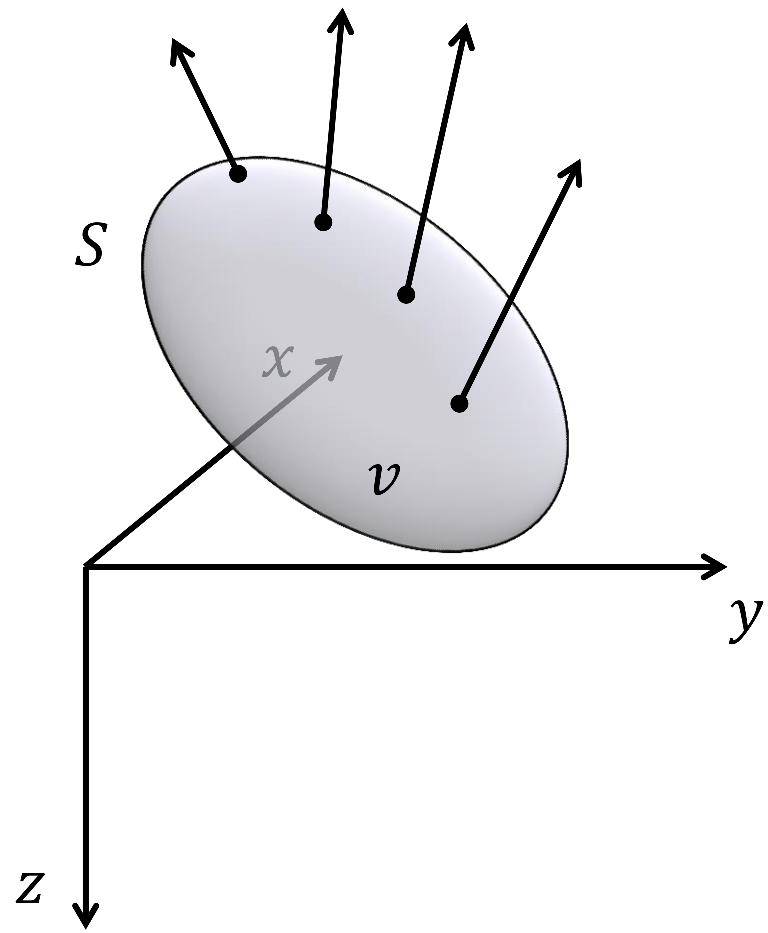
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} \\ &= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z \end{aligned}$$

$$\underbrace{\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F} \; dv}_{\text{Dentro do volume } v} = \underbrace{\iint_S \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} \; dS}_{\text{Na superfície } S}$$

Teorema da divergência,
Teorema de Gauss ou
Teorema de Green
(Kellogg, 1929)



$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

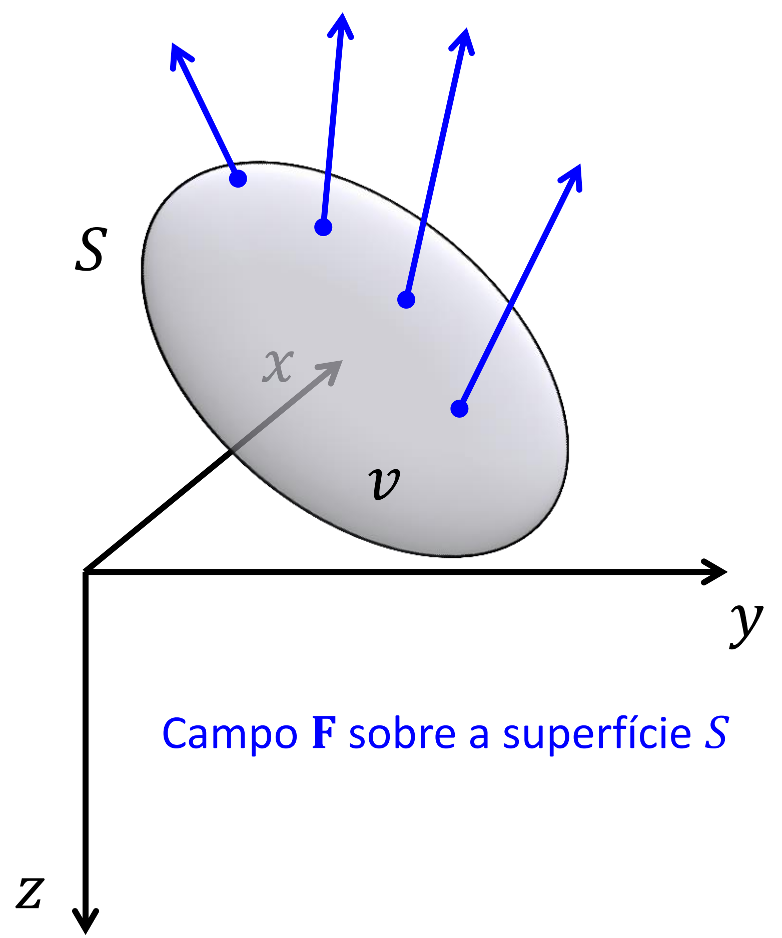
$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} \\ &= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z \end{aligned}$$

Dentro do volume v Na superfície S

$$\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F}\ dv = \iint_S \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\ dS$$

Teorema da divergência,
Teorema de Gauss ou
Teorema de Green
(Kellogg, 1929)



Campo $\mathbf{F}$ sobre a superfície S

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

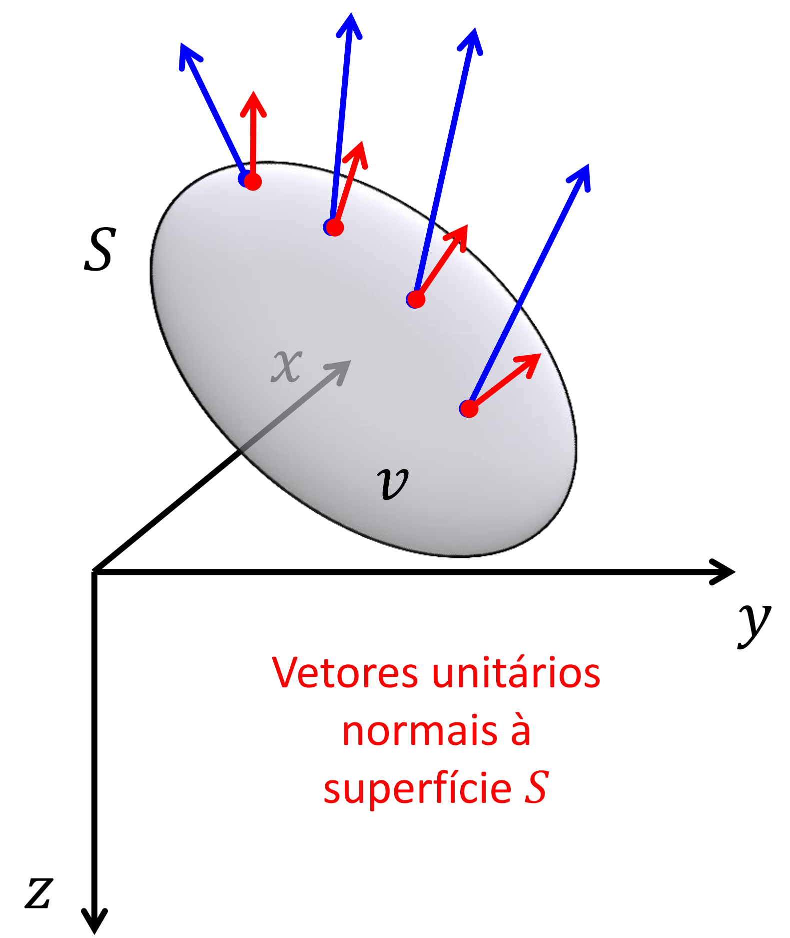
$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} \\ &= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z \end{aligned}$$

Dentro do volume v Na superfície S

$$\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F} \; dv = \iint_S \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} \; dS$$

Teorema da divergência,
Teorema de Gauss ou
Teorema de Green
(Kellogg, 1929)



$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

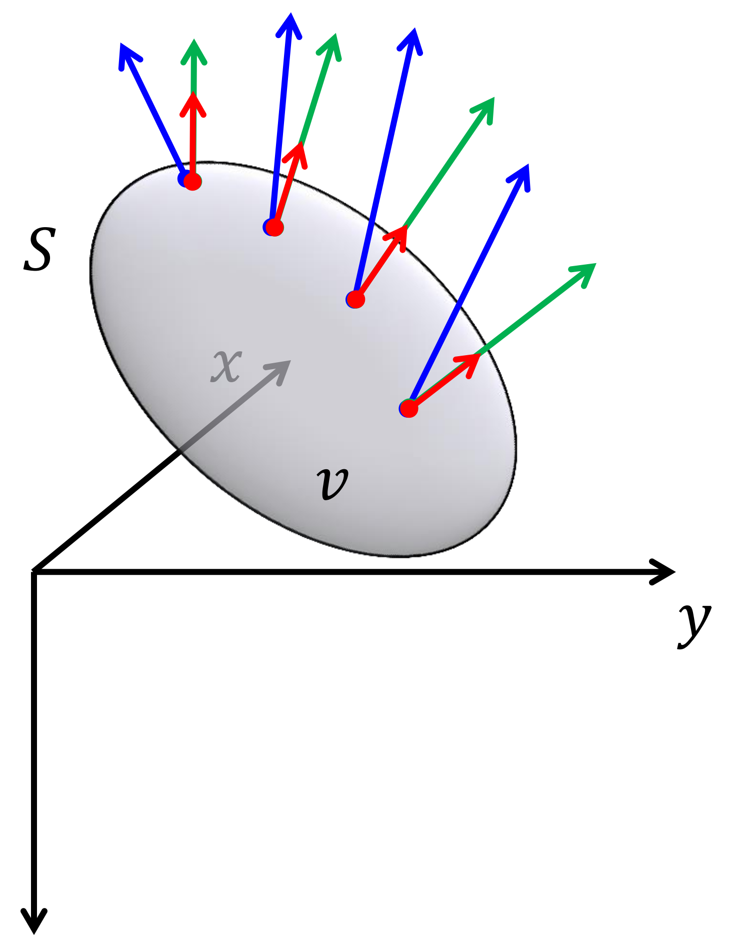
$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{n} \\ &= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z \end{aligned}$$

Dentro do volume v Na superfície S

$$\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F} \; dv = \iint_S \boxed{\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}} \, dS$$

Teorema da divergência,
Teorema de Gauss ou
Teorema de Green
(Kellogg, 1929)



$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = V\,\nabla U$$

$$= V \begin{bmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{bmatrix}$$

Considere que o campo $\mathbf{F}(x,y,z)$ seja igual ao produto entre uma função escalar $V(x,y,z)$ e o gradiente de outra função escalar $U(x,y,z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

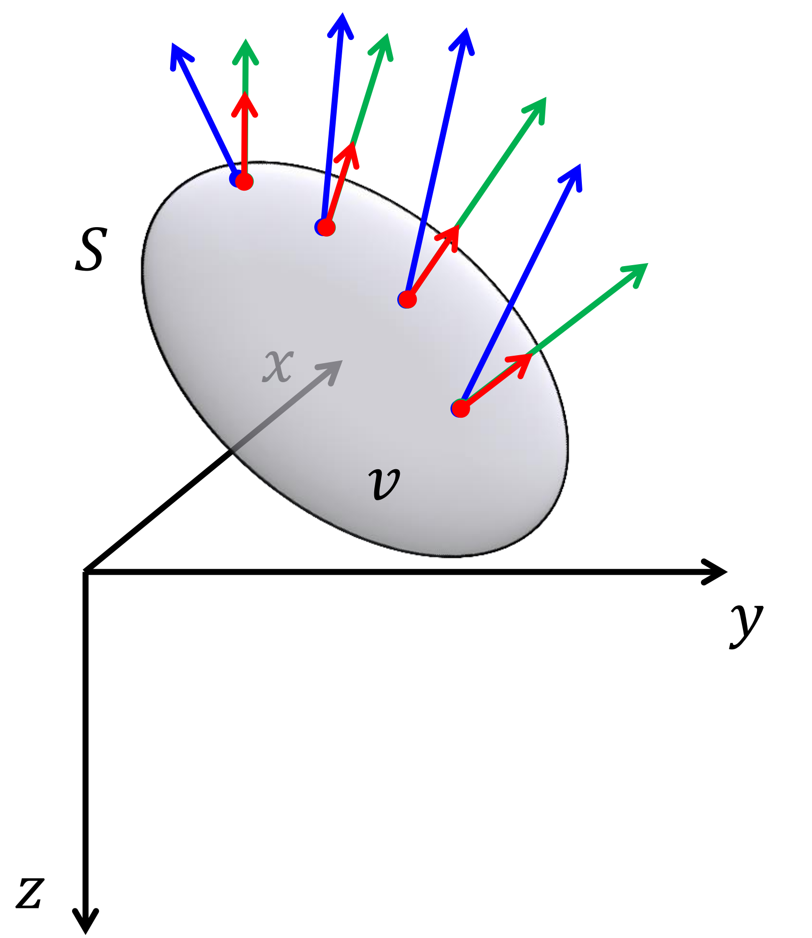
$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}$$

$$= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z$$

Dentro do volume v | Na superfície S

$$\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F}\ dv = \iint_S \boxed{\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}}\, dS$$

Teorema da divergência,
Teorema de Gauss ou
Teorema de Green
(Kellogg, 1929)



$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = V\,\nabla U$$

$$= V \begin{bmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{bmatrix}$$

Considere que o campo $\mathbf{F}(x,y,z)$ seja igual ao produto entre uma função escalar $V(x,y,z)$ e o gradiente de outra função escalar $U(x,y,z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

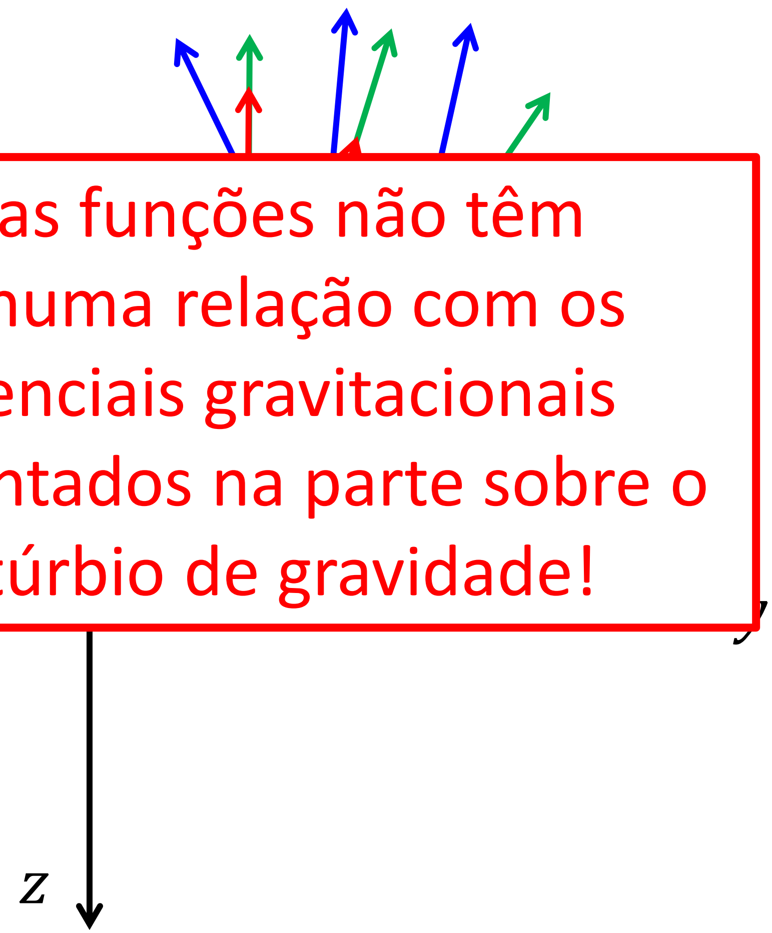
$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}$$

$$= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z$$

Dentro do volume v Na superfície S

$$\iiint\limits_{v} \nabla \cdot \mathbf{F}\; dv = \iint\limits_{S} \boxed{\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}}\, dS$$

Teorema da divergência,
Teorema de Gauss ou
Teorema de Green
(Kellogg, 1929)



Estas funções não têm nenhuma relação com os potenciais gravitacionais apresentados na parte sobre o distúrbio de gravidade!

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}$$
$$= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z$$

Dentro do volume v — Na superfície S

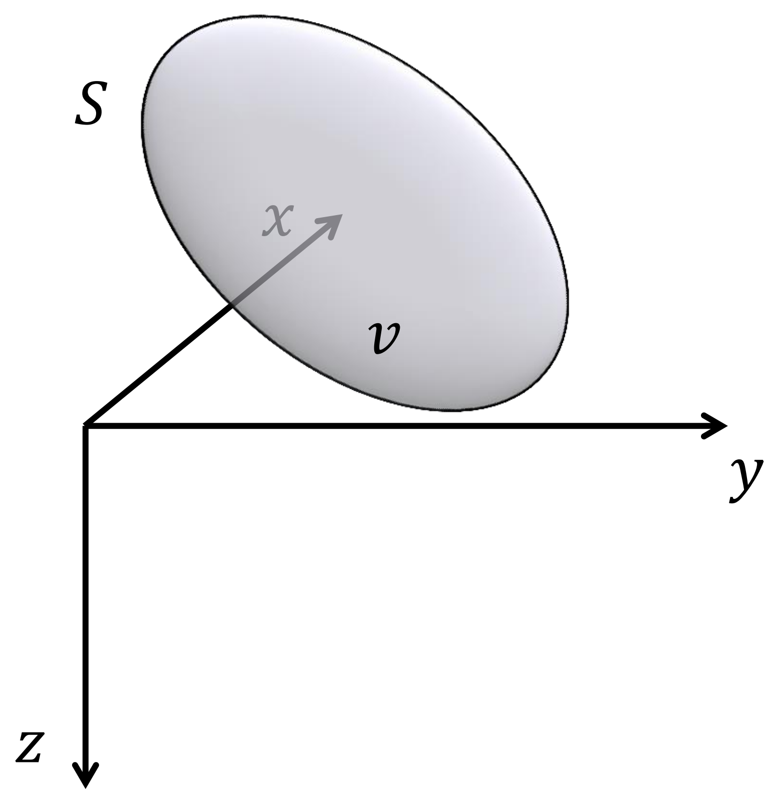
$$\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F} \; dv = \iint_S \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} \; dS$$

Teorema da divergência, **Teorema de Gauss** ou **Teorema de Green** (Kellogg, 1929)

$$\mathbf{F} = V \, \nabla U$$
$$= V \begin{bmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{bmatrix}$$

Considere que o campo $\mathbf{F}(x,y,z)$ seja igual ao produto entre uma função escalar $V(x,y,z)$ e o gradiente de outra função escalar $U(x,y,z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V \, \nabla^2 U$$



$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = V\ \nabla U$$

$$= V \begin{bmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{bmatrix}$$

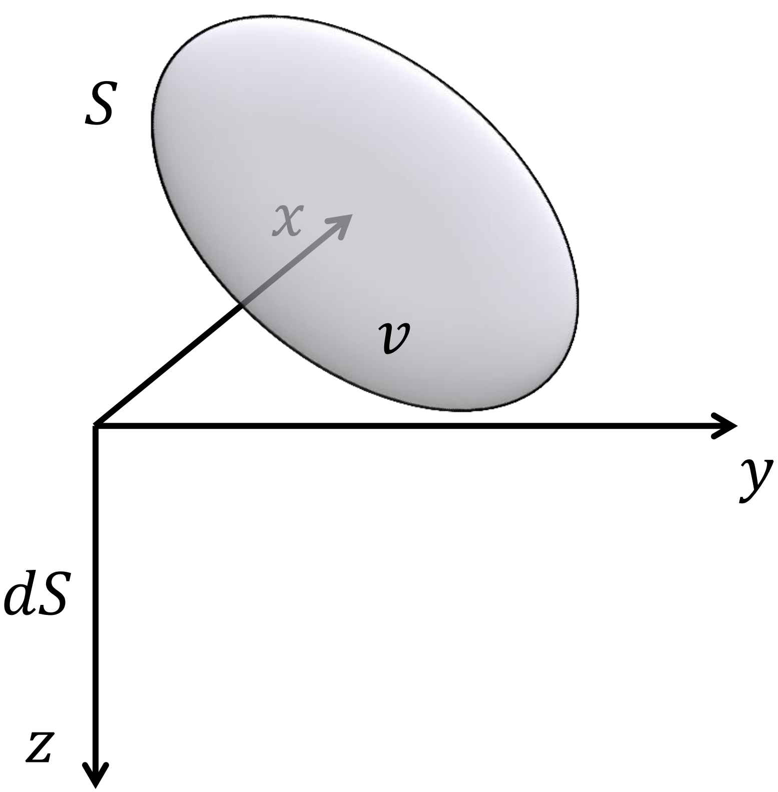
Considere que o campo $\mathbf{F}(x,y,z)$ seja igual ao produto entre uma função escalar $V(x,y,z)$ e o gradiente de outra função escalar $U(x,y,z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V\ \nabla^2 U$$

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}$$

$$= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z$$



Dentro do volume v Na superfície S

$$\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F}\ dv = \iint_S \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\ dS$$

$$\iiint_v \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V\ \nabla^2 U\, dv = \iint_S V\ \nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\ dS$$

Primeira identidade de Green (Kellogg, 1929)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = V\ \nabla U$$
$$= V \begin{bmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{bmatrix}$$

Considere que o campo $\mathbf{F}(x,y,z)$ seja igual ao produto entre uma função escalar $V(x,y,z)$ e o gradiente de outra função escalar $U(x,y,z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V\ \nabla^2 U$$

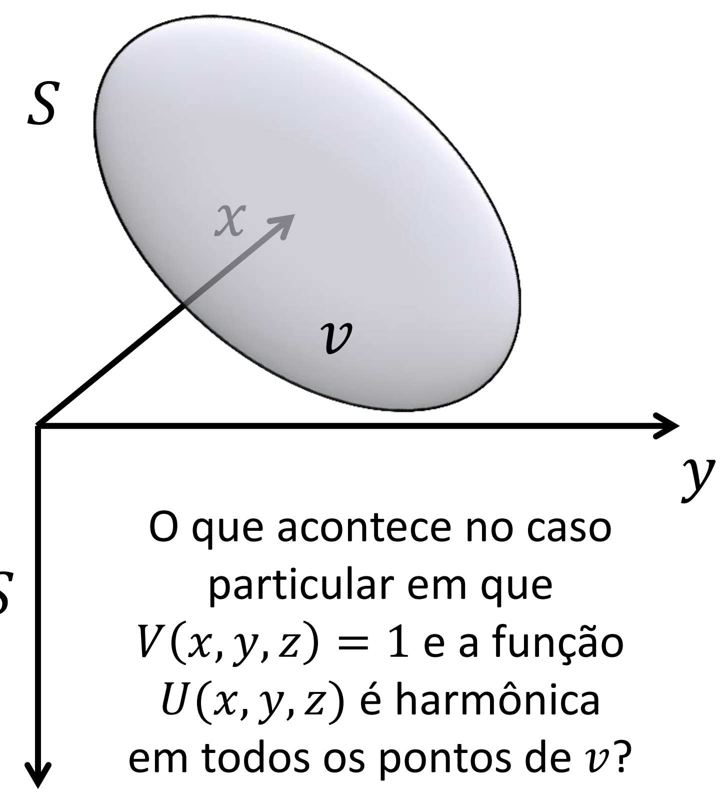
$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}$$
$$= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z$$

Dentro do volume v Na superfície S

$$\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F}\ dv = \iint_S \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\ dS$$

$$\iiint_v \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V\ \nabla^2 U\, dv = \iint_S V\ \nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\ dS$$

Primeira identidade de Green (Kellogg, 1929)



O que acontece no caso particular em que $V(x,y,z) = 1$ e a função $U(x,y,z)$ é harmônica em todos os pontos de v?

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{n}$$
$$= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z$$

Dentro do volume v Na superfície S

$$\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F} \; dv = \iint_S \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \; dS$$

$$\iiint_v \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V \; \nabla^2 U \, dv = \iint_S V \; \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \; dS$$

Primeira identidade de Green (Kellogg, 1929)

$$\mathbf{F} = V \; \nabla U$$
$$= V \begin{bmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{bmatrix}$$

Considere que o campo $\mathbf{F}(x,y,z)$ seja igual ao produto entre uma função escalar $V(x,y,z)$ e o gradiente de outra função escalar $U(x,y,z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V \; \nabla^2 U$$

$$\mathbf{E} = U \; \nabla V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla U^{\mathrm{T}} \nabla V + U \; \nabla^2 V$$

Considere outro campo vetorial obtido trocando-se a ordem das funções U e V

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{n}$$
$$= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z$$

Dentro do volume v Na superfície S

$$\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F} \; dv = \iint_S \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \; dS$$

$$\mathbf{F} = V \, \nabla U$$
$$= V \begin{bmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{bmatrix}$$

Considere que o campo $\mathbf{F}(x,y,z)$ seja igual ao produto entre uma função escalar $V(x,y,z)$ e o gradiente de outra função escalar $U(x,y,z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V \, \nabla^2 U$$

$$\mathbf{E} = U \, \nabla V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla U^{\mathrm{T}} \nabla V + U \, \nabla^2 V$$

Considere outro campo vetorial obtido trocando-se a ordem das funções U e V

Por mais estranho que isso pareça, isso é perfeitamente possível

$$\iiint_v \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V \, \nabla^2 U \, dv = \iint_S V \, \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \; dS$$

Primeira identidade de Green (Kellogg, 1929)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = V\,\nabla U$$

$$= V \begin{bmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{bmatrix}$$

Considere que o campo $\mathbf{F}(x,y,z)$ seja igual ao produto entre uma função escalar $V(x,y,z)$ e o gradiente de outra função escalar $U(x,y,z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V\,\nabla^2 U$$

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{n}$$

$$= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z$$

$$\mathbf{E} = U\,\nabla V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla U^{\mathrm{T}} \nabla V + U\,\nabla^2 V$$

Dentro do volume v — Na superfície S

$$\iiint\limits_v \nabla \cdot \mathbf{F}\; dv = \iint\limits_S \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}\; dS$$

$$\iiint\limits_v \nabla U^{\mathrm{T}} \nabla V + U\,\nabla^2 V\, dv = \iint\limits_S U\,\nabla V^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}\; dS$$

$$\iiint\limits_v \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V\,\nabla^2 U\, dv = \iint\limits_S V\,\nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}\; dS$$

Este é a primeira identidade de Green obtida para este novo campo $\mathbf{E}$

Primeira identidade de Green (Kellogg, 1929)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = V\ \nabla U$$

$$= V \begin{bmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{bmatrix}$$

Considere que o campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ seja igual ao produto entre uma função escalar $V(x, y, z)$ e o gradiente de outra função escalar $U(x, y, z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V\ \nabla^2 U$$

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{n}$$

$$= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z$$

$$\mathbf{E} = U\ \nabla V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla U^{\mathrm{T}} \nabla V + U\ \nabla^2 V$$

Dentro do volume v Na superfície S

$$\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F}\ dv = \iint_S \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}\ dS$$

$$\iiint_v \nabla U^{\mathrm{T}} \nabla V + U\ \nabla^2 V\ dv = \iint_S U\ \nabla V^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}\ dS$$

$$\iiint_v \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V\ \nabla^2 U\ dv = \iint_S V\ \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}\ dS$$

Subtraindo a equação ao lado desta equação...

Primeira identidade de Green (Kellogg, 1929)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{n} = F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z$$

Dentro do volume v Na superfície S

$$\iiint\limits_v \nabla \cdot \mathbf{F} \; dv = \iint\limits_S \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \; dS$$

Considere que o campo $\mathbf{F}(x,y,z)$ seja igual ao produto entre uma função escalar $V(x,y,z)$ e o gradiente de outra função escalar $U(x,y,z)$

$$\mathbf{F} = V \, \nabla U = V \begin{bmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V \, \nabla^2 U$$

$$\mathbf{E} = U \, \nabla V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla U^{\mathrm{T}} \nabla V + U \, \nabla^2 V$$

$$\iiint\limits_v U \, \nabla^2 V - V \, \nabla^2 U \, dv = \iint\limits_S U \, \nabla V^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - V \, \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \; dS$$

Segunda identidade de Green (Kellogg, 1929)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{n} \\ &= F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z \end{aligned}$$

Dentro do volume v Na superfície S

$$\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F} \; dv = \iint_S \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \; dS$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= V \; \nabla U \\ &= V \begin{bmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Considere que o campo $\mathbf{F}(x,y,z)$ seja igual ao produto entre uma função escalar $V(x,y,z)$ e o gradiente de outra função escalar $U(x,y,z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla V^{\mathrm{T}} \nabla U + V \; \nabla^2 U$$

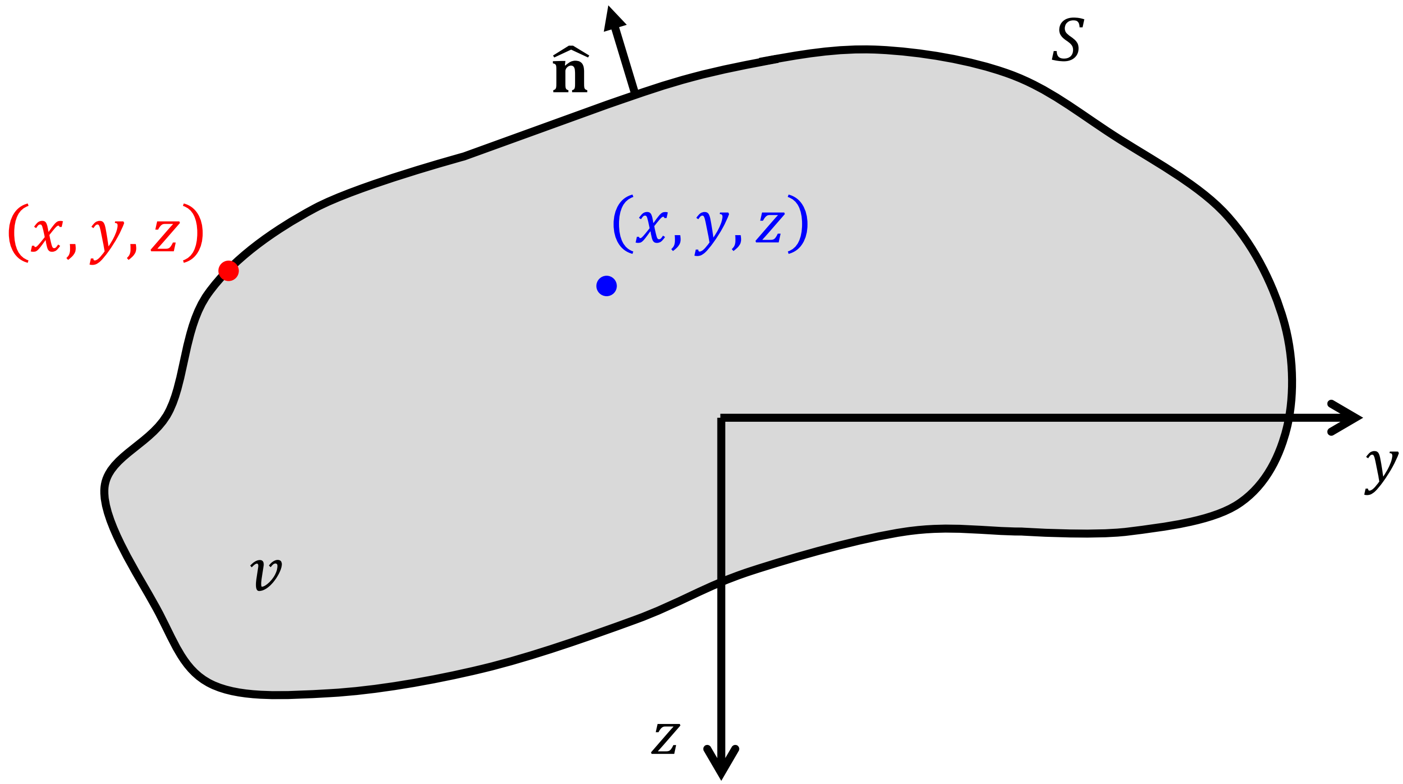
$$\mathbf{E} = U \; \nabla V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla U^{\mathrm{T}} \nabla V + U \; \nabla^2 V$$

$$\iiint_v U \; \nabla^2 V - V \; \nabla^2 U \, dv = \iint_S U \; \nabla V^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - V \; \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \; dS$$

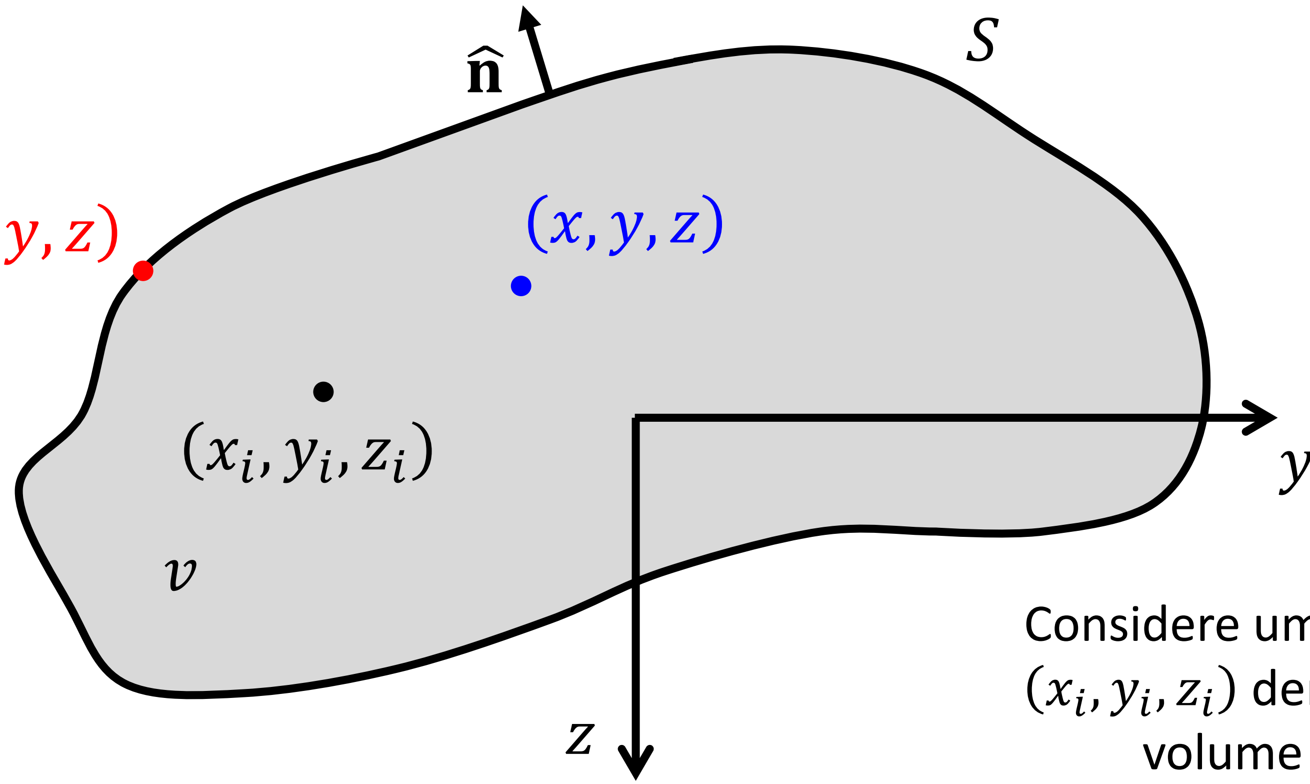
Segunda identidade de Green (Kellogg, 1929)

O que acontece no caso particular em que as funções U e V são harmônicas?



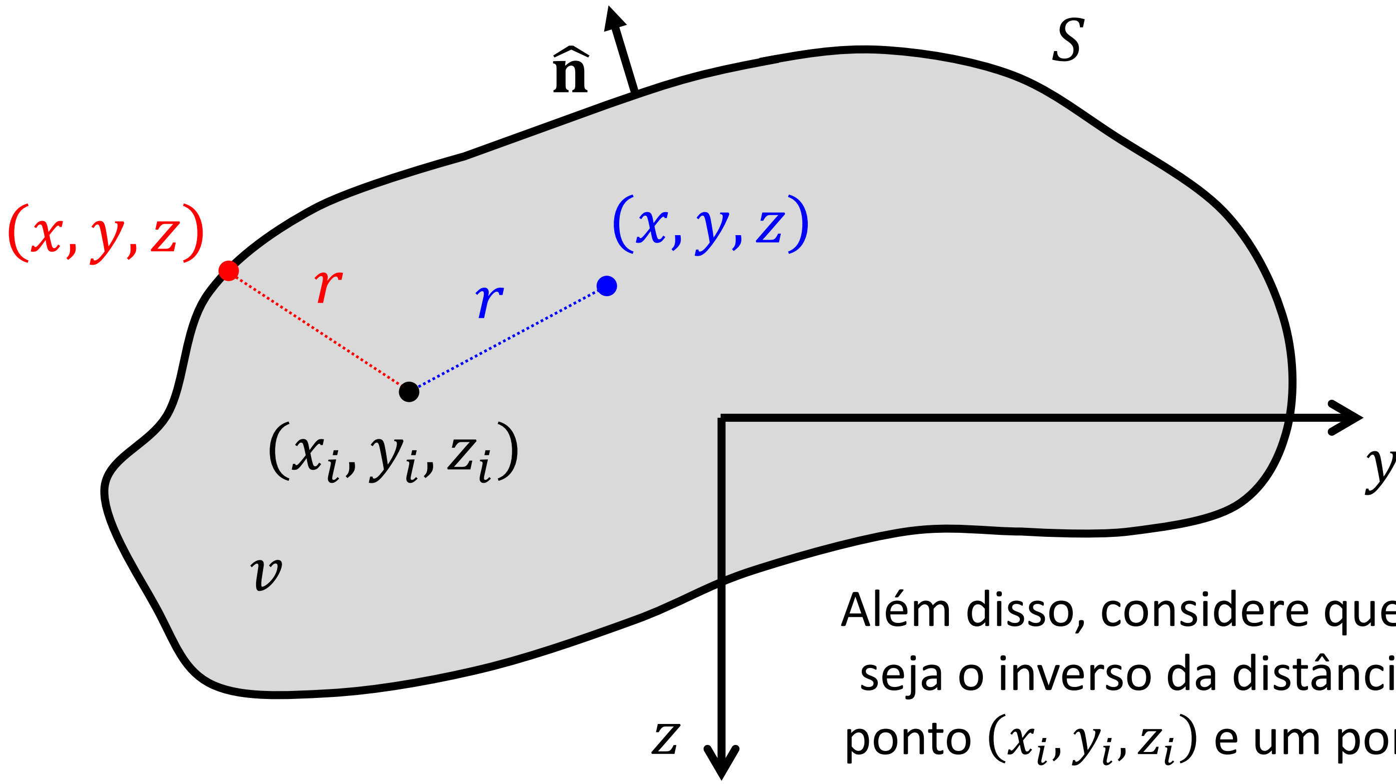
$$\iiint\limits_{v} U\,\nabla^2 V - V\,\nabla^2 U\,dv = \iint\limits_{S} U\,\nabla V^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - V\,\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

Segunda identidade de Green (Kellogg, 1929)



Considere um ponto (x_i, y_i, z_i) dentro do volume v

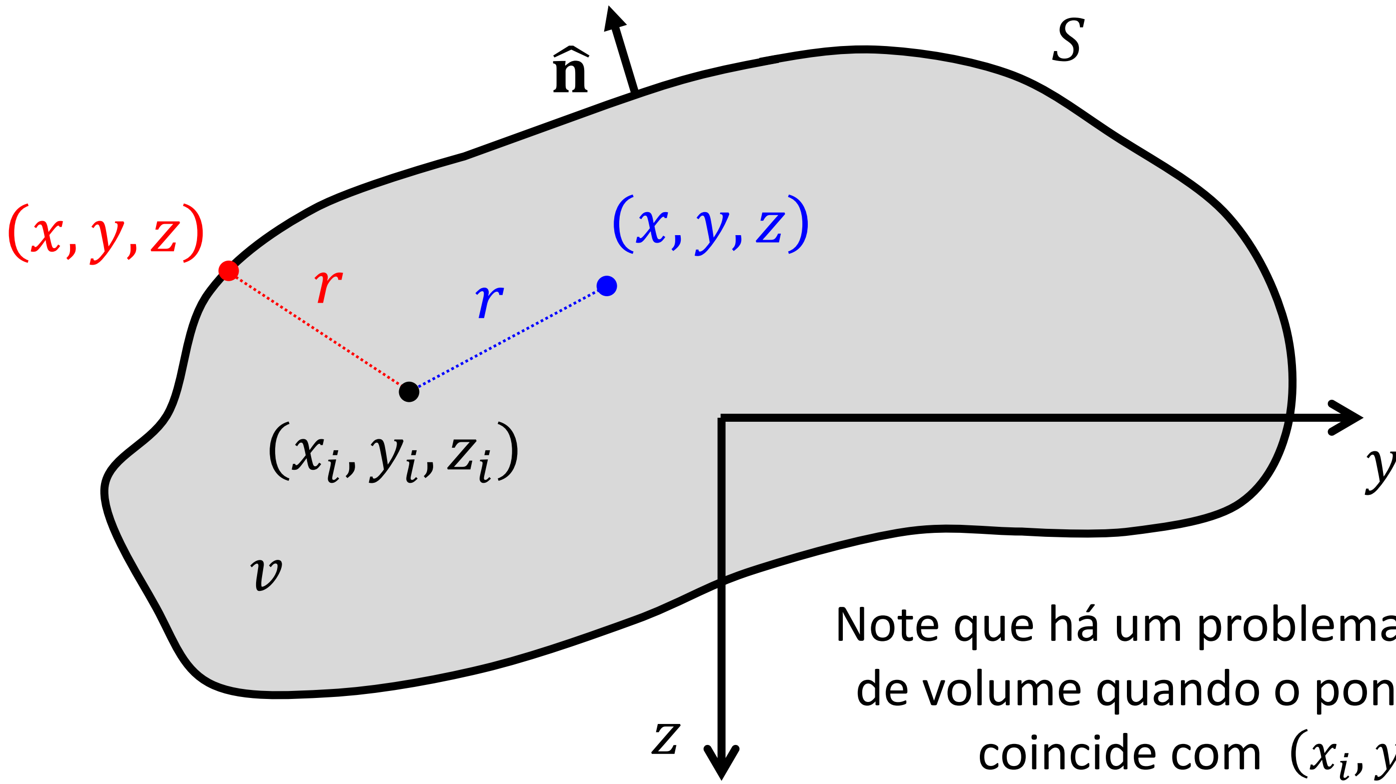
$$\iiint_v U\, \nabla^2 V - V\, \nabla^2 U\, dv = \iint_S U\, \nabla V^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - V\, \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}\; dS$$



Além disso, considere que a função V seja o inverso da distância r entre o ponto (x_i, y_i, z_i) e um ponto (x, y, z)

$$\iiint_v U\,\nabla^2 \frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,\nabla^2 U\,dv = \iint_S U\left(\nabla \frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r} \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}\;dS$$

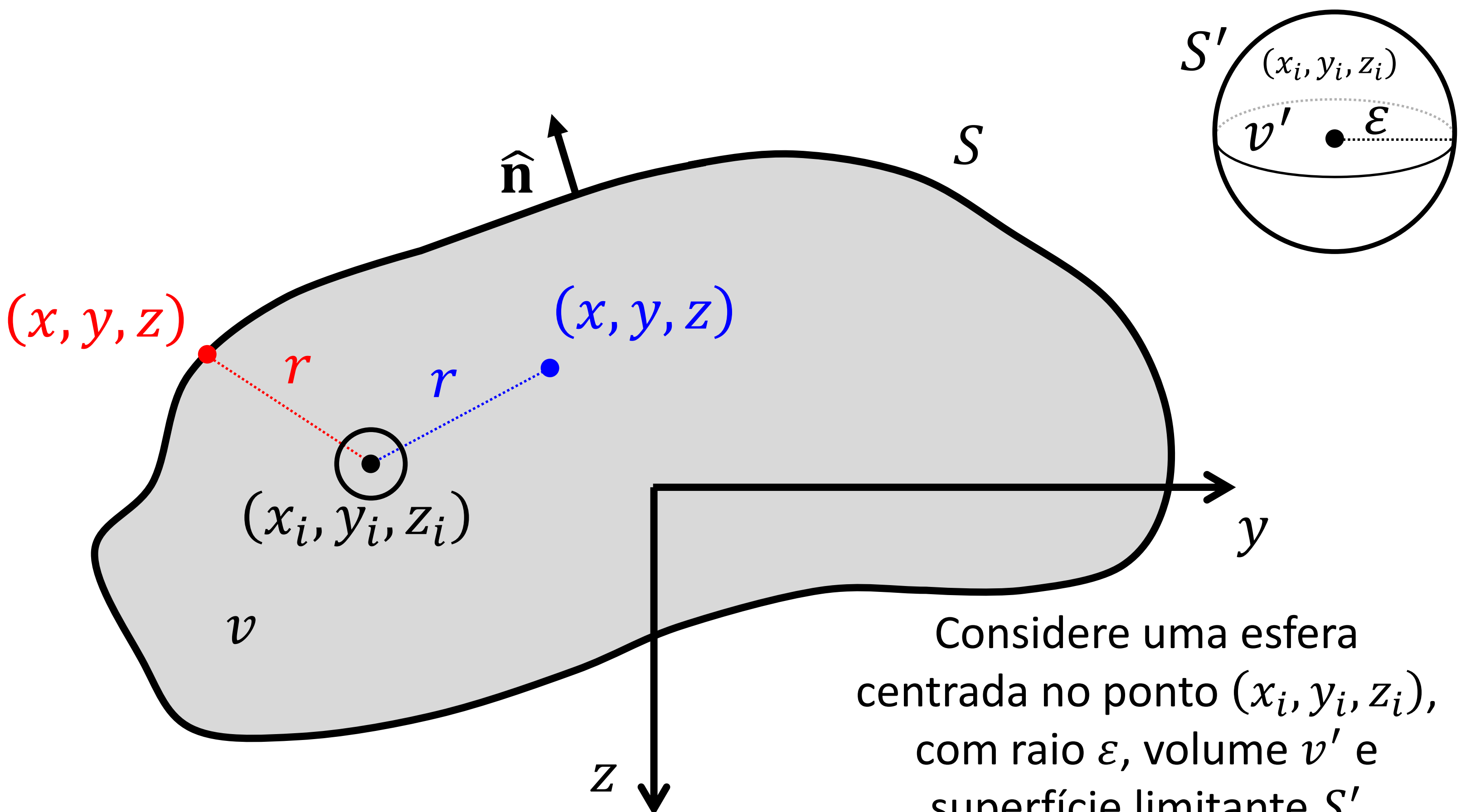
$$V = \frac{1}{r} \qquad\qquad r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$



Note que há um problema na integral de volume quando o ponto (x, y, z) coincide com (x_i, y_i, z_i)

$$\iiint_v U \, \nabla^2 \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \, \nabla^2 U \, dv = \iint_S U \left(\nabla \frac{1}{r} \right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r} \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

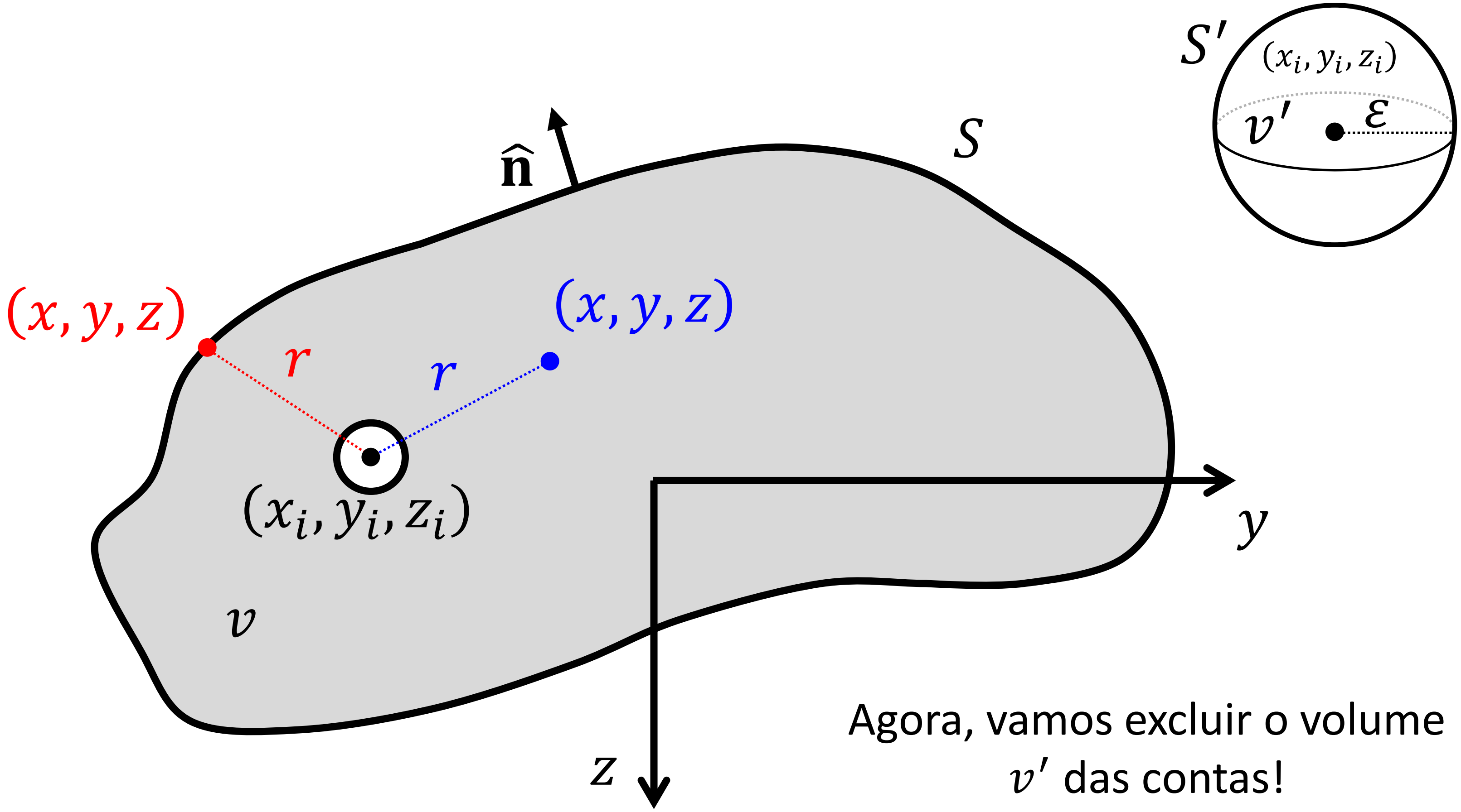
$$V = \frac{1}{r} \qquad\qquad r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$



Considere uma esfera centrada no ponto (x_i, y_i, z_i), com raio ε, volume v' e superfície limitante S'

$$\iiint\limits_v U\,\nabla^2 \frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,\nabla^2 U \, dv = \iint\limits_S U \left(\nabla \frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r} \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \; dS$$

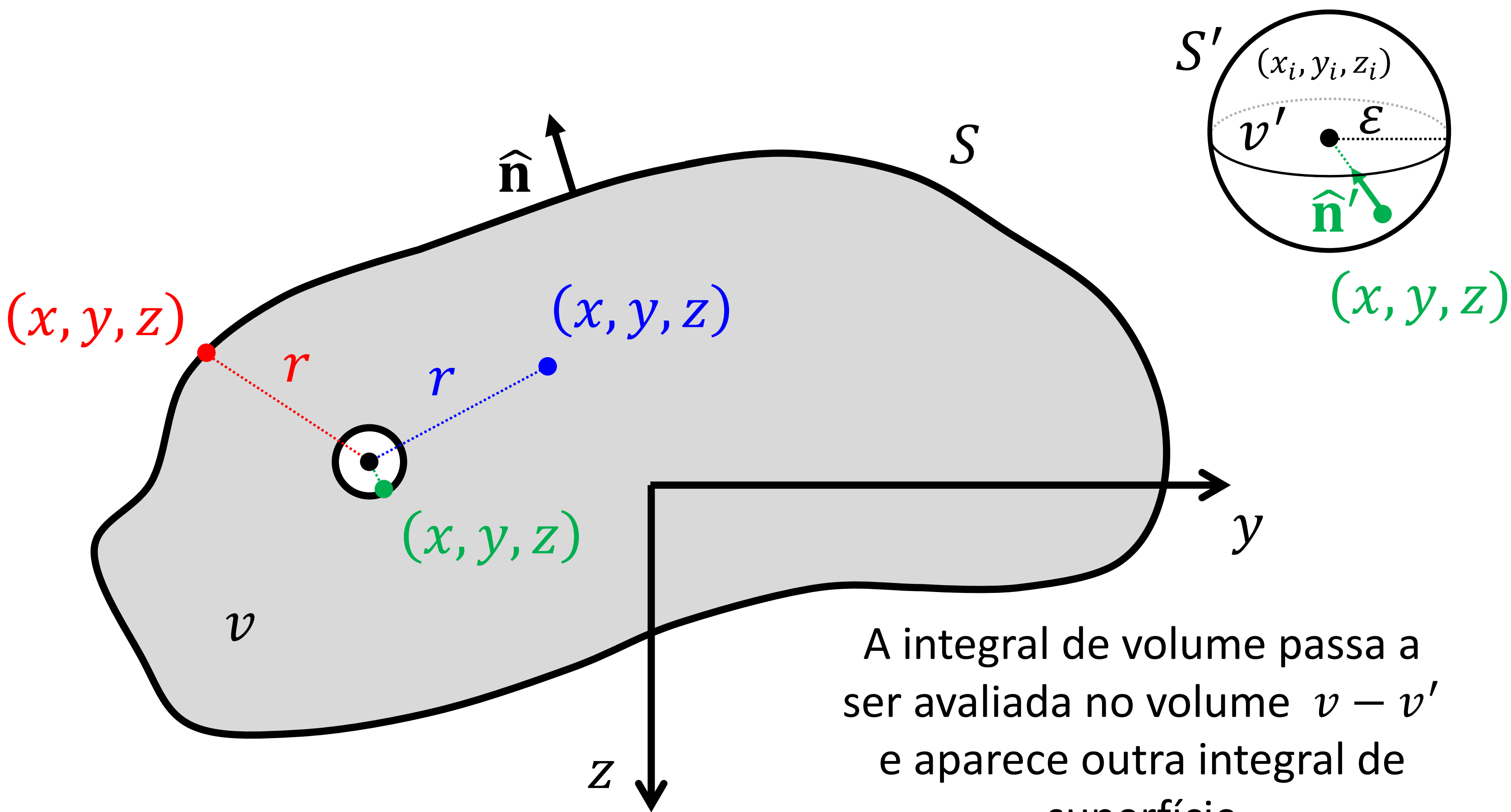
$$V = \frac{1}{r} \qquad\qquad r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$



Agora, vamos excluir o volume v' das contas!

$$\iiint_v U\,\nabla^2\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,\nabla^2 U\,dv = \iint_S U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\;dS$$

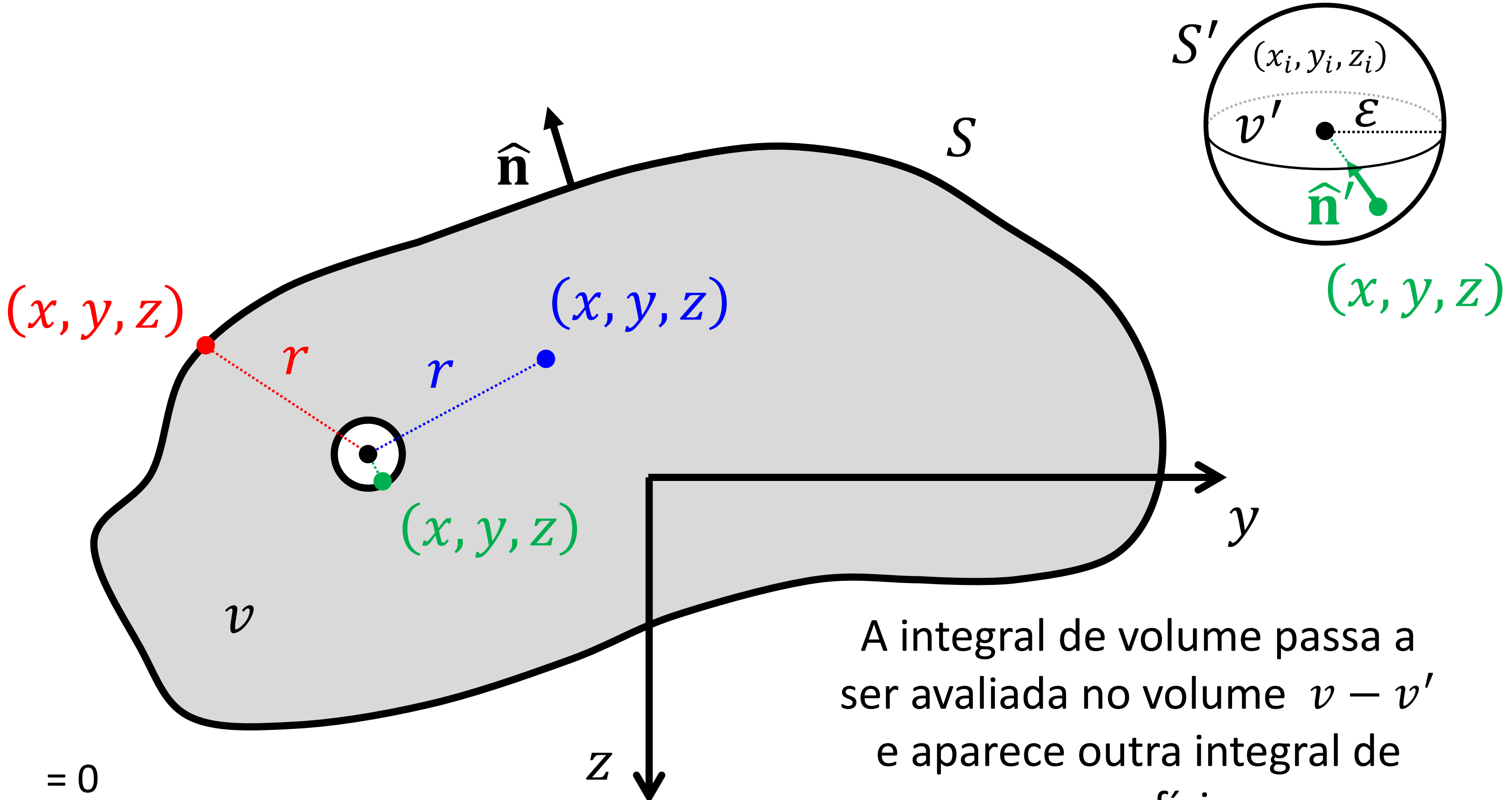
$$V = \frac{1}{r} \qquad\qquad r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$



A integral de volume passa a ser avaliada no volume $v - v'$ e aparece outra integral de superfície

$$\iiint_{v-v'} U\,\nabla^2\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,\nabla^2 U\,dv = \iint_{S} U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\;dS +$$

$$+\iint_{S'} U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}' - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}'\;dS'$$

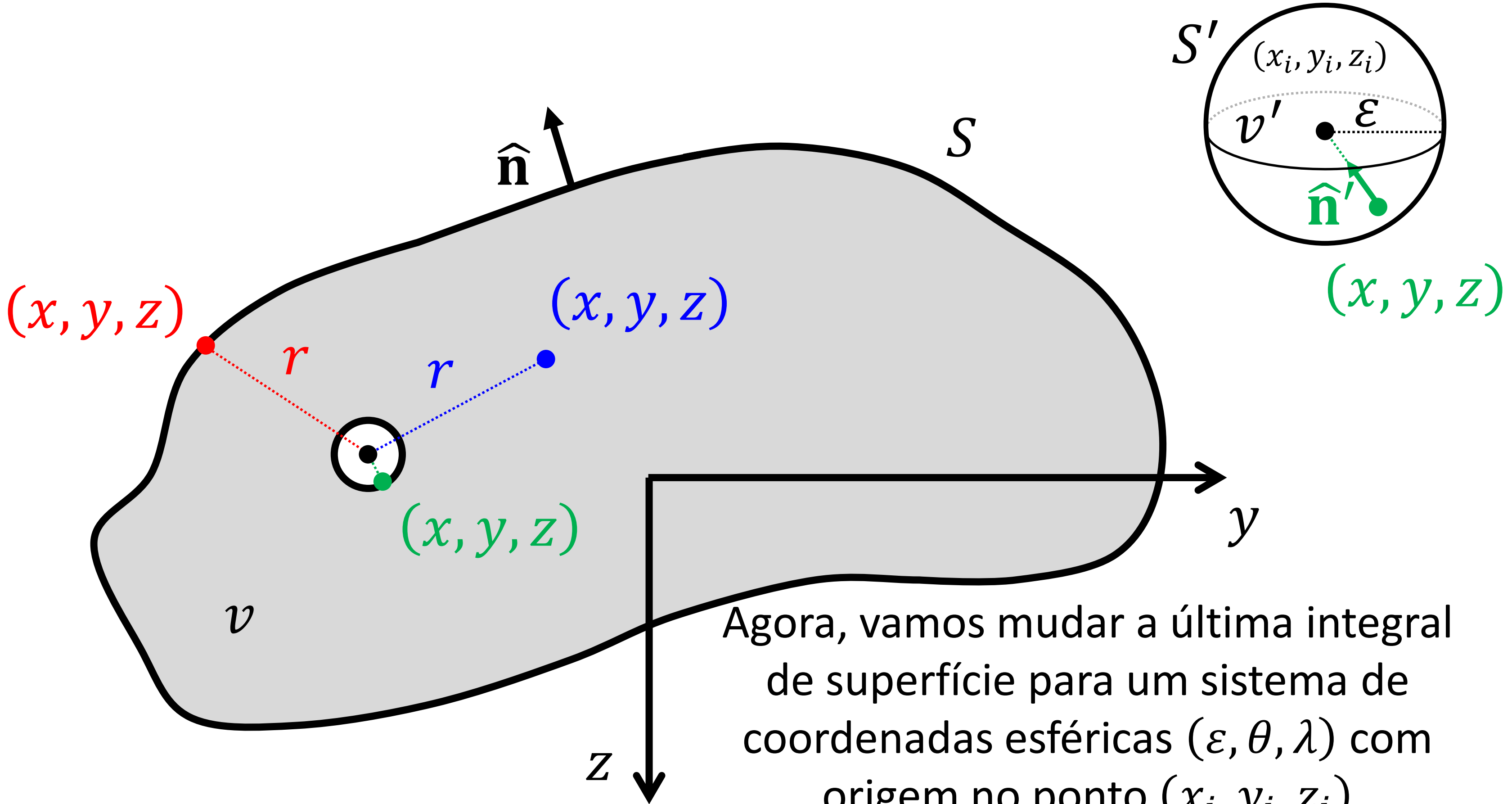


A integral de volume passa a ser avaliada no volume $v - v'$ e aparece outra integral de superfície

$$\iiint\limits_{v-v'} U\, \cancelto{0}{\nabla^2 \frac{1}{r}} - \frac{1}{r}\, \nabla^2 U \, dv = \iint\limits_{S} U \left(\nabla \frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r} \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \, dS + {}$$

$$+ \iint\limits_{S'} U \left(\nabla \frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}' - \frac{1}{r} \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}' \, dS'$$

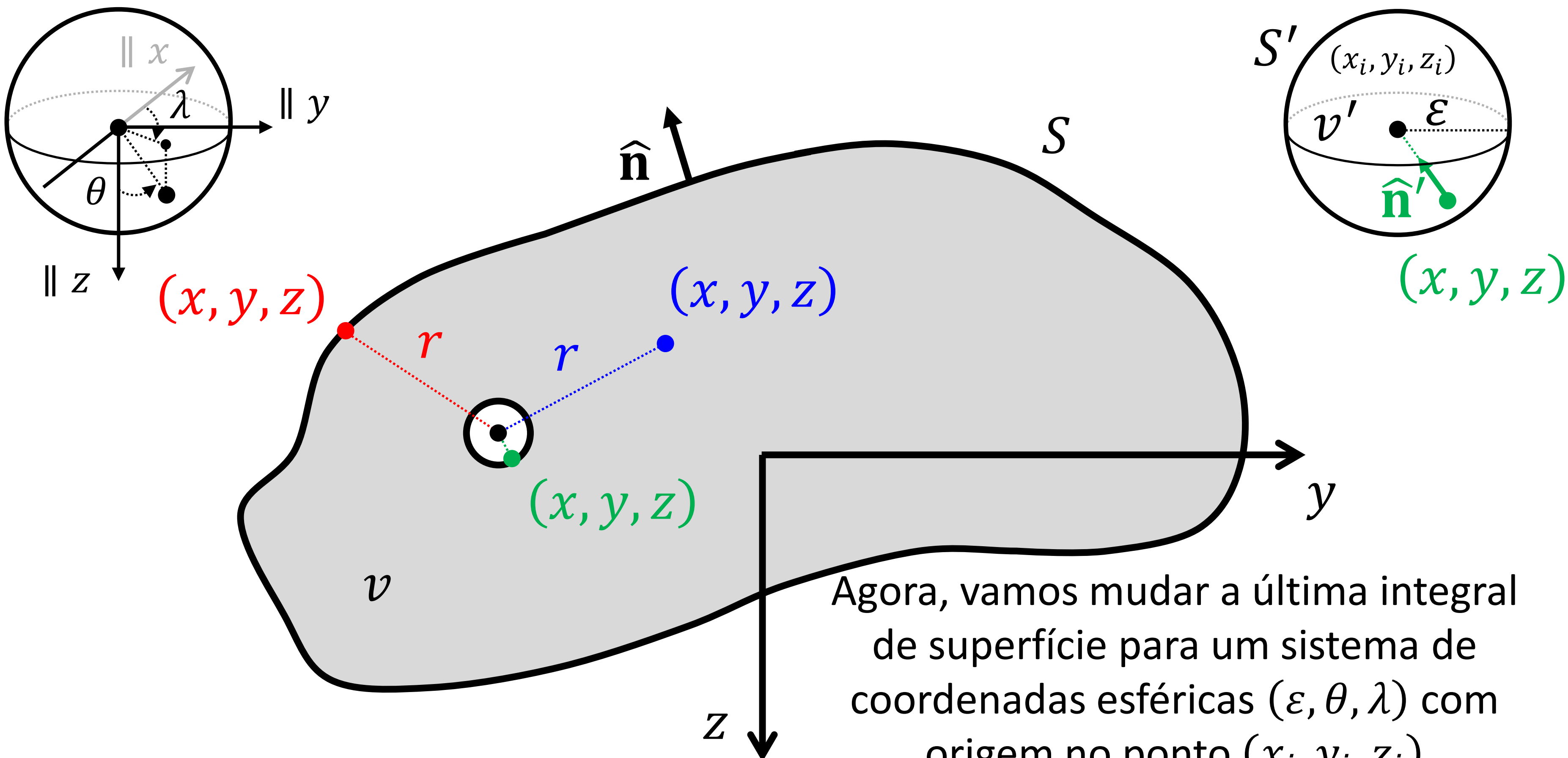
A função $1/r$ é harmônica em qualquer ponto no volume $v - v'$



Agora, vamos mudar a última integral de superfície para um sistema de coordenadas esféricas $(\varepsilon, \theta, \lambda)$ com origem no ponto (x_i, y_i, z_i)

$$\iiint\limits_{v-v'} -\frac{1}{r}\,\nabla^2 U\,dv = \iint\limits_{S} U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\;dS\;+$$

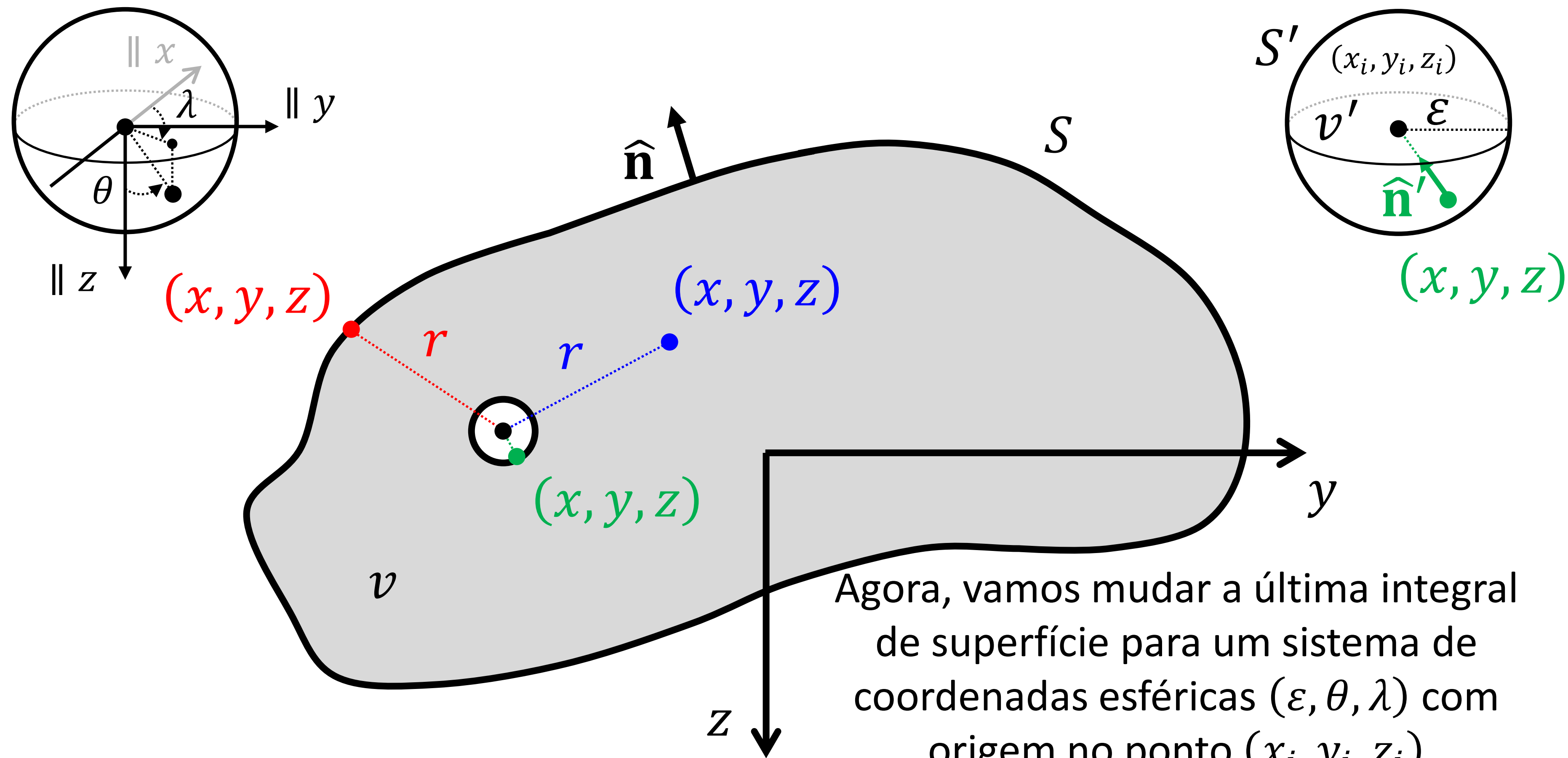
$$+\iint\limits_{S'} U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}' - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}'\;dS'$$



Agora, vamos mudar a última integral de superfície para um sistema de coordenadas esféricas $(\varepsilon, \theta, \lambda)$ com origem no ponto (x_i, y_i, z_i)

$$\iiint_{v-v'} -\frac{1}{r}\nabla^2 U \, dv = \iint_{S} U \left(\nabla \frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r} \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \; dS \; +$$

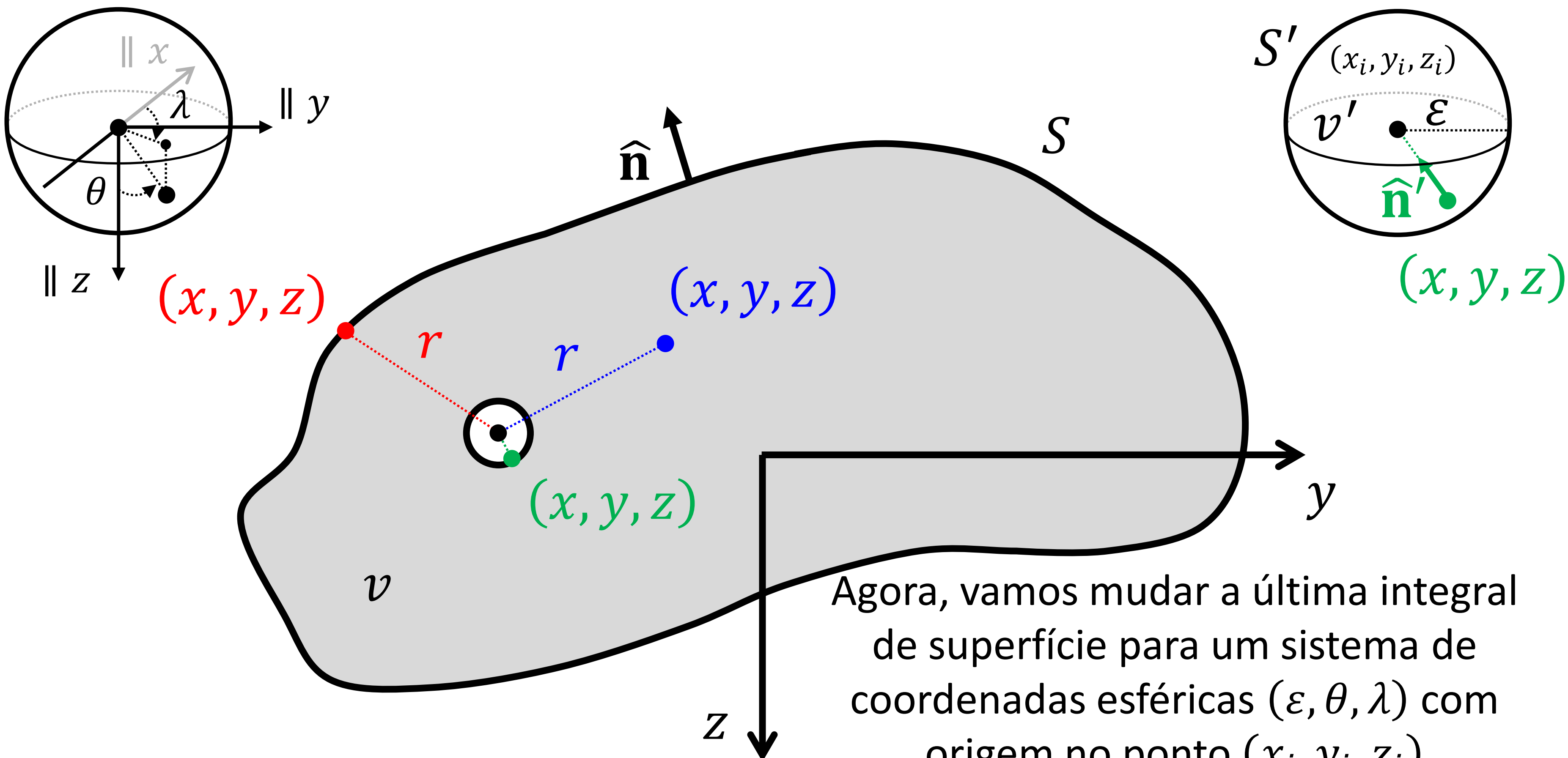
$$+ \iint_{S'} U \left(\nabla \frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}' - \frac{1}{r} \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}}' \; dS'$$



Agora, vamos mudar a última integral de superfície para um sistema de coordenadas esféricas $(\varepsilon, \theta, \lambda)$ com origem no ponto (x_i, y_i, z_i)

$$\iiint\limits_{v-v'} -\frac{1}{r}\nabla^2 U\,dv = \iint\limits_{S} U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\,dS +$$

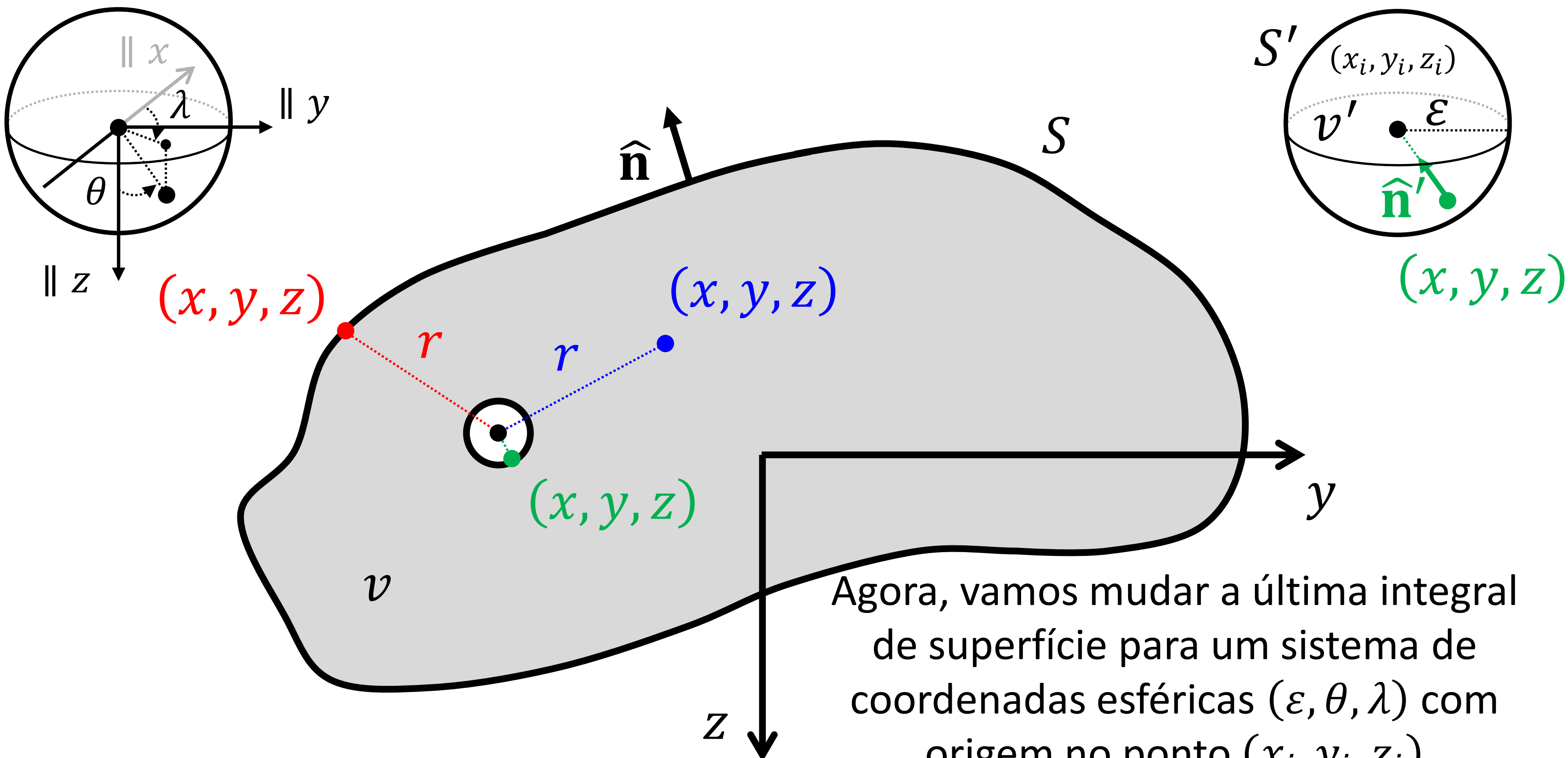
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U\left(-\frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\left(-\frac{dU}{d\varepsilon}\right)\varepsilon^2 sen\theta\, d\theta\, d\lambda$$



Agora, vamos mudar a última integral de superfície para um sistema de coordenadas esféricas $(\varepsilon, \theta, \lambda)$ com origem no ponto (x_i, y_i, z_i)

$$\iiint\limits_{v-v'} -\frac{1}{r}\nabla^2 U\,dv = \iint\limits_{S} U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\;dS +$$

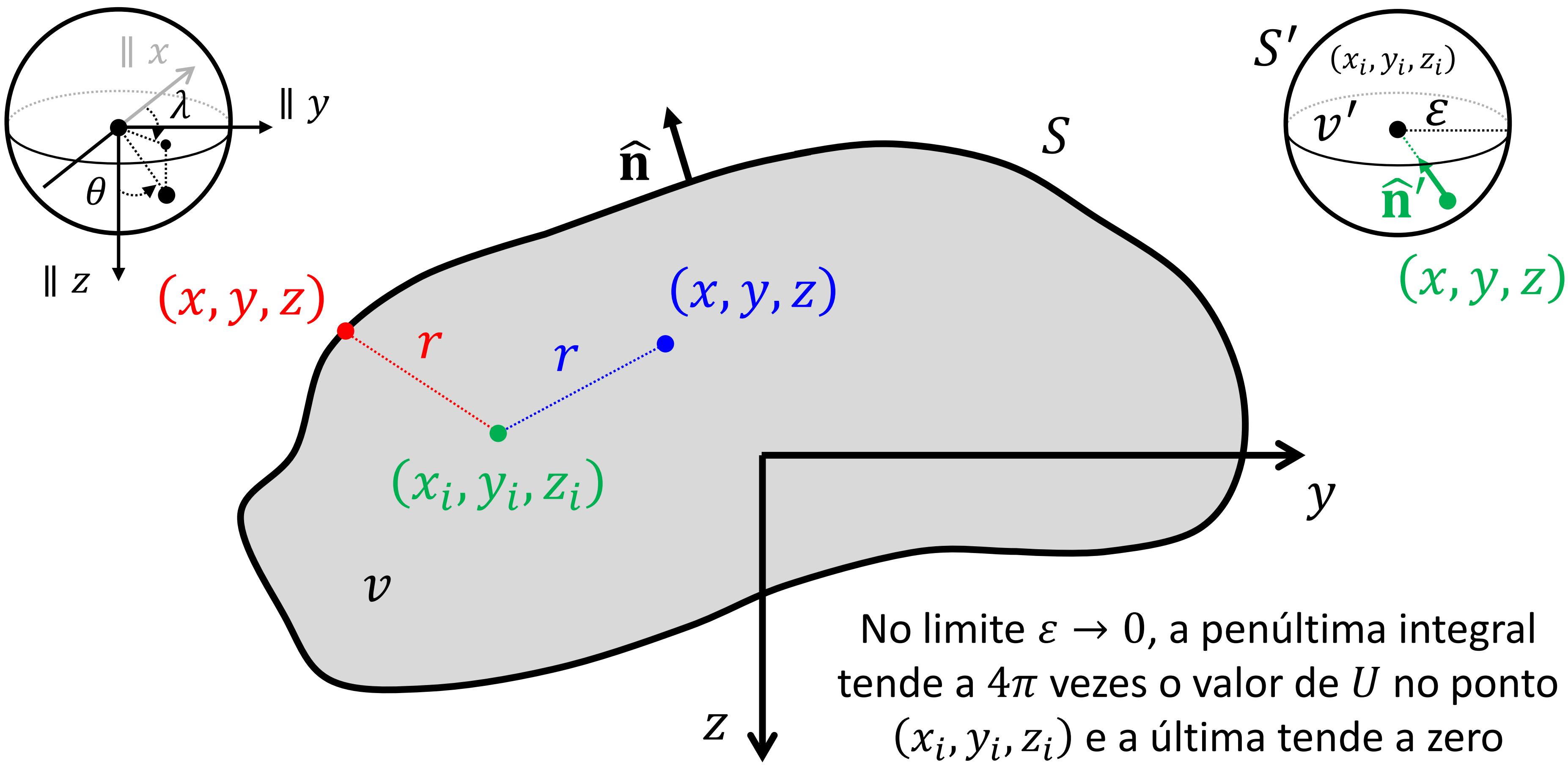
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right)\;\varepsilon^2 sen\theta d\theta d\lambda$$



Agora, vamos mudar a última integral de superfície para um sistema de coordenadas esféricas $(\varepsilon, \theta, \lambda)$ com origem no ponto (x_i, y_i, z_i)

$$\iiint\limits_{v-v'} -\frac{1}{r}\nabla^2 U \, dv = \iint\limits_{S} U \left(\nabla \frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r} \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \; dS +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} U \;\; sen\theta d\theta d\lambda + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varepsilon \frac{dU}{d\varepsilon} sen\theta d\theta d\lambda$$

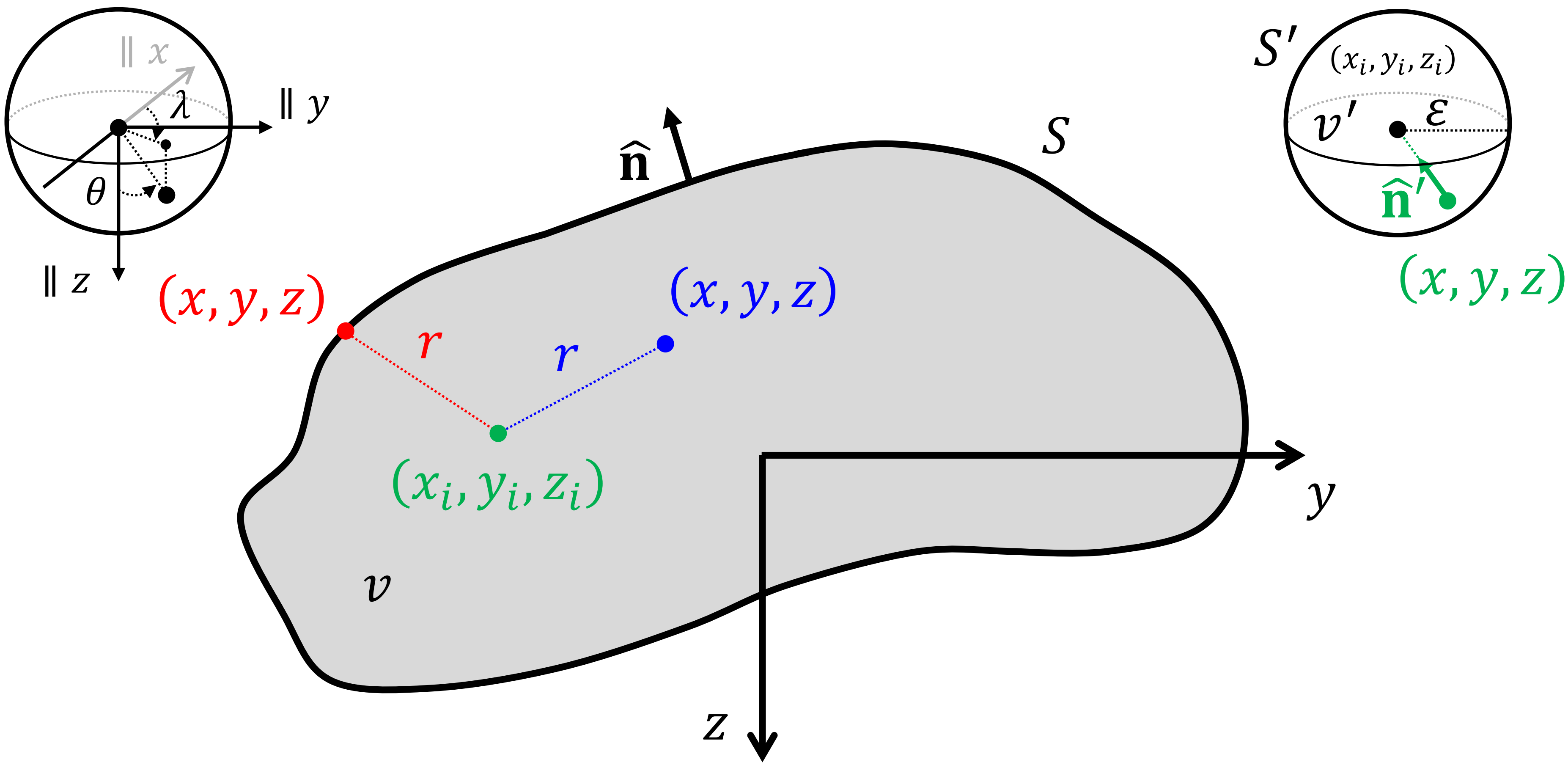


No limite $\varepsilon \to 0$, a penúltima integral tende a 4π vezes o valor de U no ponto (x_i, y_i, z_i) e a última tende a zero

$$\iiint\limits_v -\frac{1}{r}\nabla^2 U \, dv = \iint\limits_S U \left(\nabla \frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \, dS +$$

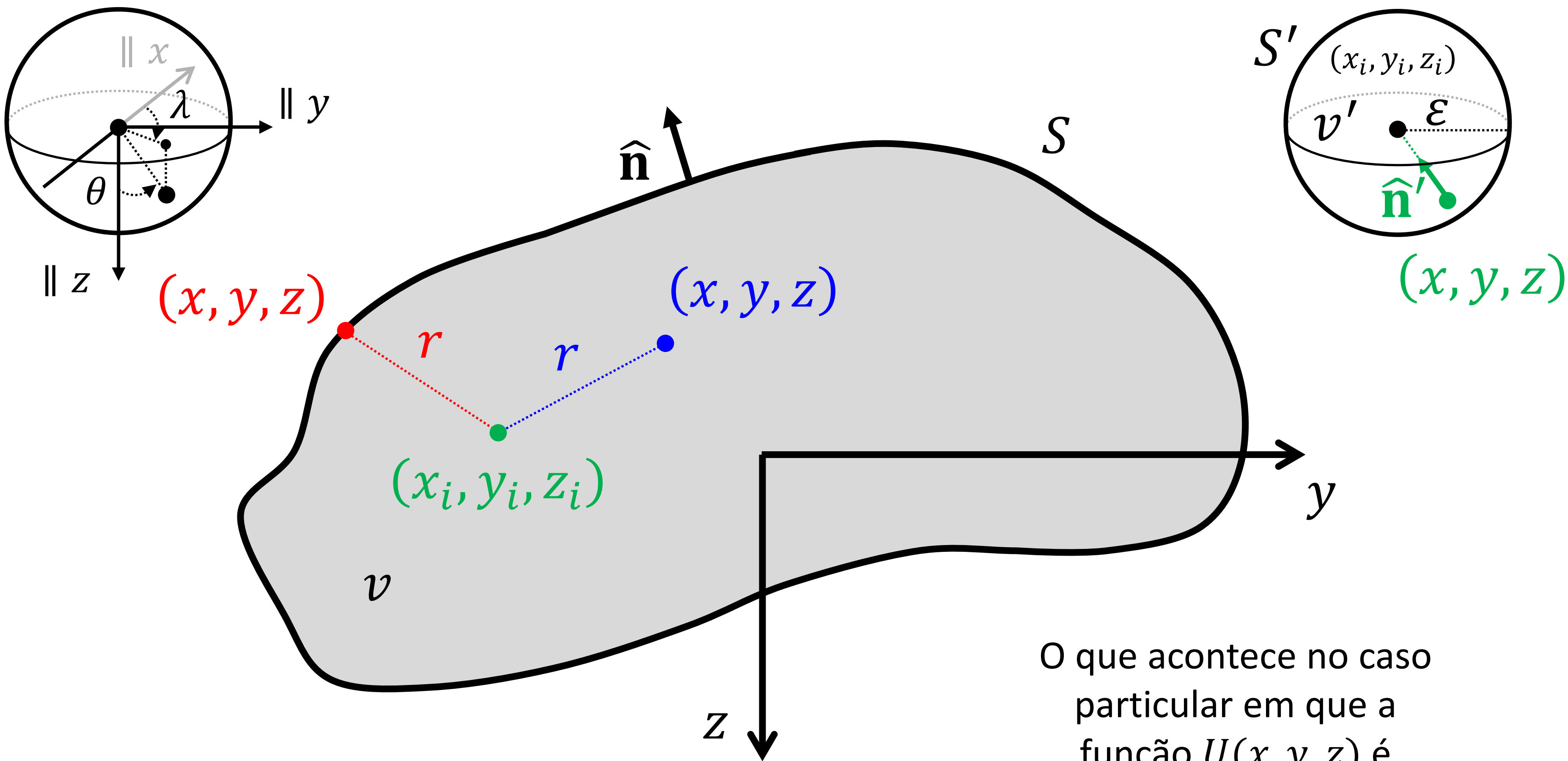
$$+ 4\pi U_i + \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon \frac{dU}{d\varepsilon} sen\theta \, d\theta \, d\lambda}}_{= 0}$$

Já a integral de volume tende ao valor da integral sobre todo o volume v



$$U_i = -\frac{1}{4\pi}\iiint_v \frac{1}{r}\nabla^2 U\, dv - \frac{1}{4\pi}\iint_S U\left(\nabla\frac{1}{r}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r}\nabla U^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{n}}\; dS$$

Terceira identidade de Green (Kellogg, 1929)



O que acontece no caso particular em que a função $U(x, y, z)$ é harmônica em v?

$$U_i = -\frac{1}{4\pi} \iiint_v \frac{1}{r}\, \nabla^2 U \, dv - \frac{1}{4\pi} \iint_S U \left(\nabla \frac{1}{r} \right)^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{r} \nabla U^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{n}} \; dS$$

Terceira identidade de Green (Kellogg, 1929)

Referências

- Bhattacharyya, B. K., 1967, Some general properties of potential fields in space and frequency domain: a review: Geoexploration, 5, 127-143.
- Blakely, R. J., 1996, Potential theory in gravity and magnetic applications: Cambridge University Press.
- Green, G., 1871, Mathematical papers of the late George Green, *ed.* Ferrers, N. M., London: MacMillan and Co., Cambridge University Press.
- Henderson, R. G., e Zietz, I., 1949, The upward continuation of anomalies in total magnetic intensity fields: GEOPHYSICS, 14, 517-534.
- Henderson, R. G., 1960, A comprehensive system of automatic computation in magnetic and gravity interpretation: GEOPHYSICS, 25, 569-585.
- Henderson, R. G., 1970, On the validity of the use of the upward continuation integral for total magnetic intensity data: GEOPHYSICS, 35, 916-919.
- Kellogg, O. D., 1929, Foundations of potential theory: Frederick Ungar Publishing Company.
- Roy, A., 1962, Ambiguity in geophysical interpretation: GEOPHYSICS, 27, 90-99.
- Skeels, D. C., 1947, Ambiguity in gravity interpretation: GEOPHYSICS, 12, 43-56.
- Twomey, S., 1977, Introduction to the mathematics of inversion in remote sensing and indirect measurements: Dover Publications, Inc.