

2D gravity inversion with isostatic constraint applied to passive rifted margins

B. Marcela S. Bastos* and Vanderlei C. Oliveira Jr*

**Observatório Nacional,*

Department of Geophysics,

Rio de Janeiro, Brazil

(August 1, 2018)

GEO-XXXX

Running head: **2D gravity inversion for passive rifted margins**

ABSTRACT

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

INTRODUCTION

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend conse-

quat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

METHODOLOGY

Forward problem

Let \mathbf{d}^o be the observed data vector, whose i -th element d_i^o , $i = 1, \dots, N$, represent the observed gravity disturbance at the point (x_i, y_i, z_i) , on a profile located over a rifted passive

margin. The coordinates are referred to a topocentric Cartesian system, with z axis pointing down, y -axis along the profile and x -axis perpendicular to the profile. Consider that Figures ?? and ?? show, respectively, the actual mass distribution and the reference mass distribution in the subsurface. In this case, we implicitly assume that the observed gravity disturbance is produced by an anomalous mass distribution defined as the difference between the mass distributions shown in Figures ?? and ?. We approximate this anomalous mass distribution by an interpretation model (Figure ??) formed by N columns of horizontally adjacent prisms having an infinite length along the x -axis, which is perpendicular to the profile. For convenience, we presume that the observed data are regularly spaced along the profile, so that there is one observation at the top of each column.

The i -th column of the interpretation model (Figure ??) is formed by four vertically adjacent layers. The first one is the shallowest, represents the water layer, is formed by a single prism, has thickness t_i^w and a constant density contrast $\Delta\rho^w = \rho^w - \rho^r$, where ρ^w and ρ^r represents, respectively, the densities of water and the reference mass distribution (Figure ??) at the same point.

PAREI AQUI

A terceira camada representa a crosta, também formada por apenas um prisma, possui espessura t_i^c e contraste de densidade $\Delta\rho_i^c = \rho^c - \rho^r$, sendo ρ^c a densidade da crosta. Por simplicidade, consideramos que a densidade nesta camada pode assumir dois valores, sendo um representativo da crosta continental, $\rho_i^c = \rho^{cc}$, $y_i \leq y_{COT}$, e o outro da crosta oceânica, $\rho_i^c = \rho^{oc}$, $y_i > y_{COT}$, em que y_{COT} representa a posição de uma superfície vertical que define a transição entre a crosta continental e oceânica (COT , do inglês Continental-Ocean Transition). Consequentemente, o contraste de densidade nesta camada pode assumir dois

valores: $\Delta\rho_i^c = \rho^{cc} - \rho_r$ ou $\Delta\rho_i^c = \rho^{oc} - \rho_r$, a depender da posio em relao a COT . O topo desta terceira camada define a profundidade do embasamento e a base define a profundidade da Moho. A quarta camada representa o manto, subdividida em duas partes, sendo cada uma formada por um prisma com a mesma densidade ρ^m e, conseqentemente, com o mesmo contraste de densidade $\Delta\rho^m = \rho^m - \rho_r$. A poro mais rasa da quarta camada possui espessura t_i^m . Seu topo e base definem, respectivamente, as profundidades da Moho e da superfcie de compensao isosttica S_0 . A parte mais profunda da quarta camada possui espessura ΔS_0 , topo na superfcie de compensao isosttica S_0 e a base na superfcie $S_0 + \Delta S_0$, que define a Moho no modelo de distribuio de densidades de referncia (Figura 2.5). Por ltimo, a segunda camada da i -sima coluna do modelo interpretativo, $i = 1, \dots, N$, definida pelo intrprete, de acordo com o ambiente geolgico a ser caracterizado e a disponibilidade de informaes a priori. De maneira geral, a segunda camada da i -sima coluna do modelo interpretativo pode ser representada por um conjunto de Q prismas verticalmente adjacentes, cada um com uma espessura t_i^q , densidade ρ^q e um contraste de densidade $\Delta\rho^q = \rho^q - \rho_r$, $q = 1, \dots, Q$.

Dessa forma, dados os valores de contraste de densidade, posio y_{COT} da COT, a superfcie de compensao isosttica S_0 , as espessuras dos prismas que formam a camada de gua e as espessuras dos $Q+1$ prismas que formam as pores mais rasas da segunda camada de prismas, possvel descrever o modelo interpretativo em termos de um vetor de parmetros $M \times 1$, $M = 2N + 1$, dado por:

Esta deve ser a Equao 3.1

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^Q \\ \mathbf{t}^m \\ \Delta S_0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

em que \mathbf{t}^Q um vetor $N \times 1$, cujo i -simo elemento t_i^Q representa a espessura do prisma que

forma a poro mais profunda da segunda camada da i -sima coluna do modelo interpretativo, e \mathbf{t}^m um vetor $N \times 1$, cujo i -simo elemento t_i^m representa a espessura do prisma que forma a poro mais rasa da quarta camada da i -sima coluna do modelo interpretativo.

Nesse caso, o distrbio de gravidade predito pelo modelo interpretativo na posio (x_i, y_i, z_i) pode ser escrito a partir da Equao 2.2 da seguinte forma:

Esta deve ser a Equao 3.2

$$d_i(\mathbf{p}) = k_g G \sum_{j=1}^L f_{ij}(\mathbf{p}) , \quad (2)$$

em que $f_{ij}(\mathbf{p})$ representa a integral tripla da Equao 2.2 avaliada no volume do j -simo prisma do modelo interpretativo e L representa o total de prismas que formam todas as camadas do modelo interpretativo. Neste trabalho, as integrais $f_{ij}(\mathbf{p})$ foram calculadas pelas expresses propostas por NAGY et al. (2000), usando o pacote Fatiando a Terra (UIEDA et al., 2013).

Inverse problem

Seja $\mathbf{d}(\mathbf{p})$ o vetor de dados preditos, cujo i -simo elemento $d_i(\mathbf{p})$ representa o dado predito pelo modelo interpretativo na posio (x_i, y_i, z_i) (Equao 3.2) em funo do vetor de parmetros \mathbf{p} (Equao 3.1).

O problema de estimar o vetor de parmetros $\hat{\mathbf{p}}$ que produz os dados preditos $\mathbf{d}(\mathbf{p})$ mais prximos aos dados observados \mathbf{d}^o pode ser formulado como um problema inverso vinculado, no-linear, que consiste em minimizar a funo

Esta deve ser a Equao 4.1

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \Phi(\mathbf{p}) + \mu \sum_{k=0}^3 \alpha_k \Psi(\mathbf{p}) , \quad (3)$$

sujeita a condio de que todos os elementos do vetor de parmetros sejam positivos. Na Equao 4.1, μ representa o parmetro de regularizao, $\Phi(\mathbf{p})$ representa a funo do ajuste dada por

Esta deve ser a Equao 4.2

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{d}^o - \mathbf{d}(\mathbf{p})\|_2^2, \quad (4)$$

em que $\|\cdot\|_2^2$ representa o quadrado da norma Euclidiana, α_k representam os pesos atribudos s funes $\Psi(\mathbf{p})$, que definem os vnculos, $k = 0, 1, 2, 3$.

Airy constraint

Considere que o modelo de distribuio de massas anmalas (Figura 2.2) e, conseqentemente, o modelo interpretativo (Figura 3.1) estejam em equilbrio isosttico, de acordo com o modelo de Airy. Neste caso, a presso exercida por estes modelos deve ser constante sobre a superfcie de compensao isosttica S_0 . Esta condio sobre a presso tambm vlida para qualquer interface paralela a S_0 e que esteja localizada no manto em uma profundidade maior.

A presso exercida pela i -sima coluna do modelo interpretativo em um ponto sobre a superfcie S_0 dada por:

Esta deve ser a Equao 4.3

$$t_i^w \rho^w + t_i^1 \rho_i^1 + \cdots + t_i^Q \rho_i^Q + t_i^c \rho_i^c + t_i^m \rho^m = \sigma_0, \quad (5)$$

em que σ_0 uma constante positiva e arbitrria, ρ^w a densidade da camada de gua, ρ_i^q , $q = 1, \dots, Q$, so as densidades das pores que formam a segunda camada do modelo interpretativo, ρ_i^c a densidade da terceira camada, que pode assumir valor de crosta continental

ρ^{cc} ou oceanica ρ^{oc} a depender da posio em relao a COT, e ρ^m a densidade do manto.

Rearranjando os termos da Equao 4.3 e utilizando a relao

Esta deve ser a Equao 4.4

$$S_0 = t_i^w + t_i^1 + \dots + t_i^Q + t_i^c + t_i^m, \quad (6)$$

possvel mostrar que:

Esta deve ser a Equao 4.5

$$(\rho_i^Q - \rho_i^c) t_i^Q + (\rho^m - \rho_i^c) t_i^m + (\rho^w - \rho_i^c) t_i^w + (\rho_i^1 - \rho_i^c) t_i^1 + \dots + (\rho_i^{Q-1} - \rho_i^c) t_i^{Q-1} + \rho_i^c S_0 = \sigma_0. \quad (7)$$

Com o intuito de descrever a presso exercida por todas as N colunas do modelo interpretativo sobre a superfcie S_0 , a Equao 4.5 pode ser reescrita, em notao matricial, da seguinte forma:

Equao 4.6

$$\mathbf{M}^Q \mathbf{t}^Q + \mathbf{M}^m \mathbf{t}^m + \mathbf{M}^w \mathbf{t}^w + \mathbf{M}^1 \mathbf{t}^1 + \dots + \mathbf{M}^{Q-1} \mathbf{t}^{Q-1} + \boldsymbol{\rho}^c S_0 = \sigma_0 \mathbf{1}, \quad (8)$$

em que $\mathbf{1}$ um vetor $N \times 1$ com todos os elementos iguais a 1, \mathbf{t}^α so vetores $N \times 1$ com i -simo elemento definido pela espessura t_i^α da coluna i , $\alpha = w, 1, \dots, Q-1, Q, m$, e \mathbf{M}^Q , \mathbf{M}^m , \mathbf{M}^w , \mathbf{M}^1 , \dots , \mathbf{M}^{Q-1} so matrizes diagonais $N \times N$ com o i -simo elemento da diagonal dado por, respectivamente, $(\rho_i^Q - \rho_i^c)$, $(\rho^m - \rho_i^c)$, $(\rho^w - \rho_i^c)$, $(\rho_i^1 - \rho_i^c)$, \dots , $(\rho_i^{Q-1} - \rho_i^c)$ e $\boldsymbol{\rho}^c$ um vetor $N \times 1$ que contm a densidade dos prismas que representam a crosta. Aplicando o regularizador de Tikhonov de primeira ordem (ASTER et al., 2013) no vetor de presses $\sigma_0 \mathbf{1}$ exercidas pelo modelo interpretativo sobre a superfcie S_0 , obtemos a seguinte equao:

Equao 4.7

$$\mathbf{R} (\mathbf{Cp} + \mathbf{Dt}) = \mathbf{0}, \quad (9)$$

em que $\mathbf{0}$ um vetor $N \times 1$ com todos os elementos iguais a zero e os demais termos so dados por:

Equao 4.8

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^Q & \mathbf{M}^m & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{N \times (2N+1)}, \quad (10)$$

Equao 4.9

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^w & \mathbf{M}^1 & \dots & \mathbf{M}^{Q-1} & \boldsymbol{\rho}^c \end{bmatrix}_{N \times (QN+1)},$$

Equao 4.10

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^w \\ \mathbf{t}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{t}^{Q-1} \\ S_0 \end{bmatrix}_{(QN+1) \times 1}, \quad (12)$$

\mathbf{p} o vetor de parmetros (Equao 3.1) e \mathbf{R} uma matriz $(N-1) \times N$, cujo elemento ij definido da seguinte forma:

Equation 4.11

$$[\mathbf{R}]_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad j = i \\ -1 & , \quad j = i + 1 \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases}. \quad (13)$$

Por fim, a partir da Equao 4.7, possvel definir o Vnculo de Airy da seguinte forma:

Equation 4.12

$$\Psi_0(\mathbf{p}) = \|\mathbf{R}(\mathbf{C}\mathbf{p} + \mathbf{D}\mathbf{t})\|_2^2. \quad (14)$$

(sem pular linha) Note que este vnculo impe a informao a priori de que a presso exercida pelo modelo interpretativo sobre a superfcie S_0 deve variar de forma suave.

Smoothness constraint

Este vnculo conhecido como vnculo de Tikhonov de primeira ordem (ASTER et al., 2013) e impe uma variao suave entre parmetros adjacentes nos vetores \mathbf{t}^Q e \mathbf{t}^m (Equao 3.1). Ou seja, estabelece uma igualdade aproximada entre os pares de espessuras adjacentes na parte mais profunda da segunda camada e na parte mais rasa da quarta camada do modelo interpretativo (Figura 3.1). Matematicamente, este vnculo representado pela seguinte expresso:

Equation 4.13

$$\Psi_1(\mathbf{p}) = \|\mathbf{S}\mathbf{p}\|_2^2, \quad (15)$$

em que \mathbf{S} uma matriz $(2N - 2) \times M$, cujo elemento ij definido da seguinte forma:

Equation 4.14

$$[\mathbf{S}]_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad j = i \\ -1 & , \quad j = i + 1 \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

CONCLUSIONS

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

ACKNOWLEDGMENTS

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

REFERENCES

- Barthelmes, F., 2013, Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models.
- Baumann, H., E. Klingel , and I. Marson, 2012, Absolute airborne gravimetry: a feasibility study: *Geophysical Prospecting*, **60**, 361–372.
- Blakely, R. J., 1996, *Potential theory in gravity and magnetic applications*: Cambridge University Press.
- Bouman, J., J. Ebbing, and M. Fuchs, 2013, Reference frame transformation of satellite gravity gradients and topographic mass reduction: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **118**, 759–774.
- Chapin, D. A., 1996, The theory of the bouguer gravity anomaly: A tutorial: *The Leading Edge*, **15**, 361–363.
- Fairhead, J. D., C. M. Green, and D. Blitzkow, 2003, The use of gps in gravity surveys: *The Leading Edge*, **22**, 954–959.
- Forsberg, R., 1984, A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling: Technical report, DTIC Document.
- F rste, C., S. Bruinsma, O. Abrikosov, J.-M. Lemoine, J. C. Marty, F. Flechtner, G. Balmino, F. Barthelmes, and R. Biancale, 2014, EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse: <https://doi.org/10.5880/icgem.2015.1>.
- Glennie, C. L., K. P. Schwarz, A. M. Bruton, R. Forsberg, A. V. Olesen, and K. Keller, 2000, A comparison of stable platform and strapdown airborne gravity: *Journal of Geodesy*, **74**, 383–389.
- Hackney, R. I., and W. E. Featherstone, 2003, Geodetic versus geophysical perspectives of

- the gravity anomaly: *Geophysical Journal International*, **154**, 35–43.
- Hammer, S., 1945, Estimating ore masses in gravity prospecting: *Geophysics*, **10**, 50–62.
- Heiskanen, W. A., and H. Moritz, 1967, *Physical geodesy*: W.H. Freeman and Company.
- Hinze, W. J., C. Aiken, J. Brozena, B. Coakley, D. Dater, G. Flanagan, R. Forsberg, T. Hildenbrand, G. R. Keller, J. Kellogg, R. Kucks, X. Li, A. Mainville, R. Morin, M. Pilkington, D. Plouff, D. Ravat, D. Roman, J. Urrutia-Fucugauchi, M. Véronneau, M. Webring, and D. Winester, 2005, New standards for reducing gravity data: The north american gravity database: *Geophysics*, **70**, J25–J32.
- Hofmann-Wellenhof, B., and H. Moritz, 2005, *Physical geodesy*: Springer.
- IBGE, 2015, O novo modelo de ondulação geoidal do brasil: Mapgeo2015: Technical report, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).
- LaFehr, T. R., 1965, The estimation of the total amount of anomalous mass by gauss’s theorem: *Journal of Geophysical Research*, **70**, 1911–1919.
- , 1991, Standardization in gravity reduction: *Geophysics*, **56**, 1170–1178.
- Li, X., and H.-J. Götze, 2001, Ellipsoid, geoid, gravity, geodesy, and geophysics: *Geophysics*, **66**, 1660–1668.
- Marussi, A., H. Moritz, R. H. Rapp, and R. O. Vicente, 1974, Ellipsoidal density models and hydrostatic equilibrium: Interim report: *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **9**, 4–6.
- Nabighian, M. N., M. E. Ander, V. J. S. Grauch, R. O. Hansen, T. R. LaFehr, Y. Li, W. C. Pearson, J. W. Peirce, J. D. Phillips, and M. E. Ruder, 2005, Historical development of the gravity method in exploration: *GEOPHYSICS*, **70**, 63ND–89ND.
- Sansò, F., and M. G. Sideris, eds., 2013, *Geoid Determination*: Springer Berlin Heidelberg, volume **110** of *Lecture Notes in Earth System Sciences*.

- Soler, T., 1976, On differential transformations between cartesian and curvilinear (geodetic) coordinates: Technical report, Ohio State University.
- Torge, W., and J. Müller, 2012, Geodesy, 4 ed.: de Gruyter.
- Uieda, L., V. C. Oliveira Jr, and V. C. F. Barbosa, 2013, Modeling the Earth with Fatiando a Terra: Proceedings of the 12th Python in Science Conference, 96 – 103.
- Vaníček, P., and E. J. Krakiwsky, 1987, Geodesy: The concepts, second edition: Elsevier Science.
- Wessel, P., W. H. F. Smith, R. Scharroo, J. Luis, and F. Wobbe, 2013, Generic Mapping Tools: Improved Version Released: Eos, Transactions American Geophysical Union, **94**, 409–410.