

**MODELAGEM REGIONAL DO CAMPO DE GRAVIDADE UTILIZANDO
PONTOS DE MASSA EM COORDENADAS GEODÉSICAS**

KRISTOFFER ALEXANDER TEIXEIRA HALLAM

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Geofísica do Observatório Nacional, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Orientador(a): Dr. VANDERLEI C.
OLIVEIRA JR.

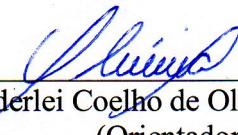
Rio de Janeiro
Outubro de 2019

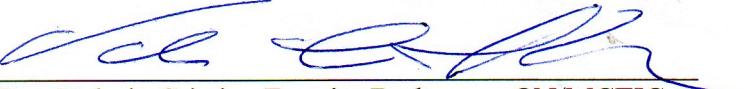
**"MODELAGEM REGIONAL DO CAMPO DE GRAVIDADE UTILIZANDO
PONTOS DE MASSA EM COORDENADAS GEODÉSICAS**

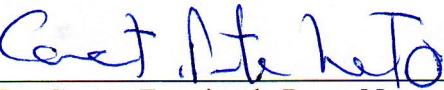
KRISTOFFER ALEXANDER TEIXEIRA HALLAM

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM GEOFÍSICA.

Aprovada por:


Dr. Vanderlei Coelho de Oliveira Junior – ON/MCTIC
(Orientador)


Dra. Valeria Cristina Ferreira Barbosa – ON/MCTIC


Dr. Cosme Ferreira da Ponte Neto – ON/MCTIC


Dr. Eder Cassola Molina - IAG/USP


Dr. Walter Eugênio de Medeiros - UFRN

RIO DE JANEIRO – BRASIL

13 DE MARÇO DE 2019

TEIXEIRA HALLAM, KRISTOFFER ALEXANDER
MODELAGEM REGIONAL DO CAMPO DE
GRAVIDADE UTILIZANDO PONTOS DE MASSA
EM COORDENADAS GEODÉSICAS /KRISTOFFER
ALEXANDER TEIXEIRA HALLAM. – Rio de Janeiro:
ON, 2019.

??, 87 p.: il.; 29,7cm.

Orientador(a): VANDERLEI C. OLIVEIRA JR.

Tese (doutorado) – ON/Programa de Pós-graduação em
Geofísica, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 79 – 87.

1. Modelagem regional. 2. Campo de gravidade.
3. Ponto de massa. I. , . II. Observatório Nacional,
Programa de Pós-graduação em Geofísica. III. Título.

“Não é o que acontece com você, mas é como você reage que importa.” Epicteto
“A felicidade da sua vida depende da qualidade dos seus pensamentos.” Marco Aurélio

“Muito pouco é necessário para uma vida feliz; está tudo dentro de você em seu modo de pensar.” Marco Aurélio

Agradecimentos

Expresso meus profundos agradecimentos:

Primeiramente à Deus que me guiou nesta trajetória;

À minha família maravilhosa que me apoiou nas mais diversas circunstâncias ocorridas: Mr. Vernon e Mrs. Selma Hallam;

Ao Professor Vanderlei que se dispôs a me orientar, mesmo eu tendo metade do tempo de doutorado, acreditando no meu trabalho. Agradeço também pela oportunidade de aprender uma nova linguagem de programação, que sem dúvida nenhuma já se estabeleceu como sendo o meu instrumento de trabalho;

À Professora Valeria Barbosa que participou de todo o processo e sem a qual nenhum trabalho poderia ter sido sequer iniciado;

Ao amigo Alcides que, desde o início, sempre se dispôs a ajudar quando o assunto era gravímetro ou rede gravimétrica. Aos meus amigos Larissa, Luiz Felipe, Ana Carolina, Maryory, Eduardo e Pillar que contribuíram para tornar a sala 107 um ambiente mais leve, tranquilo e com café fresco e bem feito! Larissa, em especial, pelas perguntas que, por vezes, pareciam chatas, mas foram importantes para uma reflexão mais profunda sobre os assuntos. Aos amigos André e Leonardo Vital sempre transmitindo bom humor e conhecimento. Aos amigos Shayane e Diego pelas boas conversas e também por poder pegar sempre um pouco de café de sua sala; Ao meu amigo Victor Carreira pelo apoio, conversas e gargalhadas. Ao Rodrigo Bijani que aparecia abrindo a porta da sala inesperadamente, promovendo risos generalizados. Ao amigo Marcão pelas boas conversas sobre boa música e bandas em geral.

Aos irmãos Karin, Arídio, Gelma, Rosane, Rita, Daniela, Bernardo, Cintya, Biondo, Luiz, Eneas, Mauro, Paulo, Marcia, José Lúcio, Marilia, Marco e tantos outros que sempre me recebem de braços abertos e com sorrisos nos rostos me confortando;

Aos amigos da UFRJ;

À entidade financiadora CAPES, pelos auxílios financeiros ao longo deste período;

À todos aqueles que fizeram parte da minha caminhada de algum modo...

Resumo da Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Observatório Nacional como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Geofísica.

MODELAGEM REGIONAL DO CAMPO DE GRAVIDADE UTILIZANDO PONTOS DE MASSA EM COORDENADAS GEODÉSICAS

KRISTOFFER ALEXANDER TEIXEIRA HALLAM

Outubro/2019

Nesta tese proponho estratégias para a representação do campo de gravidade regional via técnica dos pontos de massa, no sistema de coordenadas geodésicas. Esta abordagem presume que o campo pode ser descrito pela soma de duas componentes. A primeira contém os longos comprimentos de onda da parcela gravitacional do campo de gravidade e é definida por um modelo de referência global. A segunda é definida pelos resíduos entre dados observados e aqueles preditos pelo modelo global sobre ou próximo à superfície da Terra. Desta forma, esta componente residual contém apenas os curtos comprimentos de onda da parcela gravitacional do campo de gravidade que não está contida no modelo global. A modelagem desta componente residual permite refinar o modelo global sobre uma determinada região e possibilita a representação de feições locais do campo de gravidade. Neste trabalho, esta modelagem é feita via técnica dos pontos de massa com posição fixa. Esta técnica consiste em aproximar a componente residual pelo efeito gravitacional produzido por um conjunto de pontos de massa com posição fixa. Para tanto, é necessário (i) a posição e, em seguida, (ii) a distribuição de massa destas fontes pontuais. Para estimar a posição das fontes, apresento um método baseado em *Statistical Experimental Design* (SED). Para estimar a distribuição de massa das fontes, apresento dois métodos. O primeiro consiste em estimar a distribuição de massa de um conjunto de camadas de pontos de massa com diferentes profundidades de forma a minimizar a norma L2 dos resíduos. Já o segundo consiste em estimar a distribuição de massa em uma única camada de pontos de massa de forma a minimizar a norma L1 dos resíduos. Testes com dados sintéticos mostram que o método baseado em SED é capaz de estimar a posição ótima dos pontos de massa mesmo para situações em que a distribuição dos dados observados é muito irregular. Isso representa uma vantagem sobre os demais métodos existentes na literatura, que são limitados ao

caso em que os dados observados estão dispostos sobre uma grade regular. Os resultados também mostram que, em comparação ao método baseado na norma L2, o método baseado na norma L1 reproduz as feições de curto comprimento de onda do campo de gravidade de forma mais acurada. Com base nos resultados com dados sintéticos, os métodos foram aplicados a dados reais, contendo duas configurações diferentes. A primeira corresponde aos dados da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira (RGFB) composto por nós bem localizados e esparsos por todo o Brasil. A segunda corresponde aos dados de gravimetria terrestre levantados por todo o território do estado de Goiás (GO). Em ambos os casos, os métodos foram capazes de incluir a componente residual nos mapas globais. No entanto, devido à maior densidade de dados e seu confinamento dentro da região indicada, os testes com os dados reais de GO apresentaram um desempenho melhor com relação à visualização da inclusão nos mapas globais.

Abstract of the Thesis presented to the National Observatory's Graduate Program in Geophysics as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Geophysics.

REGIONAL GRAVITY FIELD MODELLING THROUGH POINT-MASS IN GEODETIC COORDINATES

KRISTOFFER ALEXANDER TEIXEIRA HALLAM

October/2019

We propose new strategies for the regional gravity field representation via point-mass technique in the geodetic coordinate system. This approach makes the assumption that the field can be described by the sum of two components. The first one contains the long wavelength of the gravitational portion of the gravity field and is defined by a global reference model. Meanwhile, the second one is defined by the residuals between the observed and the predicted data from the global model evaluated on or above the surface of the Earth. This residual component contains the short wavelength of the gravitational portion of the gravity field only, which is not present on the global model. The modeling of this residual component allows the refinement of the global model over a certain region and enables the gravity field representation of local features. In the present work, we apply the fixed position point-mass technique for gravity modeling. This technique consists on approximating the residual component to the gravitational effect produced by an ensemble of fixed position point-masses. To do so, one needs (i) the position and (ii) the mass distribution of the point-sources. We estimate the sources positions accordingly to a new method we present based on Statistical Experimental Design (SED). We present two different methods for the estimation of the mass distribution of the sources. The first one consists on estimating the mass distribution of an ensemble of point-mass layers positioned at different depths in order to minimize the L2 norm of the residuals. The second one, on the other hand, consists on estimating the mass distribution of a single point-mass layer in order to minimize the L1 norm of the residuals. Synthetic data tests show that the method based on SED is capable of estimating the optimal position for the point-masses even for irregular data distribution configurations. This represents an advantage over other existing methods described in literature which are limited to regular grid data. The results also show

that the L1 norm based method reproduces the short wavelength of the gravity field more accurately than the L2 norm based method. The methods were applied to real data based on the results obtained by the synthetic data tests. The real data were divided into two different spatial configuration sets. The first set was defined by the Brasilian Fundamental Gravity Network (BFGN) data composed by well localized and sparse nodes all over Brazil. The second comprised the land gravity data surveyed within the Goiás (GO) state territory. In both cases, the results show that the residual component was successfully included in the global maps. However, the test using the real data from the state of GO showed a better performance for the visualization of the residual inclusion on the maps. This can be justified by the higher density and territorial confinement which are characteristics of the data.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
2 Fundamentos Teóricos	7
2.1 Terra Normal, gravidade normal e fontes gravimétricas	8
2.2 Sistemas de Referência Terrestre usados em modelagem de gravidade	9
2.3 Distúrbio de gravidade e anomalia de gravidade	10
2.4 Anomalias Ar-livre e Bouguer	14
2.5 Distúrbio de gravidade versus anomalia de gravidade	15
2.6 Distúrbio de gravidade δg versus g_h	16
3 Metodologia	18
3.1 Método dos pontos de massa	18
3.2 Critério da escolha da profundidade	20
3.3 Algoritmos	22
4 Resultados e Discussões	28
4.1 Teste de Validação	28
4.2 Teste com Dados Sintéticos	30
4.2.1 Teste 1 - Dados regularmente espaçados	31
4.2.2 Teste 2 - Dados da rede gravimétrica sintética	33
4.3 Aplicação a dados reais	37
4.3.1 Descrição dos dados reais	37
4.3.2 Teste com Dados Reais	38
5 Conclusões	77
Referências Bibliográficas	79

Listas de Figuras

- 2.1 (a) e (b) *Sistema Cartesiano Geocêntrico* (SCG) e *Sistema Geodésico Geocêntrico* (SGG). A posição de um ponto no SCG é definida pelas coordenadas cartesianas geocêntricas (X, Y, Z) , em que o eixo Z coincide com o eixo médio de rotação da Terra, eixo X aponta para o Meridiano de Greenwich e Y aponta para leste. O SGG é definido por um elipsoide oblato com semi-eixo menor b e semi-eixo maior a . Neste sistema, a posição de um ponto é determinada pelas coordenadas geodésicas altitude geométrica h , latitude geodésica φ e longitude λ . Os vetores unitários $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ e $\hat{\mathbf{w}}$ definem direções mutuamente ortogonais em um determinado ponto. As quantidades associadas ao ponto P estão indicadas com o subscrito P . Em (b), Q representa um ponto sobre o elipsoide de referência na mesma latitude e longitude do ponto P . (c) Sistema Cartesiano Topocêntrico (SCT) com origem em um ponto P . Neste sistema, a posição de um ponto é definida por coordenadas cartesianas topocêntricas (x, y, z) em que x e y são paralelos aos vetores unitários $\hat{\mathbf{v}}$ e $\hat{\mathbf{w}}$, respectivamente, e o eixo z é oposto a $\hat{\mathbf{u}}$. Em (c), o SCT é representado com origem no ponto P . O plano de cor cinza é o mesmo mostrado em (a) e (b). 11

4.4 Teste com dados sintéticos. Componente de longo comprimento de onda dos dados de distúrbio de gravidade preditos pelo modelo EIGEN-6C4 até grau e ordem 65 nas altitudes da a) superfície da Terra; b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km.	43
4.5 Teste com dados sintéticos. Componente de curto comprimento de onda dos dados de distúrbio de gravidade produzida pelas feições lineares nas altitudes da a) superfície da Terra; b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km.	44
4.6 Teste com dados sintéticos. Altitude geométrica dos pontos localizados na superfície da Terra, onde os dados mostrados nas Figuras 4.4 a e 4.5 a foram avaliados.	45
4.7 Teste com dados sintéticos. Dado observado \mathbf{d}^o (eq. 3.3) resultante da soma da componente de longo comprimento de onda predito pelo modelo EIGEN-6C4 até grau e ordem 65 com a componente de curto comprimento de onda produzida pelas feições lineares na superfície da Terra, limitados entre as latitudes -18 a -8 ° e longitudes -50 a -40°.	45
4.8 Teste com dados sintéticos. Componente de curto comprimento de onda dos dados de distúrbio de gravidade produzida pelas feições lineares observados na superfície da Terra, limitados entre as latitudes -18 a -8 ° e longitudes -50 a -40°. Estes dados representam o lado esquerdo da equação 3.15 e são definidos como \mathbf{r}_0 na etapa 1 do algoritmo <i>multi-camadas</i>	46
4.9 Teste com dados sintéticos. Cálculo da profundidade ótima. a) Curva de autovalores pelos seus índices. Cada curva representa o vetor de autovalores da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ correspondente a uma determinada profundidade; b) Curva de qualidade do <i>design</i> estatístico. Cada ponto da curva representa um valor de qualidade Q (eq. 3.13) associado a uma determinada profundidade h_j , $j = 0, 1, 2, 3, \dots$	47
4.10 Teste com dados sintéticos. Resíduos produzidos a) pela camada $\ell = 0$; b) pelas camadas $\ell = 0, 1$; c) pelas camadas $\ell = 0, 1, 2$ usando o algoritmo <i>multi-camadas</i>	48
4.11 Teste com dados sintéticos. Diferença entre os dados verdadeiros e os dados preditos pelas 6 camadas de pontos de massa obtidas com o algoritmo <i>multi-camadas</i> nas altitudes a) superfície da Terra; b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km. Os dados verdadeiros são a soma entre os dados mostrados nas Figuras 4.4 e 4.5. Os dados preditos são a soma entre os dados mostrados na Figura 4.4 e aquele predito por todas as camadas de pontos de massa.	49

4.12 Teste com dados sintéticos. Resíduos produzidos pela camada usando o algoritmo <i>robusto</i> após 3 iterações.	50
4.13 Teste com dados sintéticos. Diferença entre os dados verdadeiros e os dados preditos pela única camada de pontos de massa obtida com o algoritmo <i>robusto</i> nas altitudes a) superfície da Terra; b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km. Os dados verdadeiros são a soma entre os dados mostrados nas Figuras 4.4 e 4.5. Os dados preditos são a soma entre os dados mostrados na Figura 4.4 e aquele predito pela camada de pontos de massa.	51
4.14 Teste com dados sintéticos. a) Componente de longo comprimento de onda dos dados de \mathbf{d}^B preditos pelo modelo EIGEN-6C4 até grau e ordem 65; b) Componente de curto comprimento de onda dos dados de distúrbio de gravidade produzida pelas feições lineares; c) Dados \mathbf{d}^o . Todos os dados são observados nos nós da rede gravimétrica sintética que simula a Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira (PIÑA e SOUSA, 2001). As altitudes destes pontos estão mostradas na Figura 4.15.	52
4.15 Teste com dados sintéticos. Altitude geométrica dos pontos que definem os nós da rede gravimétrica sintética (Figuras 4.14 a, b e c).	53
4.16 Teste com dados sintéticos. Cálculo da profundidade ótima. a) Curva de autovalores pelos seus índices. Cada curva representa o vetor de autovalores da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ correspondente a uma determinada profundidade; b) Curva de qualidade do <i>design</i> estatístico. Cada ponto da curva representa um valor de qualidade Q (eq. 3.13) associado a uma determinada profundidade h_j , $j = 0, 1, 2, 3, \dots$	53
4.17 Teste com dados sintéticos. Resíduos produzidos a) pela camada $\ell = 0$; b) pelas camadas $\ell = 0, 1, 2, 3$; c) pelas camadas $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ usando o algoritmo <i>multi-camadas</i>	54
4.18 Teste com dados sintéticos. Comparaçāo entre: a) o distúrbio de gravidade produzido pelas feições lineares e b) a diferença entre os dados verdadeiros e os dados preditos pelas 7 camadas de pontos de massa obtidas com o algoritmo <i>multi-camadas</i> , ambos avaliados na superfície da Terra. Os dados verdadeiros são a soma entre os dados mostrados nas Figuras 4.4 e 4.5. Os dados preditos são a soma entre os dados mostrados na Figura 4.4 e aquele predito por todas as camadas de pontos de massa. c) Diferença entre as Figuras a e b.	55

4.19 Teste com dados sintéticos. Comparação entre: a) o distúrbio de gravidade produzido pelas feições lineares e b) a diferença entre os dados verdadeiros e os dados preditos pelas 7 camadas de pontos de massa obtidas com o algoritmo <i>multi-camadas</i> , todos avaliados na altitude de 3 km. Os dados verdadeiros são a soma entre os dados mostrados nas Figuras 4.4 e 4.5. Os dados preditos são a soma entre os dados mostrados na Figura 4.4 e aquele predito por todas as camadas de pontos de massa. c) Diferença entre as Figuras <i>a</i> e <i>b</i>	56
4.20 Teste com dados sintéticos. Efeito gravitacional das camadas de pontos de massa na altitude de 7 km.	57
4.21 Teste com dados sintéticos. Resíduos produzidos pela camada usando o algoritmo <i>robusto</i> após 3 iterações.	57
4.22 Teste com dados sintéticos. Comparação entre: a) o distúrbio de gravidade produzido pelas feições lineares e b) a diferença entre os dados verdadeiros e os dados preditos pela camada única de pontos de massa obtidas com o algoritmo <i>multi-camadas</i> , todos avaliados na superfície da Terra. Os dados verdadeiros são a soma entre os dados mostrados nas Figuras 4.4 e 4.5. Os dados preditos são a soma entre os dados mostrados na Figura 4.4 e aquele predito por todas as camadas de pontos de massa. c) Diferença entre as Figuras <i>a</i> e <i>b</i>	58
4.23 Teste com dados sintéticos. Comparação entre: a) o distúrbio de gravidade produzido pelas feições lineares e b) a diferença entre os dados verdadeiros e os dados preditos pela camada única de pontos de massa obtidas com o algoritmo <i>multi-camadas</i> , todos avaliados na altitude de 3 km. Os dados verdadeiros são a soma entre os dados mostrados nas Figuras 4.4 e 4.5. Os dados preditos são a soma entre os dados mostrados na Figura 4.4 e aquele predito por todas as camadas de pontos de massa. c) Diferença entre as Figuras <i>a</i> e <i>b</i>	59
4.24 Teste com dados sintéticos. Efeito gravitacional da camada única de pontos de massa na altitude de 7 km.	60
4.25 Aplicação a dados reais. reais. Diferença entre o distúrbio de gravidade sobre os nós da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira (PIÑA e SOUSA, 2001) (\mathbf{d}^o) e o distúrbio calculado pelo modelo EIGEN-6C4, expandido até grau e ordem 2190, (\mathbf{d}^B) nos mesmos pontos. As altitudes dos pontos da rede são as mesmas dos pontos da rede gravimétrica sintética (Figura 4.15).	60
4.26 Aplicação a dados reais. Resíduos produzidos pela camada usando o algoritmo <i>robusto</i> após 3 iterações.	61

4.27 Aplicação a dados reais. Dados do modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 observados a) na superfície da Terra; e nas altitudes de b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km.	62
4.28 Aplicação a dados reais. Efeito gravitacional produzido pela camada de pontos de massa estimada com o algoritmo <i>robusto</i> nas altitudes a) superfície da Terra; b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km.	63
4.29 Aplicação a dados reais. Dados preditos obtidos pela soma do efeito gravitacional produzido pela camada de pontos de massa estimada com o algoritmo <i>robusto</i> (Figuras 4.28) e o modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 (Figuras 4.27) observados superfície da Terra; b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km.	64
4.30 Aplicação a dados reais. a) Distúrbio de gravidade \mathbf{d}^B predito pelo modelo EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190; b) Distúrbio de gravidade \mathbf{d}^o observado pelo IBGE (dados BDG); c) Diferença entre <i>b</i> e <i>a</i> , ou seja, dados $\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^B$, todos avaliados sobre as estações de GO.	65
4.31 Aplicação a dados reais. Cálculo da profundidade ótima. a) Curva de autovalores pelos seus índices. Cada curva representa o vetor de autovalores da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ correspondente a uma determinada profundidade; b) Curva de qualidade do <i>design</i> estatístico. Cada ponto da curva representa um valor de qualidade Q (eq. 3.13) associado a uma determinada profundidade h_j , $j = 0, 1, 2, 3, \dots$	66
4.32 Aplicação a dados reais. Resíduos produzidos a) pela camada $\ell = 0$; b) pelas camadas $\ell = 0, 1, 2, 3$; c) pelas camadas $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ usando o algoritmo <i>multi-camadas</i>	67
4.33 Aplicação a dados reais. Efeito gravitacional produzido pela camada de pontos de massa estimada com o algoritmo <i>multi-camadas</i> a) na superfície da Terra; e nas altitudes de b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km.	68
4.34 Aplicação a dados reais. Comparação entre os dados do a) modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 e b) os dados preditos pela sua soma com o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados observados na superfície da Terra, obtidos pela abordagem <i>multi-camadas</i>	69
4.35 Aplicação a dados reais. Comparação entre os dados do a) modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 e b) os dados preditos pela sua soma com o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados observados à altitude de 3 km, obtidos pela abordagem <i>multi-camadas</i>	70

4.36 Aplicação a dados reais. Comparação entre os dados do a) modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 e b) os dados preditos pela sua soma com o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados observados à altitude de 7 km, obtidos pela abordagem <i>multi-camadas</i>	71
4.37 Aplicação a dados reais. Resíduos produzidos pela camada única usando o algoritmo <i>robusto</i> após 3 iterações.	72
4.38 Aplicação a dados reais. Efeito gravitacional produzido pela camada de pontos de massa estimada com o algoritmo <i>robusto</i> a) na superfície da Terra; e nas altitudes de b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km.	73
4.39 Aplicação a dados reais. Comparação entre os dados do a) modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 e b) os dados preditos pela sua soma com o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados observados na superfície da Terra.	74
4.40 Aplicação a dados reais. Comparação entre os dados do a) modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 e b) os dados preditos pela sua soma com o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados observados à altitude de 3 km.	75
4.41 Aplicação a dados reais. Comparação entre os dados do a) modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 e b) os dados preditos pela sua soma com o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados observados à altitude de 7 km.	76

Capítulo 1

Introdução

A caracterização do campo de gravidade da Terra é um dos principais objetivos da geodésia e geofísica. Os dados de satélite obtidos nas missões CHAMP (REIGBER *et al.*, 2006), lançada em 2000, GRACE (GRACE, 1998), lançada em 2002, e GOCE (European Space Agency, 1999), lançada em 2009, impulsionaram o desenvolvimento de vários modelos globais para representação do campo de gravidade (CHENG e TAPLEY, 2004; FLECHTNER *et al.*, 2010; FÖRSTE *et al.*, 2008; MAYER-GÜRR *et al.*, 2010; PAIL *et al.*, 2010, 2011; REIGBER *et al.*, 2005; TAPLEY *et al.*, 2007). Estes modelos são representados pela combinação linear de funções harmônicas esféricas que são globalmente oscilatórias. O uso destas funções dificulta a representação ou até mesmo mascara feições locais do campo. Por conta disso, esta abordagem não é adequada para a representação regional do campo de gravidade.

Modelos globais baseados apenas em dados de satélite podem ser refinados utilizando-se, por exemplo, dados provenientes de altimetria por satélite e dados gravimétricos obtidos na superfície da Terra ou próximo a ela. Uma das estratégias utilizadas para gerar estes modelos globais combinados é incluir os conjuntos de dados adicionais no ajustamento dos coeficientes da representação por funções harmônicas esféricas. Vários modelos foram gerados utilizando-se esta metodologia (e.g., FÖRSTE *et al.*, 2008; FÖRSTE *et al.*, 2011, 2014; LEMOINE *et al.*, 1998; PAVLIS *et al.*, 2012; RAPP *et al.*, 1991). Em geral, estes métodos requerem a inclusão das matrizes de variância-covariância dos dados e são custosos devido ao grande número de operações envolvidas na solução de grandes sistemas lineares. Apesar da inclusão de dados de gravimetria terrestre, estes modelos também falham em representar feições regionais do campo de gravidade. Outra desvantagem destes métodos é que, em geral, eles demandam a homogeneidade espacial dos dados, o que nem sempre é possível.

O uso de Bases de Funções Esféricas Radiais (SRBFs, do inglês Spherical Radial Basis Functions) é uma técnica poderosa na combinação de conjuntos de dados provenientes de diferentes fontes (dados de satélite, altimetria, terrestres e aéreos,

por exemplo), com diferentes conteúdos espectrais e amostragens irregulares. Esta técnica consiste em representar o campo de gravidade pela combinação linear de funções harmônicas simples. Diferentemente das funções harmônicas esféricas que oscilam globalmente, as funções harmônicas simples decaem rapidamente com a distância em relação a um ponto de referência. Por conta disso, estas funções simples (denominadas *kernels*) têm sido amplamente utilizadas para refinar a representação de feições regionais do campo de gravidade.

Ao longo das últimas décadas, vários métodos foram desenvolvidos para a representação regional do campo de gravidade via SRBFs. Na literatura, os autores descrevem diferentes modelagens regionais por SRBFs com aplicação de distintos *kernels*. A escolha do *kernel* é afetada pelo seu comportamento no domínio espectral e espacial. No domínio espectral, o *kernel* multipolo radial (MARCHENKO *et al.*, 2001), *kernel* de Poisson (BENTEL *et al.*, 2013; KLEES *et al.*, 2008) e *wavelet de Poisson* (HOLSCHNEIDER *et al.*, 2003) operam como filtros passa-banda; a *wavelet de Blackman* (BENTEL *et al.*, 2013; LIEB *et al.*, 2016; SCHMIDT *et al.*, 2007) limita a banda num intervalo específico com frequência de corte suave; *splines harmônicos* (EICKER, 2008) usam variâncias nos graus dos harmônicos esféricos como função base. No domínio espacial, o *kernel de Poisson* tem um alcance maior para posições fora do seu pico que os multipolos radiais e os *wavelets de Poisson*. As *wavelets de Blackman* apresentam oscilações fortes para regiões fora do seu pico que dependem do espaçamento entre os limites do filtro. O comportamento dos *splines harmônicos* no espaço é determinado pela escolha do modelo de variância dos graus.

O ponto de massa foi um dos primeiros kernels a ser utilizado nas SRBFs. A representação do campo de gravidade usando os pontos de massa também é comumente utilizada na área de geofísica aplicada com o nome de camada equivalente ou fontes equivalentes (DAMPNEY, 1969; EMILIA, 1973; GUSPÍ e NOVARA, 2009; KARA *et al.*, 2014; MARTINEZ e LI, 2016; MENDONÇA, 1992; OLIVEIRA JR. *et al.*, 2013; SIQUEIRA *et al.*, 2017; VON FRESE *et al.*, 1981). Em geofísica aplicada, os pontos de massa são utilizados, em geral, para realizar o processamento de dados gravimétricos. Já em geodésia, os pontos de massa são utilizados, em geral, para a modelagem do campo de gravidade. BALMINO (1972); NEEDHAM (1970); WEIGHTMAN (1967) foram os pioneiros em usar os pontos de massa na representação do campo de gravidade. VERMEER (1985) usou os pontos de massa na modelagem regional do geoide na Finlândia e no mar Báltico.

A representação do campo de gravidade usando um conjunto finito de pontos de massa requer a definição da posição e da massa de cada um deles. Nesse sentido, há duas abordagens comumente utilizadas. A primeira determina a posição dos pontos de massa em uma etapa inicial e, em seguida, utiliza estas posições fixas para resolver um sistema linear e estimar a distribuição de massas. Esta abordagem é

comumente denominada *pontos de massa fixos*. A posição das fontes determinada na primeira etapa e a distribuição dos dados observados são fatores que podem tornar o problema extremamente instável e, por esta razão tornam necessário o uso de regularização do sistema linear. Note que neste caso, o uso de regularização é puramente matemático, com o intuito de estabilizar a solução do sistema linear. Já em geofísica aplicada, por exemplo, o uso de regularização é feito, em geral, com o objetivo de impôr informações geológicas sobre as estimativas. Exemplos de trabalhos que utilizaram a abordagem de pontos de massa fixos para a caracterização do campo de gravidade são CHEN *et al.* (2006); IHDE *et al.* (1998); REILLY e HERBRECHTSMEIER (1978); VERMEER (1985). A segunda abordagem comumente na caracterização do campo de gravidade consiste em determinar, simultaneamente, a posição e a massa de cada ponto de massa de forma iterativa, por meio da solução de um problema não-linear. Esta abordagem é comumente denominada *pontos de massa livres*. Alguns exemplos seguindo esta abordagem são encontrados em ANTUNES *et al.* (2003); BARTHELMES (1986); CLAESSENS *et al.* (2001); LEHMANN (1993); LIN *et al.* (2014, 2016). Em comparação com a abordagem dos pontos de massa fixos, a abordagem dos pontos de massa livres é, em geral, mais custosa do ponto de vista computacional.

Tanto na abordagem com pontos de massa fixos quanto naquela com pontos de massa livres, estes podem ser posicionados sobre uma única camada (*single-layer*) ou sobre um conjunto de camadas (*multi-layer*). A abordagem multi-camadas (*multi-layer*) permite a representação multi-resolução (MRR, do inglês Multi-Resolution Representation) do campo de gravidade (SCHMIDT *et al.*, 2004). Camadas de pontos de massa mais profundos modelam os longos comprimentos de onda do campo de gravidade. Em contrapartida, camadas de pontos de massa mais rasos ajustam os curtos comprimentos de onda. Esta aproximação é comumente utilizada para a combinação de dados de diferentes levantamentos. Em geral, a modelagem do campo de gravidade utilizando multi-camadas com pontos de massa livres requer uma quantidade menor de camadas do que a abordagem multi-camadas com pontos de massa fixos.

REILLY e HERBRECHTSMEIER (1978) apresentaram um dos poucos trabalhos que utilizaram a abordagem multi-camadas com pontos fixos. Aqueles autores propuseram um método para combinar dados de ondulação geoidal e de anomalias de gravidade para obter altitudes ortométricas em terra e anomalias de gravidade no mar. Eles usaram pontos de massa em grids regulares localizados sobre cascas esféricas concêntricas em profundidades cada vez mais rasas. IHDE *et al.* (1998) propuseram outro método em que quatro camadas formadas por pontos de massa fixos foram utilizados para refinar o modelo de geoide combinando dados de anomalia de gravidade e anomalia de altitude fornecida por medidas de GPS. GUSPÍ

et al. (2004) utilizaram duas camadas de pontos de massa fixos para combinar dados de ondulação geoidal e de anomalia ar-livre. Todos estes trabalhos foram formulados no sistema de coordenadas esféricas geocêntricas. Outra característica comum destes métodos é que eles estimam a distribuição de massa dos pontos de massa minimizando a norma L2 dos resíduos entre os dados observados e aqueles preditos pelos pontos de massa.

A maioria dos trabalhos com pontos de massa fixos determinam a profundidade dos pontos de massa por meio de tentativa e erro, como é o caso de IHDE *et al.* (1998) e GUSPÍ *et al.* (2004). Já REILLY e HERBRECHTSMEIER (1978) utilizaram a técnica do “best r-formula” (HARDY e GÖPFERT, 1975) para um esquema de coordenadas esféricas. Esta técnica consiste em resolver analiticamente uma equação de condição quadrática para um raio interno $r < R$, sendo R o raio médio da Terra. O raio r está associado à esfera sobre a qual são posicionados os pontos de massa. Tal fórmula foi derivada a partir de um triângulo equilátero esférico, o que possibilita computar a profundidade radial dos três pontos de massa associados a cada vértice deste triângulo. A sua utilização para pontos de massa relacionados a outros triângulos está restrita à configuração em que os pontos estejam regularmente espaçados sobre a esfera. A equação de condição tem relação com o fato de que o valor médio do potencial perturbador, assim como o campo produzido pelos pontos de massa, é nulo quando integrado sobre a esfera. O raio r é, por fim, calculado analiticamente em função do número de pontos de massa. Outra técnica que pode ser mencionada é aquela baseada no critério de DAMPNEY (1969), que é comumente utilizado em geofísica aplicada. Ela requer que os dados observados estejam dispostos sobre um plano, em uma grade regular, e apresenta um intervalo de possíveis profundidades para os pontos de massa. Este intervalo é definido segundo uma relação empírica baseada no espaçamento dos dados.

Nesta tese, apresento novas estratégias para a modelagem regional do campo de gravidade utilizando a abordagem dos pontos de massa fixos. Diferentemente da grande maioria dos métodos apresentados na literatura, tanto com pontos de massa quanto com outros kernels (multipolos e wavelets, por exemplo), os métodos apresentados aqui são formulados diretamente no sistema de coordenadas geodésicas. Os dados utilizados neste trabalho são do distúrbio de gravidade. Vale ressaltar que os dados são referidos, na grande maioria das vezes, ao sistema de coordenadas geodésicas. Por conta disso, a formulação dos métodos apresentados aqui diretamente neste sistema de coordenadas evita a transformação das coordenadas dos dados.

Para estimar a profundidade ótima dos pontos de massa necessária na abordagem dos pontos de massa fixos, apresento um método baseado em Statistical Experimental Design (SED) (CURTIS, 2004). Ao definir uma determinada profundidade

constante para uma camada de pontos de massa, é possível calcular a “qualidade” do sistema linear a ser resolvido posteriormente para estimar a distribuição de massa dos pontos de massa. Esta ”qualidade”, por sua vez, pode ser definida em termos da área abaixo da curva de autovalores da matriz associada a este sistema linear. No método proposto aqui, a profundidade ótima para os pontos de massa é definida como aquela que, dentre um conjunto de profundidades distintas, produz a maior área. Este método é independente da distribuição espacial dos dados observados e, portanto, é superior aos demais métodos presentes na literatura (DAMPNEY, 1969; HARDY e GÖPFERT, 1975). Para estimar a distribuição de massa dos pontos de massa, apresento dois métodos. O primeiro implementa uma abordagem *multicamadas*. O método consiste em estimar a distribuição de massa de um conjunto de camadas de pontos de massa, cada uma com uma profundidade constante, de forma iterativa. Este método é similar àquele apresentado por (REILLY e HERBRECHTS-MEIER, 1978). A cada iteração, a distribuição de massa em uma camada é estimada minimizando-se a norma L2 da diferença entre os dados observados na superfície da Terra e aqueles preditos pela camada de pontos de massa, por meio da solução de um problema inverso linear com regularização Tikhonov de ordem zero (ASTER *et al.*, 2005). Na primeira iteração, estima-se a distribuição de massa na camada mais profunda. Esta camada é formada por um ponto de massa abaixo de cada dado observado e a sua profundidade é definida pelo método descrito anteriormente, que é baseado em SED. Nas iterações seguintes, a distribuição de massa é estimada em camadas cada vez mais rasas, para ajustar os resíduos entre os dados observados e aqueles produzidos pela soma dos dados preditos pelas camadas anteriores. Estas camadas possuem pontos de massa localizados abaixo das regiões com altos resíduos. Dessa forma, o número de pontos de massa das camadas diminui progressivamente. Neste método, o número final de pontos de massa que formam todas as camadas é, em geral, muito maior que o número de dados observados. O segundo método consiste em estimar a distribuição de massa sobre uma única camada de pontos de massa localizados a uma profundidade constante. Esta profundidade é determinada com o método baseado em SED. Nesta camada, há um ponto de massa localizado abaixo de cada dado, de tal forma que o número de pontos de massa é igual ao número de dados. A distribuição de massa sobre a camada é estimada de forma iterativa, minimizando-se a norma L1 da diferença entre os dados observados e os preditos pela camada. A estimativa é feita utilizando o método dos Mínimos Quadrados Reponderados Iterativamente (ASTER *et al.*, 2005).

Os testes com dados sintéticos também mostram os resultados obtidos em duas situações distintas. Uma simula dados observados distribuídos de forma extremamente esparsa e irregular. Já a outra simula dados localizados de forma relativamente uniforme. Para ambos os casos, o método baseado em SED possibilitou estimar

uma profundidade ótima para os pontos de massa, o que representa uma vantagem considerável em relação aos demais métodos presentes na literatura (DAMPNEY, 1969; HARDY e GÖPFERT, 1975). Além disso, os resultados obtidos com a norma L1 para estimar a distribuição de massa dos pontos de massa produziu melhores resultados em comparação com as que foram obtidas via norma L2. Com base nos resultados com dados sintéticos, os métodos foram aplicados a dados reais sobre o território brasileiro. Para estimar a distribuição de massa, utilizou-se apenas o método baseado na norma L1. Para tanto, utilizei o modelo global EIGEN-6C4 (FÖRSTE *et al.*, 2014) como referência e os dois conjuntos de dados observados sobre a superfície para refinar este modelo: os dados da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira (RGFB) (PIÑA e SOUSA, 2001), que estão distribuídos ao longo de todo o território brasileiro de forma esparsa e irregular, e os dados de gravimetria disponibilizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em seu Banco de Dados Geodésicos (BDG), sobre o estado de Goiás (GO), que possui uma cobertura relativamente uniforme. Os resultados mostram que, utilizando os dados da RGFB, as diferenças entre distúrbio de gravidade predito pelo modelo refinado e pelo modelo EIGEN-6C4 no Brasil podem chegar a 35,63 mGal sobre a superfície da Terra e 1,17 mGal na altitude de 40 km. Entretanto, os resultados são restritos a regiões isoladas devido à cobertura irregular dos dados. Por outro lado, os resultados obtidos com os dados sobre o estado de GO revelam que as diferenças entre o distúrbio de gravidade predito pelo modelo refinado e pelo modelo EIGEN-6C4 atingem um valor absoluto de 48,4 mGal sobre a superfície e \approx 6 mGal na altitude geométrica de 40 km. Neste caso, a combinação dos dados preditos pelos pontos de massa com o modelo EIGEN-6C4 mostra uma inclusão significativa de curtos comprimentos de onda no mapa regional do distúrbio de gravidade. Estes resultados mostram que os métodos desenvolvidos nesta tese são promissores no refinamento do campo de gravidade regional.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

O *vetor gravidade* é a soma das acelerações gravitacional e centrífuga sentidas por um corpo sobre a superfície da Terra quando este se encontra em repouso. Sua intensidade é o que os geocientistas denominam de *gravidade* (HEISKANEN e MORITZ, 1967; HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005). Quando realizadas em plataformas móveis (e.g., aeronaves, helicópteros, navios), as medições sofrem os efeitos de acelerações não-gravitacionais, tais como a aceleração de Coriolis e vibrações de alta frequência (BAUMANN *et al.*, 2012; GLENNIE *et al.*, 2000; NABIGHIAN *et al.*, 2005). Geodesistas utilizam as medidas da gravidade para estimar o geoide (LI e GÖTZE, 2001) enquanto que os geofísicos a usam para estimar a distribuição de densidade interna da Terra. Consequentemente, os geofísicos estão interessados, apenas, na componente gravitacional da gravidade observada.

O primeiro passo para o isolamento da componente gravitacional é a remoção dos efeitos do movimento do veículo, marés terrestres, deriva instrumental e alterações da pressão barométrica, dentre outros. Uma vez corretamente removidos, considerase que as observações corrigidas sejam a soma da aceleração centrífuga devido à rotação da Terra e a atração gravitacional produzida pela distribuição de densidade interna do planeta como um todo. O isolamento da componente gravitacional e sua subsequente aplicação na estimativa das distribuições de densidade relacionadas às estruturas geológicas localizadas em subsuperfície são o objetivo principal da gravimetria aplicada para fins geofísicos (BLAKELY, 1996).

Há duas quantidades associadas ao campo de gravidade que são usadas pelos geofísicos para o entendimento da distribuição de densidade em subsuperfície. São elas o *distúrbio de gravidade* e a *anomalia de gravidade*. A primeira é bem conhecida na geodésia, embora não seja regularmente utilizado pelos geofísicos. Já a segunda é vista em várias aplicações geofísicas. Há dois tipos de anomalias de gravidade comumente utilizadas em geofísica: a *anomalia ar-livre* e a *anomalia Bouguer*. Curiosamente, existiu uma falta de compreensão do significado geofísico das anomalias de gravidade até meados dos anos 90. Segundo CHAPIN (1996), embora as correções

que produzem a anomalia Bouguer fossem bem estabelecidas, as razões para aplicá-las não eram muito bem compreendidas. Uma causa desta confusão é que o tema não vinha sendo apresentado nos textos básicos de forma apropriada. Em seu livro seminal, BLAKELY (1996) deu uma grande contribuição para o significado das anomalias de gravidade na geofísica aplicada e o seu relacionamento com as variações de densidade das rochas em subsuperfície. Posteriormente, diversos autores discutiram as diferenças entre anomalia de gravidade e distúrbio de gravidade e propuseram bases teóricas e novas terminologias para as mesmas quantidades (FAIRHEAD *et al.*, 2003; HACKNEY e FEATHERSTONE, 2003; HINZE *et al.*, 2005; LI e GÖTZE, 2001; VAJDA *et al.*, 2006, 2007, 2008). Entretanto, o debate sobre este assunto tem sido feito mais de um ponto de vista geodésico do que geofísico e pode ser esta a justificativa da falta de familiaridade que alguns geofísicos de exploração ainda têm em relação a ele.

Para aplicações geofísicas, é importante saber como se computa a anomalia de gravidade e o distúrbio de gravidade produzidos por um prisma, por exemplo, assim como a relação entre estas quantidades e a “componente vertical da atração gravitacional”, exercida por este prisma nas estações de gravidade. A maioria das técnicas na geofísica aplicada presumem que os dados gravimétricos podem ser descritos em função da componente vertical da atração gravitacional produzida pelas variações de densidade das rochas em subsuperfície. Esta quantidade está diretamente relacionada ao distúrbio de gravidade, embora seja erroneamente designada como “anomalia de gravidade” na maioria dos trabalhos na literatura geofísica. Na verdade, muitos geofísicos ainda usam o termo “anomalia de gravidade” para denominar o que rigorosamente é conhecido como “distúrbio de gravidade”. A seguir, apresento uma revisão sobre este tema baseado em conceitos bem estabelecidos na literatura.

2.1 Terra Normal, gravidade normal e fontes gravimétricas

O campo de gravidade da Terra é tradicionalmente aproximado pelo campo de gravidade de um elipsoide de referência (ou elipsoide de nível). Este elipsoide é rígido, geocêntrico, possui o semi-eixo menor b coincidente com o eixo de rotação médio da Terra. Este modelo também tem a mesma massa da Terra (incluindo a atmosfera), assim como a mesma velocidade angular (HEISKANEN e MORITZ, 1967; HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005; TORGE e MÜLLER, 2012; VANÍČEK e KRAKIWSKY, 1987). Outra característica importante deste modelo é que sua superfície limitante coincide com uma equipotencial particular do seu

próprio campo de gravidade. Neste trabalho, seguimos (TORGE e MÜLLER, 2012) e chamamos este elipsóide de referência de Terra Normal. Analogamente à Terra, o vetor gravidade normal é a soma das acelerações gravitacional e centrífuga exercidas pela Terra normal em um corpo em repouso. A intensidade do vetor gravidade normal é denominada gravidade normal.

É importante notar que, muito embora a Terra Normal tenha a mesma massa da Terra, a sua distribuição interna de densidade não é definida. A busca por distribuições de densidade geologicamente relevantes para o interior da Terra Normal tem mais motivos geofísicos que geodésicos (MARUSSI *et al.*, 1974). Na geodésia física, a Terra Normal é definida com um único propósito: produzir um campo de gravidade normal que seja o mais próximo possível do campo de gravidade verdadeiro (VANÍČEK e KRAKIWSKY, 1987). A única condição imposta na distribuição interna de densidade é que uma equipotencial particular do campo de gravidade normal (campo produzido pelo modelo de Terra Normal) coincida com a superfície limitante do elipsoide de referência. Ao fixar uma equipotencial particular (com um valor de potencial de gravidade específico) em uma determinada posição do espaço (a superfície limitante do elipsoide de referência), o campo de gravidade é definido em todos os pontos fora do elipsoide (HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2006, p. 65). Ao definir a geometria desta equipotencial, a distribuição de densidades no interior da Terra Normal também fica implicitamente restrita.

As estruturas geológicas em subsuperfície representam diferenças entre as distribuições de densidade interna da Terra Verdadeira e da Terra Normal. Em geofísica aplicada, essas diferenças de densidade são geralmente chamadas *massas anômalas* (e.g., HAMMER, 1945; LAFEHR, 1965), *anomalias de densidade* (e.g., FORSBERG, 1984), ou *fontes gravimétricas* (e.g., BLAKELY, 1996). Aqui, optamos por usar a última nomenclatura.

2.2 Sistemas de Referência Terrestre usados em modelagem de gravidade

Há três importantes Sistemas de Referência Terrestre usados em geofísica aplicada. Todos eles acompanham a rotação da Terra e são usados na descrição das posições e movimentos de objetos localizados sobre ou próximo à superfície da Terra (TORGE e MÜLLER, 2012). O primeiro é o Sistema Cartesiano Geocêntrico (SCG) com eixo Z coincidente com o eixo de rotação médio da Terra, eixo X apontado para o meridiano médio de Greenwich e eixo Y completando o sistema da regra da mão direita (Figura 2.1). Este sistema de referência tem diferentes nomenclaturas na literatura: Mean Terrestrial System (e.g., SOLER, 1976), Earth-fixed geocentric

Cartesian system (e.g., TORGE e MÜLLER, 2012) ou Earth-centered Earth-fixed system (e.g., BOUMAN *et al.*, 2013), por exemplo. Neste estudo, optamos por usar o termo Sistema Cartesiano Geocêntrico (SCG).

O segundo sistema de referência, o Sistema Geodésico Geocêntrico (SGG), é definido pelo elipsoide de referência usado no modelo de Terra Normal (BOUMAN *et al.*, 2013; HEISKANEN e MORITZ, 1967; SOLER, 1976; TORGE e MÜLLER, 2012). A posição de um ponto é definida pela *altitude geométrica* h , *latitude geodésica* φ , e *longitude* λ (Figura 2.1). Em cada ponto (h, φ, λ) , há três vetores unitários mutualmente ortogonais definidos como (SOLER, 1976):

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Equações para conversão entre estes sistemas podem ser encontrados na literatura (e.g., BOUMAN *et al.*, 2013; HEISKANEN e MORITZ, 1967; TORGE e MÜLLER, 2012).

O último sistema é o Sistema Cartesiano Topocêntrico (SCT), que é comumente usado em estudos geofísicos de escala local. Uma vez fixada a origem do SCT em um determinado ponto (h, φ, λ) , seus eixos x e y são definidos pelos vetores unitários $\hat{\mathbf{v}}$ e $\hat{\mathbf{w}}$ (equação 2.1), respectivamente, e seu eixo z é definido pelo oposto ao vetor unitário $\hat{\mathbf{u}}$ (Figura 2.1c).

2.3 Distúrbio de gravidade e anomalia de gravidade

Sejam $\boldsymbol{\gamma}_P$ e \mathbf{g}_P , respectivamente, o *vetor gravidade normal* e o *vetor gravidade* (livre de efeitos não-gravitacionais devido ao movimento do veículo e variações temporais como as marés terrestres e de deriva instrumental), ambos localizados no mesmo ponto P . Neste caso, o vetor gravidade \mathbf{g}_P é o gradiente do *potencial de gravidade*, que é a soma dos potenciais gravitacional e o centrífugo produzidos pela Terra no ponto P . Similarmente, o vetor gravidade normal $\boldsymbol{\gamma}_P$ é o gradiente do *potencial de gravidade normal*, que é a soma dos potenciais gravitacional e centrífugo produzidos pela Terra Normal no ponto P . Por definição, a parte centrífuga do potencial de gravidade normal é igual a parcela centrífuga do potencial de gravidade.

A diferença entre \mathbf{g}_P e $\boldsymbol{\gamma}_P$, no mesmo ponto P , define o *vetor distúrbio de gravidade* (Figura 2.2):

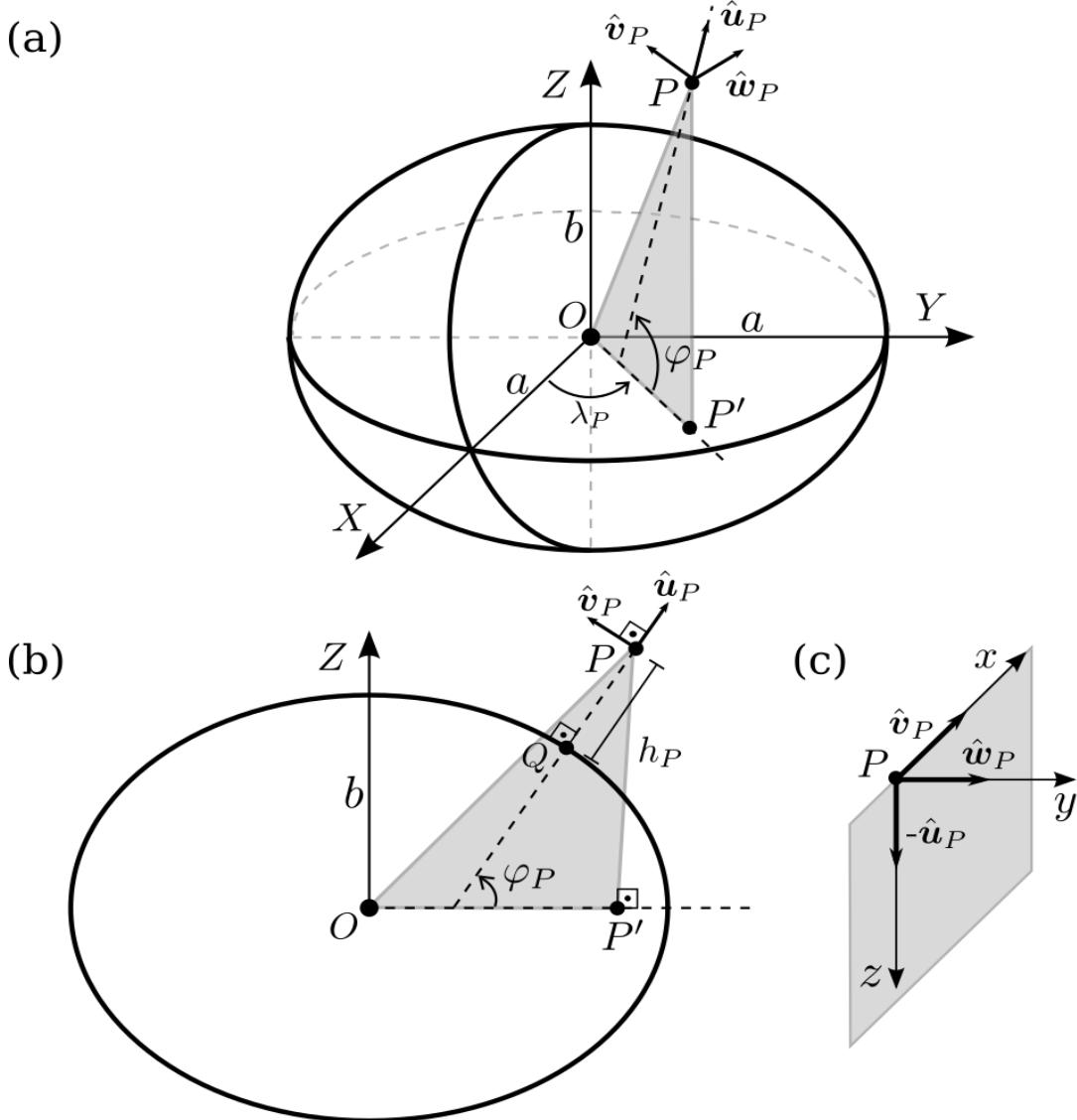


Figura 2.1: (a) e (b) *Sistema Cartesiano Geocêntrico* (SCG) e *Sistema Geodésico Geocêntrico* (SGG). A posição de um ponto no SCG é definida pelas coordenadas cartesianas geocêntricas (X, Y, Z) , em que o eixo Z coincide com o eixo médio de rotação da Terra, eixo X aponta para o Meridiano de Greenwich e Y aponta para leste. O SGG é definido por um elipsoide oblato com semi-eixo menor b e semi-eixo maior a . Neste sistema, a posição de um ponto é determinada pelas coordenadas geodésicas altitude geométrica h , latitude geodésica φ e longitude λ . Os vetores unitários $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ e $\hat{\mathbf{w}}$ definem direções mutuamente ortogonais em um determinado ponto. As quantidades associadas ao ponto P estão indicadas com o subscrito P . Em (b), Q representa um ponto sobre o elipsoide de referência na mesma latitude e longitude do ponto P . (c) Sistema Cartesiano Topocêntrico (SCT) com origem em um ponto P . Neste sistema, a posição de um ponto é definida por coordenadas cartesianas topocêntricas (x, y, z) em que x e y são paralelos aos vetores unitários $\hat{\mathbf{v}}$ e $\hat{\mathbf{w}}$, respectivamente, e o eixo z é oposto a $\hat{\mathbf{u}}$. Em (c), o SCT é representado com origem no ponto P . O plano de cor cinza é o mesmo mostrado em (a) e (b).

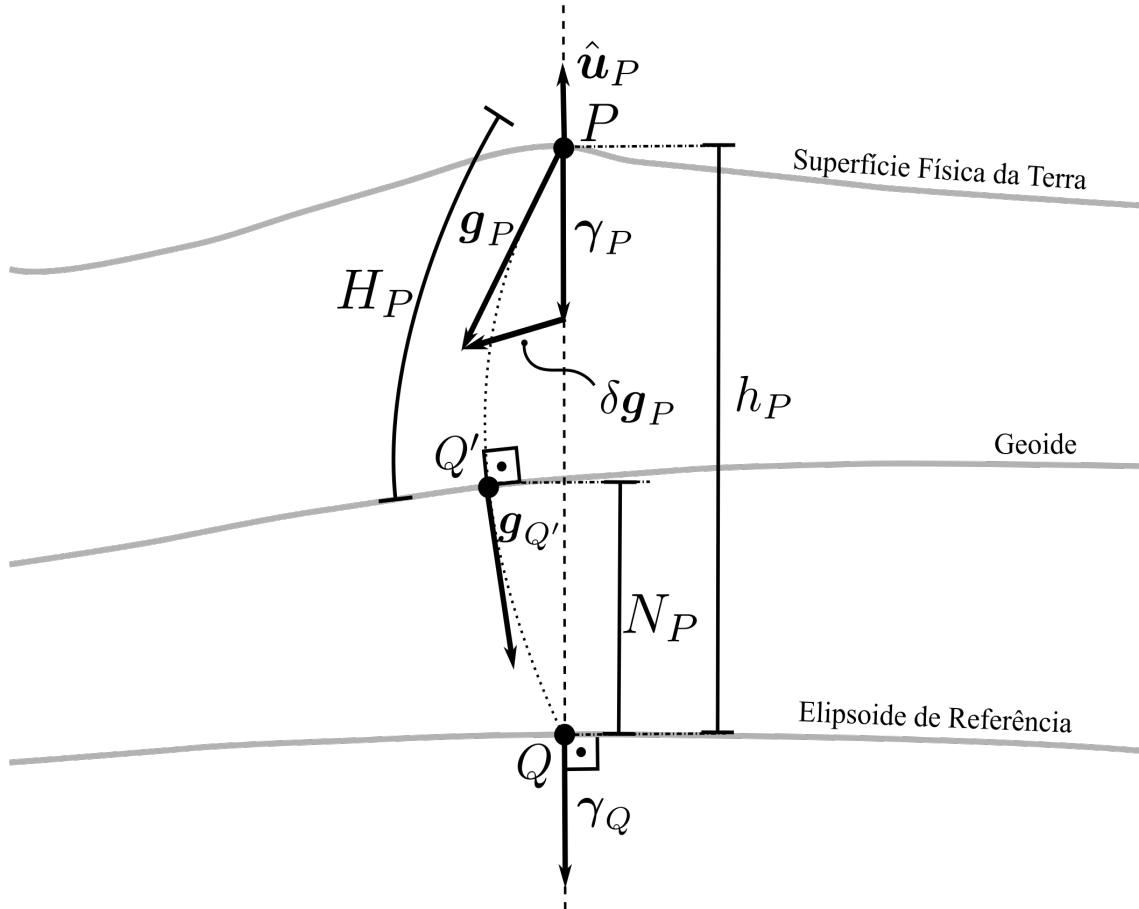


Figura 2.2: Vetor gravidade \mathbf{g}_P , vetor gravidade normal γ_P , vetor distúrbio de gravidade $\delta\mathbf{g}_P$ (equação 2.2) e vetor unitário $\hat{\mathbf{u}}_P$ (equação 2.1) em um ponto P sobre a superfície da Terra. Vetor gravidade $\mathbf{g}_{Q'}$ em um ponto Q' sobre o geoide (uma superfície equipotencial particular do potencial de gravidade), vetor gravidade normal γ_Q em um ponto Q sobre o elipsoide de referência, altitude geométrica h_P , altitude ortométrica H_P e altura geoidal N_P associadas ao ponto P . Os pontos Q e P possuem as mesmas latitude e longitude. A linha pontilhada que passa por Q e P é normal ao elipsoide de referência e representa a linha de campo associada ao campo de gravidade normal. A linha pontilhada curva que passa por Q , Q' e P define a linha de prumo do campo de gravidade. Esta representação esquemática é meramente ilustrativa em que os vetores estão dispostos no plano da folha. Os vetores apresentados também podem variar na direção perpendicular ao plano da folha.

$$\delta\mathbf{g}_P = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P. \quad (2.2)$$

Como as partes centrífugas do vetor gravidade normal e do vetor gravidade da Terra são iguais, o vetor distúrbio de gravidade $\delta\mathbf{g}_P$ representa efeitos puramente gravitacionais causados pelos contrastes entre as distribuições internas de densidade da Terra verdadeira e da Terra Normal, isto é, pelas fontes gravimétricas.

A diferença entre as magnitudes do vetor gravidade $g_P = \|\mathbf{g}_P\|$ (gravidade) do vetor gravidade normal $\gamma_P = \|\boldsymbol{\gamma}_P\|$, no mesmo ponto P , é o *distúrbio de gravidade* (HEISKANEN e MORITZ, 1967; HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005):

$$\delta g_P = g_P - \gamma_P. \quad (2.3)$$

Note que δg_P não é equivalente à magnitude do vetor distúrbio de gravidade $\delta\mathbf{g}_P$ (BARTHELMES, 2013; SANSÒ e SIDERIS, 2013).

O *vetor anomalia de gravidade* associado ao ponto P é a diferença entre o vetor gravidade no ponto Q' sobre o geoide (uma superfície equipotencial particular do potencial de gravidade) e o vetor gravidade normal no ponto Q na superfície do elipsoide de referência (Figura 2.2):

$$\Delta\mathbf{g}_P = \mathbf{g}_{Q'} - \boldsymbol{\gamma}_Q. \quad (2.4)$$

Similarmente ao distúrbio de gravidade (equação 2.3), a anomalia de gravidade associada ao ponto P é dada por

$$\Delta g_P = g_{Q'} - \gamma_Q, \quad (2.5)$$

em que $g_{Q'}$ é a magnitude do vetor de gravidade no geoide, e γ_Q é a magnitude do vetor de gravidade normal no elipsoide de referência (Figura 2.2).

Chamamos a atenção para um aspecto importante das definições do vetor de anomalia de gravidade $\Delta\mathbf{g}_P$ (equação 2.4) e da anomalia de gravidade Δg_P (equação 2.5). Estas quantidades não são computadas no ponto P . Elas dependem das quantidades definidas nos pontos Q and Q' (Figura 2.2), que tem a mesma latitude geodésica φ_P e longitude λ_P do ponto P . Note que, dado uma latitude geodésica e longitude, os pontos Q and Q' (Figura 2.2) são fixados sobre o elipsoide e o geoide, respectivamente. Consequentemente, o vetor anomalia de gravidade e a anomalia de gravidade não podem ser definidos a uma altitude específica. Na verdade, tal como apontado por BARTHELMES (2013), essas quantidades não dependem da altitude, mas somente da latitude e da longitude. Este aspecto não é comumente enfatizado nos textos da geofísica, criando uma fonte de confusão. Por definição, o vetor anomalia de gravidade $\Delta\mathbf{g}_P$ (equação 2.4) é a diferença entre o vetor gravidade $\mathbf{g}_{Q'}$, no geoide,

e o vetor gravidade normal γ_Q , no elipsoide. De forma semelhante, a anomalia de gravidade Δg_P (equação 2.5) é a diferença entre a gravidade $g_{Q'}$, no geoide, e a gravidade normal γ_Q , no elipsoide. Por conseguinte, o vetor anomalia de gravidade e a anomalia de gravidade (i) são combinações de efeitos gravitacionais e centrífugos (e não efeitos puramente gravitacionais produzidos pelas fontes gravimétricas), (ii) não são funções harmônicas e , portanto, (iii) não podem, rigorosamente falando, ser continuados para cima ou para baixo.

2.4 Anomalias Ar-livre e Bouguer

O vetor anomalia de gravidade $\Delta \mathbf{g}_P$ (equação 2.4) é uma quantidade sem uso prático na geofísica. Por outro lado, a anomalia de gravidade Δg_P (equação 2.5) tem sido intensamente aplicado pelos geofísicos na investigação de estruturas geológicas em subsuperfície. Para computar a anomalia de gravidade, algumas correções devem ser aplicadas às medidas de gravidade que são normalmente realizadas sobre ou próximo à superfície da Terra. Estas correções são chamadas de *reduções gravimétricas* e definem diferentes tipos de anomalias. Há duas anomalias de gravidade frequentemente usadas na geofísica. A primeira, a *anomalia ar-livre*, é definida como (BLAKELY, 1996; HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005):

$$\Delta g_P^F = g_P - \left(\gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial h} H_P \right), \quad (2.6)$$

em que $\partial \gamma / \partial h \approx -0.3086$ mGal/m é a derivada da gravidade normal com respeito à altitude geométrica h e H_P é a altitude ortométrica (i.e., com respeito ao Geoide) do ponto P (Figura 2.2). O produto $(\partial \gamma / \partial h) H_P$ é denominado *correção ar-livre*. A segunda anomalia de gravidade importante na geofísica é a *anomalia Bouguer* (BLAKELY, 1996; HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005), que pode ser definida como:

$$\Delta g_P^B = g_P - \left(\gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial h} H_P \right) - 2\pi G \rho_t 10^5 H_P, \quad (2.7)$$

em que ρ_t é a densidade (em kg/m^3) das massas topográficas localizadas entre P e o Geoide, G é a constante gravitacional em $m^3/(kg s^2)$ e 10^5 transforma m/s^2 em mGal. O último termo da equação 2.7 é denominado *correção Bouguer*.

Na expressão de anomalia ar-livre (equação 2.6), o termo entre parênteses representa uma aproximação em série de Taylor de primeira ordem da gravidade normal em um ponto P' com altitude geométrica $h_{P'}$ numericamente igual à altitude ortométrica H_P associada ao ponto P (Figura 2.2). A correção Bouguer definida na equação 2.7 aproxima o efeito gravitacional produzido por todas as massas to-

pográficas posicionadas acima do Geóide no ponto P pelo efeito de uma placa horizontal infinita e homogênea de densidade constante ρ_t e espessura H_P (BLAKELY, 1996; HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005).

A continuação para cima de anomalias de gravidade é comumente vista na literatura. Ao se fazer tal operação, admite-se implicitamente que a anomalia de gravidade é uma aproximação do distúrbio de gravidade. Este último, em contrapartida, é uma função harmônica e pode ser continuado.

2.5 Distúrbio de gravidade versus anomalia de gravidade

O distúrbio de gravidade δg_P em um ponto P pode ser aproximado a partir do valor da gravidade gravidade normal no elipsóide γ_Q da seguinte forma:

$$\delta g_P \approx g_P - \left(\gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial h} h_P \right), \quad (2.8)$$

em que h_P é a altitude geométrica do ponto P . Note que esta aproximação é muito semelhante a equação que define a anomalia ar-livre (equação 2.6). Usando as eqs. 2.6 e 2.8, estima-se a diferença absoluta entre o distúrbio de gravidade e a anomalia de ar-livre:

$$|\delta g_P - \Delta g_P^F| \approx \left| \frac{\partial \gamma}{\partial h} N_P \right|, \quad (2.9)$$

em que $N_P \approx h_P - H_P$ é a altura geoidal (Figura 2.2) associada ao ponto P . Esta aproximação é válida para pontos P sobre ou próximo da superfície terrestre e assume que o geoide e a superfície do elipsoide de referência são paralelos em P e em áreas do entorno. As equações 2.8 e 2.9 são usadas na geodésia para a definição da *equação fundamental da geodésia física* (HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005).

Sabemos empiricamente que a altura geoidal é $\approx \pm 1$ m (TORGE e MÜLLER, 2012, p. 79) nos oceanos e alcança o valor absoluto máximo de ≈ 120 m em outras regiões do planeta (SANSÒ e SIDERIS, 2013, p. 45). No Brasil, por exemplo, a altura geoidal varia entre $\approx \pm 30$ m (IBGE, 2015). Utilizando este valor para a altura geoidal N_p , verifica-se que a diferença absoluta máxima entre o distúrbio de gravidade e a anomalia ar-livre no Brasil é, de acordo com a equação 2.9, igual a 9.3 mGal.

Usando a aproximação definida na equação 2.8, é possível definir o distúrbio de gravidade corrigido do efeito gravitacional das massas topográficas da seguinte forma:

$$\delta g_P^B \approx g_P - \left(\gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial h} h_P \right) - 2\pi G \rho_t 10^5 h_P . \quad (2.10)$$

Subtraindo a expressão 2.7 de 2.10 e tomando o módulo de ambos os lados da igualdade, computa-se a diferença absoluta entre o distúrbio corrigido dos efeitos topográficos (δg_P^B) e a anomalia Bouguer (Δg_P^B):

$$|\delta g_P^B - \Delta g_P^B| \approx \left| -\frac{\partial \gamma}{\partial h} N_P - 2\pi G \rho_t 10^5 N_P \right| . \quad (2.11)$$

A relação 2.11 é chamada de *efeito geofísico indireto* (HINZE *et al.*, 2005). Atribuindo os valores $2,67 \text{ g/cm}^3$ e 30 m a ρ_t e N_p , respectivamente, estima-se que a diferença absoluta máxima entre o distúrbio corrigido dos efeitos topográficos e a anomalia Bouguer é, de acordo com a equação 2.11, igual a 7.98 mGal .

2.6 Distúrbio de gravidade δg versus g_h

A partir da equação 2.2, o vetor gravidade \mathbf{g}_P no ponto $(h_P, \varphi_P, \lambda_P)$ referido no SGG (Figura 2.1) pode ser representado por:

$$\mathbf{g}_i = \boldsymbol{\gamma}_i + \delta \mathbf{g}_i . \quad (2.12)$$

A gravidade $g_i = \|\mathbf{g}_i\|$ pode ser aproximada por uma expansão em série de Taylor de primeira ordem (SANSÒ e SIDERIS, 2013):

$$g_P \approx \gamma_P + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_P^\top \delta \mathbf{g}_P , \quad (2.13)$$

em que $^\top$ denota transposição, $\gamma_P = \|\boldsymbol{\gamma}_P\|$ e $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_P$ é um vetor unitário com a direção do vetor gravidade normal no ponto P . Esta aproximação é válida porque $\gamma_P \gg \|\delta \mathbf{g}_P\|$ em todos os pontos sobre ou acima da superfície da Terra. Esta aproximação é comumente utilizada na geodésia (e.g., SANSÒ e SIDERIS, 2013) e é análoga à aproximação usada para as anomalias magnéticas de campo total (e.g., BLAKELY, 1996). Usando a equação 2.13, o distúrbio de gravidade (equação 2.3) pode ser reescrito como:

$$\delta g_P \approx \hat{\boldsymbol{\gamma}}_P^\top \delta \mathbf{g}_P . \quad (2.14)$$

Esta equação mostra que o distúrbio de gravidade δg_P é aproximadamente a projeção do vetor distúrbio de gravidade $\delta \mathbf{g}_P$ na direção do vetor gravidade normal $\boldsymbol{\gamma}_P$ (HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005; SANSÒ e SIDERIS, 2013). Sendo assim, o distúrbio de gravidade representa a componente h (normal ao elipsoide) da atração gravitacional exercida pelas fontes gravimétricas no ponto P . Seguindo a

formulação definida em VAJDA *et al.* (2004), o distúrbio de gravidade em um ponto P pode ser descrito por:

$$\delta g_P = G \iiint_v \Delta\rho(h', \varphi', \lambda') \frac{\partial \mathcal{L}^{-1}(h_P, \varphi_P, \lambda_P, h', \varphi', \lambda')}{\partial h} dv', \quad (2.15)$$

em que G é a constante gravitacional dada em $m^3/kg \cdot s^2$, $\mathcal{L}^{-1}(h_P, \varphi_P, \lambda_P, h', \varphi', \lambda')$ é a função harmônica que representa o inverso da distância Euclidiana (definida no sistema SGG) entre o ponto P e um ponto (h', φ', λ') localizado dentro do volume v da Terra e $\Delta\rho(h', \varphi', \lambda')$ é o contraste de densidade no ponto (h', φ', λ') . O elemento de volume dv' é expresso por

$$dv' = (N' + h') (M' + h') \cos \varphi', \quad (2.16)$$

em que

$$N' = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} \quad ; \quad M' = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}}, \quad (2.17)$$

são os raios de curvatura principal e meridional, respectivamente (SANSÒ e SIDE-RIS, 2013; SOLER, 1976; TORGE e MÜLLER, 2012).

Capítulo 3

Metodologia

3.1 Método dos pontos de massa

Seja d_i^o o distúrbio de gravidade observado na posição $(h_i, \varphi_i, \lambda_i)$, $i = 1, \dots, N$. Considere que o distúrbio observado pode ser aproximado pela seguinte equação:

$$d_i^o \approx d_i^B + \sum_{j=1}^M p_j a_{ij} , \quad (3.1)$$

em que d_i^B é a componente de longo comprimento de onda predita por um modelo global do campo de gravidade e o somatório representa uma combinação linear das funções harmônicas da componente de curto comprimento de onda de d_i^o , em que p_j é o j -ésimo coeficiente e

$$a_{ij} \equiv a(h_i, \phi_i, \lambda_i, h_j, \phi_j, \lambda_j) = 10^5 \cdot G \frac{\partial \mathcal{L}^{-1}(h_i, \varphi_i, \lambda_i, h_j, \varphi_j, \lambda_j)}{\partial h} , \quad (3.2)$$

sendo, $\partial \mathcal{L}^{-1}/\partial h$ a derivada na direção h da função inverso da distância euclidiana em coordenadas geodésicas (VAJDA *et al.*, 2004), G a constante gravitacional e 10^5 o fator de conversão de m/s^2 para $mGal$. Do ponto de vista físico, cada termo $p_j a_{ij}$ (eq. 3.2) representa a componente h da atração gravitacional exercida, no ponto $(h_i, \varphi_i, \lambda_i)$, por um ponto de massa localizado na posição $(h_j, \varphi_j, \lambda_j)$, com massa p_j , $j = 1, \dots, M$. A equação 3.1 pode ser reescrita em notação matricial da seguinte forma:

$$\mathbf{d}^o \approx \mathbf{d}^B + \mathbf{A} \mathbf{p} , \quad (3.3)$$

em que \mathbf{d}^o é um vetor $N \times 1$ (vetor de dados observados), cujo i -ésimo elemento é o distúrbio de gravidade observado d_i^o (eq. 3.1), \mathbf{d}^B é um vetor $N \times 1$ (vetor correspondente à componente de longo comprimento de onda) cujo i -ésimo elemento é d_i^B (eq. 3.1), \mathbf{p} é um vetor $M \times 1$ (vetor de parâmetros), cujo j -ésimo elemento é a massa p_j do j -ésimo ponto de massa e \mathbf{A} é uma matriz $N \times M$, cujo elemento $[A_{ij}]$ é

definido pela função harmônica a_{ij} (eq. 3.2). Observe que os M parâmetros \mathbf{p} formam uma camada de pontos de massa que representa uma superfície discreta fictícia em subsuperfície. Neste trabalho, a distribuição de massa da camada, descrita por este vetor, não tem nenhum significado geológico. Ela tem, apenas, o objetivo de reproduzir os dados observados.

Como definido na equação 3.3, o vetor \mathbf{d}^B representa as feições de longo comprimento de onda e o vetor dado pela multiplicação $\mathbf{A}\mathbf{p}$ representa as feições de curto comprimento de onda do campo de gravidade. Repare que $\mathbf{A}\mathbf{p}$ corresponde ao efeito gravitacional dos pontos de massa. Neste caso, ao fixar a posição dos pontos de massa, é possível estimar o vetor de parâmetros \mathbf{p} que descreve estas feições de curto comprimento de onda resolvendo-se o seguinte sistema linear:

$$\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^B \approx \mathbf{A}\mathbf{p} \quad . \quad (3.4)$$

A solução não regularizada do sistema linear descrito pela equação 3.4 é dada por

$$\mathbf{p} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top (\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^B) \quad . \quad (3.5)$$

A matriz de sensibilidade \mathbf{A} (eq. 3.4) é construída a partir das coordenadas dos dados de observação (h_i, ϕ_i, λ_i) e da profundidade h_j dos pontos de massa. Analogamente, a matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ (eq. 3.5) é também resultante destas mesmas coordenadas de observação e da mesma profundidade. Sendo assim, a distribuição espacial dos dados e a profundidade da camada de pontos de massa regulam o condicionamento da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$. Dados regularmente espaçados resultam em uma matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ bem condicionada. Isto se deve, entre outras coisas, pelo fato de não haver sobreposição de fontes ou fontes localizadas muito próximas umas das outras. Em tais condições, cada coluna da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ corresponde a um vetor linearmente independente e o posto da matriz é completo. Em contrapartida, quando há observações muito próximas entre si, há semelhança entre estas funções harmônicas, assim como algumas colunas da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$. Consequentemente, o posto da matriz torna-se deficiente e o número de vetores linearmente independentes é reduzido. Este problema é contornado adicionando o termo de regularização ($\mu\mathcal{I}$) na solução da equação 3.5 (ASTER *et al.*, 2005; GOLIKOV e EVTUSHENKO, 2015; TIKHONOV e ARSENIN, 1977) como em

$$\mathbf{p} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \mu\mathcal{I})^{-1} \mathbf{A}^\top (\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^B) \quad . \quad (3.6)$$

Com relação à profundidade, costuma-se estabelecer um valor arbitrário e utilizá-lo para obter uma solução da equação 3.5 ou 3.6. Caso a solução encontrada seja instável, um outro valor de profundidade é testado e o processo se repete por tenta-

tiva e erro até que a profundidade resulte em uma matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ bem condicionada e uma solução estável para o sistema linear. Para problemas formulados no sistema de coordenadas esféricas, é possível usar a técnica do *best r-formula* (HARDY e GÖPFERT, 1975) que consiste em estimar a profundidade ótima da camada usando a equação de condição dada por

$$\frac{1}{R-r} + \frac{2}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi_S)^{1/2}} - \frac{3}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi_M)^{1/2}} = 0 \quad . \quad (3.7)$$

Esta equação é obtida a partir de pontos de massa posicionados a uma profundidade radial a ser determinada $R - r$ abaixo de cada vértice de um triângulo equilátero esférico fictício. Os termos da equação 3.7 são definidos como: R é o raio médio da Terra, $r < R$ é o raio da esfera fictícia, ψ_S é o espaçamento entre os pontos de massa e ψ_M é o espaçamento entre o vértice e o centro do triângulo. Tal condição pode ser estendida a qualquer número de pontos de massa sobre uma esfera, contanto que estejam regularmente espaçados entre si (HARDY e GÖPFERT, 1975). Isto confirma a obrigatoriedade da configuração espacial regular. Há ainda relações empíricas como a de DAMPNEY (1969) que estabelece uma faixa de valores possíveis para a profundidade dentro do intervalo $[2, 5\Delta x; 6\Delta x]$, em que Δx é o valor do espaçamento entre as observações. A relação empírica de DAMPNEY (1969) também está restrita aos casos em que os dados são regularmente espaçados e que o sistema de coordenadas é o Cartesiano. Neste trabalho, estabelecemos um critério de escolha da profundidade baseada nos autovalores da matriz de sensibilidade $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$.

3.2 Critério da escolha da profundidade

A decomposição em valores singulares (*singular value decomposition* ou SVD) da matriz \mathbf{A} de dimensões $N \times M$, definida na equação 3.4, é descrita como (ASTER *et al.*, 2005)

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{V}^\top \quad , \quad (3.8)$$

em que \mathbf{U} é uma matriz ortogonal $N \times N$, \mathbf{V} é outra matriz ortogonal $M \times M$ e $\boldsymbol{\Lambda}$ é a matriz $N \times M$ cujos elementos são os autovalores de \mathbf{A} :

$$\text{para } N > M \rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_M \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\text{para } N < M \rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_N & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A partir das equações 3.9 e 3.10, mostra-se que

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^\top , \quad (3.11)$$

em que \mathbf{S} é uma matriz diagonal dada por

$$\mathbf{S} = \Lambda^\top \Lambda = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & s_M \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

contém os autovalores s_i , para $i = 1, 2, \dots, M$, da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$, que por sua vez são iguais ao quadrado dos valores singulares de \mathbf{A} (STRANG, 1990, p. 443), ou seja, $s_i = \lambda_i^2$.

Considere que a matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ (equação 3.4) seja calculada utilizando-se uma profundidade constante $h_j = h_1$ para todos os pontos de massa. Os autovalores s_i (equação 3.12) computados utilizando-se esta profundidade constante de h_1 estão representados de forma esquemática na Figura 3.1 a. De maneira semelhante, a Figura 3.1 b ilustra os autovalores calculados com outra profundidade constante h_2 .

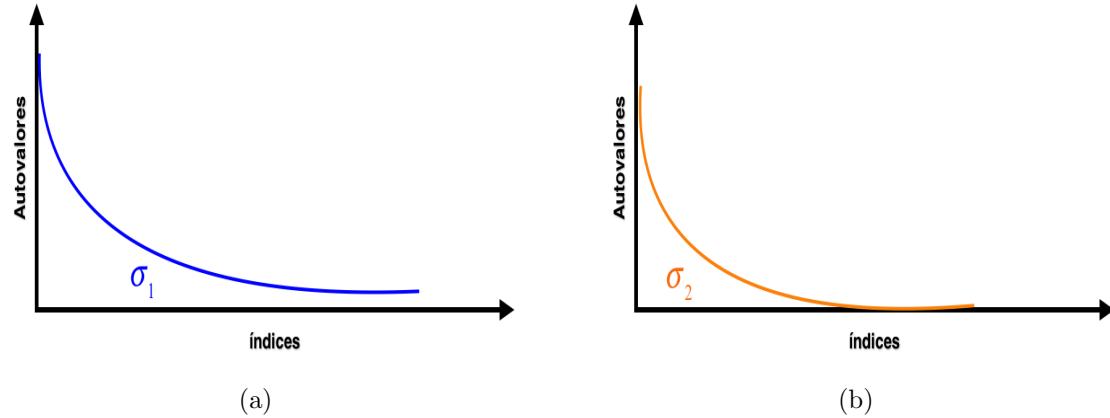


Figura 3.1: Esquema representativo do gráfico dos autovalores s_i (equação 3.12) da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ (equação 3.4) obtidas com duas profundidades distintas para os pontos de massa.

Para cada profundidade h_j , é possível computar uma quantidade Q_j definida pela equação

$$Q_j = \frac{1}{s_{max}} \sum_{i=1}^M s_i \quad , \quad (3.13)$$

em que s_{max} é o autovalor máximo da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ calculada usando a profundidade h_j . A quantidade Q_j é proporcional à área abaixo da curva formada pelos autovalores da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$, calculada com h_j , e representa uma medida da qualidade desta matriz. Esta quantidade é utilizada em técnicas de desenho experimental estatístico CURTIS (2004) para avaliar a qualidade de um determinado arranjo experimental. Dessa forma, a Figura 3.2 representa a qualidade da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ em função da profundidade h_j . A região que comporta o valor de máxima qualidade Q_j é aquela que contém a profundidade ótima da camada de pontos de massa.

3.3 Algoritmos

A primeira abordagem proposta para resolver o sistema linear caracterizado pelos pontos de massa consiste em obter uma estimativa $\check{\mathbf{p}}$ para o vetor de parâmetros \mathbf{p} por meio da solução iterativa do sistema linear definido pela equação 3.4. Por conveniência, esta abordagem será denominada *multi-camadas*. Nesta abordagem,

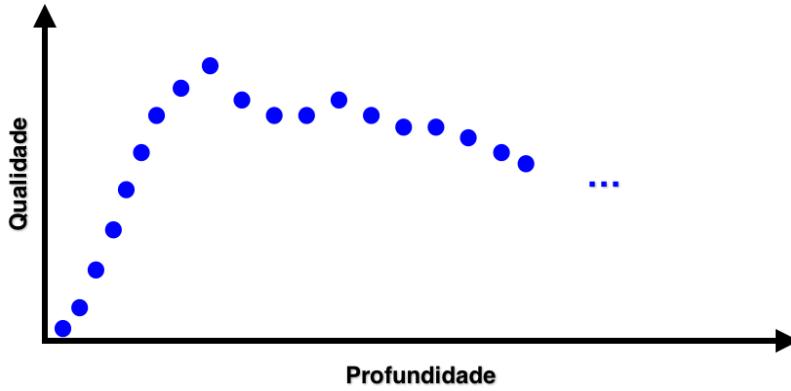


Figura 3.2: Esquema representativo da qualidade da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ (equação 3.4) em função da profundidade dos pontos de massa. Cada ponto neste gráfico representa um valor de qualidade Q_j (equação 3.13) calculado com uma determinada profundidade h_j para os pontos de massa.

considere que o vetor de parâmetros seja representado da seguinte forma:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_L \end{bmatrix}_{M \times 1}, \quad (3.14)$$

em que \mathbf{p}_ℓ é um vetor $M_\ell \times 1$ associado a uma camada de pontos de massa localizados a uma profundidade constante h_ℓ , $\ell = 1, \dots, L$, em que $h_L > h_{L-1} > \dots > h_1$, já que todos os h 's estão abaixo da superfície ($h = 0$), e $M = \sum_{\ell=1}^L M_\ell$. O critério de escolha da profundidade é usado somente para $\ell = 1$. Utilizando esta representação particionada do vetor de parâmetros (eq. 3.14), a equação 3.4 pode ser expressa como

$$\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^B \approx \sum_{\ell=1}^L \mathbf{A}_\ell \mathbf{p}_\ell. \quad (3.15)$$

Nesta equação, cada submatriz \mathbf{A}_ℓ , $\ell = 1, \dots, L$, possui dimensão $N \times M_\ell$ e elemento ij dado por:

$$[\mathbf{A}_\ell]_{ij} = a(h_i, \phi_i, \lambda_i, h_\ell, \phi_j, \lambda_j). \quad (3.16)$$

As submatrizes definem o efeito gravitacional produzido pela ℓ -ésima camada de pontos de massa, $\ell = 1, \dots, L$, nos pontos de observação (h_i, ϕ_i, λ_i) , $i = 1, \dots, N$. O algoritmo 1 mostra as etapas para obter a estimativa $\check{\mathbf{p}}$ do vetor de parâmetros segundo a abordagem multi-camadas.

Em cada iteração do algoritmo 1 é obtida uma estimativa $\check{\mathbf{p}}_\ell$ de uma componente \mathbf{p}_ℓ , $\ell = 1, \dots, L$, do vetor de parâmetros (eq. 3.14). Cada estimativa $\check{\mathbf{p}}_\ell$ define a distribuição de massa sobre uma camada ℓ de pontos de massa localizados a uma

profundidade constante h_ℓ . Na camada mais profunda ($\ell = 1$), há um ponto de massa posicionado abaixo de cada dado observado d_i^o (eq. 3.1). Note que, por conta disso, o número de elementos M_1 do vetor $\check{\mathbf{p}}_1$ é igual ao número N de dados observados. A estimativa $\check{\mathbf{p}}_1$ associada à camada $\ell = 1$ é obtida resolvendo-se o sistema linear definido na etapa 2 do algoritmo 1. Neste sistema, o termo que depende da matriz identidade \mathbf{I}_ℓ de ordem M_ℓ representa o vínculo de Tikhonov de ordem zero (ASTER *et al.*, 2005), em que μ é o parâmetro de regularização. O parâmetro μ tem significado meramente matemático, comumente usado nos problemas de ponto de massa (LIN *et al.*, 2014, 2016). Ao parâmetro de regularização, multiplica-se f_0 que representa um fator de normalização do termo e é calculado pelo traço da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ dividido por M_ℓ . Para estimar os parâmetros associados à camada seguinte ($\ell = 2$), o algoritmo calcula o vetor de resíduos \mathbf{r}_ℓ obtido por $\mathbf{r}_{\ell-1} - A_{\ell-1}\check{\mathbf{p}}_\ell$ e realiza uma filtragem destes resíduos. Esta filtragem é feita pela função *abs* na etapa 4 do algoritmo 1, que representa uma variação da função *módulo*. Esta função seleciona apenas os elementos de \mathbf{r}_ℓ cujos valores absolutos são maiores que uma constante τ , que deve ser predefinida. Este novo vetor de resíduos, cujo número de elementos $M_\ell < M_{\ell-1}$, passa a ser o novo vetor \mathbf{r}_ℓ utilizado no sistema linear da etapa 6. A constante τ define tanto o parâmetro de seleção dos maiores resíduos quanto o parâmetro do critério de parada do algoritmo na etapa 8. Nas etapas seguintes, define-se uma nova camada de pontos de massa mais rasa, localizada em uma profundidade $h_\ell > h_{\ell-1}$, cujo número total de pontos de massa é M_ℓ , e obtém-se uma nova estimativa $\check{\mathbf{p}}_\ell$ a partir da solução de um novo sistema linear (etapa 6 do algoritmo 1). Diferentemente daquele definido na etapa 2, o sistema mostrado na etapa 6 é formado por uma matriz $\tilde{\mathbf{A}}_\ell$, com $M_\ell \times M_\ell$ elementos. Note que o uso de $\tilde{\mathbf{A}}_\ell$ ao invés de \mathbf{A}_ℓ (eq. 3.15), $\ell = 2, \dots, L$, pressupõe que a estimativa $\check{\mathbf{p}}_\ell$ pode ser obtida apenas com os resíduos filtrados na etapa 4. Portanto, a filtragem dos resíduos impõe uma filtragem dos pontos de massa, fornecendo uma matriz de sensibilidade com número de linhas e colunas também reduzido ($M_\ell < N$). Caso não houvesse a etapa 4, a nova camada ℓ teria o mesmo número de elementos da camada $\ell-1$. Isso significa que todas as camadas teriam N pontos de massa, uma vez que $M_1 = N$. A etapa 4 causa uma redução progressiva do esforço computacional envolvido em cada etapa do algoritmo 1 e determina o número M_ℓ de pontos de massa de cada camada. A premissa por trás desta etapa é que, a cada iteração, os resíduos altos ficam concentrados em uma região cada vez menor e, consequentemente, o número de pontos de massa necessários para ajustar estes resíduos fica cada vez menor.

Vale ressaltar que as estimativas $\check{\mathbf{p}}_\ell$, $\ell = 1, \dots, L$, são obtidas por meio da solução de um problema inverso linear com vínculo de Tikhonov de ordem zero, em que o parâmetro de regularização é μ . O número total L de camadas depende deste parâmetro de regularização μ e também da constante τ , que estabelece uma

tolerância no ajustamento dos dados. Note que a constante τ é definida como um limite máximo para o valor absoluto dos resíduos.

A abordagem *multi-camadas* é similar àquela empregada por REILLY e HERBRECHTSMEIER (1978). Uma das desvantagens desta abordagem é que o intérprete precisa definir as profundidades h_ℓ , das L camadas necessárias para ajustar os dados. Para contornar este problema, proponho uma abordagem baseada na estimativa robusta dos parâmetros que definem uma única camada de pontos de massa. Por conveniência, esta abordagem será denominada *robusta*. Nesta abordagem, obtém-se uma estimativa $\hat{\mathbf{p}}$ para o vetor de parâmetros \mathbf{p} que define uma única camada de pontos de massa localizada em uma profundidade constante h_0 . Esta estimativa é obtida utilizando-se o método dos *Mínimos quadrados reponderados iterativamente* (SCALES; GERSZTENKORN; TREITEL, 1988; ASTER; BORCHERS; THURBER, 2005). O algoritmo 2 mostra as etapas para obter a estimativa $\hat{\mathbf{p}}$ do vetor de parâmetros segundo a abordagem robusta.

O algoritmo 2 é iniciado de forma análoga ao algoritmo 1. Uma estimativa $\hat{\mathbf{p}}_\ell$ (etapa 2), em que $\ell = 1, 2, \dots, L$ é o número da iteração do algoritmo *robusto*, do vetor de parâmetros \mathbf{p} (eq. 3.14) dos pontos de massa da camada é obtida por mínimos quadrados. A camada é fixada a uma profundidade h_0 e os pontos de massa são distribuídos espacialmente de forma a conter um ponto de massa abaixo de cada dado observado d_i^o (eq. 3.1). O termo que depende da matriz identidade \mathbf{I} de ordem M também representa o vínculo de Tikhonov de ordem zero (ASTER *et al.*, 2005), sendo μ o parâmetro de regularização. Analogamente ao algoritmo 1, o parâmetro μ tem significado meramente matemático. O fator de normalização f_0 é inserido no sistema linear multiplicando o termo de regularização, como descrito no algoritmo 1. Esta regularização, ao contrário do que é feito no algoritmo anterior, é aplicada somente na etapa 2. A partir da etapa 3, os algoritmos tomam caminhos diferentes. A estimativa $\hat{\mathbf{p}}_\ell$ compõe um conjunto de valores iniciais de um processo iterativo que a cada passo atualiza a si mesmo. Ela é usada para computar o vetor de resíduos \mathbf{r}_ℓ (etapa 3), que por sua vez é utilizado no cálculo da matriz diagonal \mathbf{R}_ℓ (etapa 4). Os elementos da diagonal da matriz \mathbf{R}_ℓ são definidos da seguinte forma:

$$[\mathbf{R}_\ell]_{ii} = (|[\mathbf{r}_\ell]_i| + \epsilon)^{-1}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.17)$$

em que $|[\mathbf{r}_\ell]_i|$ é o valor absoluto do i -ésimo elemento do vetor de resíduos \mathbf{r}_ℓ e ϵ é uma constante pequena e positiva (em geral, $\epsilon = 10^{-10}$). A solução da equação linear gera uma estimativa refinada de $\hat{\mathbf{p}}_\ell$ (etapa 5). A cada novo refinamento da estimativa $\hat{\mathbf{p}}_\ell$, os resíduos são recalculados e o processo recomeça até que a condição de parada seja satisfeita (etapa 6). Note que neste algoritmo não há mudança do número de fontes e/ou de profundidades. Tão logo o algoritmo é iniciado, a profundidade é

fixada em h_0 e o número de fontes permanece igual ao número de dados observados N para todas as iterações.

Algorithm 1: Algoritmo multi-camadas

Entrada \mathbf{d}^o , \mathbf{d}^B , μ , τ

1 $\ell = 1$, defina $h_\ell = h_0$; $M_\ell = N$; defina $\mathbf{r}_\ell = \mathbf{d}^o - \mathbf{d}^B$; calcule $f_0 = \text{Tr} \left(\frac{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}}{M_\ell} \right)$

2 Resolva o sistema linear

$$[(\mathbf{A}_\ell^\top \mathbf{A}_\ell) + \mu f_0 \mathbf{I}_\ell] \mathbf{p}_\ell = \mathbf{A}_\ell^\top \mathbf{r}_\ell$$

para obter uma estimativa $\check{\mathbf{p}}_\ell$

3 $\ell \leftarrow \ell + 1$, calcule $\mathbf{r}_\ell \leftarrow \mathbf{r}_{\ell-1} - \mathbf{A}_{\ell-1} \check{\mathbf{p}}_{\ell-1}$

4 $\mathbf{r}_\ell, M_\ell \leftarrow \text{abs}(\mathbf{r}_{\ell-1}, \tau)$

5 Defina h_ℓ , calcule $\tilde{\mathbf{A}}_\ell$; calcule $\tilde{f} = \text{Tr} \left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}_\ell^\top \tilde{\mathbf{A}}_\ell}{M_\ell} \right)$

6 Resolva o sistema linear

$$[(\tilde{\mathbf{A}}_\ell^\top \tilde{\mathbf{A}}_\ell) + \mu \tilde{f} \tilde{\mathbf{I}}_\ell] \mathbf{p}_\ell = \tilde{\mathbf{A}}_\ell^\top \mathbf{r}_\ell$$

para obter uma estimativa $\check{\mathbf{p}}_\ell$

7 $\ell \leftarrow \ell + 1$, calcule $\mathbf{r}_\ell \leftarrow \mathbf{r}_{\ell-1} - \tilde{\mathbf{A}}_\ell \check{\mathbf{p}}_{\ell-1}$

8 Condição de parada:

- Se $\frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{d}^o|} < \tau$, pare;

- Senão, retorne ao item 4.

Algorithm 2: Algoritmo robusto

Entrada \mathbf{d}^o , \mathbf{d}^B , μ , ϵ , τ

- 1 Defina h_0 , $\ell = 1$, calcule $f_0 = \text{Tr} \left(\frac{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}}{M_\ell} \right)$
- 2 Resolva o sistema linear

$$[(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) + \mu f_0 \mathbf{I}] \mathbf{p} = \mathbf{A}^\top (\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^B)$$
para obter uma estimativa $\hat{\mathbf{p}}_\ell$
- 3 Calcule $\mathbf{r}_\ell = (\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^B) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}_\ell$
- 4 $\ell \leftarrow \ell + 1$
Calcule a matriz diagonal \mathbf{R}_ℓ utilizando o vetor de resíduos $\mathbf{r}_{\ell-1}$
- 5 Resolva o sistema linear

$$(\mathbf{A}^\top \mathbf{R}_\ell \mathbf{A}) \mathbf{p} = \mathbf{A}^\top \mathbf{R}_\ell (\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^B)$$
para obter uma estimativa $\hat{\mathbf{p}}_\ell$
- 6 Condição de parada:
 - Se $\frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{d}^o|} < \tau$, pare;
 - Senão, retorne ao item 3.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

4.1 Teste de Validação

O teste de validação tem a finalidade de provar, computacionalmente, a aproximação da equação 2.14 e entender a construção da matriz de sensibilidade A_{ij} ao computar cada elemento a_{ij} .

É feita a comparação entre a componente h do vetor distúrbio de gravidade (equação 2.2) e o distúrbio de gravidade (equação 2.3) produzidos por um corpo sintético que simula uma fonte de massa esférica com raio 12 km, centro localizado na posição $(h, \varphi, \lambda) = (-60 \text{ km}, -10^\circ, -48^\circ)$ e contraste de densidade 5000 kg/m^3 . Os dados foram calculados em um conjunto de pontos regularmente espaçados de 0.1° ao longo da latitude φ e da longitude λ . Os pontos de observação estão localizados na altitude constante $h = 15 \text{ km}$, na região definida entre as latitudes -14° e 6° e longitudes -52° e -44° . Os dados foram simulados no SGG (Figura 2.1).

A Figura 4.1 mostra as componentes do vetor distúrbio de gravidade (equação 2.2) produzidas pela esfera. Vale lembrar que, neste caso, o vetor distúrbio de gravidade é a atração gravitacional produzida pela esfera. A componente h (Figura 4.1 c) foi calculada multiplicando-se a equação 3.2 pela massa da esfera. As demais componentes foram calculadas utilizando-se equações similares a 3.2 (não mostradas). Por conveniência, a componente h (Figura 4.1 c) do vetor distúrbio de gravidade produzido pela esfera sintética está representada com o sinal contrário ($-\delta g_h$).

A Figura 4.2 mostra a gravidade normal γ , a gravidade g e o distúrbio de gravidade δg (equação 2.3) produzido pela esfera sintética. A gravidade normal foi calculada com a equação apresentada por LI e GÖTZE (2001). O cálculo da gravidade é baseado na equação 2.2. Note que, de acordo com esta equação, o vetor gravidade é definido como a soma vetorial da gravidade normal e o vetor distúrbio de gravidade. Por definição, o vetor gravidade normal possui as componentes φ e λ iguais a zero, sobrando apenas a componente h que está representada na Fi-

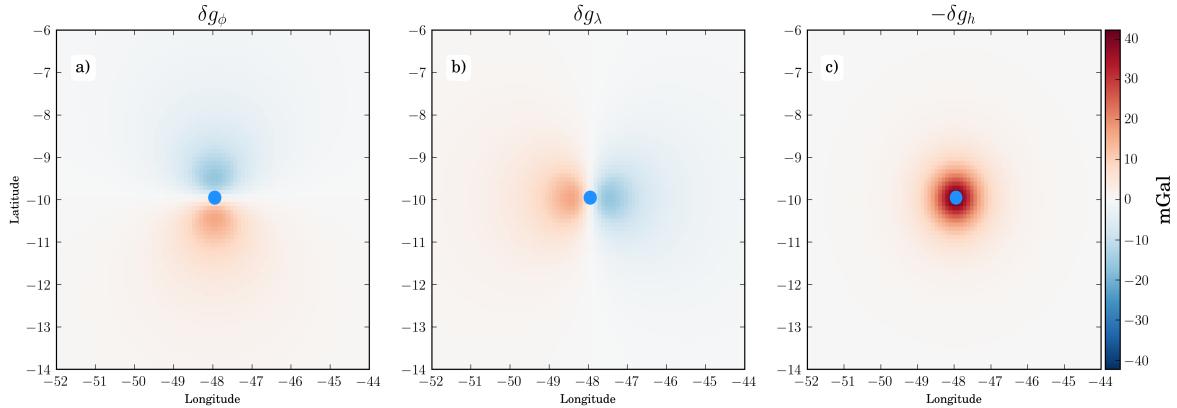


Figura 4.1: Teste de validação. Componentes a) δg_φ , b) δg_λ e c) δg_h do vetor distúrbio de gravidade produzidas pela esfera sintética sobre um conjunto de pontos regularmente espaçados ao longo da latitude φ e da longitude λ , em uma altitude constante $h = 15$ km. A esfera possui raio 12 km, centro localizado na posição $(h, \varphi, \lambda) = (-60\text{ km}, -10^\circ, -48^\circ)$ e contraste de densidade 5000 kg/m^3 . O ponto azul no centro das figuras representa a projeção da esfera no plano horizontal.

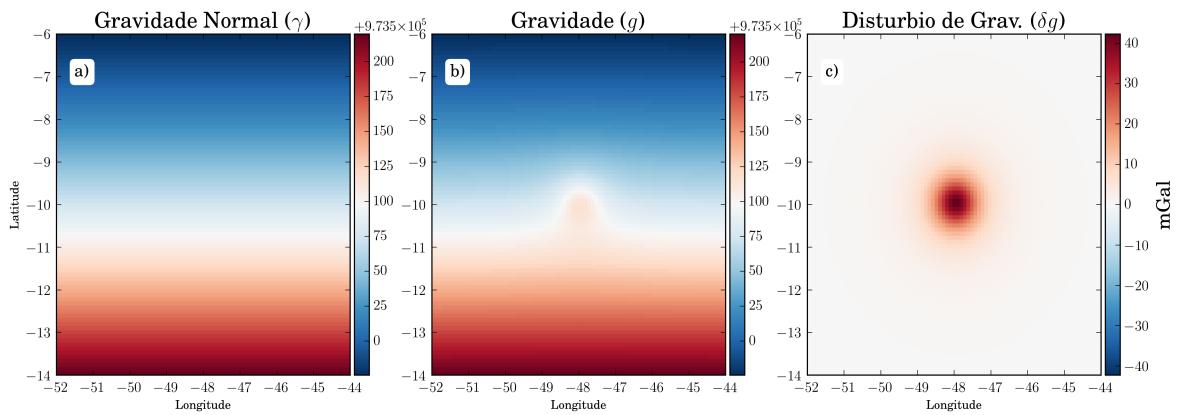


Figura 4.2: Teste de validação. a) Gravidade normal γ , b) gravidade g e c) distúrbio de gravidade δg (equação 2.3) produzidos pela esfera sintética sobre um conjunto de pontos regularmente espaçados ao longo da latitude φ e da longitude λ , em uma altitude constante $h = 15$ km. As características da esfera estão descritas no texto e na Figura 4.1.

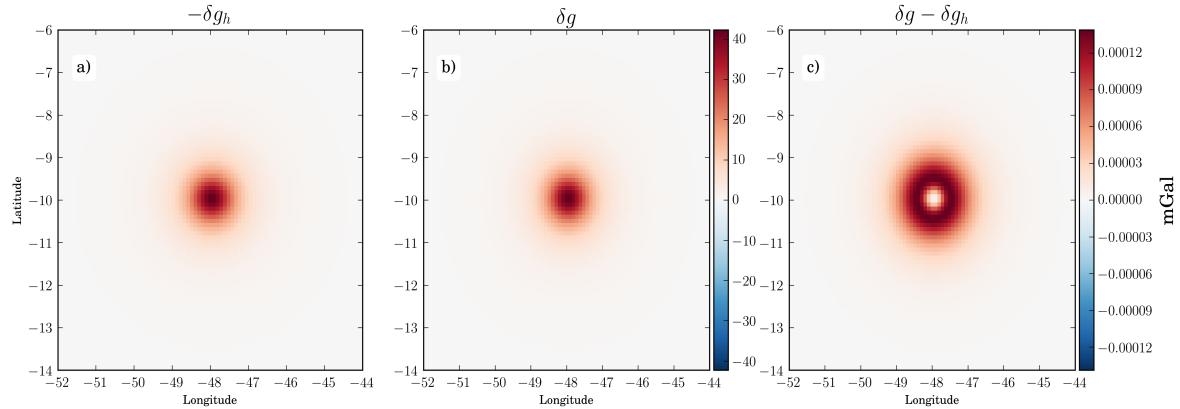


Figura 4.3: Teste de validação. a) componente h do vetor distúrbio de gravidade (Figura 4.1 c), b) distúrbio de gravidade (Figura 4.2 c) e c) diferença entre os valores absolutos do distúrbio de gravidade (mostrado em b) e a componente h do vetor distúrbio de gravidade (mostrado em a).

Figura 4.2 a. As componentes do vetor distúrbio de gravidade estão representadas na Figura 4.1. Portanto, o módulo da soma vetorial do vetor gravidade normal com o vetor distúrbio de gravidade fornece a gravidade observada na Figura 4.2 b. O distúrbio de gravidade é calculado diretamente da equação 2.3.

A Figura 4.3 mostra a componente h do vetor distúrbio de gravidade, o distúrbio de gravidade e a diferença entre seus valores absolutos, respectivamente. Como podemos ver, as diferenças atingem valores absolutos máximos em torno de 0,00012 mGal e corroboram com a aproximação definida pela equação 2.14.

4.2 Teste com Dados Sintéticos

O modelo global EIGEN-6C4 (FÖRSTE *et al.*, 2014) expandido até grau e ordem 65 foi usado como a componente de longo comprimento de onda do dado de gravidade. Uma expressão analítica simples que estima a menor feição representável pelo campo de gravidade pode ser encontrada em BARTHELMES (2013). Ela relaciona um arco de distância, sendo o menor comprimento, com o mais alto grau da expansão em harmônicos esféricos. Segundo esta relação, podemos concluir que o grau selecionado representa sinais de longo comprimento de onda. O distúrbio de gravidade desta componente (\mathbf{d}^B), por sua vez, foi computado pela equação 2.3, substituindo o dado de gravidade do modelo EIGEN-6C4 no termo g e o resultado da fórmula descrita em LI e GÖTZE (2001), avaliado nas mesmas coordenadas, em γ . As Figuras 4.4 a, b, c, d e e correspondem a \mathbf{d}^B observados na superfície da Terra, e nas altitudes 3 km, 7 km, 20 km e 40 km, respectivamente. Para simular as componentes de curto comprimento de onda, foi calculado o distúrbio de gravidade produzido por um modelo de feições lineares (modelo não mostrado) na superfície

da Terra e nas altitudes de 3 km, 7 km, 20 km e 40 km (Figuras. 4.5 *a*, *b*, *c*, *d* e *e*, respectivamente). Estas feições possuem profundidades distintas e, portanto, causam uma variação no conteúdo espectral do campo produzido. A Figura 4.6 mostra as altitudes referentes aos mapas das Figuras. 4.4 *a* e 4.5 *a*.

4.2.1 Teste 1 - Dados regularmente espaçados

Algoritmo *multi-camadas*

Os dados observados \mathbf{d}^o (eq. 3.3) usados no Teste 1 foram obtidos somando-se \mathbf{d}^B predito pelo modelo EIGEN-6C4 (Figura 4.4 *a*) e a componente de curto comprimento de onda produzida pelas feições lineares (Figura 4.5 *a*), ambos avaliados na superfície da Terra. Os dados foram limitados espacialmente nas latitudes -18° a -8° e longitudes -50° a -40° (Figura 4.7), com o intuito de simular um levantamento regional dentro da área de investigação. Este levantamento seria aquele responsável por incluir a componente de curto comprimento de onda no modelo global.

Segundo o algoritmo *multi-camadas*, para $\ell = 0$, o resíduo \mathbf{r}_0 (etapa 1), da primeira iteração, é definido como a diferença entre os dados observados \mathbf{d}^o (Figura 4.7) e \mathbf{d}^B predito pelo modelo EIGEN-6C4 (Figura 4.4 *a*), limitado na região do levantamento sobre a superfície da Terra. Assim, o resíduo \mathbf{r}_0 é o próprio distúrbio de gravidade produzido pelas feições lineares na região do levantamento (Figura 4.8).

O parâmetro de regularização usado na solução do sistema linear da etapa 2 foi $\mu = 10^{-3}$ e o $\tau = 10^{-5}$. O critério da escolha da profundidade descrita na seção 3.2 foi usada para estimar a profundidade que fornece o melhor condicionamento das matrizes $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$. Profundidades distintas foram testadas nas construções das matrizes $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ para a configuração estabelecida, em que cada ponto de massa é posicionado abaixo de cada observação. Os gráficos da Figura 4.9 *a* mostram as curvas de autovalores geradas pela aplicação da SVD sobre as diferentes $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}(h_j)$'s. Esta figura mostra que de todas as profundidades varridas, a curva de 20 km é a que produz a maior área (vide Figura 3.1). Com o valor do vetor de autovalores associado a cada profundidade, as qualidades das matrizes são calculadas pela equação 3.13. O gráfico da Figura 4.9 *b* exibe os valores de qualidade das matrizes correspondentes às suas respectivas profundidades. O valor máximo de qualidade calculada corresponde à profundidade de 30 km. No entanto, devido à maior área encontrada ter sido para a curva de 20 km, esta foi a profundidade estabelecida para a primeira camada de pontos de massa. Uma vez estimada a profundidade da primeira camada h_ℓ para $\ell = 0$, as seguintes são posicionadas segundo a relação $h_\ell = \frac{h_{\ell-1}}{2}$, quando $\ell \leftarrow \ell + 1$. A Tabela 4.1 mostra, em sequência, os índices das camadas ℓ , o número de pontos de massa M_ℓ usados para cada ajuste, suas respectivas profundidades h_ℓ em km e o

valor absoluto máximo dos resíduos obtido após cada etapa.

Tabela 4.1: Teste com dados sintéticos. Número de pontos de massa M_ℓ , profundidades h_ℓ e valor absoluto máximo dos resíduos produzidos pelas $L = 3$ camadas no algoritmo *multi-camadas*.

ℓ	M_ℓ	h_ℓ (km)	absoluto
0	1156	20,0	0,06
1	1137	10,0	$7,08 \times 10^{-5}$
2	156	5,0	$9,98 \times 10^{-6}$

A Figura 4.10 *a* mostra o mapa dos resíduos após a primeira etapa do algoritmo, com a camada $\ell = 0$ localizada em $h_0 = 20$ km, composta por $M_0 = 1156$ pontos de massa que coincidem com o número total dos dados observados. Verifica-se que o valor absoluto máximo dos resíduos atinge 0,06 mGal. Após a segunda etapa ($\ell = 1$), o mapa dos resíduos obtidos são aqueles mostrados na Figura 4.10 *b*. Nesta etapa, utilizou-se uma camada contendo $M_1 = 1137$ pontos de massa, menos pontos que a camada anterior (Tabela 4.1), posicionados à $h_1 = 10$ km de profundidade e o valor absoluto máximo dos resíduos é de $7,08 \times 10^{-5}$ mGal. Apesar dos resíduos diminuirem de uma etapa para a outra, é possível observar a ocorrência de resíduos positivos, na mesma ordem de grandeza dos resíduos negativos, em algumas faixas próximas das feições lineares. Após 3 camadas, o valor absoluto máximo dos resíduos atingiu o valor de $9,98 \times 10^{-6}$ mGal, abaixo do τ estipulado (Figura 4.10 *c*). Nesta última iteração foram usados $M_2 = 156$ pontos de massa à profundidade de $h_2 = 5,0$ km.

As Figuras 4.11 *a*, *b*, *c*, *d* e *e* mostram os mapas das diferenças entre os dados verdadeiros e os dados preditos pelas camadas obtidos com o algoritmo *multi-camadas*, todos na mesma escala de cores. É importante ressaltar que os dados verdadeiros são a soma entre \mathbf{d}^B predito pelo modelo EIGEN-6C4 (Figura 4.4) e aqueles produzidos pelo modelo de feições lineares (Figura 4.5). Já os dados preditos são a soma entre \mathbf{d}^B predito pelo modelo EIGEN-6C4 (Figura 4.4) e aqueles produzidos por todas as camadas de pontos de massa estimados. Note que, em todas as altitudes, os menores resíduos ocorrem dentro da área que contém os dados observados (Figura 4.8), área esta correspondente à do levantamento regional adicional. Esta redução dos resíduos demonstra que as camadas de pontos de massa estimadas recuperaram os curtos comprimentos de onda dos dados do levantamento regional adicional.

Algoritmo robusto

Neste teste, foi utilizado apenas uma camada localizada na profundidade constante de $h_0 = 20$ km, como determinado pelo critério da escolha da profundidade durante a abordagem anterior, contendo $M_0 = 1156$ pontos de massa. Esta camada de

pontos de massa corresponde à primeira camada utilizada na primeira iteração do algoritmo *multi-camadas*. O número de pontos de massa M_0 é igual ao número de observações em todas as iterações. A Figura 4.12 mostra o mapa de resíduos obtido após 3 iterações usando o algoritmo *robusto*. Comparativamente, observa-se que os resíduos obtidos pela abordagem *robusta* possuem ordem de grandeza de 10^{-13} (Figura 4.12), enquanto que os resíduos provenientes dos ajustes das camadas de pontos de massa da abordagem *multi-camadas* possuem ordem de grandeza de 10^{-5} (Figura 4.10).

As Figuras 4.13 *a*, *b*, *c*, *d* e *e* mostram a diferença entre os dados verdadeiros e os dados preditos pela camada obtidos com o algoritmo *robusto*. Os dados verdadeiros continuam sendo os mesmos descritos durante a avaliação das diferenças obtidas na abordagem anterior, mudando apenas os dados preditos que, agora, são definidos como a soma entre os dados do modelo EIGEN-6C4 (Figura 4.4) e aqueles produzidos pela única camada de pontos de massa estimada. Similarmente ao que foi obtido com a abordagem *multi-camadas*, houve a redução dos valores do distúrbio de gravidade dentro da área de inclusão de dados do levantamento regional adicional, demonstrando que a camada de pontos de massa recuperou os sinais de curto comprimento de onda.

4.2.2 Teste 2 - Dados da rede gravimétrica sintética

Para o Teste 2, os dados observados \mathbf{d}^o (eq. 3.3) usados correspondem à soma entre \mathbf{d}^B predo pelo modelo EIGEN-6C4 (Figura 4.14 *a*) e a componente de curto comprimento de onda produzida pelas feições lineares visto na Figura 4.14 *b*, ambos avaliados nos nós de uma rede gravimétrica sintética que simula a Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira (PINÁ e SOUSA, 2001). Neste caso, a inclusão de curtos comprimentos de onda no modelo global parte dos dados pontuais referentes à rede gravimétrica sintética, de maneira semelhante ao levantamento regional limitado do Teste 1. Note que estes nós ocupam pontos fixos bem localizados (Figura 4.14 *a*) e as feições lineares também tomam posições bem definidas em subsuperfície, não se estendendo por todos os pontos da malha de observação (Figura 4.5 *a*). Isto promove um registro bem reduzido da componente de curto comprimento de onda do distúrbio de gravidade produzido por estas feições nestes nós, como pode ser visto na Figura 4.14 *b*. A Figura 4.14 *c* representa o mapa dos dados observados \mathbf{d}^o obtidos pela soma entre os mapas das Figuras 4.14 *a* e *b*. Já a Figura 4.15 exibe as altitudes geométricas de cada um dos nós da rede gravimétrica sintética. Note que há uma concordância entre este mapa e o da Figura 4.6, mostrando maiores altitudes em algumas regiões do sudeste brasileiro, por exemplo.

Algoritmo *multi-camadas*

Para $\ell = 0$ da primeira iteração (etapa 1), \mathbf{r}_0 é definido como a diferença entre os dados observados (Figura 4.14 *c*) e os dados preditos pelo modelo EIGEN-6C4 (Figura 4.14 *a*), avaliados nos nós da rede gravimétrica sintética. Assim, \mathbf{r}_0 é o próprio distúrbio de gravidade do modelo de feições lineares (Figura 4.14 *b*). O parâmetro de regularização usado na etapa 2 continuou sendo $\mu = 10^{-3}$, assim como o τ ($\tau = 10^{-5}$). A profundidade deve ser estimada para a configuração do Teste 2, segundo o critério da escolha da profundidade (seção 3.2). As curvas de autovalores geradas pela aplicação da SVD para diferentes profundidades das matrizes $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ estão mostradas na Figura 4.16 *a*. Esta figura mostra que de todas as profundidades varridas, a curva de 5 km é a que produz a maior área sob a curva. Com o valor do vetor de autovalores associado a cada profundidade, as qualidades das matrizes são calculadas pela equação 3.13. O gráfico da Figura 4.16 *b* exibe os valores de qualidade das matrizes correspondentes às suas respectivas profundidades. O valor máximo de qualidade calculada corresponde à profundidade de 6 km. No entanto, devido à maior área encontrada ter sido para a curva de 5 km, esta foi a profundidade estabelecida para a primeira camada de pontos de massa. Como feito para o Teste 1, as profundidades das camadas seguintes foram obtidas segundo a relação $h_\ell = \frac{h_{\ell-1}}{2}$, quando $\ell \leftarrow \ell + 1$. A Tabela 4.2 mostra, em sequência, os índices das camadas ℓ , o número de pontos de massa M_ℓ usados para cada ajuste, suas respectivas profundidades h_ℓ em km e o valor absoluto máximo dos resíduos obtido após cada etapa.

Tabela 4.2: Teste com dados sintéticos. Número de pontos de massa M_ℓ , profundidades h_ℓ e valor absoluto máximo dos resíduos produzidos pelas $L = 7$ camadas no algoritmo *multi-camadas*.

ℓ	M_ℓ	h_ℓ (km)	absoluto
0	322	5,0	$2,9 \times 10^{-1}$
1	321	2,5	$1,7 \times 10^{-1}$
2	109	1,25	$1,1 \times 10^{-2}$
3	44	0,625	$6,1 \times 10^{-3}$
4	25	0,313	$5,1 \times 10^{-3}$
5	17	0,156	$1,56 \times 10^{-3}$
6	14	0,078	$8,3 \times 10^{-4}$

Apesar de terem sido utilizados 7 camadas de pontos de massa, apenas 3 ajustes serão exibidos e descritos. A Figura 4.17 *a* mostra o mapa dos resíduos após a primeira etapa do algoritmo, com a camada $\ell = 0$ localizada em $h_0 = 5$ km, composta por $M_0 = 322$ pontos de massa que coincidem com o número total dos dados observados. Verifica-se uma enorme redução do valor absoluto máximo dos resíduos que atinge 0,29 mGal. Uma maior concentração destes resíduos pode ser vista entre

as latitudes -12° e -5° e longitudes -38° e -34° correspondendo à região litoral do nordeste brasileiro. O ajuste da quarta camada ($\ell = 3$), que contou com 44 pontos de massa posicionados à profundidade de 0,625 km provê o mapa de resíduos da Figura 4.17 *b*. Esta figura mostra o deslocamento dos resíduos mais altos para a região próxima à latitude -10° e longitude -45° . Após a soma das contribuições de todos os ajustes anteriores o valor absoluto máximo chegou a 6×10^{-3} mGal. Não foi possível atingir a precisão desejada mesmo após a soma das contribuições gravitacionais das 7 camadas estimadas. Isto significa que nem todos os resíduos ficaram abaixo de $\tau = 10^{-5}$. Mesmo assim, a última camada, exibida na Figura 4.17 *c*, contou com 14 pontos de massa posicionados à profundidade de 0,078 km e cujo valor máximo absoluto dos resíduos foi de $8,3 \times 10^{-4}$. A adição de novas camadas não promove consideráveis reduções dos valores dos resíduos, o que fez com que se optasse por interromper o algoritmo neste ponto.

Devido ao caráter local dos nós da rede, os mapas das diferenças serão retratados de forma discordante àqueles descritos no Teste 1, exibindo-os nas distintas altitudes separadamente. A Figura 4.18 compara o distúrbio de gravidade produzido pelas feições lineares (Figura *a*) e a diferença entre os dados observados \mathbf{d}^o e os dados preditos (Figura *b*) na superfície da Terra. Lembrando que os dados observados, neste caso, são a soma entre \mathbf{d}^B predito pelo modelo EIGEN-6C4 (Figura 4.14 *a*) e aqueles produzidos pelo modelo de feições lineares (Figura 4.14 *b*), avaliados no nós da rede. Já os dados preditos são a soma entre \mathbf{d}^B predito pelo modelo EIGEN-6C4 (Figura 4.14 *a*) e aqueles produzidos pelas camadas de pontos de massa estimadas, avaliados nos mesmos pontos. A Figura 4.18 *c* mostra a diferença entre os dados das Figuras 4.18 *a* e *b*, ou seja, o efeito gravitacional somente das camadas estimadas na superfície da Terra, apontando um valor absoluto máximo de 35,99 mGal. A Figura 4.19 mostra o distúrbio de gravidade produzido pelas feições lineares (Figura *a*) e a diferença entre os dados observados \mathbf{d}^o e os dados preditos (Figura *b*) para a altitude de 3 km. De forma análoga ao caso da superfície da Terra, a Figura 4.19 *c* mostra a diferença entre os dados das Figuras 4.19 *a* e *b* que representa o efeito gravitacional somente das camadas estimadas na altitude de 3 km, alcançando o máximo de 17,11 mGal neste patamar. Já a Figura 4.20 mostra o efeito gravitacional das camadas estimadas na altitude de 7 km. Este mapa mostra um efeito de 7,85 mGal a 7 km de altitude. Os demais mapas relacionados à maiores altitudes não foram expostos pois não são observadas grandes diferenças entre o distúrbio dado pelas feições lineares e o dado predito. Isto indica que, embora haja a inclusão de curtos comprimentos de onda devido ao uso dos dados dos nós da rede, aqueles não são tão significativos em grandes altitudes.

O primeiro ponto a ser destacado, neste teste, é que as camadas recuperaram os sinais de curto comprimento de onda advindos da inclusão dos dados referentes

à rede gravimétrica sintética. O segundo ponto é que este efeito gravitacional das camadas é bem pontual, localizado sobre os próprios nós da rede.

Algoritmo *robusto*

Para o algoritmo *robusto*, foi utilizado uma camada localizada na profundidade estimada $h_0 = 5$ km, como estipulado anteriormente, contendo 322 pontos de massa. Esta camada é a mesma utilizada na primeira iteração do algoritmo *multi-camadas*. O resíduo obtido após 3 iterações do algoritmo *robusto* pode ser visto na Figura 4.21.

A Figura 4.22 compara o distúrbio de gravidade produzido pelas feições lineares (Figura *a*) e a diferença entre os dados observados \mathbf{d}^o e os dados preditos (Figura *b*) na superfície da Terra. Novamente, há a ocorrência dos menores resíduos quando as feições lineares coincidem com as posições dos nós da rede sintética. Analogamente à abordagem *multi-camadas*, eles só são vistos nos mapas referentes à superfície da Terra e à altitude de 3 km. A Figura 4.22 *c* mostra a diferença entre os dados das Figura 4.22 *a* e *b*, ou seja, o efeito gravitacional da camada estimada pela abordagem *robusta* na superfície da Terra, indicando um valor absoluto máximo de 35,99 mGal. A Figura 4.23 mostra o distúrbio de gravidade produzido pelas feições lineares (Figura *a*) e a diferença entre os dados observados \mathbf{d}^o e os dados preditos (Figura *b*) para a altitude de 3 km. A Figura 4.23 *c* mostra a diferença entre os dados das Figuras 4.23 *a* e *b* que representa o efeito gravitacional somente das camadas estimadas na altitude de 3 km, alcançando o máximo de 17,12 mGal neste patamar. Já a Figura 4.24 mostra o efeito gravitacional da camada estimada na altitude de 7 km. Este mapa mostra um efeito de 7,85 mGal a 7 km de altitude.

Podemos fazer algumas ponderações aos testes sintéticos realizados. Com relação às abordagens utilizadas: verifica-se que a *robusta* é mais eficiente em comparação à *multi-camadas* pois calcula a matriz de sensibilidade apenas uma vez e a refina nas iterações seguintes, estimando, ao final do processo um vetor de parâmetros relacionado aos pontos de massa da camada com o mesmo tamanho do número de dados. Em contrapartida, a abordagem *multi-camadas* exige recalcular-a, mesmo tendo uma redução significativa da dimensão das matrizes de sensibilidade. Além disso, uma vez que o dado é completamente ajustado, o vetor de parâmetros tem dimensão bem superior ao número total de dados.

Com relação aos diferentes testes sintéticos, verificou-se que a distribuição espacial dos dados influenciou bastante nos resultados. No Teste 1, cuja distribuição é regular e há uma boa densidade de dados, as camadas de pontos de massa, tanto na abordagem *multi-camadas* quanto na *robusta*, recuperaram bem os sinais de curto comprimento de onda. Isto é confirmado pela redução dos sinais de curto comprimento de onda dentro da área do levantamento simulado (Figuras 4.11 *a*, *b*, *c*, *d* e *e*; 4.13 *a*, *b*, *c*, *d* e *e*). Por outro lado, os dados do Teste 2 possuem distribuição

espacial irregular, com baixa densidade de dados. Neste caso, as camadas de pontos de massa estimadas foram eficientes em reproduzir os dados somente sobre os nós de rede gravimétrica sintética, que representa o levantamento com dados adicionais. A redução dos sinais de curto comprimento de onda, quando é feita a diferença entre os dados verdadeiros e os preditos, é bem localizada sobre os nós (Figuras 4.18 *b*; 4.22 *b*) e quase imperceptível no mapa regional.

4.3 Aplicação a dados reais

4.3.1 Descrição dos dados reais

Dados do Modelo Global

Os dados do modelo global utilizados aqui são provenientes do modelo EIGEN-6C4 (European Improved Gravity model of the Earth by New techniques), disponíveis na plataforma online do ICGEM (International Centre for Global Earth Models - <https://icgem.gfz-potsdam.de>). O modelo EIGEN-6C4 é uma das últimas versões dos modelos da série EIGEN e foi produzido a partir da combinação dos dados provenientes das missões GOCE, GRACE e LAGEOS e de levantamentos aéreos e terrestres (FÖRSTE *et al.*, 2011; FÖRSTE *et al.*, 2013; FÖRSTE *et al.*, 2014). Este modelo global é um dos que possuem mais elevados ordem e grau (iguais a 2190).

No site do ICGEM, obtive os dados de gravidade produzidos pelo modelo EIGEN-6C4 na superfície da Terra, em pontos com altitude referida ao elipsoide WGS84. Para mais detalhes, veja BARTHELMES (2013). O equilíbrio entre resolução e custo computacional levou à escolha de um conjunto de 7896 dados dispostos sobre uma malha regular com espaçamento de $0,3^\circ$, nos intervalos de -23° a 5° e -60° a -35° ao longo da latitude e longitude, respectivamente, sobre uma superfície com altitude geométrica constante $h = 40$ km. Esta malha regularmente espaçada coincide com uma vasta região do Brasil e seu litoral sudeste e nordeste. O distúrbio de gravidade é calculado usando a equação 2.3 empregando o conjunto de dados de gravidade preditos pelo modelo EIGEN-6C4 no termo g e o resultado obtido pela fórmula apresentada por LI e GÖTZE (2001) em γ .

Dados de Curto Comprimento de Onda - RGFB

Os dados utilizados, para o primeiro teste, são provenientes da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira (RGFB), que foi planejada e implementada em 1978 pelo professor Íris Escobar e sua equipe de técnicos e tecnologistas do Observatório Nacional (<http://www.on.br/index.php/pt-br/laboratorios/gravimetria.html>). A

RGFB foi concebida a partir de medidas absolutas (com gravímetros A-10 e FG-5) e relativas (com gravímetros Lacoste & Romberg e Scintrex CG-5). Os dados de gravidade nos nós da rede estão disponíveis em extranet.on.br/bdgon/gravimetria/index.php.

O distúrbio de gravidade é calculado usando a equação 2.3 empregando os dados de gravidade ajustados em cada nó da RGFB no termo g e o resultado obtido pela fórmula apresentada por LI e GÖTZE (2001) em γ .

Dados de Curto Comprimento de Onda - BDG/GO

Os dados utilizados para o segundo teste fazem parte do Bando de Dados Geodésicos (BDG) cujos levantamentos de campo foram realizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a quem compete a implantação e manutenção do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB). Procedimentos de ajustamento foram aplicados às estações geodésicas que compõem os levantamentos de maneira a fornecerem coordenadas plani-altimétricas e/ou gravidade.

O BDG disponibiliza um grande conjunto de dados geodésicos, podendo ser baixados diretamente do endereço www.bdg.ibge.gov.br/appbdg. As estações gravimétricas (EG) correspondem às observações de gravidade em todo o território brasileiro. Especificamente, o levantamento gravimétrico do estado de Goiás (GO) conta com 7093 observações gravimétricas. Destas observações, 5649 possuíam altitude ortométrica, o que possibilitou o cálculo da altitude geométrica.

O distúrbio de gravidade é calculado usando a equação 2.3 empregando os dados de gravidade ajustados em cada estação de GO no termo g e o resultado obtido pela fórmula apresentada por LI e GÖTZE (2001) em γ .

4.3.2 Teste com Dados Reais

Teste RGFB

Foram selecionadas 322 estações da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira localizadas dentro dos limites estabelecidos pela malha dos dados EIGEN. Apenas o algoritmo robusto foi utilizado para o teste com os dados reais da RGFB, que pode ser justificado pela maior precisão encontrada com esta abordagem ao avaliar os dados sintéticos com configuração espacial idêntica.

Neste teste, o primeiro passo é encontrar o conjunto de dados de entrada. Para estimar $\hat{\mathbf{p}}_\ell$, é necessário computar o vetor de dados obtido pela subtração dos vetores $\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^B$ (eq. 3.15 ou etapa 2). O vetor \mathbf{d}^B foi definido como sendo proveniente dos dados do modelo EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 observado sobre os nós da RGFB. Já o vetor \mathbf{d}^o corresponde aos dados reais medidos sobre os nós da

RGFB. Logo, o vetor de dados computados $\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^B$ (etapa 2), usado no algoritmo, pode ser visto na Figura 4.25.

A configuração dos dados reais da RGFB é idêntica àquela vista para o Teste 2. Logo, tanto o cálculo dos autovalores da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ quanto as estimativas das profundidades usando a técnica da qualidade do *design* estatístico são os mesmos vistos nas Figuras 4.9 *a* e 4.9 *b*, respectivamente. Portanto, a profundidade da primeira camada de pontos de massa é 5 km, igualmente. Tal camada é composta por 322 pontos de massa, compatível com o número total de dados, dispostos abaixo de cada dado observado. O resíduo obtido após o ajuste desta camada pode ser visto na Figura 4.26. Seu valor absoluto máximo é de $\approx 1,4 \times 10^{-6}$ mGal.

O dado predito por um modelo global refinado é obtido somando-se o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados com um modelo global escolhido. As Figuras 4.27 *a*, *b*, *c*, *d* e *e* mostram o modelo EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 observado na superfície da Terra e nas altitudes de 3 km, 7 km, 20 km e 40 km, representando os dados \mathbf{d}^B . O espectro completo foi usado com o intuito de incluir a componente de curto comprimento de onda dos pontos de massa oriundos dos dados adicionais estabelecidos pelos nós da RGFB. Já os mapas das Figuras 4.28 *a*, *b*, *c*, *d* e *e* mostram o efeito gravitacional dos pontos de massa na superfície da Terra e nas altitudes de 3 km, 7 km, 20 km e 40 km. A malha de observação na superfície da Terra é aquela que fornece os maiores valores do distúrbio de gravidade, atingindo um valor absoluto máximo de 35,63 mGal. Isto se justifica pelo fato da malha ser aquela mais próxima dos pontos de massa estimados. Enquanto isso, a malha observada a 40 km apresenta os menores valores absolutos, chegando a 1,17 mGal, pelo motivo oposto, como era de se esperar. As Figuras 4.29 *a*, *b*, *c*, *d* e *e* mostram os dados preditos observados na superfície da Terra e nas altitudes de 3 km, 7 km, 20 km e 40 km. Ao compará-las com as Figuras 4.27 *a*, *b*, *c*, *d* e *e*, não é possível observar nenhuma alteração significativa. Embora haja a inclusão de curtos comprimentos de onda advindos do levantamento da RGFB, como visto nas Figuras 4.28, ela é definida por estações pontuais dispersas e cujos dados possuem distribuição irregular. O teste sintético 2 apresentou esta mesma característica do efeito gravitacional produzido pelos pontos de massa exibidos pelos mapas de diferença (Figuras 4.22 *b* e 4.23 *b*).

Teste BDG - GO

O grande problema do teste usando os dados da RGFB está associado à ineficácia em incluir o efeito gravitacional produzido pela camada de pontos de massa nos mapas globais de maneira visível. Sendo assim, foi realizado um outro teste com objetivo de averiguar se uma maior quantidade de dados concentrados em uma região delimitada contribuiria positivamente ao mapa refinado. É neste contexto que se baseia a aplicação da metodologia apresentada usando os dados do BDG

do estado de Goiás (GO). Diferente dos dados da RGFB, dos quais apenas 322 observações foram usadas nesta tese, os dados de GO escolhidos são compostos por 5649 observações dispostas ao longo de todo o estado.

Para este caso, o vetor \mathbf{d}^B , foi, igualmente, definido como sendo proveniente dos dados preditos pelo modelo EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 observado sobre as estações gravimétricas de GO (Figura 4.30 *a*). O vetor \mathbf{d}^o corresponde aos dados reais do próprio levantamento feito pelo IBGE sobre as estações gravimétricas de GO (Figura 4.30 *b*). Logo, o vetor de dados $\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^B$ computados na etapa 2, usado em ambos os algoritmos, pode ser visto na Figura 4.30 *c*.

Segundo o critério da escolha da profundidade (seção 3.2), as curvas de autovalores geradas pela aplicação da SVD para diferentes profundidades das matrizes $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ estão mostradas na Figura 4.31 *a*. Esta figura mostra que de todas as profundidades varridas, a curva de 6 km é a que produz a maior área. A qualidade das matrizes calculadas pela equação 3.13 podem ser observadas na Figura 4.31 *b*. Neste caso, o valor máximo de qualidade calculada aponta para a profundidade de 8,5 km que, antagonicamente ao teste da RGFB, foi a escolhida para posicionar os pontos de massa.

Devido às características dos dados do BDG do estado de GO, optou-se por utilizá-los como dados de entrada para os dois algoritmos descritos na metodologia. Desta forma, foi possível avaliar o desempenho de cada uma das abordagens segundo uma distribuição de dados mais densa.

Algoritmo *multi-camadas*

Seguindo passos semelhantes aos testes sintéticos, as profundidades das camadas posteriores à primeira são obtidas segundo a relação $h_\ell = \frac{h_{\ell-1}}{2}$, quando $\ell \leftarrow \ell + 1$. O parâmetro de regularização usado na solução do sistema linear da etapa 2 foi $\mu = 10^{-3}$ e o parâmetro $\tau = 10^{-4}$. A Tabela 4.3 mostra, em sequência, os índices das camadas ℓ , o número de pontos de massa M_ℓ usados para cada ajuste, suas respectivas profundidades h_ℓ em km e o valor absoluto máximo dos resíduos obtido após cada etapa.

Ao total, foram utilizadas 7 camadas de pontos de massa no ajuste dos dados de GO. A Figura 4.32 *a* mostra o mapa dos resíduos após a primeira etapa do algoritmo para a camada $\ell = 0$ localizada em $h_0 = 8,5$ km, composta por $M_0 = 5649$ pontos de massa. O valor absoluto máximo encontrado é de 48,47 mGal. O ajuste da quarta camada ($\ell = 3$) usando 1485 pontos de massa posicionados à profundidade de 1,062 km fornece o mapa de resíduos da Figura 4.32 *b*. Após a soma das contribuições de todos os ajustes realizados até esta etapa, o valor máximo absoluto obtido é de 3,35 mGal. A última camada $\ell = 6$ contou com 23 pontos de massa à profundidade de 0,133 km, cujo valor máximo absoluto dos resíduos foi de 3,2 mGal (Figura 4.32 *c*).

Tabela 4.3: Teste com dados reais. Número de pontos de massa M_ℓ , profundidades h_ℓ e valor absoluto máximo dos resíduos produzidos pelas $L = 6$ no algoritmo *multicamadas*.

ℓ	M_ℓ	h_ℓ (km)	absoluto
0	5649	8,5	48,47
1	5648	4,25	28,23
2	5429	2,125	3,57
3	1485	1,062	3,35
4	128	0,531	3,34
5	48	0,266	3,31
6	23	0,133	3,21

Note que este valor é bem próximo daquele obtido no ajuste da camada $\ell = 3$. A razão pela qual os ajustes das camadas $\ell = 4, 5, 6$ foram realizadas está na redução do número total de resíduos acima de τ . Após o ajuste das 7 camadas, verificaram-se 20 valores de resíduos acima de τ que correspondem a menos de 1% do número total de dados. Dentre estes 20 valores, apenas 4 estão na faixa de 10^0 de ordem de grandeza.

Os mapas das Figuras 4.33 *a*, *b*, *c*, *d* e *e* mostram o efeito gravitacional produzido na superfície da Terra e nas altitudes de 3 km, 7 km, 20 km e 40 km pelos pontos de massa estimados, respectivamente. A malha de observação na superfície da Terra é aquele que fornece os maiores valores do distúrbio de gravidade, atingindo um valor absoluto máximo de 35,21 mGal. Enquanto isso, a malha observada a 40 km apresenta o valor absoluto máximo de 5,66 mGal. A Figura 4.34 *a* corresponde ao mapa do modelo EIGEN-6C4 e a Figura 4.34 *b* mostra o mapa do dado predito resultante da soma do modelo EIGEN (Figura *a*) mais o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados (Figura 4.33 *a*). Os dois mapas representam os dados supracitados observados na superfície da Terra. Na região dos dados de GO, há uma grande diferença de um mapa para o outro decorrente da inclusão dos curtos comprimentos de onda dos dados do BDG. De forma análoga, compararam-se os mapas de observações a 3 km. A Figura 4.35 *a* corresponde ao mapa do modelo EIGEN-6C4 e a Figura 4.35 *b* mostra o mapa do dado predito pelo modelo EIGEN (Figura *a*) mais o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados (Figura 4.33 *b*) nesta altitude. O mesmo efeito da inclusão dos dados é visto na região de GO. As Figuras 4.36 fazem a mesma comparação, no entanto para a altitude de 7 km.

Algoritmo *robusto*

O mapa de resíduos resultante do ajuste da camada de pontos de massa estimado pela abordagem *robusta* pode ser observado na Figura 4.37. Verifica-se que os valores mínimo e máximo dos resíduos obtidos após o ajuste são de aproximadamente -0,04

e 0,11 mGal, respectivamente. O número total de resíduos acima do τ estipulado é de 16 ao todo, que, de maneira semelhante durante a abordagem *multi-camadas*, corresponde a menos de 1% do número total de dados. Entretanto, a faixa de valores que extrapolam τ é menor nesta abordagem do que na *multi-camadas*. Aqui vemos os 16 resíduos distribuídos entre -0,04 e 0,11 mGal, enquanto que os 20 resíduos da abordagem anterior estão localizados entre -3,04 e 3,2 mGal.

Os mapas das Figuras 4.38 *a*, *b*, *c*, *d* e *e* mostram o efeito gravitacional produzido na superfície da Terra e nas altitudes de 3 km, 7 km, 20 km e 40 km dos pontos de massa estimados, respectivamente. A malha de observação na superfície da Terra é aquele que fornece os maiores valores do distúrbio de gravidade, atingindo um valor absoluto máximo de 48,39 mGal. Enquanto isso, a malha observada a 40 km apresenta o valor absoluto máximo de 5,72 mGal. Em comparação o efeito gravitacional obtido com a abordagem *multi-camadas*, há um incremento de ≈ 13 mGal na superfície da Terra e de 0,1 mGal na altitude de 40 km. A Figura 4.39 *a* corresponde ao mapa do modelo EIGEN-6C4 e a Figura 4.39 *b* mostra o mapa do dado predito resultante da soma do modelo EIGEN mais o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados (Figura 4.38 *a*). Os dois dados foram observados na superfície da Terra. Novamente, na região dos dados de GO, há a presença dos curtos comprimentos de onda advindos dos dados do BDG no mapa *b*. De forma análoga, foram comparados os mapas de observações a 3 km. A Figura 4.40 *a* corresponde ao mapa do modelo EIGEN-6C4 e a Figura 4.40 *b* mostra o mapa do dado predito pelo modelo EIGEN mais o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados (Figura 4.38 *b*). O mesmo efeito da inclusão dos dados é visto na região de GO, numa intensidade um pouco menor já que há o afastamento em relação aos pontos de massa. A Figura 4.41 *a* corresponde aos mapas do modelo EIGEN-6C4 e a Figura 4.41 *b* mostra o mapa do dado predito pelo modelo EIGEN mais o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados (Figura 4.38 *b*), observados na altitude de 7 km.

Diferentemente do teste da RGFB, o mapa dos dados preditos mostrou uma visível inclusão de curtos comprimentos de onda devido à aplicação dos dados de GO. Com este teste, fica claro que o mapa regional será significativamente refinado quando aplicado um volume razoável de dados distribuídos em uma determinada região específica.

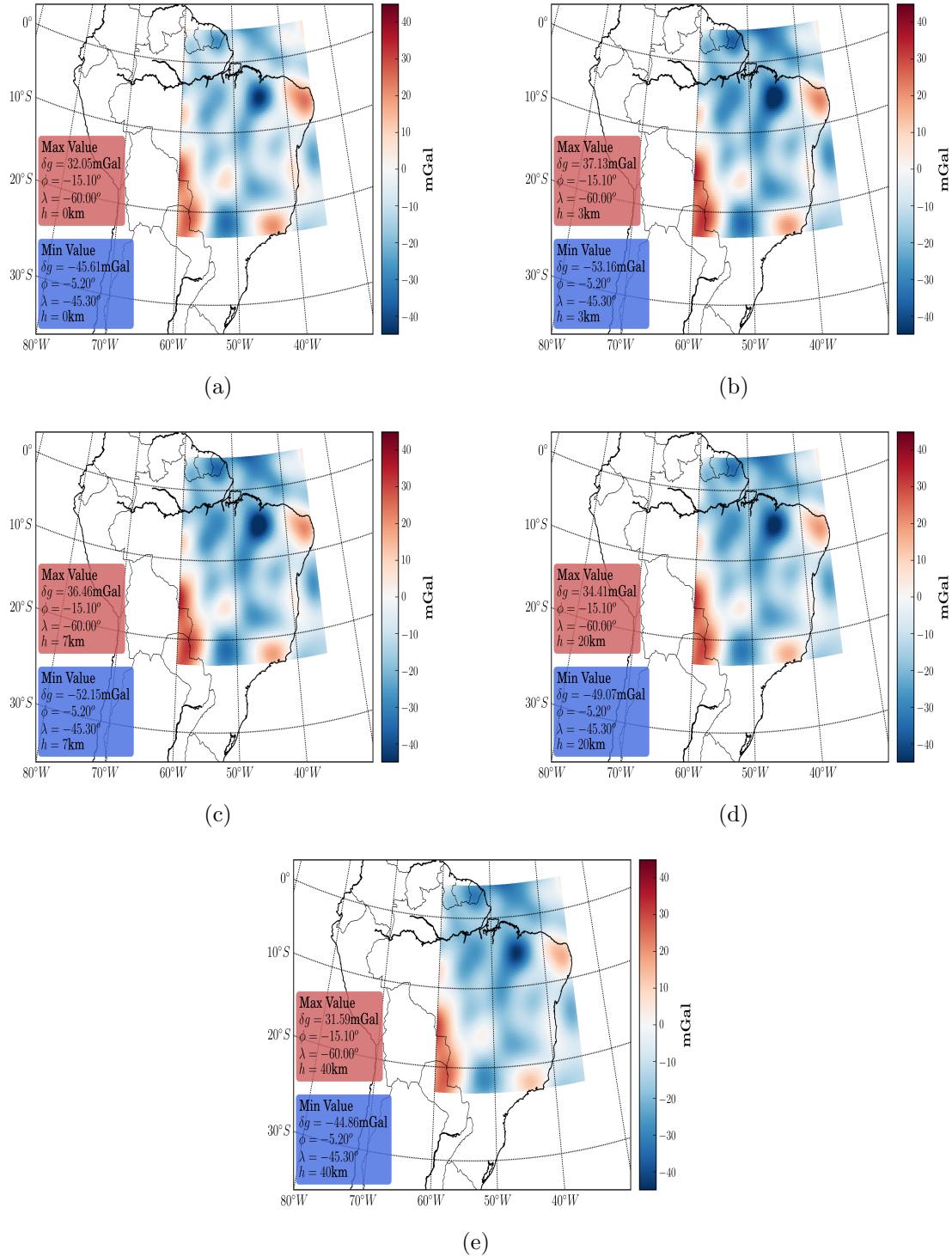


Figura 4.4: Teste com dados sintéticos. Componente de longo comprimento de onda dos dados de distúrbio de gravidade preditos pelo modelo EIGEN-6C4 até grau e ordem 65 nas altitudes da a) superfície da Terra; b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km.

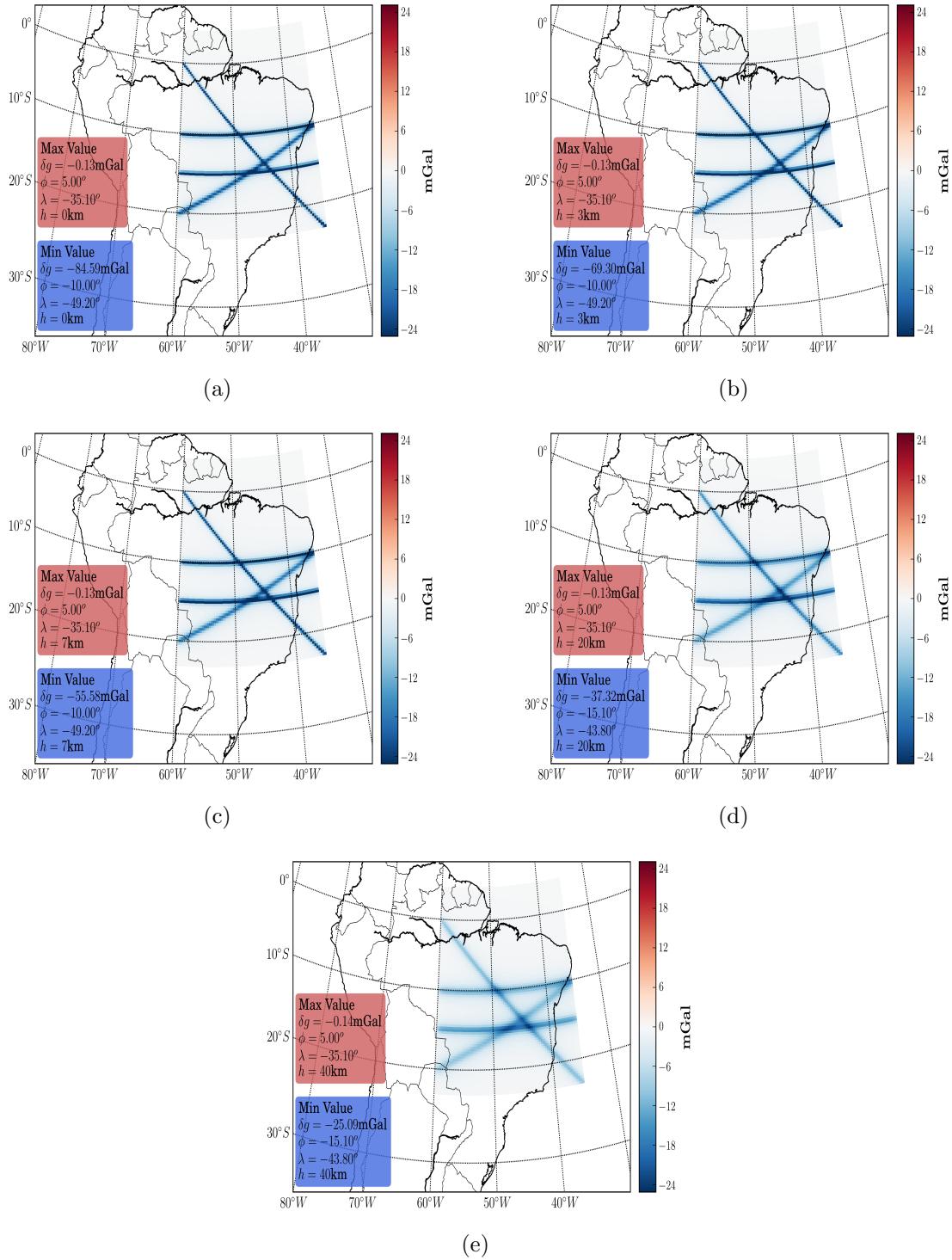


Figura 4.5: Teste com dados sintéticos. Componente de curto comprimento de onda dos dados de distúrbio de gravidade produzida pelas feições lineares nas altitudes da a) superfície da Terra; b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km.

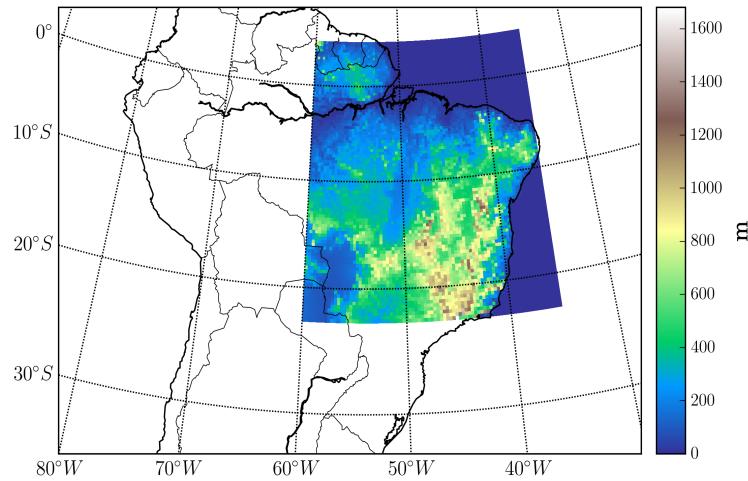


Figura 4.6: Teste com dados sintéticos. Altitude geométrica dos pontos localizados na superfície da Terra, onde os dados mostrados nas Figuras 4.4 a e 4.5 a foram avaliados.

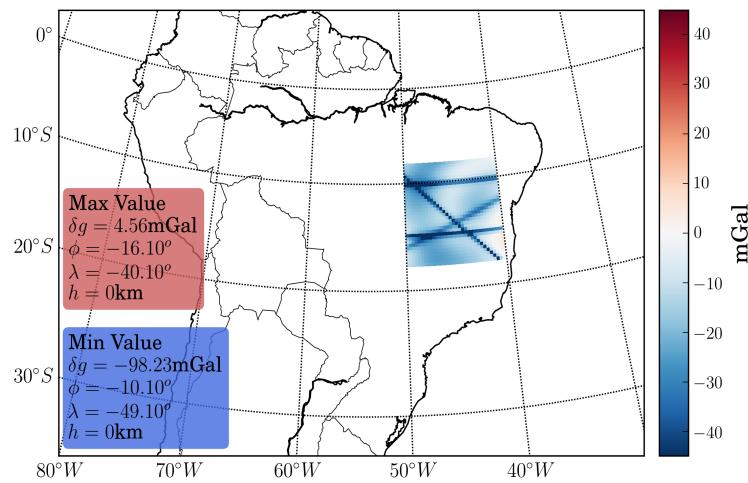


Figura 4.7: Teste com dados sintéticos. Dado observado \mathbf{d}^o (eq. 3.3) resultante da soma da componente de longo comprimento de onda predito pelo modelo EIGEN-6C4 até grau e ordem 65 com a componente de curto comprimento de onda produzida pelas feições lineares na superfície da Terra, limitados entre as latitudes -18 a -8 ° e longitudes -50 a -40°.

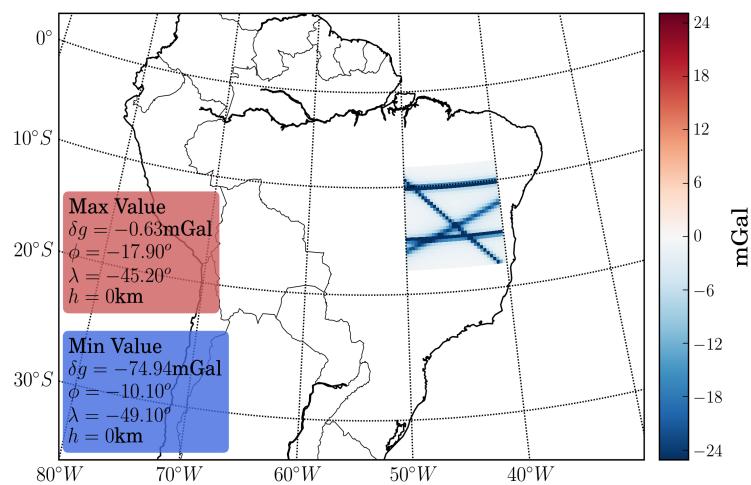


Figura 4.8: Teste com dados sintéticos. Componente de curto comprimento de onda dos dados de distúrbio de gravidade produzida pelas feições lineares observados na superfície da Terra, limitados entre as latitudes -18 a -8 $^{\circ}$ e longitudes -50 a -40 $^{\circ}$. Estes dados representam o lado esquerdo da equação 3.15 e são definidos como \mathbf{r}_0 na etapa 1 do algoritmo *multi-camadas*.

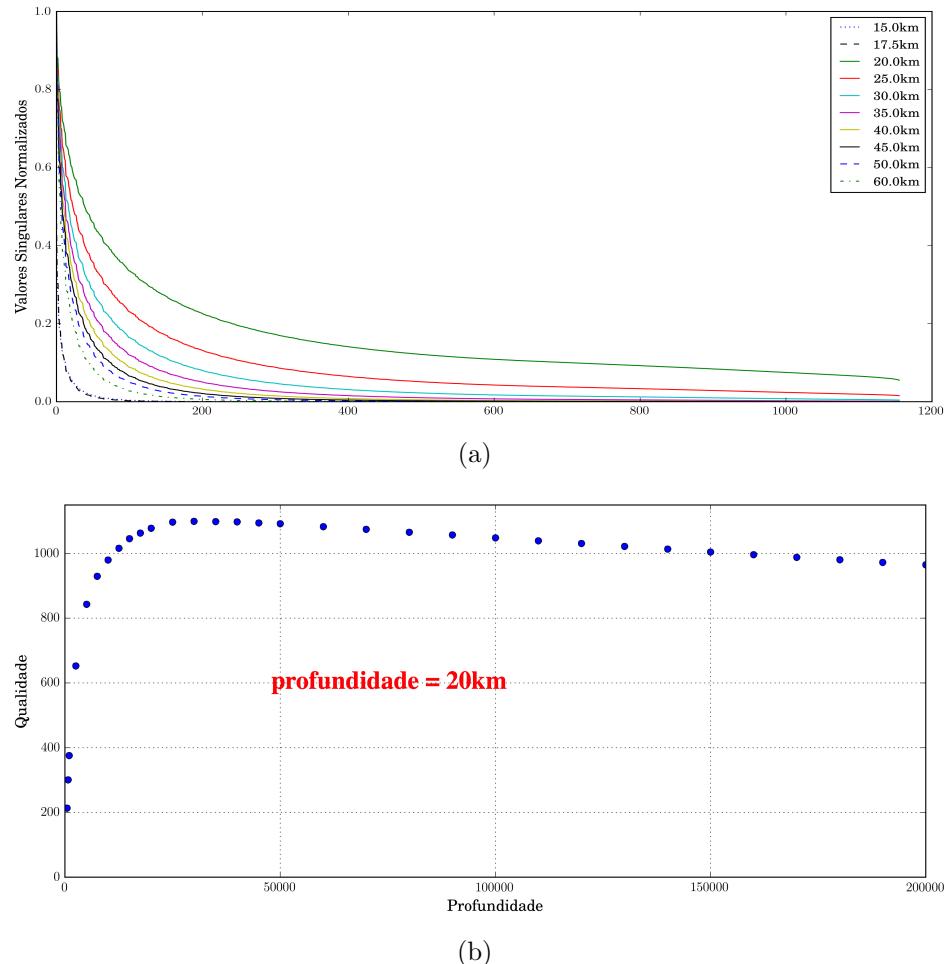


Figura 4.9: Teste com dados sintéticos. Cálculo da profundidade ótima. a) Curva de autovalores pelos seus índices. Cada curva representa o vetor de autovalores da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ correspondente a uma determinada profundidade; b) Curva de qualidade do *design* estatístico. Cada ponto da curva representa um valor de qualidade Q (eq. 3.13) associado a uma determinada profundidade h_j , $j = 0, 1, 2, 3, \dots$.

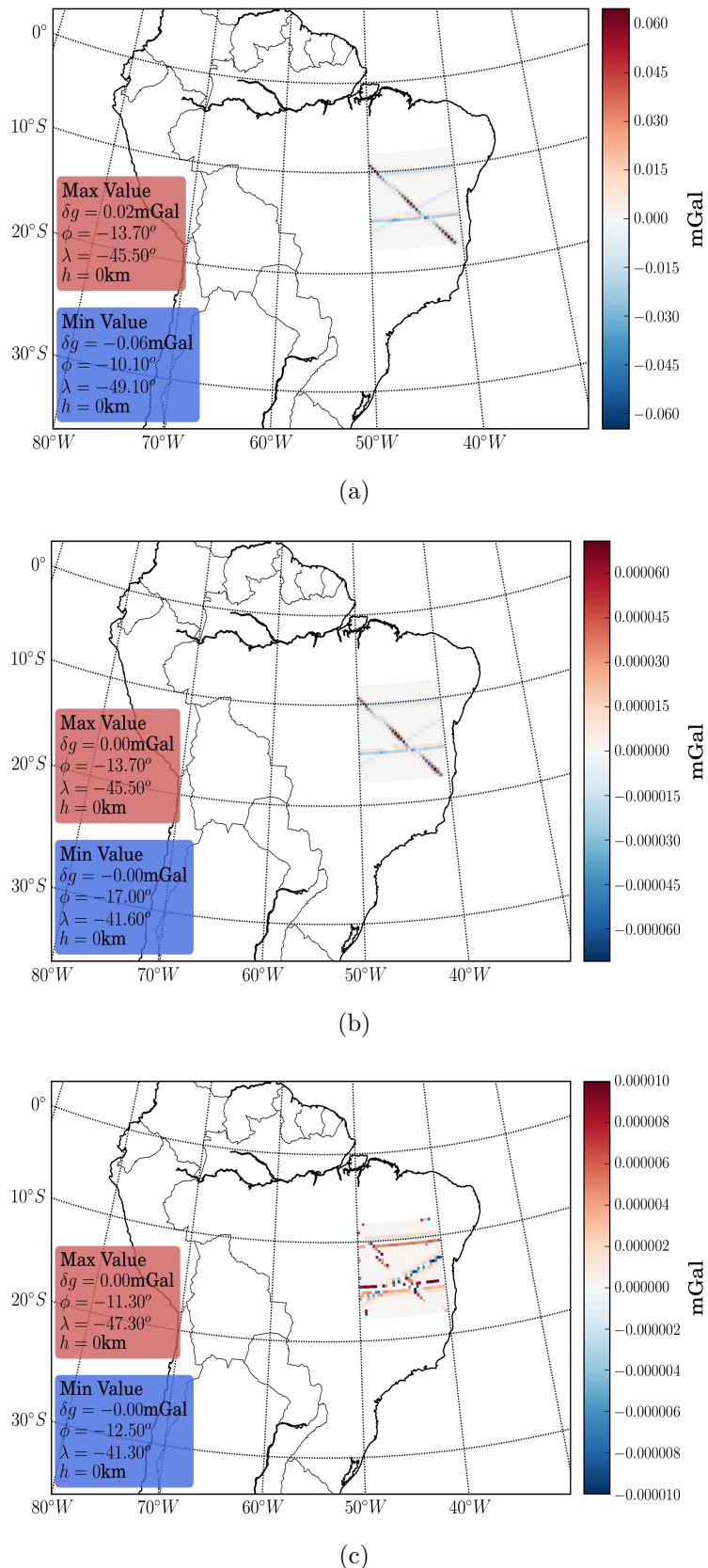


Figura 4.10: Teste com dados sintéticos. Resíduos produzidos a) pela camada $\ell = 0$; b) pelas camadas $\ell = 0, 1$; c) pelas camadas $\ell = 0, 1, 2$ usando o algoritmo *multi-camadas*.

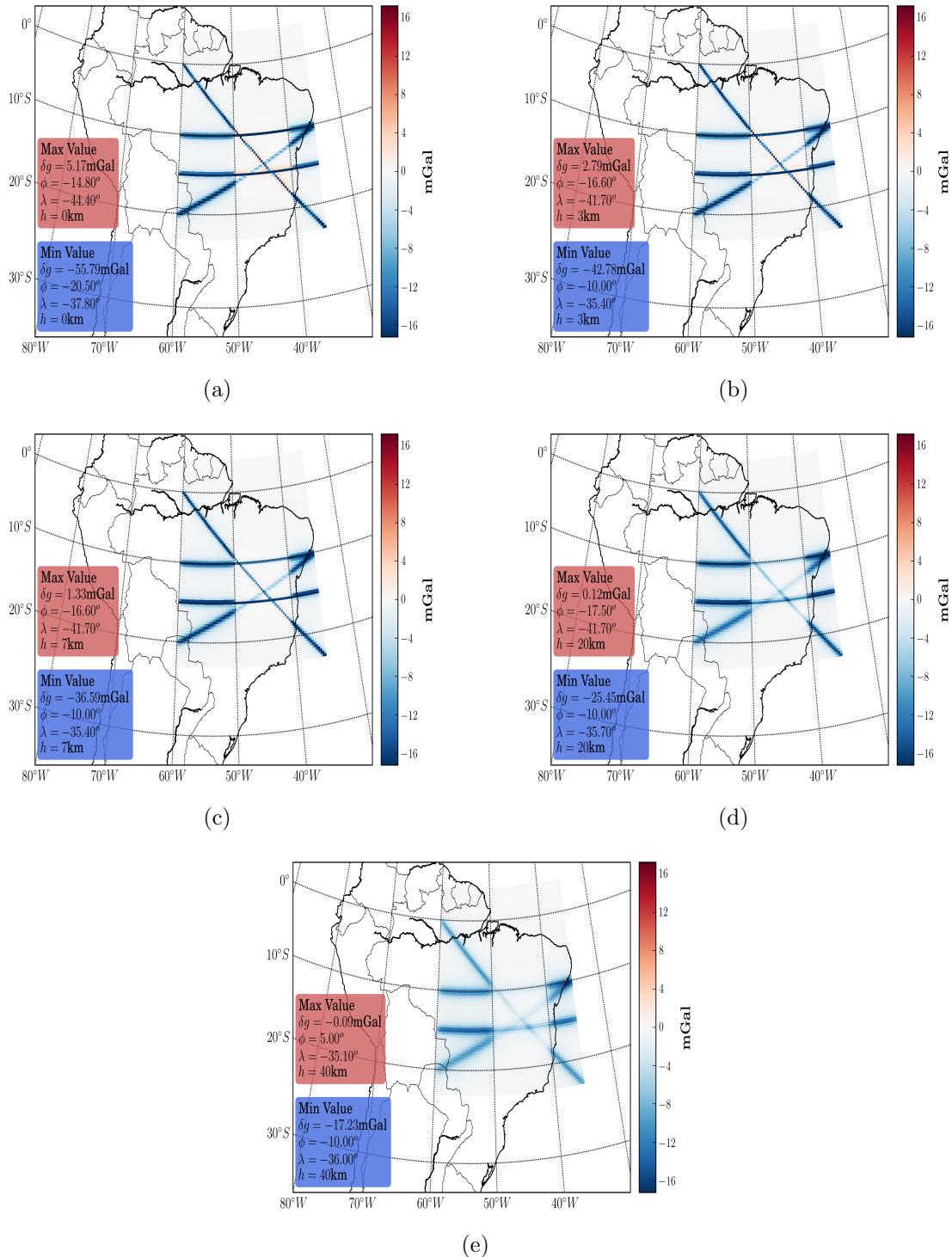


Figura 4.11: Teste com dados sintéticos. Diferença entre os dados verdadeiros e os dados preditos pelas 6 camadas de pontos de massa obtidas com o algoritmo *multi-camadas* nas altitudes a) superfície da Terra; b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km. Os dados verdadeiros são a soma entre os dados mostrados nas Figuras 4.4 e 4.5. Os dados preditos são a soma entre os dados mostrados na Figura 4.4 e aquele predito por todas as camadas de pontos de massa.

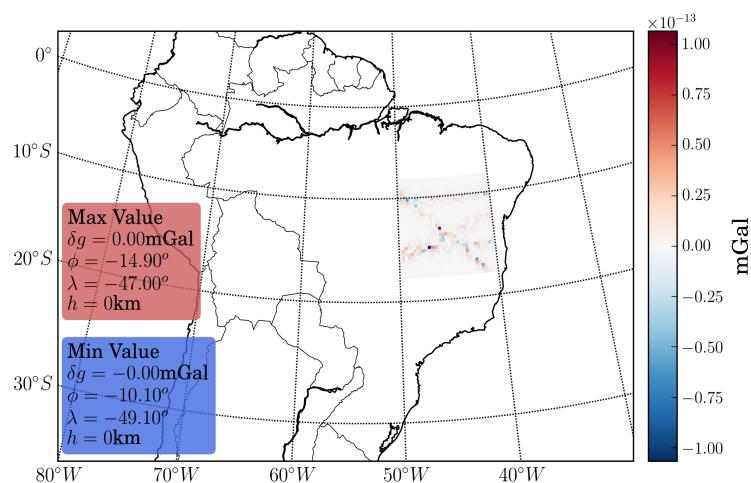


Figura 4.12: Teste com dados sintéticos. Resíduos produzidos pela camada usando o algoritmo *robusto* após 3 iterações.

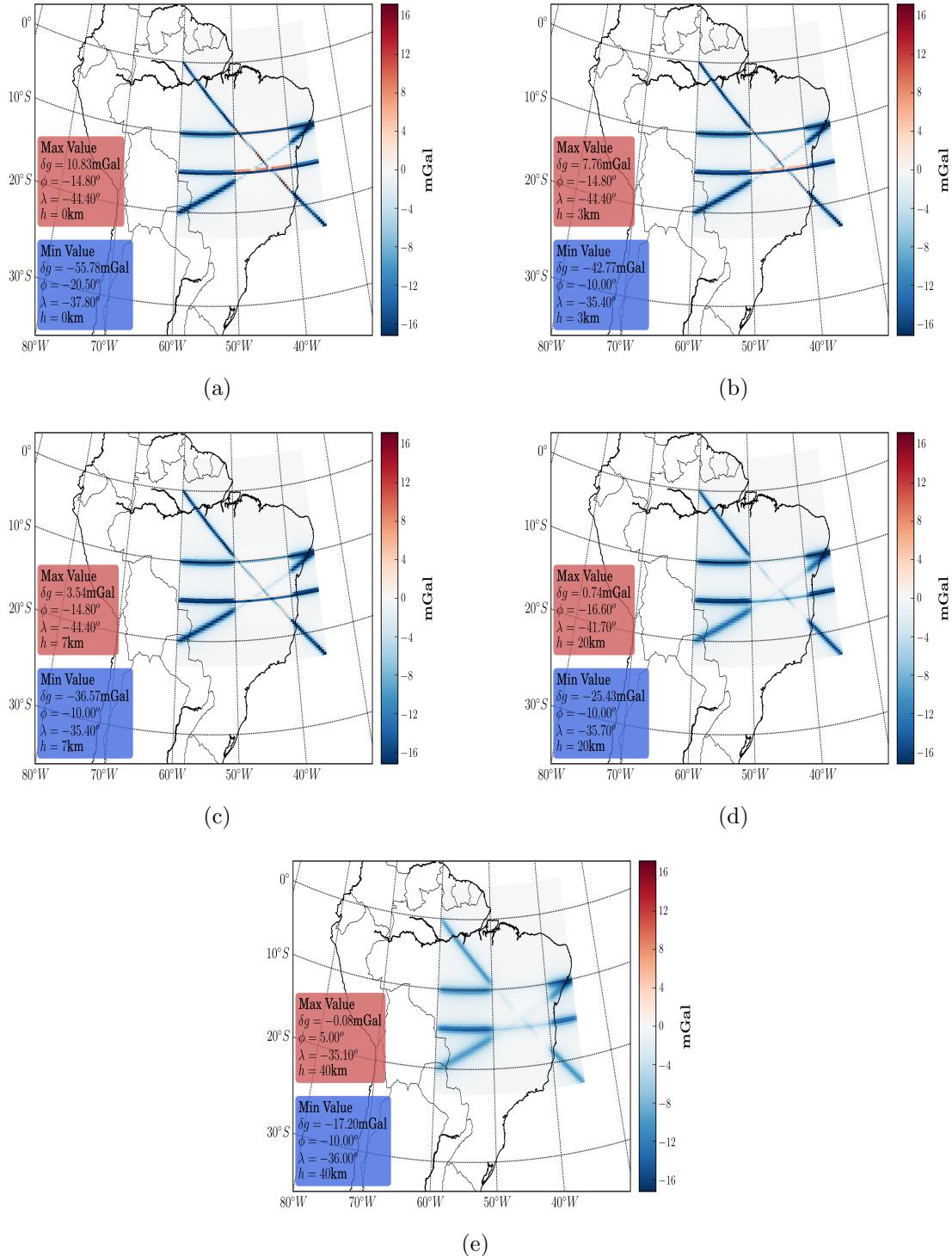


Figura 4.13: Teste com dados sintéticos. Diferença entre os dados verdadeiros e os dados preditos pela única camada de pontos de massa obtida com o algoritmo *robusto* nas altitudes a) superfície da Terra; b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km. Os dados verdadeiros são a soma entre os dados mostrados nas Figuras 4.4 e 4.5. Os dados preditos são a soma entre os dados mostrados na Figura 4.4 e aquele predito pela camada de pontos de massa.

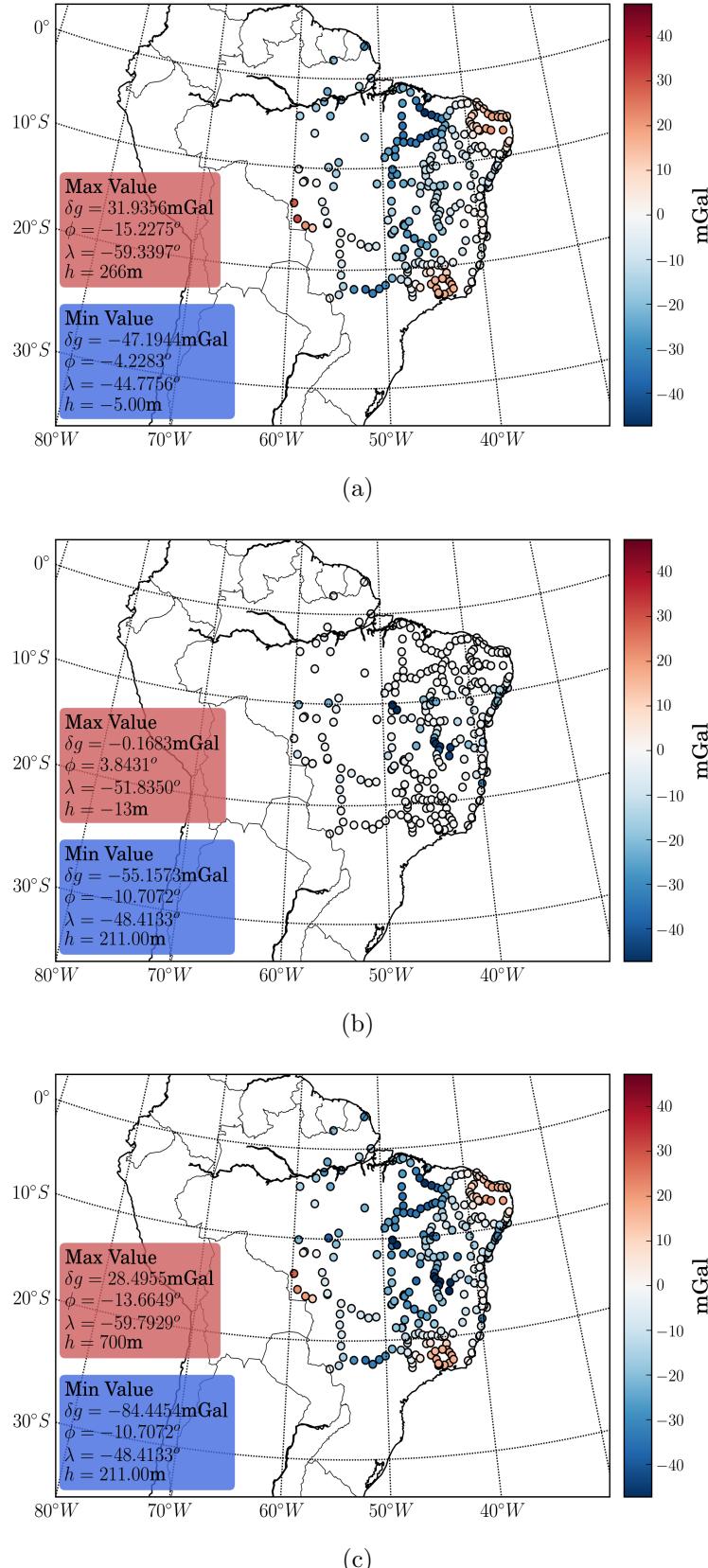


Figura 4.14: Teste com dados sintéticos. a) Componente de longo comprimento de onda dos dados de \mathbf{d}^B preditos pelo modelo EIGEN-6C4 até grau e ordem 65; b) Componente de curto comprimento de onda dos dados de distúrbio de gravidade produzida pelas feições lineares; c) Dados \mathbf{d}^o . Todos os dados são observados nos nós da rede gravimétrica sintética que simula a Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira (PIÑA e SOUSA, 2001). As altitudes destes pontos estão mostradas na Figura 4.15.

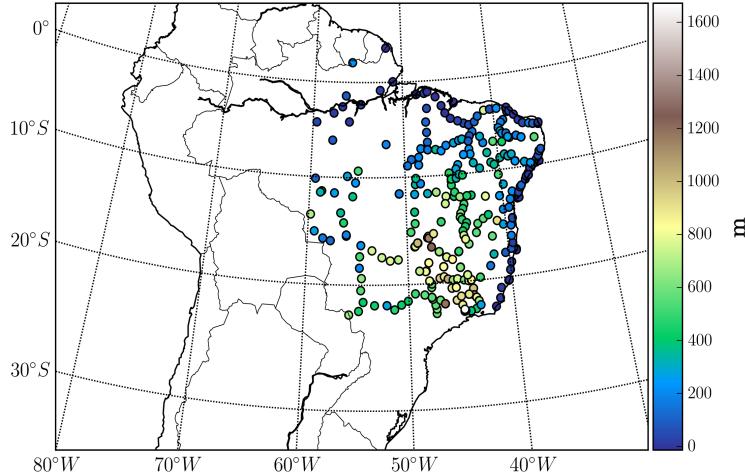


Figura 4.15: Teste com dados sintéticos. Altitude geométrica dos pontos que definem os nós da rede gravimétrica sintética (Figuras 4.14 a, b e c).

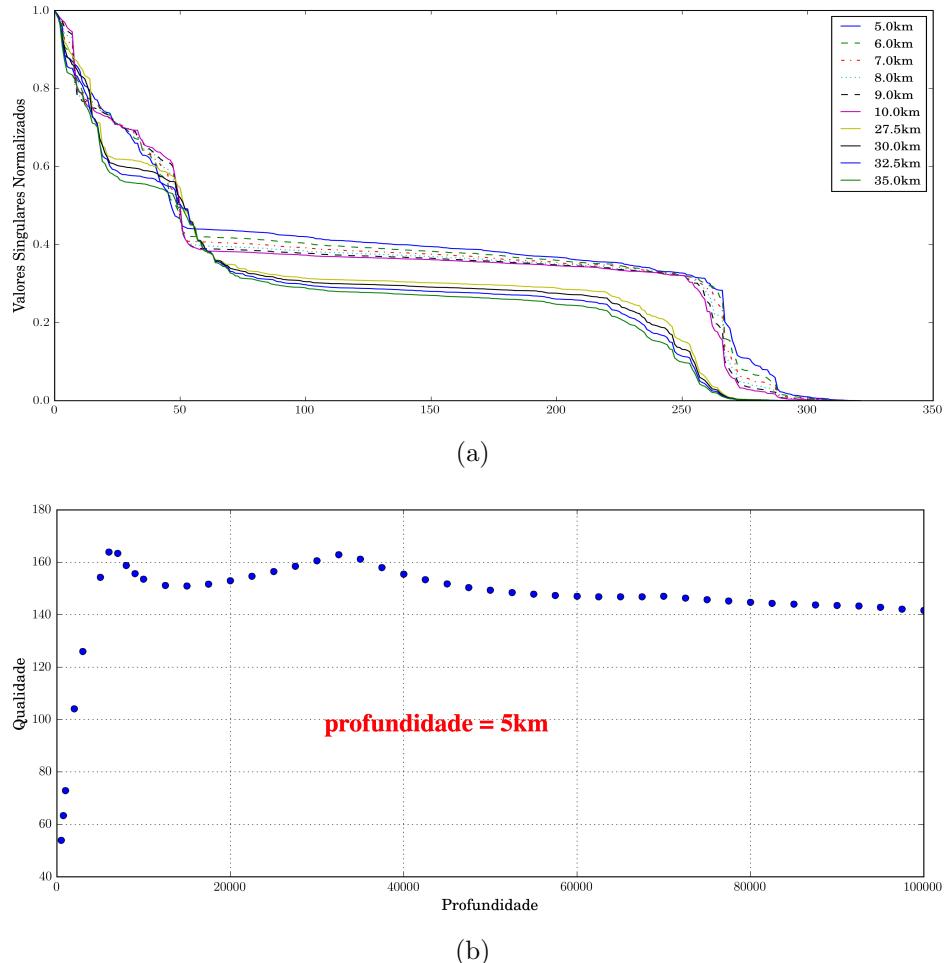


Figura 4.16: Teste com dados sintéticos. Cálculo da profundidade ótima. a) Curva de autovalores pelos seus índices. Cada curva representa o vetor de autovalores da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ correspondente a uma determinada profundidade; b) Curva de qualidade do *design* estatístico. Cada ponto da curva representa um valor de qualidade Q (eq. 3.13) associado a uma determinada profundidade h_j , $j = 0, 1, 2, 3, \dots$.

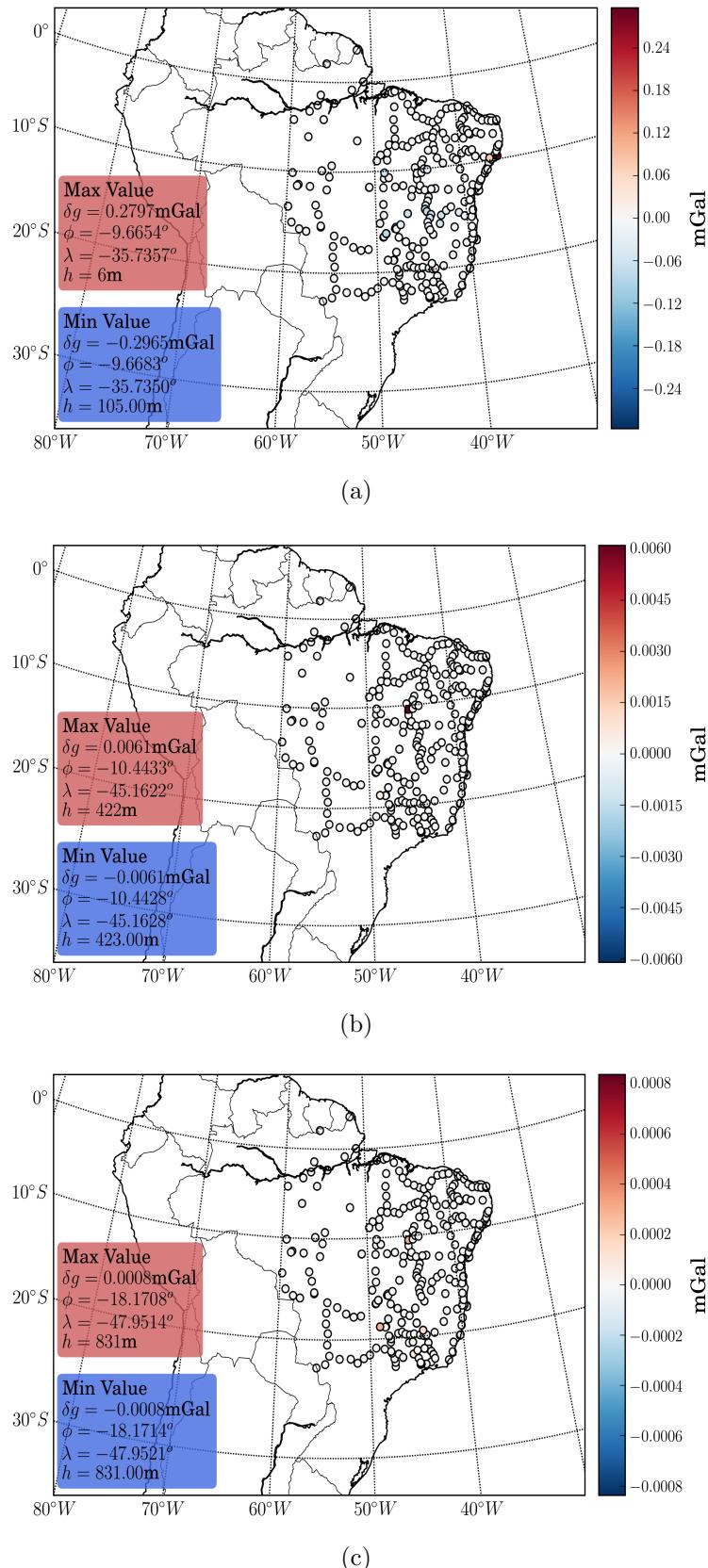


Figura 4.17: Teste com dados sintéticos. Resíduos produzidos a) pela camada $\ell = 0$; b) pelas camadas $\ell = 0, 1, 2, 3$; c) pelas camadas $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ usando o algoritmo *multi-camadas*.

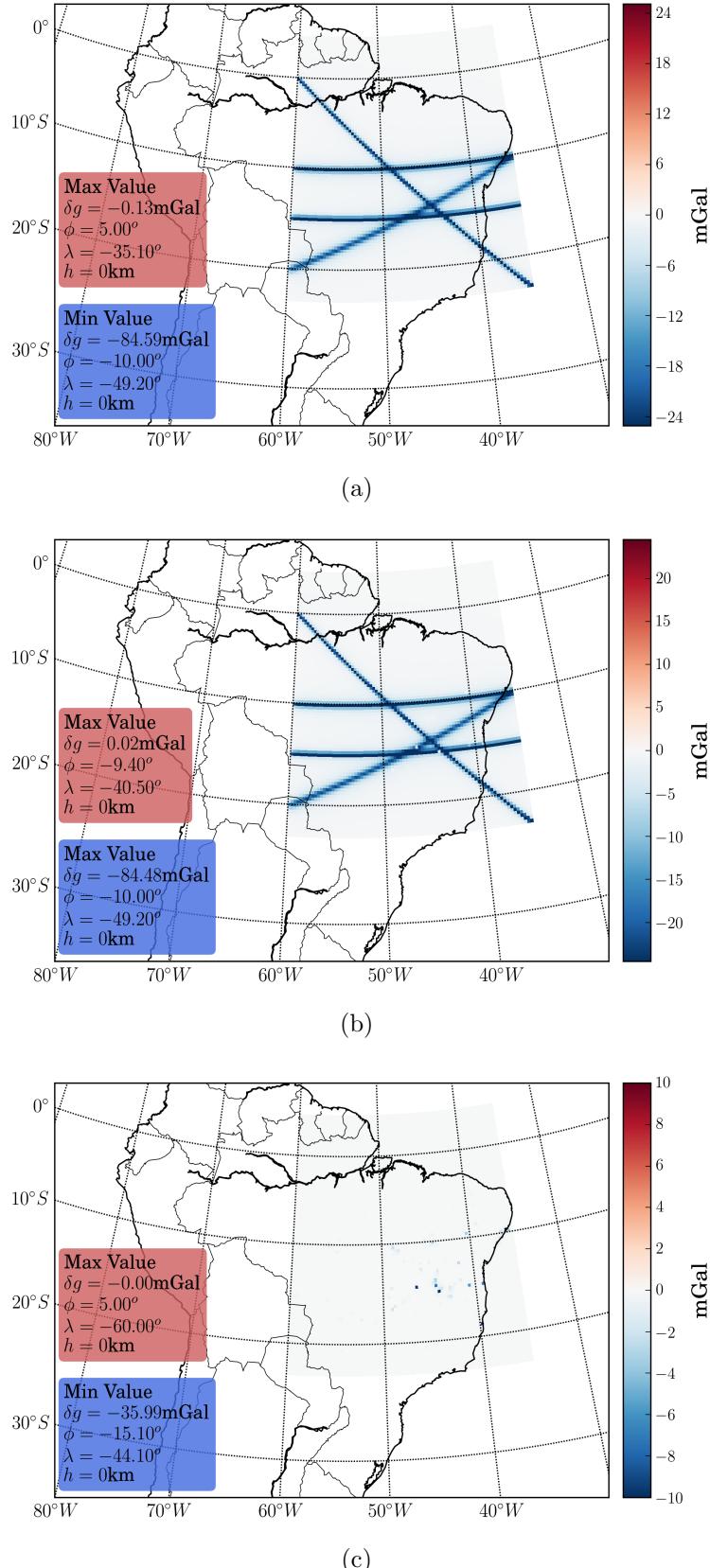


Figura 4.18: Teste com dados sintéticos. Comparação entre: a) o distúrbio de gravidade produzido pelas feições lineares e b) a diferença entre os dados verdadeiros e os dados preditos pelas 7 camadas de pontos de massa obtidas com o algoritmo *multi-camadas*, ambos avaliados na superfície da Terra. Os dados verdadeiros são a soma entre os dados mostrados nas Figuras 4.4 e 4.5. Os dados preditos são a soma entre os dados mostrados na Figura 4.4 e aquele predito por todas as camadas de pontos de massa. c) Diferença entre as Figuras a e b.

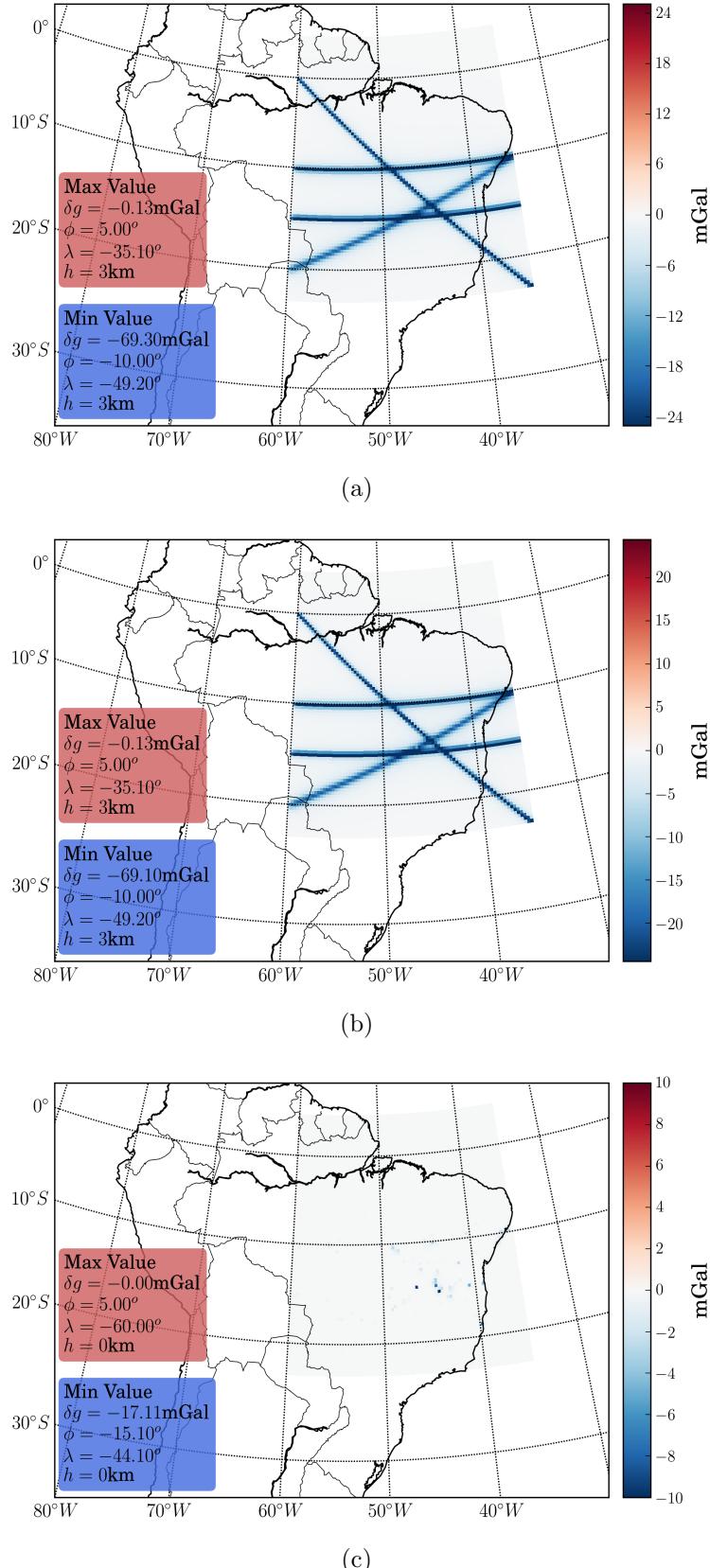


Figura 4.19: Teste com dados sintéticos. Comparação entre: a) o distúrbio de gravidade produzido pelas feições lineares e b) a diferença entre os dados verdadeiros e os dados preditos pelas 7 camadas de pontos de massa obtidas com o algoritmo *multi-camadas*, todos avaliados na altitude de 3 km. Os dados verdadeiros são a soma entre os dados mostrados nas Figuras 4.4 e 4.5. Os dados preditos são a soma entre os dados mostrados na Figura 4.4 e aquele predito por todas as camadas de pontos de massa. c) Diferença entre as Figuras a e b.

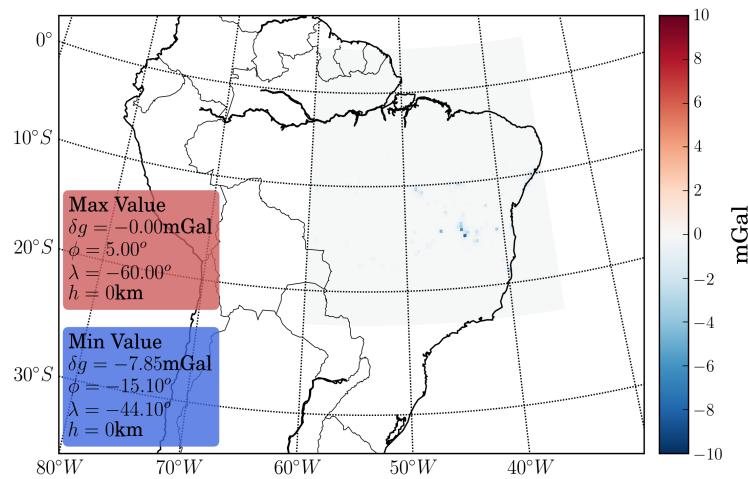


Figura 4.20: Teste com dados sintéticos. Efeito gravitacional das camadas de pontos de massa na altitude de 7 km.

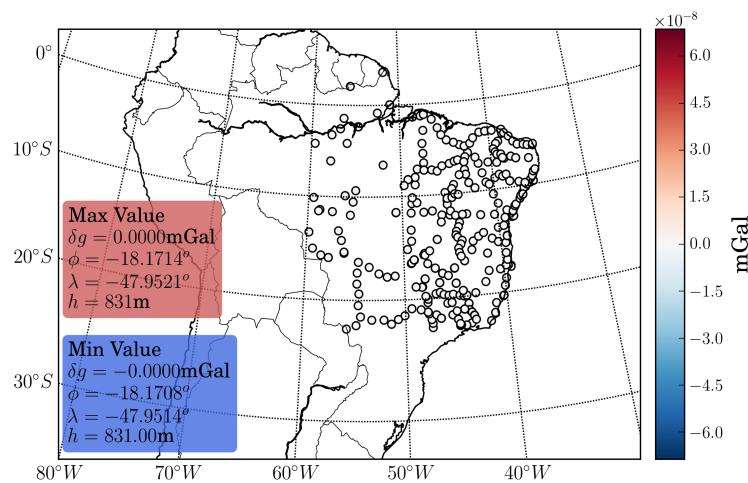


Figura 4.21: Teste com dados sintéticos. Resíduos produzidos pela camada usando o algoritmo *robusto* após 3 iterações.

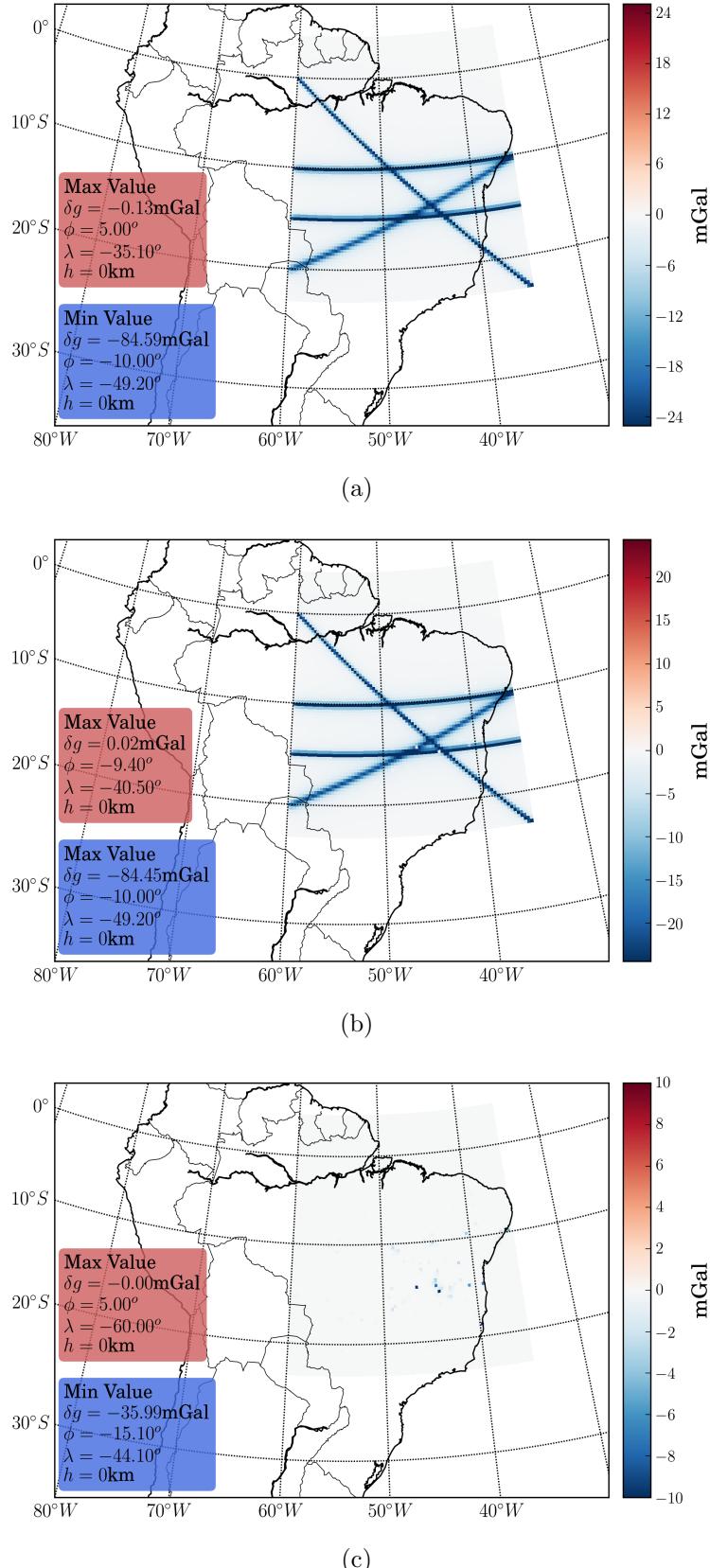


Figura 4.22: Teste com dados sintéticos. Comparação entre: a) o distúrbio de gravidade produzido pelas feições lineares e b) a diferença entre os dados verdadeiros e os dados preditos pela camada única de pontos de massa obtidas com o algoritmo *multi-camadas*, todos avaliados na superfície da Terra. Os dados verdadeiros são a soma entre os dados mostrados nas Figuras 4.4 e 4.5. Os dados preditos são a soma entre os dados mostrados na Figura 4.4 e aquele predito por todas as camadas de pontos de massa. c) Diferença entre as Figuras a e b.

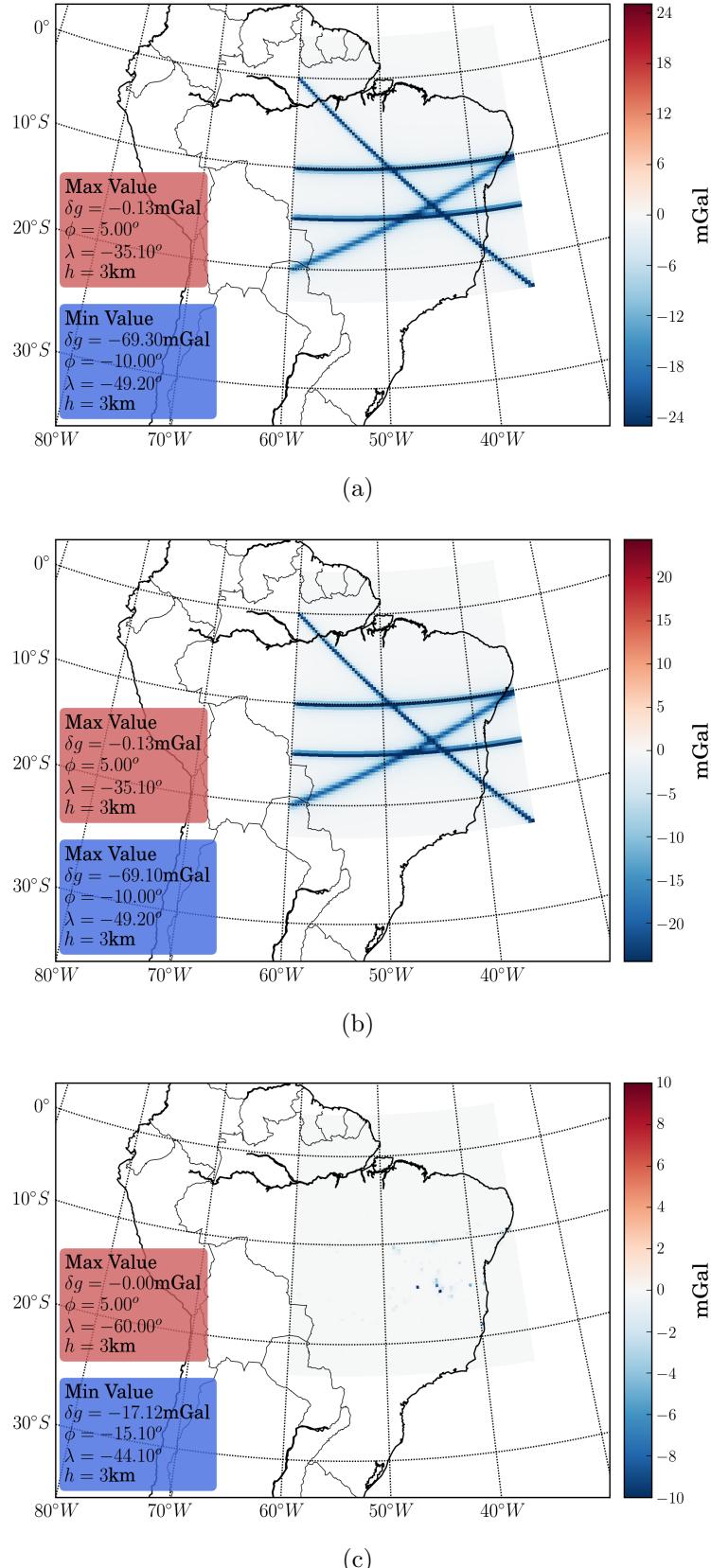


Figura 4.23: Teste com dados sintéticos. Comparação entre: a) o distúrbio de gravidade produzido pelas feições lineares e b) a diferença entre os dados verdadeiros e os dados preditos pela camada única de pontos de massa obtidas com o algoritmo *multi-camadas*, todos avaliados na altitude de 3 km. Os dados verdadeiros são a soma entre os dados mostrados nas Figuras 4.4 e 4.5. Os dados preditos são a soma entre os dados mostrados na Figura 4.4 e aquele predito por todas as camadas de pontos de massa. c) Diferença entre as Figuras a e b.

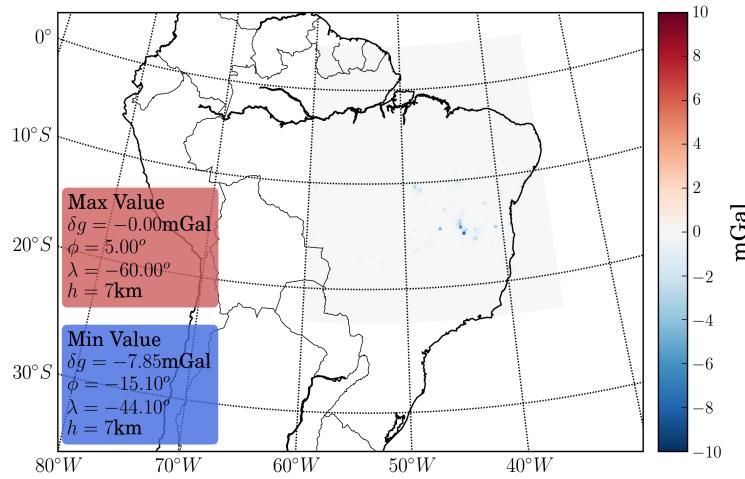


Figura 4.24: Teste com dados sintéticos. Efeito gravitacional da camada única de pontos de massa na altitude de 7 km.

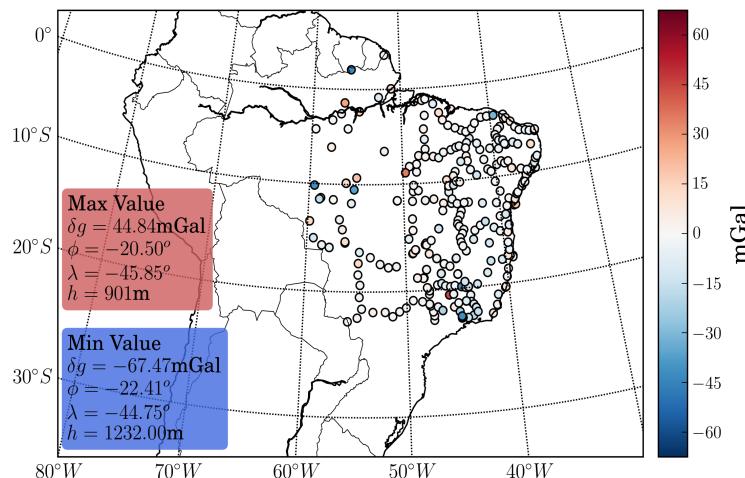


Figura 4.25: Aplicação a dados reais. reais. Diferença entre o distúrbio de gravidade sobre os nós da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira (PIÑA e SOUSA, 2001) (\mathbf{d}^o) e o distúrbio calculado pelo modelo EIGEN-6C4, expandido até grau e ordem 2190, (\mathbf{d}^B) nos mesmos pontos. As altitudes dos pontos da rede são as mesmas dos pontos da rede gravimétrica sintética (Figura 4.15).

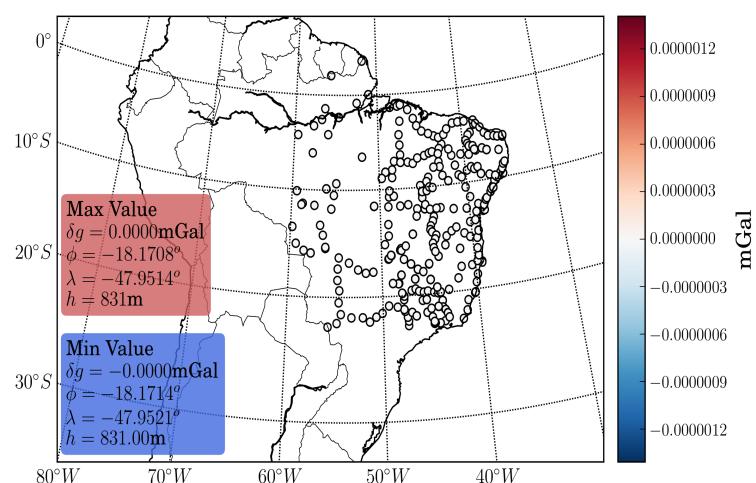


Figura 4.26: Aplicação a dados reais. Resíduos produzidos pela camada usando o algoritmo *robusto* após 3 iterações.

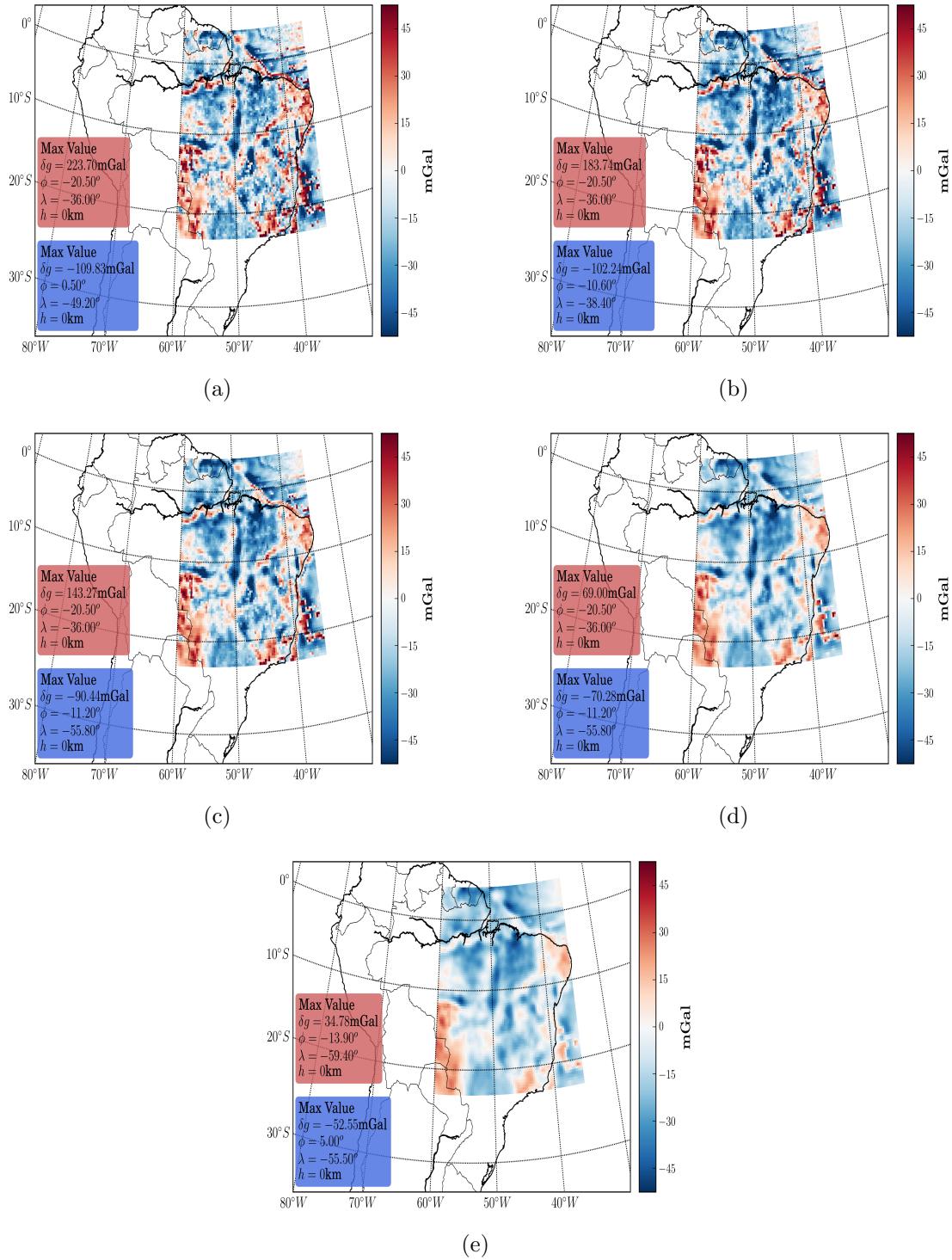


Figura 4.27: Aplicação a dados reais. Dados do modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 observados a) na superfície da Terra; e nas altitudes de b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km.

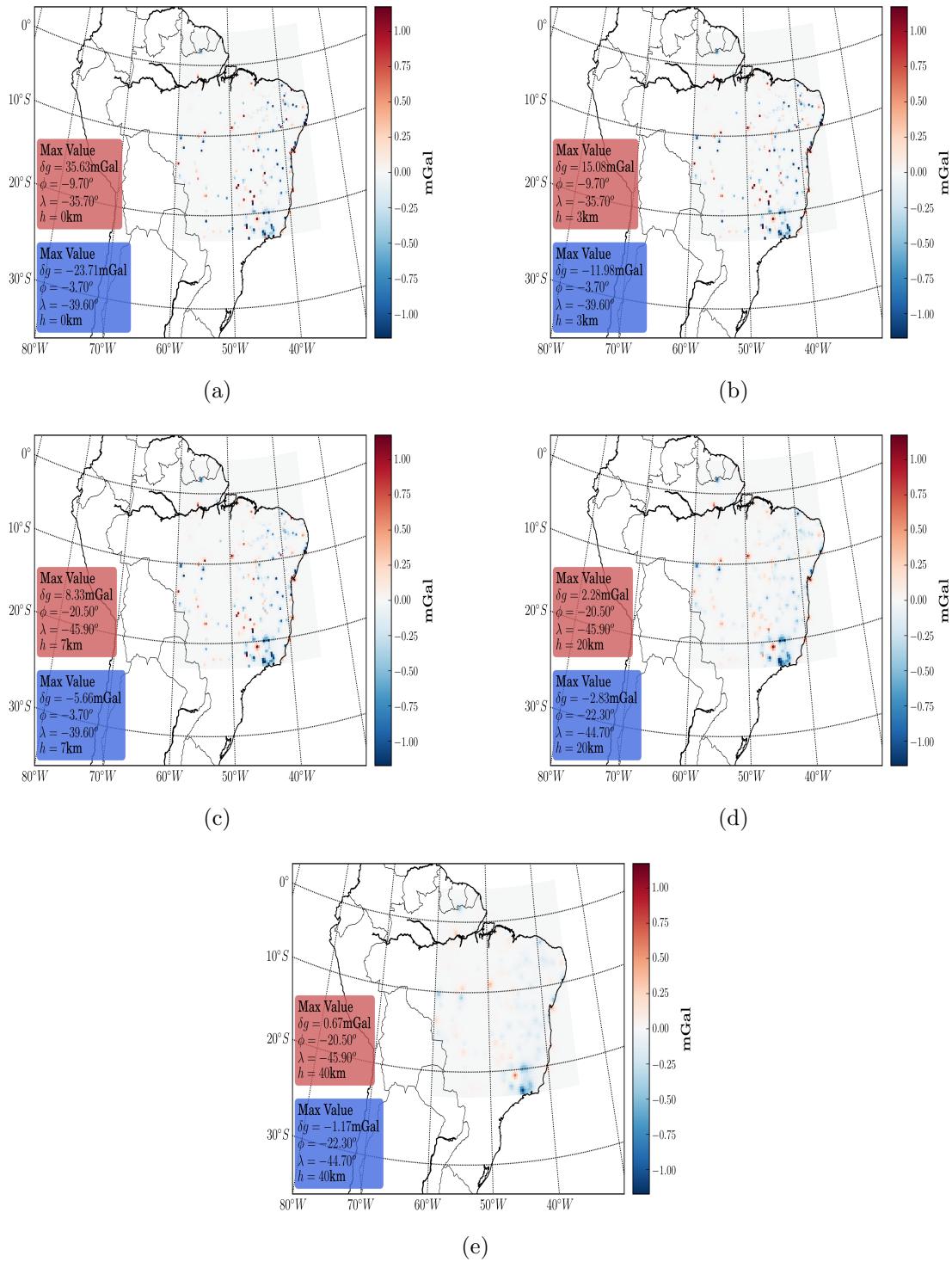


Figura 4.28: Aplicação a dados reais. Efeito gravitacional produzido pela camada de pontos de massa estimada com o algoritmo *robusto* nas altitudes a) superfície da Terra; b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km.

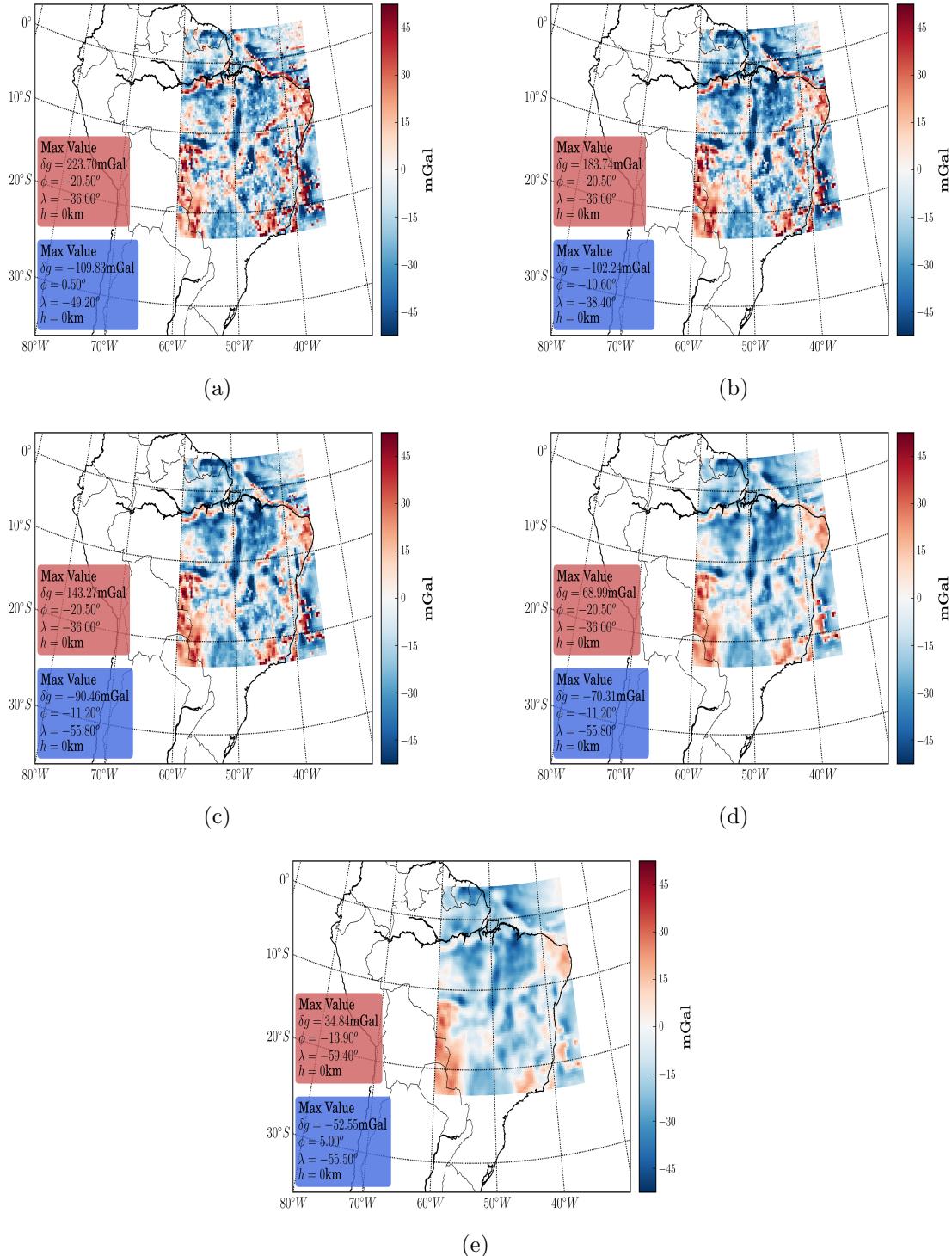


Figura 4.29: Aplicação a dados reais. Dados preditos obtidos pela soma do efeito gravitacional produzido pela camada de pontos de massa estimada com o algoritmo *robusto* (Figuras 4.28) e o modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 (Figuras 4.27) observados superfície da Terra; b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km.

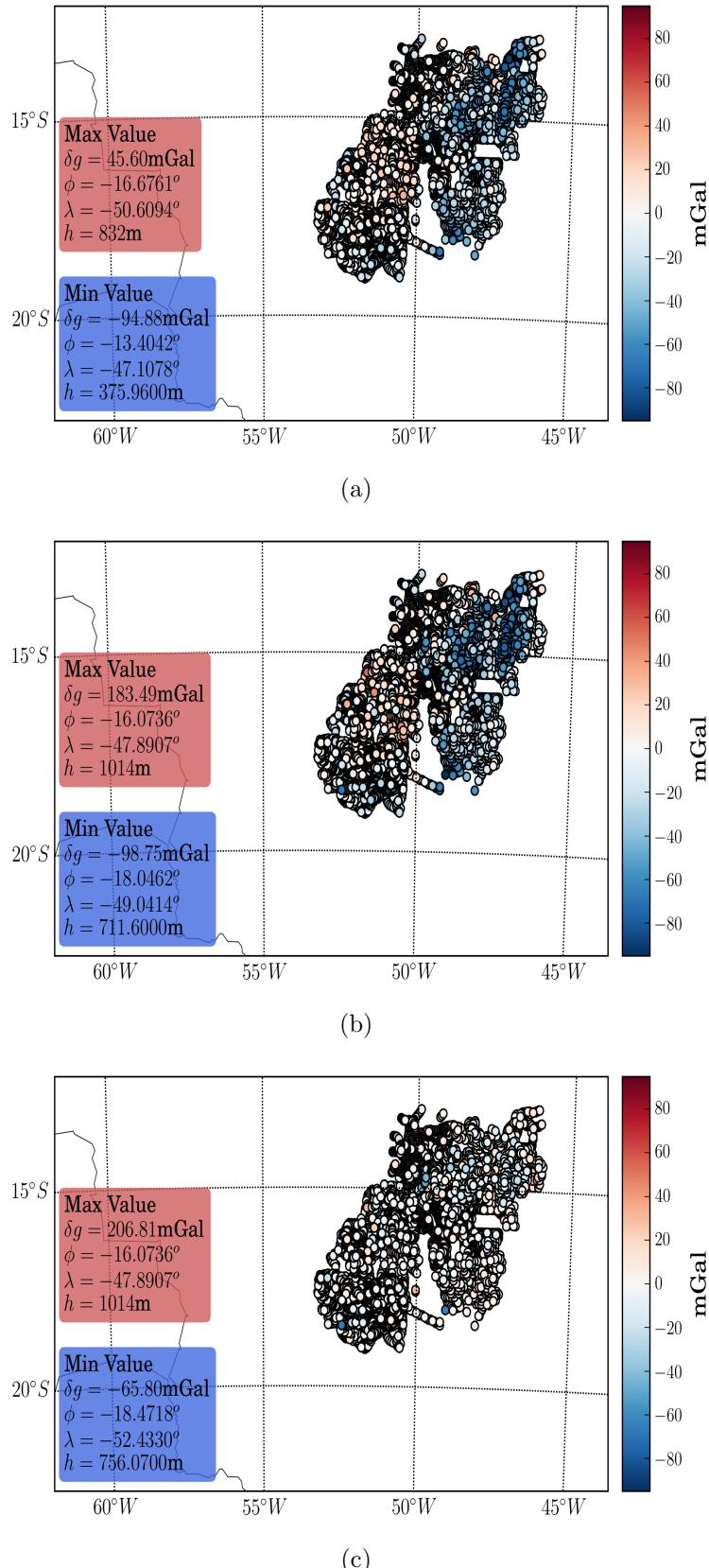


Figura 4.30: Aplicação a dados reais. a) Distúrbio de gravidade \mathbf{d}^B predito pelo modelo EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190; b) Distúrbio de gravidade \mathbf{d}^o observado pelo IBGE (dados BDG); c) Diferença entre a) e b), ou seja, dados $\mathbf{d}^o - \mathbf{d}^B$, todos avaliados sobre as estações de GO.

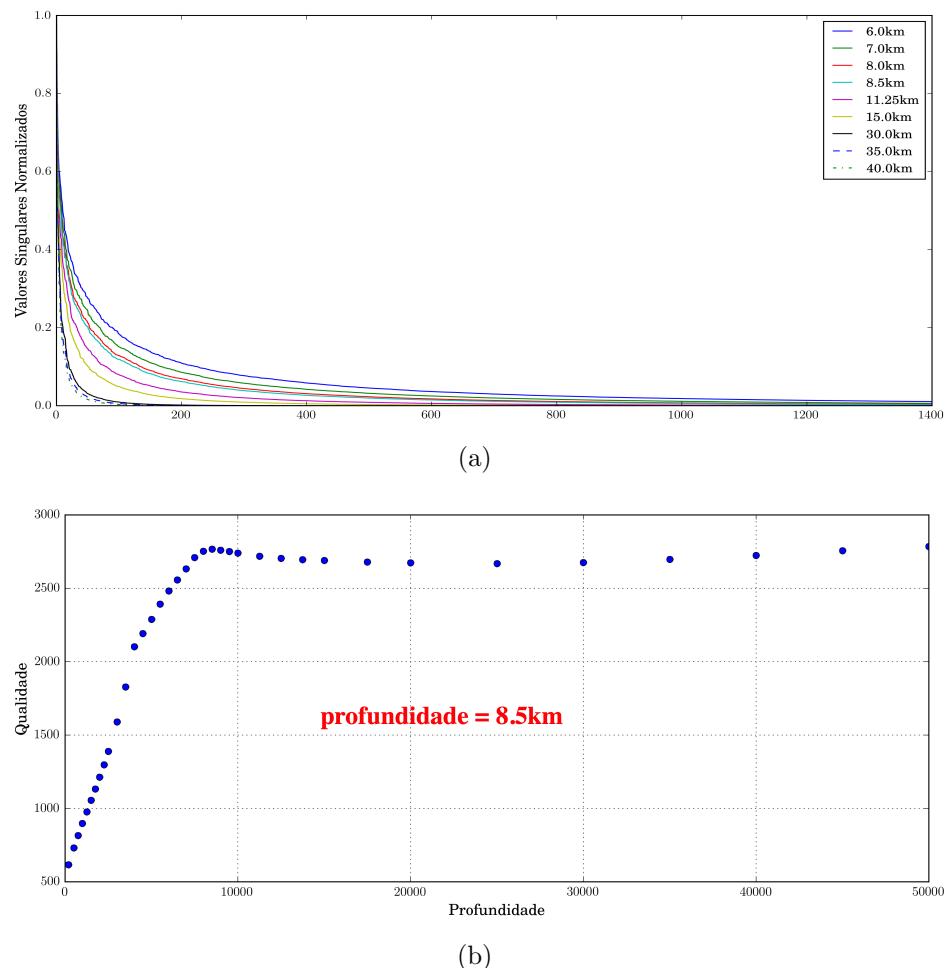


Figura 4.31: Aplicação a dados reais. Cálculo da profundidade ótima. a) Curva de autovalores pelos seus índices. Cada curva representa o vetor de autovalores da matriz $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ correspondente a uma determinada profundidade; b) Curva de qualidade do *design* estatístico. Cada ponto da curva representa um valor de qualidade Q (eq. 3.13) associado a uma determinada profundidade h_j , $j = 0, 1, 2, 3, \dots$.

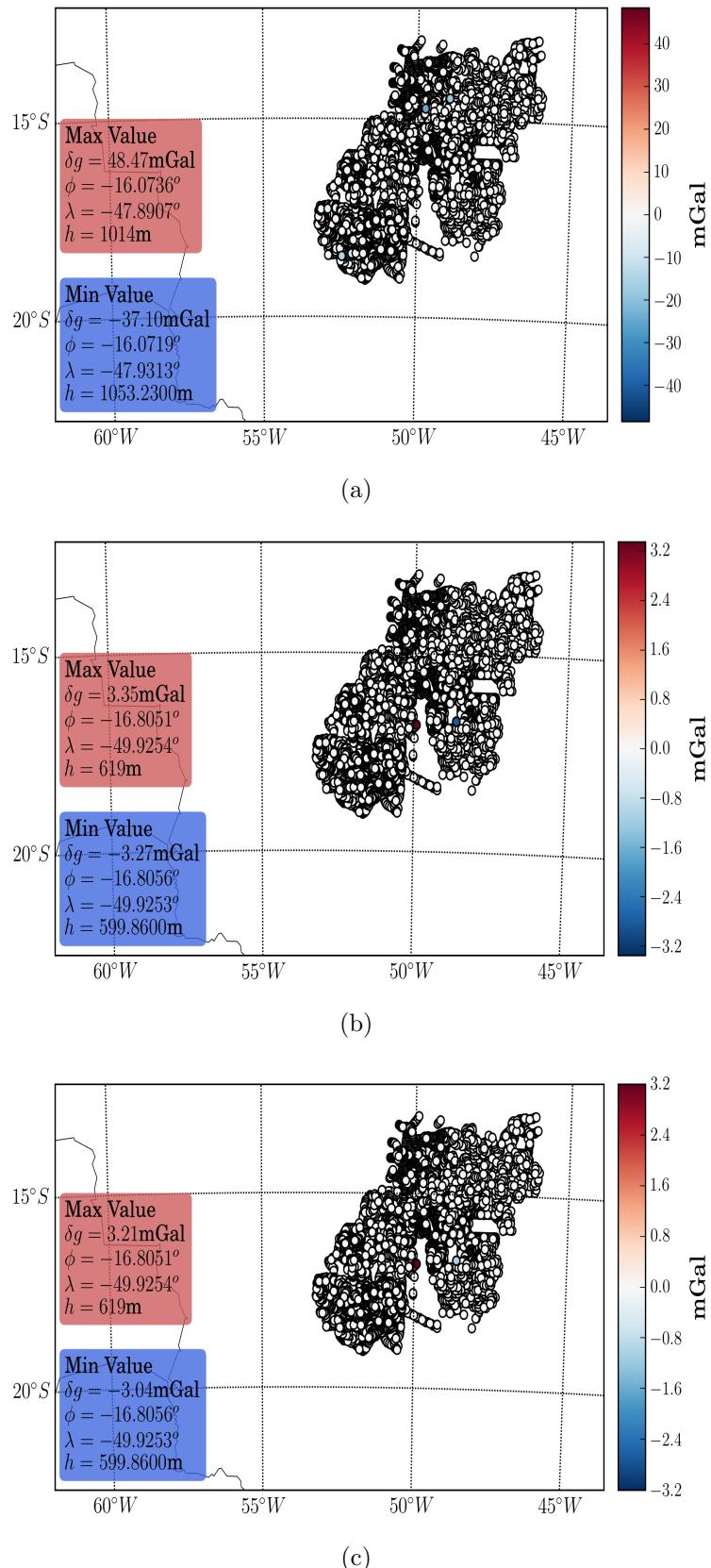


Figura 4.32: Aplicação a dados reais. reais. Resíduos produzidos a) pela camada $\ell = 0$; b) pelas camadas $\ell = 0, 1, 2, 3$; c) pelas camadas $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ usando o algoritmo *multi-camadas*.

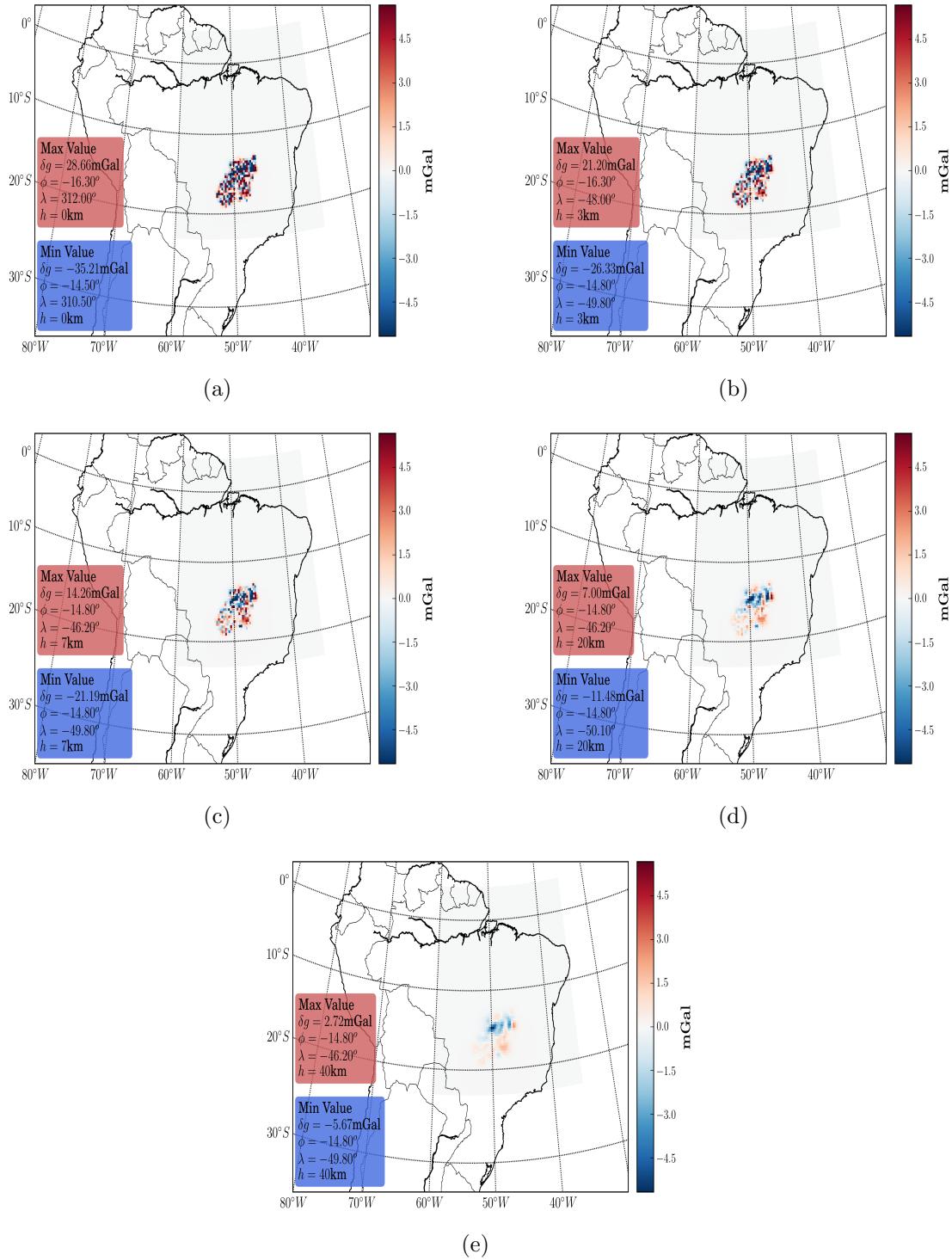


Figura 4.33: Aplicação a dados reais. Efeito gravitacional produzido pela camada de pontos de massa estimada com o algoritmo *multi-camadas* a) na superfície da Terra; e nas altitudes de b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km.

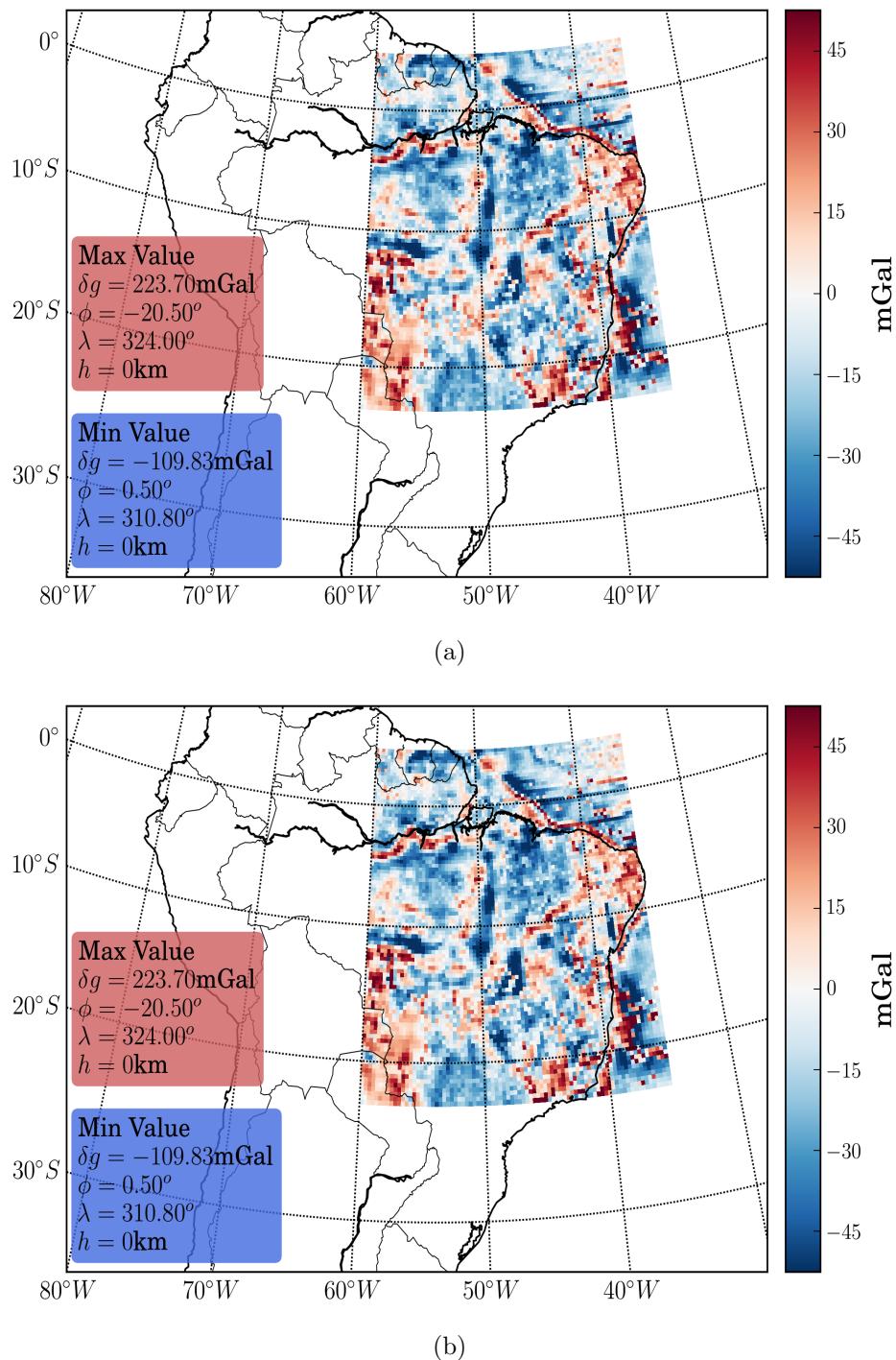


Figura 4.34: Aplicação a dados reais. Comparaçāo entre os dados do a) modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 e b) os dados preditos pela sua soma com o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados observados na superfície da Terra, obtidos pela abordagem *multi-camadas*.

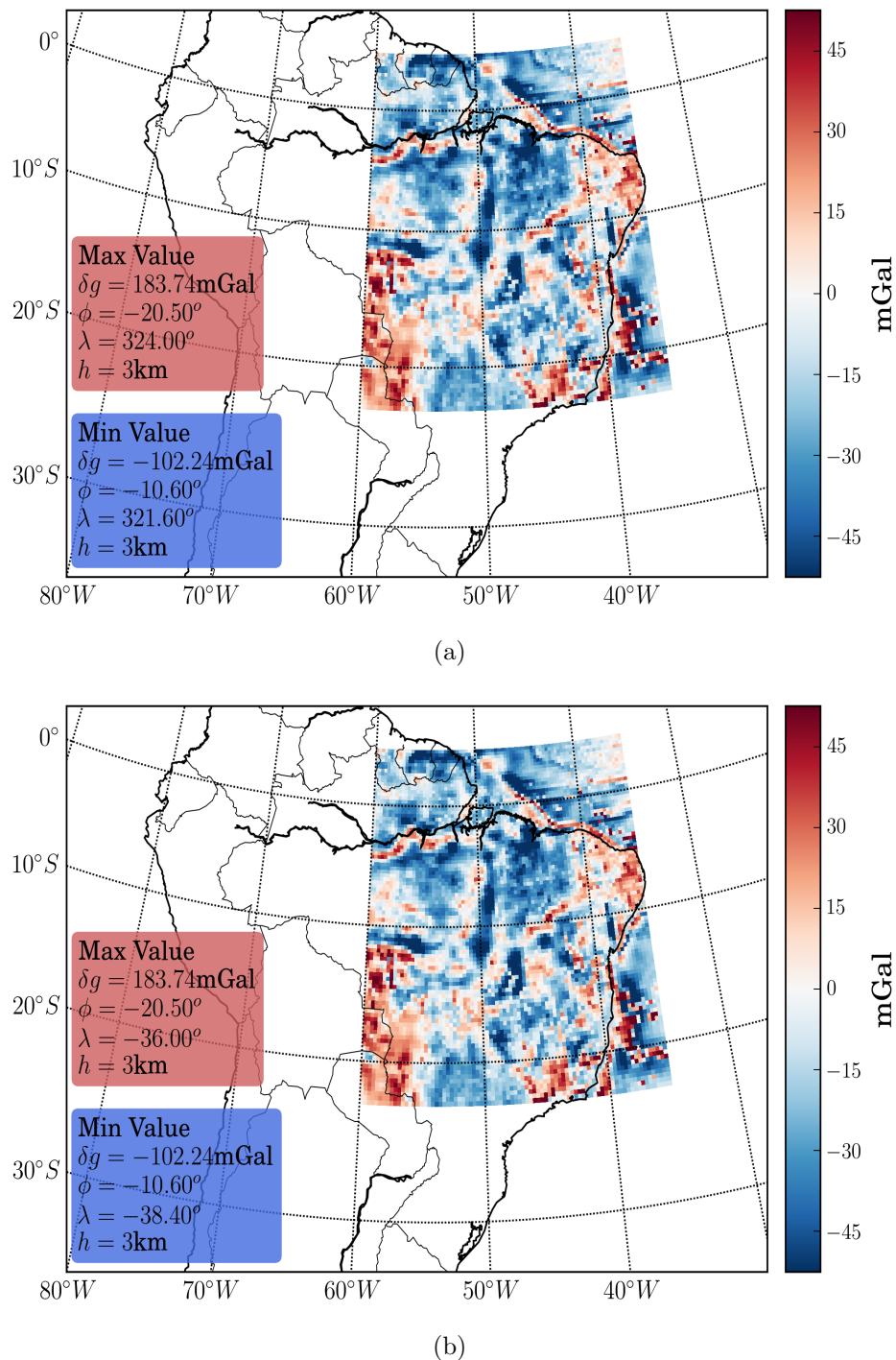


Figura 4.35: Aplicação a dados reais. Comparaçāo entre os dados do a) modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 e b) os dados preditos pela sua soma com o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados observados à altitude de 3 km, obtidos pela abordagem *multi-camadas*.

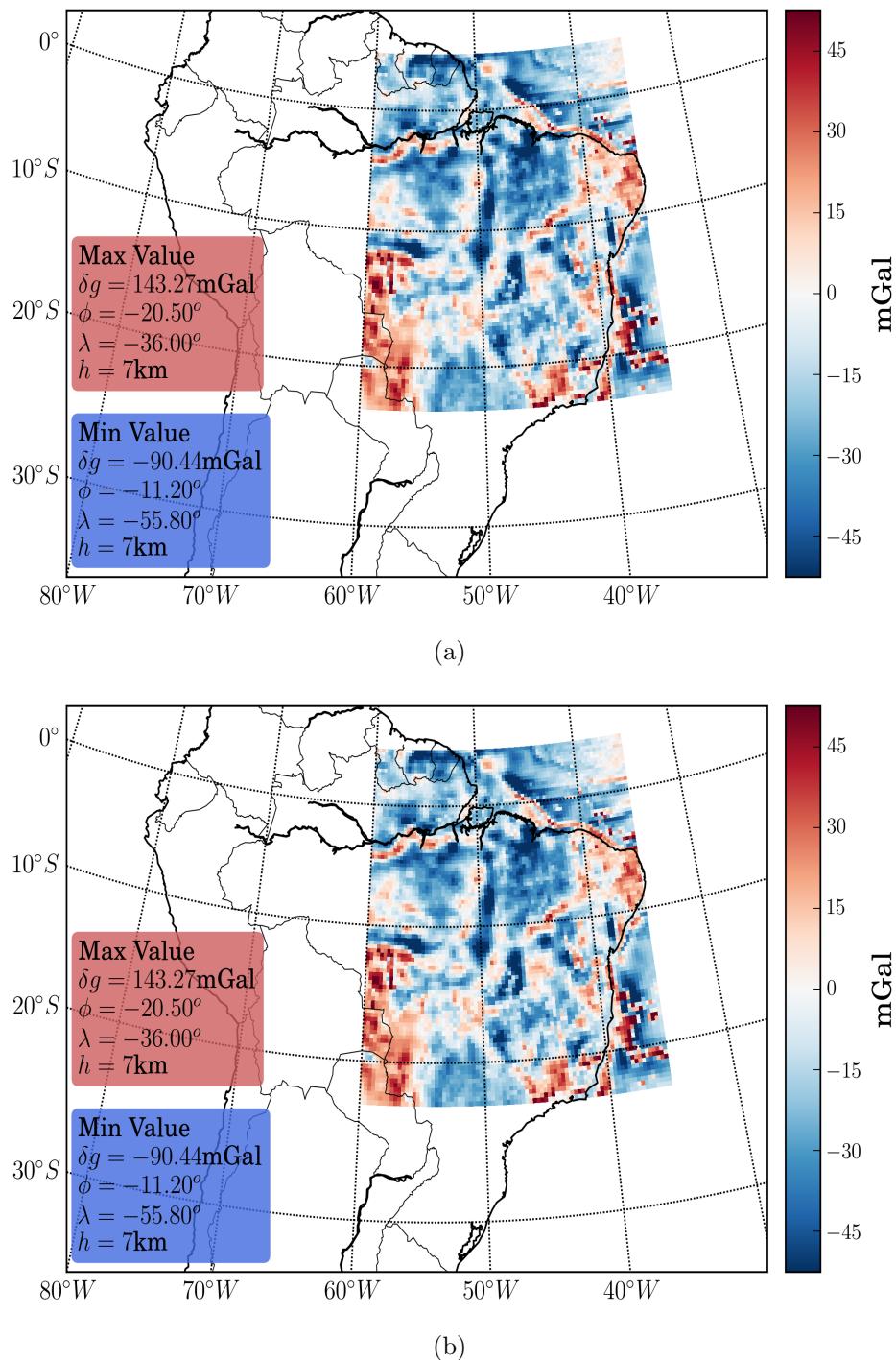


Figura 4.36: Aplicação a dados reais. Comparaçāo entre os dados do a) modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 e b) os dados preditos pela sua soma com o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados observados à altitude de 7 km, obtidos pela abordagem *multi-camadas*.

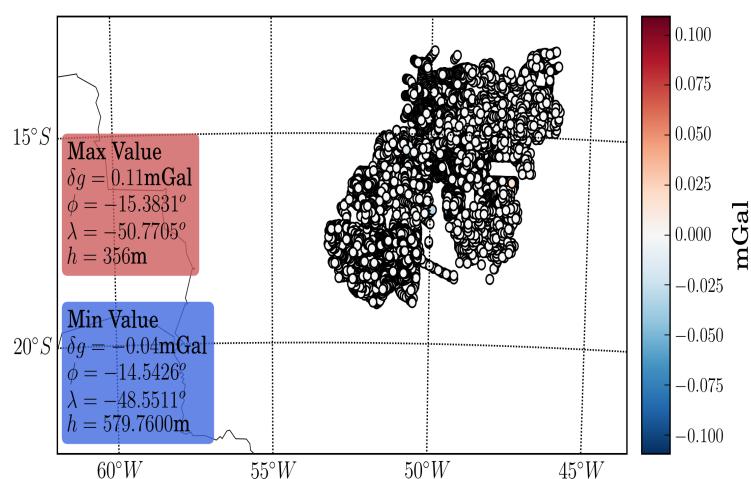


Figura 4.37: Aplicação a dados reais. Resíduos produzidos pela camada única usando o algoritmo *robusto* após 3 iterações.

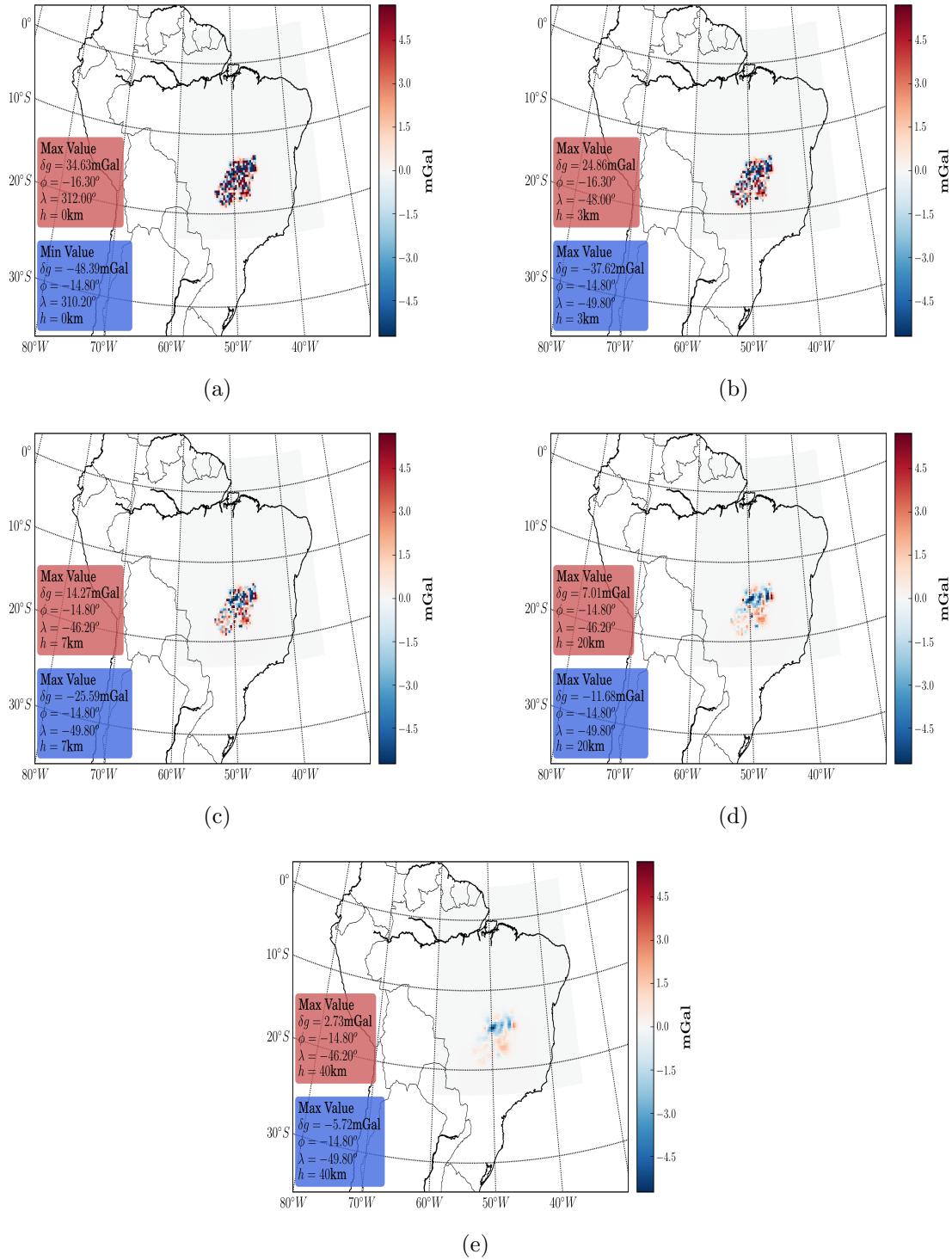


Figura 4.38: Aplicação a dados reais. Efeito gravitacional produzido pela camada de pontos de massa estimada com o algoritmo *robusto* a) na superfície da Terra; e nas altitudes de b) 3 km; c) 7 km; d) 20 km; e) 40 km.

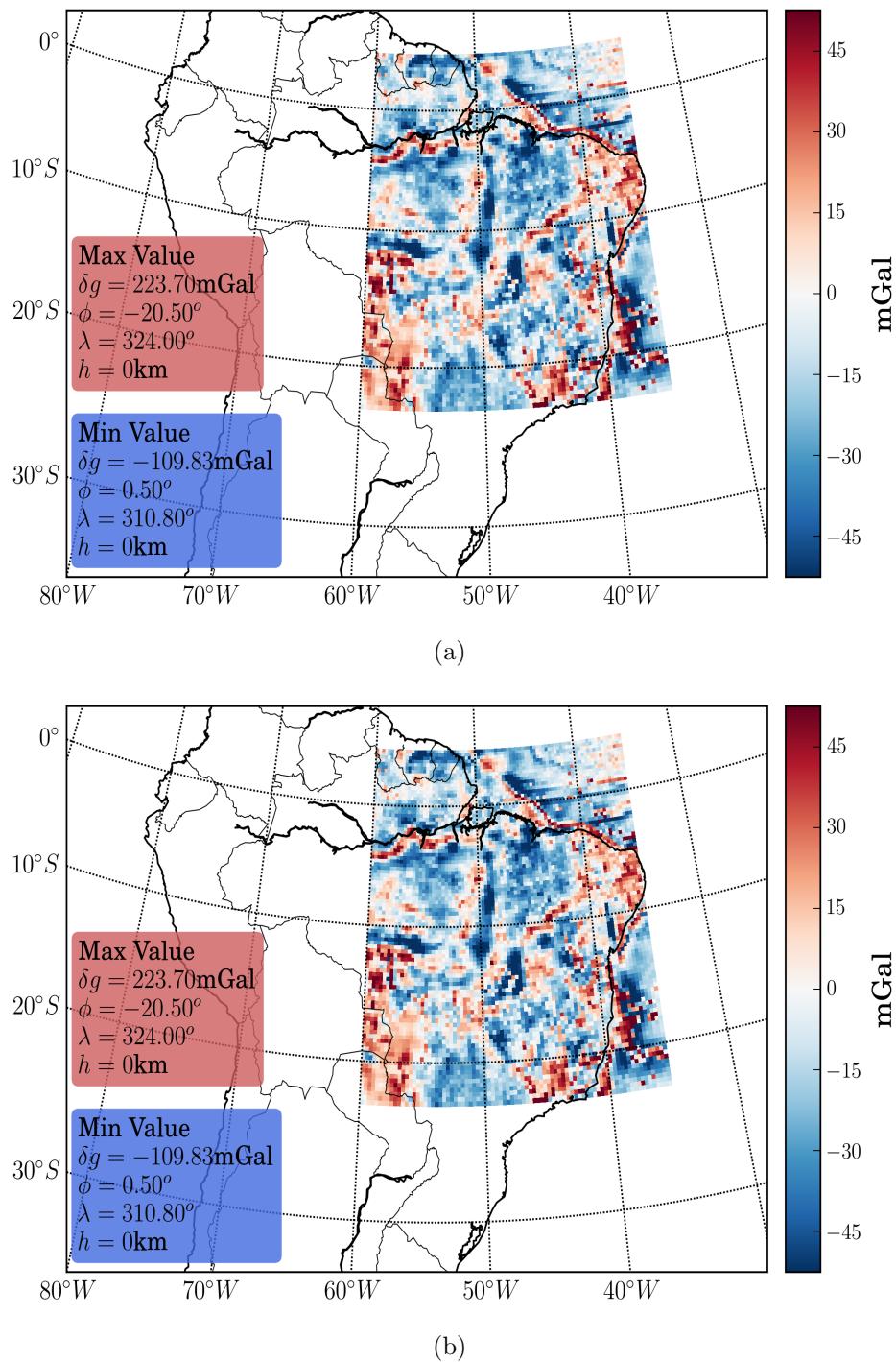


Figura 4.39: Aplicação a dados reais. Comparaçāo entre os dados do a) modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 e b) os dados preditos pela sua soma com o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados observados na superfície da Terra.

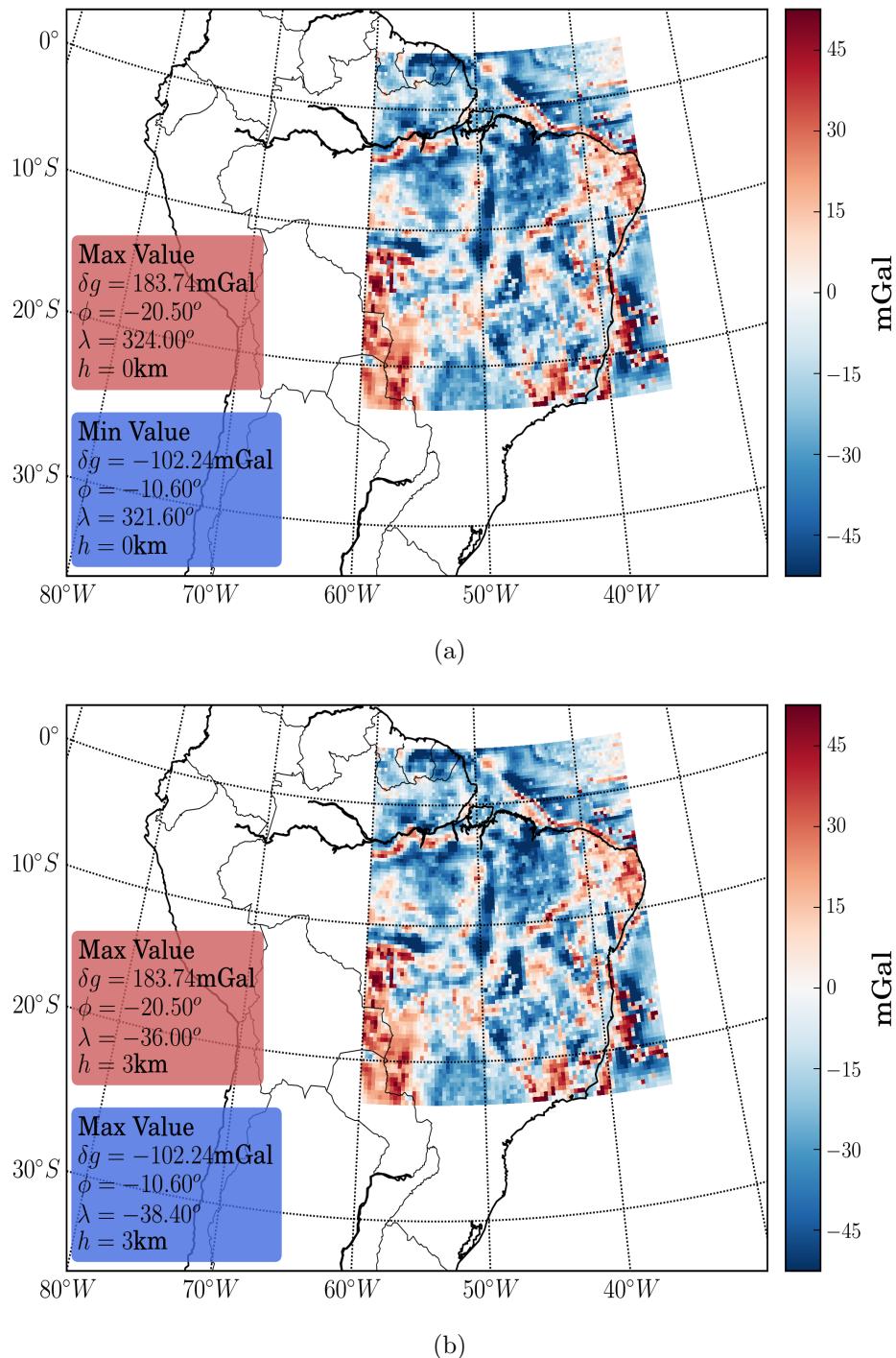


Figura 4.40: Aplicação a dados reais. Comparaçao entre os dados do a) modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 e b) os dados preditos pela sua soma com o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados observados à altitude de 3 km.

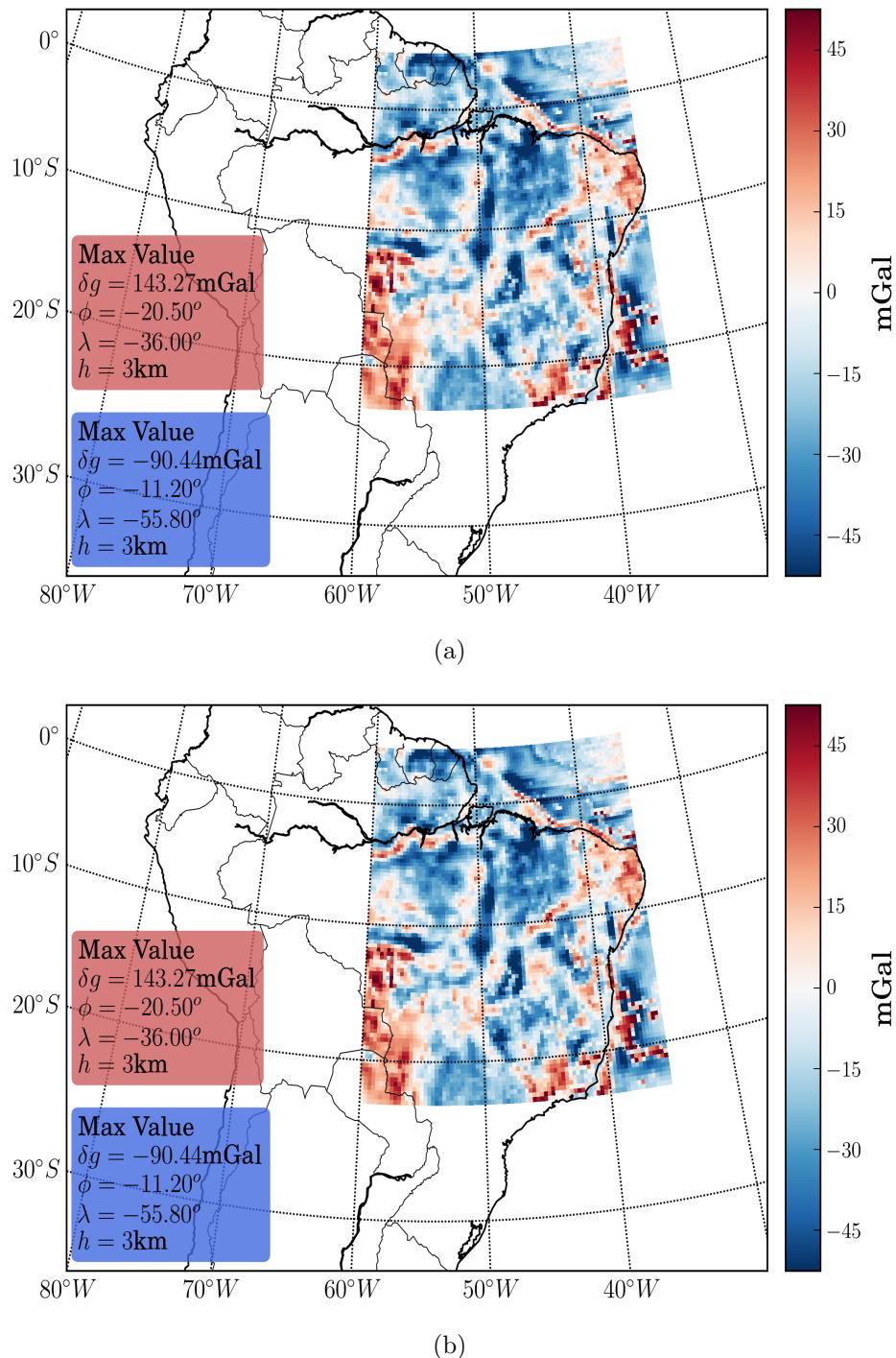


Figura 4.41: Aplicação a dados reais. Comparaçāo entre os dados do a) modelo global EIGEN-6C4 expandido até grau e ordem 2190 e b) os dados preditos pela sua soma com o efeito gravitacional dos pontos de massa estimados observados à altitude de 7 km.

Capítulo 5

Conclusões

O estudo desta tese apresentou novas estratégias para a representação regional do campo de gravidade pela técnica dos pontos de massa. Convencionalmente, os métodos apresentados na literatura, sejam usando os pontos de massa, sejam usando outros kernels como multipolos ou wavelets, por exemplo, utilizam outros sistemas de coordenadas na representação do campo de gravidade. A técnica de pontos de massa desta tese foi empregada segundo o sistema de coordenadas geodésicas. A primeira abordagem consiste em minimizar a norma L2 dos resíduos, utilizando várias camadas de pontos de massa em que cada uma foi posicionada em diferentes profundidades. A segunda abordagem, por sua vez, sugere um novo modo de estimar o vetor de parâmetros, minimizando a norma L1 dos resíduos de uma única camada.

Os resultados mostram que as duas abordagens são capazes de recuperar os sinais de curto comprimento de onda. A abordagem *robusta* superou a *multi-camadas* quanto a precisão dos ajustes. Ela demonstrou que ao final do processo foi obtido um número menor de resíduos acima da precisão desejada, assim como o intervalo definido pelo máximo e mínimo destes valores também foi inferior ao da abordagem *multi-camadas*. Além disso, a norma L2 usada na abordagem multi-camadas é mais sensível a *outliers* que a norma L1 da abordagem robusta. Os resultados também mostraram que a cobertura dos dados é um fator importante na modelagem regional. Quanto mais esparsos os dados forem, menor é a resolução da inclusão de curtos comprimentos de onda no mapa do modelo global refinado.

A profundidade dos pontos de massa é de suma importância e faz parte do cálculo da matriz de sensibilidade. Poucos trabalhos encontrados na literatura usam um critério específico para encontrar a profundidade. Em sua grande maioria, os trabalhos que apresentam esses critérios funcionam apenas para o caso em que os dados estejam regularmente espaçados. Além disso, mesmo nestas condições, alguns destes critérios são empíricos e são usados sem nenhum embasamento metodológico. Neste sentido, a proposta do critério da escolha da profundidade da camada dos pontos de massa apresentado nesta tese é inovadora pois pode ser aplicada a qualquer

configuração de dados, em qualquer sistema de coordenadas, e leva em consideração apenas o condicionamento da matriz de sensibilidade associado à profundidade escondida. Esta última característica confirma a robustez do critério apresentado perante as outras técnicas existentes.

Esta tese mostrou que um conjunto de dados contendo sinais de curto comprimento de onda podem ser incluídos em um mapa global de distúrbio de gravidade usando a técnica dos pontos de massa. Isto abre uma nova fronteira de pesquisa no campo da geodésia no Brasil já que, apesar dos modelos globais como EIGEN-6C4 expandidos até grau e ordem 2190 serem bem representativos em locais com uma boa distribuição de dados, como na Europa, eles não o são aqui no Brasil. Portanto, a contribuição mais significativa que esta tese dá é no refinamento do mapa global sobre o território brasileiro. Ademais, o método apresentado possibilita atualizar este mapa incluindo sinais de curto comprimento de onda provenientes de dados adicionais. Novos pontos de massa associados a dados adicionais seriam, então, incluídos, sem que o processo anterior tenha que ser reiniciado. Desta forma, a sua inclusão não teria dependência com os pontos de massa incluídos no início do processo e, consequentemente, o efeito gravitacional adicional se somaria ao campo predito já existente.

A abordagem *multi-camadas* pode ser adaptada para que a cada nova camada se aplique o critério de escolha de profundidade, a fim de obter, também, a estimativa das profundidades das camadas posteriores. Além disso, uma outra estratégia pode ser tomada na abordagem *robusta* no sentido de reduzir os pontos de massa das iterações subsequentes, como foi feito na abordagem *multi-camadas*. Isto tornaria o algoritmo ainda mais eficiente e menos custoso computacionalmente. Essa mudança não deve alterar o desempenho do método, apenas a eficiência computacional.

Os coeficientes dos pontos de massa podem ser transformados em coeficientes da expansão em harmônicos esféricos de forma analítica. Isto permite incluir os coeficientes associados ao modelo de pontos de massa no modelo global utilizado para representar os longos comprimentos de onda do campo. Dessa forma, seria possível comparar o modelo global com o modelo refinado pela inclusão dos curtos comprimentos de onda via técnica dos pontos de massa analizando o espectro de grau e ordem dos coeficientes dos harmônicos esféricos.

A técnica de pontos de massa pode dar uma contribuição importante, também, no refinamento local da superfície geoidal. Assim como foi feito no refinamento do modelo global, o efeito gravitacional produzido pelos pontos de massa estimados pode ser usado para calcular as ondulações geoidais locais por meio da fórmula de Bruns. A soma dessa contribuição com a regional aumentaria a resolução do modelo global do geoide.

Referências Bibliográficas

- ANTUNES, C., PAIL, R., CATALÃO, J., 2003, “Point Mass Method Applied to the Regional Gravimetric Determination of the Geoid”, *Studia Geophysica et Geodaetica*, v. 47, n. 3 (Jul), pp. 495–509. ISSN: 1573-1626. doi: 10.1023/A:1024836032617. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1024836032617>>.
- ASTER, R. C., BORCHERS, B., THURBER, C. H., 2005, *Parameter Estimation and Inverse Problems (International Geophysics)*. Oxford, Academic Press. ISBN: 0120656043.
- BALMINO, G., 1972, “Representation of the Earth Potential by Buried Masses”, *Geophysical Monograph Series: The Use of Artificial Satellites for Geodesy*, v. 15.
- BARTHELMES, F., 1986, *Untersuchungen zur Approximation des äußeren Gravitationsfeldes der Erde durch Punktmassen mit optimierten Positionen*. Relatório técnico, Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde.
- BARTHELMES, F., 2013. “Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models”..
- BAUMANN, H., KLINGELÉ, E., MARSON, I., 2012, “Absolute airborne gravimetry: a feasibility study”, *Geophysical Prospecting*, v. 60, n. 2, pp. 361–372. doi: 10.1111/j.1365-2478.2011.00987.x.
- BENTEL, K., SCHMIDT, M., GERLACH, C., 2013, “Different radial basis functions and their applicability for regional gravity field representation on the sphere”, *GEM - International Journal on Geomathematics*, v. 4, n. 1 (Apr), pp. 67–96. ISSN: 1869-2680. doi: 10.1007/s13137-012-0046-1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s13137-012-0046-1>>.
- BLAKELY, R. J., 1996, *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge, Cambridge University Press. ISBN: 0521575478.

- BOUMAN, J., EBBING, J., FUCHS, M., 2013, “Reference frame transformation of satellite gravity gradients and topographic mass reduction”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 118, n. 2, pp. 759–774. ISSN: 2169-9356. doi: 10.1029/2012JB009747.
- CHAPIN, D. A., 1996, “The theory of the Bouguer gravity anomaly: A tutorial”, *The Leading Edge*, v. 15, n. 5, pp. 361–363. doi: 10.1190/1.1437341.
- CHEN, J. L., TAPLEY, B. D., WILSON, C. R., 2006, “Alaskan mountain glacial melting observed by satellite gravimetry”, *Earth and Planetary Science Letters*, v. 248, n. 1, pp. 368–378. doi: <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2006.05.039>. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012821X06004171>>.
- CHENG, M., TAPLEY, B. D., 2004, “Variations in the Earth’s oblateness during the past 28 years”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 109, n. B9. doi: 10.1029/2004JB003028. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2004JB003028>>.
- CLAESSENS, S. J., FEATHERSTONE, W. E., BARTHELMES, F., 2001, “Experiences with point-mass gravity field modeling in the Perth Region, Western Australia”, *Geomatics Research Australasia*, v. 75, pp. 53–86.
- CURTIS, A., 2004, “Theory of model-based geophysical survey and experimental design: Part 1—Linear problems”, *The Leading Edge*, v. 23, n. 10, pp. 997–1004.
- DAMPNEY, C. N. G., 1969, “The equivalent source technique”, *Geophysics*, v. 34, n. 1, pp. 39–53. doi: 10.1190/1.1439996.
- EICKER, A., 2008, *Gravity Field Refinement by Radial Basis Functions from In-situ Satellite Data*. Tese de Doutorado, Universität Bonn, Bonn.
- EMILIA, D. A., 1973, “Equivalent sources used as an analytical base for processing total magnetic field profiles”, *Geophysics*, v. 38, n. 2, pp. 339–348. doi: 10.1190/1.1440344.
- FAIRHEAD, J. D., GREEN, C. M., BLITZKOW, D., 2003, “The use of GPS in gravity surveys”, *The Leading Edge*, v. 22, n. 10, pp. 954–959. doi: 10.1190/1.1623636.
- FLECHTNER, F., DAHLE, C., NEUMAYER, K. H., et al., 2010, “The Release 04 CHAMP and GRACE EIGEN Gravity Field Models”. In: *System Earth*

- via Geodetic-Geophysical Space Techniques*, cap. 1, p. 34, Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-10228-8_4. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-10228-8_4>.
- FORSBERG, R., 1984, *A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling*. Relatório técnico, DTIC Document.
- FÖRSTE, C., SCHMIDT, R., STUBENVOLL, R., et al., 2008, “The GeoForschungZentrum Postdam/Groupe de Recherche de Geodesie Spatiale, satellite-only and combined gravity field models: EIGEN-GL04S1 and EIGEN-GL04C”, *Journal of Geodesy*, v. 82, n. 6, pp. 331–346.
- FÖRSTE, C., BRUINSMA, S., SHAKO, R., et al., 2011, “EIGEN-6 – A new combined global gravity field model including GOCE data from the collaboration of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse”. In: *ICGEM, Geophysical Research Abstracts Vol. 13*, EGU2011-3242-2, 2011, December.
- FÖRSTE, C., BRUINSMA, S., FLECHTNER, F., et al., 2013, “EIGEN-6C2: A new combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 1949 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse”. In: *EGU General Assembly Conference Abstracts*, v. 15, April.
- FÖRSTE, C., BRUINSMA, S. L., ABRIKOSOV, O., et al., 2014. “EIGEN-6C4 The Latest Combined Global Gravity Field Model Including GOCE Data up to Degree and Order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse”. <https://doi.org/10.5880/icgem.2015.1>.
- GLENNIE, C. L., SCHWARZ, K. P., BRUTON, A. M., et al., 2000, “A comparison of stable platform and strapdown airborne gravity”, *Journal of Geodesy*, v. 74, n. 5, pp. 383–389. doi: 10.1007/s001900000082.
- GOLIKOV, A. I., EVTUSHENKO, Y. G., 2015, “Regularization and normal solutions of systems of linear equations and inequalities”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, v. 289, n. 1 (Jul), pp. 102–110. ISSN: 1531-8605. doi: 10.1134/S0081543815050090. Disponível em: <<https://doi.org/10.1134/S0081543815050090>>.
- GUSPÍ, F., NOVARA, I., 2009, “Reduction to the pole and transformations of scattered magnetic data using Newtonian equivalent sources”, *Geophysics*, v. 74, n. 5, pp. L67–L73. doi: 10.1190/1.3170690.

- GUSPÍ, F., INTROCASO, A., INTROCASO, B., 2004, “Gravity-enhanced representation of measured geoid undulations using equivalent sources”, *Geophysical Journal International*, v. 159, n. 1, pp. 1–8. doi: 10.1111/j.1365-246X.2004.02364.x. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-246X.2004.02364.x>>.
- HACKNEY, R. I., FEATHERSTONE, W. E., 2003, “Geodetic versus geophysical perspectives of the gravity anomaly”, *Geophysical Journal International*, v. 154, n. 1, pp. 35–43. doi: 10.1046/j.1365-246X.2003.01941.x.
- HAMMER, S., 1945, “Estimating ore masses in gravity prospecting”, *Geophysics*, v. 10, n. 1, pp. 50–62. doi: 10.1190/1.1437147.
- HARDY, R. L., GÖPFERT, W. M., 1975, “Least squares prediction of gravity anomalies, geoidal undulations, and deflections of the vertical with multiquadric harmonic functions”, *Geophysical Research Letters*, v. 2, n. 10, pp. 423–426. doi: 10.1029/GL002i010p00423. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/GL002i010p00423>>.
- HEISKANEN, W. A., MORITZ, H., 1967, *Physical Geodesy*. San Francisco, W. H. Freeman and Company. ISBN: 978-0-7167-0233-7.
- HINZE, W. J., AIKEN, C., BROZENA, J., et al., 2005, “New standards for reducing gravity data: The North American gravity database”, *Geophysics*, v. 70, n. 4, pp. J25–J32. doi: 10.1190/1.1988183.
- HOFMANN-WELLENHOF, B., MORITZ, H., 2005, *Physical Geodesy*. Austria, Springer. ISBN: 3211235841.
- HOFMANN-WELLENHOF, B., MORITZ, H., 2006, *Physical Geodesy*. Second edition ed. Austria, Springer.
- HOLSCHNEIDER, M., CHAMBODUT, A., MANDEA, M., 2003, “From global to regional analysis of the magnetic field on the sphere using wavelet frames”, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, v. 135, n. 2, pp. 107 – 124. ISSN: 0031-9201. doi: [https://doi.org/10.1016/S0031-9201\(02\)00210-8](https://doi.org/10.1016/S0031-9201(02)00210-8). Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031920102002108>>. Magnetic Field Modelling.
- IBGE, 2015, *O novo modelo de ondulação geoidal do Brasil: MAPGEO2015*. Relatório técnico, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/geociencias-novoportal/>>

- informacoes-sobre-posicionamento-geodesico/
servicos-para-posicionamento-geodesico.html>.
- IHDE, J., SCHIRMER, U., STEFANI, F., 1998, “Geoid modelling with point masses”. In: *Proceedings of the Second Continental Workshop on the Geoid in Europe*, pp. 199–204, March.
- KARA, I., BAL, O. T., TUR, H., et al., 2014, “A new efficient method for topographic distortion correction, analytical continuation, vertical derivatives and using equivalent source technique: Application to field data”, *Journal of Applied Geophysics*, v. 106, pp. 67–76. doi: 10.1016/j.jappgeo.2014.04.011.
- KLEES, R., TENZER, R., PRUTKIN, I., et al., 2008, “A data-driven approach to local gravity field modelling using spherical radial basis functions”, *Journal of Geodesy*, v. 82, n. 8 (Aug), pp. 457–471. ISSN: 1432-1394. doi: 10.1007/s00190-007-0196-3. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00190-007-0196-3>>.
- LAFEHR, T. R., 1965, “The estimation of the total amount of anomalous mass by Gauss’s theorem”, *Journal of Geophysical Research*, v. 70, n. 8, pp. 1911–1919. doi: 10.1029/JZ070i008p01911.
- LEHMANN, R., 1993, “The method of free-positioned point masses — geoid studies on the Gulf of Bothnia”, *Bulletin géodésique*, v. 67, n. 1 (Mar), pp. 31. ISSN: 1432-1394. doi: 10.1007/BF00807295. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00807295>>.
- LEMOINE, F. G., PAVLIS, N. K., KENYON, S. C., et al., 1998, “New high-resolution model developed for Earth’s gravitational field”, *Eos, Transactions American Geophysical Union*, v. 79, n. 9, pp. 113–118. doi: 10.1029/98EO00076. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/98EO00076>>.
- LI, X., GÖTZE, H.-J., 2001, “Ellipsoid, geoid, gravity, geodesy, and geophysics”, *Geophysics*, v. 66, n. 6, pp. 1660–1668. doi: 10.1190/1.1487109.
- LIEB, V., SCHMIDT, M., DETTMERING, D., et al., 2016, “Combination of various observation techniques for regional modeling of the gravity field”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 121, n. 5, pp. 3825–3845. doi: 10.1002/2015JB012586. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/2015JB012586>>.

- LIN, M., DENKER, H., MÜLLER, J., 2014, “Regional gravity field modeling using free-positioned point masses”, *Studia Geophysica et Geodaetica*, v. 58, n. 2 (Apr), pp. 207–226. ISSN: 1573-1626. doi: 10.1007/s11200-013-1145-7. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11200-013-1145-7>>.
- LIN, M., DENKER, H., MÜLLER, J., 2016, “Regional Gravity Field Modeling by Radially Optimized Point Masses: Case Studies with Synthetic Data”. In: Rizos, C., Willis, P. (Eds.), *IAG 150 Years*, pp. 233–239, Cham, May. Springer International Publishing. ISBN: 978-3-319-30895-1.
- MARCHENKO, A. N., BARTHELMES, F., MEYER, U., et al., 2001, *Regional Geoid Determination : an application to airborne gravity data in the Skagerrak*. Relatório técnico, GFZ Potsdam, Potsdam. Disponível em: <<urn:nbn:de:kobv:b103-010085>>.
- MARTINEZ, C., LI, Y., 2016, “Denoising of gravity gradient data using equivalent source technique”, *Geophysics*, v. 81, n. 4, pp. G67–G79. doi: 10.1190/geo2015-0379.1.
- MARUSSI, A., MORITZ, H., RAPP, R. H., et al., 1974, “Ellipsoidal density models and hydrostatic equilibrium: Interim report”, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, v. 9, n. 1, pp. 4–6. ISSN: 0031-9201. doi: 10.1016/0031-9201(74)90073-9. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031920174900739>>.
- MAYER-GÜRR, T., EICKER, A., KURTENBACH, E., et al., 2010. “ITG-GRACE: Global Static and Temporal Gravity Field Models from GRACE Data”..
- MENDONÇA, C. A., 1992, *Interpolação de dados de campo potencial através da camada equivalente*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Pará, Belém do Pará, Brazil.
- NABIGHIAN, M. N., GRAUCH, V. J. S., HANSEN, R. O., et al., 2005, “Historical development of the gravity method in exploration”, *Geophysics*, v. 70, n. 6, pp. 63ND–89ND. doi: 10.1190/1.2133785.
- NEEDHAM, P. E., 1970, *The Formation and Evaluation of detailed Geopotential Models based on Point Masses*. Tese de Doutorado, Ohio State University.
- OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C., UIEDA, L., 2013, “Polynomial equivalent layer”, *Geophysics*, v. 78, n. 1, pp. G1–G13. doi: 10.1190/geo2012-0196.1.

- PAIL, R., GOIGINGER, H., REINHARD, M., et al., 2010, “GOCE gravity field model derived from orbit and gradiometry data applying the time-wise method”. In: *GOCE gravity field model derived from orbit and gradiometry data applying the time-wise method*, p. 1, June.
- PAIL, R., BRUINSMA, S., MIGLIACCIO, F., et al., 2011, “First GOCE gravity field models derived by three different approaches”, *Journal of Geodesy*, v. 85, n. 11 (Oct), pp. 819. ISSN: 1432-1394. doi: 10.1007/s00190-011-0467-x. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00190-011-0467-x>>.
- PAVLIS, N. K., HOLMES, S. A., KENYON, S. C., et al., 2012, “The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 117, n. B4. doi: 10.1029/2011JB008916. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2011JB008916>>.
- PIÑA, W. H. S., SOUSA, M. A. D., 2001, “O estado da base de dados gravimétricos do Observatório Nacional (BDG-ON) situação em junho, 2001”, *Revista Brasileira de Geofísica*, v. 19 (12), pp. 325 – 328. ISSN: 0102-261X. doi: 10.1590/S0102-261X2001000300008. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-261X2001000300008&nrm=iso>.
- RAPP, R. H., WANG, Y. M., PAVLIS, N. K., 1991, *The Ohio State 1991 Geopotential and Sea Surface Topography Harmonic Coefficient Models*. Relatório técnico, Ohio State University.
- REIGBER, C., SCHMIDT, R., FLECHTNER, F., et al., 2005, “An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE: EIGEN-GRACE02S”, *Journal of Geodynamics*, v. 39, n. 1, pp. 1 – 10. ISSN: 0264-3707. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jog.2004.07.001>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0264370704000754>>.
- REIGBER, C., LÜHR, H., GRUNWALDT, L., et al., 2006, “CHAMP Mission 5 Years in Orbit”. In: *Observation of the Earth System from Space*, pp. 3–15, Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-540-29522-8. doi: 10.1007/3-540-29522-4_1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/3-540-29522-4_1>.
- REILLY, J. P., HERBRECHTSMEIER, E. H., 1978, “A systematic approach to modeling the geopotential with point mass anomalies”, *Journal of Ge-*

- ophysical Research: Solid Earth*, v. 83, n. B2, pp. 841–844. doi: 10.1029/JB083iB02p00841. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/JB083iB02p00841>>.
- Sansò, F., Sideris, M. G. (Eds.), 2013, *Geoid Determination*, v. 110, *Lecture Notes in Earth System Sciences*. Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-540-74699-7 978-3-540-74700-0. doi: 10.1007/978-3-540-74700-0.
- SCHMIDT, M., FABERT, O., SHUM, C. K., et al., 2004, “Gravity Field Determination Using Multiresolution Techniques”. In: *GOCE, The Geoid and Oceanography*, v. 569, *ESA Special Publication*, p. 35, jun. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2004ESASP.569E..35S>>. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.
- SCHMIDT, M., FENGLER, M., MAYER-GÜRR, T., et al., 2007, “Regional gravity modeling in terms of spherical base functions”, *Journal of Geodesy*, v. 81, n. 1 (Jan), pp. 17–38. ISSN: 1432-1394. doi: 10.1007/s00190-006-0101-5. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00190-006-0101-5>>.
- SIQUEIRA, F. C. L., JR., V. C. O., BARBOSA, V. C. F., 2017, “Fast iterative equivalent-layer technique for gravity data processing: A method grounded on excess mass constraint”, *Geophysics*, v. 82, n. 4, pp. G57–G69. doi: 10.1190/geo2016-0332.1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/geo2016-0332.1>>.
- SOLER, T., 1976, *On differential transformations between Cartesian and curvilinear (geodetic) coordinates*. Relatório técnico, Ohio State University.
- STRANG, G., 1990, *Linear Algebra and its applications*, *Third Edition*. Massachusetts, Thomson Learning.
- TAPLEY, B. D., RIES, J., BETTADPUR, S., et al., 2007, “The GGM03 mean Earth gravity model from GRACE”. In: *Americal Geophysical Union, G42A-03*, December.
- TIKHONOV, A. N., ARSENIN, V. Y., 1977, *Solutions to ill-posed problems*. SIAM, V. H. Winston & Sons. ISBN: 0470991240.
- TORGE, W., MÜLLER, J., 2012, *Geodesy*. 4 ed. Berlin/Boston, Walter de Gruyter. ISBN: 978-3-11-020718-7.

- VAJDA, P., VANÍČEK, P., NOVÁK, P., et al., 2004, “On evaluation of Newton integrals in geodetic coordinates: Exact formulation and spherical approximation”, *Contributions to Geophysics and Geodesy*, v. 34, n. 4, pp. 289–314. ISSN: 13352806.
- VAJDA, P., VANÍČEK, P., MEURERS, B., 2006, “A new physical foundation for anomalous gravity”, *Studia Geophysica et Geodaetica*, v. 50, n. 2 (Apr), pp. 189–216. ISSN: 1573-1626. doi: 10.1007/s11200-006-0012-1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11200-006-0012-1>>.
- VAJDA, P., VANÍČEK, P., NOVÁK, P., et al., 2007, “Secondary indirect effects in gravity anomaly data inversion or interpretation”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 112, n. B6. doi: 10.1029/2006JB004470. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2006JB004470>>.
- VAJDA, P., ELLMANN, A., MEURERS, B., et al., 2008, “Global ellipsoid-referenced topographic, bathymetric and stripping corrections to gravity disturbance”, *Studia Geophysica et Geodaetica*, v. 52, n. 1 (Oct), pp. 19. ISSN: 1573-1626. doi: 10.1007/s11200-008-0003-5. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11200-008-0003-5>>.
- VANÍČEK, P., KRAKIWSKY, E. J., 1987, *Geodesy: The Concepts, Second Edition*. Canada, Elsevier Science. ISBN: 0444877770.
- VERMEER, M., 1985, *Geoid Studies on Finland and the Baltic*. Relatório técnico, University of Helsinki, Helsinki. Prepared for the Section of Mathematics and Natural Sciences of the Philosophical Faculty of the University of Helsinki.
- VON FRESE, R. R. B., HINZE, W. J., BRAILE, L. W., 1981, “Spherical earth gravity and magnetic anomaly analysis by equivalent point source inversion”, *Earth and Planetary Science Letters*, v. 53, n. 1, pp. 69–83. doi: 10.1016/0012-821X(81)90027-3.
- WEIGHTMAN, J. A., 1967, “Gravity, geodesy, and artificial satellites: A unified analytical approach”. In: *The Use of Artificial Satellites for Geodesy*, v. 2, pp. 467–486. G. Veis, April.