

**DESENVOLVIMENTOS TEÓRICOS DA CAMADA EQUIVALENTE E SUAS
APLICAÇÕES A DADOS MAGNÉTICOS**

André Luis Albuquerque dos Reis

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Geofísica do Observatório Nacional, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Orientador(a): Dr. Vanderlei Coelho de Oliveira Junior

Co-orientador(a): Dra. Valéria Cristina Ferreira Barbosa

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2020

"DESENVOLVIMENTOS TEÓRICOS DA CAMADA EQUIVALENTE E SUAS
APLICAÇÕES A DADOS MAGNÉTICOS"

ANDRÉ LUIS ALBUQUERQUE DOS REIS

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM GEOFÍSICA.

Aprovada por:


Dr. Vanderlei Coelho de Oliveira Junior – ON/MCTIC
(Orientador)


Dra. Valeria Cristina Ferreira Barbosa – ON/MCTIC
(Coorientadora)


Dr. Cosme Ferreira da Ponte Neto – ON/MCTIC


Dr. Jefferson Ferraz Damasceno Felix Araújo - PUC-RIO


Dr. Ricardo Ivan Ferreira da Trindade IAG /USP

RIO DE JANEIRO – BRASIL

03 DE FEVEREIRO DE 2020

Resumo da Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Observatório Nacional como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Geofísica.

DESENVOLVIMENTOS TEÓRICOS DA CAMADA EQUIVALENTE E SUAS APLICAÇÕES A DADOS MAGNÉTICOS

André Luis Albuquerque dos Reis

Fevereiro/2020

Nesta tese, apresento dois resultados teóricos e as respectivas aplicações da camada equivalente no processamento e interpretação de dados magnéticos. No primeiro deles, mostro que há uma única camada plana e contínua de dipolos, com uma determinada direção de magnetização uniforme, capaz de reproduzir, simultaneamente, as três componentes do campo de indução magnética produzido por um conjunto arbitrário de fontes. Esta propriedade é válida independentemente se a direção de magnetização na camada é igual a das fontes ou não. A partir deste resultado teórico, mostro que é possível usar uma camada plana de dipolos com direção de magnetização uniforme e arbitrária para estimar as três componentes do campo de indução magnética produzido por um conjunto arbitrário de fontes via inversão linear de dados de uma única componente. Resultados com dados sintéticos produzidos por simulações numéricas e dados reais obtidos sobre uma amostra de rocha proveniente da cratera de Vredefort, África do Sul, mostram a utilidade do método no processamento de dados de microscopia magnética e na identificação de regiões com maior concentração de minerais magnéticos. No segundo desenvolvimento teórico apresentado nesta tese, mostro que a distribuição de intensidades de momento magnético sobre uma camada plana e contínua de dipolos é toda positiva se a direção de magnetização uniforme na camada é igual àquela das fontes verdadeiras. Usando esta propriedade de positividade, apresento um método iterativo para estimar a direção de magnetização uniforme de um conjunto de fontes 3D a partir da inversão de dados de anomalia de campo total. A cada iteração, o método resolve um problema inverso linear para estimar uma distribuição de intensidades de momento magnético positiva e um problema inverso não-linear para estimar a direção de magnetização sobre uma camada plana de dipolos. Ao final do processo, a direção de magnetização uniforme das fontes equivalentes se aproxima daquela

das fontes verdadeiras. Testes com dados produzidos por modelos que simulam diferentes cenários geológicos mostram que o método pode ser uma ferramenta poderosa para estimar a direção de magnetização uniforme de um conjunto de fontes geológicas. Aplicações a dados de aerolevantamento sobre o complexo de Montes Claros de Goiás, localizado na província alcalina de Goiás, região central do Brasil, sugerem que estas intrusões possuem intensa magnetização remanente, o que está em acordo com um estudo independente conduzido previamente na mesma área.

Abstract of the Thesis presented to the National Observatory's Graduate Program in Geophysics as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Geophysics.

THEORETICAL DEVELOPMENTS OF EQUIVALENT LAYER AND ITS APPLICATIONS TO MAGNETIC DATA

André Luis Albuquerque dos Reis

February/2020

In this thesis, I present two theoretical results and the applications of the equivalent layer for processing and interpreting magnetic data. In the first one, I show that there is a unique planar and continuous layer of dipoles, with a given uniform magnetization direction, that is able to reproduce, simultaneously, the three components of the magnetic induction field produced by an arbitrary set of sources. This property holds true regardless of whether the magnetization direction of the layer is equal to the that of the sources or not. From this theoretical result, I show that it is possible to use a planar layer of dipoles with uniform and arbitrary magnetization direction to estimate the three components of the magnetic induction field produced by an arbitrary set of sources via linear inversion of single component data. Results with synthetic data produced by numerical simulations and real data obtained on a rock sample from the Vredefort impact crater, South Africa, show the utility of the method in the processing of magnetic microscopy data and identification of regions with largest concentrations of magnetic minerals. In the second theoretical development presented in this thesis, I show that the magnetic moment intensity distribution on a planar and continuous layer of dipoles is all positive if the uniform magnetization direction of the layer is equal to that of the true sources. Using this positivity property, I present an iterative method for estimating the uniform magnetization direction of a set of 3D sources by inverting total-field anomaly data. At each iteration, the method solves a linear inverse problem to estimate a positive magnetic moment intensity distribution and a non-linear inverse problem to estimate the magnetization direction on a planar layer of dipoles. At the end of the iterative process, the uniform magnetization direction of the equivalent sources approximates that of the true sources. Tests with data produced by models simulating different geological scenarios show that the method can be a powerful tool

for estimating the uniform magnetization direction of a set of geological sources. Applications to airborne data over the Montes Claros de Goiás complex, located in the Goiás Alkaline Province, central region of Brazil, suggest that those intrusions have a strong remanent magnetization, in agreement with a previous independent study in the same area.

Sumário

Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
2 Fundamentação e desenvolvimentos teóricos	5
2.1 Campo de indução magnética	5
2.2 Camada equivalente magnética	6
2.3 Consequências das Leis de Gauss e Ampère	7
2.4 Distribuição de momentos positiva	10
3 Metodologia	17
3.1 Estimativa das componentes e da amplitude do campo magnético	17
3.1.1 Parametrização e problema direto	17
3.1.2 Problema inverso	19
3.2 Estimativa da direção de magnetização	20
3.2.1 Parametrização e problema direto	20
3.2.2 Problema inverso	22
3.2.3 Processo iterativo para a estimar a direção de magnetização	24
3.2.4 Limitação para o caso de fontes magnetizadas verticalmente	25
3.3 Profundidade da camada (\mathbf{z}_c) e parâmetro de regularização (μ)	26
4 Simulações numéricas do desenvolvimento I	27
4.1 Amostra simples	27
4.1.1 Camada equivalente com a mesma direção de magnetização da amostra	29
4.1.2 Camada equivalente com direção de magnetização diferente da amostra	32
4.2 Amostra com heterogeneidades	35
4.2.1 Camada equivalente com a mesma direção de magnetização da amostra	35
4.2.2 Camada equivalente com direção de magnetização diferente da amostra	37

5 Aplicação a dados da amostra de Vredefort	43
6 Simulações numéricas do desenvolvimento II	46
6.1 Fontes de mesma direção de magnetização	47
6.2 Magnetização unidirecional com fonte rasa	50
6.3 Fonte rasa com direção de magnetização diferente	53
7 Aplicação a dados de Montes Claros de Goiás	56
8 Conclusões	61
Referências Bibliográficas	63

Listas de Figuras

2.1 Representação 2D da superfície utilizada para aplicar as identidades de Green. A superfície é formada por uma semi-esfera (linha traçejada) com raio infinito e o plano $z = z_c$ contendo a camada equivalente. Os pontos (x, y, z) (ponto fechado) e (x, y, z_s) (ponto aberto) são posicionados simetricamente com respeito ao plano $z = z_c$ e definidos como $z = z_c - \Delta z$ e $z = z_c + \Delta z$, respectivamente.	16
3.1 Representação esquemática da camada equivalente para a componente α do campo de indução magnética. A camada é posicionada sobre o plano horizontal $z = z_c$. $B_i^\alpha(\mathbf{p})$ é a componente α predita (equação 3.1) no ponto (x_i, y_i, z_i) pelo conjunto de M fontes equivalentes (pontos pretos). Cada fonte é localizada em um ponto (x_j, y_j, z_c) , $j = 1, \dots, M$, e é representada por um dipolo de volume unitário v_j com direção de magnetização $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q})$ e momento magnético p_j	19
3.2 Representação esquemática da camada equivalente para a anomalia de campo total. A camada é posicionada sobre o plano horizontal a uma profundidade $z = z_c$. $\Delta T_i(\mathbf{s})$ é a anomalia de campo total predita (equação 3.8) no ponto (x_i, y_i, z_i) produzida pelo conjunto de M fontes equivalentes (pontos pretos). Cada fonte é localizada no ponto (x_j, y_j, z_c) , $j = 1, \dots, M$, e são representadas por um dipolo de volume unitário v_j com direção de magnetização $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q})$ e momento magnético p_j . $\hat{\mathbf{u}}_0 \equiv \hat{\mathbf{u}}(I_0, D_0)$ é um vetor unitário na direção do campo principal.	22
4.1 Aplicação a dados sintéticos para amostra homogeneamente magnetizada. Componente vertical do campo magnético observado contaminada com ruído Gaussiano de média zero e desvio padrão 20 nT. A direção de magnetização é igual a 20° para a inclinação e 30° para a declinação. A distância sensor-amostra igual a $150 \mu\text{m}$	28

4.2 Aplicação a dados sintéticos para a amostra homogênea com a mesma direção de magnetização da camada equivalente. (a) Componente vertical observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.	29
4.3 Aplicação a dados sintéticos para a amostra homogênea com a mesma direção de magnetização da camada equivalente. (a) Componente vertical predita pela camada. (b) Componente x do campo magnético predita pela camada. (c) Componente y do campo magnético predita pela camada. (d) Amplitude do campo magnético calculado através da equação 3.7.	30
4.4 Aplicação a dados sintéticos para a amostra homogênea com a mesma direção de magnetização da camada equivalente. (a),(e) e (i) Componentes x , y e a amplitude verdadeiras do campo magnético, respectivamente. (b), (f) e (j) Componentes x , y e a amplitude do campo magnético preditas pela camada equivalente, respectivamente. (c), (g) e (k) Mapas dos resíduos. (d), (h) e (l) Histograma dos resíduos. .	31
4.5 Aplicação a dados sintéticos para a amostra homogênea com direção de magnetização diferente da camada equivalente. (a) Componente vertical observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.	32
4.6 Aplicação a dados sintéticos para a amostra homogênea com direção de magnetização diferente da camada equivalente. (a) Componente vertical predita pela camada. (b) Componente x do campo magnético predita pela camada. (c) Componente y do campo magnético predita pela camada. (d) Amplitude do campo magnético calculado através da equação 3.7.	33
4.7 Aplicação a dados sintéticos para a amostra homogênea com direção de magnetização diferente da camada equivalente. (a),(e) e (i) Componentes x , y e a amplitude verdadeiras do campo magnético, respectivamente. (b), (f) e (j) Componentes x , y e a amplitude do campo magnético preditas pela camada equivalente, respectivamente. (c), (g) e (k) Mapas dos resíduos. (d), (h) e (l) Histograma dos resíduos. .	34
4.8 Componente vertical do campo magnético observado contaminada com ruído Gaussiano de média zero e desvio padrão 20 nT para a amostra heterogênea. A direção de magnetização é igual a 90° para a inclinação e 0° para a declinação. A distância sensor-amostra igual a $138\ \mu\text{m}$	36

4.9 Aplicação a dados sintéticos para a amostra heterogênea com a mesma direção de magnetização da camada equivalente. (a) Componente vertical observada (mesmos dados mostrados na Figura 4.8). (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.	37
4.10 Aplicação a dados sintéticos para a amostra heterogênea com a mesma direção de magnetização da camada equivalente. (a) Componente vertical predita pela camada. (b) Componente x do campo magnético predita pela camada. (c) Componente y do campo magnético predita pela camada. (d) Amplitude do campo magnético calculado através da equação 3.7.	38
4.11 Aplicação a dados sintéticos para a amostra heterogênea com a mesma direção de magnetização da camada equivalente. (a),(e) e (i) Componentes x , y e a amplitude verdadeiras do campo magnético, respectivamente. (b), (f) e (j) Componentes x , y e a amplitude do campo magnético preditas pela camada equivalente, respectivamente. (c), (g) e (k) Mapas dos resíduos. (d), (h) e (l) Histograma dos resíduos. .	39
4.12 Aplicação a dados sintéticos para a amostra heterogênea com direção de magnetização diferente da camada equivalente. (a) Componente vertical observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.	40
4.13 Aplicação a dados sintéticos para a amostra heterogênea com direção de magnetização diferente da camada equivalente. (a) Componente vertical predita pela camada. (b) Componente x do campo magnético predita pela camada. (c) Componente y do campo magnético predita pela camada. (d) Amplitude do campo magnético calculado através da equação 3.7.	41
4.14 Aplicação a dados sintéticos para a amostra heterogênea com direção de magnetização diferente da camada equivalente. (a),(e) e (i) Componentes x , y e a amplitude verdadeiras do campo magnético, respectivamente. (b), (f) e (j) Componentes x , y e a amplitude do campo magnético preditas pela camada equivalente, respectivamente. (c), (g) e (k) Mapas dos resíduos. (d), (h) e (l) Histograma dos resíduos. .	42
5.1 Aplicação a dados de laboratório para a amostra de Vredefort (ARAUJO <i>et al.</i> , 2019a). (a) Componente vertical observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.	44

5.2 Aplicação a dados de laboratório para a amostra de Vredefort (ARAUJO <i>et al.</i> , 2019a). (a) Componente vertical predita pela camada. (b) Componente x do campo magnético predita pela camada. (c) Com- ponente y do campo magnético predita pela camada. (d) Amplitude do campo magnético calculado através da equação 3.7.	45
6.1 Aplicação a dados sintéticos para múltiplas fontes com a mesma direção de magnetização. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.	47
6.2 Distribuição de momentos magnéticos positiva para a aplicação a da- dos sintéticos para múltiplas fontes de mesma direção de magnetização.	48
6.3 Valor da função objetivo ao longo das iterações (equação 3.12a) mos- trando a convergência do algoritmo.	49
6.4 Aplicação a dados sintéticos para múltiplos corpos com uma fonte rasa e mesma direção de magnetização. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histo- grama dos resíduos.	50
6.5 Distribuição de momentos magnéticos positiva para a aplicação a da- dos sintéticos para múltiplos corpos e uma fonte rasa com mesma direção de magnetização.	51
6.6 Valor da função objetivo ao longo das iterações (equação 3.12a) mos- trando a convergência do algoritmo.	52
6.7 Aplicação a dados sintéticos para fonte rasa com direção de magne- tização diferente. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.	53
6.8 Distribuição de momentos magnéticos positiva para a aplicação a da- dos sintéticos para múltiplos corpos e uma fonte rasa com direção de magnetização diferente.	54
6.9 Valor da função objetivo ao longo das iterações (equação 3.12a) mos- trando a convergência do algoritmo.	55
7.1 Aplicação a dados reais para o complexo de Montes Claros de Goiás. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Dados preditos produ- zido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.	57

7.2 Distribuição de momentos magnéticos positiva para a aplicação a dados reais no complexo de Montes Claros de Goiás.	58
7.3 Valor da função objetivo ao longo das iterações (equação 3.12a) mostrando a convergência do algoritmo.	59
7.4 Redução ao polo dos dados reais do complexo de Montes Claros de Goiás (Figura 7.1a) utilizando a distribuição de intensidades de momentos magnéticos estimada mostrada na Figura 7.2	60

Agradecimentos

Gostaria de dedicar primeiramente este trabalho à memória de minha querida mãe Marinete Albuquerque dos Reis. Agradeço por toda amizade, companheirismo, apoio, paciência e amor incondicional. Tenho a sorte de ser filho de uma mulher guerreira, que nos entregou todo amor e dedicação ao longo de toda a sua vida. Saudades eternas de sua risada e de seu afago nas horas que mais precisei! Amo você demais, onde quer que esteja!

Gostaria de agradecer também à meu pai Descartes, minha irmã Fernanda, meu cunhado Maicon e meu sobrinho Guilherme pelo amor e apoio incondicional. Agradeço por estarmos juntos nos momentos mais difíceis de minha vida, sem vocês isso não seria possível!

Agradeço ao meu orientador Vanderlei e a minha coorientadora Valéria por todo apoio ao longos destes anos. Todas as melhores palavras que eu pudesse colocar nesses agradecimentos seriam poucas para expressar a gratidão que tenho a vocês. Não menos importante, agradeço ao Jefferson que, além de colaborador, um grande amigo. Somente vocês sabem o quanto lutei para transpor mais este degrau na minha vida. Todas as horas de conversas foram de extrema importância para mim! Agradeço imensamente pela amizade que construímos nestes anos!

Faço aqui também um agradecimento especial a algumas pessoas que passaram pela minha vida nessa jornada: Léo (meu grande irmão), Larissa (minha grande amiga), Rodrigo Bijani, Mário Martins, Victor Carreira, Florita, Isabella, Matias, Bita e Mário. Estarão sempre em meu coração! Agradeço imensamente tudo o que fizeram por mim!

Agradeço a todos os membros do grupo de Problemas inversos em Geofísica (PINGA)!

Aos amigos da pós-graduação em Geofísica e Astronomia.

Aos membros da banca pela contribuição e revisão do meu trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

À todos os membros da COGE.

Capítulo 1

Introdução

A maioria dos métodos magnéticos requer o conhecimento da direção de magnetização, caso contrário produzem informações insatisfatórias sobre as fontes. Este fato tem impulsionado o desenvolvimento de diversas técnicas para estimar a direção de magnetização ao longo dos últimos 50 anos. As estratégias para estimar esta quantidade podem ser divididas em dois grupos principais. O primeiro grupo compreende aqueles métodos que presumem informações prévias acerca da geometria das fontes. O método iterativo apresentado por BHATTACHARYYA (1966) presume que as fontes magnéticas tem formato de prismas retangulares. EMILIA e MASSEY (1974) aproximam um monte submarino por um conjunto de prismas justapostos com direção de magnetização uniforme e intensidade variável. PARKER *et al.* (1987) aproximam a geometria de um monte submarino utilizando uma cobertura de faces triangulares e estimam a magnetização interna próxima a uma solução uniforme. MEDEIROS e SILVA (1995) apresentaram um método que estima a direção de magnetização total e a orientação espacial de uma fonte isolada que possui três planos ortogonais de simetria. RYUJI e UCHIYAMA (2005) aproximaram também um monte submarino por um conjunto de prismas justapostos, mas estimaram a direção de magnetização para cada um dos prismas. Finalmente, OLIVEIRA JR *et al.* (2015) aproximam as fontes magnéticas por corpos esféricos de centros conhecidos e estimam suas direções de magnetização. O segundo grupo é formado pelos métodos que não presumem informações sobre a geometria das fontes. FEDI *et al.* (1994), por exemplo, propuseram um método que determina a melhor direção de magnetização dentre um conjunto de tentativas usadas para realizar sucessivas reduções ao polo no domínio de Fourier. PHILLIPS (2005) utilizaram integrais de Helbig para estimar as componentes do vetor de momento magnético. TONTINI e PEDERSEN (2008) estenderam o método de Phillips utilizando as mesmas integrais de Helbig para estimar a direção de magnetização e sua magnitude, e fornecendo informações sobre a posição do centro de distribuição de magnetização. LELIÈVRE e OLDENBURG (2009) desenvolveram um método para estimar a direção de mag-

netização em cenários geológicos complexos. Este método aproxima a subsuperfície por um grid de prismas justapostos e estima as componentes do vetor magnetização para cada prisma. Além destes métodos, existem aqueles que são baseados na correlação de quantidades potenciais (e.g., DANNEMILLER e LI, 2006; GEROVSKA *et al.*, 2009; LIU *et al.*, 2015; ZHANG *et al.*, 2018).

Estimar a direção de magnetização é extremamente importante não só para interpretação, mas também para o processamento de anomalia de campo total. Uma técnica no domínio do espaço comumente utilizada para esta finalidade é a camada equivalente. Esta técnica foi introduzida na geofísica de exploração por DAMPNEY (1969) e EMILIA e MASSEY (1974) para o processamento de dados gravimétricos e magnéticos, respectivamente. Após estes trabalhos pioneiros, esta técnica tem sido utilizada para realizar interpolação (BARNES e LUMLEY, 2011; CORDELL, 1992; MENDONÇA e SILVA, 1994; SIQUEIRA *et al.*, 2017), continuação para cima (ou para baixo) (HANSEN e MIYAZAKI, 1984; LI e OLDENBURG, 2010), redução ao polo (GUSPÍ e NOVARA, 2009; LEÃO e SILVA, 1989; OLIVEIRA JR. *et al.*, 2013; SILVA, 1986), calcular a amplitude do campo anômalo (LI e LI, 2014) e para filtrar ruídos de dados de gradiometria (MARTINEZ e LI, 2016). A técnica da camada equivalente consiste em aproximar um conjunto de dados observados por dados produzidos por uma camada composta de fontes discretas (e.g., prismas, dipolos ou pontos de massa), que são comumente conhecidas como fontes equivalentes. Os dados produzidos por esta camada fictícia (a camada equivalente) são chamados de dados preditos.

Em microscopia magnética, a técnica da camada equivalente é geralmente utilizada para a interpretação da distribuição de momentos magnéticos em uma lâmina de rocha. Note que, neste caso, a camada equivalente se assemelha a fonte verdadeira (a lâmina de rocha). WEISS *et al.* (2007) apresentou um dos primeiros trabalhos utilizando a camada equivalente em microscopia magnética. Os autores apontaram que a distribuição de magnetização é inteiramente positiva se a direção de magnetização das fontes equivalentes é igual a direção utilizada para uma amostra de rocha magnetizada artificialmente. BARATCHART *et al.* (2013) mostraram matematicamente que, assumindo uma direção de magnetização uniforme, o problema inverso para estimar a distribuição de momentos magnéticos é único. LIMA *et al.* (2013) propuseram um método no domínio da frequência para investigar soluções tendo a direção de magnetização uniforme iguais a das lâminas de rocha. Eles mostraram empiricamente que, neste caso, a distribuição de momentos magnéticos na camada é inteiramente positiva. Em geofísica de exploração, a camada equivalente é predominantemente utilizada para o processamento de dados potenciais. Neste sentido, não existe relação entre a distribuição de propriedade física estimada sobre a camada equivalente e as fontes geológicas verdadeiras. Poucos autores tem direcionado o

uso da camada equivalente para a interpretação de fontes geológicas. PEDERSEN (1991), por exemplo, discutiu a relação entre o campo potencial e a fonte equivalente. MEDEIROS e SILVA (1996) e SILVA *et al.* (2010) estimaram um mapa de magnetização aparente sobre a camada utilizando regularizações de Tikhonov e entrópica, respectivamente. SIQUEIRA *et al.* (2017) estabeleceu a relação entre o excesso de massa estimado sobre a camada e o verdadeiro. LI *et al.* (2014) provaram, utilizando uma abordagem no domínio de Fourier, a existência de uma distribuição de momentos magnéticos positiva sobre a camada e utilizaram esta propriedade para contornar o problema de instabilidade em baixas latitudes. No entanto, estes autores consideraram somente um caso particular no qual as fontes magnéticas têm magnetização puramente induzida.

Nesta tese, apresentamos dois desenvolvimentos teóricos e suas aplicações na interpretação de dados magnéticos usando a técnica da camada equivalente. O primeiro desenvolvimento teórico é fundamentado nas leis de Gauss para campo magnéticos e de Ampère. Provamos matematicamente que, dada uma direção de magnetização uniforme, existe uma única distribuição de intensidade de momentos magnéticos na camada equivalente, em uma determinada profundidade constante abaixo das observações, que é capaz de reproduzir, simultaneamente, as três componentes de um mesmo campo de indução magnética produzido por fontes magnéticas arbitrárias. Esta camada equivalente não requer o conhecimento da direção de magnetização verdadeira das fontes magnéticas. Ao contrário, a direção de magnetização da distribuição de intensidade de momentos magnéticos na camada equivalente é arbitrária, mas ela deve ser uniforme. Testes com dados sintéticos simulando amostras de rochas magnetizadas mostram que a partir de uma das componentes do campo de indução magnética conseguimos estimar as outras duas componentes deste campo sem o conhecimento da direção de magnetização verdadeira da amostra de rocha simulada. Adicionalmente, calculamos amplitude do campo de indução magnética, que é definida como a raiz quadrada da soma dos quadrados das componentes horizontais e vertical do campo magnético. Medidas da componente vertical do campo de indução magnética realizadas por um microscópio magnético de efeito Hall sobre uma amostra de rocha da cratera de Vredefort, África do Sul, possibilitaram a determinação das componentes horizontais e da amplitude do campo de indução magnética (ARAUJO *et al.*, 2019a). Estes resultados com dados de microscopia permitiram não só visualizar a estimativa da distribuição de magnetização sobre a amostra de rocha da cratera de Vredefort, como também identificar regiões com maior concentração de portadores magnéticos.

No segundo desenvolvimento teórico desta tese, provamos matematicamente que a distribuição de momentos magnéticos positiva sobre a camada equivalente existe mesmo que a magnetização das fontes verdadeiras seja remanente. Esta distribuição

positiva de momentos magnéticos ocorre se e somente se a direção de magnetização das fontes equivalentes for a mesma das fontes verdadeiras. Esta propriedade de positividade da distribuição de momentos ocorre independentemente se a magnetização das fontes verdadeiras é puramente induzida ou não. Amparado nesta propriedade de positividade, apresentamos um método iterativo vinculado que usa a técnica da camada equivalente para estimar a direção de magnetização uniforme de fontes arbitrárias invertendo dados de anomalia de campo total. Nossa método não presume qualquer informação sobre a geometria das fontes. A cada iteração, nosso método resolve (1) um problema linear para estimar uma distribuição de momentos magnéticos positiva sobre uma camada de dipolos e (2) um problema inverso não-linear para estimar a direção de magnetização uniforme das fontes equivalentes. Testes com dados sintéticos gerados por cenários geológicos diferentes mostram que a direção de magnetização estimada converge para a direção verdadeira das fontes verdadeiras. Aplicamos também nosso método a dados de campo provenientes da província alcalina de Goiás, sobre o complexo de Montes Claros, na região central do Brasil. Nossa resultado está de acordo com os resultados obtidos por (ZHANG *et al.*, 2018) para a mesma área, sugerindo a presença de magnetização remanente e mostrando a boa performance do nosso método na interpretação de cenários geológicos complexos.

Capítulo 2

Fundamentação e desenvolvimentos teóricos

2.1 Campo de indução magnética

De acordo com as leis da magnetostática, um conjunto de fontes magnéticas arbitrárias produz, na ausência de densidades de corrente, um campo de indução magnética dado por (e.g., JACKSON, 1975, p. 175, 193):

$$\mathbf{B}(x, y, z) = -\nabla \Gamma(x, y, z), \quad (2.1)$$

em que

$$\Gamma(x, y, z) = -\gamma_m \iiint_v \mathbf{m}(x', y', z') \cdot \nabla \frac{1}{r'} dv' \quad (2.2)$$

é o potencial magnético escalar, (x', y', z') representa um ponto localizado no interior do volume v das fontes,

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.3)$$

é a função inverso da distância entre um ponto (x', y', z') e um ponto (x, y, z) localizado fora das fontes e

$$\mathbf{m}(x', y', z') = \begin{bmatrix} m_x(x', y', z') \\ m_y(x', y', z') \\ m_z(x', y', z') \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

é o vetor magnetização no interior das fontes. A partir das equações acima, a componente α , $\alpha = x, y, z$ do campo de indução magnética produzido pelas fontes é

dada por

$$B_\alpha(x, y, z) = \gamma_m \iiint_v \mathbf{m}(x', y', z') \cdot \partial_\alpha \nabla \frac{1}{r'} dv', \quad \alpha = x, y, z, \quad (2.5)$$

em que $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha}$ representa a derivada parcial em relação a coordenada $\alpha = x, y, z$. Além disso, nestas condições, o campo de indução magnética $\mathbf{B}(x, y, z)$ (equação 2.1) é governado pela lei de Gauss para campos magnéticos

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(x, y, z) = \partial_x B_x(x, y, z) + \partial_y B_y(x, y, z) + \partial_z B_z(x, y, z) = 0 \quad (2.6)$$

e a lei de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_y B_z(x, y, z) - \partial_z B_y(x, y, z) \\ \partial_z B_x(x, y, z) - \partial_x B_z(x, y, z) \\ \partial_x B_y(x, y, z) - \partial_y B_x(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Usando as equações do campo de indução magnética produzido por um conjunto de fontes magnéticas arbitrárias, é possível definir uma importante quantidade utilizada em geofísica aplicada denominada a *anomalia de campo total*. Esta quantidade é comumente definida da seguinte forma (BLAKELY, 1996, p. 179):

$$\Delta T(x, y, z) = \hat{\mathbf{u}}(I_0, D_0) \cdot \mathbf{B}(x, y, z), \quad (2.8)$$

em que I_0 e D_0 são a inclinação e a declinação do campo principal na área de estudo, respectivamente, e $\hat{\mathbf{u}}(I_0, D_0)$ é um vetor unitário definido pela função vetorial

$$\hat{\mathbf{u}}(I, D) = \begin{bmatrix} \hat{u}_x(I, D) \\ \hat{u}_y(I, D) \\ \hat{u}_z(I, D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos I \cos D \\ \cos I \sin D \\ \sin I \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

para o caso particular em que $I = I_0$ e $D = D_0$.

2.2 Camada equivalente magnética

Considere uma camada contínua de dipolos definida sobre o plano $z = z_c$, com direção de magnetização uniforme definida pelo vetor unitário $\hat{\mathbf{u}}(I, D)$, com inclinação I e declinação D arbitrárias. O campo de indução magnética produzido por esta camada é dado por (e.g., HANSEN e MIYAZAKI, 1984):

$$\tilde{\mathbf{B}}(x, y, z) = -\nabla \Phi(x, y, z) \quad (2.10)$$

em que

$$\Phi(x, y, z) = -\gamma_m \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x'', y'', z_c) \hat{\mathbf{u}}(I, D) \cdot \nabla \frac{1}{r''} dS'' , \quad z_c > z , \quad (2.11)$$

é o potencial magnético escalar,

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{[(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z_c)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.12)$$

é a função inverso da distância entre um ponto (x'', y'', z_c) localizado sobre a camada e um ponto (x, y, z) localizado acima da camada ($z < z_c$). Usando as equações acima, a componente $\tilde{B}_\alpha(x, y, z)$, $\alpha = x, y, z$, do campo de indução magnética e a anomalia de campo total $\Delta\tilde{T}(x, y, z)$ produzidas pela camada de dipolos no ponto (x, y, z) são dadas respectivamente por

$$\tilde{B}_\alpha(x, y, z) = \gamma_m \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x'', y'', z_c) \hat{\mathbf{u}}(I, D) \cdot \partial_\alpha \nabla \frac{1}{r''} dS'' , \quad \alpha = x, y, z , \quad (2.13)$$

e

$$\Delta\tilde{T}(x, y, z) = \hat{\mathbf{u}}(I_0, D_0) \cdot \tilde{\mathbf{B}}(x, y, z) . \quad (2.14)$$

Esta camada de dipolos é comumente denominada *camada equivalente*.

2.3 Consequências das Leis de Gauss e Ampère

Neste primeiro desenvolvimento mostro que existe uma camada equivalente plana e contínua capaz de produzir as três componentes do campo magnético produzido por um conjunto de fontes. As equações 2.10–2.13 definem o campo de indução magnética produzido por uma camada equivalente localizada em $z = z_c$, com distribuição de intensidade de momento magnético $p(x'', y'', z_c)$ e direção de magnetização uniforme definida por $\hat{\mathbf{u}}(I, D)$ (equação 2.9). Portanto, se esta camada reproduz uma das componentes $B_\alpha(x, y, z)$ (equação 2.5) do campo de indução magnética $\mathbf{B}(x, y, z)$ (equação 2.1) produzido por um conjunto de fontes magnéticas arbitrárias em todos os pontos (x, y, z) fora das fontes e acima da camada ($z < z_c$), esta mesma camada deve, obrigatoriamente, reproduzir as outras componentes $B_\alpha(x, y, z)$ do campo produzido pelas fontes arbitrárias.

Considere três camadas equivalentes definidas na mesma coordenada vertical $z = z_c$, com distribuições de intensidade de momento magnético $p(x'', y'', z_c) \equiv p_{(\alpha)}$ e direções de magnetização uniforme definidas por $\hat{\mathbf{u}}^{(\alpha)} \equiv \hat{\mathbf{u}}(I_{(\alpha)}, D_{(\alpha)})$, com componentes Cartesianas $\hat{u}_\beta^{(\alpha)} \equiv \hat{u}_\beta(I_{(\alpha)}, D_{(\alpha)})$ (equação 2.9), em que $\alpha = x, y, z$,

$\beta = x, y, z$. Considere também, momentaneamente, que cada camada α produz a componente $\check{B}_\alpha(x, y, z)$ de um mesmo campo de indução magnética $\check{\mathbf{B}}(x, y, z)$, tal que:

$$\check{B}_\alpha(x, y, z) = \gamma_m \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{(\alpha)} \hat{\mathbf{u}}^{(\alpha)} \cdot \partial_\alpha \nabla \frac{1}{r''} dS'', \quad \alpha = x, y, z, \quad (2.15)$$

e

$$\check{\mathbf{B}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \check{B}_x(x, y, z) \\ \check{B}_y(x, y, z) \\ \check{B}_z(x, y, z) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Calculando o divergente de $\check{\mathbf{B}}(x, y, z)$ e trocando a ordem das derivadas parciais, obtemos

$$\nabla \cdot \check{\mathbf{B}}(x, y, z) = I_1 + I_2 + I_3, \quad (2.17)$$

em que os termos são integrais de superfície dadas por

$$\begin{aligned} I_1 &= \gamma_m \iint p_{(x)} \hat{u}_x^{(x)} \partial_{xxx} \frac{1}{r''} + p_{(y)} \hat{u}_x^{(y)} \partial_{yyx} \frac{1}{r''} + p_{(z)} \hat{u}_x^{(z)} \partial_{zzx} \frac{1}{r''} dS'' \\ I_2 &= \gamma_m \iint p_{(x)} \hat{u}_y^{(x)} \partial_{xxy} \frac{1}{r''} + p_{(y)} \hat{u}_y^{(y)} \partial_{yyy} \frac{1}{r''} + p_{(z)} \hat{u}_y^{(z)} \partial_{zzy} \frac{1}{r''} dS'' \\ I_3 &= \gamma_m \iint p_{(x)} \hat{u}_z^{(x)} \partial_{xxz} \frac{1}{r''} + p_{(y)} \hat{u}_z^{(y)} \partial_{yyz} \frac{1}{r''} + p_{(z)} \hat{u}_z^{(z)} \partial_{zzz} \frac{1}{r''} dS'' \end{aligned}$$

Por conveniência, os limites de integração $-\infty$ e $+\infty$ foram omitidos. Sabemos que as derivadas primeiras $\partial_\beta \frac{1}{r''}$, $\beta = x, y, z$, de $\frac{1}{r''}$ (equação 2.12) são funções harmônicas. Esta propriedade permite reescrever as integrais I_1 , I_2 e I_3 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_1 &= \gamma_m \iint [p_{(x)} \hat{u}_x^{(x)} - p_{(z)} \hat{u}_x^{(z)}] \partial_{xxx} \frac{1}{r''} + [p_{(y)} \hat{u}_x^{(y)} - p_{(z)} \hat{u}_x^{(z)}] \partial_{yyx} \frac{1}{r''} dS'' \\ I_2 &= \gamma_m \iint [p_{(x)} \hat{u}_y^{(x)} - p_{(z)} \hat{u}_y^{(z)}] \partial_{xxy} \frac{1}{r''} + [p_{(y)} \hat{u}_y^{(y)} - p_{(z)} \hat{u}_y^{(z)}] \partial_{yyy} \frac{1}{r''} dS'' \\ I_3 &= \gamma_m \iint [p_{(x)} \hat{u}_z^{(x)} - p_{(z)} \hat{u}_z^{(z)}] \partial_{xxz} \frac{1}{r''} + [p_{(y)} \hat{u}_z^{(y)} - p_{(z)} \hat{u}_z^{(z)}] \partial_{yyz} \frac{1}{r''} dS'' \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dessa forma, fica evidente que os integrandos de I_1 , I_2 e I_3 (equação 2.18) são combinações lineares de funções linearmente independentes, que são derivadas terceiras da função $\frac{1}{r''}$ (equação 2.12). Note que, para o campo de indução magnética $\check{\mathbf{B}}(x, y, z)$ (equação 2.16) respeitar a lei de Gauss (equação 2.6), é necessário que as integrais I_1 , I_2 e I_3 sejam todas nulas. Para que isso aconteça sem que as distribuições de intensidade de momento magnético $p_{(x)}$, $p_{(y)}$ e $p_{(z)}$ sejam nulas em todos

os pontos (x'', y'', z_c) , é necessário que os termos entre colchetes nos integrandos de I_1 , I_2 e I_3 sejam nulos em todos os pontos (x'', y'', z_c) . Isso, por sua vez, só é possível se as distribuições de intensidade de momento magnético e as direções de magnetização uniforme das três camadas forem iguais entre si, isto é, se $p_{(x)} = p_{(y)} = p_{(z)}$ e $\hat{\mathbf{u}}^{(x)} = \hat{\mathbf{u}}^{(y)} = \hat{\mathbf{u}}^{(z)}$. Neste caso, o campo de indução magnética produzido pela camada equivalente é descrito pelas equações 2.10–2.13.

Calculando o rotacional do campo de indução magnética $\check{\mathbf{B}}(x, y, z)$ (equação 2.16) produzido pelas três camadas e trocando a ordem das derivadas parciais, obtemos

$$\nabla \times \check{\mathbf{B}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \gamma_m \iint [p_{(z)} \hat{\mathbf{u}}^{(z)} - p_{(y)} \hat{\mathbf{u}}^{(y)}] \cdot \partial_{yz} \nabla \frac{1}{r''} dS'' \\ \gamma_m \iint [p_{(x)} \hat{\mathbf{u}}^{(x)} - p_{(z)} \hat{\mathbf{u}}^{(z)}] \cdot \partial_{xz} \nabla \frac{1}{r''} dS'' \\ \gamma_m \iint [p_{(y)} \hat{\mathbf{u}}^{(y)} - p_{(x)} \hat{\mathbf{u}}^{(x)}] \cdot \partial_{xy} \nabla \frac{1}{r''} dS'' \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Novamente, os limites de integração $-\infty$ e $+\infty$ foram omitidos por conveniência. Note que os integrandos das componentes do rotacional de $\check{\mathbf{B}}(x, y, z)$ (equação 2.19) são combinações lineares de funções linearmente independentes, que são derivadas terceiras de $\frac{1}{r''}$ (equação 2.12). Sabemos que, para o campo de indução magnética $\check{\mathbf{B}}(x, y, z)$ (equação 2.16) respeitar a lei de Ampère (equação 2.7), é necessário que as três componentes de $\nabla \times \check{\mathbf{B}}(x, y, z)$ sejam nulas. Para que isso aconteça sem que as distribuições de intensidade de momento magnético $p_{(x)}$, $p_{(y)}$ e $p_{(z)}$ sejam nulas em todos os pontos (x'', y'', z_c) , é necessário que os termos entre colchetes nos integrandos da equação 2.19 sejam nulos em todos os pontos (x'', y'', z_c) . Mais uma vez, isso só é possível se as distribuições de intensidade de momento magnético e as direções de magnetização uniforme das três camadas forem iguais entre si, isto é, se $p_{(x)} = p_{(y)} = p_{(z)}$ e $\hat{\mathbf{u}}^{(x)} = \hat{\mathbf{u}}^{(y)} = \hat{\mathbf{u}}^{(z)}$. Neste caso, o campo de indução magnética produzido pela camada equivalente é descrito pelas equações 2.10–2.13.

De acordo com estes resultados teóricos, a hipótese de que cada componente $\check{B}_\alpha(x, y, z)$ (equação 2.15), $\alpha = x, y, z$, de um mesmo campo de indução magnética $\check{\mathbf{B}}(x, y, z)$ (equação 2.16) pode ser reproduzida por uma camada equivalente diferente resulta na violação das leis de Gauss (equação 2.6) e de Ampère (equação 2.7). Isto significa que há uma única camada equivalente localizada em $z = z_c$, com uma determinada distribuição de intensidades de momento magnético $p(x'', y'', z_c)$ e uma determinada direção de magnetização uniforme $\hat{\mathbf{u}}(I, D)$ capaz de reproduzir, simultaneamente, as três componentes de um mesmo campo de indução magnética.

Considere agora a existência de uma camada equivalente localizada em $z = z_c$, com uma determinada distribuição de intensidades de momento magnético $p(x'', y'', z_c)$ e uma determinada direção de magnetização uniforme $\hat{\mathbf{u}}(I, D)$, que produz um campo de indução magnética $\tilde{\mathbf{B}}(x, y, z)$ (equação 2.10). É importante ressaltar que a direção de magnetização $\hat{\mathbf{u}}(I, D)$ na camada não precisa ter nenhum compromisso com a direção de magnetização das fontes verdadeiras. Adicionalmente,

considere que uma componente $\tilde{B}_\alpha(x, y, z)$ (equação 2.13) do campo produzido por esta camada reproduz a componente $B_\alpha(x, y, z)$ (equação 2.5) do campo produzido por fontes magnéticas arbitrárias em todos os pontos (x, y, z) localizados fora das fontes e acima da camada ($z < z_c$). Utilizando o resultado teórico exposto acima, conclui-se que esta mesma camada deve obrigatoriamente reproduzir as outras duas componentes do campo produzido pelas fontes magnéticas. Caso contrário, cada componente $\tilde{B}_\alpha(x, y, z)$ (equação 2.13) do campo produzido pela camada, e consequentemente cada componente $B_\alpha(x, y, z)$ (equação 2.5) do campo produzido pelas fontes arbitrárias, deverá ser reproduzida por uma camada equivalente diferente, o que violaria as leis de Gauss (equação 2.6) e de Ampère (equação 2.7).

Os resultados teóricos desenvolvidos aqui estão em pleno acordo com aqueles apresentados por LIMA e WEISS (2009) no domínio de Fourier. Aqueles autores também usaram as leis de Gauss (equação 2.6) e Ampère (equação 2.7) para mostrar que é possível determinar todas as componentes do campo de indução magnética produzido por fontes arbitrárias a partir de dados de uma única componente. Aqueles autores, contudo, conduziram sua análise no domínio de Fourier, não fizeram nenhuma consideração sobre a distribuição de magnetização que reproduz as componentes do campo e consideraram o caso particular em que os dados estão localizados sobre um plano.

2.4 Distribuição de momentos positiva

Neste segundo desenvolvimento, considero o caso particular em que as fontes magnéticas possuem direção de magnetização uniforme e a anomalia de campo total produzida por elas é reproduzida por uma camada equivalente plana, localizada em $z = z_c$. Neste caso, mostro que a distribuição de intensidades de momento magnético $p(x'', y'', z_c)$ na camada (equação 2.13) é toda positiva se a direção de magnetização uniforme da camada é igual a das fontes.

Considere um conjunto de fontes magnéticas com direção de magnetização uniforme, com inclinação I_t e declinação D_t , de tal forma que o vetor de magnetização total (equação 2.4) seja dado por:

$$\mathbf{m}(x', y', z') = m(x', y', z') \hat{\mathbf{u}}(I_t, D_t), \quad (2.20)$$

em que $m(x', y', z')$ representa a intensidade de magnetização em um ponto (x', y', z') localizado no interior das fontes e $\hat{\mathbf{u}}(I_t, D_t)$ é o vetor unitário definido pela equação 2.9. Neste caso, o potencial magnético escalar $\Gamma(x, y, z)$ (equação 2.2) e o campo de indução magnética $\mathbf{B}(x, y, z)$ (equação 2.1) produzidos pelas fontes ficam definidos

por:

$$\Gamma(x, y, z) = -\gamma_m \iiint_v m(x', y', z') \hat{\mathbf{u}}(I_t, D_t) \cdot \nabla \frac{1}{r'} dv' \quad (2.21)$$

e

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{M}(x, y, z) \hat{\mathbf{u}}(I_t, D_t), \quad (2.22)$$

em que $\mathbf{M}(x, y, z)$ é uma matriz dada por

$$\mathbf{M}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_{xx}\Omega(x, y, z) & \partial_{xy}\Omega(x, y, z) & \partial_{xz}\Omega(x, y, z) \\ \partial_{xy}\Omega(x, y, z) & \partial_{yy}\Omega(x, y, z) & \partial_{yz}\Omega(x, y, z) \\ \partial_{xz}\Omega(x, y, z) & \partial_{yz}\Omega(x, y, z) & \partial_{zz}\Omega(x, y, z) \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

cujos elementos $\partial_{\alpha\beta}\Omega(x, y, z) \equiv \frac{\partial^2\Omega(x, y, z)}{\partial\alpha\partial\beta}$, $\alpha, \beta = x, y, z$, representam as derivadas segundas da função harmônica

$$\Omega(x, y, z) = \gamma_m \iiint_v m(x', y', z') \frac{1}{r'} dv', \quad (2.24)$$

sendo $\frac{1}{r'}$ definida pela equação 2.3. A intensidade de magnetização $m(x', y', z')$ é estritamente positiva em todos os pontos no interior das fontes. Por conseguinte, $\Omega(x, y, z)$ é positiva em todos os pontos exteriores a fonte magnética. Do ponto de vista físico, $\mathbf{M}(x, y, z)$ (equação 2.23) e $\Omega(x, y, z)$ (equação 2.24) representam, respectivamente, o tensor gradiente e o potencial gravitacional que seriam produzidos pelas fontes magnéticas no ponto (x, y, z) , se elas tivessem distribuição de densidade proporcional a $m(x', y', z')$. Note que $\mathbf{M}(x, y, z)$ é uma matriz simétrica, seu traço é nulo em todos os pontos (x, y, z) exteriores as fontes magnéticas e possui cinco componentes independentes que são funções harmônicas (PEDERSEN e RASMUSSEN, 1990). Usando o campo de indução magnética $\mathbf{B}(x, y, z)$ (equação 2.22) produzido por fontes magnéticas com direção de magnetização uniforme e explorando as propriedades da matriz $\mathbf{M}(x, y, z)$ (equação 2.23), podemos reescrever a anomalia de campo total $\Delta T(x, y, z)$ (equação 2.8) da seguinte forma:

$$\Delta T(x, y, z) = a_{xx} \partial_{xx}\Omega(x, y, z) + a_{xy} \partial_{xy}\Omega(x, y, z) + a_{xz} \partial_{xz}\Omega(x, y, z) + a_{yy} \partial_{yy}\Omega(x, y, z) + a_{yz} \partial_{yz}\Omega(x, y, z), \quad (2.25)$$

em que

$$\begin{aligned} a_{xx} &= \hat{u}_x(I_t, D_t) \hat{u}_x(I_0, D_0) - \hat{u}_z(I_t, D_t) \hat{u}_z(I_0, D_0) \\ a_{xy} &= \hat{u}_x(I_t, D_t) \hat{u}_y(I_0, D_0) + \hat{u}_y(I_t, D_t) \hat{u}_x(I_0, D_0) \\ a_{xz} &= \hat{u}_x(I_t, D_t) \hat{u}_z(I_0, D_0) + \hat{u}_z(I_t, D_t) \hat{u}_x(I_0, D_0) \\ a_{yy} &= \hat{u}_y(I_t, D_t) \hat{u}_y(I_0, D_0) - \hat{u}_z(I_t, D_t) \hat{u}_z(I_0, D_0) \\ a_{yz} &= \hat{u}_y(I_t, D_t) \hat{u}_z(I_0, D_0) + \hat{u}_z(I_t, D_t) \hat{u}_y(I_0, D_0) \end{aligned} \quad (2.26)$$

são constantes definidas pelas componentes $\hat{u}_\alpha(I_0, D_0)$ e $\hat{u}_\beta(I_t, D_t)$, $\alpha = x, y, z$, $\beta = x, y, z$, dos vetores unitários $\hat{\mathbf{u}}(I_0, D_0)$ e $\hat{\mathbf{u}}(I_t, D_t)$ (equação 2.9), respectivamente, definidos pela inclinação I_0 e declinação D_0 do campo principal na área de estudo e pela inclinação I_t e declinação D_t da magnetização uniforme das fontes magnéticas verdadeiras. Por simplicidade, omitimos a dependência dos coeficientes $a_{\alpha\beta}$ em relação aos parâmetros I_0 , D_0 , I_t e D_t . As equações 2.25 e 2.26 mostram que a anomalia de campo total $\Delta T(x, y, z)$ produzida por fontes magnéticas com direção de magnetização uniforme é uma combinação linear de cinco funções harmônicas e independentes, que são derivadas segundas de $\Omega(x, y, z)$ (equação 2.24).

Considere uma camada equivalente localizada em $z = z_c$, com a mesma direção de magnetização das fontes verdadeiras e com uma distribuição de intensidades de momento magnético $p(x'', y'', z_c)$ tal que a condição $\Delta T(x, y, z) = \Delta \tilde{T}(x, y, z)$ seja satisfeita em todos os pontos (x, y, z) localizados fora das fontes e acima da camada ($z < z_c$). Nesse caso, é possível reescrever o campo de indução magnética $\tilde{\mathbf{B}}(x, y, z)$ (equação 2.10) da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{B}}(x, y, z) = \tilde{\mathbf{M}}(x, y, z) \hat{\mathbf{u}}(I_t, D_t), \quad (2.27)$$

em que $\tilde{\mathbf{M}}(x, y, z)$ é uma matriz dada por

$$\tilde{\mathbf{M}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_{xx} \tilde{\Omega}(x, y, z) & \partial_{xy} \tilde{\Omega}(x, y, z) & \partial_{xz} \tilde{\Omega}(x, y, z) \\ \partial_{xy} \tilde{\Omega}(x, y, z) & \partial_{yy} \tilde{\Omega}(x, y, z) & \partial_{yz} \tilde{\Omega}(x, y, z) \\ \partial_{xz} \tilde{\Omega}(x, y, z) & \partial_{yz} \tilde{\Omega}(x, y, z) & \partial_{zz} \tilde{\Omega}(x, y, z) \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

cujos elementos $\partial_{\alpha\beta} \tilde{\Omega}(x, y, z) \equiv \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}(x, y, z)}{\partial \alpha \partial \beta}$, $\alpha, \beta = x, y, z$, representam as derivadas segundas da função harmônica

$$\tilde{\Omega}(x, y, z) = \gamma_m \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x'', y'', z_c) \frac{1}{r''} dS'', \quad z < z_c, \quad (2.29)$$

sendo $\frac{1}{r''}$ definida pela equação 2.12. Note que $\tilde{\mathbf{M}}(x, y, z)$ (equação 2.28) também representa um tensor gradiente (PEDERSEN e RASMUSSEN, 1990) e, consequen-

temente, é simétrica, possui traço igual a zero em todos os pontos (x, y, z) acima da camada (com $z < z_c$) e possui cinco componentes independentes, que por sua vez são definidas pelas segundas derivadas da função harmônica $\tilde{\Omega}(x, y, z)$ (equação 2.29). Usando o campo de indução magnética $\tilde{\mathbf{B}}(x, y, z)$ (equação 2.27) produzido por uma camada equivalente e explorando as propriedades da matriz $\tilde{\mathbf{M}}(x, y, z)$ (equação 2.28), podemos reescrever a anomalia de campo total $\Delta\tilde{T}(x, y, z)$ (equação 2.14) da seguinte forma:

$$\Delta\tilde{T}(x, y, z) = a_{xx} \partial_{xx}\tilde{\Omega}(x, y, z) + a_{xy} \partial_{xy}\tilde{\Omega}(x, y, z) + a_{xz} \partial_{xz}\tilde{\Omega}(x, y, z) + a_{yy} \partial_{yy}\tilde{\Omega}(x, y, z) + a_{yz} \partial_{yz}\tilde{\Omega}(x, y, z) , \quad (2.30)$$

em que as constantes $a_{\alpha\beta}$, $\alpha = x, y, z$, $\beta = x, y, z$, são as mesmas definidas pela equação 2.26. A equação 2.30 mostra que a anomalia de campo total $\Delta\tilde{T}(x, y, z)$ produzida por uma camada equivalente também é uma combinação linear de cinco funções harmônicas e independentes, que neste caso são derivadas segundas de $\tilde{\Omega}(x, y, z)$ (equação 2.29).

Usando as equações 2.25 e 2.30 e impondo a condição de que $\Delta T(x, y, z) = \Delta\tilde{T}(x, y, z)$ em todos os pontos (x, y, z) localizados fora das fontes e acima da camada ($z < z_c$), obtemos:

$$\begin{aligned} & a_{xx} \left[\partial_{xx}\tilde{\Omega}(x, y, z) - \partial_{xx}\Omega(x, y, z) \right] + \\ & a_{xy} \left[\partial_{xy}\tilde{\Omega}(x, y, z) - \partial_{xy}\Omega(x, y, z) \right] + \\ & a_{xz} \left[\partial_{xz}\tilde{\Omega}(x, y, z) - \partial_{xz}\Omega(x, y, z) \right] + \\ & a_{yy} \left[\partial_{yy}\tilde{\Omega}(x, y, z) - \partial_{yy}\Omega(x, y, z) \right] + \\ & a_{yz} \left[\partial_{yz}\tilde{\Omega}(x, y, z) - \partial_{yz}\Omega(x, y, z) \right] = 0 , \quad z < z_c . \end{aligned} \quad (2.31)$$

Note que esta equação é válida para coeficientes $a_{\alpha\beta}$, $\alpha = x, y, z$, $\beta = x, y, z$, arbitrários, definidos em termos da inclinação e declinação do campo principal (I_0 e D_0) e das fontes magnéticas (I_t e D_t). Note também que os termos entre colchetes são funções harmônicas linearmente independentes. Sendo assim, para que a equação acima seja satisfeita, os cinco termos entre colchetes devem ser nulos em todos os pontos (x, y, z) fora das fontes magnéticas e acima da camada ($z < z_c$). Igualando cada termo a zero, conclui-se que as segundas derivadas da função $\Omega(x, y, z)$ (equação 2.24) são iguais as segundas derivadas da função $\tilde{\Omega}(x, y, z)$ (equação 2.29),

$$\partial_{\alpha\beta}\Omega(x, y, z) = \partial_{\alpha\beta}\tilde{\Omega}(x, y, z) , \quad z_c > z , \quad (2.32)$$

e, consequentemente,

$$\Omega(x, y, z) = \tilde{\Omega}(x, y, z), \quad z_c > z. \quad (2.33)$$

A equação 2.33 mostra que, no caso particular em que a camada equivalente tem a mesma direção de magnetização uniforme $\hat{\mathbf{u}}(I_t, D_t)$ das fontes magnéticas, há uma distribuição de intensidades de momento magnético $p(x'', y'', z_c)$ (equação 2.29) que reproduz a função harmônica $\Omega(x, y, z)$ (equação 2.24) em todos os pontos fora das fontes e acima da camada ($z < z_c$). Para determinar $p(x'', y'', z_c)$, considere a superfície fechada localizada acima das fontes magnéticas, formada pelo plano $z = z_c$ da camada equivalente e uma semi-esfera com raio infinito (Figura 2.1). Esta superfície cerca uma região na qual as funções $\Omega(x, y, z)$ (equação 2.24) e $\tilde{\Omega}(x, y, z)$ (equação 2.29) são harmônicas. Aplicando a segunda identidade de Green (KELLOGG, 1967, p. 215) na equação 2.24, mostra-se que

$$0 = \frac{1}{4\pi} \iint \partial_z \Omega(x'', y'', z_c) \frac{1}{\ell} - \Omega(x'', y'', z_c) \partial_z \frac{1}{\ell} dS'', \quad z_c > z, \quad (2.34)$$

em que

$$\frac{1}{\ell} \equiv \frac{1}{\sqrt{(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z_s - z_c)^2}} \quad (2.35)$$

é o inverso da distância entre o ponto (x'', y'', z_c) , localizado sobre a camada equivalente, e o ponto (x, y, z_s) , com $z_s = z_c + \Delta z$, $\Delta z > 0$. Por conveniência, os limites de integração $-\infty$ e $+\infty$ foram omitidos. O ponto (x, y, z_s) é convenientemente definido como o espelho do ponto (x, y, z) , localizado em $z = z_c - \Delta z$, com respeito ao plano $z = z_c$ que contém a camada equivalente (Figura 2.1). A equação 2.34, combinada com a terceira identidade de Green (KELLOGG, 1967, p. 219), resulta em

$$\begin{aligned} \Omega(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \iint \partial_z \Omega(x'', y'', z_c) \left(\frac{1}{r''} + \frac{1}{\ell} \right) dS'' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint \Omega(x'', y'', z_c) \left(\partial_z \frac{1}{r''} + \partial_z \frac{1}{\ell} \right) dS'', \quad z_c > z, \end{aligned} \quad (2.36)$$

em que $\frac{1}{r''}$ é definida pela equação 2.12. O termo $\left(\frac{1}{r''} + \frac{1}{\ell}\right)$ representa a *função de Green de segunda ordem* (KELLOGG, 1967, p. 246) associada a esta integral. Note que $\frac{1}{r''} = \frac{1}{\ell}$, $\partial_z(1/r'') = -\partial_z(1/\ell)$ e, consequentemente,

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_z \Omega(x'', y'', z_c) \frac{1}{r''} dS'', \quad z_c > z. \quad (2.37)$$

Esta equação mostra a ambiguidade inerente a campos potenciais (ROY, 1962) e

resolve o *problema de Neumann* ou o *problema de contorno de segunda ordem da teoria do potencial* (KELLOGG, 1967, p. 246). Neste caso, este problema consiste em definir a função harmônica $\Omega(x, y, z)$ (equação 2.24) na região acima da camada equivalente, a partir dos valores de suas derivadas verticais sobre o plano que contém a camada. Comparando as equações 2.29 e 2.37 e usando a igualdade entre as funções $\Omega(x, y, z)$ e $\tilde{\Omega}(x, y, z)$ (equação 2.33), obtemos

$$p(x'', y'', z_c) = \frac{1}{2\pi} \partial_z \Omega(x'', y'', z_c), \quad (2.38)$$

em que

$$\partial_z \Omega(x'', y'', z_c) = \gamma_m \iiint_v \frac{m(x', y', z') (z' - z_c) dv'}{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z_c - z')^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad z' > z_c. \quad (2.39)$$

Do ponto de vista físico, a equação 2.39 representa a componente vertical da atração gravitacional (ou a pseudo-gravidade) que seria produzida pelas fontes magnéticas sobre a camada equivalente, se elas tivessem a distribuição de densidade proporcional a $m(x', y', z')$. Tendo em vista que $m(x', y', z')$ é estritamente positiva em todos os pontos (x', y', z') no interior das fontes magnéticas, $\partial_z \Omega(x'', y'', z_c)$ é positiva em todos os pontos (x'', y'', z_c) localizados sobre a camada equivalente.

O aspecto mais interessante sobre a distribuição de intensidades de momento magnético $p(x'', y'', z_c)$ (equação 2.38) é que ela é definida como o produto de uma constante positiva $\frac{1}{2\pi}$ e a função $\partial_z \Omega(x'', y'', z_c)$, que é estritamente positiva em todos os pontos (x'', y'', z_c) sobre a camada equivalente. Consequentemente, a função $p(x'', y'', z_c)$ também é positiva em todos os pontos sobre a camada. Esta relação é similar àquela apresentada por PEDERSEN (1991) e LI *et al.* (2014). Aqueles autores determinaram, por meio de uma abordagem desenvolvida no domínio de Fourier, uma distribuição de intensidades de momento magnético positiva sobre uma camada equivalente contínua e com magnetização induzida na direção vertical. Eles também consideraram que a camada equivalente é plana, localizada em profundidade e é paralela ao plano horizontal que contém os dados observados de anomalia de campo total. Note que o presente trabalho não segue a abordagem no domínio de Fourier desenvolvida por aqueles autores. Além disso, a equação 2.38 generaliza a condição de positividade dos momentos magnéticos por que (1) é válida para todos os casos nos quais a magnetização da camada equivalente tem a mesma direção da magnetização total das fontes, sendo ela puramente induzida ou não, e (2) não requer que os dados observados de anomalia de campo total estejam sobre um plano.

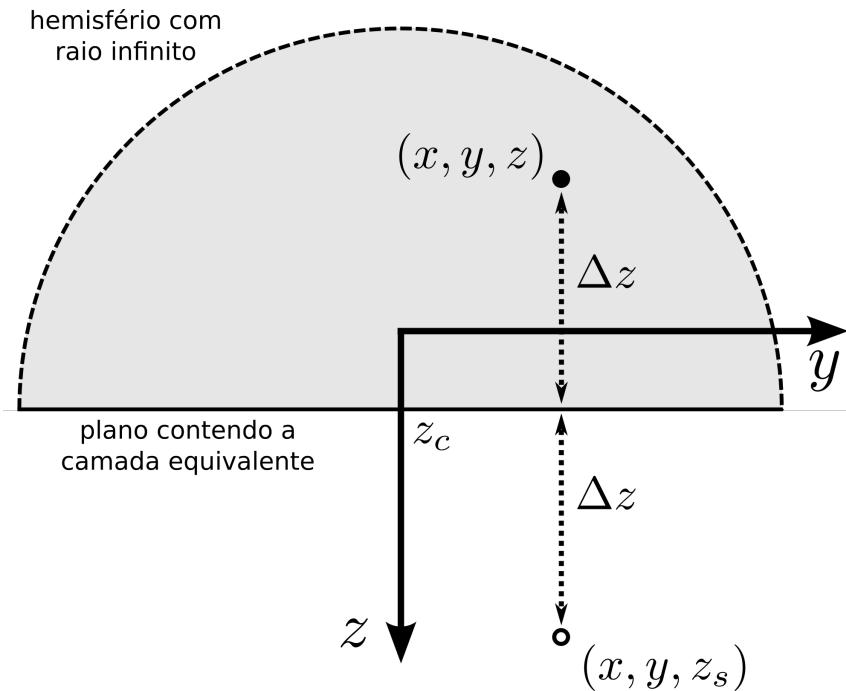


Figura 2.1: Representação 2D da superfície utilizada para aplicar as identidades de Green. A superfície é formada por uma semi-esfera (linha traçejada) com raio infinito e o plano $z = z_c$ contendo a camada equivalente. Os pontos (x, y, z) (ponto fechado) e (x, y, z_s) (ponto aberto) são posicionados simetricamente com respeito ao plano $z = z_c$ e definidos como $z = z_c - \Delta z$ e $z = z_c + \Delta z$, respectivamente.

Capítulo 3

Metodologia

3.1 Estimativa das componentes e da amplitude do campo magnético

Na seção 2.3, mostrei que, se uma camada equivalente plana com direção de magnetização uniforme e arbitrária reproduz uma determinada componente $B_\alpha(x, y, z)$ (equação 2.5), $\alpha = x, y, z$, do campo de indução magnética $\mathbf{B}(x, y, z)$ (equação 2.1) produzido por um conjunto de fontes magnéticas arbitrárias, esta camada deve, obrigatoriamente, reproduzir as demais componentes do campo $\mathbf{B}(x, y, z)$. Nesta seção, apresento um método para estimar as componentes e a amplitude do campo de indução magnética de um conjunto de fontes magnéticas a partir da inversão de dados de uma determinada componente.

3.1.1 Parametrização e problema direto

Considere uma camada equivalente plana localizada em $z = z_c$, que possui uma distribuição contínua de intensidades de momento magnético $p(x'', y'', z_c)$ e uma direção de magnetização arbitrária $\hat{\mathbf{u}}(I, D)$ (equação 2.13). Em situações práticas, não é possível determinar esta distribuição contínua de intensidade de momentos sobre a camada equivalente. Por esta razão, a camada é aproximada por um conjunto discreto de M dipolos (fontes equivalentes) localizados no plano $z = z_c$ (Figura 3.1). A componente α , $\alpha = x, y, z$, do campo de indução magnética produzida por esta camada discreta (componente α predita) no ponto (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, N$, é dada por

$$B_i^\alpha(\mathbf{p}) = \mathbf{g}_i^\alpha(\mathbf{q})^\top \mathbf{p}, \quad (3.1)$$

em que \mathbf{q} é um vetor 2×1 (vetor de direção de magnetização) definido em termos da inclinação e declinação (I e D) da magnetização total na camada equivalente

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} I \\ D \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

\mathbf{p} é um vetor $M \times 1$ (vetor de momentos magnéticos) cujo j -ésimo elemento, $j = 1, \dots, M$, é a intensidade do momento magnético p_j (em $A m^2$) do j -ésimo dipolo e $\mathbf{g}_i^\alpha(\mathbf{q})$ é outro vetor $M \times 1$ cujo j -ésimo elemento é definido pela função harmônica

$$g_{ij}^\alpha(\mathbf{q}) = \gamma_m \mathbf{M}_{ij}^{\alpha \top} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}). \quad (3.3)$$

Nesta equação, $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \equiv \hat{\mathbf{u}}(I, D)$ é um vetor unitário definido pela equação 2.9 em função da inclinação e declinação da magnetização na camada equivalente (I e D) e \mathbf{M}_{ij}^α é um vetor 3×1 dado por

$$\mathbf{M}_{ij}^\alpha = \begin{bmatrix} \partial_{\alpha x} \frac{1}{r''} \\ \partial_{\alpha y} \frac{1}{r''} \\ \partial_{\alpha z} \frac{1}{r''} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

em que $\partial_{\alpha\beta} \frac{1}{r''} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{1}{r''}$ representa a segunda derivada da função $\frac{1}{r''}$ (equação 2.12) em relação a α e β , $\alpha = x, y, z$, $\beta = x, y, z$, avaliada nas coordenadas $(x, y, z) = (x_i, y_i, z_i)$ do i -ésimo dado observado e $(x'', y'', z_c) = (x_j, y_j, z_c)$ da j -ésima fonte equivalente. A componente α predita $B_i^\alpha(\mathbf{p})$ (equação 3.1) é obtida a partir da discretização da integral que define a componente $\tilde{B}_\alpha(x, y, z)$ (equação 2.13) produzida pela camada equivalente contínua. Note que $B_i^\alpha(\mathbf{p})$ possui uma relação linear com o vetor de momentos magnéticos \mathbf{p} .

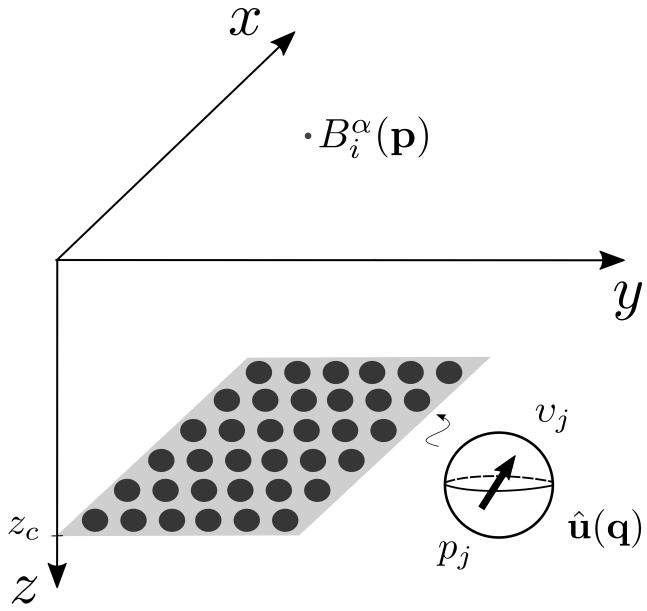


Figura 3.1: Representação esquemática da camada equivalente para a componente α do campo de indução magnética. A camada é posicionada sobre o plano horizontal $z = z_c$. $B_i^\alpha(\mathbf{p})$ é a componente α predita (equação 3.1) no ponto (x_i, y_i, z_i) pelo conjunto de M fontes equivalentes (pontos pretos). Cada fonte é localizada em um ponto (x_j, y_j, z_c) , $j = 1, \dots, M$, e é representada por um dipolo de volume unitário v_j com direção de magnetização $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q})$ e momento magnético p_j .

3.1.2 Problema inverso

Seja \mathbf{B}_o^α o vetor de dados observados cujo i -ésimo elemento é a componente α , $\alpha = x, y, z$, do campo magnético produzida por fontes magnéticas arbitrárias no ponto (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, N$. Similarmente, seja $\mathbf{B}^\alpha(\mathbf{p})$ o vetor de dados preditos cujo i -ésimo elemento é a componente α predita $B_i^\alpha(\mathbf{p})$ (equação 3.1) produzida por uma camada equivalente discreta no mesmo ponto (x_i, y_i, z_i) . Para estimar o vetor de momentos magnéticos \mathbf{p} que minimiza a diferença entre \mathbf{B}_o^α e $\mathbf{B}^\alpha(\mathbf{p})$, minimizo a seguinte função objetivo

$$\Psi(\mathbf{p}) = \|\mathbf{B}_o^\alpha - \mathbf{B}^\alpha(\mathbf{p})\|_2^2 + \mu \|\mathbf{p}\|_2^2, \quad (3.5)$$

em que o primeiro e o segundo termo da equação 3.5 são a função de ajuste e a função regularizadora de Tikhonov de ordem zero, μ é o parâmetro de regularização e $\|\cdot\|_2^2$ representa o quadrado da norma Euclidiana. Usando uma direção de magnetização $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q})$ (equação 3.3) arbitrária, a minimização da função objetivo $\Psi(\mathbf{p})$ (equação 3.5)

resulta no sistema linear abaixo:

$$[\mathbf{G}^{\alpha\top} \mathbf{G}^{\alpha} + \mu \mathbf{I}] \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{G}^{\alpha\top} \mathbf{B}_o^{\alpha}, \quad (3.6)$$

em que \mathbf{G}^{α} é uma matriz de dimensão $N \times M$ cujo elemento ij é dado pela função harmônica $g_{ij}^{\alpha}(\mathbf{q})$ (equação 3.3), avaliada para um vetor de direção de magnetização \mathbf{q} (equação 3.2) arbitrário, e \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem M . Usando a distribuição de momentos magnéticos $\bar{\mathbf{p}}$ estimada pelo sistema linear 3.6, as outras componentes do campo magnético predito pela camada equivalente são calculadas escolhendo-se os α correspondentes nas equações 3.1 – 3.4. Por fim, usando as três componentes $B_i^{\alpha}(\bar{\mathbf{p}})$ (equação 3.1), $\alpha = x, y, z$, calculo a amplitude do campo de indução magnética produzido pela camada equivalente discreta em cada ponto (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, N$, da seguinte forma:

$$B_i(\bar{\mathbf{p}}) = \sqrt{[B_i^x(\bar{\mathbf{p}})]^2 + [B_i^y(\bar{\mathbf{p}})]^2 + [B_i^z(\bar{\mathbf{p}})]^2}. \quad (3.7)$$

3.2 Estimativa da direção de magnetização

Na seção 2.4, mostrei que, para uma camada equivalente plana reproduzir a anomalia de campo total $\Delta T(x, y, z)$ (equação 2.25) produzida por um conjunto de fontes magnéticas com direção de magnetização uniforme, a sua distribuição de intensidades de momento magnético $p(x'', y'', z_c)$ deve ser toda positiva (equação 2.38). Nesta seção, apresento um método iterativo que usa este vínculo de positividade dos momentos magnéticos para estimar a direção de magnetização uniforme das fontes magnéticas a partir da inversão de dados de anomalia de campo total.

3.2.1 Parametrização e problema direto

Considere uma camada equivalente plana localizada em $z = z_c$, que possui uma distribuição contínua de intensidades de momento magnético $p(x'', y'', z_c)$ (equação 2.13). Em situações práticas, não é possível determinar esta distribuição contínua sobre a camada equivalente. Por esta razão, a camada é aproximada por um conjunto discreto de M dipolos (fontes equivalentes) localizados no plano $z = z_c$ (Figura 3.2). A anomalia de campo total produzida por esta camada discreta (anomalia de campo total predita) no ponto (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, N$, é dada por

$$\Delta T_i(\mathbf{s}) = \mathbf{g}_i(\mathbf{q})^\top \mathbf{p}, \quad (3.8)$$

em que \mathbf{s} é um vetor $(M + 2) \times 1$ particionado dado por

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

\mathbf{q} é o vetor de direção de magnetização (equação 3.2), \mathbf{p} é um vetor $M \times 1$ (vetor de momentos magnéticos) cujo j -ésimo elemento, $j = 1, \dots, M$, é a intensidade do momento magnético p_j (em $A m^2$) do j -ésimo dipolo e $\mathbf{g}_i(\mathbf{q})$ é outro vetor $M \times 1$ cujo j -ésimo elemento é definido pela função harmônica

$$g_{ij}(\mathbf{q}) = \gamma_m \hat{\mathbf{u}}_0^T \mathbf{M}_{ij} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}). \quad (3.10)$$

Nesta equação, $\hat{\mathbf{u}}_0 \equiv \hat{\mathbf{u}}(I_0, D_0)$ e $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \equiv \hat{\mathbf{u}}(I, D)$ são vetores unitários definidos pela equação 2.9 em função da inclinação e declinação do campo principal (I_0 e D_0) e da camada equivalente (I e D), respectivamente, e \mathbf{M}_{ij} é uma matriz 3×3 dada por

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \partial_{xx} \frac{1}{r''} & \partial_{xy} \frac{1}{r''} & \partial_{xz} \frac{1}{r''} \\ \partial_{xy} \frac{1}{r''} & \partial_{yy} \frac{1}{r''} & \partial_{yz} \frac{1}{r''} \\ \partial_{xz} \frac{1}{r''} & \partial_{yz} \frac{1}{r''} & \partial_{zz} \frac{1}{r''} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

em que $\partial_{\alpha\beta} \frac{1}{r''} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{1}{r''}$ representa a segunda derivada da função $\frac{1}{r''}$ (equação 2.12) em relação a α e β , $\alpha = x, y, z$ e $\beta = x, y, z$, avaliada nas coordenadas $(x, y, z) = (x_i, y_i, z_i)$ do i -ésimo dado observado e $(x'', y'', z_c) = (x_j, y_j, z_c)$ da j -ésima fonte equivalente. A anomalia de campo total predita $\Delta T_i(\mathbf{s})$ (equação 3.8) é obtida substituindo-se, na equação 2.14, a discretização da integral que define a componente $\tilde{B}_\alpha(x, y, z)$ (equação 2.13) produzida pela camada equivalente contínua. As equações 3.8-3.11 mostram que a anomalia de campo total predita $\Delta T_i(\mathbf{s})$ possui uma relação linear com o vetor de momentos magnéticos \mathbf{p} e uma relação não linear com o vetor de direção de magnetização \mathbf{q} (equação 3.2).

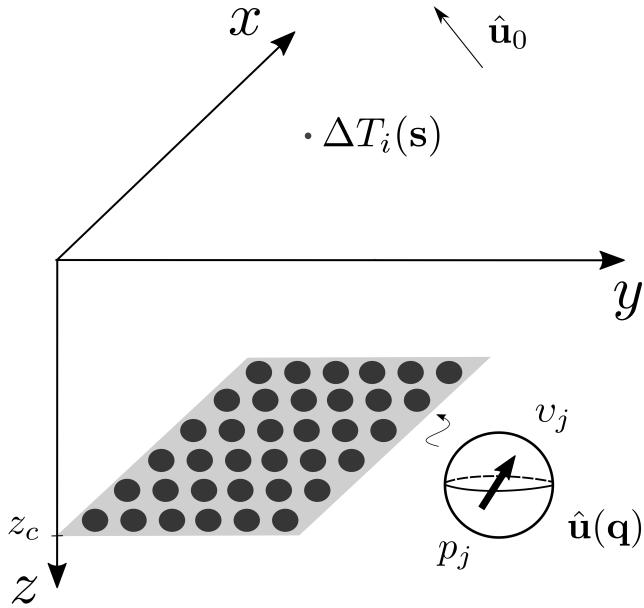


Figura 3.2: Representação esquemática da camada equivalente para a anomalia de campo total. A camada é posicionada sobre o plano horizontal a uma profundidade $z = z_c$. $\Delta T_i(\mathbf{s})$ é a anomalia de campo total predita (equação 3.8) no ponto (x_i, y_i, z_i) produzida pelo conjunto de M fontes equivalentes (pontos pretos). Cada fonte é localizada no ponto (x_j, y_j, z_c) , $j = 1, \dots, M$, e são representadas por um dipolo de volume unitário v_j com direção de magnetização $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q})$ e momento magnético p_j . $\hat{\mathbf{u}}_0 \equiv \hat{\mathbf{u}}(I_0, D_0)$ é um vetor unitário na direção do campo principal.

3.2.2 Problema inverso

Seja $\Delta \mathbf{T}^o$ o vetor de dados observados cujo i -ésimo elemento é a anomalia de campo total produzida, no ponto (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, N$, por fontes magnéticas com direção de magnetização uniforme. Similarmente, seja $\Delta \mathbf{T}(\mathbf{s})$ o vetor de dados preditos cujo i -ésimo elemento $\Delta T_i(\mathbf{s})$ (equação 3.8) é a anomalia de campo total produzida pela camada equivalente discreta no mesmo ponto (x_i, y_i, z_i) . Para estimar o vetor de parâmetros \mathbf{s} (equação 3.9) que minimiza a diferença entre $\Delta \mathbf{T}^o$ e $\Delta \mathbf{T}(\mathbf{s})$, resolvo o seguinte problema inverso:

$$\text{minimizar} \quad \Psi(\mathbf{s}) = \|\Delta \mathbf{T}^o - \Delta \mathbf{T}(\mathbf{s})\|_2^2 + \mu f_0 \|\mathbf{p}\|_2^2, \quad (3.12a)$$

$$\text{sujeito a} \quad p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, M. \quad (3.12b)$$

O primeiro e o segundo termo da equação 3.12a são, respectivamente, a função de ajuste e a função regularizadora de Tikhonov de ordem zero, μ é o parâmetro de regularização, $\|\cdot\|_2^2$ representa o quadrado da norma Euclidiana e f_0 é um fator

de normalização. A equação 3.12b impõe que todos os elementos p_j do vetor de momentos magnéticos \mathbf{p} sejam maiores ou iguais a zero. Este vínculo de positividade se baseia no resultado teórico deduzido na seção 2.4 e é incorporado utilizando o *estimador de mínimos quadrados não negativo*, ou NNLS (do inglês *Nonnegative least squares*), proposto por (LAWSON e HANSON, 1974).

Para resolver este problema inverso, considere uma expansão até segunda ordem da função $\Psi(\mathbf{s})$ (equação 3.12a) em torno de $\mathbf{s} = \mathbf{s}^k$ (equação 3.9):

$$\Psi(\mathbf{s}^k + \Delta\mathbf{s}^k) \approx \Psi(\mathbf{s}^k) + \mathbf{J}^{k\top} \Delta\mathbf{s}^k + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{s}^{k\top} \mathbf{H}^k \Delta\mathbf{s}^k , \quad (3.13)$$

em que $\Delta\mathbf{s}^k$ é uma perturbação no vetor de parâmetros \mathbf{s} (equação 3.9) e os termos \mathbf{J}^k e \mathbf{H}^k são, respectivamente, o vetor gradiente e a matriz Hessiana avaliadas em \mathbf{s}^k . Calculando o gradiente do lado direito da equação 3.13 em relação a $\Delta\mathbf{s}^k$ e igualando o resultado ao vetor nulo, deduzimos o seguinte sistema linear:

$$\mathbf{H}^k \bar{\Delta}\mathbf{s}^k = -\mathbf{J}^k , \quad (3.14)$$

que representa o k -ésimo passo do método de Gauss-Newton (ASTER *et al.*, 2005) para a minimização da função objetivo (equação 3.12a). Reescrevemos este sistema linear desprezando as derivadas cruzadas na matriz Hessiana como:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_{pp}^k & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^\top & \mathbf{H}_{qq}^k \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{\Delta}\mathbf{p}^k \\ \bar{\Delta}\mathbf{q}^k \end{array} \right] \approx - \left[\begin{array}{c} \mathbf{J}_p^k \\ \mathbf{J}_q^k \end{array} \right] , \quad (3.15)$$

em que $\mathbf{0}$ é uma matriz $M \times 2$ que contém todos os elementos iguais a zero, $\bar{\Delta}\mathbf{p}^k = \bar{\mathbf{p}}^{k+1} - \bar{\mathbf{p}}^k$ é a correção no vetor de momentos magnéticos \mathbf{p} , $\bar{\Delta}\mathbf{q}^k = \bar{\mathbf{q}}^{k+1} - \bar{\mathbf{q}}^k$ é a correção no vetor direção de magnetização \mathbf{q} e os termos \mathbf{J}_α^k e $\mathbf{H}_{\alpha\alpha}^k$, $\alpha = p, q$, são os vetores gradientes e as matrizes Hessianas calculadas com relação aos elementos de \mathbf{p} e \mathbf{q} , respectivamente.

O vetor gradiente \mathbf{J}_p^k e a matriz Hessiana \mathbf{H}_{pp}^k (equação 3.15) relativos ao vetor de momentos magnéticos \mathbf{p} são, respectivamente,

$$\mathbf{J}_p^k = -2\mathbf{G}_p^{k\top} [\Delta\mathbf{T}^o - \Delta\mathbf{T}(\bar{\mathbf{s}}^k)] + 2\mu f_0^k \bar{\mathbf{P}}^k \quad (3.16)$$

e

$$\mathbf{H}_{pp}^k = 2\mathbf{G}_p^{k\top} \mathbf{G}_p^k + 2\mu f_0^k \mathbf{I} , \quad (3.17)$$

em que \mathbf{G}_p^k é uma matriz $N \times M$ cujo elemento ij é definido pela função harmônica $g_{ij}(\bar{\mathbf{q}}^k)$ (equação 3.10) avaliada na direção de magnetização $\bar{\mathbf{q}}^k$, \mathbf{I} é a matriz identi-

dade $M \times M$ e f_0^k é um fator de normalização igual a

$$f_0^k = \frac{\text{trace} \left(\mathbf{G}_p^{k\top} \mathbf{G}_p^k \right)}{M}. \quad (3.18)$$

O vetor gradiente \mathbf{J}_q^k e a matriz Hessiana \mathbf{H}_{qq}^k (equação 3.15) relativos a direção de magnetização \mathbf{q} são, respectivamente,

$$\mathbf{J}_q^k = -2\mathbf{G}_q^{k\top} [\Delta\mathbf{T}^o - \Delta\mathbf{T}(\bar{\mathbf{s}}^k)] \quad (3.19)$$

e

$$\mathbf{H}_{qq}^k \approx 2\mathbf{G}_q^{k\top} \mathbf{G}_q^k, \quad (3.20)$$

em que \mathbf{G}_q^k é uma matriz $N \times 2$ dada por

$$\mathbf{G}_q^k = \begin{bmatrix} \partial_I \mathbf{g}_1(\bar{\mathbf{q}}^k)^\top \bar{\mathbf{p}}^k & \partial_D \mathbf{g}_1(\bar{\mathbf{q}}^k)^\top \bar{\mathbf{p}}^k \\ \vdots & \vdots \\ \partial_I \mathbf{g}_N(\bar{\mathbf{q}}^k)^\top \bar{\mathbf{p}}^k & \partial_D \mathbf{g}_N(\bar{\mathbf{q}}^k)^\top \bar{\mathbf{p}}^k \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

e $\partial_\alpha \mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{q}}^k) \equiv \frac{\partial \mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{q}}^k)}{\partial \alpha}$, $\alpha = I, D$, representa a primeira derivada do vetor $\mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{q}}^k)$ (equação 3.8) com relação a inclinação I e a declinação D da magnetização das fontes equivalentes.

3.2.3 Processo iterativo para a estimar a direção de magnetização

Na iteração $k = 0$, utilizamos uma aproximação inicial $\bar{\mathbf{q}}^k = \bar{\mathbf{q}}^0$ para o vetor direção de magnetização \mathbf{q} (equação 3.2) e, manipulando a parte superior da equação 3.15, definimos o seguinte sistema linear para o vetor de momentos magnéticos \mathbf{p} :

$$[\mathbf{G}_p^{k\top} \mathbf{G}_p^k + \mu f_0^k \mathbf{I}] \bar{\mathbf{p}}^k = \mathbf{G}_p^{k\top} \Delta\mathbf{T}^o. \quad (3.22)$$

Para impor o vínculo de positividade (equação 3.12b) ao vetor \mathbf{p} , este sistema linear (equação 3.22) é resolvido usando o método de NNLS (LAWSON e HANSON, 1974; SILVA DIAS *et al.*, 2007). Esta distribuição de momentos magnéticos é então usada para estimar uma correção $\bar{\Delta\mathbf{q}}^k$ no vetor direção de magnetização resolvendo o seguinte sistema não-linear via método de Levenberg-Marquardt (ASTER *et al.*, 2005):

$$[\mathbf{G}_q^{k\top} \mathbf{G}_q^k + \lambda \mathbf{I}] \bar{\Delta\mathbf{q}}^k = \mathbf{G}_q^{k\top} [\Delta\mathbf{T}^o - \Delta\mathbf{T}(\bar{\mathbf{s}}^k)], \quad (3.23)$$

em que λ é o parâmetro de Marquardt e \mathbf{I} é uma matriz identidade. Após estimarmos a correção $\bar{\Delta\mathbf{q}}^k$ na k -ésima iteração, atualizamos a direção de magnetização

aplicando a correção abaixo:

$$\bar{\mathbf{q}}^{k+1} = \bar{\mathbf{q}}^k + \bar{\Delta\mathbf{q}}^k . \quad (3.24)$$

O vetor $\bar{\mathbf{q}}^{k+1}$ é usado para estimar uma nova distribuição de momentos magnéticos com a equação 3.22 e assim sucessivamente. O processo iterativo é interrompido quando a função objetivo (equação 3.12a) é invariante ao longo de sucessivas iterações. Neste caso, espera-se que a camada equivalente reproduza os dados de anomalia de campo total e que sua direção de magnetização seja próxima a das fontes verdadeiras.

3.2.4 Limitação para o caso de fontes magnetizadas verticalmente

O método descrito na subseção 3.2.3 falha quando a magnetização total das fontes possui a direção igual ou aproximadamente vertical. A seguir, apresento a base teórica para o entendimento desta limitação.

Considere o caso limite no qual a magnetização total das fontes é vertical e.g., $I = \pm 90^\circ$. Neste caso, a anomalia de campo total $\Delta T(x, y, z)$ (equação 2.25) não depende da declinação D . Isso pode ser deduzido a partir das equações 2.9 e 2.26 e mostra o seguinte fato: fontes magnetizadas verticalmente não possuem uma declinação definida. Consequentemente, em vez de um mínimo bem definido no espaço dos parâmetros, a função objetivo $\Psi(\mathbf{s})$ (equação 3.12a) possui uma região de mínimos alongada na direção da declinação D . Infelizmente, o vínculo de positividade sobre o vetor de momentos magnéticos (equação 3.12b) não resolve esta ambiguidade.

Para entender como esta ambiguidade afeta nosso método, vamos analisar a matriz \mathbf{G}_q^k (equação 3.21) necessária para estimar a correção $\bar{\Delta\mathbf{q}}^k$ para a direção de magnetização (equação 3.23). Sua i -ésima linha é definida como o produto do vetor de momentos magnéticos estimado $\bar{\mathbf{p}}^k$ e as primeiras derivadas $\partial_\alpha \mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{q}}^k)$, $\alpha = I, D$, do vetor $\mathbf{g}_i(\mathbf{q})$ (equação 3.8), avaliadas em $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}^k$, com relação a inclinação I e a declinação D das fontes equivalentes. O j -ésimo elemento $\partial_\alpha g_{ij}(\bar{\mathbf{q}}^k)$ do vetor $\partial_\alpha \mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{q}}^k)$ é dado por

$$\partial_\alpha g_{ij}(\bar{\mathbf{q}}^k) = \gamma_m \hat{\mathbf{F}}_0^T \mathbf{M}_{ij} \partial_\alpha \hat{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{q}}^k) , \quad \alpha = I, D , \quad (3.25)$$

em que

$$\partial_I \hat{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{q}}^k) = \begin{bmatrix} -\sin \bar{I}^k \cos \bar{D}^k \\ -\sin \bar{I}^k \sin \bar{D}^k \\ \cos \bar{I}^k \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

e

$$\partial_D \hat{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{q}}^k) = \begin{bmatrix} -\cos \bar{I}^k \sin \bar{D}^k \\ \cos \bar{I}^k \cos \bar{D}^k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

são as derivadas do vetor unitário $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \equiv \hat{\mathbf{u}}(I, D)$ (equação 2.9) com relação a I e D , avaliadas na direção de magnetização $\bar{\mathbf{q}}^k = [\bar{I}^k \ \bar{D}^k]^\top$.

Note que, quando a inclinação estimada \bar{I}^k se aproxima de $\pm 90^\circ$, todos os elementos que formam o vetor $\partial_D \hat{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{q}}^k)$ (equação 3.27) e, consequentemente, a segunda coluna da matriz \mathbf{G}_q^k (equação 3.21) tendem a zero. Como consequência, o problema não-linear para estimar a direção de magnetização (equação 3.23) torna-se insensível a mudanças na declinação D e a convergência do método fica muito lenta.

3.3 Profundidade da camada (z_c) e parâmetro de regularização (μ)

Nos métodos descritos nas seções 3.1 e 3.2, dois parâmetros são importantes. O primeiro é a profundidade da camada z_c (Figuras 3.2 e 3.1) e o segundo é o parâmetro de regularização μ (equações 3.5 e 3.12a).

O método utilizado para a escolha da profundidade da camada é baseado na abordagem clássica proposta por DAMPNEY (1969). Aquele autor aponta que a distância relativa entre os planos da camada e dos dados observados deve variar entre 2, 5 a 6, 0 vezes o espaçamento do grid de dados. Vale ressaltar que DAMPNEY (1969) aplicou este critério de escolha a da profundidade da camada usando dados gravimétricos regularmente espaçados. No presente trabalho, adaptei o critério de DAMPNEY (1969) e defini que a distância relativa da camada até a altitude média dos dados deve variar entre 2 a 3 vezes o valor do maior espaçamento entre os dados. É necessário ressaltar que este intervalo foi definido empiricamente.

Já para determinar o parâmetro de regularização μ (equações 3.5 e 3.12a), usei o método da curva-L (HANSEN e O'LEARY, 1993), que serve como uma filtragem de ruídos dos dados, sem que o resultado final perca informações. O “cotovelo” desta curva é o valor ótimo de parâmetro no qual é feito o balanço entre a função de ajuste e a função regularizadora.

Capítulo 4

Simulações numéricas do desenvolvimento I

Testamos a técnica da camada equivalente para o cálculo das componentes e da amplitude do campo magnético em dois conjuntos de dados sintéticos simulando diferentes amostras de rochas. No primeiro teste, aplicamos a técnica para analisar a dependência da direção de magnetização para o cálculo das componentes e da amplitude em um modelo que representa uma amostra de rocha homogeneamente magnetizada (Seção 4.1). No segundo, o conjunto de dados sintéticos é gerado por um modelo com mais complexidade, que contém grãos fortemente magnetizados e concentrados em uma determinada região ao longo da amostra sintética de rocha (Seção 4.2).

4.1 Amostra simples

Geramos uma amostra de rocha sintética que pode simular tanto uma rocha ígnea quanto uma rocha sedimentar com intensidade de magnetização alta, considerando que a mesma seja homogeneamente magnetizada (COLLINSON, 1983; DUNLOP e ÖZDEMİR, 1997). Com este propósito, geramos um prisma retangular de dimensões 18 mm, 12 mm e 2 mm ao longo dos eixos x , y e z , respectivamente. A intensidade de magnetização é igual a 1,5 A/m. A direção de magnetização é 20° para a inclinação e 30° para a declinação. Os dados foram calculados em um grid regular de 100 × 100 pontos ao longo dos eixos x e y , respectivamente. A distância sensor-amostra simulada foi fixada em 150 μm acima da superfície da amostra. Por fim, os dados foram contaminados com ruído Gaussiano de média zero e desvio padrão 20 nT. A componente vertical do campo magnético pode ser vista na figura 4.1.

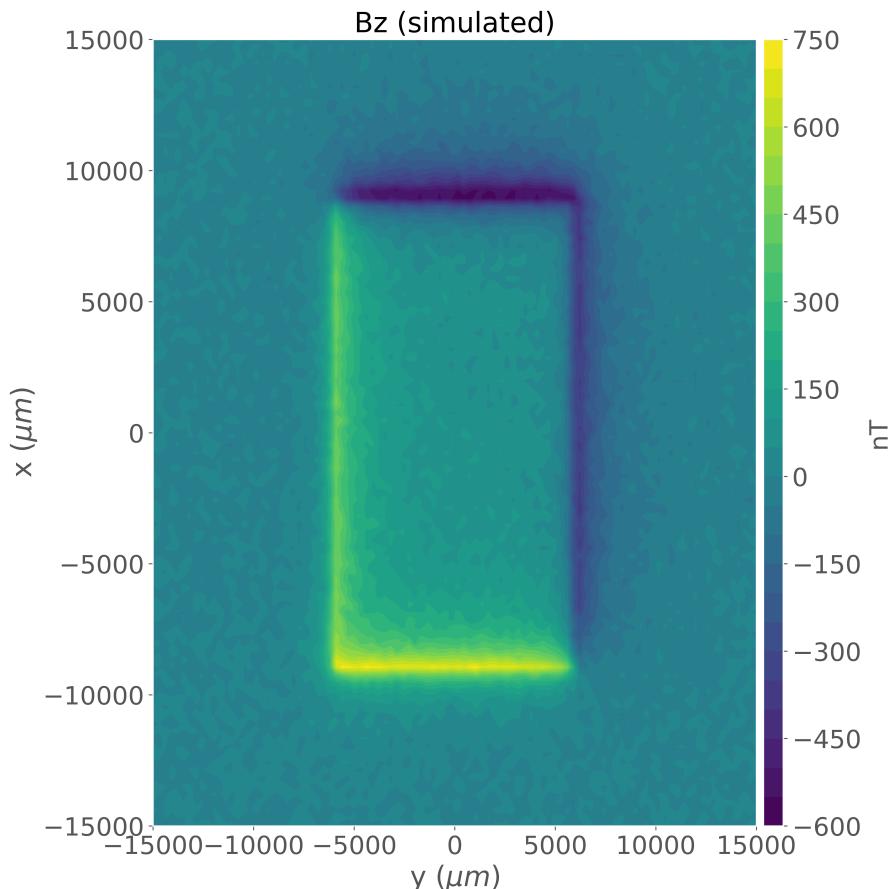


Figura 4.1: Aplicação a dados sintéticos para amostra homogeneamente magnetizada. Componente vertical do campo magnético observado contaminada com ruído Gaussiano de média zero e desvio padrão 20 nT. A direção de magnetização é igual a 20° para a inclinação e 30° para a declinação. A distância sensor-amostra igual a $150 \mu\text{m}$.

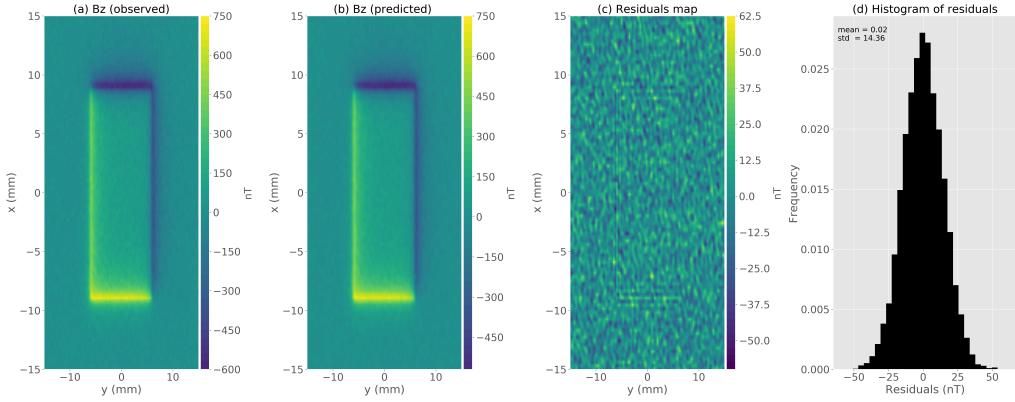


Figura 4.2: Aplicação a dados sintéticos para a amostra homogênea com a mesma direção de magnetização da camada equivalente. (a) Componente vertical observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.

4.1.1 Camada equivalente com a mesma direção de magnetização da amostra

Utilizamos uma camada equivalente composta por um grid de 100×100 fontes equivalentes posicionadas a uma profundidade de $z_c = 750 \mu\text{m}$ abaixo do plano de observação. A direção de magnetização para as fontes equivalentes foi de 20° para a inclinação e 30° para a declinação. Utilizando a equação 3.6, estimamos a distribuição de momentos magnéticos (não mostrada). A Figura 4.2b mostra os dados preditos produzidos pela camada equivalente. A Figura 4.2c mostra os resíduos definidos pela diferença entre os dados simulados (Figura 4.2a) e os dados preditos (Figura 4.2b). Os resíduos aparecem com distribuição normal de média $-0,02 \text{ nT}$ e desvio padrão $14,36 \text{ nT}$ como mostrado na figura 4.2d. Com a distribuição de momentos magnéticos estimada, calculamos as componentes e a amplitude do campo magnético com as equações 3.1–3.4 e 3.7 (Figura 4.3a-d). Com o objetivo de verificarmos se a camada equivalente produziu as componentes e a amplitude do campo magnético com sucesso, calculamos as componentes e a amplitude verdadeiras que são mostradas nas Figuras 4.4a, 4.4e e 4.4i. As Figuras 4.4b, 4.4f e 4.4j são os dados preditos pela camada equivalente, que são os mesmos dados mostrados na Figura 4.2. As Figuras 4.4c, 4.4g e 4.4k são resíduos entre os dados verdadeiros e os dados preditos pela camada. As Figuras 4.4d, 4.4h e 4.4l são os histogramas dos resíduos. Diante destes resultados, podemos concluir que as estimativas para as componentes e a amplitude do campo magnético foram excelentes, de forma que a inversão produziu dados muito próximos dos verdadeiros.

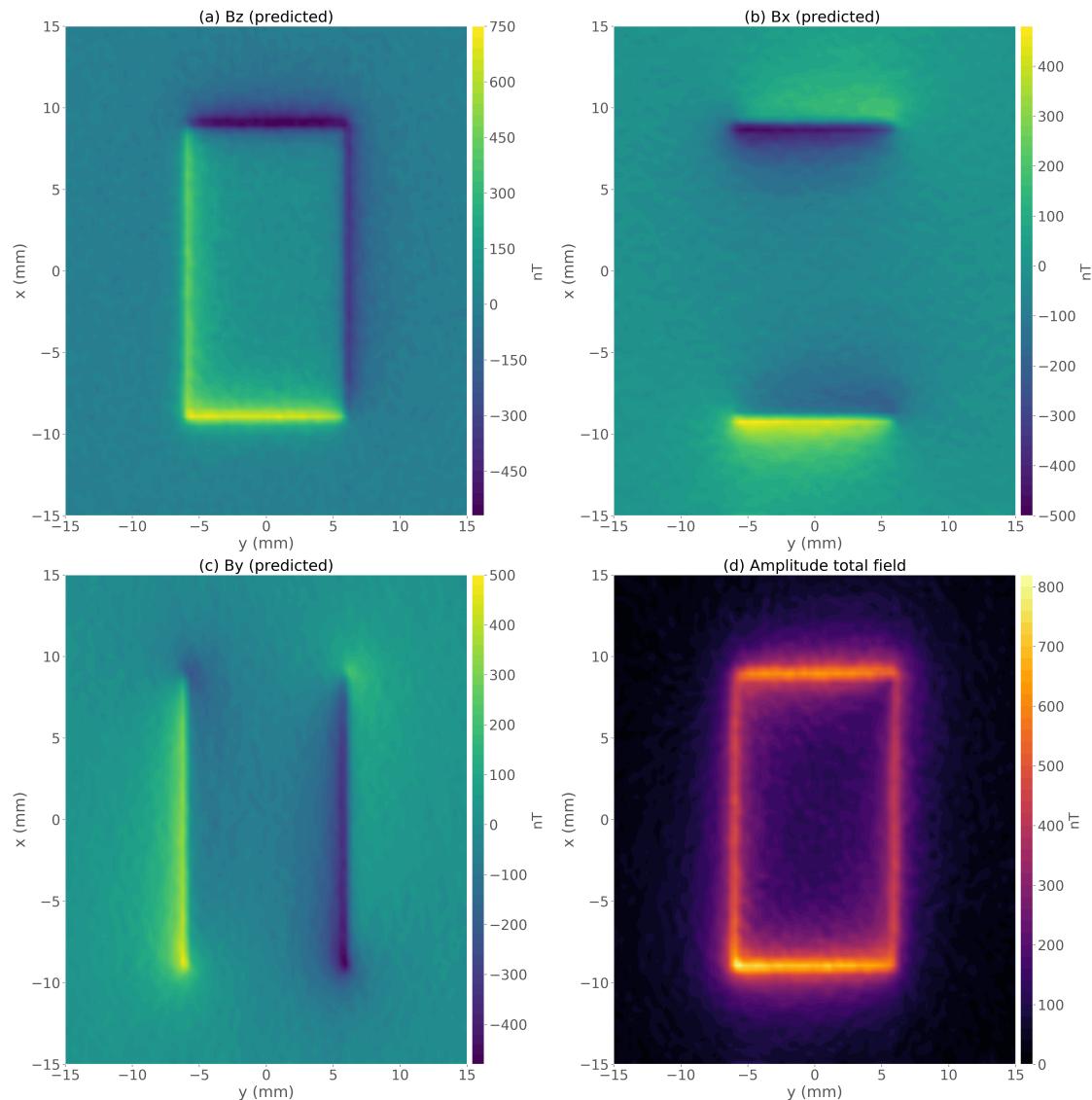


Figura 4.3: Aplicação a dados sintéticos para a amostra homogênea com a mesma direção de magnetização da camada equivalente. (a) Componente vertical predita pela camada. (b) Componente x do campo magnético predita pela camada. (c) Componente y do campo magnético predita pela camada. (d) Amplitude do campo magnético calculado através da equação 3.7.

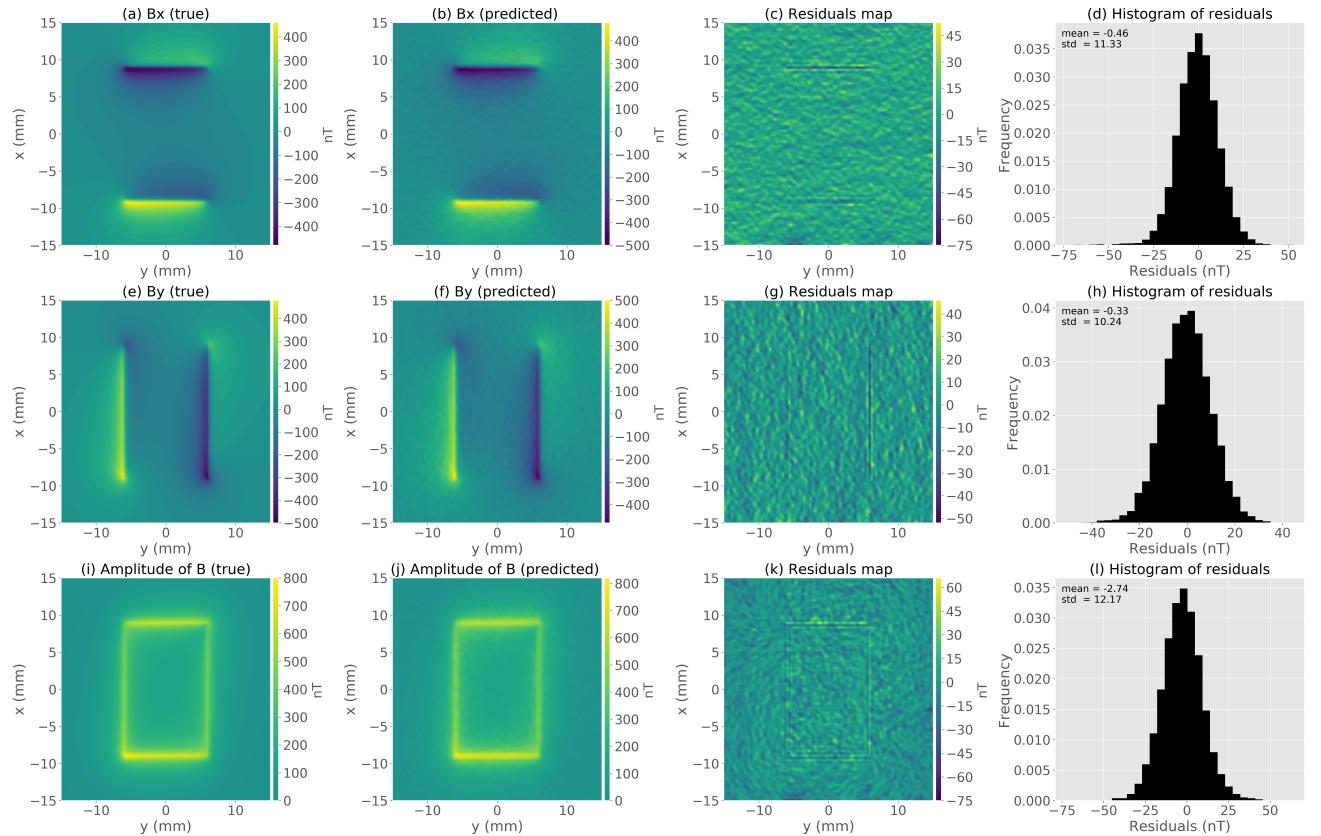


Figura 4.4: Aplicação a dados sintéticos para a amostra homogênea com a mesma direção de magnetização da camada equivalente. (a), (e) e (i) Componentes x , y e a amplitude verdadeiras do campo magnético, respectivamente. (b), (f) e (j) Componentes x , y e a amplitude do campo magnético preditas pela camada equivalente, respectivamente. (c), (g) e (k) Mapas dos resíduos. (d), (h) e (l) Histograma dos resíduos.

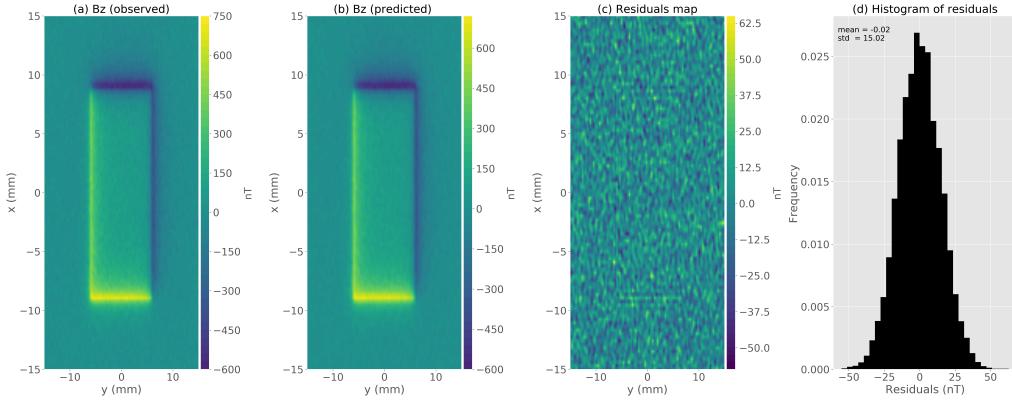


Figura 4.5: Aplicação a dados sintéticos para a amostra homogênea com direção de magnetização diferente da camada equivalente. (a) Componente vertical observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.

4.1.2 Camada equivalente com direção de magnetização diferente da amostra

Utilizamos uma camada equivalente composta por um grid de 100×100 fontes equivalentes posicionadas a uma profundidade de $z_c = 750 \mu\text{m}$ abaixo do plano de observação. A direção de magnetização para as fontes equivalentes foi de 50° para a inclinação e 60° para a declinação, enquanto a amostra possui 20° para a inclinação e 30° para a declinação. Utilizando a equação 3.6, estimamos a distribuição de momentos magnéticos (não mostrado). A figura 4.5b mostra os dados preditos produzidos pela camada equivalente. A figura 4.5c mostra os resíduos definidos pela diferença entre os dados simulados (Figura 4.5a) e os dados preditos (Figura 4.5b). Os resíduos aparecem com distribuição normal de média $-0,02 \text{ nT}$ e desvio padrão $15,02 \text{ nT}$ como mostrado na figura 4.5d. Com a distribuição de momentos magnéticos estimada, conseguimos calcular as componentes e a amplitude do campo magnético com as equações 3.1–3.4 e 3.7 (Figura 4.6a-d). Com o objetivo de verificarmos se a camada equivalente produziu as componentes e a amplitude do campo magnético com sucesso, calculamos os valores verdadeiros que são mostrados nas figuras 4.7a, 4.7e e 4.7i. As Figuras 4.7b, 4.7f e 4.7j são os dados preditos pela camada equivalente. As Figuras 4.7c, 4.7g e 4.7k são resíduos entre os dados verdadeiros e os dados preditos pela camada. As Figuras 4.7d, 4.7h e 4.7l são os histogramas dos resíduos. Os resultados mostram que apesar da camada equivalente ter direção de magnetização muito diferente da direção da amostra, as estimativas para as componentes e a amplitude do campo magnético foram aceitáveis.

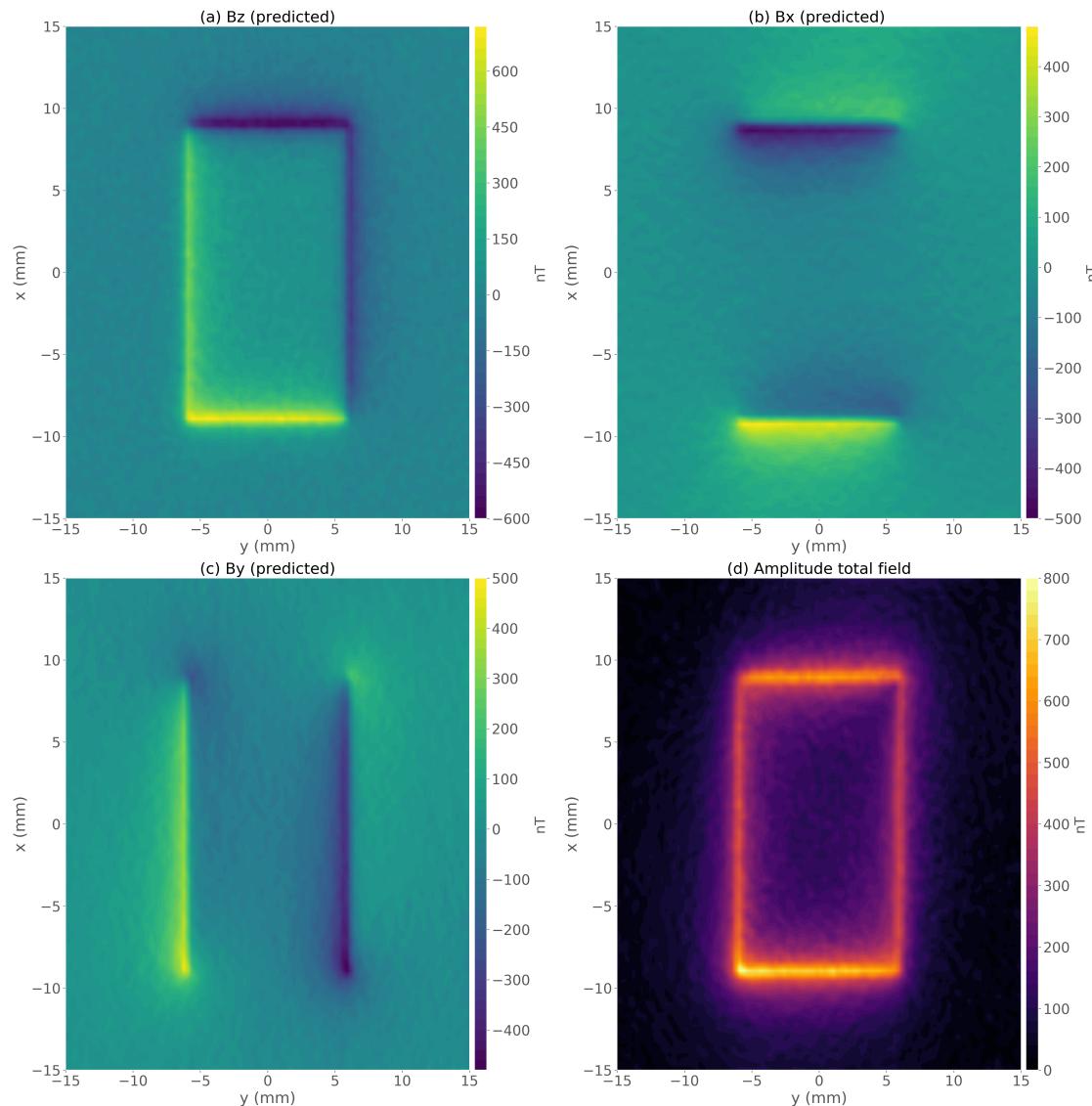


Figura 4.6: Aplicação a dados sintéticos para a amostra homogênea com direção de magnetização diferente da camada equivalente. (a) Componente vertical predita pela camada. (b) Componente x do campo magnético predita pela camada. (c) Componente y do campo magnético predita pela camada. (d) Amplitude do campo magnético calculado através da equação 3.7.

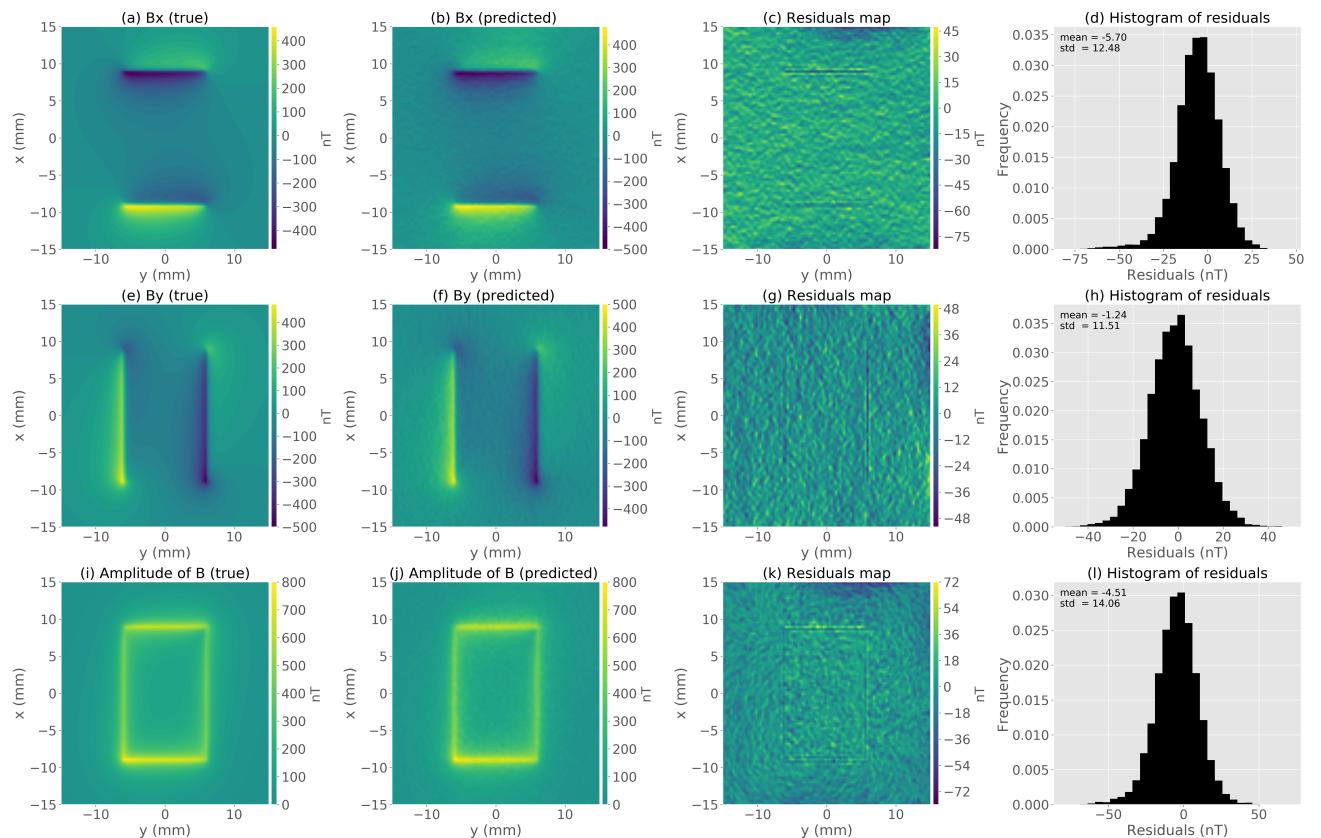


Figura 4.7: Aplicação a dados sintéticos para a amostra homogênea com direção de magnetização diferente da camada equivalente. (a), (e) e (i) Componentes x , y e a amplitude verdadeiras do campo magnético, respectivamente. (b), (f) e (j) Componentes x , y e a amplitude do campo magnético preditas pela camada equivalente, respectivamente. (c), (g) e (k) Mapas dos resíduos. (d), (h) e (l) Histograma dos resíduos.

4.2 Amostra com heterogeneidades

Neste segundo teste, geramos uma amostra de rocha sintética que possui uma distribuição de magnetização mais complexa que no caso anterior. A geometria desta amostra é dada por um prisma poligonal com espessura igual a 2,5 mm. A intensidade de magnetização é igual a 1,5 A/m. A direção de magnetização é igual a 90° para inclinação e 0° para a declinação. Além disso, adicionamos 300 dipolos de raio igual a 100 microns e intensidade de magnetização 500 A/m dispostos aleatoriamente em uma determinada região da amostra, e possuem a mesma direção de magnetização do prisma poligonal. Este conjunto de dipolos representam grãos multidomínio (MD) que podem ser encontrados em rochas ígneas e sedimentares (BUTLER, 1998; CLARK, 1997; DUNLOP e ÖZDEMİR, 1997). Os dados foram calculados em um grid regular de 121×99 pontos ao longo dos eixos x e y , respectivamente. A distância sensor-amostra é igual a $138 \mu\text{m}$ acima da superfície da amostra. Simulamos um ruído Gaussiano de média zero e desvio padrão de 20 nT. A componente vertical do campo magnético calculada é mostrada na Figura 4.8.

4.2.1 Camada equivalente com a mesma direção de magnetização da amostra

Utilizamos uma camada equivalente composta por um grid de 121×99 fontes equivalentes posicionadas a uma profundidade de $z_c = 868 \mu\text{m}$ abaixo do plano de observação. A direção de magnetização para as fontes equivalentes foi de 90° para a inclinação e 0° para a declinação, a mesma da amostra. Utilizando a equação 3.6, estimamos a distribuição de momentos magnéticos (não mostrado). A Figura 4.9b mostra os dados preditos produzidos pela camada equivalente. A Figura 4.9c mostra os resíduos definidos pela diferença entre os dados simulados (Figura 4.9a) e os dados preditos (Figura 4.9b). Os resíduos aparecem com distribuição normal de média $-0,09 \text{ nT}$ e desvio padrão $16,79 \text{ nT}$ como mostrado na figura 4.9d. Com a distribuição de momentos magnéticos estimada, conseguimos calcular as componentes e a amplitude do campo magnético com as equações 3.1–3.4 e 3.7 (Figura 4.10a-d). Com o objetivo de verificarmos se a camada equivalente produziu as componentes e a amplitude do campo magnético com sucesso, calculamos os valores verdadeiros que são mostrados nas figuras 4.11a, 4.11e e 4.11i. As figuras 4.11b, 4.11f e 4.11j são os dados preditos pela camada equivalente. As figuras 4.11c, 4.11g e 4.11k são resíduos entre os dados verdadeiros e os dados preditos pela camada. As figuras 4.11d, 4.11h e 4.11l são os histogramas dos resíduos. Embora exista a influência de dipolos interferentes, as estimativas para as componentes e a amplitude do campo magnético foram aceitáveis. Portanto, a estimativa do conjunto de

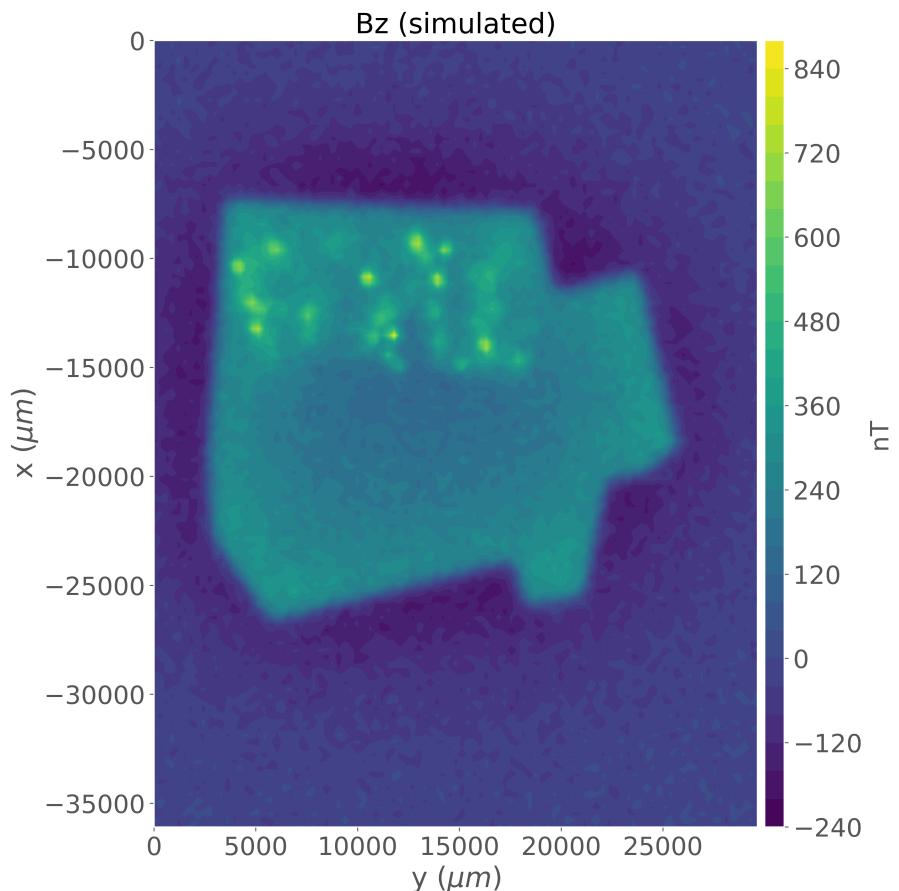


Figura 4.8: Componente vertical do campo magnético observado contaminada com ruído Gaussiano de média zero e desvio padrão 20 nT para a amostra heterogênea. A direção de magnetização é igual a 90° para a inclinação e 0° para a declinação. A distância sensor-amostra igual a $138 \mu m$.

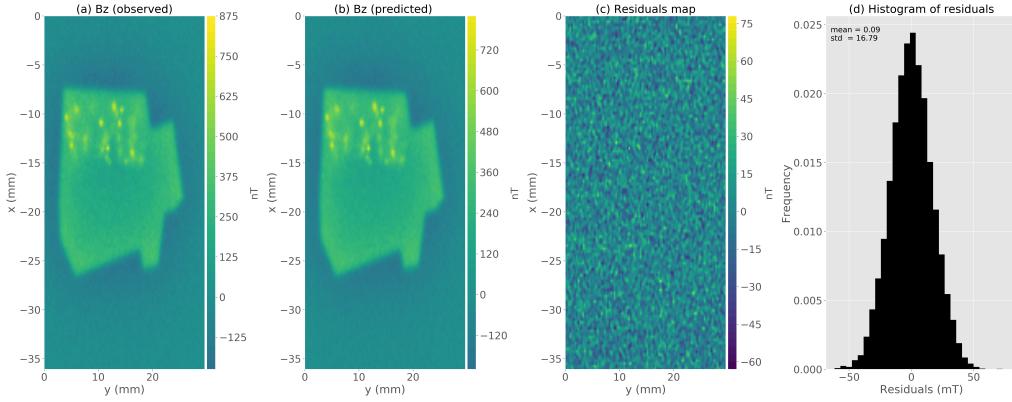


Figura 4.9: Aplicação a dados sintéticos para a amostra heterogênea com a mesma direção de magnetização da camada equivalente. (a) Componente vertical observada (mesmos dados mostrados na Figura 4.8). (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.

momentos magnéticos produziu um bom ajuste dos dados.

4.2.2 Camada equivalente com direção de magnetização diferente da amostra

Utilizamos uma camada equivalente composta por um grid de 121×99 fontes equivalentes posicionadas a uma profundidade de $z_c = 868 \mu\text{m}$ abaixo do plano de observação. A direção de magnetização para as fontes equivalentes foi de 40° para a inclinação e 50° para a declinação, enquanto a amostra possui 90° para a inclinação e 0° para a declinação. Utilizando a equação 3.6, estimamos a distribuição de momentos magnéticos (não mostrada). A Figura 4.12b mostra os dados preditos produzidos pela camada equivalente. A Figura 4.12c mostra os resíduos definidos pela diferença entre os dados simulados (Figura 4.12a) e os dados preditos (Figura 4.12b). Os resíduos aparecem com distribuição normal de média $-0,2 \text{ nT}$ e desvio padrão $16,07 \text{ nT}$ como mostrado na figura 4.12d. Com a distribuição de momentos magnéticos estimada, conseguimos calcular as componentes e a amplitude do campo magnético com as equações 3.1–3.4 e 3.7 (Figura 4.13a-d). Com o objetivo de verificarmos se a camada equivalente produziu as componentes e a amplitude do campo magnético com sucesso, calculamos os valores verdadeiros que são mostrados nas Figuras 4.14a, 4.14e e 4.14i. As figuras 4.14b, 4.14f e 4.14j são os dados preditos pela camada equivalente. As Figuras 4.14c, 4.14g e 4.14k são resíduos entre os dados verdadeiros e os dados preditos pela camada. As figuras 4.14d, 4.14h e 4.14l são os histogramas dos resíduos. Apesar da camada equivalente ter direção de magnetização muito diferente da direção da amostra e também a presença de dipolos interferentes, as estimativas para as componentes e a amplitude do campo

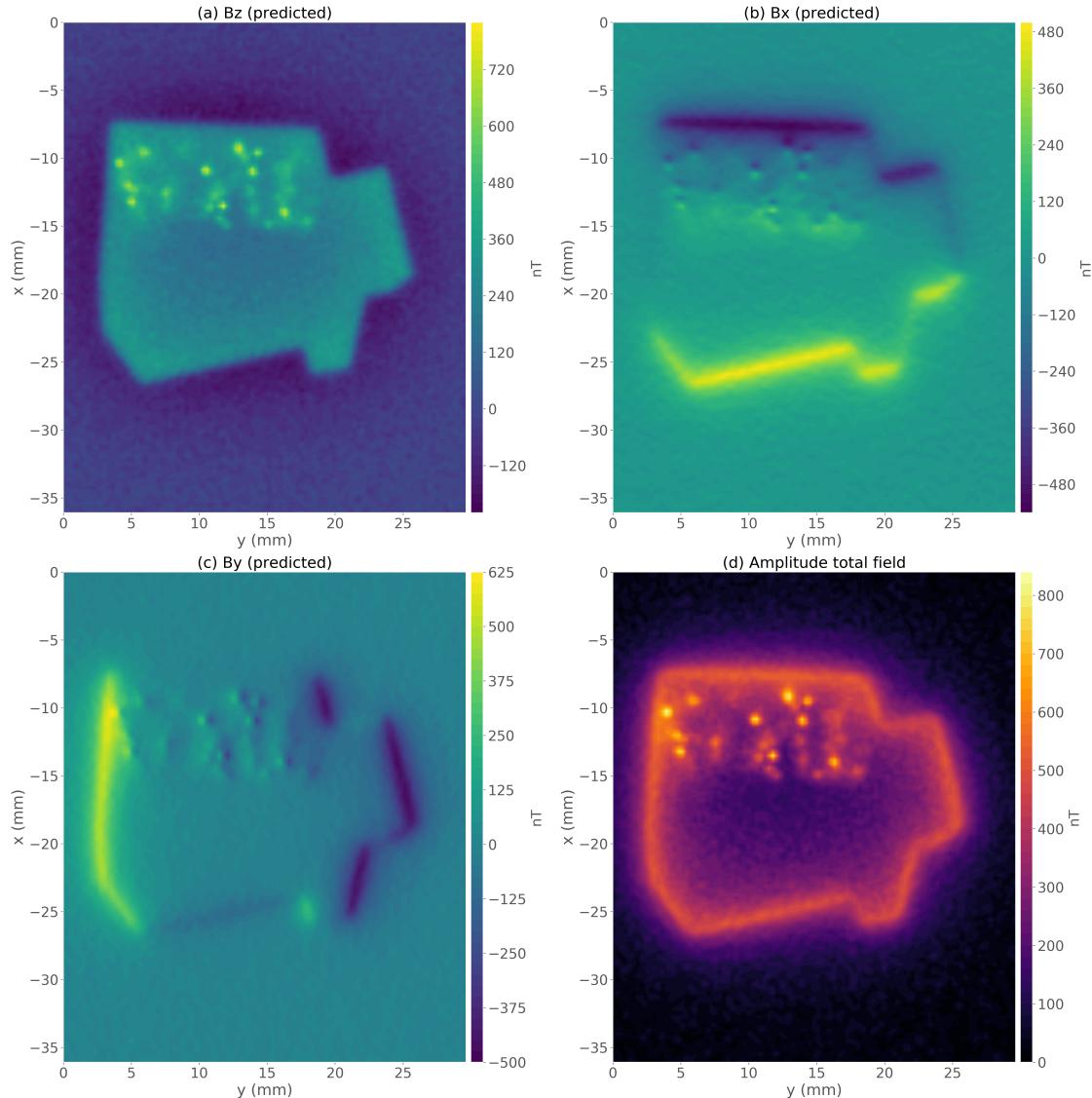


Figura 4.10: Aplicação a dados sintéticos para a amostra heterogênea com a mesma direção de magnetização da camada equivalente. (a) Componente vertical predita pela camada. (b) Componente x do campo magnético predita pela camada. (c) Componente y do campo magnético predita pela camada. (d) Amplitude do campo magnético calculado através da equação 3.7.

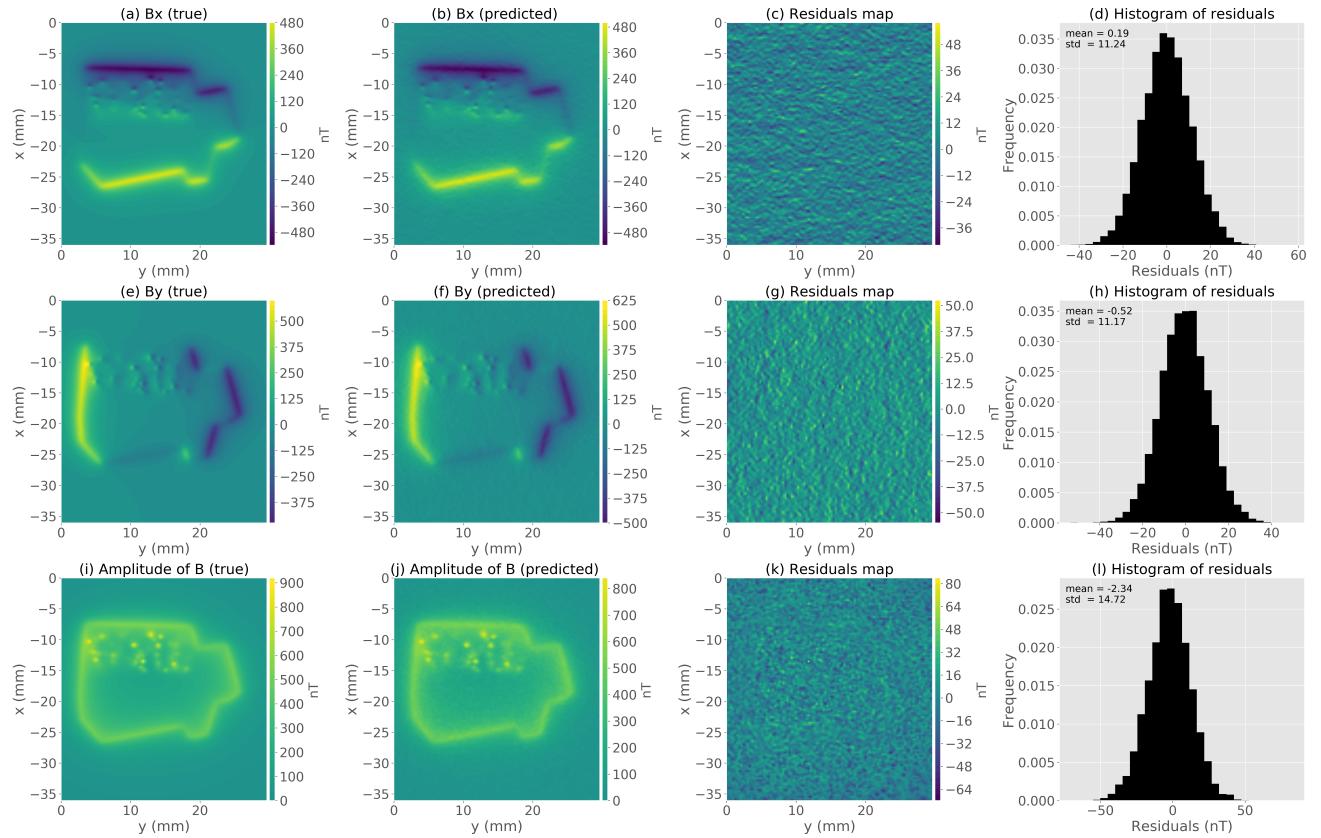


Figura 4.11: Aplicação a dados sintéticos para a amostra heterogênea com a mesma direção de magnetização da camada equivalente. (a), (e) e (i) Componentes x , y e a amplitude verdadeiras do campo magnético, respectivamente. (b), (f) e (j) Componentes x , y e a amplitude do campo magnético preditas pela camada equivalente, respectivamente. (c), (g) e (k) Mapas dos resíduos. (d), (h) e (l) Histograma dos resíduos.

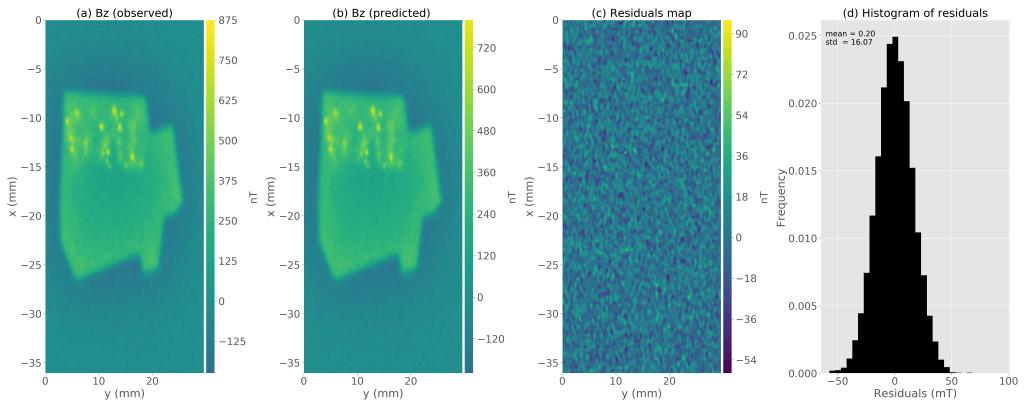


Figura 4.12: Aplicação a dados sintéticos para a amostra heterogênea com direção de magnetização diferente da camada equivalente. (a) Componente vertical observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.

magnético foram próximas as verdadeiras. Podemos concluir que a distribuição de momentos magnéticos estimada produziu um bom ajuste dos dados.

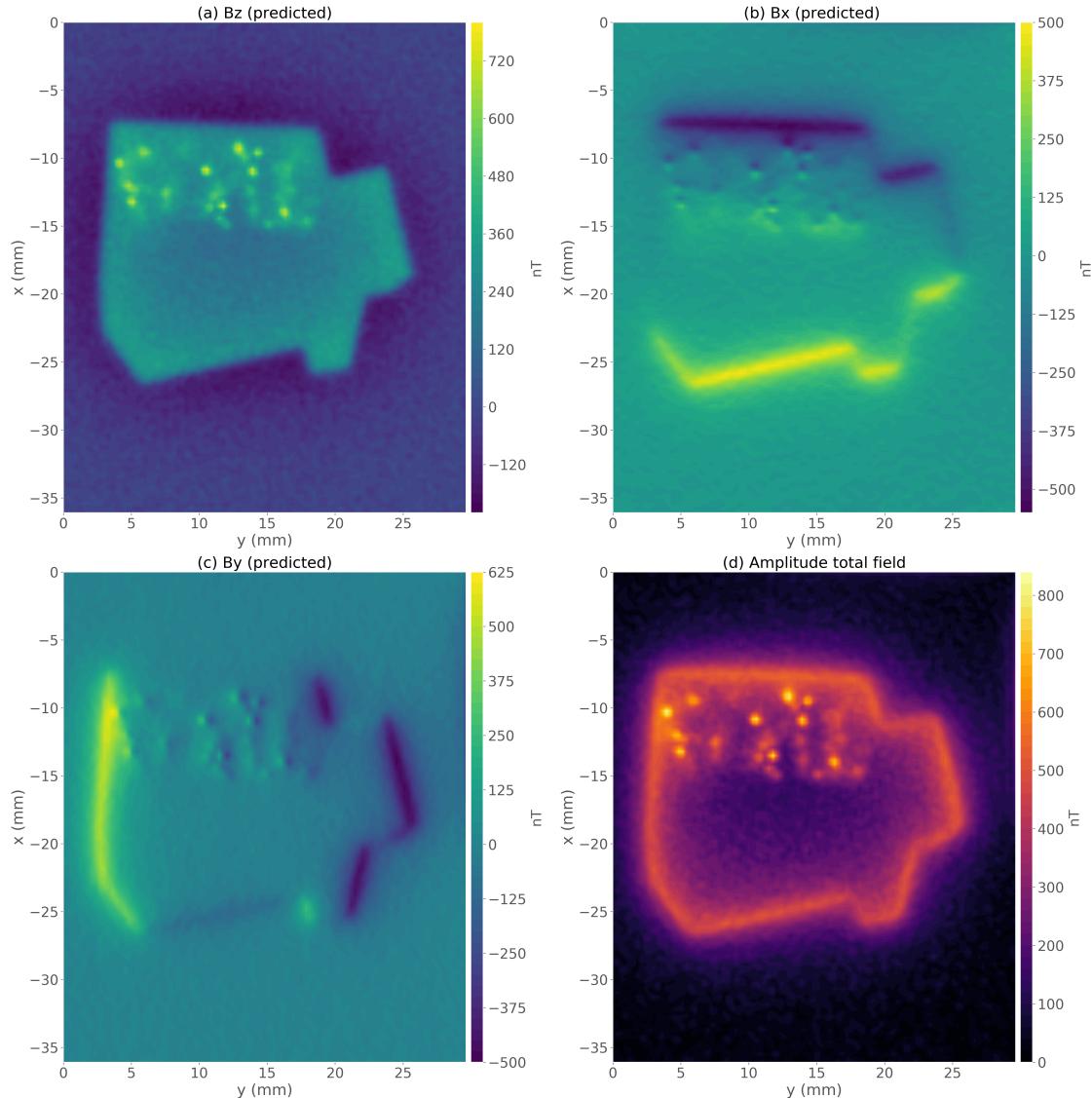


Figura 4.13: Aplicação a dados sintéticos para a amostra heterogênea com direção de magnetização diferente da camada equivalente. (a) Componente vertical predita pela camada. (b) Componente x do campo magnético predita pela camada. (c) Componente y do campo magnético predita pela camada. (d) Amplitude do campo magnético calculado através da equação 3.7.

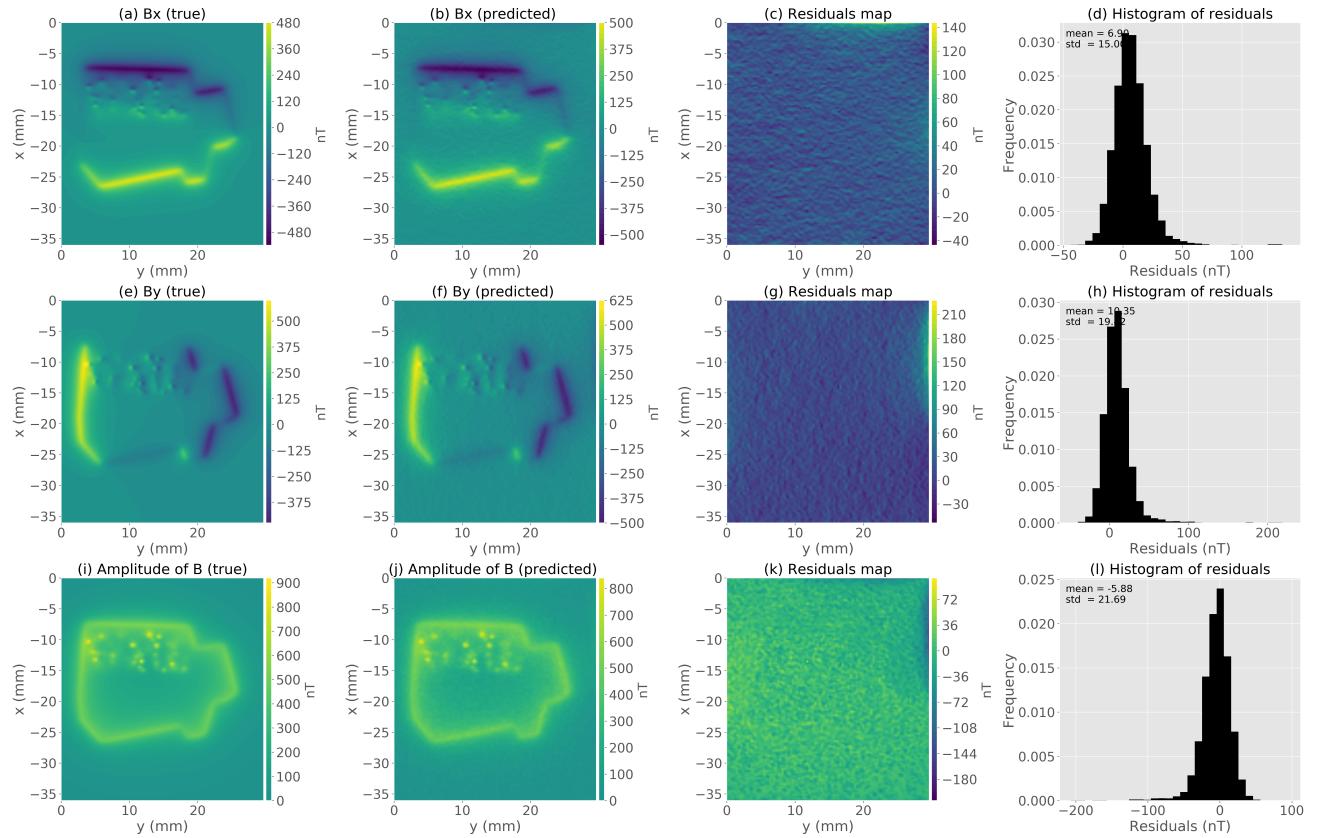


Figura 4.14: Aplicação a dados sintéticos para a amostra heterogênea com direção de magnetização diferente da camada equivalente. (a),(e) e (i) Componentes x , y e a amplitude verdadeiras do campo magnético, respectivamente. (b), (f) e (j) Componentes x , y e a amplitude do campo magnético preditas pela camada equivalente, respectivamente. (c), (g) e (k) Mapas dos resíduos. (d), (h) e (l) Histograma dos resíduos.

Capítulo 5

Aplicação a dados da amostra de Vredefort

Uma cratera de impacto é o registro de um dos processos geológicos mais rápidos já conhecidos. As altas pressões (> 5 GPa) e as altas temperaturas ($> 1000^{\circ}\text{C}$) de choque são responsáveis pela formação de sistemas geoquímicos únicos. A evolução de tais sistemas podem gerar assinaturas petrofísicas complexas (PILKINGTON e GRIEVE, 1992; PILKINGTON e HILDEBRAND, 2003; YOKOYAMA *et al.*, 2015). Um exemplo destas assinaturas pode ser observado em dados magnéticos do domo de Vredefort, na África do Sul. O domo de Vredefort é uma das mais extensas estruturas de impacto já conhecida na Terra, com um diâmetro de aproximadamente 250 km, de forma que estudos magnéticos tem sido realizados desde os anos 60. Esta estrutura possui diversos tipos de impactitos, tais como veios de impacto, diques com estrutura granofírica e *shatter cones*. Neste contexto, estudos paleomagnéticos são recorrentes em veios de impactos, especialmente os pseudotaquilitos. Estas rochas são escuras e vítreas formadas, principalmente, por forte fricção. Elas são encontradas em zonas de falha e cisalhamentos, e em algumas estruturas de impacto tais como o domo de Vredefort. Portanto, neste trabalho, foi utilizada uma amostra da região de Leeukop Quarry no domo de Vredefort (ARAUJO *et al.*, 2019a), similar às usadas em outros estudos paleomagnéticos (ARAUJO *et al.*, 2019b; CARPORZEN *et al.*, 2005; DRESSLER e REIMOLD, 2004; LANA *et al.*, 2003; PASSCHIER, 1982). Na Figura 5.1a apresentamos o mapa de microscopia magnética da amostra de Vredefort. Estas medidas foram realizadas em ambiente com blindagem para campos magnéticos de até 15 mT. Além disso, aplicamos um campo magnético de 400 mT na direção do eixo z . Os dados foram medidos em um grid regular de 121×99 pontos (um total de $N = 11979$ observações) sobre uma área que se estende em 36 mm e 30 mm ao longo dos eixos x e y , respectivamente. A distância sensor-amostra foi igual a $138\ \mu\text{m}$ acima da superfície da amostra.

Para a inversão, utilizamos uma camada equivalente formada por um grid de

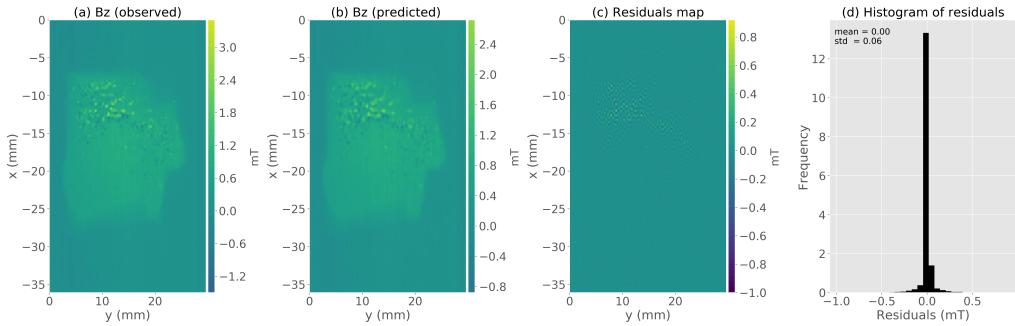


Figura 5.1: Aplicação a dados de laboratório para a amostra de Vredefort (ARAUJO *et al.*, 2019a). (a) Componente vertical observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.

121×99 dipolos (um total de $M = 11979$ fontes equivalentes) posicionadas a uma profundidade constante de $z_c = 818 \mu\text{m}$ abaixo da superfície de observação. A direção de magnetização para os dipolos é igual a 90° para a inclinação e 0° para a declinação, que é a mesma direção do campo aplicado na amostra. Resolvendo a equação 3.6, estimamos a distribuição de momentos magnéticos sobre a camada equivalente (não mostrado). A figura 5.1b mostra os dados preditos produzidos pela camada equivalente. Na figura 5.1c é apresentado o mapa dos resíduos, que é definido como a diferença entre os dados observados (Figura 5.1a) e os dados preditos (Figura 5.1b). O histograma dos resíduos aparece com média de 0 mT e desvio padrão de 0,03 mT (Figura 5.1d). Isto significa que a distribuição de momentos magnéticos produziu um ajuste aceitável dos dados observados. As componentes e a amplitude do campo magnético preditas pela camada equivalente são mostradas nas figuras 5.2a, 5.2b, 5.2c e 5.2d. O resultado apresentado na figura 5.2d mostra uma concentração de minerais magnéticos na borda superior da amostra de Vredefort. Com os resultados apresentados, podemos concluir que a técnica da camada equivalente pode ser uma ferramenta útil para o processamento de dados magnéticos, de forma que conseguimos calcular as componentes do campo magnético e sua amplitude sem termos conhecimento prévio da direção de magnetização da fonte magnética.

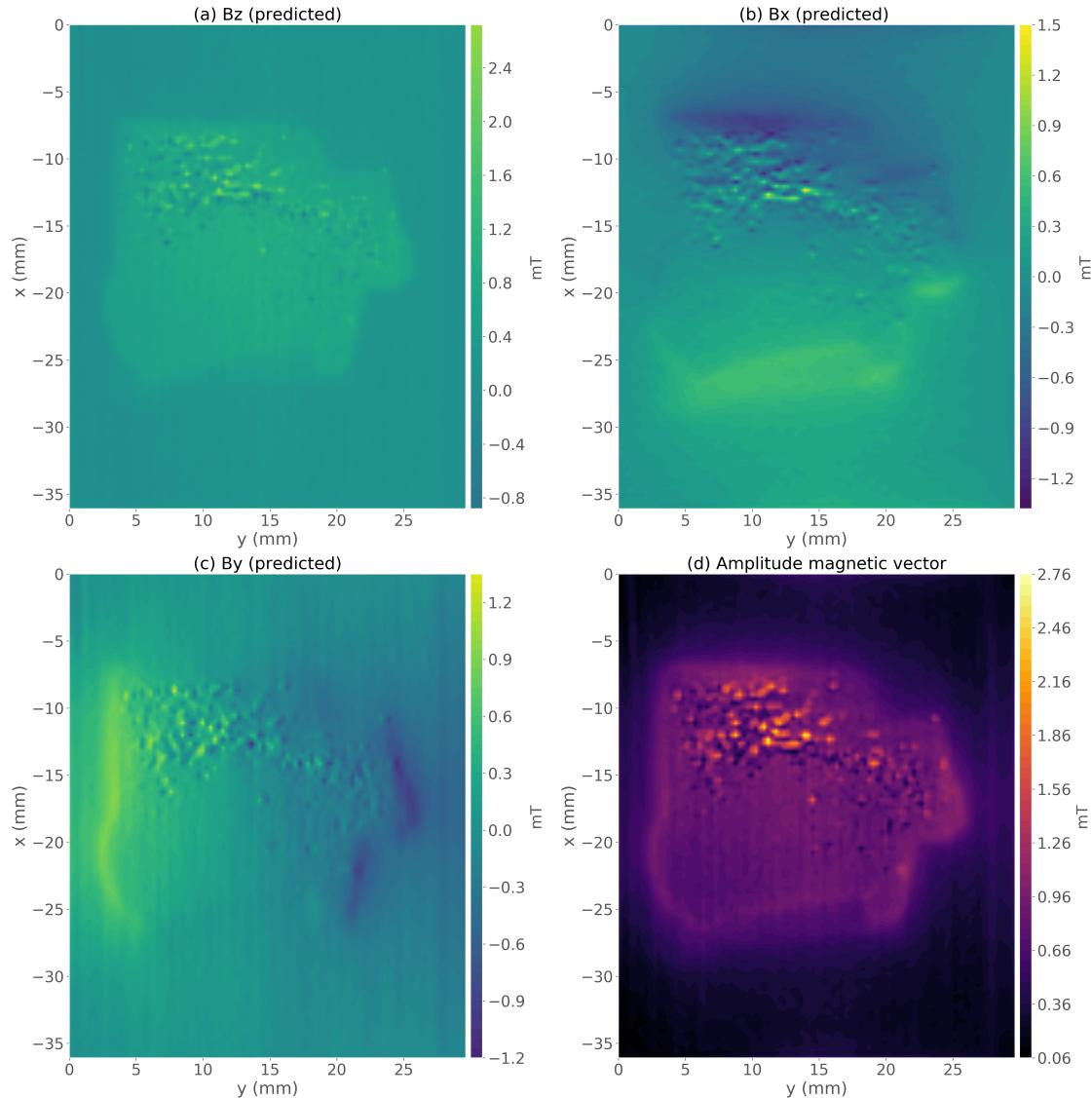


Figura 5.2: Aplicação a dados de laboratório para a amostra de Vredefort (ARAUJO *et al.*, 2019a). (a) Componente vertical predita pela camada. (b) Componente x do campo magnético predita pela camada. (c) Componente y do campo magnético predita pela camada. (d) Amplitude do campo magnético calculado através da equação 3.7.

Capítulo 6

Simulações numéricas do desenvolvimento II

Aplicamos o método proposto para estimar a direção de magnetização em três conjuntos de dados sintéticos simulando diferentes cenários geológicos. O primeiro deles é um modelo contendo um conjunto de fontes com diferentes geometrias e mesma direção de magnetização (Seção 6.1). O segundo conjunto de dados é gerado por um modelo contendo múltiplas fontes com mesma direção de magnetização, porém uma delas representando uma fonte rasa (Seção 6.2). No terceiro teste violamos a hipótese de magnetização unidirecional simulando uma fonte rasa com diferente direção de magnetização (Seção 6.3).

Em todos os testes, os dados simulados foram calculados em um grid regular de 49×25 pontos (um total de $N = 1225$ observações) a uma altura constante de 100 m. Assumimos uma área de observação que se estende por 12 km ao longo do eixo x e do eixo y , resultando em um espaçamento entre os dados de 250 m e 500 m ao longo dos eixos x e y , respectivamente. Os dados foram contaminados com um ruído Gaussiano de média zero e desvio padão de 10 nT. O campo geomagnético principal simulado possui $I_0 = -40^\circ$ e $D_0 = -22^\circ$ para a inclinação e declinação, respectivamente. Para o processo de inversão, utilizamos uma camada equivalente composta por um grid de 49×25 dipolos (um total de $M = 1225$ fontes equivalentes) posicionados a uma profundidade de $z_c = 1150$ m abaixo do plano de observação (2,5 vezes o maior espaçamento entre os dados). Para a escolha do parâmetro de regularização (μ) utilizamos a curva-L. Nossa algoritmo começa com uma aproximação inicial $\bar{\mathbf{q}}^0 = (-10^\circ, -10^\circ)$ para a inclinação e a declinação, respectivamente.

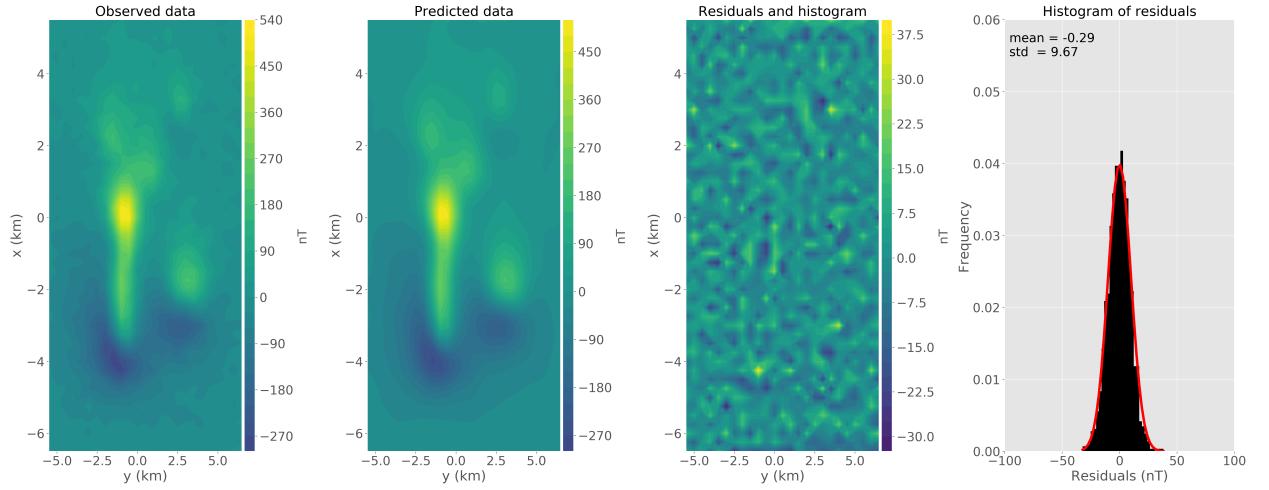


Figura 6.1: Aplicação a dados sintéticos para múltiplas fontes com a mesma direção de magnetização. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.

6.1 Fontes de mesma direção de magnetização

Geramos um prisma poligonal cujo topo é posicionado a uma profundidade de 450 m e a base a 3150 m com intensidade de magnetização de 4 A/m. Geramos também duas esferas com intensidade de magnetização igual a 3 A/m e raio 500 m. As coordenadas de seus respectivos centros são $x_c = 1800$ m, $y_c = -1800$ m e $z_c = 1000$ m e $x_c = 800$ m, $y_c = 800$ m and $z_c = 1000$ m. Simulamos dois prismas retangulares com 2.5 A/m de intensidade de magnetização. O prisma menor possui topo a uma profundidade de 450 m e lados de comprimento 1000 m, 700 m e 500 m ao longo dos eixos x , y e z , respectivamente. O prisma maior tem o topo localizado a uma profundidade de 500 m e lados de comprimento 1000 m, 2000 m e 1550 m ao longo dos eixos x , y e z , respectivamente. Todas as fontes simuladas tem inclinação -25° e declinação 30° . O dado observado é mostrado na figura 6.1a.

A figura 6.1b mostra os dados preditos produzidos pela camada equivalente. A figura 6.1c mostra os resíduos definidos pela diferença entre os dados simulados (Figura 6.1a) e os dados preditos (Figura 6.1b). Os resíduos aparecem com distribuição normal de média $-0,30\text{ nT}$ e desvio padrão $9,67\text{ nT}$ como mostrado na figura 6.1d. A direção de magnetização estimada $\bar{\mathbf{q}}$ tem inclinação $-28,6^\circ$ e declinação $30,8^\circ$, que são muito próximas a direção verdadeira. A distribuição de momentos magnéticos positivos $\bar{\mathbf{p}}$ é mostrada na figura 6.2. A convergência do algoritmo é mostrado na figura 6.3. Consideraremos que o método foi bem sucedido em estimar a direção de magnetização das múltiplas fontes do modelo, de forma que a distribuição de momentos magnéticos produziu um bom ajuste dos dados observados.

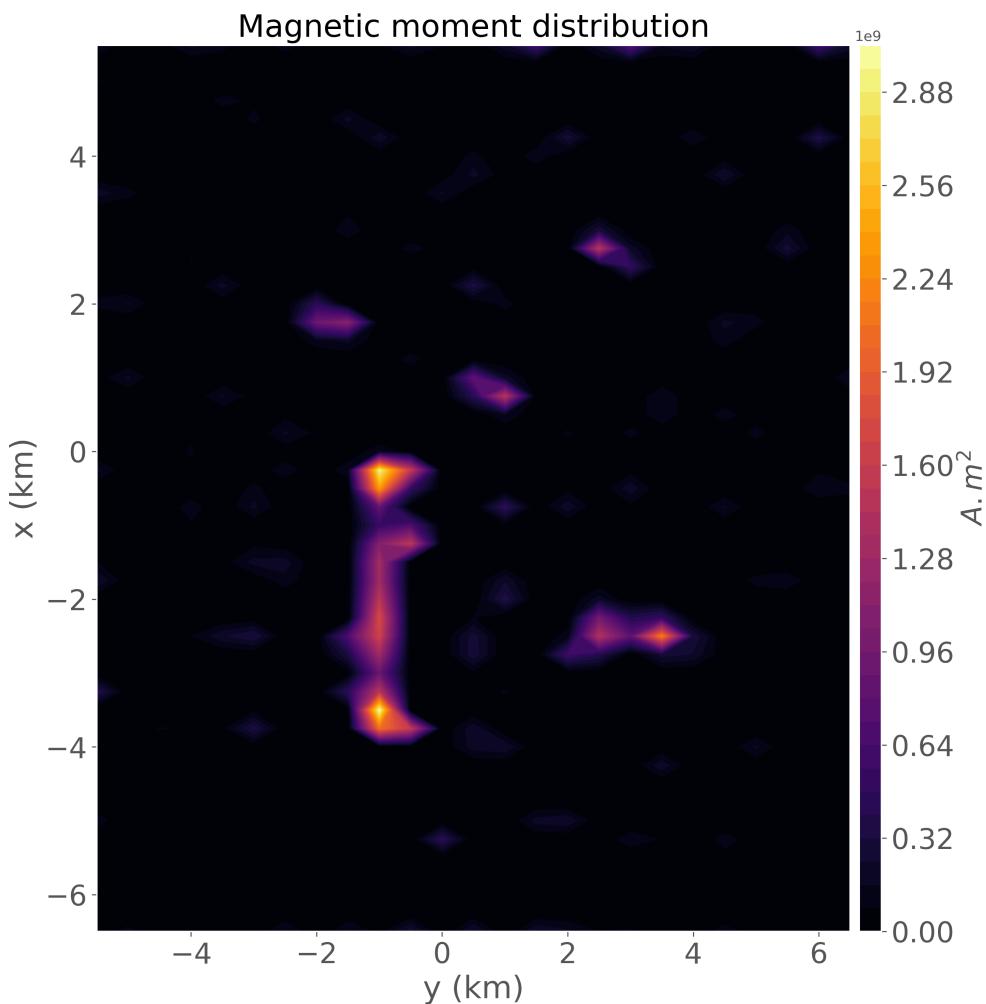


Figura 6.2: Distribuição de momentos magnéticos positiva para a aplicação a dados sintéticos para múltiplas fontes de mesma direção de magnetização.

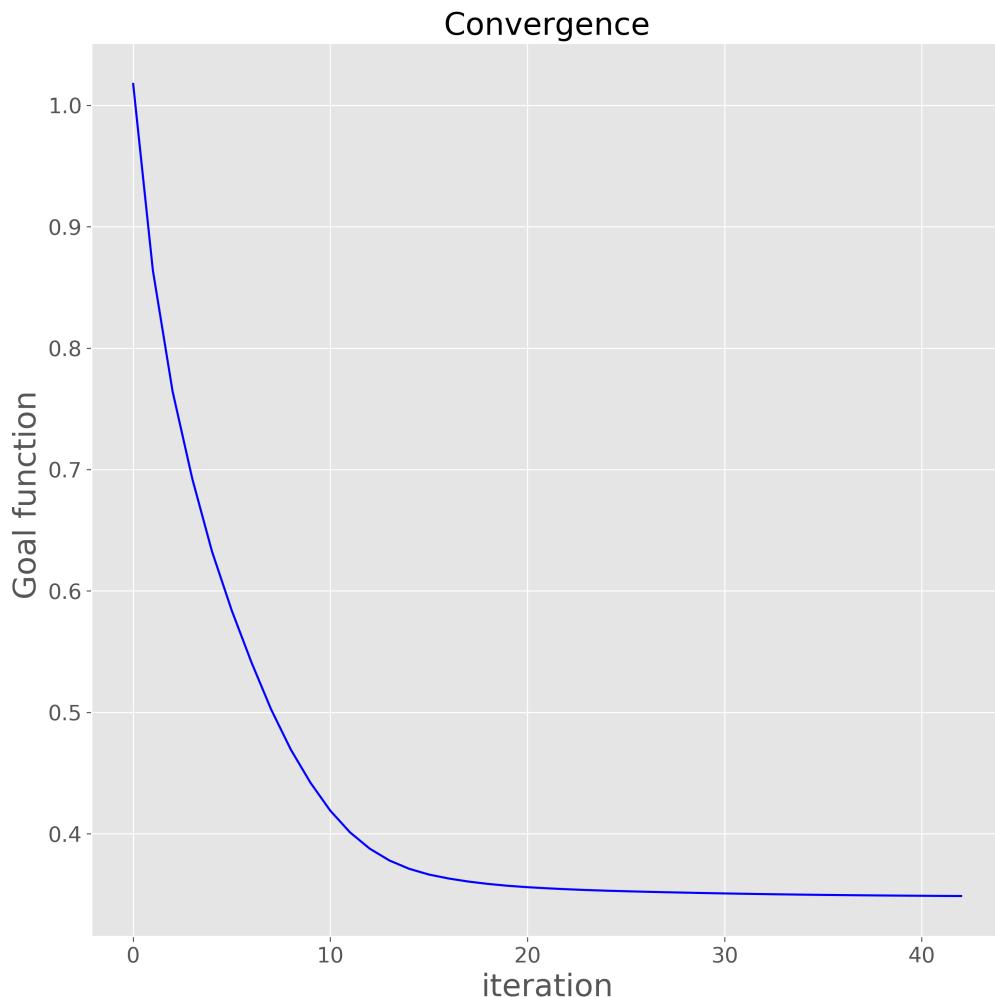


Figura 6.3: Valor da função objetivo ao longo das iterações (equação 3.12a) mostrando a convergência do algoritmo.

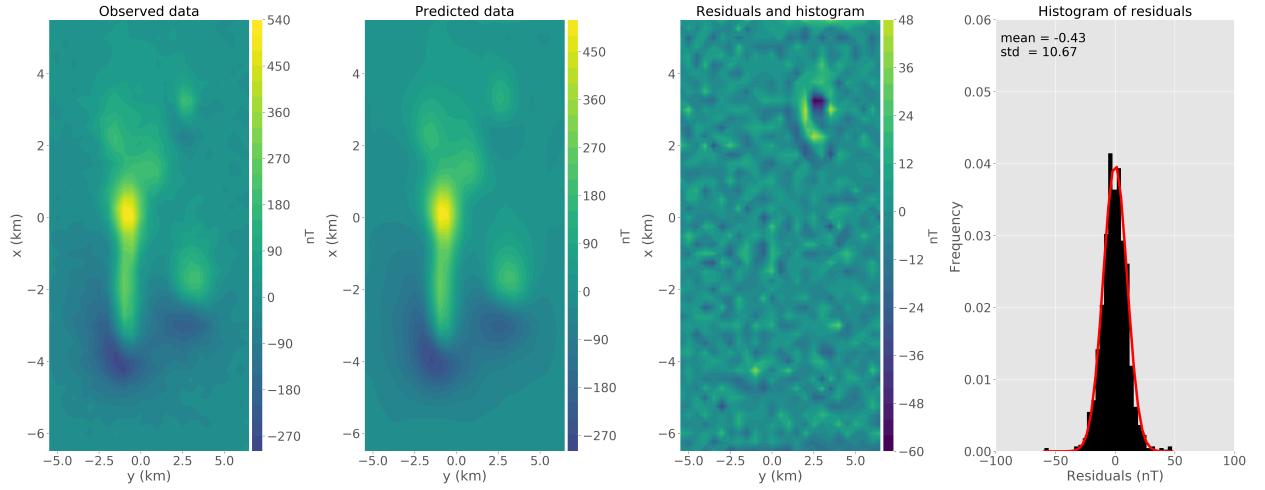


Figura 6.4: Aplicação a dados sintéticos para múltiplos corpos com uma fonte rasa e mesma direção de magnetização. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.

6.2 Magnetização unidirecional com fonte rasa

Testamos a performance do método quando existe uma fonte rasa. O modelo é similar ao anterior com exceção do prisma menor, cujo topo é localizado a uma profundidade de 150 m enquanto seu volume é mantido o mesmo. A intensidade de magnetização deste prisma raso é igual a 1,5 A/m. A direção de magnetização de todas as fontes é -25° de inclinação e 30° graus para a declinação. Os dados sintéticos são mostrados na figura 6.4a.

A figura 6.4b mostra a anomalia de campo total predita produzida pela camada equivalente. A figura 6.4c mostra o mapa dos resíduos definido como a diferença entre a anomalia de campo total observada (Figura 6.4a) e a anomalia de campo total predita (Figura 6.4b). Os resíduos aparecem com uma distribuição normal de média $-0,42$ nT e desvio padrão de $10,67$ nT como mostra a figura 6.4d. A figura 6.5 mostra a distribuição de momentos magnéticos \bar{p} . A convergência do algoritmo é mostrada na figura 6.6. Apesar do grande resíduo acima da fonte rasa, consideramos que a metodologia produziu uma confiável estimativa para a direção de magnetização \bar{q} , que possui inclinação $-28,7^\circ$ e declination $31,7^\circ$. A direção de magnetização estimada é próxima a direção verdadeira e a distribuição de momentos magnéticos produziu um ajuste aceitável dos dados.

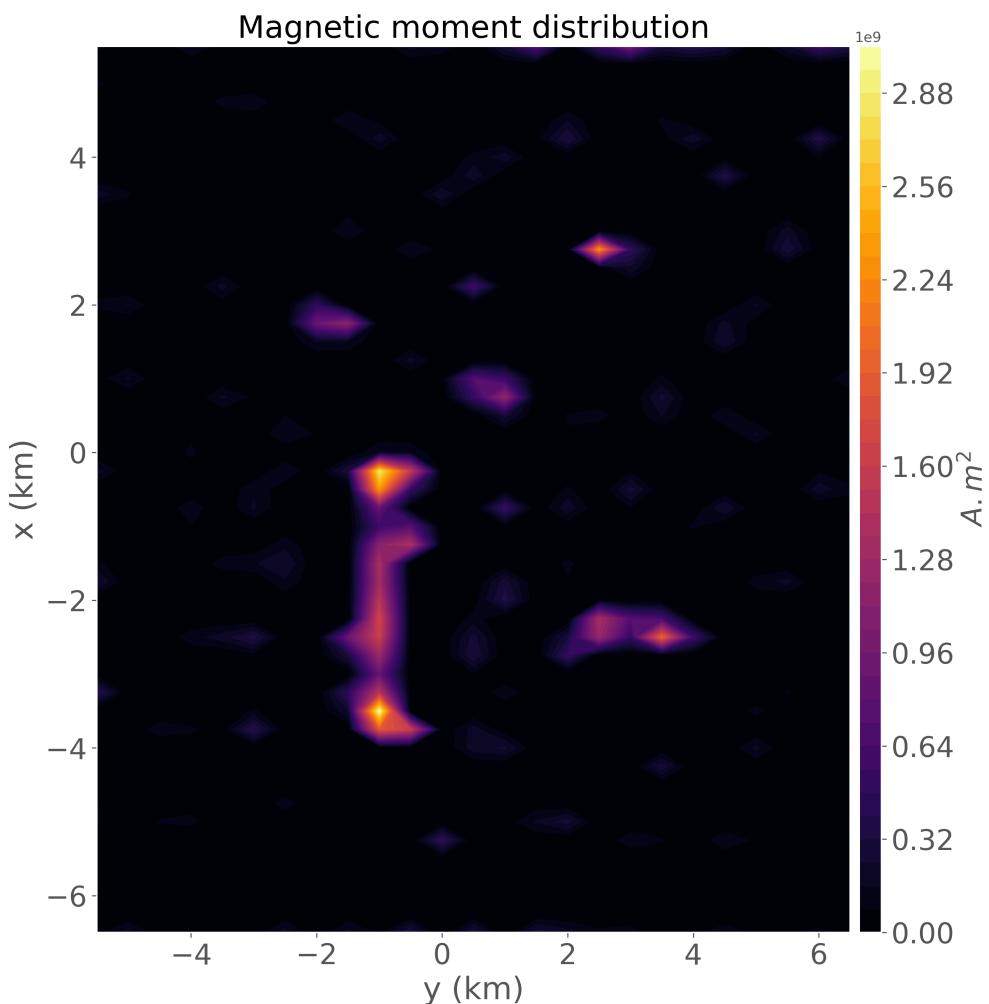


Figura 6.5: Distribuição de momentos magnéticos positiva para a aplicação a dados sintéticos para múltiplos corpos e uma fonte rasa com mesma direção de magnetização.

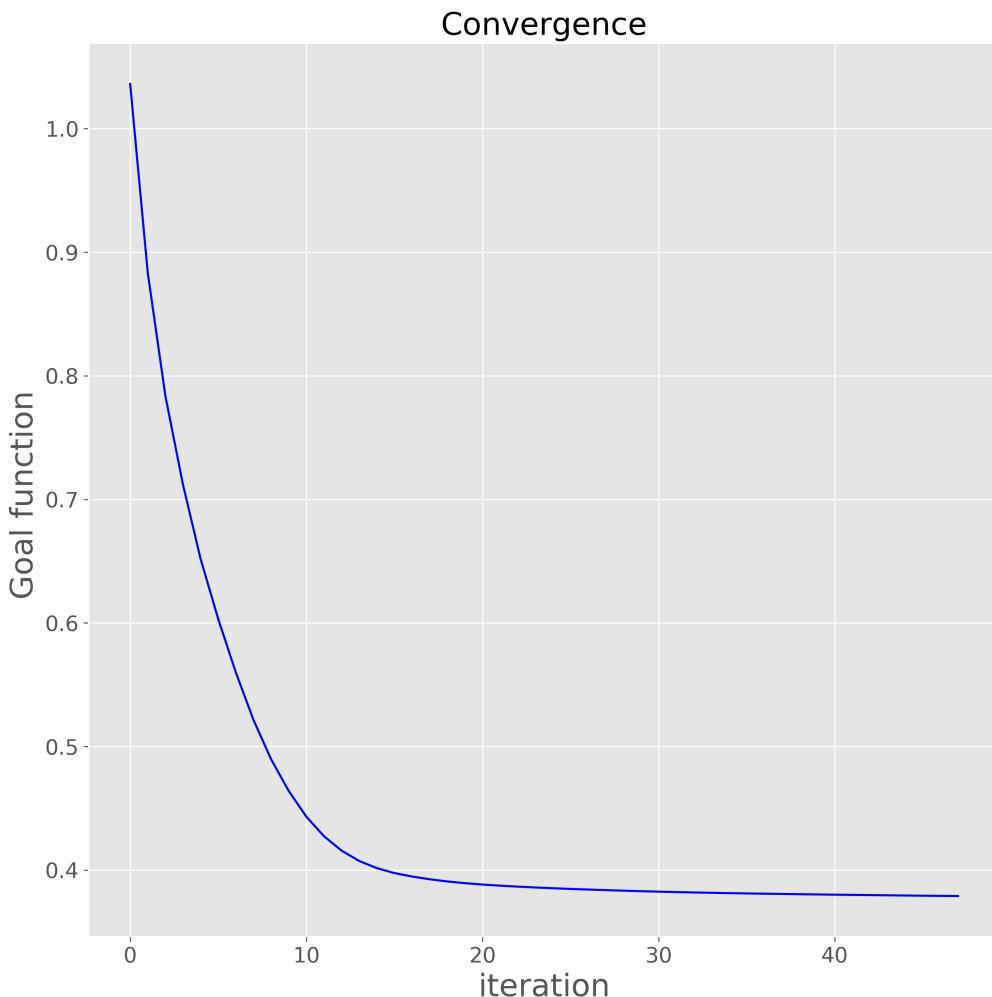


Figura 6.6: Valor da função objetivo ao longo das iterações (equação 3.12a) mostrando a convergência do algoritmo.

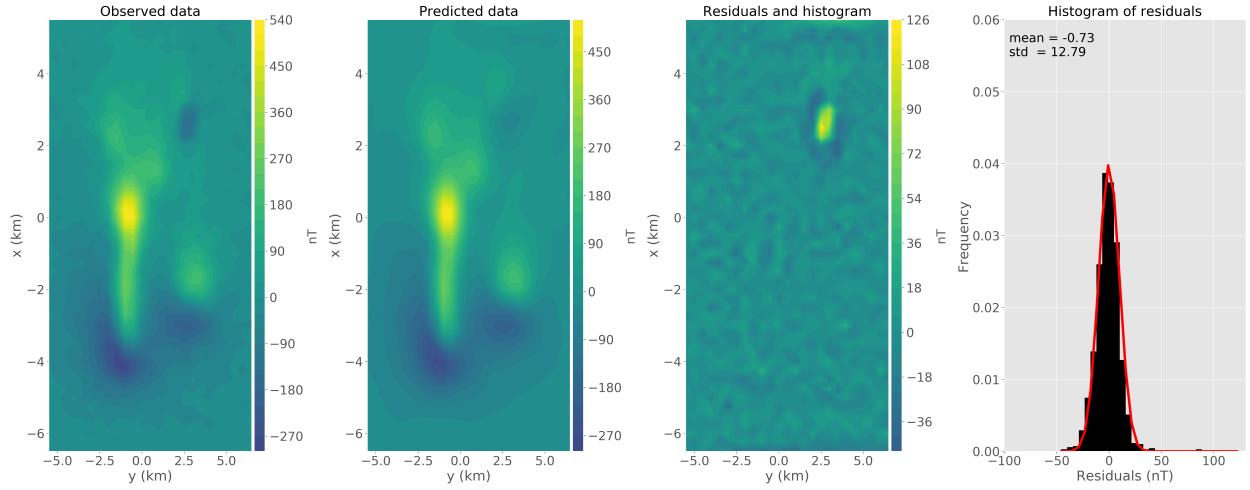


Figura 6.7: Aplicação a dados sintéticos para fonte rasa com direção de magnetização diferente. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.

6.3 Fonte rasa com direção de magnetização diferente

Neste teste simulamos a presença de uma fonte rasa com direção de magnetização diferente das demais. O prisma raso tem dimensão igual ao do teste anterior. No entanto, a direção de magnetização deste prisma é 20° de inclinação e -30° de declinação, enquanto as outras fontes possuem inclinação -25° e declinação 30° . Os dados calculados são mostrados na figura 6.7a.

A figura 6.7b mostra a anomalia de campo total predita pela camada equivalente. O mapa dos resíduos é mostrado na figura 6.7c, e é definido como a diferença entre os dados observados (Figura 6.7a) e os dados preditos (Figura 6.7b). Os resíduos tem média igual a $-0,73$ nT e desvio padrão igual a $12,67$ nT como mostra a figura 6.7d. A direção de magnetização estimada \bar{q} tem inclinação $-30,4^\circ$ e declinação $27,6^\circ$. A figura 6.8 mostra a distribuição de momentos magnéticos positiva. A convergência do algoritmo é mostrada na figura 6.9. Apesar da diferença em relação a direção de magnetização verdadeira, a distribuição de momentos positiva produziu um ajuste aceitável dos dados observados. Com exceção da pequena área acima da fonte rasa, a maior parte dos resíduos são próximos de 0 nT.

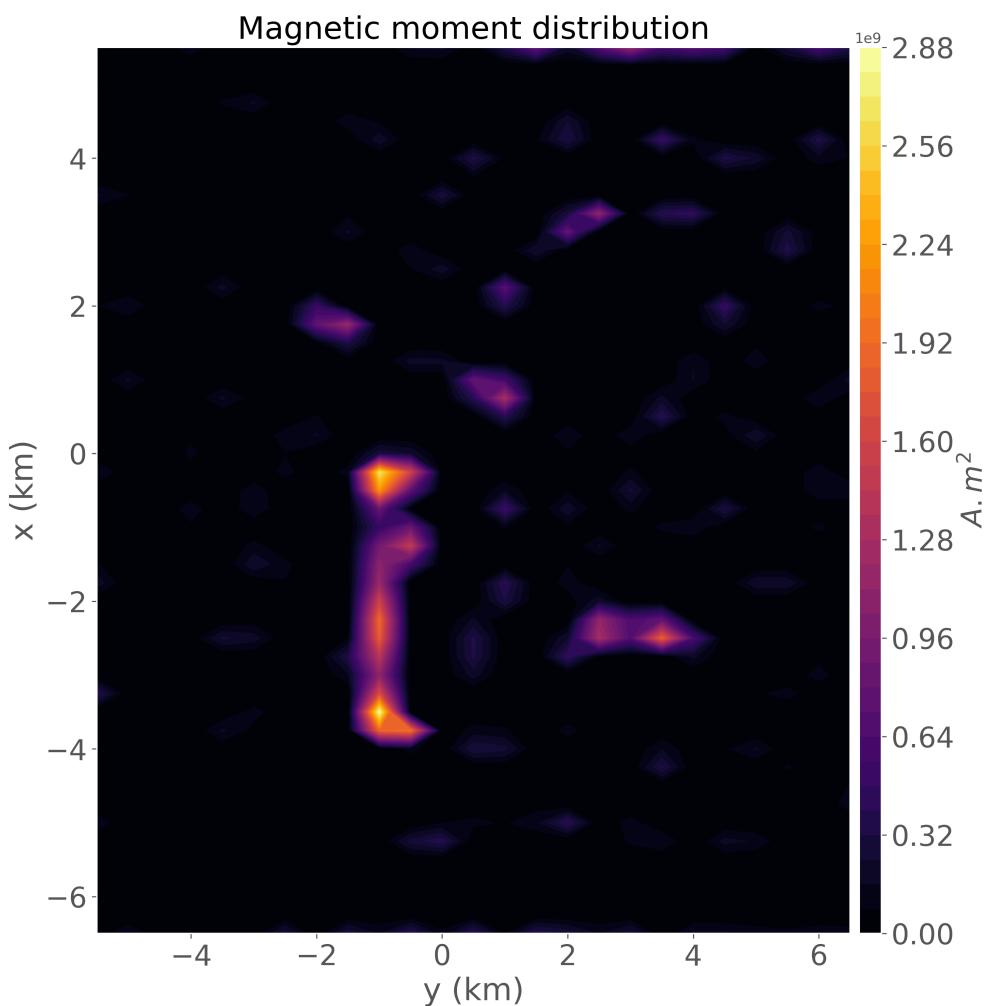


Figura 6.8: Distribuição de momentos magnéticos positiva para a aplicação a dados sintéticos para múltiplos corpos e uma fonte rasa com direção de magnetização diferente.

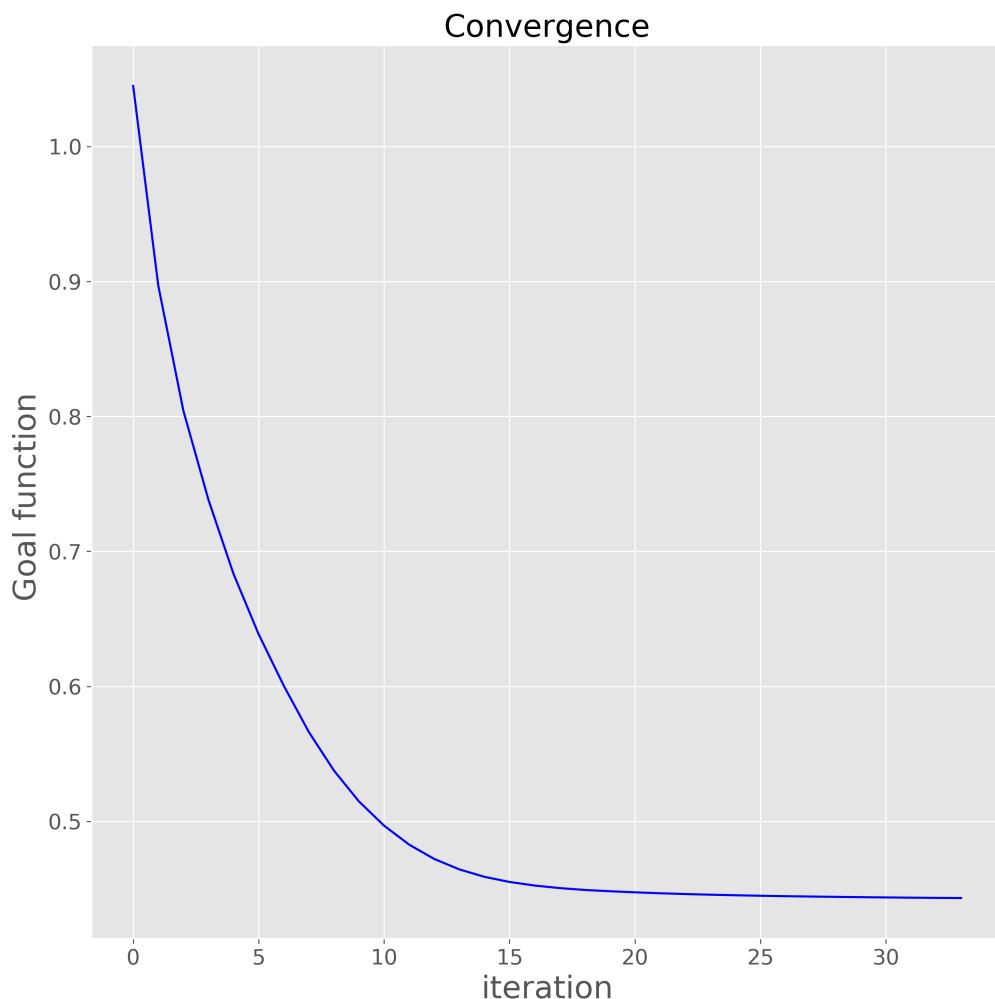


Figura 6.9: Valor da função objetivo ao longo das iterações (equação 3.12a) mostrando a convergência do algoritmo.

Capítulo 7

Aplicação a dados de Montes Claros de Goiás

A província alcalina de Goiás (PAGO) é uma região na parte central do Brasil onde há ocorrências de magmatismos maficos-ultramáficos alcalinos. Esta região apresenta rochas com extensas variedades petrográficas. Ao longo desta área existem complexos maficos-ultramáficos (intrusões plutônicas), intrusões alcalinas sub-vulcânicas (diátremas) e produtos vulcânicos (lava kamafugítica) com diversos diques. Alguns dos principais complexos da PAGO são: Montes Claros de Goiás, Diorama, Córrego dos Bois, Morro do Macaco e Fazenda Buriti. Estas intrusões alcalinas são cercadas por um embasamento Pré-cambriano e rochas sedimentares do Fanerozóico da bacia do Paraná (CARLSON *et al.*, 2007; DUTRA *et al.*, 2014; JUNQUEIRA-BROD *et al.*, 2005; MARANGONI e MANTOVANI, 2013). Estudos recentes indicam que tais intrusões possuem intensa magnetização remanente (MARANGONI *et al.*, 2016; MARANGONI e MANTOVANI, 2013; OLIVEIRA JR *et al.*, 2015; ZHANG *et al.*, 2018).

Esta região foi alvo de um levantamento aeromagnético com espaçamento entre as linhas norte-sul de ~ 500 m e de ~ 8 ao longo de cada linha, a uma altura constante de 100 m acima do terreno. A direção do campo geomagnético para esta área era, respectivamente, de -19.5° e -18.5° para inclinação e declinação na época do levantamento. Invertemos os dados de anomalia de campo total para o complexo alcalino de Montes Claros de Goiás (Figura 7.1a). Com o intuito de acelerar o processo de inversão, decimamos os dados ao longo da linha de voo, resultando em um grid de 55×32 pontos (um total de $N = 1787$ observações). Esta nova configuração resulta em um espaçamento do grid de aproximadamente 300 m e 500 m ao longo dos eixos x e y , respectivamente. Geramos uma camada equivalente composta por um grid de 55×32 dipolos (um total de $M = 1787$ fontes equivalentes) posicionados a uma profundidade de 840 m abaixo do plano de observação (~ 2 vezes o maior espaçamento do grid). O algoritmo começa com uma aproximação inicial de

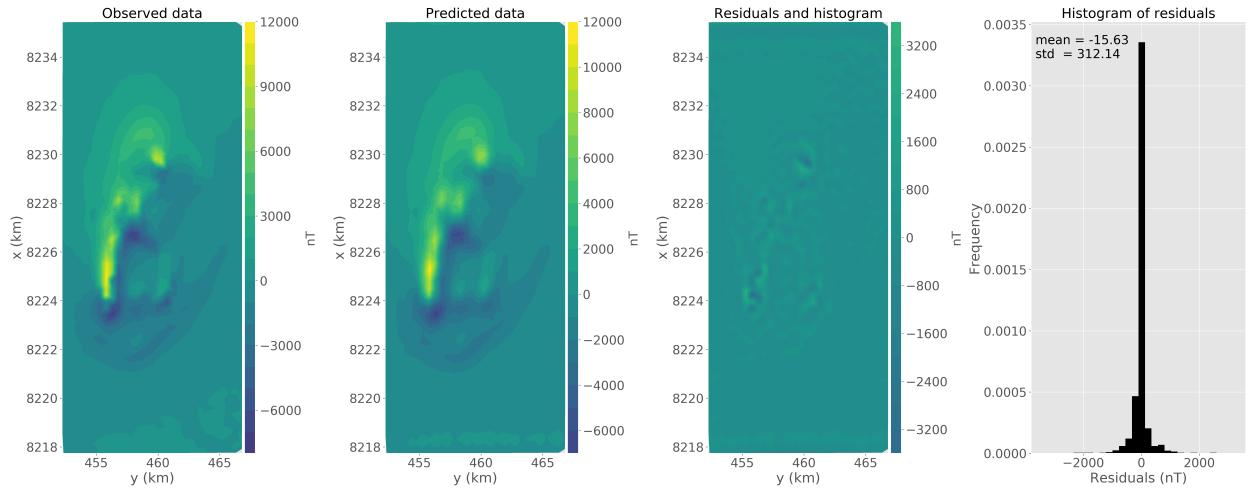


Figura 7.1: Aplicação a dados reais para o complexo de Montes Claros de Goiás. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Dados preditos produzido pela camada equivalente. (c) Diferença entre os dados mostrados nos gráficos a e b. (d) Histograma dos resíduos.

-70° e 50° para inclinação e declinação, respectivamente. A figura 7.1b mostra os dados preditos produzidos pela camada equivalente. A figura 7.1c mostra o mapa dos resíduos definido como a diferença entre os dados observados (Figura 7.1a) e os dados preditos (Figura 7.1b). Note que, dois locais na figura 7.1c apresentam marcantes resíduos que, aparentemente, podem indicar a existência de fontes geológicas rasas. No entanto, o histograma dos resíduos (Figura 7.1d) é aceitável apresentando média de -14.52 nT (aproximadamente 0.1% do valor máximo de anomalia de campo total) e desvio padrão de 312.28 nT ($\sim 2\%$ do valor máximo de anomalia de campo total). A direção de magnetização estimada \bar{q} tem inclinação -50.2° e declinação 34.9° . As figuras 7.2 e 7.3 mostram a distribuição de momentos magnéticos estimada \bar{p} e a convergência do algoritmo. Checamos a qualidade da direção de magnetização estimada calculando a redução ao polo da anomalia de campo total observada. Notamos que a anomalia reduzida ao polo (Figura 7.4) exibe valores predominantemente positivos e decai a zero quando se aproxima da borda da área de estudo. Por esta razão, consideramos que a direção de magnetização estimada leva a uma satisfatória anomalia reduzida ao polo. Concluimos com estes resultados que a distribuição de momentos magnéticos positiva e a direção de magnetização estimada produz um ajuste aceitável dos dados observados. A direção de magnetização estimada sugere também a existência de magnetização remanente para as intrusões na área de estudo.

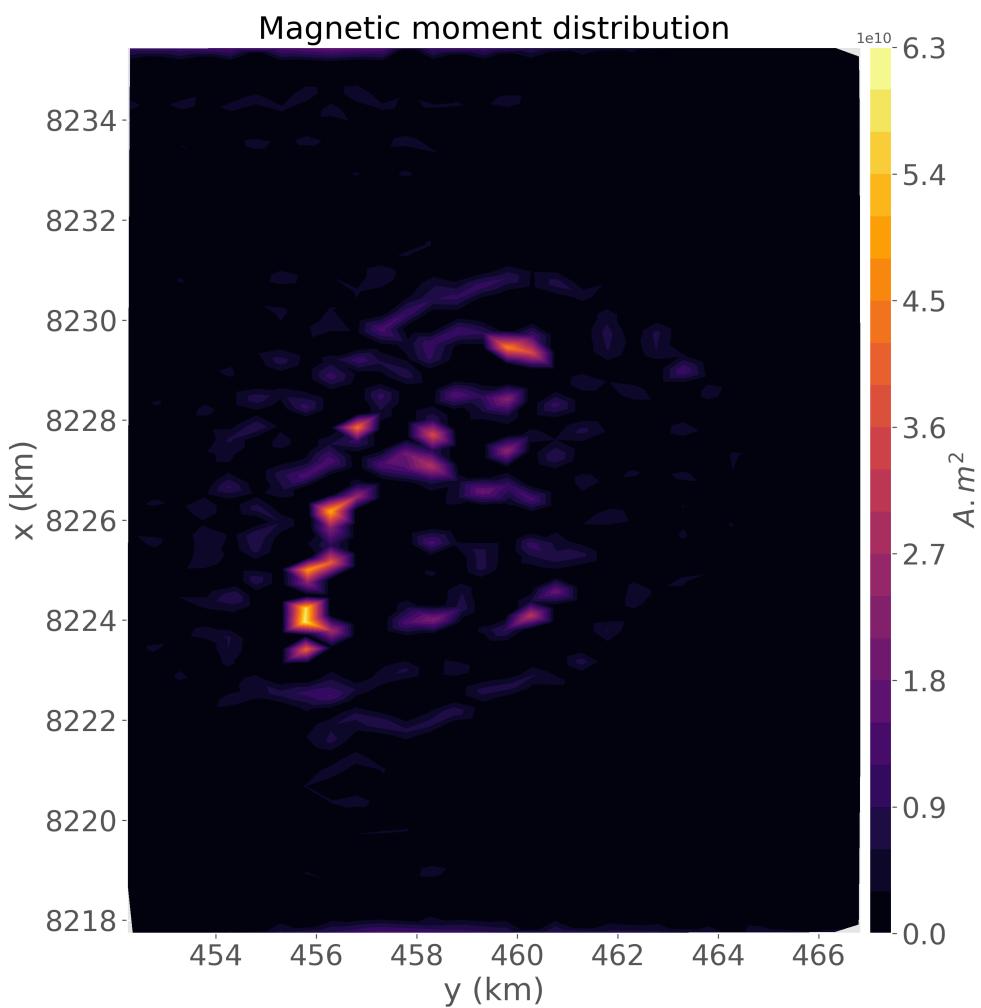


Figura 7.2: Distribuição de momentos magnéticos positiva para a aplicação a dados reais no complexo de Montes Claros de Goiás.

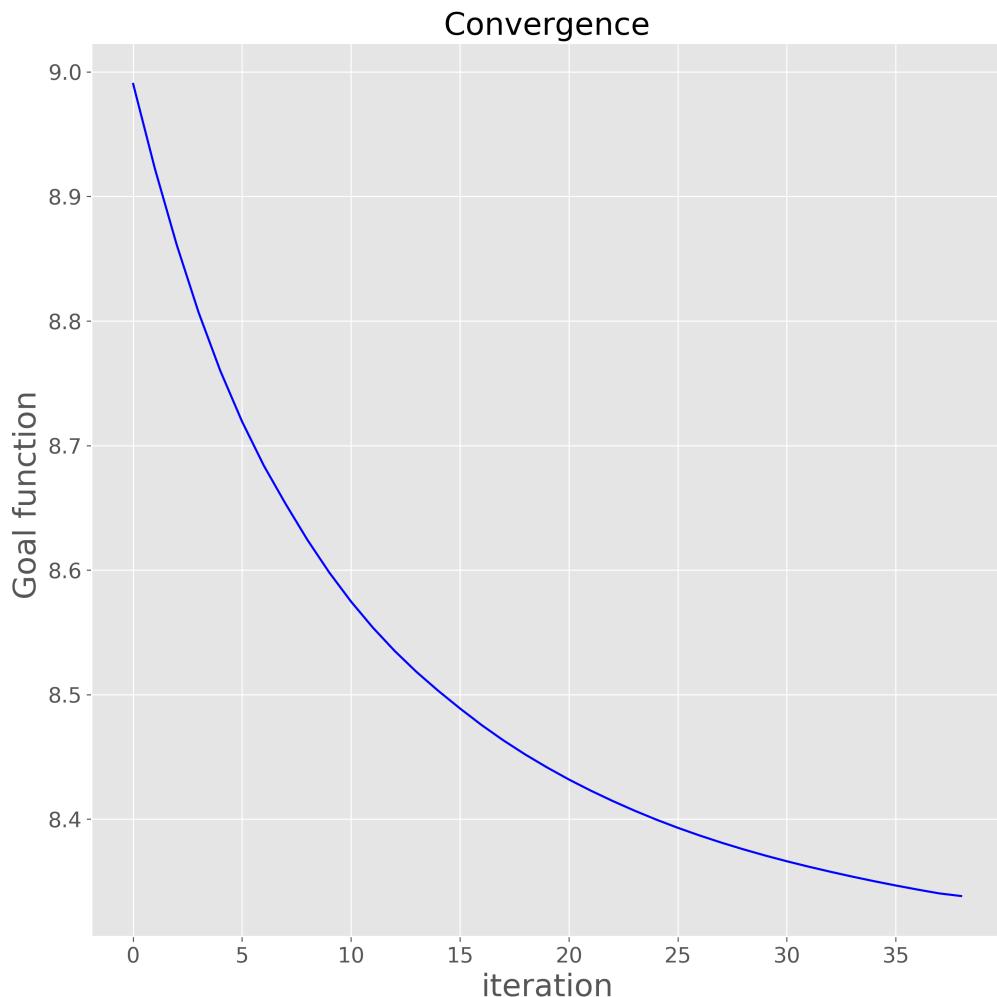


Figura 7.3: Valor da função objetivo ao longo das iterações (equação 3.12a) mostrando a convergência do algoritmo.

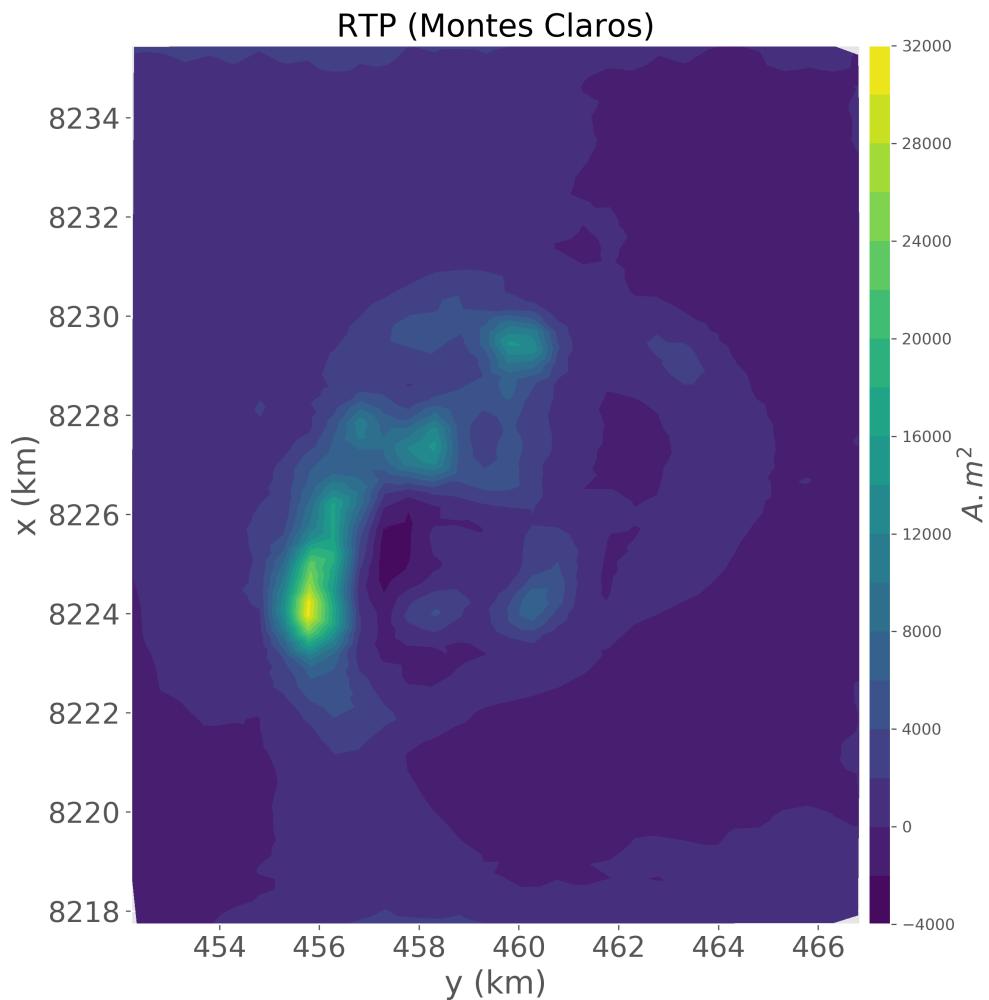


Figura 7.4: Redução ao polo dos dados reais do complexo de Montes Claros de Goiás (Figura 7.1a) utilizando a distribuição de intensidades de momentos magnéticos estimada mostrada na Figura 7.2

Capítulo 8

Conclusões

Nesta tese apresentamos dois desenvolvimentos teóricos e suas aplicações na interpretação de dados magnéticos usando a técnica da camada equivalente. No primeiro, provamos matematicamente que, dada uma direção de magnetização uniforme, existe uma única distribuição de intensidade de momentos magnéticos na camada equivalente, em uma determinada profundidade constante abaixo das observações, que é capaz de reproduzir, simultaneamente, as três componentes de um mesmo campo de indução magnética produzido por fontes magnéticas arbitrárias. Uma consequência direta deste resultado teórico é que, se a camada reproduzir uma das componentes do campo, ela deve, obrigatoriamente, reproduzir as demais componentes, ainda que sua direção de magnetização seja diferente daquela das fontes magnéticas arbitrárias. Caso contrário, as leis de Gauss (para campos magnéticos) e de Ampère são violadas. Usando este resultado teórico, fixamos uma direção de magnetização arbitrária para uma camada equivalente plana e estimamos uma distribuição de intensidades de momentos magnéticos por meio da inversão linear de dados de uma única componente do campo produzido por fontes arbitrárias. Uma vez estimada a distribuição de momento que reproduz uma única componente, calculamos as demais componentes e a amplitude do campo de indução magnético.

Resultados com dados produzidos por modelos que simulam amostras planares de rocha mostraram que o método recupera as componentes e a amplitude do campo de indução magnética sem o conhecimento prévio da direção de magnetização das fontes. Com base nos resultados com dados sintéticos, aplicamos o método a dados da componente vertical do campo de indução magnética gerados por uma amostra de rocha proveniente da cratera de Vredefort, na África do Sul. Os dados foram obtidos por meio de microscopia magnética de varredura, usando um sensor de baixo custo baseado no efeito Hall e que opera em temperatura ambiente. Os resultados mostram que esse tipo de processamento é muito útil para estimar a distribuição de magnetização em amostras de rocha, na escala de laboratório, e identificar regiões com maior concentração de portadores magnéticos. A identificação destas regiões

é importante para análises posteriores sobre o conteúdo mineralógico e a caracterização magnética das amostras geológicas.

O segundo desenvolvimento teórico apresentado nesta tese mostra que a anomalia de campo total causada por fontes magnéticas com direção de magnetização uniforme pode ser reproduzida por uma camada plana e contínua com distribuição de momentos magnéticos positiva. Esta propriedade teórica é válida para os casos nos quais a camada equivalente possui a mesma direção de magnetização das fontes verdadeiras, seja ela puramente induzida ou não. Utilizando esta propriedade de positividade, apresentamos um método iterativo para estimar a magnetização total de fontes 3D baseada na técnica da camada equivalente. A cada iteração, resolvemos um problema inverso linear para estimar uma distribuição de momentos magnéticos positiva e resolvemos um problema inverso não-linear para estimar a direção de magnetização das fontes equivalentes. Ao final do processo iterativo, a direção de magnetização na camada se aproxima daquela das fontes magnéticas. Este método não requer nenhum conhecimento prévio sobre a forma e a profundidade das fontes magnéticas verdadeiras, nem mesmo o uso de dados regularmente espaçados. Esta abordagem pode ser aplicada para determinar a direção de magnetização de múltiplas fontes, presumindo que todas tenham a mesma direção de magnetização total.

Resultados obtidos com dados sintéticos produzidos por modelos de múltiplas fontes mostram que a direção de magnetização pode ser estimada através do nosso método iterativo. Estes testes também ilustram como a presença de fontes muito mais rasas que as demais afeta o resultado obtido por nosso método, para os casos em que estas fontes rasas possuem direções de magnetização iguais ou diferentes das demais. Em ambos os casos, os resultados mostram grandes resíduos logo acima das fontes rasas; no entanto, não é possível distinguir se eles são produzidos por fontes rasas com a mesma direção ou com direção de magnetização diferentes das demais. Aplicamos o método a dados de anomalia de campo total provenientes de um aerolevantamento sobre a província alcalina de Goiás, região central do Brasil. Os resultados confirmaram que nosso método é útil para a interpretação de cenários geológicos complexos. Os resultados para as anomalias no complexo de Montes Claros de Goiás sugerem a presença de magnetização remanente nas fontes e estão de acordo com estudos anteriores conduzidos de forma independente na mesma região. A distribuição de momentos magnéticos estimada sobre a camada produz uma excelente redução ao polo, com valores predominantemente positivos e que decaim a zero nas bordas das anomalias. Os resultados também mostram grandes desajustes em algumas áreas isoladas. Consideramos que estes desajustes locais são devido à presença de fontes rasas. Contudo, não conseguimos inferir se elas possuem a mesma direção de magnetização das outras fontes.

Referências Bibliográficas

- ARAUJO, J. F. D. F., REIS, A. L. A., CORREA, A. A. P., et al., 2019a, “Scanning Magnetic Microscope Using a Gradiometric Configuration for Characterization of Rock Samples”, *Materials*, v. 12, n. 24. ISSN: 1996-1944. doi: 10.3390/ma12244154. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/1996-1944/12/24/4154>>.
- ARAUJO, J. F. D. F., REIS, A. L. A., OLIVEIRA JR., V. C., et al., 2019b, “Characterizing Complex Mineral Structures in Thin Sections of Geological Samples with a Scanning Hall Effect Microscope”, *Sensors*, v. 19, n. 7. ISSN: 1424-8220. doi: 10.3390/s19071636. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/1424-8220/19/7/1636>>.
- ASTER, R. C., BORCHERS, B., THURBER, C. H., 2005, *Parameter Estimation and Inverse Problems (International Geophysics)*. Academic Press. ISBN: 0120656043.
- BARATCHART, L., HARDIN, D. P., LIMA, E. A., et al., 2013, “Characterizing kernels of operators related to thin-plate magnetizations via generalizations of Hodge decompositions”, *Inverse Problems*, v. 29, n. 1 (jan.), pp. 015004(29pp). ISSN: 0266-5611. doi: 10.1088/0266-5611/29/1/015004. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/0266-5611/29/1/015004>>.
- BARNES, G., LUMLEY, J., 2011, “Processing gravity gradient data”, *GEOPHYSICS*, v. 76, n. 2, pp. I33–I47. doi: 10.1190/1.3548548.
- BHATTACHARYYA, B. K., 1966, “A method for computing the total magnetization vector and the dimensions of a rectangular block shaped from magnetic anomalies”, *GEOPHYSICS*, v. 31, n. 1, pp. 74–96. doi: 10.1190/1.1439765.
- BLAKELY, R. J., 1996, *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press. ISBN: 0521575478.

- BUTLER, R. F., 1998, *Paleomagnetism: Magnetic domains to geologic terranes*. Univertsty of Arizona.
- CARLSON, R. W., ARAUJO, A. L. N., JUNQUEIRA-BROD, T. C., et al., 2007, “Chemical and isotopic relationships between peridotite xenoliths and mafic–ultrapotassic rocks from Southern Brazil”, *Chemical Geology*, v. 242, n. 3, pp. 415 – 434. ISSN: 0009-2541. doi: <https://doi.org/10.1016/j.chemgeo.2007.04.009>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0009254107001933>>.
- CARPORZEN, L., GILDER, S., HART, R., 2005, “Palaeomagnetism of the Vredenfort meteorite crater and implications for craters on Mars”, *Nature*, v. 435, pp. 198–201. doi: 10.1038/nature03560.
- CLARK, D., 1997, “Magnetic petrophysics and magnetic petrology: aids to geological interpretation of magnetic surveys”, *AGSO Journal of Australian Geology and Geophysics*, v. 17, pp. 83–104.
- COLLINSON, D., 1983, *Methods in rock magnetism and palaeomagnetism techniques and instrumentation*. Chapman and Hall. ISBN: 978-94-015-3979-1.
- CORDELL, L., 1992, “A scattered equivalent-source method for interpolation and gridding of potential-field data in three dimensions”, *GEOPHYSICS*, v. 57, n. 4, pp. 629–636. doi: 10.1190/1.1443275.
- DAMPNEY, C. N. G., 1969, “The equivalent source technique”, *GEOPHYSICS*, v. 34, n. 1, pp. 39–53. doi: 10.1190/1.1439996.
- DANNEMILLER, N., LI, Y., 2006, “A new method for determination of magnetization direction”, *GEOPHYSICS*, v. 71, n. 6, pp. L69–L73. doi: 10.1190/1.2356116.
- DRESSLER, B., REIMOLD, W., 2004, “Order or chaos? Origin and mode of emplacement of breccias in floors of large impact structures”, *Earth-Science Reviews*, v. 67, n. 1, pp. 1 – 54. ISSN: 0012-8252. doi: <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2004.01.007>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001282520400008X>>.
- DUNLOP, D. J., ÖZDEMIR, 1997, *Rock Magnetism*. Cambridge University Press. ISBN: 9780511612794. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511612794>>. Cambridge Books Online.

- DUTRA, A. C., MARANGONI, Y., TRINDADE, R. I. F., 2014, “Aeromagnetic and physical-chemical properties of some complexes from Goiás Alkaline Province”, *Brazilian Journal of Geology*, v. 44 (09), pp. 361 – 373. ISSN: 2317-4889. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2317-48892014000200361&nrm=iso>.
- EMILIA, D. A., MASSEY, R. L., 1974, “MAGNETIZATION ESTIMATION FOR NONUNIFORMLY MAGNETIZED SEAMOUNTS”, *GEOPHYSICS*, v. 39, n. 2, pp. 223–231. doi: 10.1190/1.1440423.
- FEDI, M., FLORIO, G., RAPOLLA, A., 1994, “A method to estimate the total magnetization direction from a distortion analysis of magnetic anomalies”, *Geophysical Prospecting*, v. 42, n. 3, pp. 261–274. doi: 10.1111/j.1365-2478.1994.tb00209.x. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1365-2478.1994.tb00209.x>>.
- GEROVSKA, D., ARAÚZO-BRAVO, M. J., STAVREV, P., 2009, “Estimating the magnetization direction of sources from southeast Bulgaria through correlation between reduced-to-the-pole and total magnitude anomalies”, *Geophysical Prospecting*, v. 57, n. 4, pp. 491–505. doi: 10.1111/j.1365-2478.2008.00761.x.
- GUSPÍ, F., NOVARA, I., 2009, “Reduction to the pole and transformations of scattered magnetic data using Newtonian equivalent sources”, *GEOPHYSICS*, v. 74, n. 5, pp. L67–L73. doi: 10.1190/1.3170690.
- HANSEN, P., O’LEARY, D., 1993, “The use of the L-Curve in the regularization of discrete ill-posed problems”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 14, n. 6, pp. 1487–1503. doi: 10.1137/0914086.
- HANSEN, R. O., MIYAZAKI, Y., 1984, “Continuation of potential fields between arbitrary surfaces”, *GEOPHYSICS*, v. 49, n. 6, pp. 787–795. doi: 10.1190/1.1441707.
- JACKSON, J. D., 1975, *Classical Electrodynamics*. Chapman and Hall. ISBN: 0-471-43132-X.
- JUNQUEIRA-BROD, T. C., GASPAR, J. C., BROD, J. A., et al., 2005, “Kamafugitic diatremes: their textures and field relationships with examples from the Goiás alkaline province, Brazil”, *Journal of South American Earth Sciences*, v. 18, n. 3, pp. 337 – 353. ISSN: 0895-9811. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsames.2004.11.002>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/>>

- S0895981105000167>. Volcanic rocks in Brazil through time and different tectonic settings.
- KELLOGG, O. D., 1967, *Foundations of Potential Theory*. Springer-Verlag. ISBN: 978-3-642-86750-7.
- LANA, C., GIBSON, R. L., REIMOLD, W. U., et al., 2003, “Geology and geochemistry of a granite-greenstone association in the southeastern Vredefort dome, South Africa”, *South African Journal of Geology*, v. 106, n. 4 (12), pp. 291–314. ISSN: 1012-0750. doi: 10.2113/106.4.291. Disponível em: <<https://doi.org/10.2113/106.4.291>>.
- LAWSON, C. L., HANSON, R. J., 1974, *Solving least squares problems*. SIAM.
- LEÃO, J. W. D., SILVA, J. B. C., 1989, “Discrete linear transformations of potential field data”, *GEOPHYSICS*, v. 54, n. 4, pp. 497–507. doi: 10.1190/1.1442676.
- LELIÈVRE, P. G., OLDENBURG, D. W., 2009, “A 3D total magnetization inversion applicable when significant, complicated remanence is present”, *GEOPHYSICS*, v. 74, n. 3, pp. L21–L30. doi: 10.1190/1.3103249.
- LI, S.-L., LI, Y., 2014, “Inversion of magnetic anomaly on rugged observation surface in the presence of strong remanent magnetization”, *GEOPHYSICS*, v. 79, n. 2, pp. J11–J19. doi: 10.1190/geo2013-0126.1.
- LI, Y., OLDENBURG, D. W., 2010, “Rapid construction of equivalent sources using wavelets”, *GEOPHYSICS*, v. 75, n. 3, pp. L51–L59. doi: 10.1190/1.3378764.
- LI, Y., NABIGHIAN, M., OLDENBURG, D. W., 2014, “Using an equivalent source with positivity for low-latitude reduction to the pole without striation”, *GEOPHYSICS*, v. 79, n. 6, pp. J81–J90. doi: 10.1190/geo2014-0134.1.
- LIMA, E. A., WEISS, B. P., 2009, “Obtaining vector magnetic field maps from single-component measurements of geological samples”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 114, n. B6. doi: 10.1029/2008JB006006.
- LIMA, E. A., WEISS, B. P., BARATCHART, L., et al., 2013, “Fast inversion of magnetic field maps of unidirectional planar geological magnetization”, *J. Geophys. Res.: Solid Earth*, v. 118, n. 6, pp. 2723–2752. doi: 10.1002/jgrb.50229.

- LIU, S., HU, X., XI, Y., et al., 2015, “2D sequential inversion of total magnitude and total magnetic anomaly data affected by remanent magnetization”, *GEOPHYSICS*, v. 80, n. 3, pp. K1–K12. doi: 10.1190/geo2014-0019.1.
- MARANGONI, Y., ZHANG, H., FERREIRA, H., 2016, “Gravity and magnetic integrated data interpretation of the córrego dos bois complex, Goiás alkaline province, central brazil”, *Revista Brasileira de Geofísica*, v. 33, n. 4, pp. 599–610. ISSN: 1809-4511. doi: 10.22564/rbgf.v33i4.756.
- MARANGONI, Y. R., MANTOVANI, M. S., 2013, “Geophysical signatures of the alkaline intrusions bordering the Paraná Basin”, *Journal of South American Earth Sciences*, v. 41, pp. 83 – 98. ISSN: 0895-9811. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsames.2012.08.004>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089598111200140X>>. Alkaline Magmatism and the Lithospheric Mantle : a special issue in honour of the work of Celso de Barros Gomes on the occasion of his 77th birthday.
- MARTINEZ, C., LI, Y., 2016, “Denoising of gravity gradient data using an equivalent source technique”, *GEOPHYSICS*, v. 81, n. 4, pp. G67–G79. doi: 10.1190/geo2015-0379.1.
- MEDEIROS, W. E., SILVA, J. B. C., 1995, “Simultaneous estimation of total magnetization direction and 3-D spatial orientation”, *GEOPHYSICS*, v. 60, n. 5, pp. 1365–1377. doi: 10.1190/1.1443872.
- MEDEIROS, W. E., SILVA, J. B. C., 1996, “Geophysical inversion using approximate equality constraints”, *GEOPHYSICS*, v. 61, n. 6, pp. 1678–1688. doi: 10.1190/1.1444086.
- MENDONÇA, C. A., SILVA, J. B. C., 1994, “The equivalent data concept applied to the interpolation of potential field data”, *GEOPHYSICS*, v. 59, n. 5, pp. 722–732. doi: 10.1190/1.1443630.
- OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., UIEDA, L., 2013, “Polynomial equivalent layer”, *GEOPHYSICS*, v. 78, n. 1, pp. G1–G13. doi: 10.1190/geo2012-0196.1.
- OLIVEIRA JR, V. C., SALES, D. P., BARBOSA, V. C. F., et al., 2015, “Estimation of the total magnetization direction of approximately spherical bodies”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, v. 22, n. 2, pp. 215–232. doi: 10.5194/npg-22-215-2015. Disponível em: <<https://www.nonlin-processes-geophys.net/22/215/2015/>>.

- PARKER, R. L., SHURE, L., HILDEBRAND, J. A., 1987, “The application of inverse theory to seamount magnetism”, *Reviews of Geophysics*, v. 25, n. 1, pp. 17–40. doi: 10.1029/RG025i001p00017.
- PASSCHIER, C., 1982, “Pseudotachylite and the development of ultramylonite bands in the Saint-Barthélemy Massif, French Pyrenees”, *Journal of Structural Geology*, v. 4, n. 1, pp. 69 – 79. ISSN: 0191-8141. doi: [https://doi.org/10.1016/0191-8141\(82\)90008-6](https://doi.org/10.1016/0191-8141(82)90008-6). Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0191814182900086>>.
- PEDERSEN, L. B., 1991, “Relations between potential fields and some equivalent sources”, *GEOPHYSICS*, v. 56, n. 7, pp. 961–971. doi: 10.1190/1.1443129.
- PEDERSEN, L. B., RASMUSSEN, T. M., 1990, “The gradient tensor of potential field anomalies: Some implications on data collection and data processing of maps”, *GEOPHYSICS*, v. 55, n. 12, pp. 1558–1566. doi: 10.1190/1.1442807. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.1442807>>.
- PHILLIPS, D. J., 2005, “Can we estimate total magnetization directions from aeromagnetic data using Helbig’s integrals?” *Earth, Planets and Space*, v. 57, n. 8 (Aug), pp. 681–689. ISSN: 1880-5981. doi: 10.1186/BF03351848.
- PILKINGTON, M., GRIEVE, R. A. F., 1992, “The geophysical signature of terrestrial impact craters”, *Reviews of Geophysics*, v. 30, n. 2, pp. 161–181. doi: 10.1029/92RG00192. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/92RG00192>>.
- PILKINGTON, M., HILDEBRAND, A. R., 2003, “Transient and disruption cavity dimensions of complex terrestrial impact structures derived from magnetic data”, *Geophysical Research Letters*, v. 30, n. 21. doi: 10.1029/2003GL018294.
- ROY, A., 1962, “Ambiguity in geophysical interpretation”, *GEOPHYSICS*, v. 27, n. 1, pp. 90–99. doi: 10.1190/1.1438985.
- RYUJI, K., UCHIYAMA, A., 2005, “Three-dimensional magnetization vector inversion of a seamount”, *Earth, Planets and Space*, v. 57, n. 8 (Aug), pp. 691–699”. doi: 10.1186/BF03351849.
- SILVA, J. B. C., 1986, “Reduction to the pole as an inverse problem and its application to low-latitude anomalies”, *GEOPHYSICS*, v. 51, n. 2, pp. 369–382. doi: 10.1190/1.1442096.

- SILVA, J. B. C., VASCONCELOS, S. S., BARBOSA, V. C. F., 2010, “Apparent-magnetization mapping using entropic regularization”, *Geophysics*, v. 75, n. 2 (04), pp. L39–L50. ISSN: 0016-8033. doi: 10.1190/1.3358160. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.3358160>>.
- SILVA DIAS, F. J., BARBOSA, V. C., SILVA, J. B., 2007, “2D gravity inversion of a complex interface in the presence of interfering sources”, *GEOPHYSICS*, v. 72, n. 2, pp. I13–I22. doi: 10.1190/1.2424545.
- SIQUEIRA, F. C. L., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2017, “Fast iterative equivalent-layer technique for gravity data processing: A method grounded on excess mass constraint”, *GEOPHYSICS*, v. 82, n. 4, pp. G57–G69. doi: 10.1190/geo2016-0332.1.
- TONTINI, F. C., PEDERSEN, L. B., 2008, “Interpreting magnetic data by integral moments”, *Geophysical Journal International*, v. 174, n. 3, pp. 815–824. doi: 10.1111/j.1365-246X.2008.03872.x.
- WEISS, B. P., LIMA, E. A., FONG, L. E., et al., 2007, “Paleomagnetic analysis using SQUID microscopy”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 112, n. B9, pp. n/a–n/a. ISSN: 2156-2202. doi: 10.1029/2007JB004940. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/2007JB004940>>. B09105.
- YOKOYAMA, E., NÉDÉLEC, A., BARATOUX, D., et al., 2015, “Hydrothermal alteration in basalts from Vargeão impact structure, south Brazil, and implications for recognition of impact-induced hydrothermalism on Mars”, *Icarus*, v. 252, pp. 347 – 365. ISSN: 0019-1035. doi: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2015.02.001>.
- ZHANG, H., RAVAT, D., MARANGONI, Y. R., et al., 2018, “Improved total magnetization direction determination by correlation of the normalized source strength derivative and the RTP fields”, *GEOPHYSICS*, v. 0, n. ja, pp. 1–45. doi: 10.1190/geo2017-0178.1.