



Observatório  
Nacional

Ministério da  
Ciência e Tecnologia

DIVISÃO DE PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**INVERSÃO GRAVIMÉTRICA RADIAL POR  
CAMADAS PARA A RECONSTRUÇÃO DE  
CORPOS GEOLÓGICOS 3D**

Vanderlei Coelho de Oliveira Junior

Orientadora

Valéria Cristina Ferreira Barbosa

Rio de Janeiro

2010

INVERSÃO GRAVIMÉTRICA RADIAL POR CAMADAS PARA A RECONSTRUÇÃO  
DE CORPOS GEOLÓGICOS 3D

Vanderlei Coelho de Oliveira Junior

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM GEOFÍSICA.

Aprovada por:

---

Dra. Valéria Cristina Ferreira Barbosa (Orientadora)

---

Dr. João Batista Corrêa da Silva

---

Dr. Wladimir Shukowsky

---

Dr. Íris Pereira Escobar

---

Dr. Cosme Ferreira da Ponte Neto (Suplente)

---

Dr. Valiya Mannathal Hamza (Suplente)

RIO DE JANEIRO - BRASIL  
2010

*A meus pais e minha irmã*

# **AGRADECIMENTOS**

A meus pais e a minha irmã pelo incentivo, compreensão e apoio ao longo de toda essa caminhada.

A minha orientadora Dra. Valéria C. F. Barbosa por confiar em minha capacidade e guiar os meus primeiros passos no difícil caminho da pesquisa.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro em forma de bolsa.

Ao Observatório Nacional, que ofereceu toda a infra-estrutura necessária para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores Dr. Andrés R. R. Papa, Dr. Iris P. Escobar e Dr. Valiya M. Hamza pela predisposição constante.

A professora Dra. Yára R. Marangoni por todo o incentivo e apoio.

Aos amigos e professores Leo, Dr. Cosme, Dr. Fernando e Dr. João B. C. Silva pelas discussões e sugestões preciosas durante o desenvolvimento do trabalho.

Aos membros da banca, em especial ao Dr. Wladimir Shukowsky, por aceitarem revisar e contribuir com a conclusão deste trabalho.

Aos amigos Clubber, Davi, Greg e Lucas pela hospitalidade, amizade e apoio quando cheguei ao Rio.

Aos amigos Akel, Anderson, Beck, Bonilla, Dionísio, Gustavo, Julio, Orlando, Pavel, Rodrigo e Saulo pelo companheirismo e amizade.

A todos do centro Pae João da Caridade por todo o apoio e amizade.

Finalmente, a Érica por me ajudar a superar as horas difíceis e aguentar todo o meu mau humor.

# SUMÁRIO

RESUMO .....	1
ABSTRACT .....	3
1 INTRODUÇÃO .....	5
2 METODOLOGIA .....	11
2.1 PARAMETRIZAÇÃO E PROBLEMA DIRETO .....	11
2.2 PROBLEMA INVERSO .....	14
2.2.1 VÍNCULOS .....	16
2.2.2 OTIMIZAÇÃO .....	20
2.3 DETERMINAÇÃO DA INCERTEZA DOS PARÂMETROS ESTIMADOS E ANÁLISE DA INSTABILIDADE .....	22
2.4 DETERMINAÇÃO DA PROFUNDIDADE DA BASE DO MODELO INTERPRETATIVO .....	25
2.4.1 CÁLCULO DA MASSA VERDADEIRA DA ESTIMATIVA .....	25
2.4.2 DEFINIÇÃO DA MEDIDA DE DESAJUSTE DOS DADOS GEOFÍSICOS $s$ E DA RELAÇÃO TEÓRICA ENTRE $s$ E A MASSA DA ESTIMATIVA .....	27
2.4.3 PROCEDIMENTOS PRÁTICO PARA ESTIMAR A PROFUNDIDADE DO CORPO VERDADEIRO COM BASE NA CURVA $w \times s$ .....	31
3 APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS: VERIFICAÇÃO DO PROCEDIMENTO PRÁTICO PARA DETERMINAR ZMAX UTILIZANDO A CURVA $w \times s$ OBSERVADA .....	37
3.1 CORPOS SINTÉTICOS (VERDADEIROS).....	38
3.2 VARIÁVEIS DEFINIDAS A PRIORI.....	39

3.3 DESVIO DAS CURVAS $w \times s$ PRODUZIDAS NOS TESTES SINTÉTICOS EM RELAÇÃO À CURVA TEÓRICA .....	41
3.3.1 DIFERENÇA ENTRE A INCLINAÇÃO DO RAMO ASCENDENTE E DO RAMO DESCENDENTE NAS CURVAS $w \times s$ OBSERVADAS .....	42
3.3.2 INEXISTÊNCIA DE UM PONTO EM QUE $s = 0$ .....	45
3.4 ESTIMAÇÃO DA PROFUNDIDADE DO MODELO INTERPRETATIVO POR MEIO DAS CURVAS $w \times s$ OBSERVADAS .....	46
4 APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS .....	67
4.1 GRANITO AFLORANTE .....	68
4.1.1 CORPO SINTÉTICO (VERDADEIRO) .....	68
4.1.2 VARIÁVEIS DEFINIDAS A PRIORI .....	68
4.1.3 RESULTADOS .....	69
4.2 CORPO INTRUSIVO COMPLEXO .....	79
4.2.1 CORPO SINTÉTICO (VERDADEIRO) .....	79
4.2.2 VARIÁVEIS DEFINIDAS A PRIORI .....	79
4.2.3 RESULTADOS .....	81
5 APLICAÇÃO A DADOS REAIS .....	91
5.1 GRANITO REDENÇÃO .....	92
5.1.1 DESCRIÇÃO DA GEOLOGIA E DOS DADOS GRAVIMÉTRICOS .....	92
5.1.2 VARIÁVEIS DEFINIDAS A PRIORI .....	93
5.1.3 RESULTADOS .....	94
5.2 GREENSTONE BELT MATSITAMA .....	104
5.2.1 DESCRIÇÃO DA GEOLOGIA E DOS DADOS GRAVIMÉTRICOS .....	104
5.2.2 VARIÁVEIS DEFINIDAS A PRIORI .....	104

5.2.3 RESULTADOS .....	106
6 CONCLUSÃO .....	115
7 REFERÊNCIAS .....	118
APÊNDICE A – Vínculo de desigualdade .....	122
APÊNDICE B – Método de Levenberg-Marquardt .....	126

# RESUMO

Apresentamos um método de inversão gravimétrica para estimar a geometria de corpos geológicos 3D, sob a premissa do conhecimento da profundidade do topo e do contraste de densidade entre o corpo e o meio. A região que contém o corpo em subsuperfície é discretizada em um conjunto de prismas 3D, retos e justapostos na direção vertical de um sistema de coordenadas Cartesianas. A espessura e o contraste de densidade dos prismas são conhecidos; contudo suas seções horizontais são descritas por polígonos com formato desconhecido. As coordenadas horizontais dos vértices desses polígonos representam aproximadamente o contorno das seções horizontais da fonte geológica 3D em diferentes profundidades. Cada polígono possui um número fixo de vértices igualmente espaçados de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , que são descritos em coordenadas polares referidas a uma origem localizada dentro do polígono. Nosso método estima as distâncias radiais associadas aos vértices e as coordenadas Cartesianas horizontais da origem em cada polígono. A estimativa desses parâmetros por meio de dados gravimétricos permite recuperar um conjunto de prismas verticalmente justapostos com seções horizontais que representam um conjunto de fatias (ou lâminas) horizontais da fonte geológica 3D em diferentes profundidades. Para obter estimativas estáveis, impusemos vínculos na estimativa da forma da fonte, que permitem estimar fontes verticais ou inclinadas, isométricas ou não. A estimativa, embora seja estável e ajuste os dados, depende da profundidade máxima adotada para o conjunto de prismas do modelo interpretativo. Para reduzir a classe de possíveis soluções compatíveis com a anomalia de gravidade e com os vínculos, desenvolvemos um critério baseado em uma medida dos desajustes dos dados gravimétricos e na massa de estimativas obtidas em sucessivas inversões, em que adotamos diferentes valores para a profundidade máxima do conjunto de prismas 3D justapostos. Este critério consiste em plotar uma curva da massa das estimativas,  $w$ ,

contra as respectivas medidas de desajustes dos dados,  $s$ , para vários valores diferentes da profundidade máxima. O valor de profundidade máxima que produz o menor valor da medida de desajuste  $s$  na curva  $w \times s$  é a melhor estimativa da profundidade máxima verdadeira (ou mínima) para a base da fonte, dependendo se os dados têm ou não resolução para recuperar a fonte geológica. Este critério foi deduzido teoricamente a partir do teorema de Gauss. Nossos testes com dados sintéticos mostram que o valor correto para a profundidade da base da fonte é obtido se o valor mínimo de  $s$  na curva  $w \times s$  for bem definido; caso contrário, este critério fornece o limite mínimo para a profundidade da base da fonte. Esses testes também mostram que nosso método recupera eficientemente a geometria de fontes com inclinação variável. Aplicamos nosso método aos dados reais sobre o granito Redenção (Brasil) e sobre o complexo intrusivo Matsitama (Botsuana). No primeiro caso, nosso método estimou um granito com formato aproximadamente cônico e com profundidade da base em  $7,0 \pm 0,5$  km. No segundo caso, nosso método recuperou um corpo intrusivo com inclinação e sentido variáveis e com profundidade da base em  $8,0 \pm 0,5$  km.

# HORIZONTAL RADIAL GRAVITY INVERSION FOR RETRIEVING 3D GEOLOGIC BODIES

## ABSTRACT

We present a gravity-inversion method for estimating the geometry of 3D sources, assuming prior knowledge about its top and density contrast. The subsurface region containing the geologic sources is discretized into an ensemble of 3D vertical, juxtaposed prisms in the vertical direction of a right-handed coordinate system. The prisms' thicknesses and density contrasts are known, but their horizontal cross-sections are described by an unknown polygon. The horizontal coordinates of the polygon vertices approximately represent the edges of horizontal depth slices of the 3D geologic source. The polygon vertices of each prism are described by polar coordinates with an unknown origin within the prism. Our method estimates the radii associated with the vertices of each polygon for a fixed number of equally spaced angles from  $0^\circ$  to  $360^\circ$  and the horizontal Cartesian coordinates of the unknown origin. By estimating these parameters from gravity data, we retrieve a set of vertically stacked prisms with polygonal horizontal sections that represents a set of juxtaposed horizontal depth slices of the estimated source and approximates the 3D source's geometry. To obtain stable estimates we impose constraints on the source shape. The judicious use of first-order Tikhonov regularization on either all or a few parameters allows estimating both vertical and inclined sources whose shapes can be isometric or anisometric. The estimated solution, despite being stable and fitting the data, will depend on the maximum depth assumed for the set of juxtaposed 3D prisms. To reduce the class of possible solutions compatible with the gravity anomaly and the

constraints, we use the criterion based on data-misfit measure and the estimated total-anomalous mass computed along successive inversions that use different tentative maximum depths for the set of assumed juxtaposed 3D prisms. In this criterion we plotted the curve of estimated total-anomalous mass  $w$  versus data-misfit measure  $s$  for the range of different tentative maximum depths considered. The tentative value for the maximum depth producing the smallest value of data-misfit measure in the curve  $w \times s$  is the best estimate of the true (or minimum) depth to the bottom of the source, depending on whether the true source produces a gravity anomaly that is able (or unable) to resolve it. This criterion was deduced theoretically from Gauss' theorem. Our tests with synthetic data shows that the correct depth-to-bottom estimate of the source is obtained if the smallest value of  $s$  on the curve  $w \times s$  is well-defined; otherwise this criterion provides the lower bound estimate of the bottom's depth of the source. Our tests using synthetic data show that the method efficiently recovers source geometries dipping at different angles. We applied our method to real data from the Redençao granite (Brazil) and from the Matsitama intrusive complex (Botswana). In the first case, our method estimates a granite with nearly conical shape and with maximum bottom depth of  $7.0 \pm 0.5$  km. In the second case, our method retrieves a dipping intrusion with variable dips and strikes and with maximum bottom depth of  $8.0 \pm 0.5$  km.

# 1) INTRODUÇÃO

Um dos objetivos da geofísica é o estudo da estrutura interna da Terra e isso pode ser feito por meio do campo de gravidade. O campo de gravidade possui uma componente devida ao movimento de rotação e outra de origem gravitacional, que é causada pela distribuição interna de densidade. Essa distribuição pode ser caracterizada em termos da diferença entre o campo de gravidade medido e aquele predito por um modelo teórico denominado Terra normal. A diferença entre esses campos, quando calculada no mesmo ponto, é denominada distúrbio de gravidade (HEISKANEN e MORITZ, 1967) e é causada unicamente pelos contrastes da distribuição de densidade interna à Terra em relação ao modelo de Terra normal. Esses contrastes caracterizam excessos ou faltas de massa que, neste trabalho, são denominadas massas anômalas. As massas anômalas são encontradas, por exemplo, nas formas de câmaras magmáticas, zonas de subducção, bacias sedimentares, corpos intrusivos etc. É possível inferir características de massas anômalas por meio do distúrbio de gravidade gerado por elas; no entanto, em geofísica, é comum utilizar a anomalia de gravidade para fazer isso. A anomalia de gravidade é a diferença entre o campo de gravidade determinado em um ponto sobre a superfície geoidal e o campo predito pela Terra Normal em outro ponto, localizado sobre a superfície elipsoidal (HEISKANEN e MORITZ, 1967). Como essa diferença não é calculada no mesmo ponto, a anomalia de gravidade possui uma componente devida à atração gravitacional das massas anômalas e outra que está relacionada com a distância entre a superfície geoidal e a superfície elipsoidal, denominada altura geoidal. Em geral, essa segunda componente é considerada constante na área de estudo e é negligenciada, presumindo-se que a anomalia resultante seja causada apenas pelo efeito gravitacional das massas anômalas.

A utilização de anomalias de gravidade para a reconstrução de massas anômalas formadas por corpos geológicos 3D em subsuperfície é um problema que vem sendo atacado por vários autores de duas maneiras diferentes: 1) modelagem direta iterativa e 2) inversão. Alguns autores utilizam modelagem direta interativa (BARNETT, 1976; STARICH et al., 1994; OEZSEN, 2004), cuja principal dificuldade é a tediosa tarefa de testar uma ampla variedade de geometrias 3D até obter uma que represente as anomalias de gravidade de maneira aceitável por tentativa e erro. A utilização da inversão para a reconstrução de corpos geológicos em subsuperfície pode ser dividida em dois grupos: o primeiro estima a distribuição dos contrastes de densidade e o segundo estima a forma geométrica dos corpos. A maioria dos métodos de inversão que objetivam a reconstrução de corpos geológicos 3D se enquadra no primeiro grupo. Esses métodos aproximam a subsuperfície por meio de uma malha de prismas retangulares, 3D e justapostos nas direções x, y e z. As dimensões de cada prisma são conhecidas e constantes e o contraste de densidade dentro de cada prisma é constante e desconhecido. Nesse caso, os corpos geológicos 3D são reconstruídos por meio da estimativa do contraste de densidade em cada prisma, que são os parâmetros desconhecidos do problema inverso. Dentre os vários autores que utilizam essa abordagem estão Bear, Al-Shukri e Rudman (1995), que minimizam a norma Euclidiana das estimativas dos parâmetros usando SVD e Li e Oldenburg (1998), que minimizam a primeira derivada das estimativas dos parâmetros ponderadas. Segundo estes autores, os “pesos ideais” derivam da função discreta de Green do problema gravimétrico. Esta estratégia foi introduzida na tentativa de evitar a concentração da estimativa na superfície da Terra e atuar como uma possível compensação à perda de sensibilidade com a profundidade. Outros autores como Portniaguine e Zhdanov (1999) apresentaram o método de inversão focada, que é uma adaptação do método de Last e Kubik (1983). Camacho, Montesinos e Vieira (2000) apresentam uma estratégia semelhante à apresentada por René (1986), em que massas anômalas (com contrastes de densidade não nulos) são sucessivamente

acrescentadas às bordas da estimativa anterior, fazendo com que a estimativa cresça e tenha volume mínimo. Nagihara e Hall (2001) estimam a forma de um corpo de sal usando a técnica “simulated annealing” para minimizar a norma Euclidiana das estimativas dos parâmetros. Silva Dias, Barbosa e Silva (2009) apresentaram um método de inversão integrada a uma estratégia de aprendizagem adaptativa para recuperar as formas geométricas de múltiplos corpos geológicos 3D que produzem anomalias fortemente interferentes. O segundo grupo de métodos de inversão para a reconstrução de corpos geológicos 3D estima a geometria de corpos isolados. Poucos métodos de inversão seguem esta abordagem, em que se presume o conhecimento do contraste de densidade do corpo e o objetivo é estimar a sua forma. Moraes e Hansen (2001), por exemplo, propuseram um método de inversão que aproxima os corpos geológicos 3D por poliedros. Estes autores, estimam os vértices dos poliedros e a regularização foi feita por meio dos funcionais estabilizantes de Tikhonov de ordens um e dois. Silva e Barbosa (2004) desenvolveram um método de inversão radial 2D que aproxima a seção vertical do corpo geológico por meio de um polígono arbitrário, com um número fixo de vértices igualmente espaçados entre 0° e 360° e que são descritos em coordenadas polares referidas a uma origem arbitrária situada dentro desse polígono. Os parâmetros a serem estimados são os raios dos vértices e a regularização foi feita por meio dos funcionais estabilizantes de Tikhonov de ordens zero e um (SILVA; MEDEIROS e BARBOSA, 2001) e através de funcionais que concentram a propriedade física anômala ao longo de direções preferenciais e que incorporam a informação de convexidade da forma do corpo. Wildman e Gazonas (2009) desenvolveram um método de inversão que pode ser aplicado à reconstrução de múltiplos corpos 2D ou 3D. No caso 2D o modelo interpretativo é formado por poligonais e no 3D é formado por poliedros. O método funciona em duas etapas. Na primeira, os autores presumem formas simples e estimam transformações de translação e de escala para inferir as localizações e os tamanhos aproximados dos corpos. Em seguida, os autores refinam a estimativa anterior por meio da adição de

novos vértices e estimam a posição de todos os vértices das várias poligonais (no caso 2D) ou poliedros (no caso 3D). Luo (2010) propôs um método de inversão 2D que aproxima a seção vertical do corpo geológico por um polígono cujo número de vértices também é um parâmetro estimado. Esse tipo de problema é denominado trans-dimensional. O autor utilizou um modelo de inferência Bayesiano para resolver problemas relacionados com mal-condicionamento, instabilidade e não-unicidade e utilizou um método de Monte Carlo baseado em Cadeias de Markov com saltos reversíveis para resolver o problema da trans-dimensionalidade.

Neste trabalho, apresentamos um novo método de inversão com base em dados gravimétricos medidos na superfície física da Terra para estimar a geometria de corpos geológicos 3D isolados, sob a premissa do conhecimento do contraste de densidade entre o meio e o corpo. Este método é uma generalização do método de inversão radial 2D, desenvolvido por Silva e Barbosa (2004), para um método de reconstrução de corpos 3D. No presente trabalho, o corpo geológico 3D é aproximado por múltiplos prismas retos, justapostos verticalmente e com seções horizontais descritas por polígonos, cujos vértices são descritos em coordenadas polares referidas a uma origem arbitrária localizada dentro desse polígono. A reconstrução do corpo é feita pela estimação dos raios dos vértices e das coordenadas da origem do polígono que descreve a seção horizontal de cada prisma. Nessa estimação, usamos vínculos matemáticos que introduzem informações geológicas sobre a forma desse corpo. Os vínculos utilizados impõem que cada parâmetro estimado esteja contido em um intervalo definido pelo intérprete e que todas as distâncias radiais sejam as mais próximas possíveis de zero. Adicionalmente, os vínculos usados impõem suavidade entre distâncias radiais adjacentes pertencentes ao mesmo prisma, suavidade entre distâncias radiais adjacentes pertencentes a prismas adjacentes e suavidade entre as coordenadas horizontais das origens arbitrárias de prismas adjacentes. Caso o corpo aflore e os limites da parte aflorante sejam conhecidos, é imposto que o contorno do primeiro prisma (o mais raso) seja o mais próximo possível desses limites. Caso os

limites da parte aflorante sejam desconhecidos, mas seja conhecido apenas um ponto sobre a parte aflorante, é imposto que a origem do primeiro prisma esteja localizada o mais próximo possível desse ponto.

Tal como descrito acima, o corpo geológico é aproximado por um conjunto de prismas 3D justapostos verticalmente. Isso implica que o intérprete deve impor uma profundidade máxima para a base do corpo geológico. Observamos que é possível obter estimativas que admitam diferentes profundidades máximas para a base do corpo geológico, e que sejam igualmente estáveis e ajustem os dados observados. Para reduzir esta ambiguidade, utilizamos o critério de massa total, que se baseia na construção da curva da massa anômala total estimada versus a medida de desajuste dos dados obtidas atribuindo-se diferentes valores tentativos para a profundidade máxima do modelo interpretativo. O valor mínimo da medida de desajuste dos dados neste gráfico está associada a profundidade verdadeira (ou mínima) da base do corpo geológico.

Para testar o desempenho do método, utilizamos dados gravimétricos sintéticos contaminados com ruído a fim de avaliar a estabilidade imposta à estimativa pelos vínculos matemáticos. Os resultados mostram que o método é capaz de gerar estimativas estáveis, que recuperam a geometria do corpo e que a utilização da curva da massa anômala total estimada versus a medida de desajuste dos dados diminui a ambiguidade em relação à profundidade da base do corpo.

Finalmente o método foi aplicado às anomalias de gravidade localizadas sobre o granito Redenção (localizado no estado do Pará, Brasil) e sobre o greenstone belt Matsitama (localizado no nordeste de Botsuana, centro sul da África). No caso do granito, o método inferiu um corpo com formato aproximadamente cônico, com a parte mais larga próxima a superfície e com profundidade da base em  $7,0 \pm 0,5$  km, concordante com interpretações anteriores. No caso do greenstone belt, a estimativa também corrobora interpretações anteriores e mostra um corpo complexo, inclinado,

com direção e inclinação variando em profundidade e com profundidade da base em  $8,0 \pm 0,5$  km.

## 2) METODOLOGIA

O objetivo deste trabalho é estimar a geometria de corpos geológicos 3D, localizados em subsuperfície e com contraste de densidade conhecido por meio de um conjunto discreto de medições da anomalia de gravidade (dados observados) realizadas na superfície e produzidas por estes corpos. O procedimento necessário para essa estimação pode ser dividido em três etapas (TARANTOLA, 2005):

- i) *Parametrização*: aproximação da geometria do corpo geológico por meio de um modelo interpretativo que possa ser descrito por um conjunto de parâmetros.
- ii) *Problema direto*: prescrição das relações físico-matemáticas que permitam, atribuídos valores aos parâmetros que descrevam o modelo interpretativo, predizer os valores dos dados observados na superfície. Daqui em diante, os valores dos dados observados preditos pelas leis físicas serão denominados dados preditos.
- iii) *Problema inverso*: estimar os valores dos parâmetros que descrevem o modelo interpretativo de tal forma que a diferença entre os dados observados e os dados preditos seja mínima.

### 2.1) PARAMETRIZAÇÃO E PROBLEMA DIRETO

Seja um conjunto de dados observados (Figura 2.1a) na superfície da Terra (observações gravimétricas medidas na superfície da Terra) e produzidos por um corpo geológico 3D (Figura 2.1b). Neste trabalho, esse corpo tem sua geometria aproximada por um modelo interpretativo formado por um conjunto de  $L$  prismas 3D, retos, justapostos verticalmente e com seção horizontal representada por um polígono

(Figura 2.2). O polígono que representa a seção horizontal do k-ésimo prisma possui  $M^k$  vértices, que são descritos em coordenadas polares referidas a uma origem  $O^k$  dentro deste (Figura 2.3). Esse prisma exerce, na posição  $(x_i, y_i, z_i)$ , uma atração gravitacional cuja componente vertical é calculada com base no trabalho de Plouff (1976) e descrita por uma função não-linear  $f^k(x_i, y_i, z_i, \bar{m}^k, \bar{\theta}^k, \rho^k, dz^k, z_1^k)$ , em que  $\rho^k$ ,  $dz^k$  e  $z_1^k$  são o contraste de densidade, a espessura e a coordenada do topo do k-ésimo prisma, respectivamente. Os vetores  $\bar{\theta}^k$  e  $\bar{m}^k$  são definidos como

$$\bar{\theta}^k = \begin{bmatrix} \theta_1^k \\ \vdots \\ \theta_{M^k}^k \end{bmatrix}_{M^k \times 1} \quad (2.1)$$

e

$$\bar{m}^k = \begin{bmatrix} r_1^k \\ \vdots \\ r_{M^k}^k \\ x_0^k \\ y_0^k \end{bmatrix}_{(M^k + 2) \times 1}, \quad (2.2)$$

em que  $(x_0^k, y_0^k)$  são as coordenadas Cartesianas horizontais da origem  $O^k$  e  $\theta_j^k$  e  $r_j^k$  ( $j = 1, \dots, M^k$ ) são, respectivamente, a coordenada angular e a distância radial, referidas à origem  $O^k$ , que definem a posição dos vértices da seção horizontal poligonal do k-ésimo prisma (Figura 2.3).

A i-ésima componente vertical da atração gravitacional predita pelo modelo interpretativo em um ponto observacional  $(x_i, y_i, z_i)$  é dada pela somatória da

componente vertical da atração gravitacional exercida pelos  $L$  prismas nesse mesmo ponto, isto é,

$$g_i(\bar{m}) \equiv \sum_{k=1}^L f^k(x_i, y_i, z_i, \bar{m}^k, \bar{\theta}^k, \rho^k, dz^k, z_1^k), \quad (2.3)$$

em que  $\bar{m}$  é um vetor de parâmetros que descreve as geometrias das seções horizontais poligonais de todos os  $L$  prismas que compõem o modelo interpretativo e é definido como

$$\bar{m} = \begin{bmatrix} \bar{m}^1 \\ \vdots \\ \bar{m}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & & r_1^1 \\ \vdots & & \vdots \\ m_{M^1} & & r_{M^1}^1 \\ m_{M^1+1} & & x_0^1 \\ m_{M^1+2} & & y_0^1 \\ \vdots & & \vdots \\ m_{P-M^L-2} & & r_1^L \\ \vdots & & \vdots \\ m_{P-2} & & r_{M^L}^L \\ m_{P-1} & & x_0^L \\ m_P & & y_0^L \end{bmatrix}_{P \times 1}, \quad (2.4)$$

em que  $P = 2L + \sum_{k=1}^L M^k$  e cujo vetor  $\bar{m}^k$  é definido pelas coordenadas polares radiais

que descrevem a seção horizontal poligonal do  $k$ -ésimo prisma e pelas coordenadas da origem (Equação 2.2).

Neste trabalho, considerou-se que o topo do corpo geológico é igual a  $z_0$ , isto é,  $z_1^1 = z_0$ . Por simplicidade, admitiu-se que o contraste de densidade e a espessura de todos os prismas são iguais ( $\rho^k = \rho$  e  $dz^k = dz$ , para todo  $k$ ), que todos os

prismas têm o mesmo número de vértices ( $M^k = M$ , para todo  $k$ ) e que estes são igualmente espaçados entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ . Além disso, adotou-se que as coordenadas angulares  $\theta_j^k$  ( $k=1,\dots,L$  e  $j=1,\dots,M$ ) são medidas a partir do eixo  $y$  positivo, em direção ao eixo  $x$  positivo, no sentido anti-horário. Por fim, considerou-se que as variáveis  $L$ ,  $M$ ,  $dz$ ,  $z_0$  e  $\rho$  são conhecidas e definidas a priori pelo intérprete.

## 2.2) PROBLEMA INVERSO

Dado um conjunto de  $N$  dados observados ( $d_i, i=1,\dots,N$ ) sobre a superfície da Terra, nas coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i=1,\dots,N$ , o problema inverso foi formulado como um problema de otimização, cujo objetivo é estimar o vetor de parâmetros  $\bar{m}$  (Equação 2.4) que torna o  $i$ -ésimo dado predito  $g_i(\bar{m})$  (Equação 2.3) o mais próximo possível do  $i$ -ésimo dado observado  $d_i$  em cada posição  $(x_i, y_i, z_i)$ . Essa proximidade foi medida pelo quadrado da norma Euclidiana do vetor contendo as diferenças entre os dados observados  $d_i, i=1,\dots,N$ , e os dados preditos  $g_i(\bar{m}), i=1,\dots,N$ , dividido pela diferença entre os números de observações  $N$  e de parâmetros  $P$ , isto é,

$$\phi(\bar{m}) = \frac{1}{N-P} [\bar{d} - \bar{g}(\bar{m})]^T [\bar{d} - \bar{g}(\bar{m})], \quad (2.5)$$

sendo  $\bar{g}(\bar{m})^T = [g_1(\bar{m}) \ \dots \ g_N(\bar{m})]_{1 \times N}$ ,  $\bar{d}^T = [d_1 \ \dots \ d_N]_{1 \times N}$  e o sobrescrito  $T$  indica transposição. A expressão 2.5 é denominada função do ajuste.

Estimar o vetor  $\bar{m}$  que minimiza a expressão 2.5 é um problema mal-posto, uma vez que a solução é não única e instável. Para tornar este problema bem-posto,

utilizou-se o método da regularização de Tikhonov, que consiste em formular o problema inverso como um problema de otimização vinculada (TIKHONOV; ARSENIN, 1977), em que os vínculos são funções de  $\bar{m}$  e introduzem informações a priori sobre os parâmetros a serem estimados. Além disso, utilizou-se um vínculo de desigualdade, que impõe que cada parâmetro estimado esteja contido em um intervalo definido pelo intérprete. Sendo assim, o problema inverso ficou definido por meio da minimização de

$$\Gamma(\bar{m}) = \phi(\bar{m}) + \mu \sum_{j=1}^6 \alpha_j \varphi_j(\bar{m}), \quad (2.6a)$$

sujeito a

$$m_{i \text{ min}} < m_i < m_{i \text{ max}}, \quad i = 1, \dots, P, \quad (2.6b)$$

em que  $\varphi_j(\bar{m})$  é o j-ésimo vínculo,  $\alpha_j$  é um escalar positivo, que determina o peso do j-ésimo vínculo,  $\mu$  é um escalar positivo denominado parâmetro de regularização, que estabelece a importância dos vínculos em relação à função do ajuste (Equação 2.5),  $m_i$  é o i-ésimo elemento do vetor de parâmetros  $\bar{m}$  (Equação 2.4) e  $m_{i \text{ min}}$  e  $m_{i \text{ max}}$  são definidos pelo intérprete como sendo, respectivamente, os limites inferior e superior para o i-ésimo elemento do vetor de parâmetros  $\bar{m}$ .

## 2.2.1) VÍNCULOS

### 2.2.1.1) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes ao mesmo prisma

Este vínculo impõe que o quadrado da norma Euclidiana da diferença entre distâncias radiais adjacentes dentro de um mesmo prisma seja a menor possível. Isto consiste em impor que a estimativa da distância radial do  $j$ -ésimo vértice do  $k$ -ésimo prisma  $r_j^k$  seja a mais próxima possível da estimativa da distância radial vizinha  $r_{j+1}^k$  dentro do mesmo  $k$ -ésimo prisma. Este vínculo previne a existência de descontinuidades entre as estimativas das distâncias radiais adjacentes dentro de um mesmo prisma e impõe que os prismas se aproximem o máximo possível do formato cilíndrico. Este vínculo pode ser escrito como:

$$\varphi_1(\bar{m}) = \sum_{k=1}^L \left[ (r_M^k - r_1^k)^2 + \sum_{j=1}^{M-1} (r_j^k - r_{j+1}^k)^2 \right]. \quad (2.7)$$

### 2.2.1.2) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes a prismas adjacentes

Este vínculo impõe que o quadrado da norma Euclidiana da diferença entre distâncias radiais adjacentes localizadas em prismas verticalmente adjacentes seja a menor possível, ou seja, minimiza a diferença entre  $r_j^k$  e  $r_j^{k+1}$  ( $k=1,\dots,L-1$  e  $j=1,\dots,M$ ). Este vínculo previne a existência de descontinuidades abruptas entre as estimativas das distâncias radiais adjacentes localizadas em prismas adjacentes. Isto implica que prismas verticalmente adjacentes tenham formatos parecidos. Este vínculo pode ser escrito como:

$$\varphi_2(\bar{m}) = \sum_{k=1}^{L-1} \left[ \sum_{j=1}^M (r_j^{k+1} - r_j^k)^2 \right]. \quad (2.8)$$

### 2.2.1.3) Vínculo do afloramento

Seja um corpo geológico aflorante. Este vínculo impõe que a estimativa do contorno do primeiro prisma do modelo interpretativo (prisma mais próximo à superfície) seja o mais próximo possível do contorno que descreve os limites horizontais do afloramento e que separa o corpo geológico da rocha encaixante. O primeiro prisma do modelo interpretativo é descrito por distâncias radiais  $r_j^1$  ( $j=1, \dots, M^1$ ), referidas à origem  $O^1$ , cujas coordenadas Cartesianas horizontais são  $(x_0^1, y_0^1)$ . O limite do afloramento deve ser representado por um polígono, cujos vértices são descritos em coordenadas polares referidas a uma origem  $O^0$  localizada dentro dos limites horizontais deste afloramento e que possui o mesmo número de vértices dos prismas que compõem o modelo interpretativo. Além disso, esses vértices também devem ser igualmente espaçados entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ . Os vértices desse polígono têm distâncias radiais  $r_j^0$  ( $j=1, \dots, M$ ), referidas a origem  $O^0$  cujas coordenadas são  $(x_0^0, y_0^0)$ . Matematicamente, este vínculo impõe que seja mínima a soma dos quadrados das diferenças entre as coordenadas radiais  $r_j^0$  e  $r_j^1$  ( $j=1, \dots, M$ ) e o quadrado da norma Euclidiana da diferença entre as coordenadas horizontais  $(x_0^1, y_0^1)$  e  $(x_0^0, y_0^0)$ , das origens  $O^0$  e  $O^1$ , respectivamente. Dessa forma, esse vínculo pode ser escrito como

$$\varphi_3(\bar{m}) = \left[ (x_0^1 - x_0^0)^2 + (y_0^1 - y_0^0)^2 + \sum_{j=1}^M (r_j^1 - r_j^0)^2 \right]. \quad (2.9)$$

No entanto, há situações em que o intérprete tem a informação sobre a área em que o corpo aflora, mas não conhece o contorno da parte aflorante. Nessa situação, há apenas a origem  $O^0$  e o vínculo do afloramento é modificado tal que a distância entre as origens  $O^1$  e  $O^0$  seja a menor possível, isto é,

$$\varphi_4(\bar{m}) = [(x_0^1 - x_0^0)^2 + (y_0^1 - y_0^0)^2]. \quad (2.10)$$

#### **2.2.1.4) Vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes**

Este vínculo impõe que a diferença entre as coordenadas das origens de prismas verticalmente adjacentes seja a menor possível, ou seja, minimiza a diferença entre  $(x_0^k, y_0^k)$  e  $(x_0^{k+1}, y_0^{k+1})$  ( $k = 1, \dots, L-1$ ). Este vínculo previne a existência de descontinuidades entre as estimativas das coordenadas das origens de prismas verticalmente adjacentes, inibindo deslocamentos horizontais relativos entre estes e impondo que o corpo seja preferivelmente vertical. Este vínculo pode ser escrito como:

$$\varphi_5(\bar{m}) = \sum_{k=1}^{L-1} [(x_0^{k+1} - x_0^k)^2 + (y_0^{k+1} - y_0^k)^2]. \quad (2.11)$$

#### **2.2.1.5) Vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais**

Este vínculo foi utilizado apenas com a finalidade de estabilizar matematicamente o problema inverso, impondo que o quadrado da norma Euclidiana das distâncias radiais seja o menor possível. Isto implica que as distâncias radiais estimadas sejam as mais próximas possíveis de zero:

$$\varphi_6(\bar{m}) = \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^M (r_j^k)^2 . \quad (2.12)$$

### 2.2.1.6) Vínculo de desigualdade

Este vínculo impõe que os parâmetros satisfaçam a desigualde 2.6b, isto é, que cada parâmetro estimado esteja contido em um intervalo definido pelo intérprete. Esse intervalo pode ser estabelecido com base no conhecimento sobre a geologia da área de estudo ou simplesmente por meio da extensão horizontal da anomalia de gravidade. Neste trabalho, por simplicidade, se  $m_i$  for uma distância radial  $r_j^k$ ,  $m_{i \min} = r_{\min}$  e  $m_{i \max} = r_{\max}$  para qualquer  $j$  e  $k$ ; se  $m_i$  for a coordenada  $x_0^k$  da origem do  $k$ -ésimo prisma,  $m_{i \min} = x_{0 \min}$  e  $m_{i \max} = x_{0 \max}$ , para qualquer  $k$ ; finalmente, se  $m_i$  for a coordenada  $y_0^k$  da origem do  $k$ -ésimo prisma,  $m_{i \min} = y_{0 \min}$  e  $m_{i \max} = y_{0 \max}$ , para qualquer  $k$ .

O vínculo de desigualdade é incorporado durante a solução do problema inverso, por meio de uma função que transforma o  $i$ -ésimo elemento  $m_i \in ]m_{i \min}, m_{i \max}[$  (Equação 2.6b) do vetor de parâmetros  $\bar{m}$  (Equação 2.4) no  $i$ -ésimo elemento  $\check{m}_i \in ]-\infty, +\infty[$  de um vetor de parâmetros transformados  $\check{m}$  (BARBOSA; SILVA; MEDEIROS, 1999). Os detalhes matemáticos estão no Apêndice A. Esse vínculo foi utilizado para evitar a estimativa de distâncias radiais negativas e para impor que o corpo esteja localizado aproximadamente na região abaixo da anomalia de gravidade.

## 2.2.2) OTIMIZAÇÃO

O problema inverso foi formulado como um problema de otimização vinculada, cujo objetivo é estimar o mínimo da função  $\Gamma(\bar{m})$  (Equação 2.6a), sujeito a desigualdade 2.6b. Como a função  $\Gamma(\bar{m})$  é não linear em relação a  $\bar{m}$ , a minimização desta foi feita de maneira iterativa, por meio de sucessivas aproximações lineares, de acordo com o método de Levenberg-Marquardt (MARQUARDT, 1963 – Apêndice B). Na k-ésima iteração, esse método parte de uma estimativa do vetor de estimativas de parâmetros  $\hat{\bar{m}}_k$ , estima uma correção  $\Delta\hat{\bar{m}}_k$  e determina um novo vetor de parâmetros  $\hat{\bar{m}}_{k+1} = \hat{\bar{m}}_k + \Delta\hat{\bar{m}}_k$ . Neste trabalho, o símbolo sobrescrito “^” será utilizado para indicar que o vetor é uma estimativa. No método de Levenberg-Marquardt, este procedimento é repetido enquanto  $\Gamma(\hat{\bar{m}}_{k+1}) < \Gamma(\hat{\bar{m}}_k)$  e até que o critério de parada seja satisfeito. Esse critério expressa a invariabilidade aproximada da função  $\Gamma(\bar{m})$ , isto é, o procedimento continua até que seja satisfeita a seguinte desigualdade

$$\frac{|\Gamma(\hat{\bar{m}}_{k+1}) - \Gamma(\hat{\bar{m}}_k)|}{|\Gamma(\hat{\bar{m}}_k)|} \leq \varepsilon, \quad (2.13)$$

em que  $\varepsilon$  é um real positivo, pequeno e definido pelo intérprete.

No método de Levenberg-Marquardt, a estimativa da correção dos parâmetros  $\Delta\hat{\bar{m}}_k$  é calculada pela seguinte expressão

$$[\bar{\nabla}\Gamma(\hat{\bar{m}}_k) + \lambda \bar{I}] \Delta\hat{\bar{m}}_k = -\bar{\nabla}\Gamma(\hat{\bar{m}}_k), \quad (2.14)$$

em que  $\lambda$  é um escalar positivo, que é modificado em cada iteração e é denominado parâmetro de Levenberg-Marquardt,  $\bar{\nabla}\Gamma(\hat{m}_k)$  e  $\bar{\nabla}\Gamma(\check{m}_k)$  são, respectivamente, a matriz Hessiana e o vetor-gradiente da Equação 2.6a, ambos avaliados na estimativa  $\hat{m}_k$ , e  $\bar{I}$  é a matriz identidade de ordem  $P$ . Os detalhes matemáticos sobre o método de Levenberg-Marquardt e a dedução dos elementos da expressão 2.14 são apresentados no Apêndice B.

Para incorporar o vínculo de desigualdade nos parâmetros (desigualdade 2.6b), o procedimento iterativo do método de Levenberg-Marquardt foi modificado. Na  $k$ -ésima iteração, calcula-se um vetor de parâmetros transformados  $\check{m}_k$ , cujos elementos são computados em função dos elementos do vetor de parâmetros estimados  $\hat{m}_k$ , por meio da expressão A.3 (Apêndice A). Em seguida, ao invés de estimar uma correção  $\Delta\hat{m}_k$ , calcula-se uma correção  $\Delta\check{m}_k$  resolvendo o sistema linear

$$[\bar{\nabla}\Gamma(\hat{m}_k) + \lambda \bar{I}] \bar{T}(\hat{m}_k) \Delta\check{m}_k \approx -\bar{\nabla}\Gamma(\hat{m}_k), \quad (2.15)$$

em que  $\lambda$  é o parâmetro de Levenberg-Marquardt (Apêndice B) e  $\bar{T}(\hat{m}_k)$  (Equação A.9 – Apêndice A) é uma matriz diagonal, cujo  $i$ -ésimo elemento é dado por

$$[\bar{T}(\hat{m}_k)]_{ii} = \frac{(m_{i \max} - m_i)(m_i - m_{i \min})}{(m_{i \max} - m_{i \min})}, \quad i = 1, \dots, P, \quad (2.16)$$

em que  $m_i$  é o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $\hat{m}_k$  e  $m_{i \min}$  e  $m_{i \max}$  são definidos na expressão 2.6b. Os detalhes da implementação do vínculo de desigualdade e do método de Levenberg-Marquardt estão nos Apêndices A e B, respectivamente.

Após estimar a correção  $\Delta\bar{m}_k$  na k-ésima iteração, solucionando-se o sistema linear dado pela expressão 2.15, soma-se esta correção ao vetor de parâmetros transformados  $\bar{m}_k$ , produzindo a estimativa  $\bar{m}_{k+1}$ , isto é,

$$\bar{m}_{k+1} = \bar{m}_k + \Delta\bar{m}_k . \quad (2.17)$$

Finalmente, a estimativa  $\hat{m}_{k+1}$  é obtida usando-se a expressão A.4.

## 2.3) DETERMINAÇÃO DA INCERTEZA NOS PARÂMETROS ESTIMADOS E ANÁLISE DA INSTABILIDADE

Este trabalho busca obter uma estimativa  $\hat{m}$  do vetor de parâmetros  $\bar{m}$  (Equação 2.4) a partir de um conjunto de dados gravimétricos observados  $d_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Cada dado contém uma parcela que é devida ao sistema físico estudado (corpo geológico localizado em subsuperfície) e outra que é aleatória e proveniente de erros experimentais. De forma simplificada, os erros experimentais são causados por tudo aquilo que impossibilita obter os mesmos valores para uma grandeza física, mesmo se esta for medida sob as mesmas condições experimentais. Sendo assim, é necessário determinar a influência dos erros experimentais sobre uma estimativa obtida a partir de um conjunto de dados observados, isto é, determinar a incerteza em cada parâmetro estimado.

No contexto de problemas inversos, a presença dos erros experimentais pode ser vista como perturbações no conjunto de dados observados. Especificamente, em problemas inversos mal-postos, tal como o que estamos abordando neste trabalho,

pequenas perturbações nos dados observados causam grandes perturbações nos parâmetros estimados, caracterizando o que se conhece como instabilidade. Dessa forma, a instabilidade de uma estimativa pode ser descrita como uma medida da variabilidade de cada parâmetro estimado mediante perturbações no conjunto de dados. Neste trabalho, o cálculo de todas as estimativas  $\hat{m}$  do vetor parâmetros, seja para dados sintéticos ou dados reais, foi feito da seguinte forma:

- i) Uma vez definido o valor de todas as variáveis conhecidas do modelo interpretativo (Seção 2.1), dos vínculos (Seção 2.2.1) e da otimização (Seção 2.2.2 e Apêndice B), geramos  $Q$  amostras diferentes de uma variável pseudo-aleatória com distribuição Gaussiana, média nula e desvio padrão definido para simular os erros experimentais nos dados observados.
- ii) Somamos cada amostra da variável aleatória ao conjunto original de dados observados  $d_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), gerando assim  $Q$  conjuntos de dados geofísicos contaminados

$$\tilde{\tilde{d}}^l = \begin{bmatrix} \tilde{d}_1^l \\ \tilde{d}_2^l \\ \vdots \\ \tilde{d}_N^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1^l \\ e_2^l \\ \vdots \\ e_N^l \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

em que  $l = 1, \dots, Q$  e  $e_i^l$  é o  $i$ -ésimo elemento da  $l$ -ésima amostra aleatória utilizada para contaminar os dados observados.

- iii) Obtivemos uma estimativa  $\tilde{\vec{m}}^l$  do vetor de parâmetros para cada conjunto de dados geofísicos contaminados  $\tilde{\vec{d}}^l$  ( $l = 1, \dots, Q$ ) (expressão 2.18) minimizando a função definida pela expressão 2.6a, sujeita à desigualdade 2.6b.
- iv) Redefinimos os elementos do vetor de parâmetros estimados  $\hat{\vec{m}}$  como sendo a média amostral do conjunto de  $Q$  estimativas  $\tilde{\vec{m}}^l$  a partir da expressão

$$\hat{m}_k = \frac{\sum_{l=1}^Q \tilde{m}_k^l}{Q}, \quad k = 1, \dots, P, \quad (2.19)$$

em que  $\hat{m}_k$  é o  $k$ -ésimo elemento do vetor de parâmetros estimados  $\hat{\vec{m}}$  e  $\tilde{m}_k^l$  é o  $k$ -ésimo elemento do vetor de parâmetros  $\tilde{\vec{m}}^l$ , estimado a partir da  $l$ -ésimo conjunto de dados contaminados  $\tilde{\vec{d}}^l$  (expressão 2.18),

- v) Determinamos a incerteza do  $k$ -ésimo elemento  $\hat{m}_k$  do vetor de parâmetros estimados  $\hat{\vec{m}}$  como sendo o desvio padrão amostral calculado com base no conjunto de  $Q$  estimativas  $\tilde{\vec{m}}^l$  a partir da expressão

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^Q (\tilde{m}_k^l - \hat{m}_k)^2}{(Q-1)}}, \quad k = 1, \dots, P. \quad (2.20)$$

A estimativa  $\hat{\vec{m}}$  do vetor de parâmetros, definida pela Equação 2.19, é considerada instável quando pelo menos um dos valores dos desvios padrão amostrais  $\sigma_k$  (Equação 2.20) é grande. Nessa situação, os valores atribuídos às variáveis  $\alpha_1 - \alpha_6$

associadas aos vínculos (Equação 2.6a) são modificados e as etapas i-v são repetidas até que todos os desvios padrão amostrais (Equação 2.20) fiquem pequenos.

## 2.4) DETERMINAÇÃO DA PROFUNDIDADE DA BASE DO MODELO INTERPRETATIVO

Como mencionado na seção Parametrização e Problema Direto (Seção 2.1), as variáveis  $L$ ,  $M$ ,  $dz$ ,  $z_0$  e  $\rho$  são definidas a priori. Isso implica que o intérprete tem que estabelecer uma profundidade para a base do corpo geológico, dada pela seguinte expressão:

$$z_{\max} = z_0 + (L \cdot dz). \quad (2.21)$$

Análises preliminares indicaram que é possível encontrar diferentes estimativas, cada uma com um  $z_{\max}$  diferente, mas que são todas estáveis e ajustam um determinado conjunto de dados observados. A fim de reduzir essa ambiguidade, desenvolvemos um procedimento baseado na relação teórica entre uma medida de desajuste  $s$  e a massa total anômala da estimativa  $w$ . O cálculo de  $w$  e  $s$  e a descrição do procedimento adotado para determinação de  $z_{\max}$  são apresentados a seguir.

### 2.4.1) CÁLCULO DA MASSA VERDADEIRA DA ESTIMATIVA

Como explicado na seção 2.1, o modelo interpretativo adotado neste trabalho (Figura 2.2) é formado por um conjunto de  $L$  prismas 3D, retos e com seção horizontal definida por um polígono. Esse polígono possui vértices igualmente espaçados entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$  e as posições destes são descritas em coordenadas polares, por meio de

ângulos e distâncias radiais (Figura 2.3). Além disso, todos os prismas que compõem o modelo interpretativo possuem o mesmo número de vértices  $M$ . Sendo assim, para o  $k$ -ésimo prisma, a área do paralelograma formado por duas distâncias radiais adjacentes ( $r_j^k$  e  $r_{j+1}^k$ ) pode ser calculada como a norma Euclidiana do produto vetorial entre  $r_j^k$  e  $r_{j+1}^k$

$$\|\bar{r}_j^k \times \bar{r}_{j+1}^k\| = \sqrt{\{(x_j^k - x_0^k) \cdot (y_{j+1}^k - y_0^k) - (x_{j+1}^k - x_0^k) \cdot (y_j^k - y_0^k)\}^2}, \quad (2.22)$$

em que  $[\bar{r}_j^k]^T = [(x_j^k - x_0^k) \quad (y_j^k - y_0^k)]_{1 \times 2}$ ,  $k = 1, \dots, L$  e  $j = 1, \dots, M$ , “ $\times$ ” representa o produto vetorial e “ $\|\cdot\|$ ” representa a norma Euclidiana. Na Equação 2.22,  $x_j^k$  e  $y_j^k$  são as coordenadas horizontais Cartesianas dos vértices (pontos vermelhos na Figura 2.3) obtidas a partir da estimativa dos raios associados ao  $k$ -ésimo prisma vertical e  $x_0^k$  e  $y_0^k$  são as estimativas das coordenadas horizontais Cartesianas da  $k$ -ésima origem arbitrária  $O^k$  (ponto verde inferior na Figura 2.3). Consequentemente, a área total do polígono que representa a seção horizontal desse prisma é dada por

$$a^k = \left( \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\|\bar{r}_j^k \times \bar{r}_{j+1}^k\|}{2} \right) + \frac{\|\bar{r}_M^k \times \bar{r}_1^k\|}{2}. \quad (2.23)$$

Como todos os prismas que compõem o modelo interpretativo são retos e possuem espessura  $dz$ , o volume do  $k$ -ésimo prisma é dado por

$$v^k = \frac{dz}{2} \left[ \left( \sum_{j=1}^{M-1} \|\bar{r}_j^k \times \bar{r}_{j+1}^k\| \right) + \|\bar{r}_M^k \times \bar{r}_1^k\| \right], \quad (2.24)$$

e como a densidade de todos os prismas é igual a  $\rho$ , a massa estimada do k-ésimo prisma é dada por

$$w^k = \frac{\rho dz}{2} \left[ \left( \sum_{j=1}^{M-1} \|\vec{r}_j^k \times \vec{r}_{j+1}^k\| \right) + \|\vec{r}_M^k \times \vec{r}_1^k\| \right]. \quad (2.25)$$

Por fim, a massa total anômala estimada é dada por

$$w = \frac{\rho dz}{2} \sum_{k=1}^L \left[ \left( \sum_{j=1}^{M-1} \|\vec{r}_j^k \times \vec{r}_{j+1}^k\| \right) + \|\vec{r}_M^k \times \vec{r}_1^k\| \right]. \quad (2.26)$$

A expressão 2.26 representa a soma da massa de todos os  $L$  prismas do modelo interpretativo e pode ser utilizada para calcular a massa de uma estimativa obtida na inversão.

#### **2.4.2) DEFINIÇÃO DA MEDIDA DE DESAJUSTE DOS DADOS GEOFÍSICOS $s$ E DA RELAÇÃO TEÓRICA ENTRE $s$ E A MASSA ANÔMALA TOTAL DA ESTIMATIVA**

Além da equação 2.26, há outra forma de calcular a massa anômala total de uma estimativa  $\hat{m}$  simulando um corpo geológico em subsuperfície. Esse cálculo é feito por meio da integral de superfície da componente vertical da atração gravitacional exercida pela estimativa  $\hat{m}$  na superfície (HAMMER, 1945)

$$\iint_S g(\hat{m}) dS = 2\pi\gamma w , \quad (2.27)$$

em que  $\gamma$  é a constante gravitacional,  $S$  é uma superfície infinita sobre a qual está definida a função continua  $g(\hat{m})$ , que descreve a componente vertical da atração gravitacional exercida por uma estimativa  $\hat{m}$ , cuja massa é  $w$  (Equação 2.26). No entanto, como  $g(\hat{m})$  não é calculada de maneira continua em uma superfície infinita, a expressão 2.27 é aproximada por

$$2\pi\gamma w = \iint_S g(\hat{m}) dS \approx \sum_{i=1}^N g_i(\hat{m}) \Delta S_i$$

e

$$w \approx \frac{1}{2\pi\gamma} \left( \sum_{i=1}^N g_i(\hat{m}) \Delta S_i \right) = \kappa \sum_{i=1}^N b_i, \quad (2.28)$$

em que  $\kappa = 1/(2\pi\gamma)$ ,  $g_i(\hat{m})$  é o dado predito na posição  $(x_i, y_i, z_i)$  (Equação 2.3),  $\Delta S_i$  é um elemento de área e  $b_i = g_i(\hat{m}) \Delta S_i$ . O valor de  $w$  na equação 2.28 é uma aproximação do valor de  $w$  na equação 2.26.

Seguindo a idéia empregada no desenvolvimento da equação 2.28, em que foi feita uma aproximação numérica da integral 2.27, podemos definir uma medida de desajuste pela seguinte expressão

$$s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |[d_i \Delta S_i] - [g_i(\hat{m}) \Delta S_i]| = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |a_i - b_i|, \quad (2.29)$$

em que  $\Delta S_i$  e  $b_i$  são as mesmas variáveis presentes na Equação 2.28,  $d_i$  é o dado observado na posição  $(x_i, y_i, z_i)$  e  $a_i = d_i \Delta S_i$ .

Considerando que os dados observados  $d_i$  e preditos  $g_i(\hat{m})$  ( $i = 1, \dots, N$ ) são causados por um corpo com contraste de densidade  $\rho > 0$  (caso contrário, se  $\rho < 0$ , basta calcularmos o módulo), há duas situações a serem consideradas:

i)  $a_i > b_i$  para qualquer  $i$ :

Neste caso, a Equação 2.29 pode ser representada da seguinte forma

$$s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (a_i - b_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_i - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N b_i . \quad (2.30)$$

Substituindo a expressão aproximada para a massa anômala total (2.28) na equação 2.30 obtemos

$$s \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_i - \frac{w}{N\kappa}$$

e

$$w \approx \kappa \sum_{k=1}^N a_i + (-N\kappa) s . \quad (2.31)$$

A expressão 2.31 é uma reta com coeficiente angular  $(-N\kappa) < 0$ .

ii)  $a_i < b_i$  para qualquer  $i$ :

Neste caso, a Equação 2.29 pode ser representada da seguinte forma

$$s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (b_i - a_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N b_i - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_i . \quad (2.32)$$

Substituindo a expressão aproximada para a massa anômala total (2.28) na Equação 2.32 obtemos

$$s \approx \frac{w}{N\kappa} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_i$$

e

$$w \approx \kappa \sum_{k=1}^N a_i + (N\kappa) s . \quad (2.33)$$

A expressão 2.33 é uma reta com coeficiente angular  $(N\kappa) > 0$ .

As equações 2.31 e 2.33 são duas retas, que definem a dependência teórica entre  $w$  e  $s$  e que se interceptam quando  $s = 0$  (Figura 2.4). Essa dependência teórica exibe três regiões de destaque: I, II e III. A região I corresponde à equação 2.31, que representa a situação hipotética em que todos os dados preditos são menores que os dados observados. A região III corresponde à equação 2.33, que representa a situação hipotética em que todos os dados preditos são maiores que os dados observados. Por fim, a região II é caracterizada pela situação em que  $s$  atinge um valor ótimo ( $s = 0$ ), que representa a situação hipotética em que os dados preditos ajustam perfeitamente os dados observados. Nessa região, as equações 2.31 e 2.33 colapsam

em um único ponto e ficam iguais a  $w \approx \kappa \sum_{i=1}^N a_i$ , que é uma aproximação da massa do corpo verdadeiro.

### 2.4.3) PROCEDIMENTO PRÁTICO PARA ESTIMAR A PROFUNDIDADE DO CORPO VERDADEIRO COM BASE NA CURVA $w \times s$

Nesta subseção, queremos estabelecer uma relação entre a curva  $w \times s$  teórica (Figura 2.4) e a profundidade  $z_{\max}$  do modelo interpretativo. Nesse sentido, é razoável presumir que:

- a) Se o modelo interpretativo tiver um  $z_{\max}$  muito menor que o do corpo verdadeiro, os dados preditos serão predominantemente menores que os observados, tal como na região I da curva  $w \times s$  teórica (Figura 2.4);
- b) Se o modelo interpretativo tiver um  $z_{\max}$  muito maior que o do corpo verdadeiro, os dados preditos serão predominantemente maiores que os observados, tal como na região III da curva  $w \times s$  teórica (Figura 2.4);
- c) Se o modelo interpretativo tiver um  $z_{\max}$  igual (ou próximo) ao do corpo verdadeiro, os dados preditos serão próximos aos observados e  $s$  atingirá um valor mínimo, tal como na região II da curva  $w \times s$  teórica (Figura 2.4).

Seguindo esse raciocínio, espera-se que, variando o valor de  $z_{\max}$  do modelo interpretativo, seja possível construir uma curva  $w \times s$  (denominada curva observada) similar à curva teórica (Figura 2.4) e que possua uma região com  $s$  mínimo (tal como a região II da Figura 2.4). Nessa região, o valor tentativo de  $z_{\max}$  do modelo interpretativo deve ser igual (ou próximo) a profundidade do corpo verdadeiro. O procedimento

prático para construir a curva  $w$  x  $s$  observada e determinar o valor de  $z_{\max}$  do modelo interpretativo consiste em realizar as seguintes etapas:

- i) Atribuir um  $z_{\max}$  pequeno (Equação 2.21) para o modelo interpretativo;
- ii) Calcular uma estimativa estável utilizando o método proposto na seção 2.2 e o procedimento descrito na seção 2.3;
- iii) Calcular  $w$  e  $s$  pelas equações 2.26 e 2.29, respectivamente, e plotar o ponto  $(s, w)$  correspondente;
- iv) Aumentar o valor  $z_{\max}$  do modelo interpretativo e repetir as etapas ii e iii;
- v) Após gerar a curva  $w$  x  $s$  observada com vários pontos  $(s, w)$ , determinar o valor ótimo de  $z_{\max}$  do modelo interpretativo como sendo aquele valor tentativo de  $z_{\max}$  que produz um ponto  $(s, w)$  em que  $s$  seja mínimo.

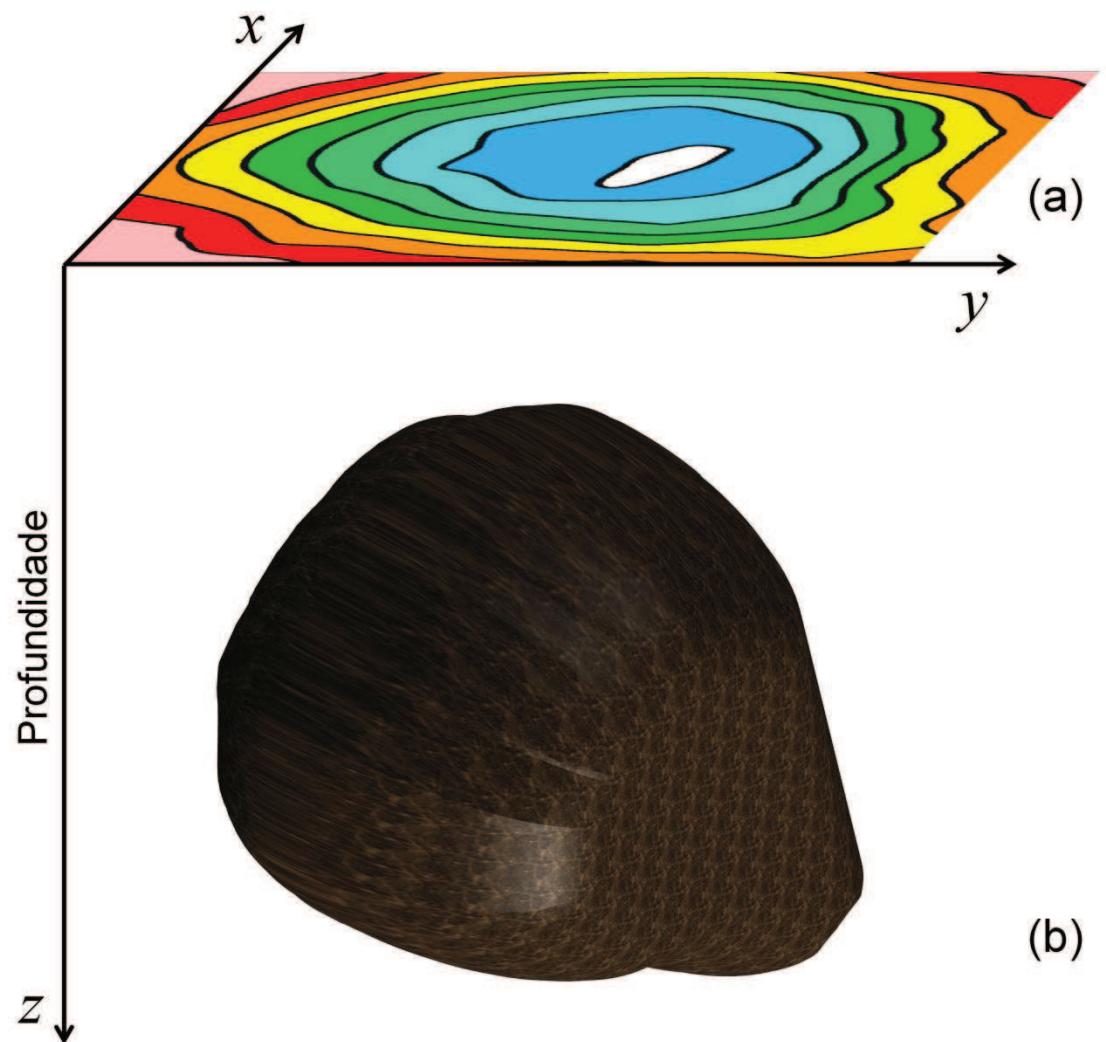


Figura 2.1 Esquema representativo da anomalia de gravidade (a) gerada por um corpo geológico em subsuperfície (b).

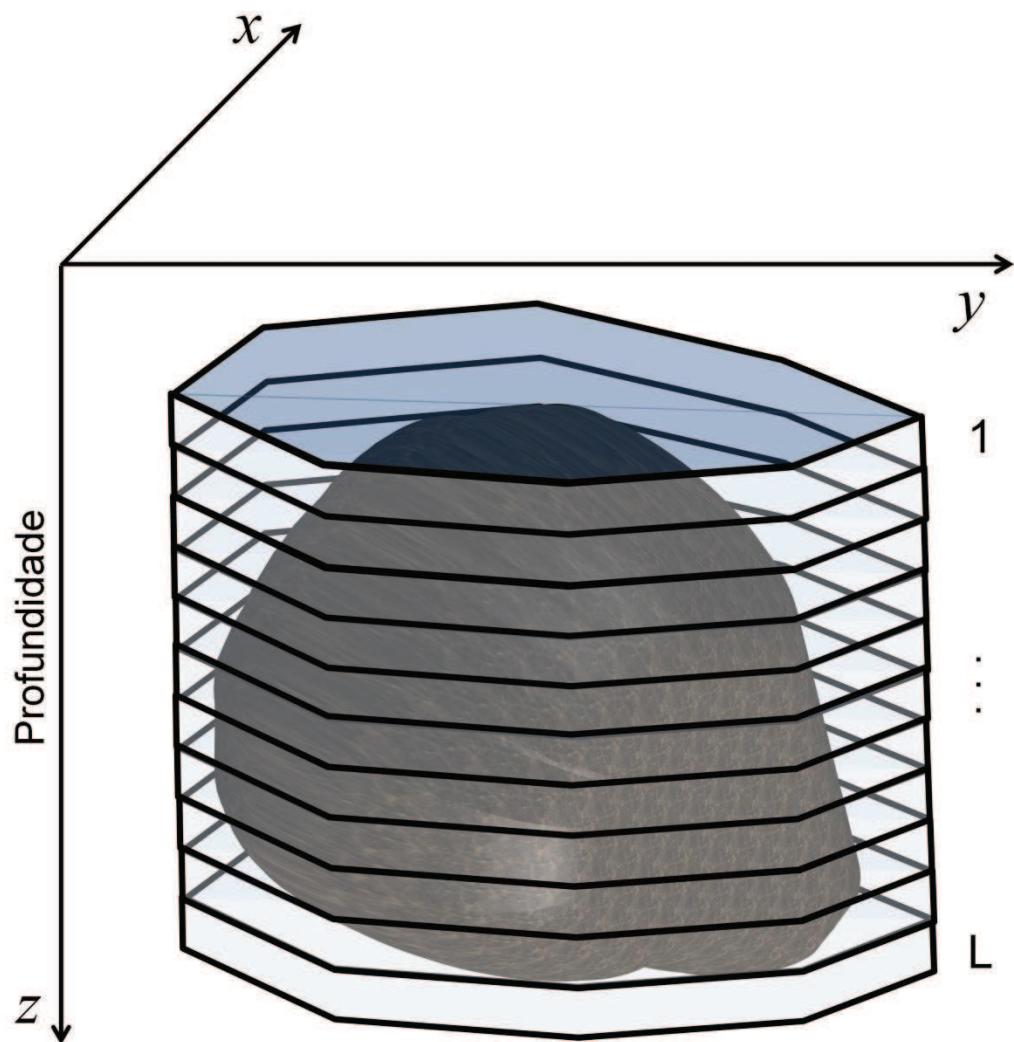


Figura 2.2 Representação do modelo interpretativo que aproxima a geometria do corpo geológico (volume cinza) por um conjunto de  $L$  prismas 3D, retos, justapostos verticalmente e com seção horizontal definida por um polígono.

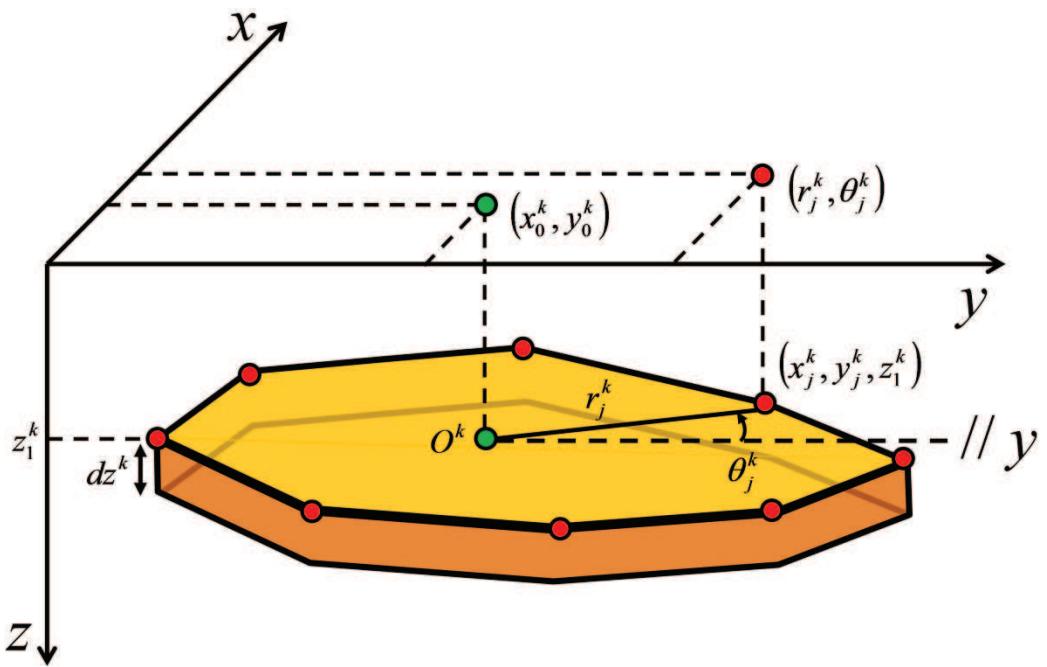
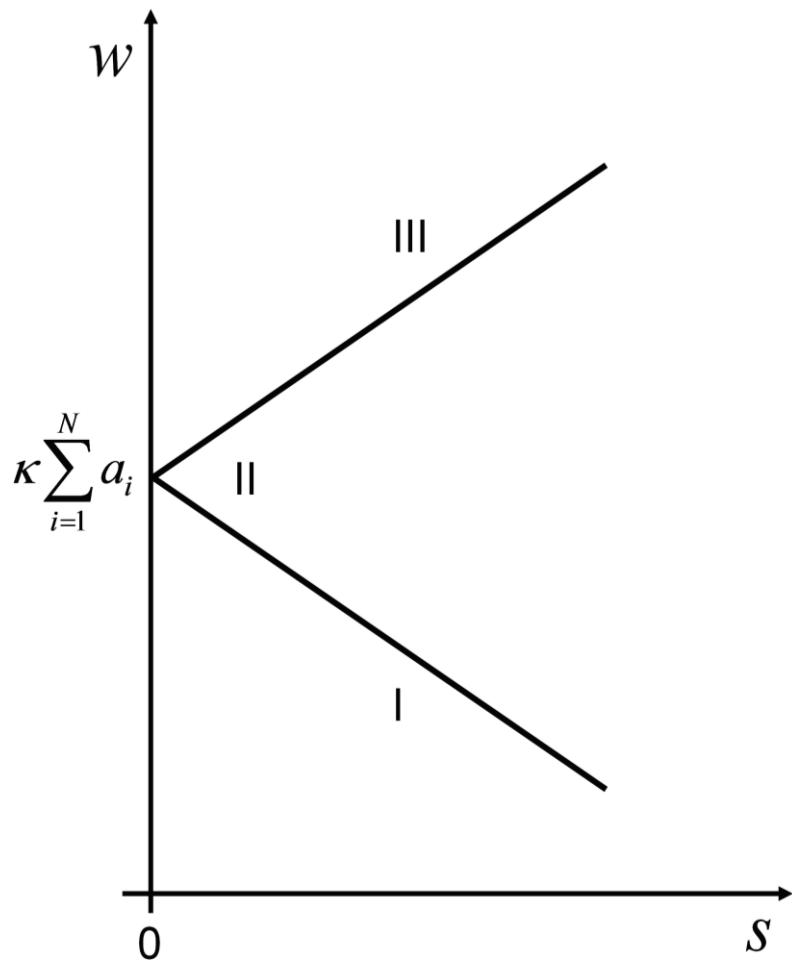


Figura 2.3 Esquema representativo do  $k$ -ésimo prisma do modelo interpretativo. Esse prisma tem o topo na coordenada  $z_1^k$  e espessura  $dz^k$ . A seção horizontal desse prisma é definida por um polígono com  $M^k$  vértices (pontos vermelhos inferiores), que são descritos em coordenadas polares  $(r_j^k, \theta_j^k)$  ( $j=1, \dots, M^k$ ) referidas a uma origem  $O^k$  localizada dentro deste (ponto verde inferior) e com coordenadas horizontais  $(x_0^k, y_0^k)$ . Por convenção, as coordenadas angulares  $\theta_j^k$  são medidas a partir do eixo  $y$ , em direção ao eixo  $x$  positivo.



*Figura 2.4 Representação esquemática da curva  $w \times s$  previda pelas equações 2.31 e 2.33. Essas equações expressam, respectivamente, a situação hipotética em que todos os dados preditos subestimam os dados observados (região I) e a situação em que todos os dados preditos superestimam os dados observados (região III). A intersecção das retas I e III ocorre em  $s = 0$  (região II).*

### **3) APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS**

### **(VERIFICAÇÃO DO PROCEDIMENTO PRÁTICO**

### **PARA DETERMINAR $z_{\max}$ UTILIZANDO A CURVA**

### **$w \times s$ OBSERVADA)**

Neste capítulo, apresentamos os resultados provenientes de testes com dados sintéticos produzidos por três modelos que simulam corpos aflorantes, inclinados, com as mesmas dimensões horizontais e com profundidades  $z_{\max}$  para a base iguais a 3,0 km, 6,0 km e 9,0 km. Os testes foram realizados objetivando verificar a validade do procedimento prático descrito na subseção anterior (2.4.3) que é utilizado para determinar a profundidade  $z_{\max}$  do modelo interpretativo (Equação 2.21). Em cada teste:

- i) Utilizou-se a densidade do corpo verdadeiro.
- ii) Os dados observados foram previamente contaminados com uma variável pseudo-aleatória com distribuição Gaussiana, média nula e desvio padrão igual a 0,27 mGal, 0,27 mGal e 0,36 mGal para os testes produzidos por corpos sintéticos cujas profundidades máxima da base são iguais a 3,0 km, 6,0 km e 9,0 km, respectivamente.
- iii) Em cada teste sintético, seguimos o procedimento descrito na subseção 2.4.3 e geramos duas curvas  $w \times s$  observadas, cada uma formada por onze pontos ( $s$ ,  $w$ ), com  $z_{\max}$  variando de 1,0 km a 11,0 km e espaçados de 1,0 km, o que permite definir que a incerteza em  $z_{\max}$  é igual a 0,5 km. Uma curva foi gerada

utilizando um conjunto de dados sintéticos sem ruído e a outra utilizando um conjunto de dados sintéticos contaminados com ruído pseudo-aleatório, simulando dados reais. A Figura 3.4 mostra as curvas  $w \times s$  observadas produzidas nos três testes sintéticos. Essas curvas são diferentes das curvas  $w \times s$  teóricas previstas pelas equações 2.31 e 2.33 (Figura 2.4) e essas diferenças serão explicadas a seguir.

- iv) Seguindo o procedimento descrito na subseção 2.3, fizemos a análise de estabilidade e o cálculo da incerteza dos parâmetros para cada uma das estimativas (ponto na curva  $w \times s$  observada) obtidas com um valor fixo para a profundidade máxima  $z_{\max}$  do modelo interpretativo. Para tanto, contaminamos os dados gravimétricos com  $Q = 30$  amostras diferentes de uma variável pseudo-aleatória com distribuição Gaussiana, média zero e desvio padrão igual ao que foi utilizado para contaminar, previamente, os dados observados.

### 3.1) CORPOS SINTÉTICOS (VERDADEIROS)

Em todos os testes que apresentaremos a seguir os modelos possuem número de prismas  $L = 5$ , número de vértices por prisma  $M = 4$ , contraste de densidade  $\rho = 0,5$  g/cm<sup>3</sup>, profundidade do topo  $z_0 = 0,0$  km e espessuras dos prismas  $dz = 0,6$  km  $dz = 1,2$  km e  $dz = 1,8$  km, para os testes simulando corpos com profundidades da base iguais a 3,0 km, 6 km e 9 km, respectivamente. As Figuras 3.1, 3.2 e 3.3 mostram os corpos simulados e os respectivos dados sintéticos produzidos por estes na superfície.

### 3.2) VARIÁVEIS DEFINIDAS A PRIORI

Nos três testes sintéticos, presumimos um modelo interpretativo com profundidade do topo  $z_0 = 0,0$  km, quantidade de prismas  $L = 7$  e quantidade de vértices  $M = 16$  para todos os polígonos que descrevem as seções horizontais de todos os prismas. Adicionalmente, presumimos um contraste de densidade  $\rho = 0,5$  g/cm<sup>3</sup> para todos os polígonos que descrevem as seções horizontais de todos os prismas. A aproximação inicial utilizada em todos os testes possui todos os prismas com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (9,0$  km,  $9,0$  km) e todas as distâncias radiais iguais a  $r_j^k = 1,0$  km ( $k = 1, \dots, L$  e  $j = 1, \dots, M$ ). Os valores das variáveis que definem os vínculos utilizados no teste com dados sintéticos produzidos pelo corpo com profundidade da base igual a 3,0 km são:

- i) Parâmetro de regularização (Equação 2.6a):  $\mu = 1,0$ .
- ii) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes ao mesmo prisma (Equação 2.7):  $\alpha_1 = 0,08$ .
- iii) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes a prismas adjacentes (Equação 2.8):  $\alpha_2 = 0,48$ .
- iv) Vínculo do afloramento (Equações 2.9 e 2.10):  $\alpha_3 = 0,0$ ,  $\alpha_4 = 0,7$ ,  $x_0^0 = 8,5$  km,  $y_0^0 = 9,0$  km (cruz preta na Figura 3.1c).
- v) Vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes (Equação 2.11):  $\alpha_5 = 0,08$ .
- vi) Vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais (Equação 2.12):  $\alpha_6 = 0,0$ .

- vii) Vínculo de desigualdade (Equação 2.6b):  $x_0 \text{ min} = 2,0 \text{ km}$ ,  $x_0 \text{ max} = 22,0 \text{ km}$ ,  $y_0 \text{ min} = 2,0 \text{ km}$ ,  $y_0 \text{ max} = 20,0 \text{ km}$ ,  $r_{\text{min}} = 0,0 \text{ km}$  e  $r_{\text{max}} = 5,0 \text{ km}$ . Estes valores foram estabelecidos com base na extensão horizontal da anomalia produzida pelo corpo sintético (Figura 3.1c).

Os valores das variáveis que definem os vínculos (Equação 2.6a) utilizados no teste com dados sintéticos produzidos pelo corpo com profundidade da base igual a 6,0 km são:

- i) Parâmetro de regularização (Equação 2.6a):  $\mu = 1,0$ .
- ii) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes ao mesmo prisma (Equação 2.7):  $\alpha_1 = 0,04$ .
- iii) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes a prismas adjacentes (Equação 2.8):  $\alpha_2 = 0,24$ .
- iv) Vínculo do afloramento (Equações 2.9 e 2.10):  $\alpha_3 = 0,0$ ,  $\alpha_4 = 0,7$ ,  $x_0^0 = 8,5 \text{ km}$ ,  $y_0^0 = 9,0 \text{ km}$  (cruz preta na Figura 3.2c).
- v) Vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes (Equação 2.11):  $\alpha_5 = 0,04$ .
- vi) Vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais (Equação 2.12):  $\alpha_6 = 0,0$ .
- vii) Vínculo de desigualdade (Equação 2.6b):  $x_0 \text{ min} = 2,0 \text{ km}$ ,  $x_0 \text{ max} = 22,0 \text{ km}$ ,  $y_0 \text{ min} = 2,0 \text{ km}$ ,  $y_0 \text{ max} = 20,0 \text{ km}$ ,  $r_{\text{min}} = 0,0 \text{ km}$  e  $r_{\text{max}} = 5,0 \text{ km}$ . Estes valores foram estabelecidos com base na extensão horizontal da anomalia produzida pelo corpo sintético (Figura 3.2c).

Os valores das variáveis que definem os vínculos (Equação 2.6a) utilizados no teste com dados sintéticos produzidos pelo corpo com profundidade da base igual a 9,0 km são:

- i) Parâmetro de regularização (Equação 2.6a):  $\mu = 1,0$ .
- ii) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes ao mesmo prisma (Equação 2.7):  $\alpha_1 = 0,1$ .
- iii) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes a prismas adjacentes (Equação 2.8):  $\alpha_2 = 0,6$ .
- iv) Vínculo do afloramento (Equações 2.9 e 2.10):  $\alpha_3 = 0,0$ ,  $\alpha_4 = 0,7$ ,  $x_0^0 = 8,5$  km,  $y_0^0 = 9,0$  km (cruz preta na Figura 3.3c).
- v) Vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes (Equação 2.11):  $\alpha_5 = 0,1$ .
- vi) Vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais (Equação 2.12):  $\alpha_6 = 0,0$ .
- vii) Vínculo de desigualdade (Equação 2.6b):  $x_{0 \min} = 2,0$  km,  $x_{0 \max} = 22,0$  km,  $y_{0 \min} = 2,0$  km,  $y_{0 \max} = 20,0$  km,  $r_{\min} = 0,0$  km e  $r_{\max} = 5,0$  km. Estes valores foram estabelecidos com base na extensão horizontal da anomalia produzida pelo corpo sintético (Figura 3.3c).

### **3.3) DESVIO DAS CURVAS $w \times s$ PRODUZIDAS NOS TESTES SINTÉTICOS EM RELAÇÃO À CURVA TEÓRICA**

Embora as curvas  $w \times s$  observadas (Figura 3.4) sejam diferentes da curva  $w \times s$  teórica (Figura 2.4), nota-se a presença de um ramo descendente, que tende assintoticamente a uma reta com coeficiente linear negativo, e outro ascendente, que tende assintoticamente a uma reta com coeficiente angular positivo, tal como as que são definidas, respectivamente, pelas equações 2.31 (região I na Figura 2.4) e 2.33

(região III na Figura 2.4). As diferenças são menores nos testes sintéticos com o modelo ( $z_{\max} = 3,0$  km) que possui a base mais rasa (curvas azuis na Figura 3.4), maiores nos testes com o modelo ( $z_{\max} = 9,0$  km) que possui a base mais profunda (curvas verdes na Figura 3.4), passando por uma situação intermediária nos testes com o modelo ( $z_{\max} = 6,0$  km) com profundidade da base intermediária (curvas vermelhas na Figura 3.4). Estas curvas  $w \times s$  observadas exibem duas diferenças principais em relação à curva  $w \times s$  teórica: 1) o ramo descendente possui uma inclinação menor (em valor absoluto) que o ramo ascendente e 2) não passam por um ponto com  $s = 0$ , que corresponde à região II da Figura 2.4. Estas diferenças são explicadas nas subseções seguintes.

### **3.3.1) DIFERENÇA ENTRE A INCLINAÇÃO DO RAMO ASCENDENTE E DO RAMO DESCENDENTE NAS CURVAS $w \times s$ OBSERVADAS**

As diferenças entre as curvas  $w \times s$  observadas (Figura 3.4) e a teórica (Figura 2.4) estão associadas, essencialmente, à perda de resolução com a profundidade, tal como exemplificado na Figura 3.5. A Figura 3.5 mostra um esboço esquemático 2D de um corpo geológico localizado em subsuperfície (representado na cor marrom), da anomalia de gravidade causada por este na superfície (dados observados) e de uma região  $V$  em subsuperfície, dentro da qual a inversão pode distribuir a massa da estimativa (região delimitada por linhas pretas e pontilhadas). Esta região tem as laterais delimitadas pelos dados observados e pelo vínculo de desigualdade (Subseção 2.2.1.6) e as partes superior e inferior delimitadas, respectivamente, pelo topo  $z_0$  e pela base  $z_{\max}$  (Equação 2.21) do modelo interpretativo. Quando utilizamos modelos interpretativos com  $z_{\max}$  menor que o verdadeiro (Figura 3.5a), a região  $V$  não é suficiente para acomodar toda a massa necessária para que a estimativa obtida na

inversão (retângulos vermelhos na Figura 3.5a) ajuste os dados observados. Consequentemente, a estimativa tem uma massa  $w$  pequena e o desajuste  $s$  é grande. Nessa situação, os dados preditos são predominantemente menores que os observados. Quando utilizamos um modelo interpretativo com  $z_{\max}$  igual (ou próximo) ao verdadeiro (Figura 3.5b), a região  $V$  possui tamanho suficiente para acomodar toda a massa necessária para que a estimativa obtida na inversão (retângulos vermelhos na Figura 3.5b) ajuste os dados observados. Por conseguinte, a estimativa tem uma massa  $w$  próxima à verdadeira e o desajuste  $s$  é pequeno. Quando utilizamos modelos interpretativos com  $z_{\max}$  maior que o verdadeiro (Figura 3.5c), a região  $V$  tem tamanho mais que suficiente para acomodar toda a massa necessária para que a estimativa obtida na inversão (retângulos vermelhos na Figura 3.5c) ajuste os dados observados. No entanto, a informação a priori imposta pelos vínculos (Subseção 2.2.1) somada ao limite máximo para a profundidade  $z_{\max}$  do modelo interpretativo fazem com que a massa  $w$  da estimativa seja distribuída ao longo de toda a região  $V$ , de tal forma que  $w$  seja grande e o desajuste  $s$  também. Nessa situação, os dados preditos são predominantemente maiores que os observados e as variáveis  $w$  e  $s$  aumentam à medida que  $z_{\max}$  aumenta.

Há uma profundidade limite (profundidade  $z_{\text{res}}$  na Figura 3.5) a partir da qual as massas não causam, na superfície, um efeito gravitacional mensurável dentro da precisão experimental. Quando utilizamos modelos interpretativos com  $z_{\max}$  maior que essa profundidade limite (Figura 3.5d), novamente, a informação a priori imposta pelos vínculos (Subseção 2.2.1) somada ao limite máximo para a profundidade  $z_{\max}$  do modelo interpretativo fazem com que a massa  $w$  da estimativa seja distribuída ao longo de toda a região  $V$ , de tal forma que  $w$  seja grande e o desajuste  $s$  também. Nessa situação, os dados preditos são predominantemente maiores que os observados,  $w$  e  $s$  também aumentam à medida que  $z_{\max}$  aumenta, contudo a taxa de variação de  $s$  em relação à  $z_{\max}$  diminui, fazendo com que os dados preditos por estimativas com diferentes  $z_{\max}$  sejam praticamente os mesmos (curvas pontilhadas

azul e verde na parte superior da Figura 3.5d). Os argumentos expostos acima indicam que a taxa de variação de  $w$  em relação à  $s$  diminui à medida que  $z_{\max}$  aumenta, explicando o motivo pelo qual a inclinação do ramo ascendente da curva  $w \times s$  é maior, em valor absoluto, do que a inclinação do ramo descendente.

Para corpos profundos, como é o caso do modelo com  $z_{\max} = 9,0$  km (Figura 3.3), o ramo ascendente fica praticamente vertical (curvas verdes na Figura 3.4), principalmente quando os dados observados estão contaminados com ruído (Figura 3.4b). Nessa situação, a profundidade da base do corpo verdadeiro é maior que  $z_{\text{res}}$  (Figura 3.6), isto é, mais profunda que a profundidade a partir da qual as massas não exercem, na superfície, uma atração gravitacional mensurável dentro da precisão experimental. Isso implica uma perda de resolução vertical, tal que um modelo interpretativo com  $z_{\max}$  menor que a profundidade da base do corpo verdadeiro (retângulos azuis na Figura 3.6a) seja capaz de reproduzir os dados observados tão bem quanto um modelo interpretativo com  $z_{\max}$  próximo ou igual (retângulos verdes na Figura 3.6b) à profundidade da base do corpo verdadeiro. Como consequência desta perda de resolução com a profundidade, a curva  $w \times s$  observada não exibe um ponto com  $s$  mínimo bem definido, tal como ilustrado pelas curvas verdes na Figura 3.4, que foram produzida para o corpo cuja profundidade da base é grande (Figura 3.3). Ao contrário, quando os dados gravimétricos têm resolução suficiente para estimar a profundidade da base do corpo verdadeiro, a curva  $w \times s$  exibe um mínimo de  $s$  bem definido, tal como ilustram as curvas azuis e vermelhas na Figura 3.4, que estão relacionadas aos corpos sintéticos cujas profundidades das bases são rasa (Figura 3.1) e intermediária (Figura 3.2).

### **3.3.2) INEXISTÊNCIA DE UM PONTO EM QUE $s = 0$**

O fato de as curvas  $w \times s$  observadas não possuírem um ponto com  $s = 0$  pode ser explicado, basicamente, por dois motivos: 1) incapacidade do modelo interpretativo em representar fielmente os dados observados e 2) incapacidade da inversão em estimar a geometria do corpo verdadeiro. O caso 1 é a situação em que os dados observados não pertencem ao conjunto imagem da função que calcula os dados preditos (Equação 2.3). Isso pode ser explicado de duas formas: 1.1) a geometria do corpo verdadeiro não pode ser descrita adequadamente pelo modelo interpretativo, ou seja, dentre todas as formas possíveis que o modelo interpretativo pode ter, aquela que mais se aproxima da forma do corpo verdadeiro ainda é uma aproximação ruim, tal que os dados preditos não podem reproduzir fielmente os dados observados e 1.2) mesmo que a geometria do corpo verdadeiro possa ser descrita adequadamente pelo modelo interpretativo, a presença de ruído não permite que os dados preditos reproduzam fielmente os dados observados. O caso 2 representa a situação em que a inversão não é capaz de estimar o corpo verdadeiro. Isso se deve, principalmente, ao fato de que necessitamos utilizar informação a priori para tornar o problema inverso bem-posto. Nem sempre o corpo verdadeiro é compatível com a informação a priori que utilizamos e isso faz com que a estimativa não represente adequadamente o corpo verdadeiro e nem reproduza fielmente os dados observados.

### **3.4) ESTIMAÇÃO DA PROFUNDIDADE DO MODELO INTERPRETATIVO POR MEIO DAS CURVAS $w \times s$ OBSERVADAS**

As Figuras 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10 mostram os ajustes, as aproximações iniciais e as estimativas obtidas nos testes sintéticos feitos com dados observados previamente contaminados com ruído. Nota-se que, para os corpos sintéticos com base rasa ( $z_{\max} = 3,0$  km) e intermediária ( $z_{\max} = 6,0$  km), as curvas  $w \times s$  observadas (curvas azul e vermelha na Figura 3.4b) apresentam um ponto com  $s$  mínimo bem definido e o método é capaz de inferir a profundidade da base e recuperar com boa aproximação a geometria dos corpos sintéticos (Figuras 3.7 e 3.8). Contudo, para o corpo sintético com base profunda ( $z_{\max} = 9,0$  km), a curva  $w \times s$  (curva verde na Figura 3.4b) não possui um ponto com  $s$  mínimo bem definido. Neste caso a curva  $w \times s$  (curva verde na Figura 3.4b) indica uma profundidade mínima igual a  $6,0 \pm 0,5$  km, acima da qual o método é capaz de recuperar a geometria do corpo verdadeiro. As Figuras 3.9 e 3.10 mostram, respectivamente, as geometrias estimadas (prismas azuis) invertendo-se os dados produzidos pelo modelo com base profunda (Figura 3.3) e considerando um modelo interpretativo com profundidade da base ( $z_{\max} = 6,0 \pm 0,5$  km) menor que a profundidade do corpo verdadeiro (prismas vermelhos na Figura 3.9) e outro com profundidade da base ( $z_{\max} = 9,0 \pm 0,5$  km) igual ao verdadeiro (prismas azuis na Figura 3.10). As Figuras 3.9 e 3.10 exemplificam a perda de resolução vertical mencionada na subseção 3.3.1. Os resultados apresentados nas Figuras 3.7 – 3.10 mostram que, além de inferir uma profundidade ótima para o modelo interpretativo, a curva  $w \times s$  indica se os dados têm ou não resolução suficiente para que o método possa recuperar completamente a geometria do corpo verdadeiro. Se  $s$  tem um

mínimo definido os dados tem resolução para estimar a profundidade verdadeira do corpo; caso contrário os dados não tem resolução.

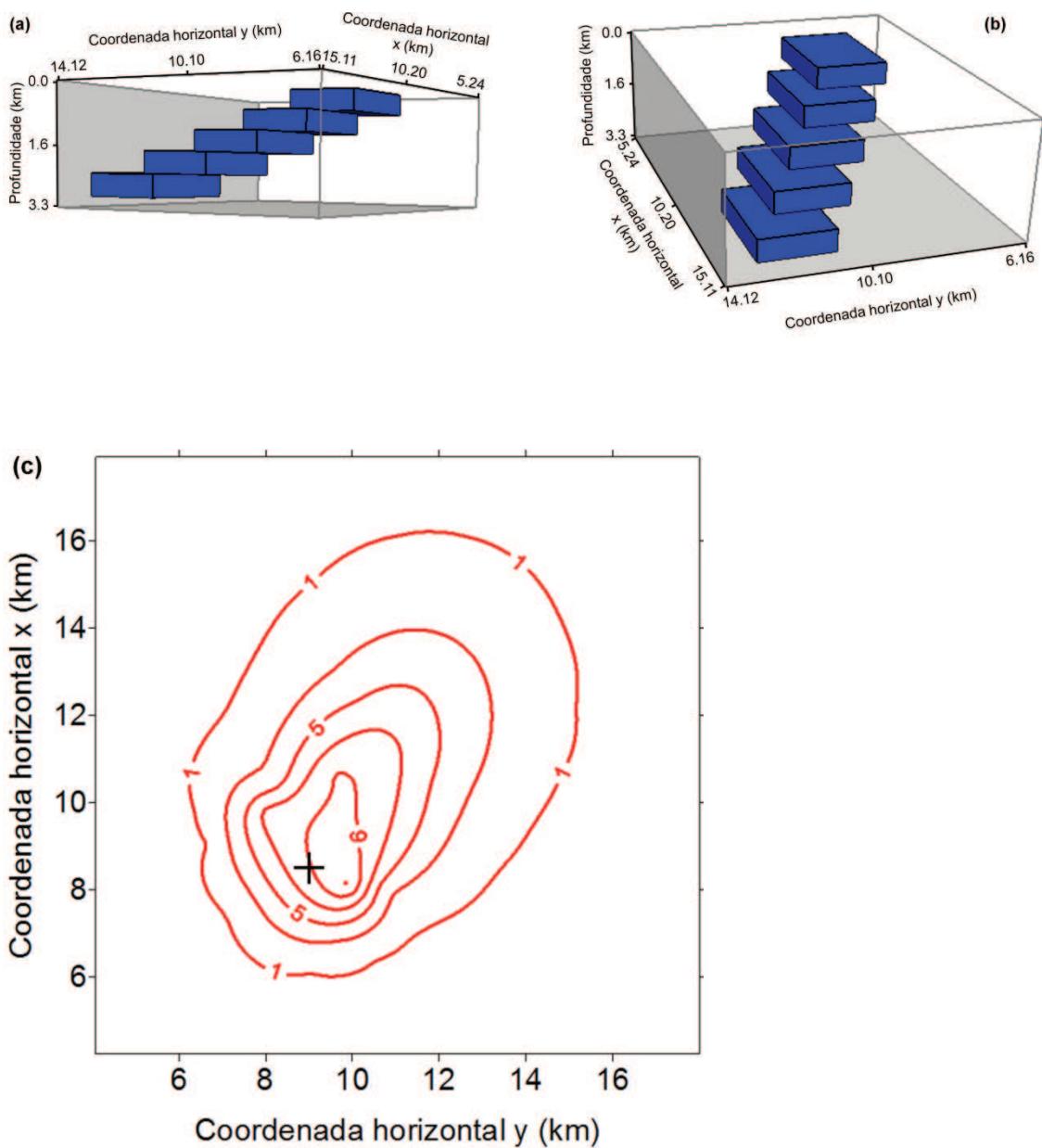
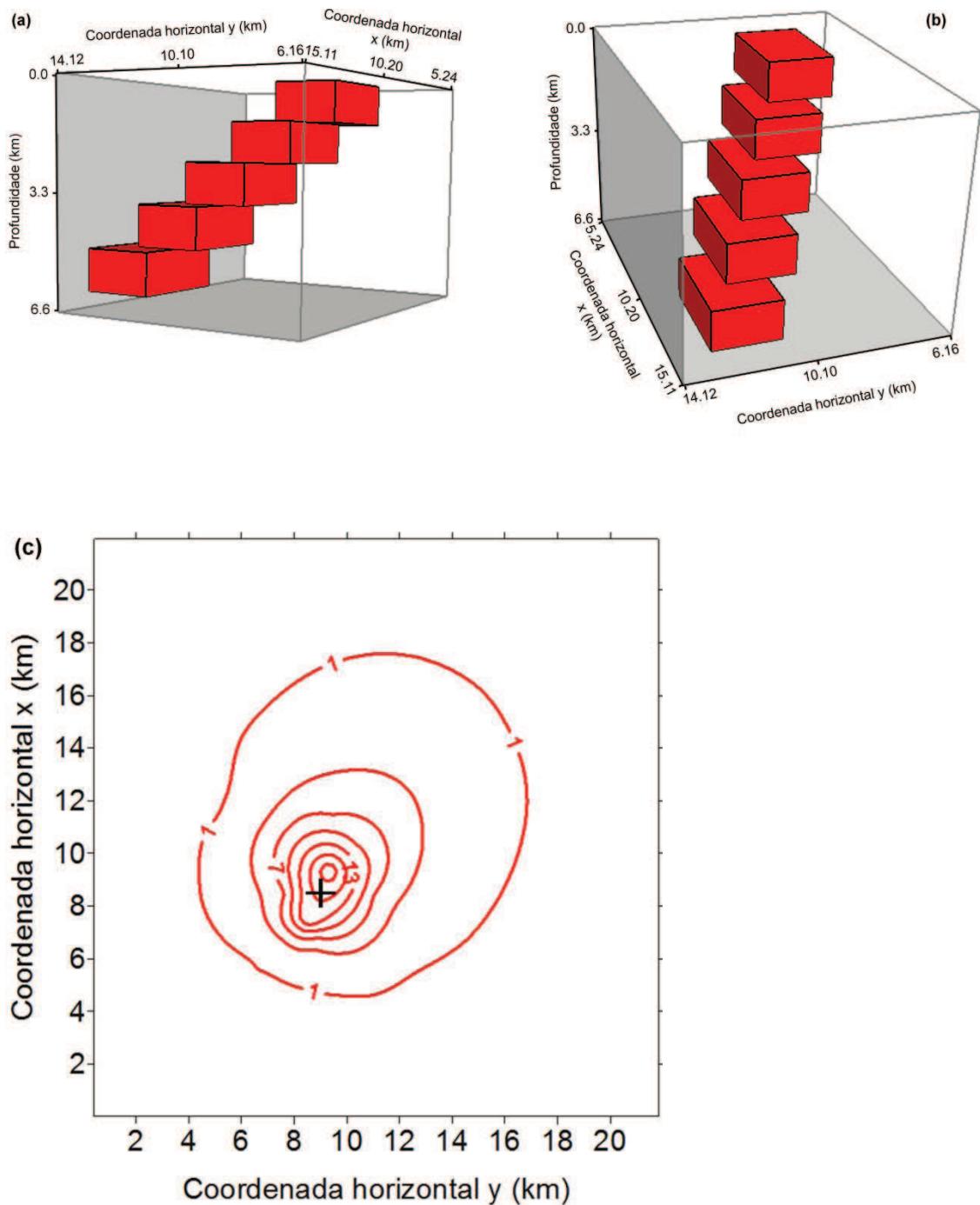
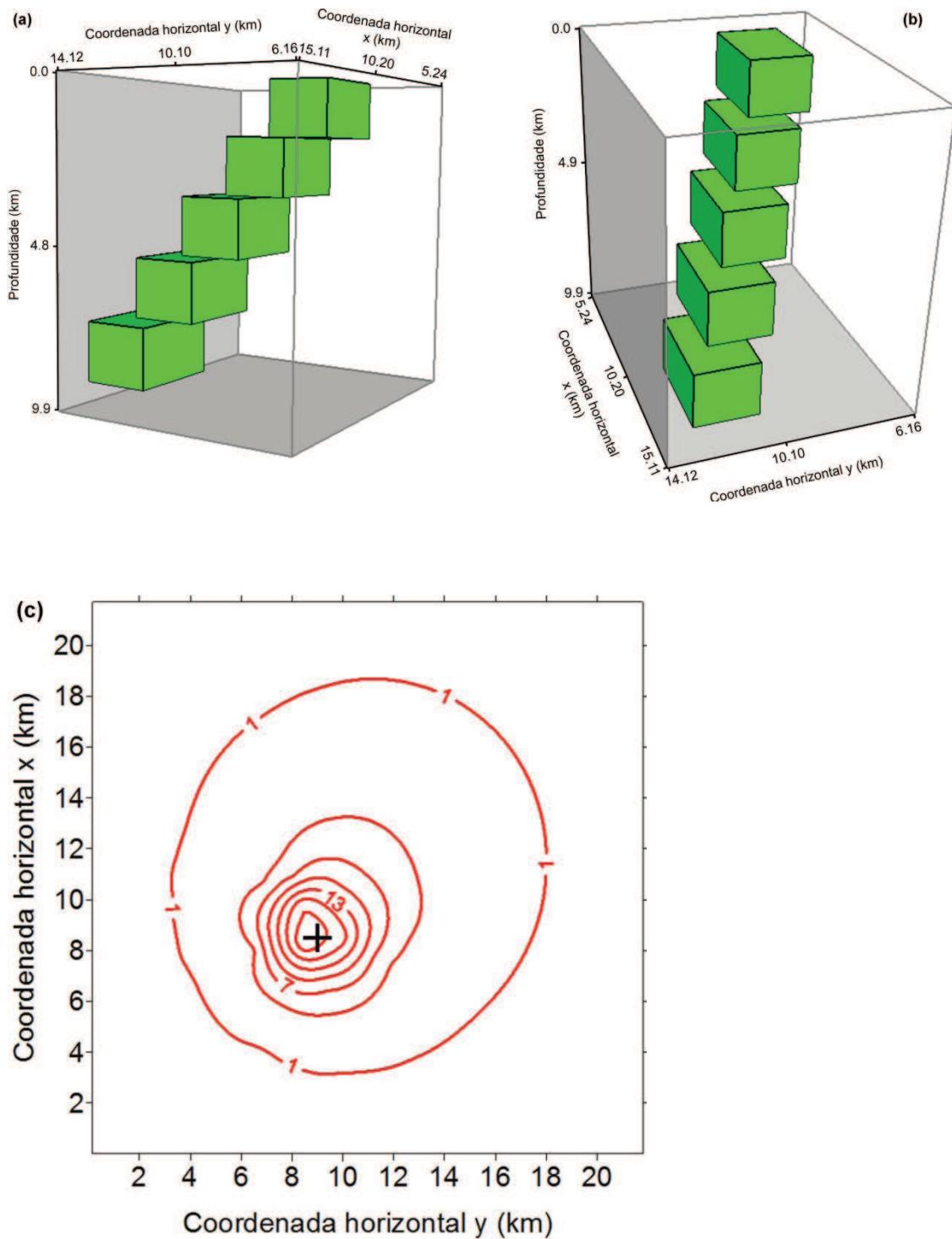


Figura 3.1 Corpo sintético com base rasa ( $z_{max} = 3,0 \text{ km}$ ). (a) Visada lateral e (b) visada superior do corpo inclinado. (c) Dado observado (linhas vermelhas), em mGal, produzido por este corpo sintético. A cruz preta representa um ponto localizado na parte aflorante do corpo sintético.



*Figura 3.2* Corpo sintético com base intermediária ( $z_{max} = 6,0 \text{ km}$ ). (a) Visada lateral e (b) visada superior do corpo inclinado. (c) Dado observado (linhas vermelhas), em mGal, produzido por este corpo sintético. A cruz preta representa um ponto localizado na parte aflorante do corpo sintético.



*Figura 3.3 Corpo sintético com base profunda ( $z_{max} = 9,0$  km). (a) Visada lateral e (b) visada superior do corpo inclinado. (c) Dado observado (linhas vermelhas), em mGal, produzido por este corpo sintético. A cruz preta representa um ponto localizado na parte aflorante do corpo sintético.*

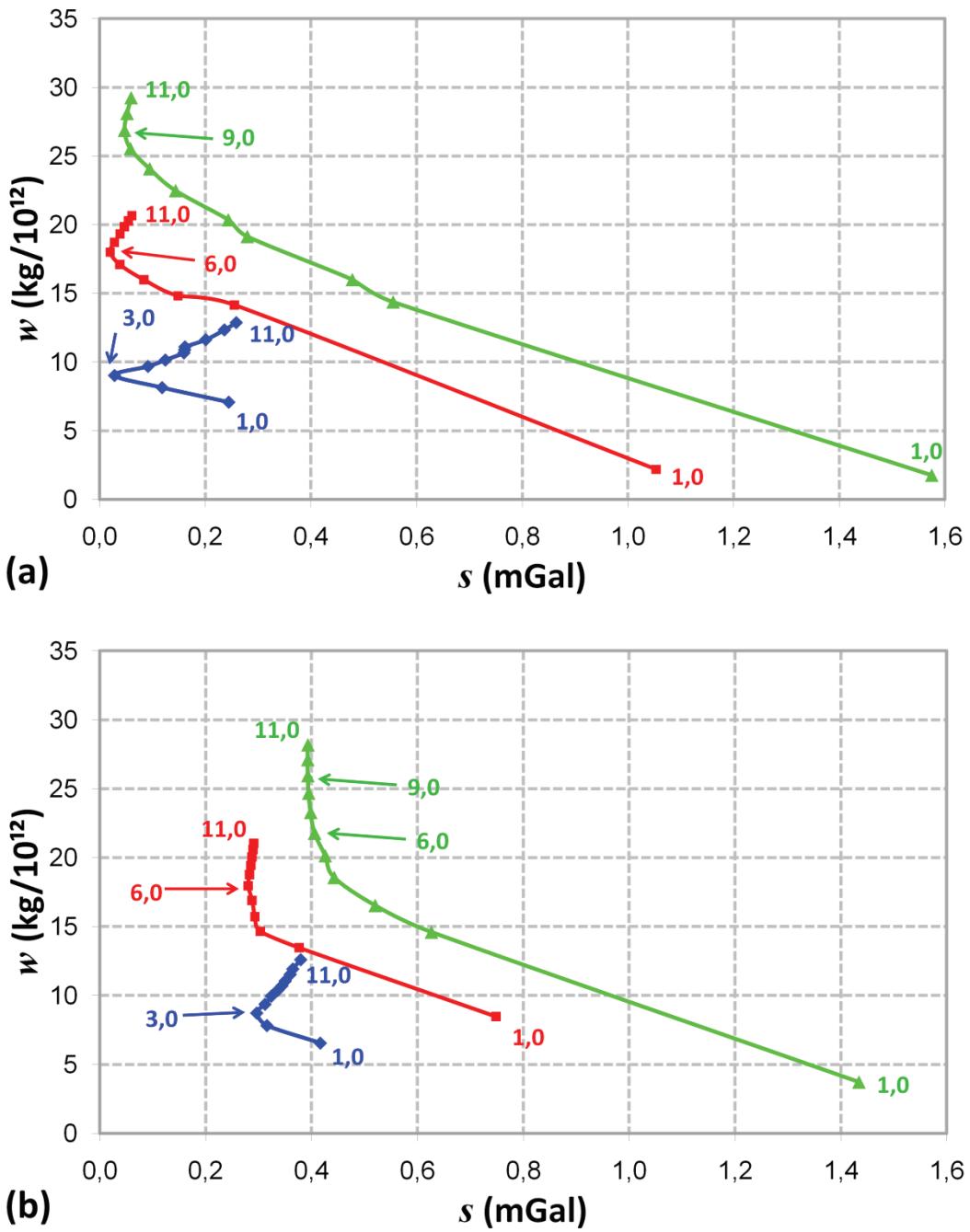
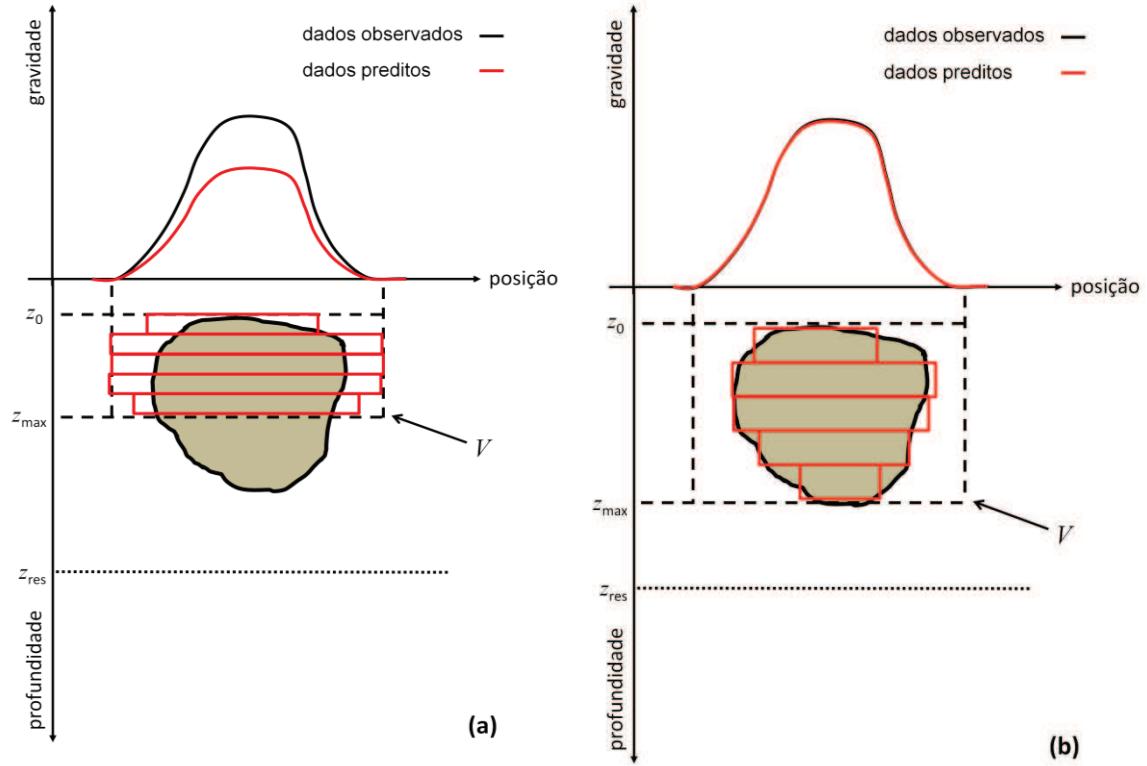
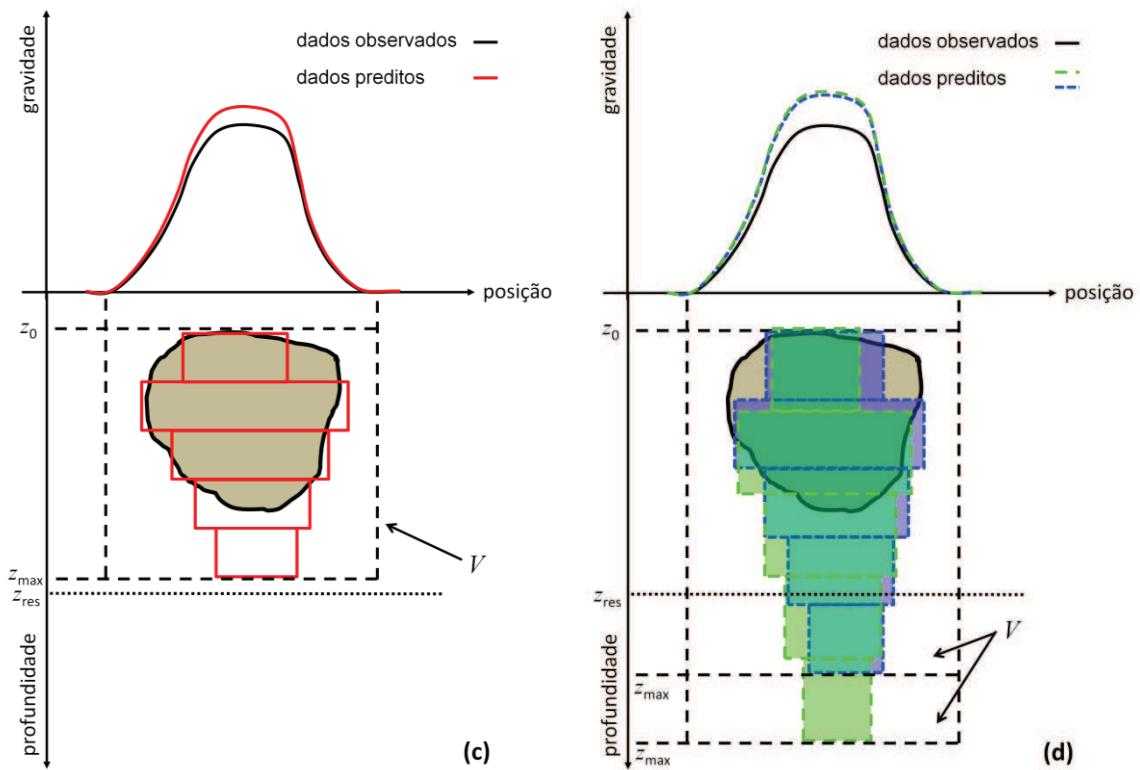
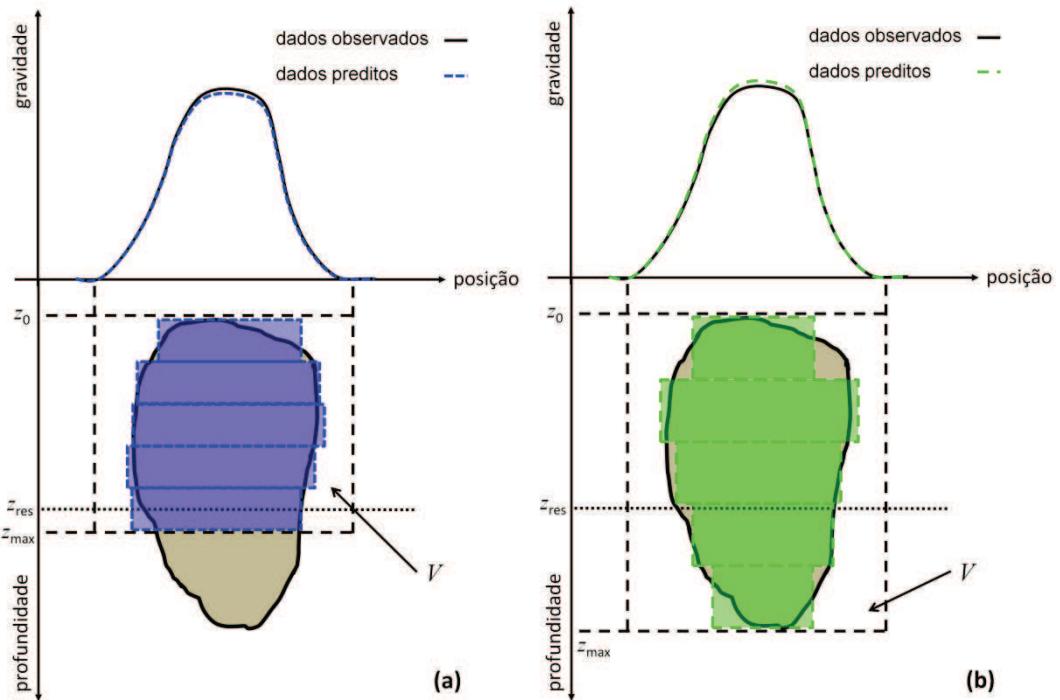


Figura 3.4 Curva  $w \times s$  produzida pelos três testes realizados com dados sintéticos (a) sem ruído e (b) com ruído. Os pontos são os diferentes valores da máxima profundidade ( $z_{\max}$ ) atribuída aos diferentes modelos interpretativos. As curvas azul, vermelha e verde referem-se, respectivamente, aos testes com os corpos sintéticos com base rasa ( $z_{\max} = 3,0$  km), intermediária ( $z_{\max} = 6,0$  km) e profunda ( $z_{\max} = 9,0$  km). Os números ao lado dos pontos nas curvas  $w \times s$  indicam o valor do  $z_{\max}$  (em km) atribuídos aos modelos interpretativos.

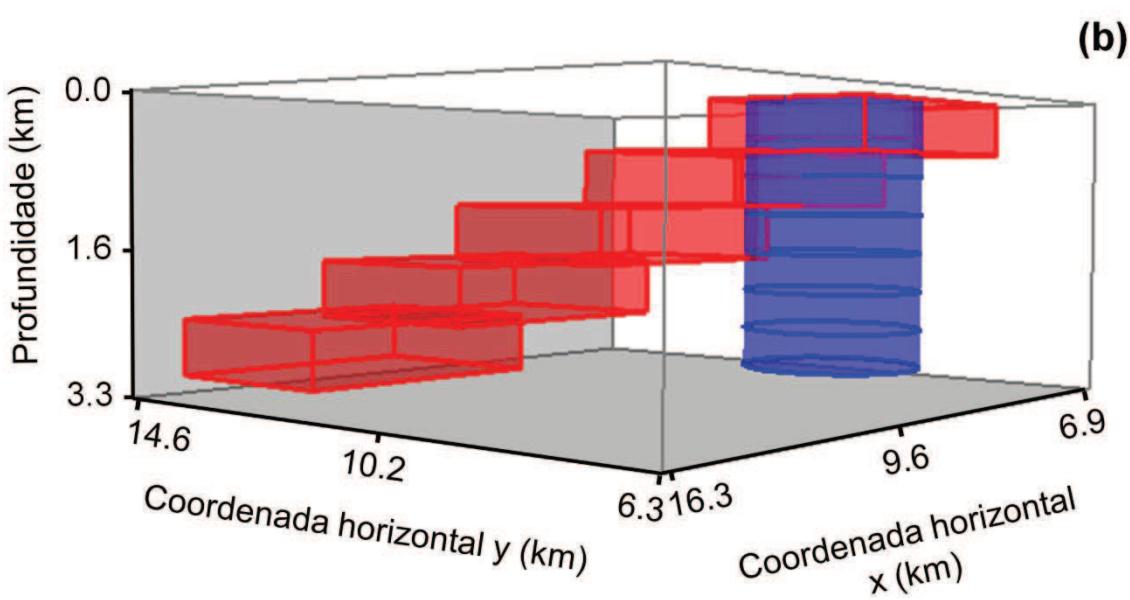
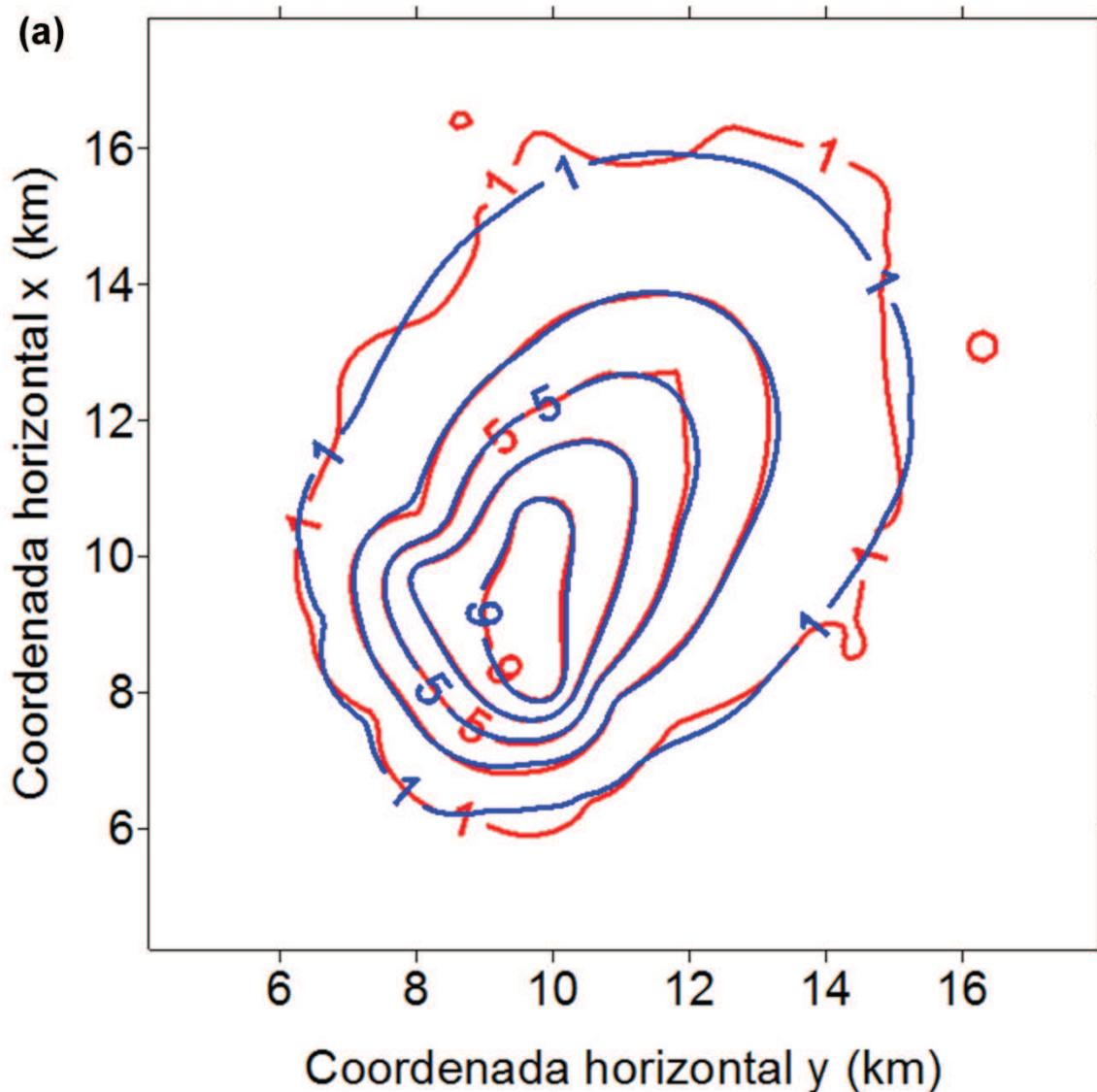




*Figura 3.5 Esboço 2D de um corpo geológico localizado em subsuperfície (representado na cor marrom), da anomalia de gravidade (dados observados) causada por este na superfície e de uma região,  $V$  (região delimitada por linhas pretas e pontilhadas), em subsuperfície, dentro da qual a inversão pode distribuir a massa da estimativa (retângulos vermelhos). A profundidade  $z_{\text{res}}$  é aquela a partir da qual as massas em subsuperfície não causam, na superfície, um efeito gravitacional mensurável dentro da precisão experimental. Em (a), a profundidade  $z_{\text{max}}$  da base do modelo interpretativo (retângulos vermelhos) é menor que a do corpo verdadeiro e os dados preditos (linhas vermelhas) subestimam os dados observados; em (b), a profundidade  $z_{\text{max}}$  da base do modelo interpretativo (retângulos vermelhos) é próxima a do corpo verdadeiro e os dados preditos (linhas vermelhas) ajustam os dados observados; em (c), a profundidade  $z_{\text{max}}$  da base do modelo interpretativo (retângulos vermelhos) é maior que a do corpo verdadeiro e os dados preditos (linhas vermelhas) superestimam os dados observados; finalmente, em (d), a Figura mostra que estimativas com modelos interpretativos com profundidade  $z_{\text{max}}$  da base do modelo interpretativo maiores que  $z_{\text{res}}$  (retângulos azuis e verdes) produzem, praticamente, os mesmos dados preditos (linhas pontilhadas azul e verde).*



*Figura 3.6* Esboço 2D similar ao apresentado na Figura 3.5. O corpo verdadeiro possui profundidade maior que  $z_{\text{res}}$ , que é aquela a partir da qual as massas em subsuperfície não causam, na superfície, um efeito gravitacional mensurável dentro da precisão experimental. Nesse caso, uma estimativa com profundidade da base menor que a do corpo verdadeiro (retângulos azuis em a) ajusta os dados tão bem quanto uma estimativa com a profundidade da base igual a profundidade da base do corpo verdadeiro (retângulos verdes em b).



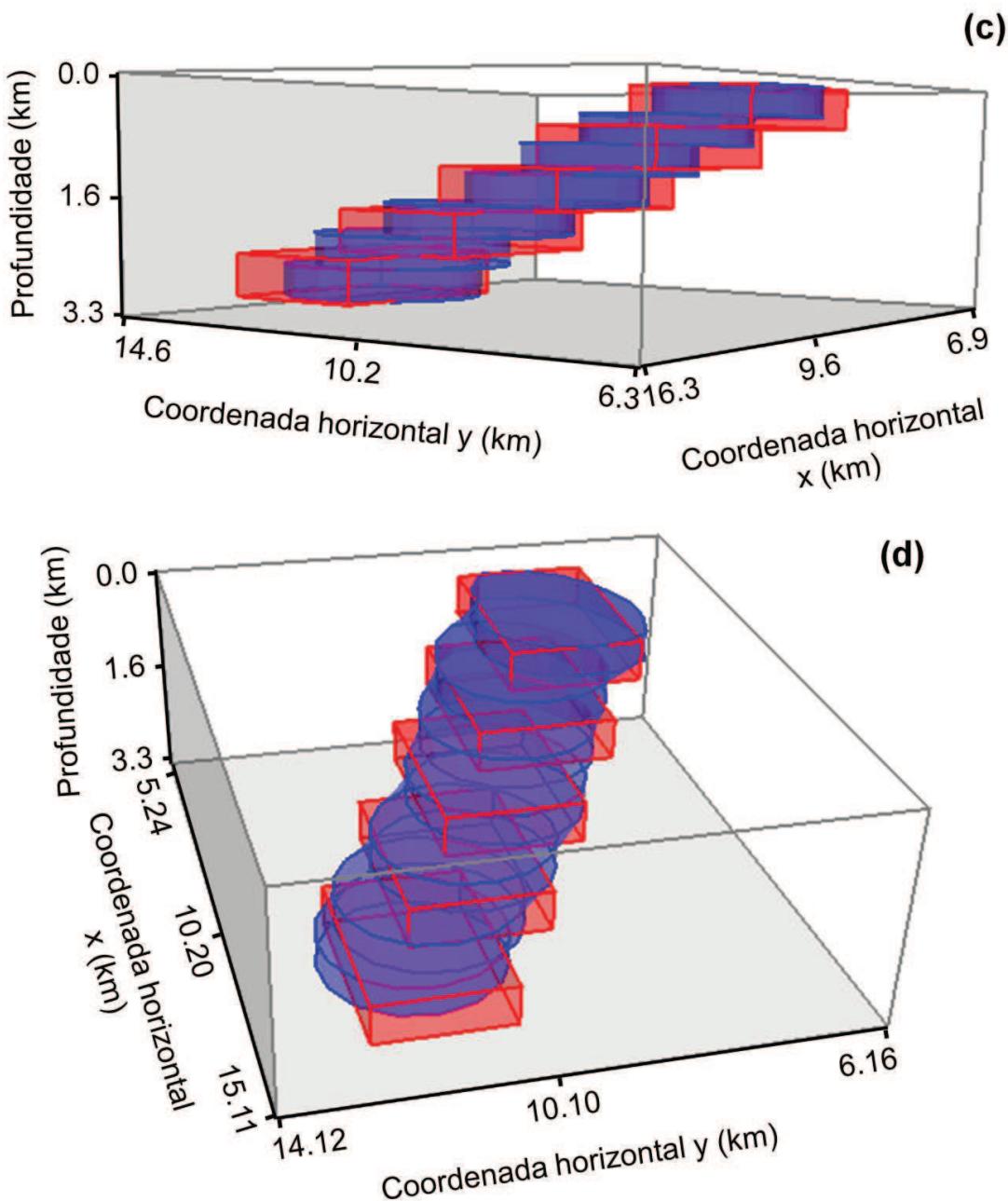
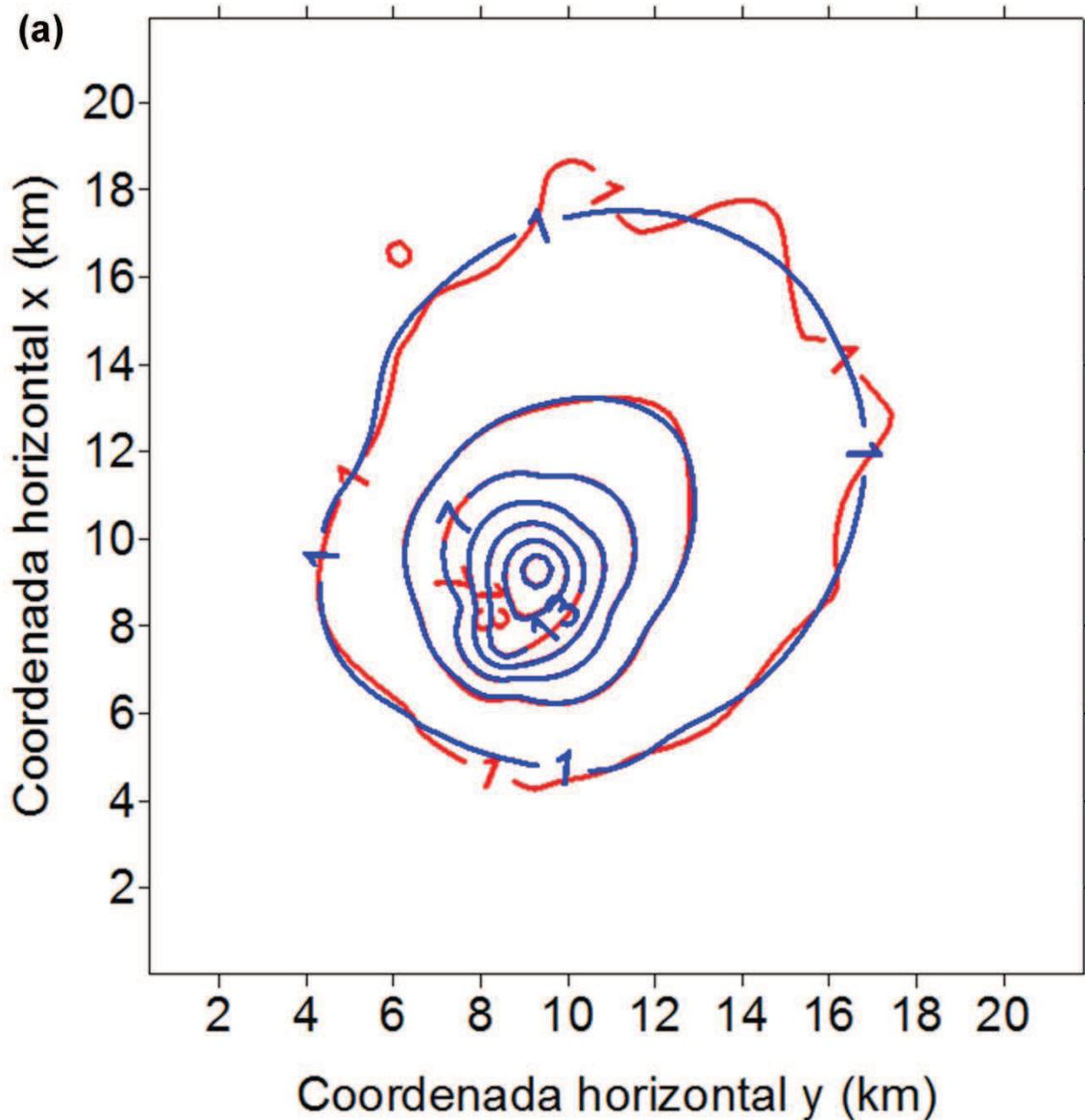
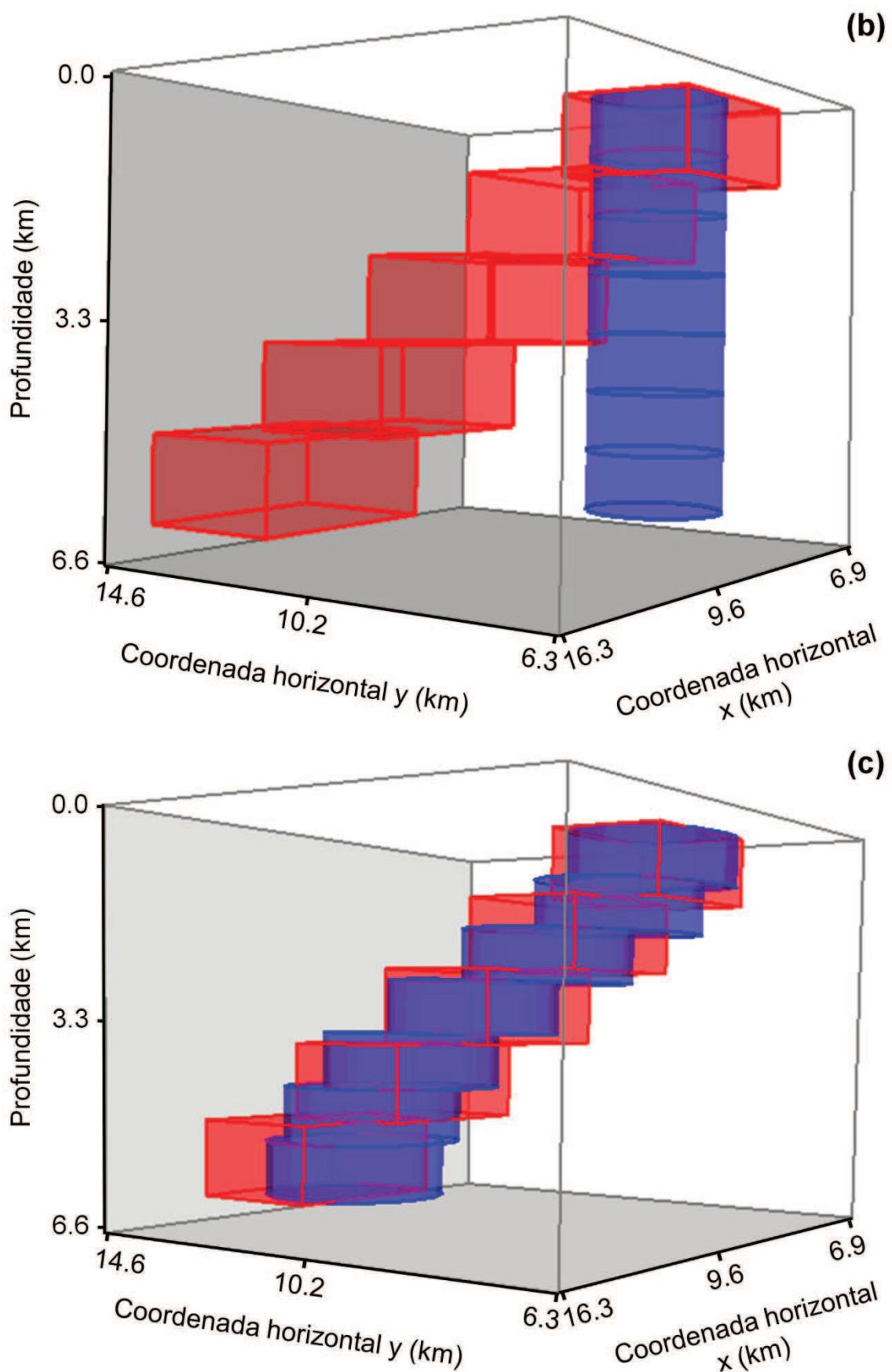
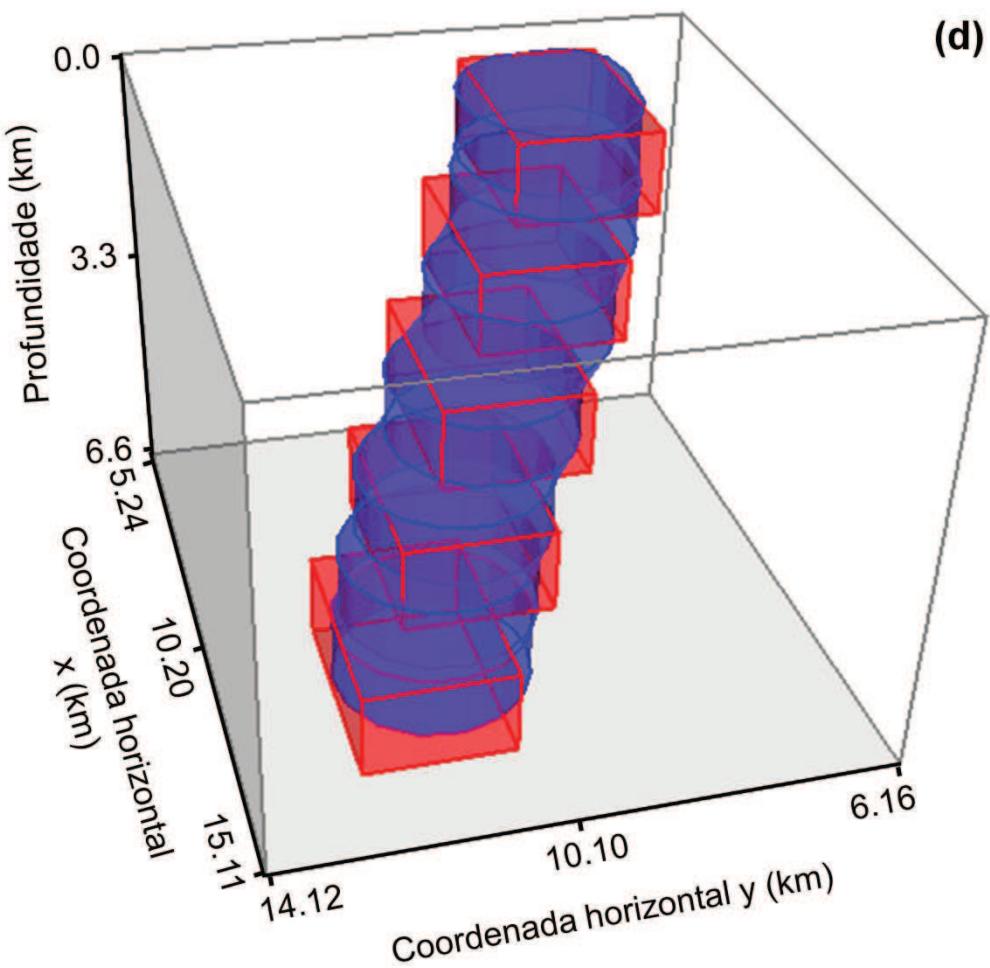


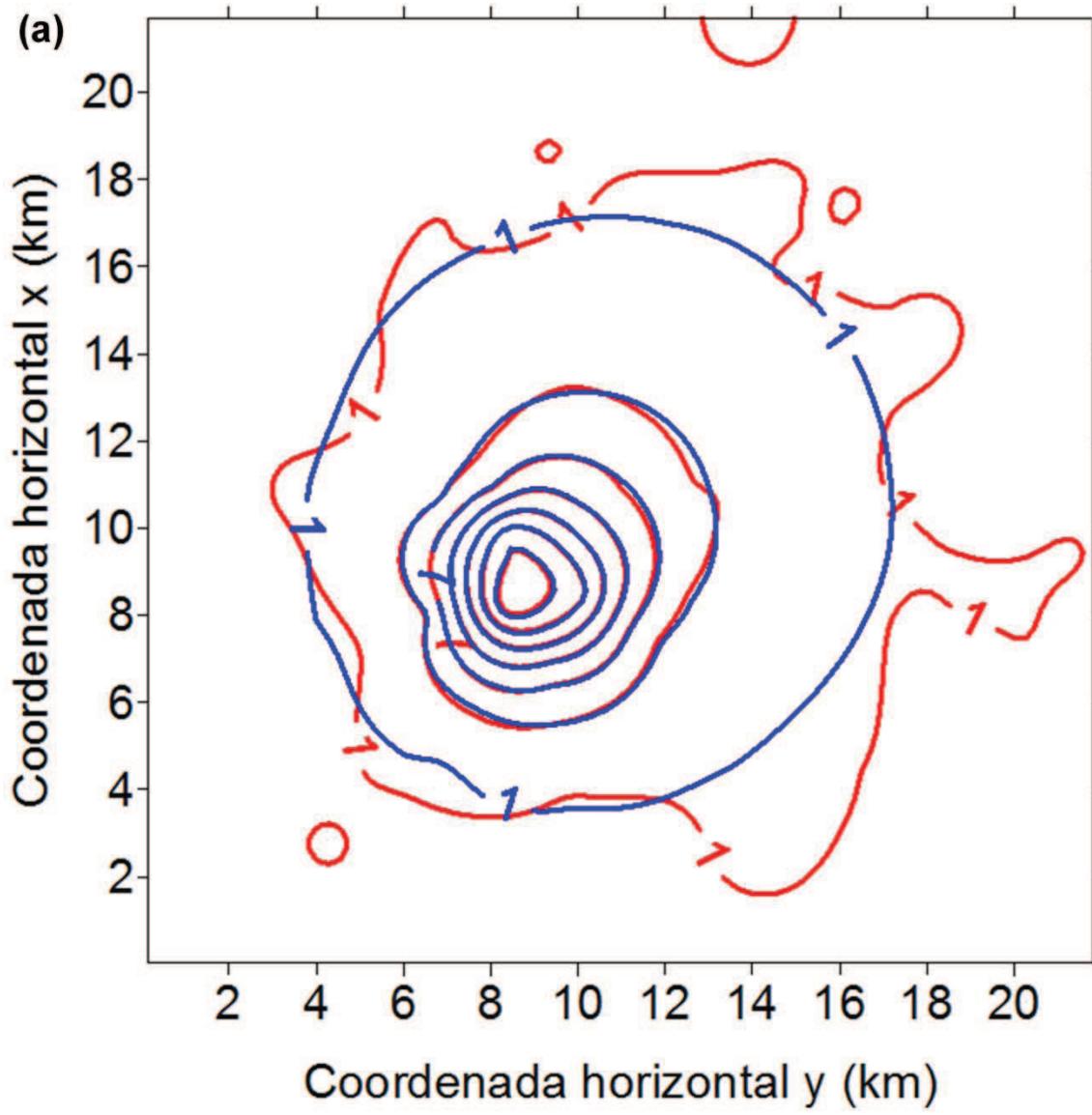
Figura 3.7 Resultados obtidos no teste com modelo de base rasa ( $z_{\max} = 3,0 \text{ km}$ ). Em (a), as linhas vermelhas são os dados observados contaminados com ruído e as linhas azuis são os dados preditos pela estimativa obtida na inversão. Os valores estão em mGal. Em (b), os prismas vermelhos são o corpo verdadeiro e os prismas azuis são a aproximação inicial. A aproximação inicial utilizada possui todos os prismas com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (9,0 \text{ km}, 9,0 \text{ km})$  e todas as distâncias radiais iguais a  $r_j^k = 1,0 \text{ km}$  ( $k = 1, \dots, L$  e  $j = 1, \dots, M$ ). Em (c) e (d), os prismas vermelhos e azuis representam os corpos verdadeiro e estimado. A profundidade  $z_{\max} = 3,0 \text{ km}$  (Equação 2.21) foi escolhida com base na curva  $w \times s$  (curva azul na Figura 3.4b).

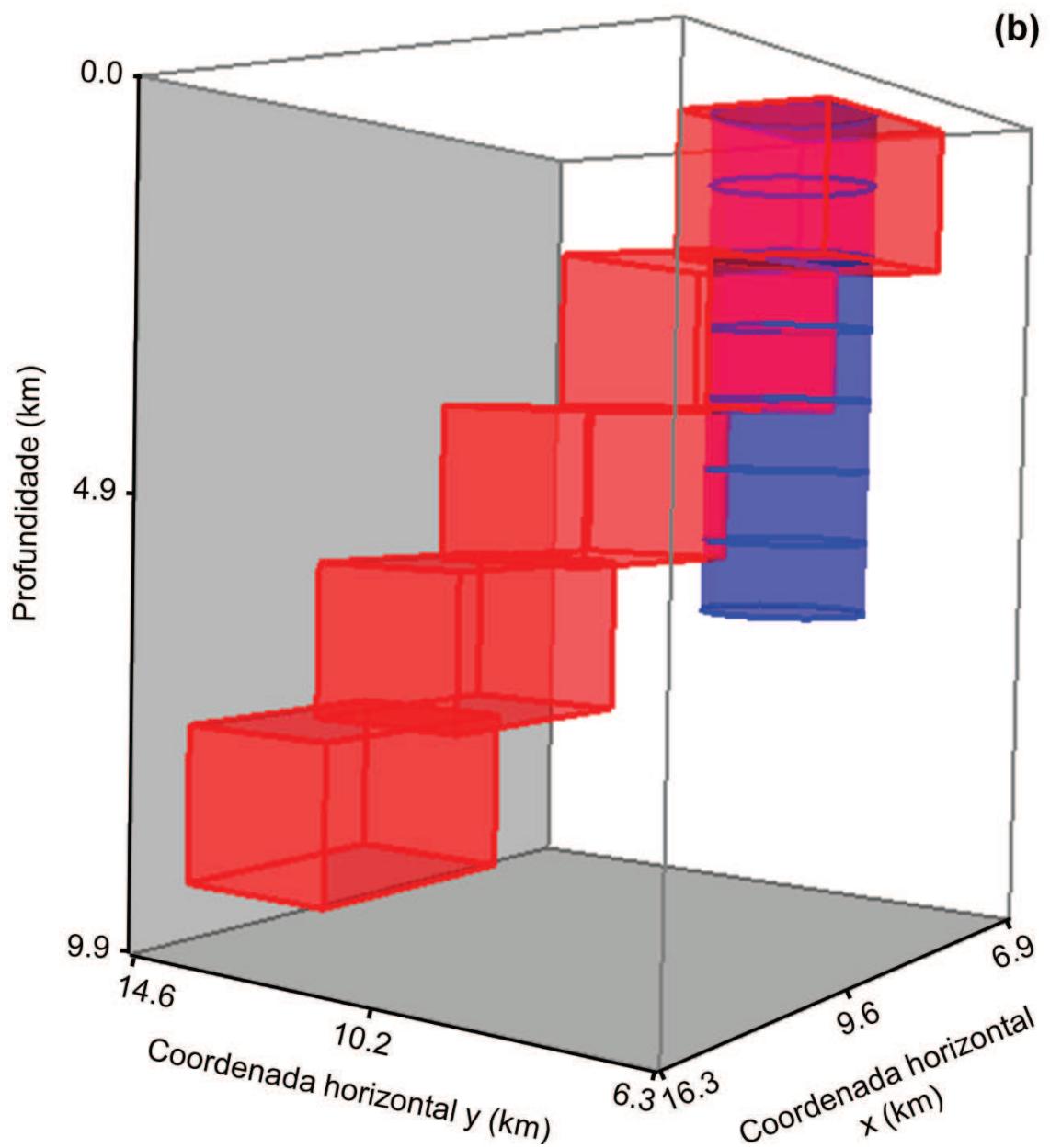




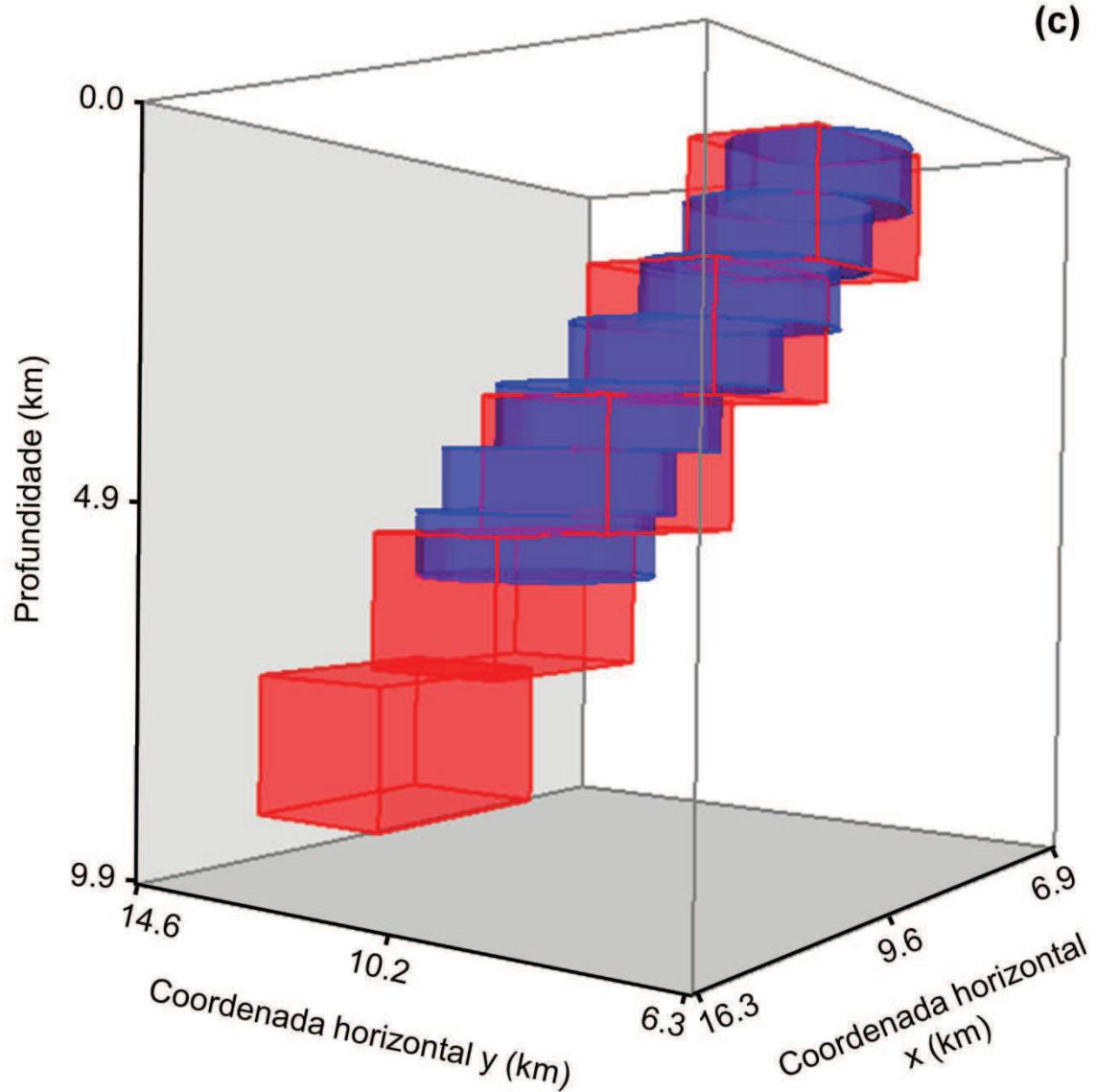


*Figura 3.8 Resultados obtidos no teste com modelo de base intermediária ( $z_{\max} = 6,0 \text{ km}$ ). Em (a), as linhas vermelhas são os dados observados contaminados com ruído e as linhas azuis são os dados preditos pela estimativa obtida na inversão. Os valores estão em mGal. Em (b), os prismas vermelhos são o corpo verdadeiro e os prismas azuis são a aproximação inicial A aproximação inicial utilizada possui todos os prismas com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (9,0 \text{ km}, 9,0 \text{ km})$  e todas as distâncias radiais iguais a  $r_j^k = 1,0 \text{ km}$  ( $k = 1, \dots, L$  e  $j = 1, \dots, M$ ). Em (c) e (d), os prismas vermelhos e azuis representam os corpos verdadeiro e estimado. A profundidade  $z_{\max} = 6,0 \text{ km}$  (Equação 2.21) foi escolhida com base na curva  $w \times s$  (curva vermelha na Figura 3.4b).*





(c)



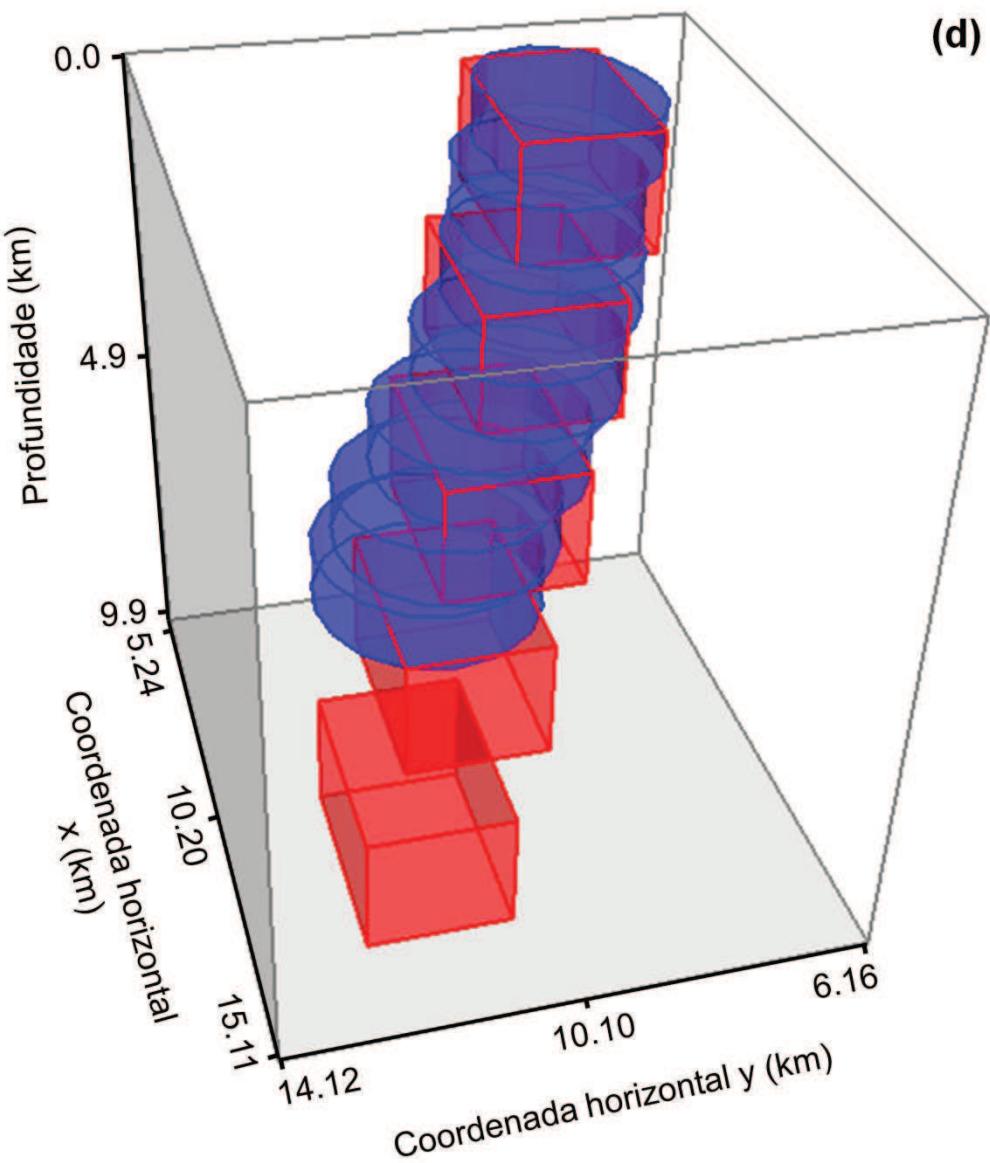
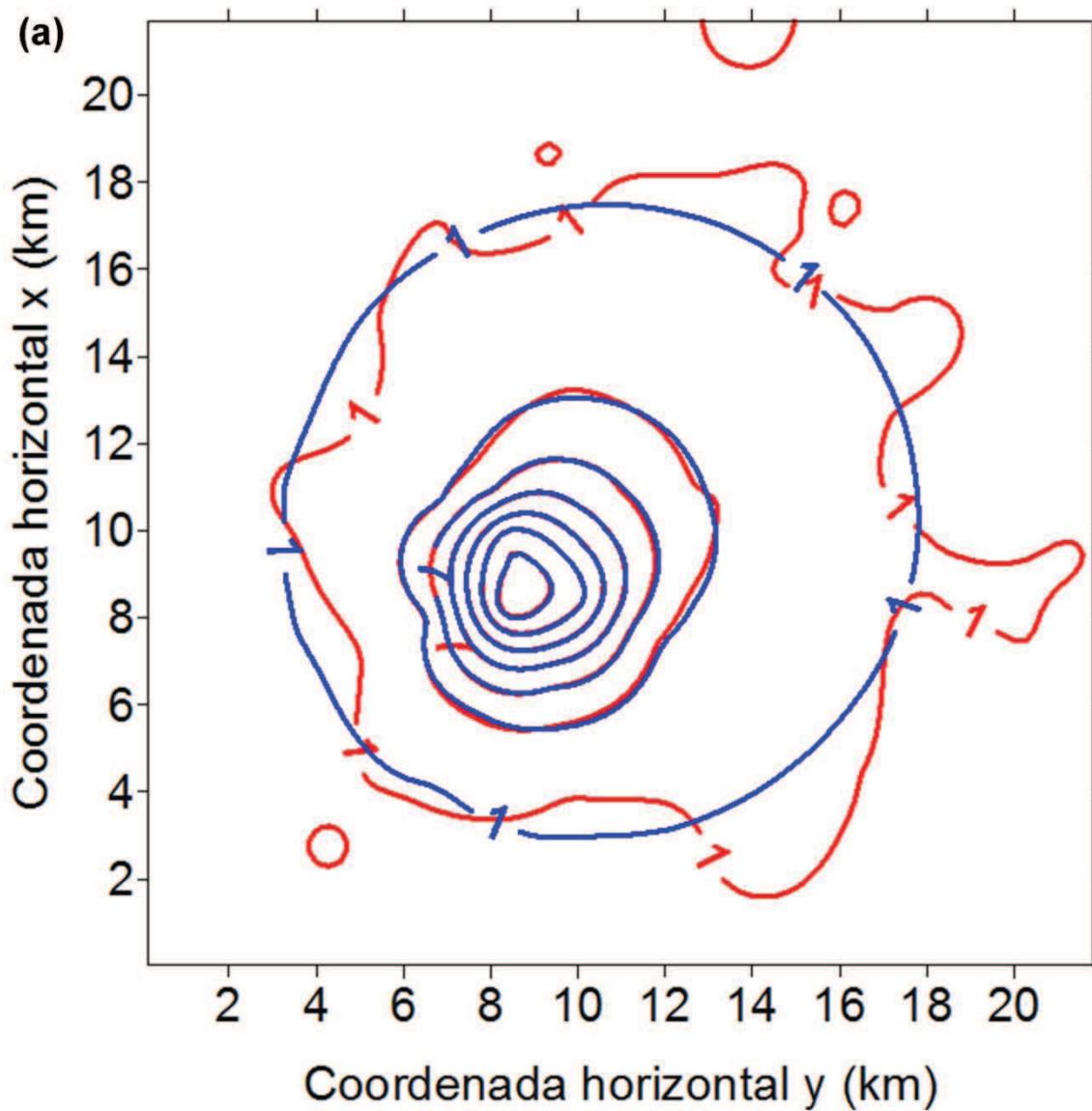
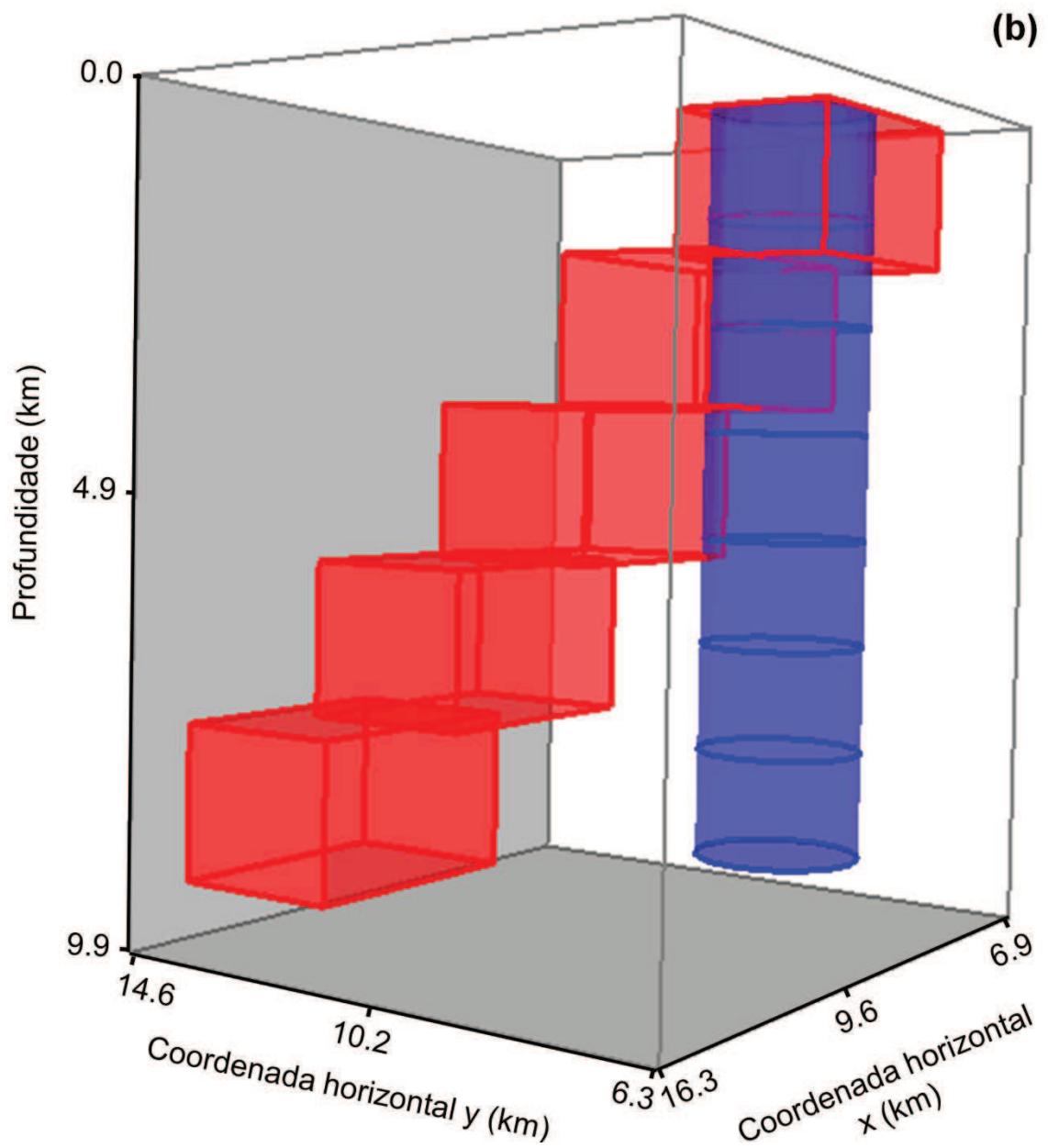
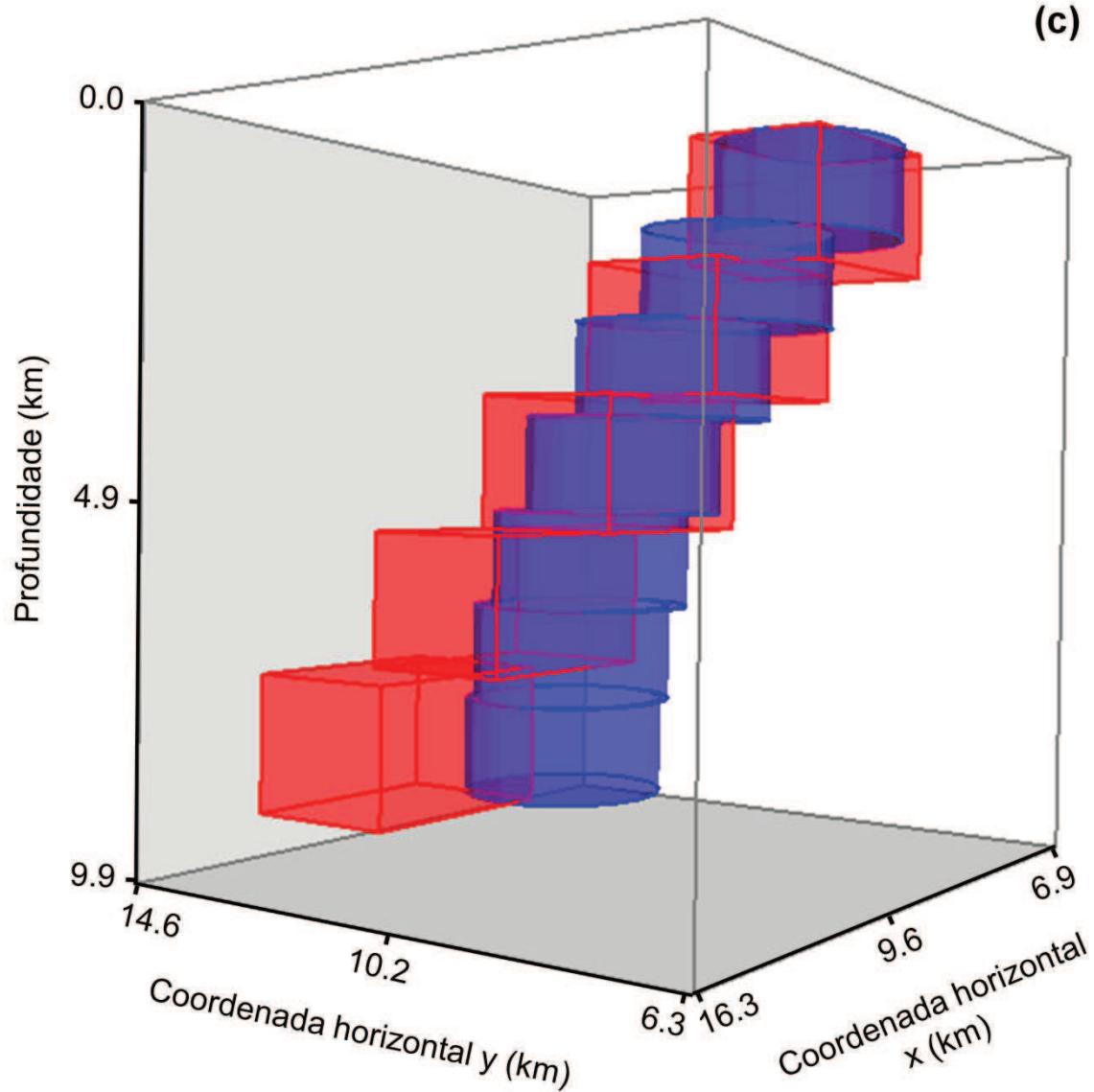


Figura 3.9 Resultados obtidos no teste com modelo de base profunda ( $z_{\max} = 9,0 \text{ km}$ ). Em (a), as linhas vermelhas são os dados observados contaminados com ruído e as linhas azuis são os dados preditos pela estimativa obtida na inversão. Os valores estão em mGal. Em (b), os prismas vermelhos são o corpo verdadeiro e os prismas azuis são a aproximação inicial. A aproximação inicial utilizada possui todos os prismas com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (9,0 \text{ km}, 9,0 \text{ km})$  e todas as distâncias radiais iguais a  $r_j^k = 1,0 \text{ km}$  ( $k = 1, \dots, L$  e  $j = 1, \dots, M$ ). Em (c) e (d), os prismas vermelhos e azuis representam os corpos verdadeiro e estimado. A profundidade  $z_{\max} = 6,0 \text{ km}$  (Equação 2.21) foi escolhida com base na curva  $w \times s$  (curva verde na Figura 3.4b).





(c)



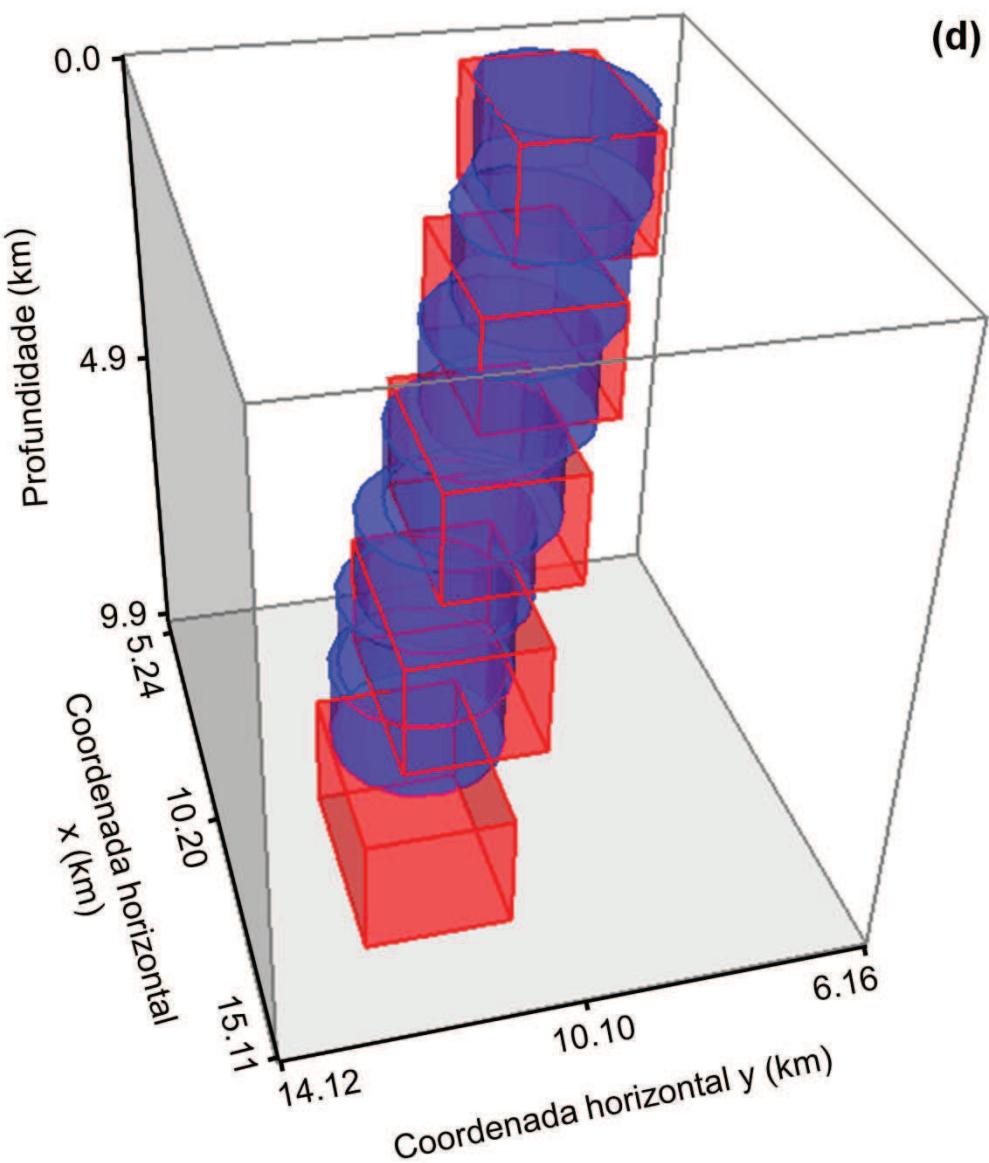


Figura 3.10 Resultados obtidos no teste com modelo de base profunda ( $z_{\max} = 9,0 \text{ km}$ ). Em (a), as linhas vermelhas são os dados observados contaminados com ruído e as linhas azuis são os dados preditos pela estimativa obtida na inversão. Os valores estão em mGal. Em (b), os prismas vermelhos são o corpo verdadeiro e os prismas azuis são a aproximação inicial. A aproximação inicial utilizada possui todos os prismas com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (9,0 \text{ km}, 9,0 \text{ km})$  e todas as distâncias radiais iguais a  $r_j^k = 1,0 \text{ km}$  ( $k = 1, \dots, L$  e  $j = 1, \dots, M$ ). Em (c) e (d), os prismas vermelhos e azuis representam os corpos verdadeiro e estimado. A profundidade  $z_{\max} = 9,0 \text{ km}$  (Equação 2.21) foi escolhida como sendo igual a do corpo verdadeiro.

## 4) APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS

Neste capítulo, apresentamos os resultados provenientes de dois testes com dados sintéticos, cada um simulando um corpo geológico diferente. O primeiro representa um corpo granítico aflorante e o outro representa um corpo inclinado aflorante mais complexo, cuja inclinação varia com a profundidade. Em ambos os testes:

- i) Utilizou-se a densidade do corpo verdadeiro.
- ii) Os dados observados foram previamente contaminados com uma variável pseudo-aleatória com distribuição Gaussiana, média zero e desvio padrão igual a 0,5 mGal, simulando os erros nas observações.
- iii) As curvas  $w \times s$  observadas foram geradas usando-se 7 pontos ( $s$  ,  $w$ ), com  $z_{\max}$  variando de 3,0 km a 9,0 km, espaçados de 1,0 km. Esse espaçamento nos permite definir que a incerteza em  $z_{\max}$  é igual a 0,5 km.
- iv) Seguindo o procedimento descrito na subseção 2.3, fizemos a análise de estabilidade e o cálculo da incerteza dos parâmetros para cada uma das estimativas (ponto na curva  $w \times s$  observada) obtidas com um valor fixo para a profundidade máxima  $z_{\max}$  do modelo interpretativo. Para tanto, utilizamos  $Q = 30$  amostras diferentes de uma variável pseudo-aleatória com distribuição Gaussiana, média zero e desvio padrão igual ao que foi utilizado para contaminar, previamente, os dados observados.

## 4.1) GRANITO AFLORANTE

### 4.1.1) CORPO SINTÉTICO (VERDADEIRO)

Este teste sintético simula um corpo granítico (Figura 4.1) aflorante ( $z_0 = 0,0$  km) e com contraste de densidade constante  $\rho = -0,09$  g/cm<sup>3</sup> em relação à rocha encaixante. O corpo geológico simulado é formado por  $L = 10$  prismas, todos com espessura  $dz = 0,65$  km e seção horizontal descrita por um polígono com  $M = 30$  vértices. A Figura 4.2 mostra os dados sintéticos produzidos pelo modelo (linhas vermelhas) e o contorno da parte aflorante (linha preta).

### 4.1.2) VARIÁVEIS DEFINIDAS A PRIORI

Em todas as estimativas feitas neste teste, o modelo interpretativo possui contraste de densidade  $\rho = -0,09$  g/cm<sup>3</sup>, profundidade do topo  $z_0 = 0,0$  km, quantidade de prismas  $L = 10$  e quantidade de vértices  $M = 30$  para todos os polígonos que descrevem as seções horizontais de todos os prismas. A aproximação inicial utilizada em todas as estimativas possui todos os prismas iguais, com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (9101,136$  km,  $604,033$  km) e todas as distâncias radiais iguais a  $r_j^k = 2,0$  km ( $k = 1, \dots, L$  e  $j = 1, \dots, M$ ). Os vínculos utilizados em todas as estimativas são definidos por:

- i) Parâmetro de regularização (Equação 2.6a):  $\mu = 1,0$ .
- ii) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes ao mesmo prisma (Equação 2.7):  $\alpha_1 = 0,003$ .
- iii) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes a prismas adjacentes (Equação 2.8):  $\alpha_2 = 0,0005$ .

- iv) Vínculo do afloramento (Equações 2.9 e 2.10):  $\alpha_3 = 0,5$ ,  $\alpha_4 = 0,0$ ,  $x_0^0 = 9101,136$  km,  $y_0^0 = 604,033$  km e  $r_j^0$  ( $j = 1, \dots, M$ , todos os vértices do prisma mais raso) definidos de acordo com o contorno da parte aflorante do modelo (linha preta na Figura 4.2).
- v) Vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes (Equação 2.11):  $\alpha_5 = 0,3$ .
- vi) Vínculo Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais (Equação 2.12):  $\alpha_6 = 0,00007$ .
- vii) Vínculo de desigualdade (Equação 2.6b):  $x_{0\ min} = 9090,0$  km,  $x_{0\ max} = 9115,0$  km,  $y_{0\ min} = 590,0$  km,  $y_{0\ max} = 610,0$  km,  $r_{\min} = 0,0$  km e  $r_{\max} = 25,0$  km. Estes valores foram estabelecidos com base na extensão horizontal da anomalia produzida pelo modelo (Figura 4.2).

Os dados observados (Figura 4.2) sugerem que o corpo verdadeiro não seja inclinado, uma vez que os gradientes horizontais apresentam certa simetria radial. Isso justifica a aproximação inicial utilizada e o emprego de uma combinação de vínculos que penalizam deslocamentos relativos entre prismas adjacentes e incentivam correções nas distâncias radiais. O vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais (Equação 2.12) foi utilizado apenas para estabilizar a estimativa.

### 4.1.3) RESULTADOS

A Figura 4.3 mostra a curva  $w \times s$  observada produzida neste teste sintético. Nota-se um ponto com  $s$  mínimo muito bem definido, indicando que a profundidade  $z_{\max}$  ótima para da base do modelo interpretativo é igual a  $6,0 \pm 0,5$  km. Vale ressaltar que o mínimo bem definido de  $s$  na curva  $w \times s$  (Figura 4.3) indica que os dados têm resolução suficiente para estimar a profundidade verdadeira do corpo simulado. Este

fato é comprovado, visto que o valor inferido para a profundidade máxima do granito através da curva  $w \times s$  (Figura 4.3) é próxima à verdadeira, que é igual a 6,0 km (Figura 4.1). As Figuras 4.4, 4.5 e 4.6 mostram os dados gravimétricos ajustados, a aproximação inicial, a estimativa e a incerteza nos parâmetros, respectivamente. Essas Figuras revelam que os dados preditos (linhas azuis na Figura 4.4) ajustam os dados observados dentro da precisão experimental (linhas vermelhas na Figura 4.4), que a estimativa (prismas azuis nas Figuras 4.5b e 4.5c) representa muito bem o corpo verdadeiro (prismas vermelhos na Figura 4.5) e que as incertezas nas estimativas dos parâmetros é muito pequena (Figura 4.6), indicando que a estimativa é estável. Estes resultados comprovam o bom desempenho do método em reconstruir a geometria e inferir a profundidade da base de corpos geológicos localizados em subsuperfície quando o dado observado tem resolução suficiente para isso.

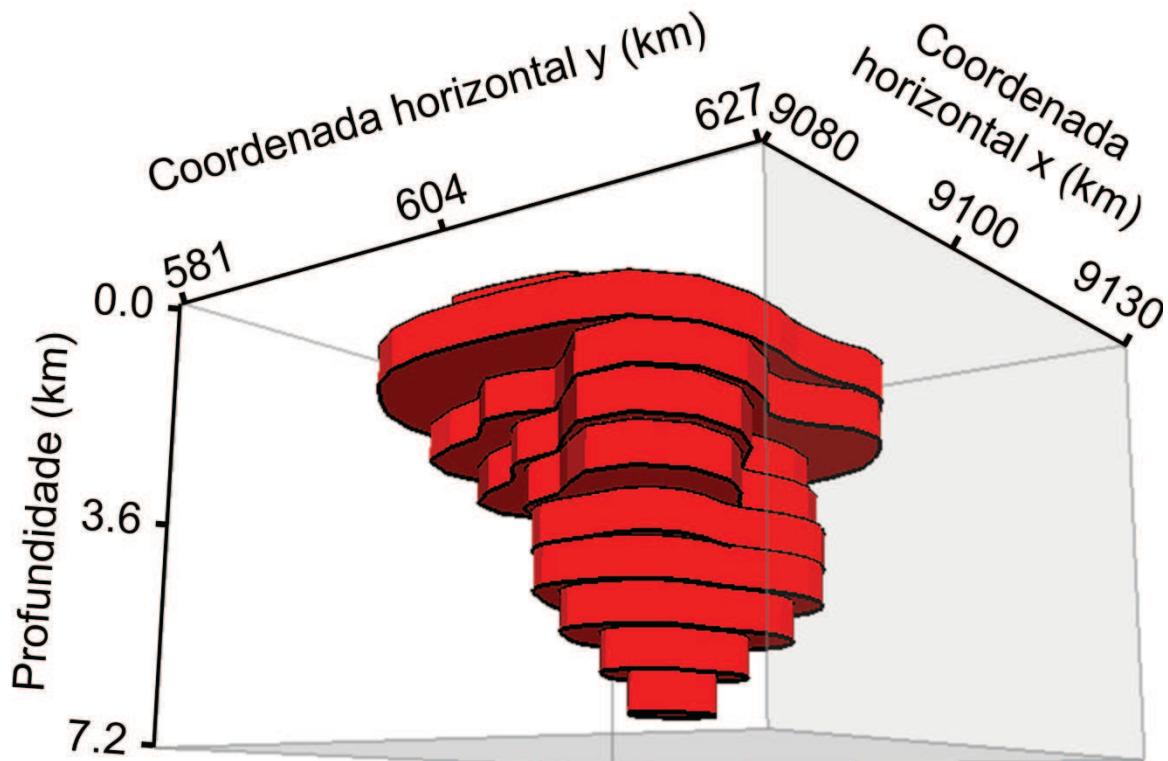
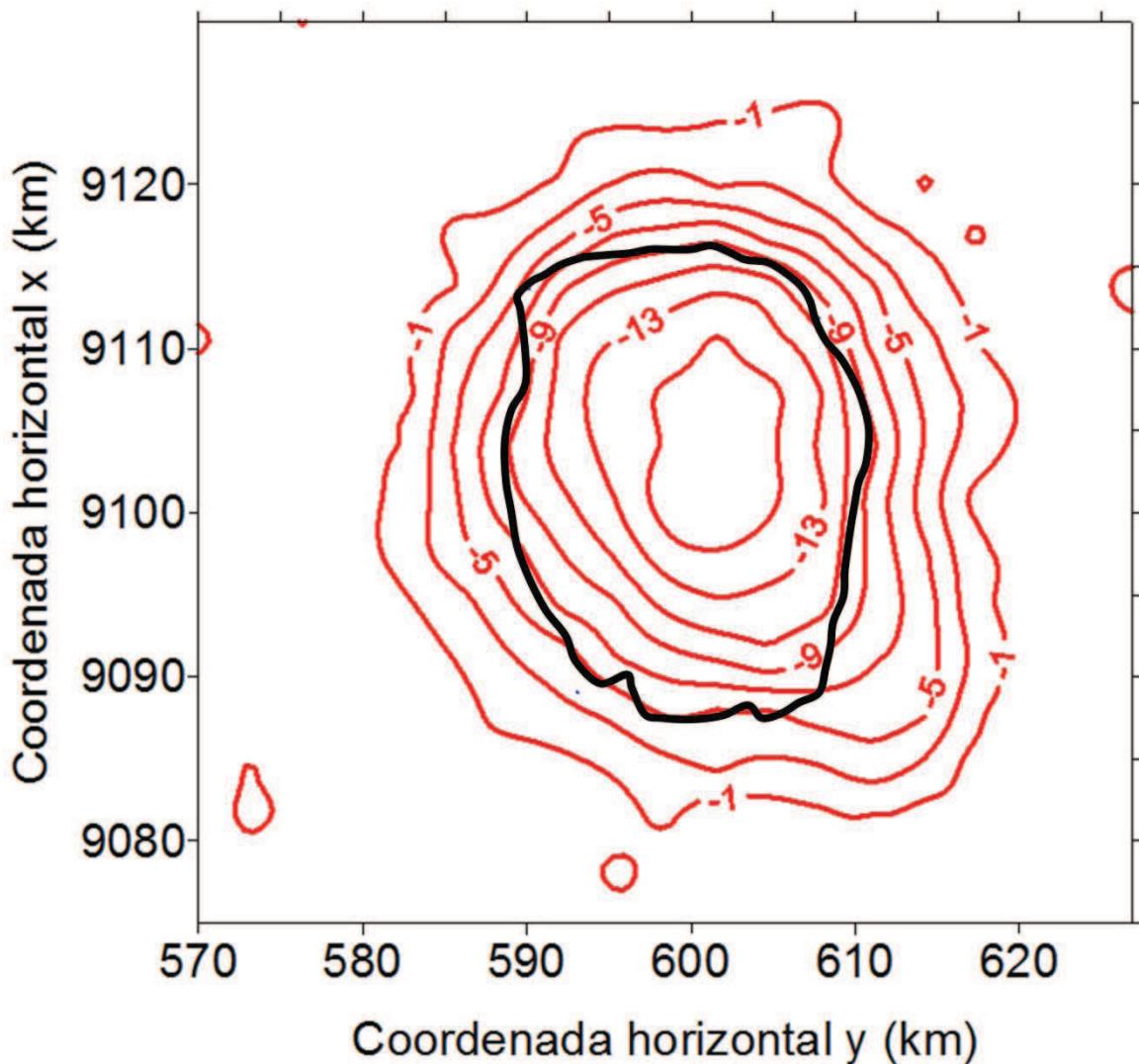


Figura 4.1 Corpo geológico sintético simulando um corpo granítico aflorante.



*Figura 4.2 Dados observados (linhas vermelhas) produzidos pelo modelo que simula um corpo granítico (Figura 4.1). Os dados estão contaminados por um ruído pseudo-aleatório com distribuição Gaussiana, média zero e desvio padrão igual 0,5 mGal, simulando dados reais. A linha preta representa o contorno da parte aflorante do corpo.*

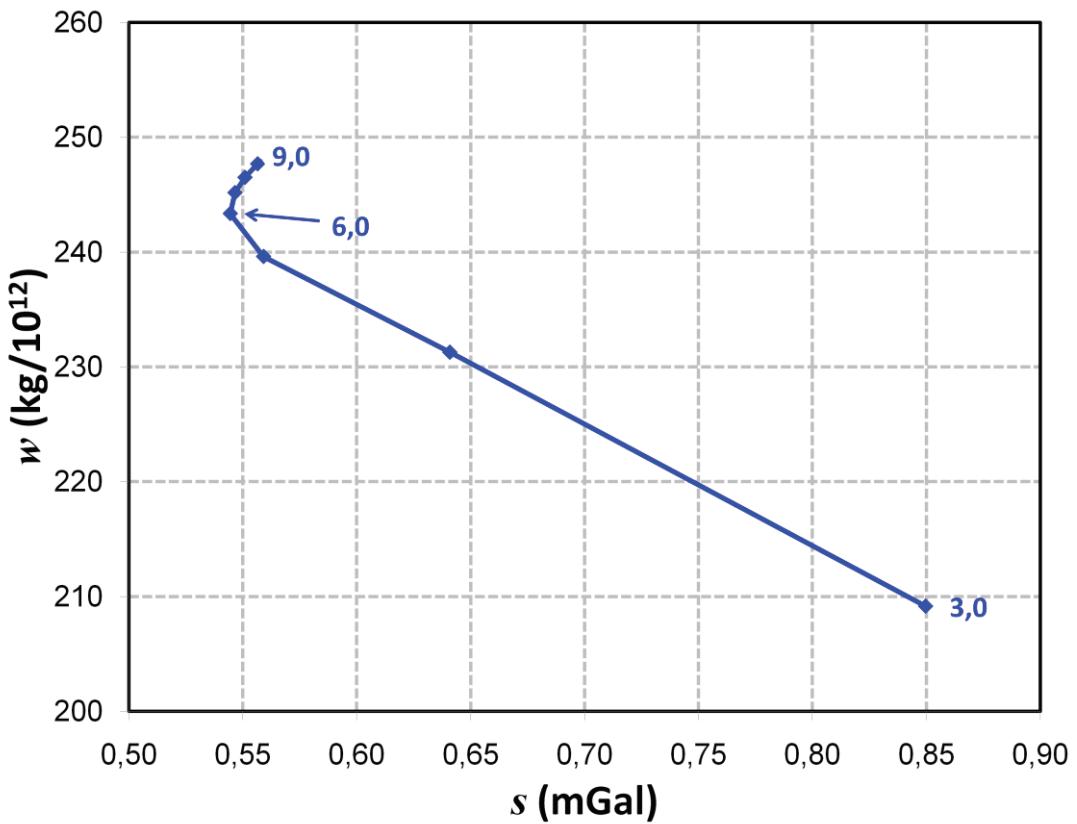
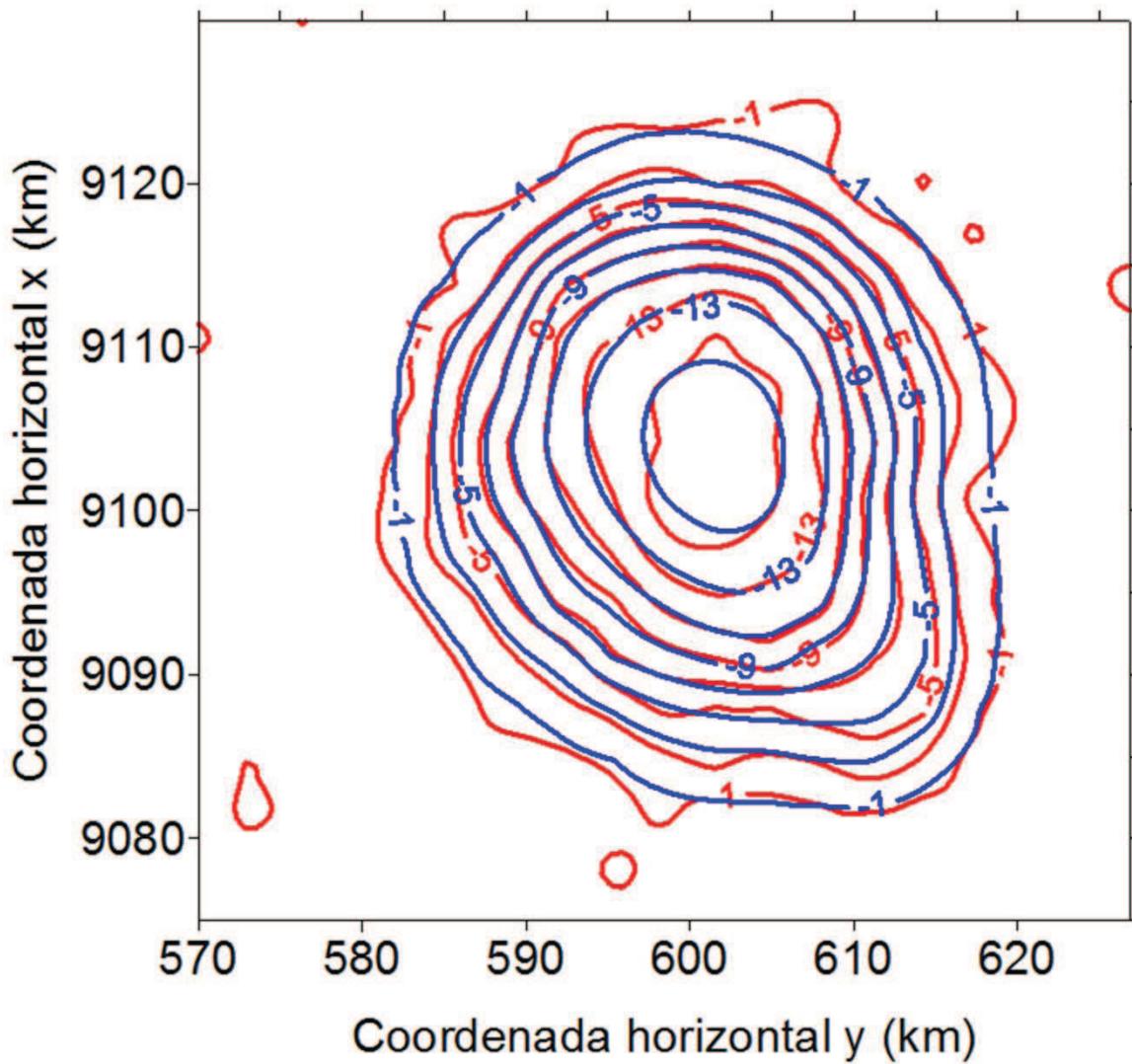
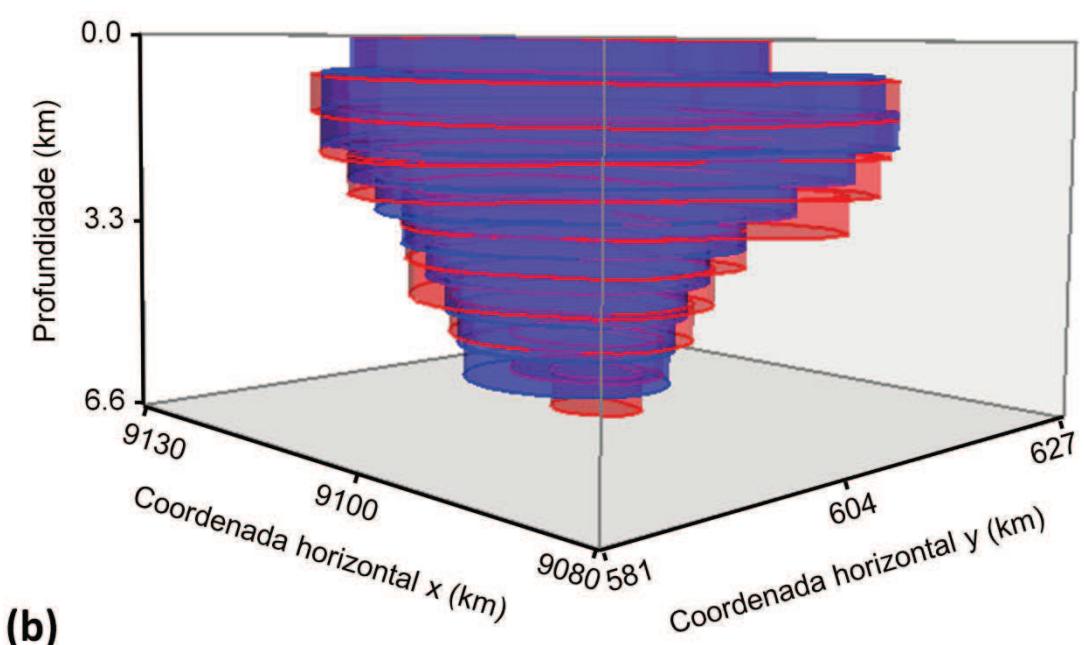
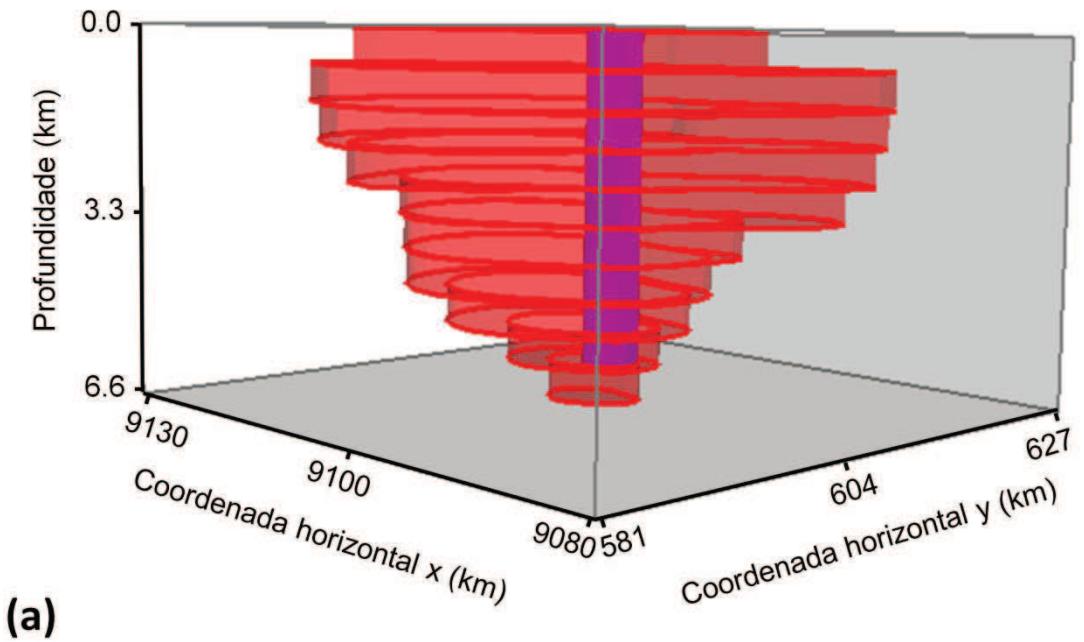
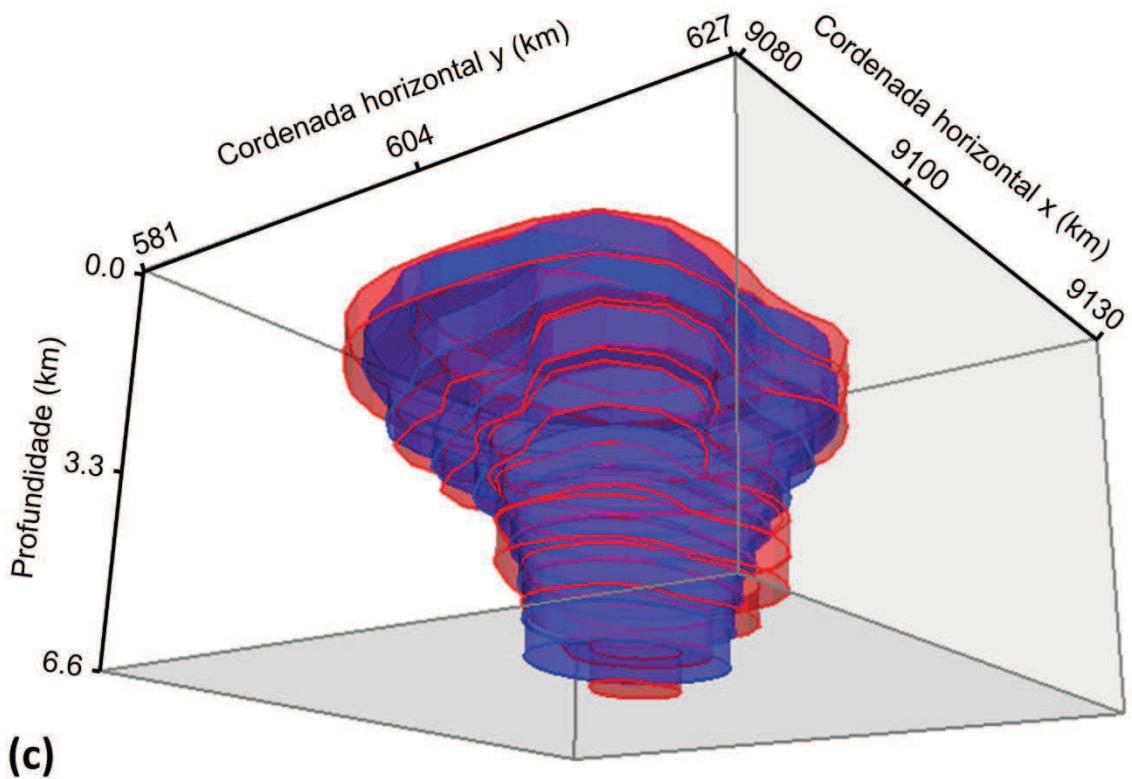


Figura 4.3 Curva  $w \times s$  produzida no teste com o modelo que simula um corpo granítico. Os pontos são os diferentes valores da máxima profundidade ( $z_{\max}$ ) atribuída aos diferentes modelos interpretativos. Os números ao lado da curva indicam o valor de  $z_{\max}$  (em km) para alguns pontos  $w \times s$ .



*Figura 4.4 Ajuste produzido no teste com o modelo que simula um corpo granítico. As linhas vermelhas são os dados observados contaminados com ruído e as linhas azuis são os dados preditos pela estimativa obtida na inversão (prismas azuis na Figura 4.5). Os valores estão em mGal.*





(c)

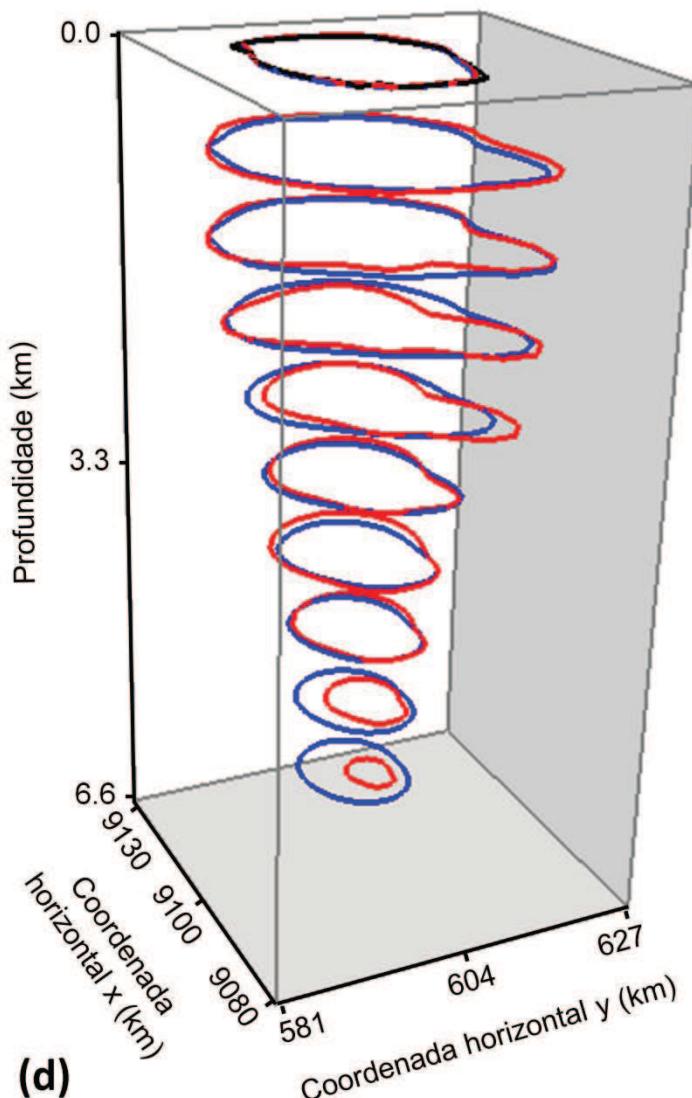
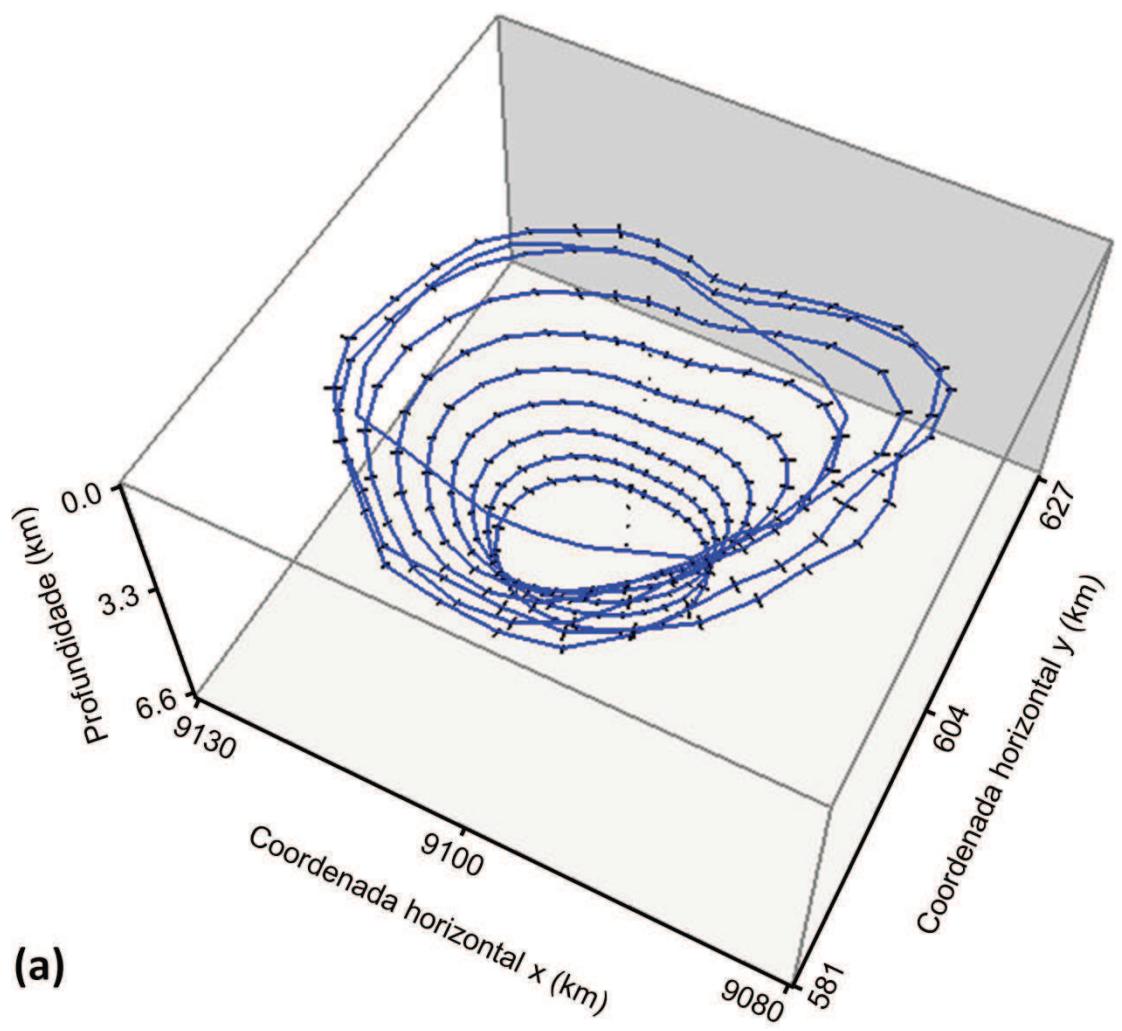
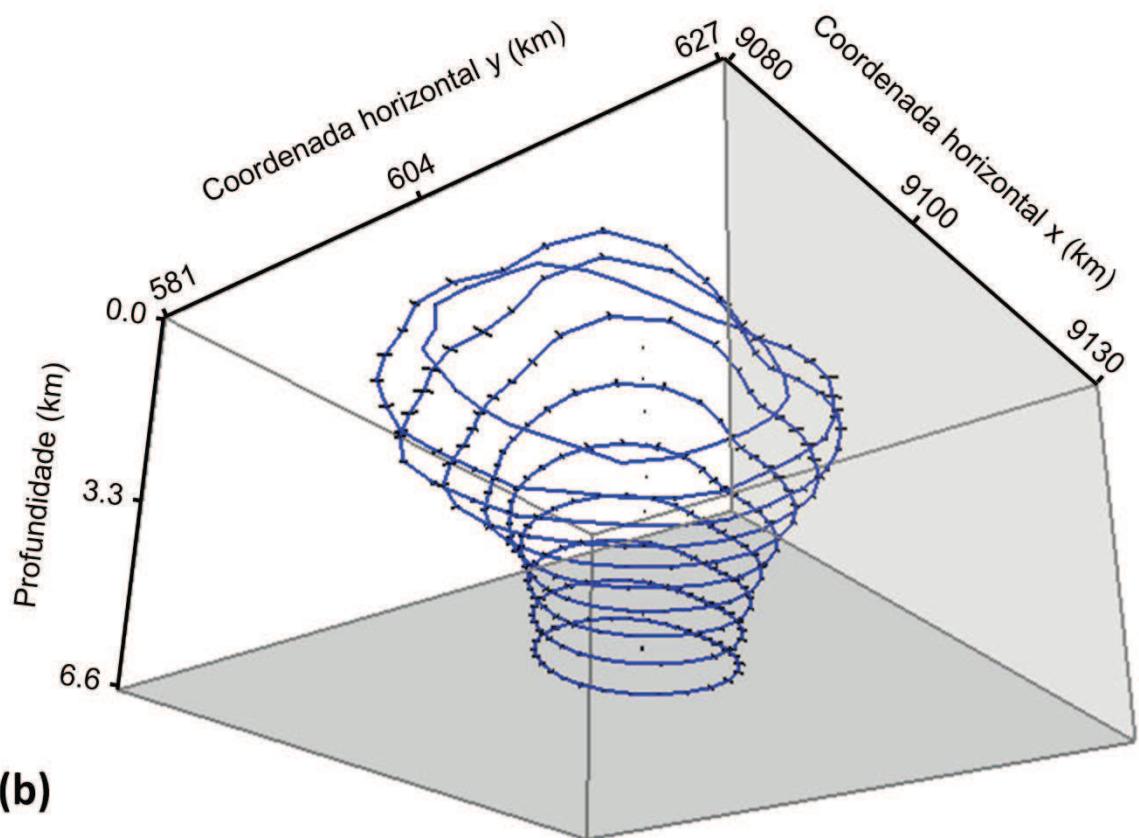


Figura 4.5 Estimativa obtida no teste com o modelo que simula um corpo granítico. Em (a), os prismas vermelhos representam o corpo verdadeiro e os prismas azuis representam a aproximação inicial. A aproximação inicial utilizada possui todos os prismas com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (9101,136 \text{ km}, 604,033 \text{ km})$  e todas as distâncias radiais iguais a  $r_j^k = 2,0 \text{ km}$  ( $k = 1, \dots, L$  e  $j = 1, \dots, M$ ). (b) e (c) mostram vistas em perspectiva da estimativa (prismas azuis) e do corpo granítico verdadeiro (prismas vermelhos): (b) visada lateral, (c) visada inferior. (d) mostra uma comparação em profundidade entre o contorno do corpo estimado (linhas azuis) e o corpo verdadeiro (linhas vermelhas). Em (d), a linha preta representa o contorno da parte aflorante do corpo verdadeiro. O corpo estimado tem a profundidade da base igual a  $z_{\max} = 6,0 \pm 0,5 \text{ km}$  (Equação 2.21), inferida com base na curva  $w$  x s (Figura 4.3).





*Figura 4.6 Incerteza dos parâmetros estimados no teste com o modelo que simula um corpo granítico. (a) Visada superior e (b) visada inferior dos contornos das seções horizontais dos prismas que compõem o corpo estimado. A incerteza dos parâmetros (Equação 2.20) está representada pelas barras pretas. Observa-se que a incerteza das distâncias radiais (barras pretas sobre as linhas azuis) é muito pequena e a incerteza das coordenadas horizontais das origens são menores ainda, de tal forma que as barras aparecem como pontos.*

## 4.2) CORPO INTRUSIVO COMPLEXO

### 4.2.1) CORPO SINTÉTICO (VERDADEIRO)

Este teste sintético simula um corpo complexo (Figura 4.7) aflorante ( $z_0 = 0,0$  km), com inclinação variável em profundidade e com contraste de densidade constante  $\rho = 0,4 \text{ g/cm}^3$  em relação à rocha encaixante. Este modelo geológico é formado por  $L = 14$  prismas, todos com espessura  $dz = 0,5 \text{ km}$  e seção horizontal descrita por um polígono com  $M = 16$ . A Figura 4.8 mostra os dados sintéticos (linhas vermelhas) produzidos pelo corpo geológico mostrado na Figura 4.7 e um ponto localizado na parte aflorante (cruz preta).

### 4.2.2) VARIÁVEIS DEFINIDAS A PRIORI

Em todas as estimativas feitas neste teste, o modelo interpretativo possui contraste de densidade  $\rho = 0,4 \text{ g/cm}^3$ , profundidade do topo  $z_0 = 0,0 \text{ km}$ , quantidade de prismas  $L = 14$  e quantidade de vértices  $M = 16$  para o polígono que descreve a seção horizontal de todos os prismas. A aproximação inicial utilizada em todas as estimativas é formada por duas partes iguais, com formato similar ao de um cilindro. A primeira é composta pelos primeiros sete prismas (mais rasos), todos com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (51,671 \text{ km}, 96,453 \text{ km})$ ,  $k = 1, \dots, 7$ . A segunda parte da aproximação inicial é composta pelos últimos sete prismas do modelo interpretativo (mais profundos), todos com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (128,156 \text{ km}, 65,686 \text{ km})$ ,  $k = 8, \dots, 14$ . Todas as distâncias radiais de todos os prismas da aproximação inicial são iguais a 5,0 km. Os vínculos utilizados em todas as estimativas são definidos por:

- i) Parâmetro de regularização (Equação 2.6a):  $\mu = 1,0$ .
- ii) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes ao mesmo prisma (Equação 2.7):  $\alpha_1 = 0,0005$ .
- iii) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes a prismas adjacentes (Equação 2.8):  $\alpha_2 = 0,005$ .
- iv) Vínculo do afloramento (Equações 2.9 e 2.10):  $\alpha_3 = 0,0$ ,  $\alpha_4 = 0,1$ ,  $x_0^0 = 38,420$  km e  $y_0^0 = 98,121$  km (cruz preta na Figura 4.8).
- v) Vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes (Equação 2.11):  $\alpha_5 = 0,01$ .
- vi) Vínculo Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais (Equação 2.12):  $\alpha_6 = 0,00005$ .
- vii) Vínculo de desigualdade (Equação 2.6b):  $x_{0\min} = 20,0$  km,  $x_{0\max} = 160,0$  km,  $y_{0\min} = 10,0$  km,  $y_{0\max} = 130,0$  km,  $r_{\min} = 0,0$  km e  $r_{\max} = 50,0$  km. Estes valores foram estabelecidos com base na extensão horizontal da anomalia produzida pelo corpo sintético (Figura 4.8).

Os dados observados (Figura 4.8) sugerem que o corpo verdadeiro seja inclinado, formando um arco que sai da parte aflorante em direção a noroeste, onde os gradientes horizontais são maiores, e sofre uma deflexão em direção a nordeste, onde os gradientes horizontais da anomalia são menores. Essa característica justifica a utilização de uma aproximação inicial formada por duas partes iguais, com formatos similares a cilindros, localizadas em diferentes profundidades, e de vínculos que penalizam correções nas distâncias radiais e incentivam deslocamentos relativos entre prismas adjacentes. O vínculo Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais (Equação 2.12) foi utilizado apenas para estabilizar a estimativa.

### 4.2.3) RESULTADOS

A Figura 4.9 mostra a curva  $w \times s$  observada produzida neste teste sintético. Vê-se um ponto com  $s$  mínimo muito bem definido, indicando que a profundidade  $z_{\max}$  ótima para a base do modelo interpretativo é igual a  $7,0 \pm 0,5$  km. Este mínimo bem definido de  $s$  na curva  $w \times s$  (Figura 4.9) aponta que os dados têm resolução suficiente para estimar a profundidade verdadeira da base deste corpo inclinado. Este fato é comprovado, pois o valor determinado para a profundidade máxima deste corpo através da curva  $w \times s$  (Figura 4.9) coincide com a profundidade (7,0 km) da base do corpo (Figura 4.7). As Figuras 4.10, 4.11 e 4.12 mostram os dados gravimétricos ajustados, a aproximação inicial, a estimativa e sua incerteza, respectivamente. Essas Figuras revelam que os dados preditos (linhas azuis na Figura 4.10) ajustam os dados observados dentro da precisão experimental (linhas vermelhas na Figura 4.10), que a estimativa (prismas azuis nas Figuras 4.11b e 4.11c) representa muito bem o corpo verdadeiro (prismas vermelhos na Figura 4.11) e que a incerteza na estimativa dos parâmetros é pequena (Figura 4.12), indicando que ela é estável. Novamente, os resultados comprovam o excelente desempenho do método em reconstruir a geometria e inferir a profundidade da base de corpos geológicos localizados em subsuperfície, mesmo em ambientes geológicos complexos.

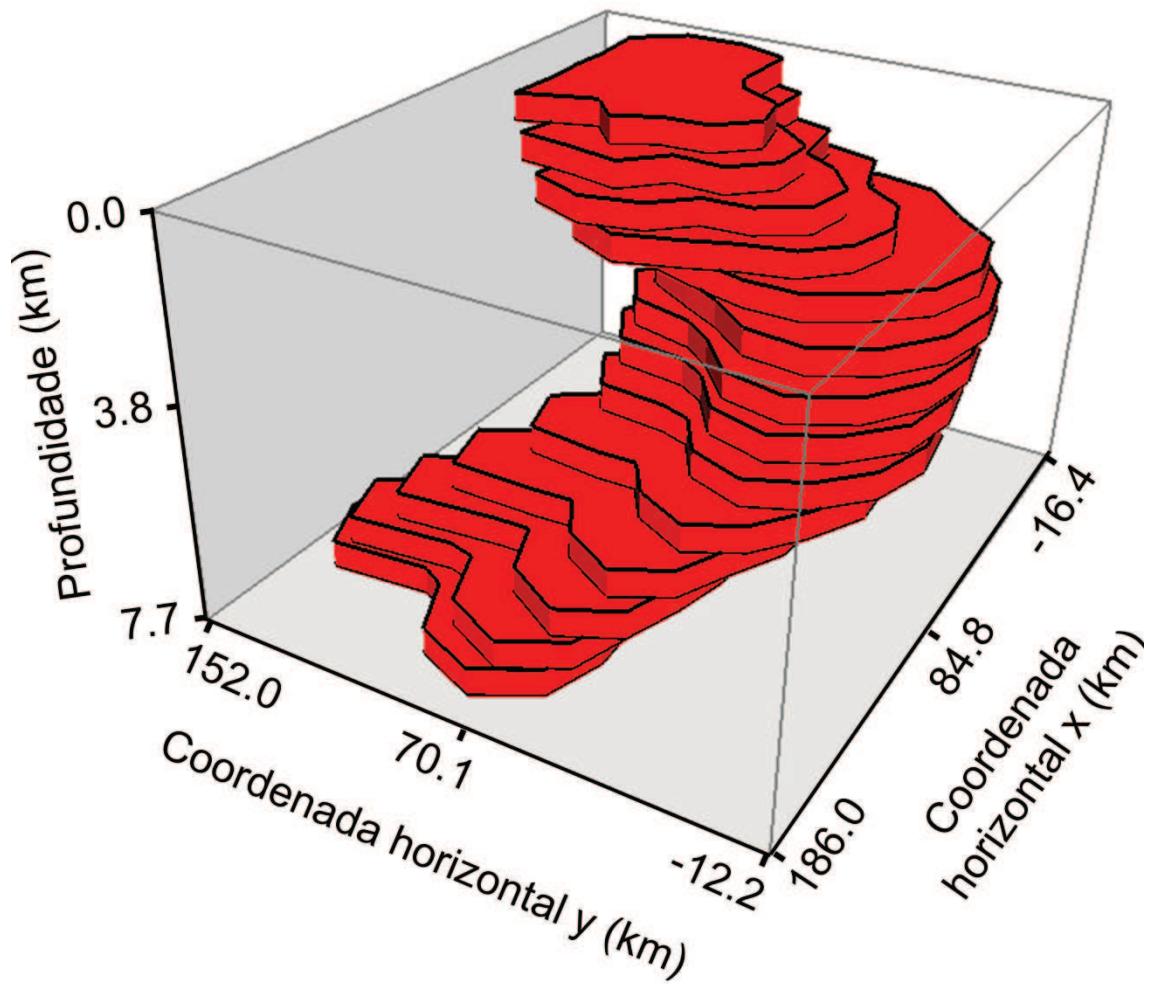


Figura 4.7 Corpo geológico sintético simulando um corpo geológico complexo aflorante.

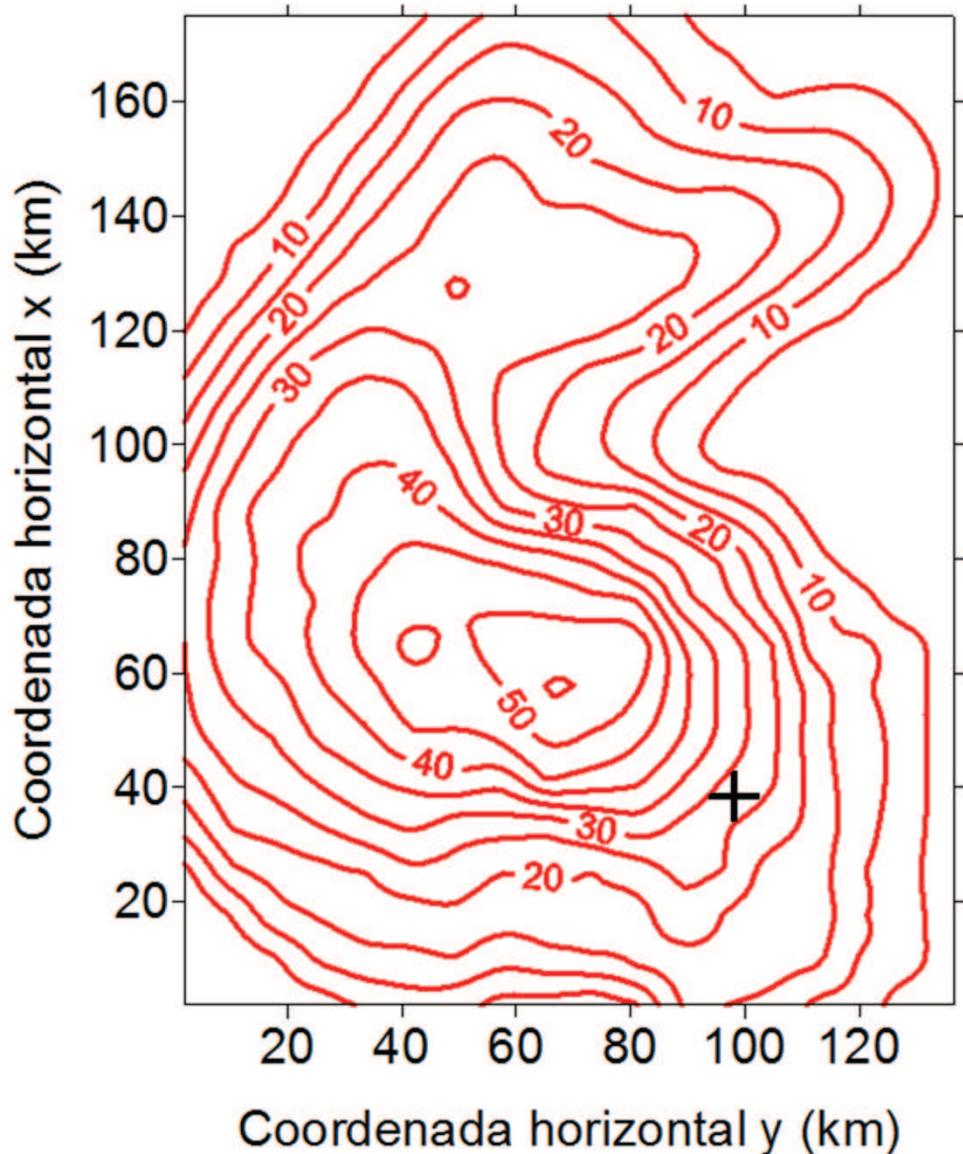


Figura 4.8 Dados observados (linhas vermelhas) produzidos pelo modelo que simula um corpo geológico complexo (Figura 4.7). Os dados estão contaminados por ruído pseudo-aleatório com distribuição Gaussiana, média nula e desvio padrão igual 0,5 mGal, simulando dados reais. A cruz preta representa um ponto localizado sobre a parte aflorante do corpo.

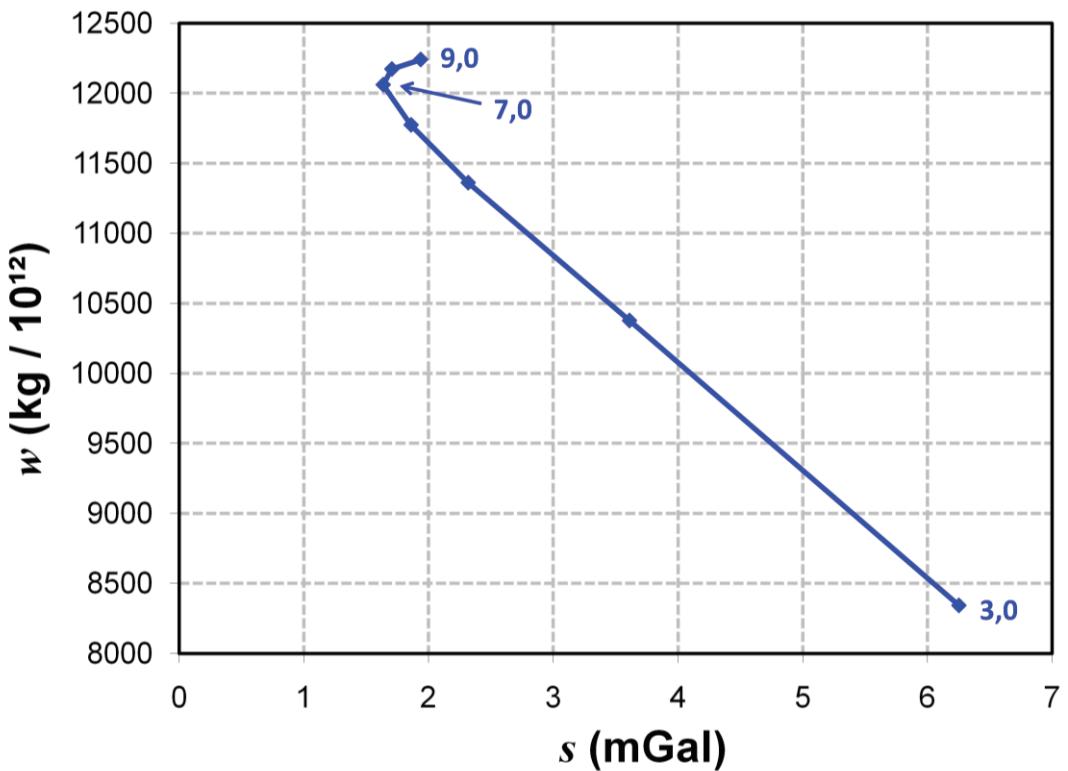


Figura 4.9 Curva  $w \times s$  produzida no teste com o modelo que simula um corpo geológico complexo. Os pontos são os diferentes valores da máxima profundidade ( $z_{max}$ ) atribuída aos diferentes modelos interpretativos. Os números ao lado da curva indicam o valor de  $z_{max}$  (em km) para alguns pontos  $w \times s$ .

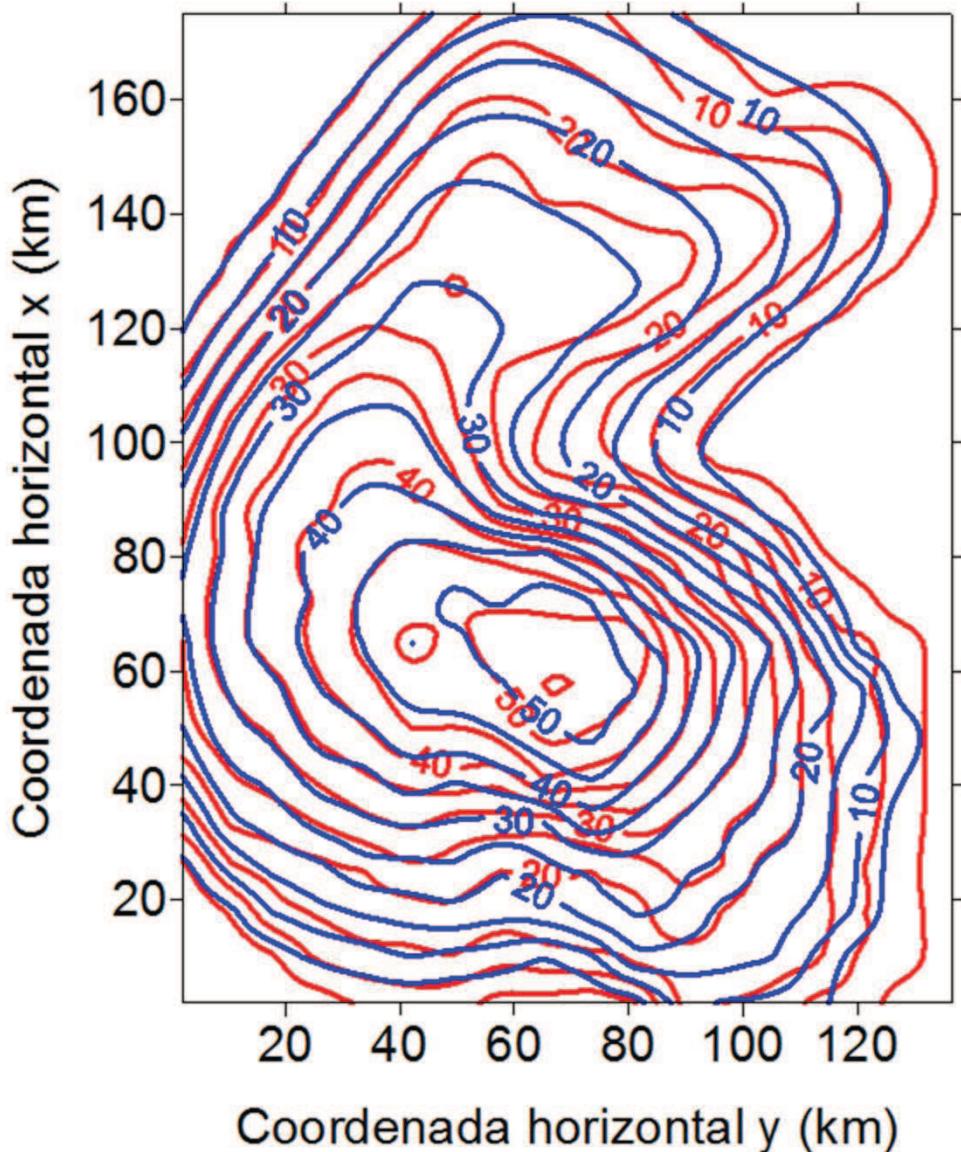
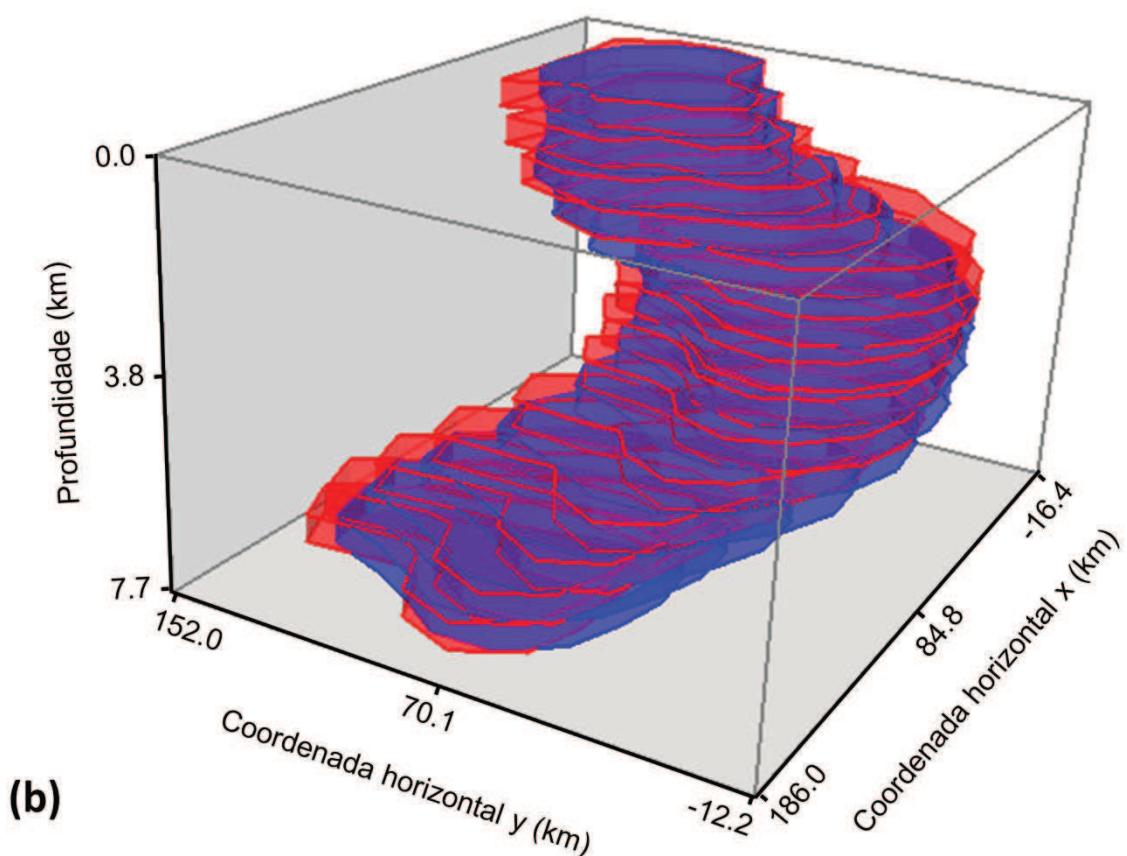
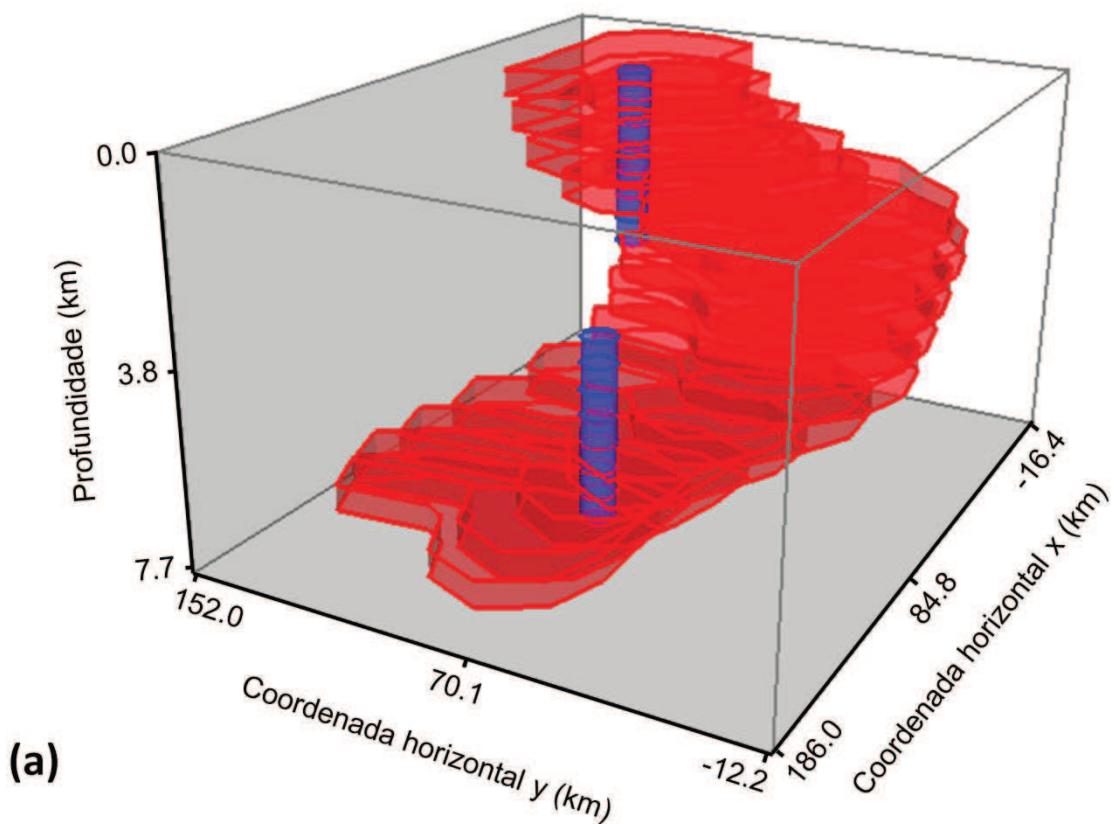
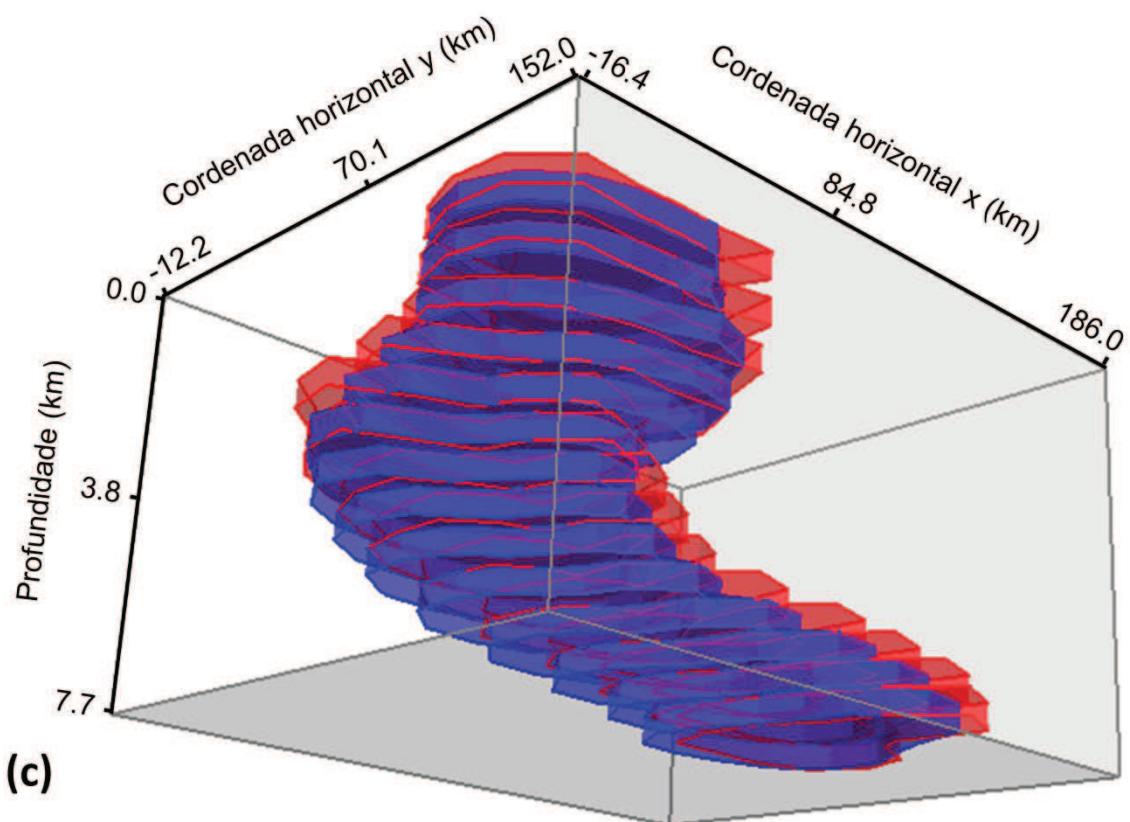
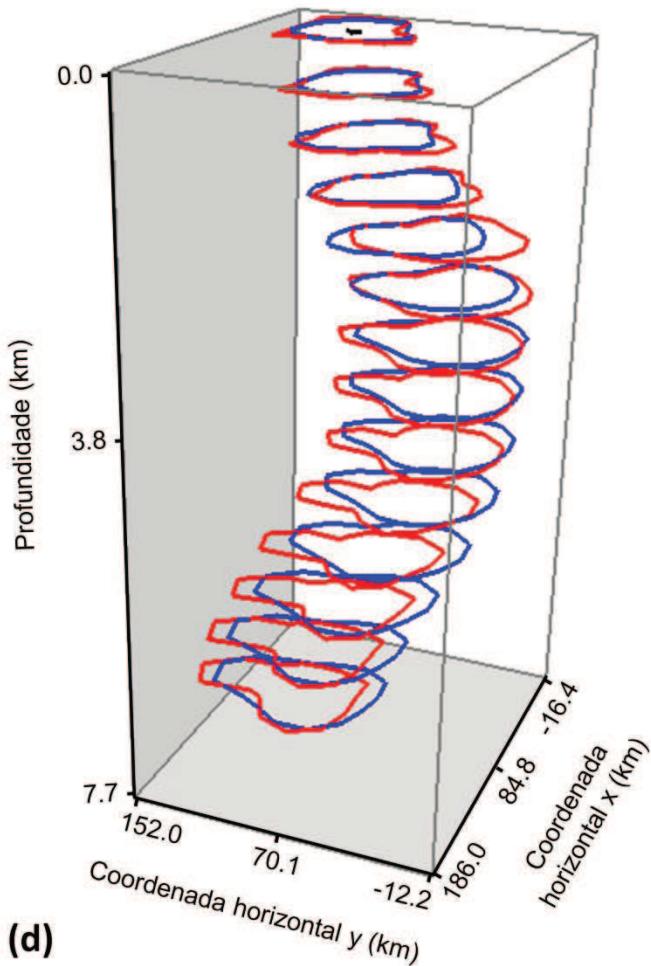


Figura 4.10 Ajuste produzido no teste com o modelo que simula um corpo geológico complexo.

As linhas vermelhas são os dados observados contaminados com ruído e as linhas azuis são os dados preditos pela estimativa obtida na inversão (prismas azuis na Figura 4.11). Os valores estão em mGal.

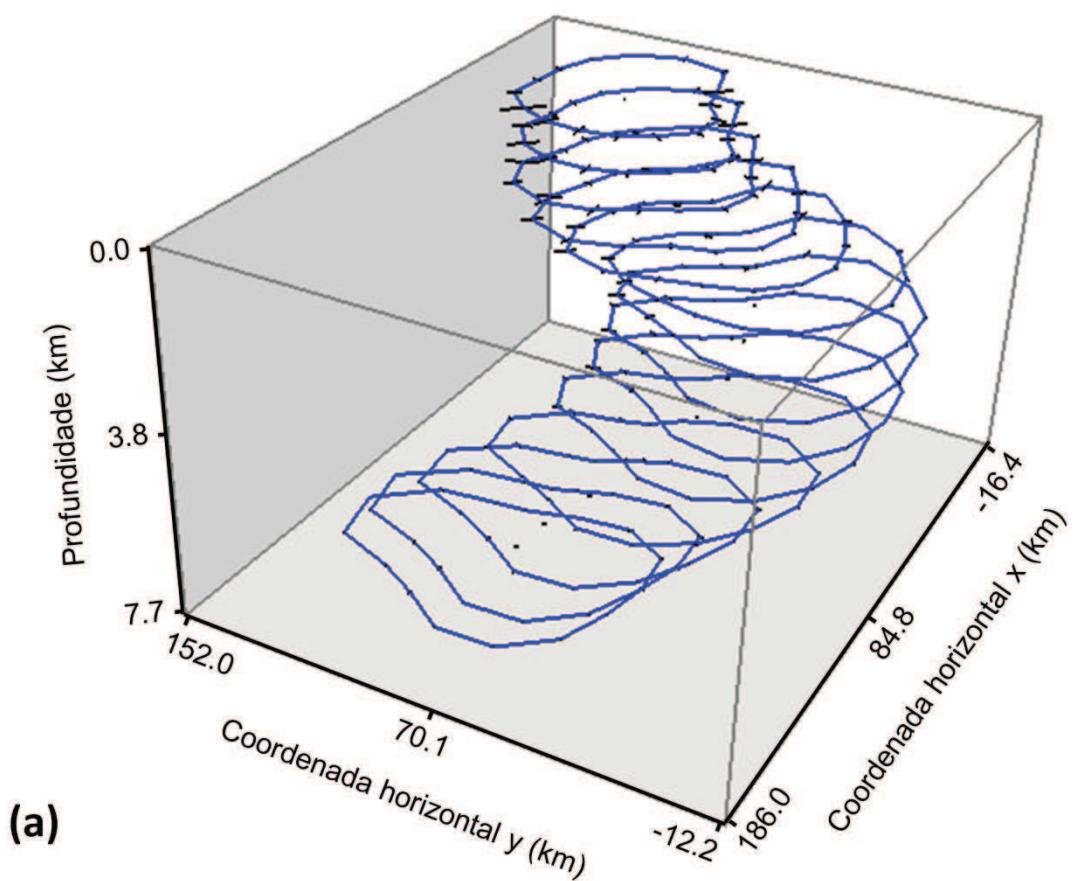


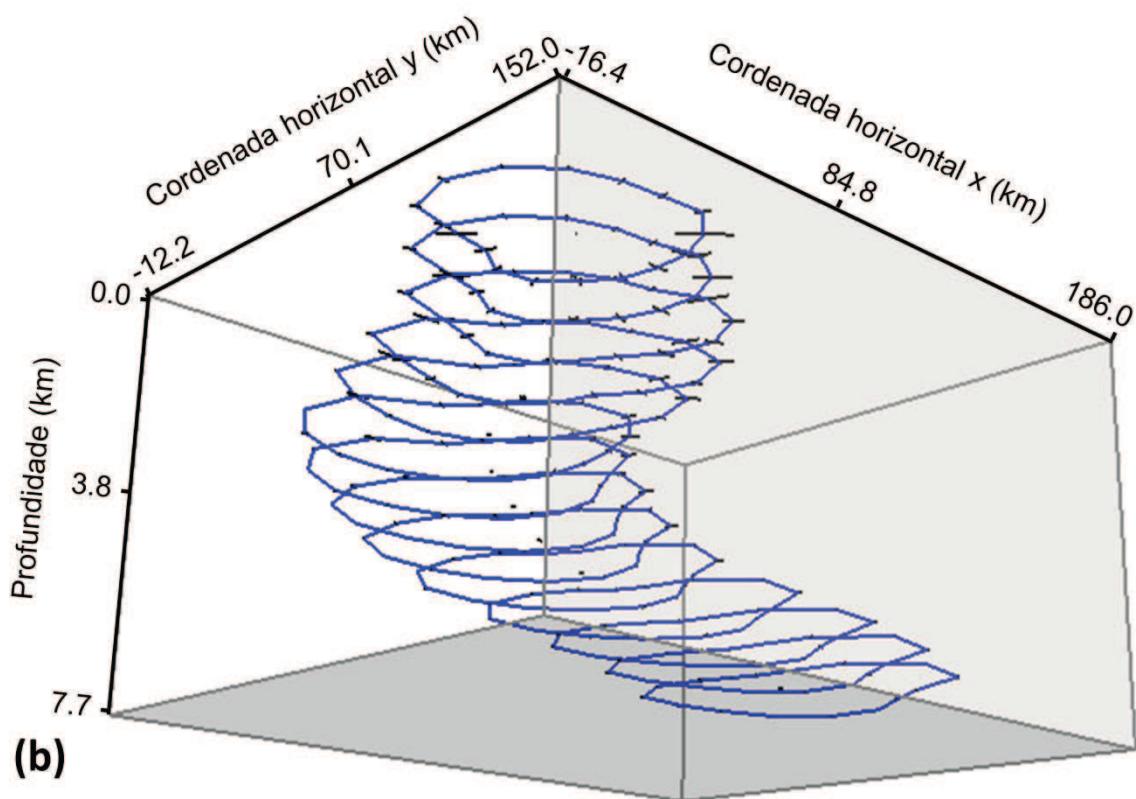




*Figura 4.11 Estimativa obtida no teste com o modelo que simula um corpo geológico complexo.*

*Em (a), os prismas vermelhos representam o corpo verdadeiro e os prismas azuis representam a aproximação inicial, que é formada por duas partes iguais. A primeira é composta pelos primeiros sete prismas mais rasos, todos com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (51,671 \text{ km}, 96,453 \text{ km})$ ,  $k = 1, \dots, 7$ . A segunda parte da aproximação inicial é composta pelos últimos sete prismas mais profundos, do modelo interpretativo todos com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (128,156 \text{ km}, 65,686 \text{ km})$ ,  $k = 8, \dots, 14$ . Todas as distâncias radiais de todos os prismas da aproximação inicial são iguais a 5,0 km. (b) e (c) mostram vistas em perspectiva da estimativa (prismas azuis) e do corpo verdadeiro (prismas vermelhos): (b) visada superior e (c) visada inferior. (d) mostra uma comparação em profundidade entre o contorno do corpo estimado (linhas azuis) e o corpo verdadeiro (linhas vermelhas). Em (d), a cruz preta representa um ponto localizado sobre a parte aflorante do corpo verdadeiro. O corpo estimado tem a profundidade da base igual a  $z_{\max} = 7,0 \pm 0,5 \text{ km}$  (Equação 2.21), inferida com base na curva w x s (Figura 4.9).*





*Figura 4.12 Incerteza dos parâmetros estimados no teste com o modelo que simula um corpo geológico complexo. (a) Visada superior e (b) visada inferior dos contornos das seções horizontais dos prismas que compõem o corpo estimado. A incerteza dos parâmetros (Equação 2.20) está representada pelas barras pretas. Observa-se que a incerteza das distâncias radiais (barras pretas sobre as linhas azuis) é muito pequena e a incerteza das coordenadas horizontais das origens são menores ainda, de tal forma que as barras aparecem como pontos.*

## 5) APLICAÇÃO A DADOS REAIS

Neste capítulo, apresentamos os resultados da aplicação do nosso método na interpretação de dois corpos geológicos distintos. O primeiro é o granito Redenção, localizado no estado do Pará, norte do Brasil, e o outro é o greenstone belt Matsitama, localizado no nordeste de Botsuana, centro-sul da África. Em ambas as aplicações:

- i) Utilizou-se o contraste de densidade verdadeiro entre o corpo e a(s) rocha(s) encaixante(s), com base em dados da literatura.
- ii) Geraram-se as curvas  $w \times s$  observadas por 8 pontos ( $s$  ,  $w$ ), com  $z_{\max}$  variando de 3,0 km a 10,0 km, espaçados de 1,0 km. Esse espaçamento implica que a incerteza em  $z_{\max}$  é igual a 0,5 km.
- iii) Seguindo o procedimento descrito na subseção 2.3, fizemos a análise de estabilidade e o cálculo da incerteza dos parâmetros para cada uma das estimativas (ponto na curva  $w \times s$  observada) obtidas com um valor fixo para a profundidade máxima  $z_{\max}$  do modelo interpretativo. Para tanto, utilizamos  $Q = 30$  amostras diferentes de uma variável pseudo-aleatória com distribuição Gaussiana, média nula e desvio padrão igual 0,5 mGal e 0,8 mGal, respectivamente, para o granito Redenção e para o greenstone belt Matsitama.

## **5.1) GRANITO REDENÇÃO**

### **5.1.1) DESCRIÇÃO DA GEOLOGIA E DOS DADOS GRAVIMÉTRICOS**

O granito Redenção é um corpo anorogênico aflorante, do tipo A, que intrudiu granitóides arqueanos na parte leste do cráton Amazônico (norte do Brasil) durante a era Paleoproterozóica (DALL'AGNOL *et al.*, 2005). Segundo Oliveira *et al.* (2008), a distribuição de densidades nesse corpo é uniforme o suficiente para que se possa presumir uma densidade média de 2,64 g/cm<sup>3</sup>. Segundo esse mesmo autor, é possível considerar que as rochas encaixantes têm densidade de 2,73 g/cm<sup>3</sup> devido à grande predominância de granitóides. Portanto, o contraste de densidade do granito Redenção com as rochas encaixantes pode ser considerado igual a -0,09 g/cm<sup>3</sup>. A Figura 5.1 mostra um mapa geológico do granito Redenção e das áreas adjacentes e a Figura 5.2 mostra o contorno da parte aflorante, a distribuição dos dados gravimétricos e a anomalia Bouguer total. Segundo Oliveira et al. (2008), a área conta com 135 estações gravimétricas espaçadas (cruzes pretas na Figura 5.2) de 1 km e localizadas ao longo de estradas que cortam o granito Redenção e as rochas adjacentes. A anomalia Bouguer residual (Figura 5.3), que representa os dados observados, foram obtidos após uma separação regional-residual feita por um ajuste polinomial robusto de ordem 1 (SILVA DIAS, F. J. S., 2007; SILVA DIAS, F. J. S.; BARBOSA, V. C. F. e SILVA, J. B. C., 2007).

### 5.1.2) VARIÁVEIS DEFINIDAS A PRIORI

Em todas as estimativas feitas nesta aplicação, o modelo interpretativo possui contraste de densidade  $\rho = -0,09 \text{ g/cm}^3$ , profundidade do topo  $z_0 = 0,0 \text{ km}$ , quantidade de prismas  $L = 10$  e quantidade de vértices  $M = 30$  para o polígono que descreve a seção horizontal de todos os prismas. A aproximação inicial utilizada em todas as estimativas possui todos os prismas iguais, com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (9101,136 \text{ km}, 604,033 \text{ km})$  e todas as distâncias radiais iguais a  $r_j^k = 2,0 \text{ km}$  ( $k = 1, \dots, L$  e  $j = 1, \dots, M$ ). Os vínculos utilizados em todas as estimativas são definidos por:

- i) Parâmetro de regularização (Equação 2.6a):  $\mu = 1,0$ .
- ii) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes ao mesmo prisma (Equação 2.7):  $\alpha_1 = 0,0012$ .
- iii) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes a prismas adjacentes (Equação 2.8):  $\alpha_2 = 0,0008$ .
- iv) Vínculo do afloramento (Equações 2.9 e 2.10):  $\alpha_3 = 0,5$ ,  $\alpha_4 = 0,0$ ,  $x_0^0 = 9101,136 \text{ km}$ ,  $y_0^0 = 604,033 \text{ km}$  e  $r_j^0$  ( $j = 1, \dots, M$ , todos os vértices do prisma mais raso) definidos de acordo com o contorno da parte aflorante do modelo (linha e cruz pretas na Figura 5.3).
- v) Vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes (Equação 2.11):  $\alpha_5 = 0,3$ .
- vi) Vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais (Equação 2.12):  $\alpha_6 = 0,00008$ .

- vii) Vínculo de desigualdade (Equação 2.6b):  $x_{0\min} = 9090,0$  km,  $x_{0\max} = 9115,0$  km,  $y_{0\min} = 590,0$  km,  $y_{0\max} = 610,0$  km,  $r_{\min} = 0,0$  km e  $r_{\max} = 25,0$  km. Estes valores foram estabelecidos com base na extensão horizontal da anomalia Bouguer residual (Figura 5.3).

Tal como no teste sintético que simula um corpo granítico (Subseção 4.1), os dados observados (Figura 5.3) indicam que o corpo verdadeiro não seja inclinado, uma vez que os gradientes horizontais apresentam certa simetria radial. Isso justifica a utilização de uma aproximação inicial com formato similar ao de um cilindro e de vínculos que penalizam deslocamentos relativos entre prismas adjacentes e incentivam correções nas distâncias radiais. O vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais (Equação 2.12) foi utilizado apenas para estabilizar a estimativa.

### **5.1.3) RESULTADOS**

A Figura 5.4 mostra a curva  $w \times s$  observada produzida nesta aplicação. Observa-se um ponto com  $s$  mínimo muito bem definido, sugerindo que os dados observados (Figura 5.3) têm resolução suficiente para determinar a profundidade deste corpo granítico sendo esta estimada em  $7,0 \pm 0,5$  km. As Figuras 5.5, 5.6 e 5.7 mostram os dados gravimétricos ajustados, a aproximação inicial, a estimativa e a incerteza nos parâmetros, respectivamente. A Figura 5.5 revela que os dados preditos (linhas azuis) reproduzem os dados observados (linhas vermelhas) dentro da precisão experimental. A Figura 5.6 revela a estimativa da geometria do granito Redenção (prismas amarelos), que representa um plutônio com formato aproximadamente cônico truncado, com topo largo e base achata e a Figura 5.7 mostra que a incerteza na estimativa dos parâmetros é muito pequena, indicando que a estimativa é estável. Estes resultados corroboram interpretações gravimétricas anteriores, feitas com

métodos diferentes do que foi utilizado neste trabalho (SILVA DIAS, F. J. S., 2007; SILVA DIAS, F. J. S.; BARBOSA, V. C. F. e SILVA, J. B. C., 2007; OLIVEIRA *et al.*, 2008).

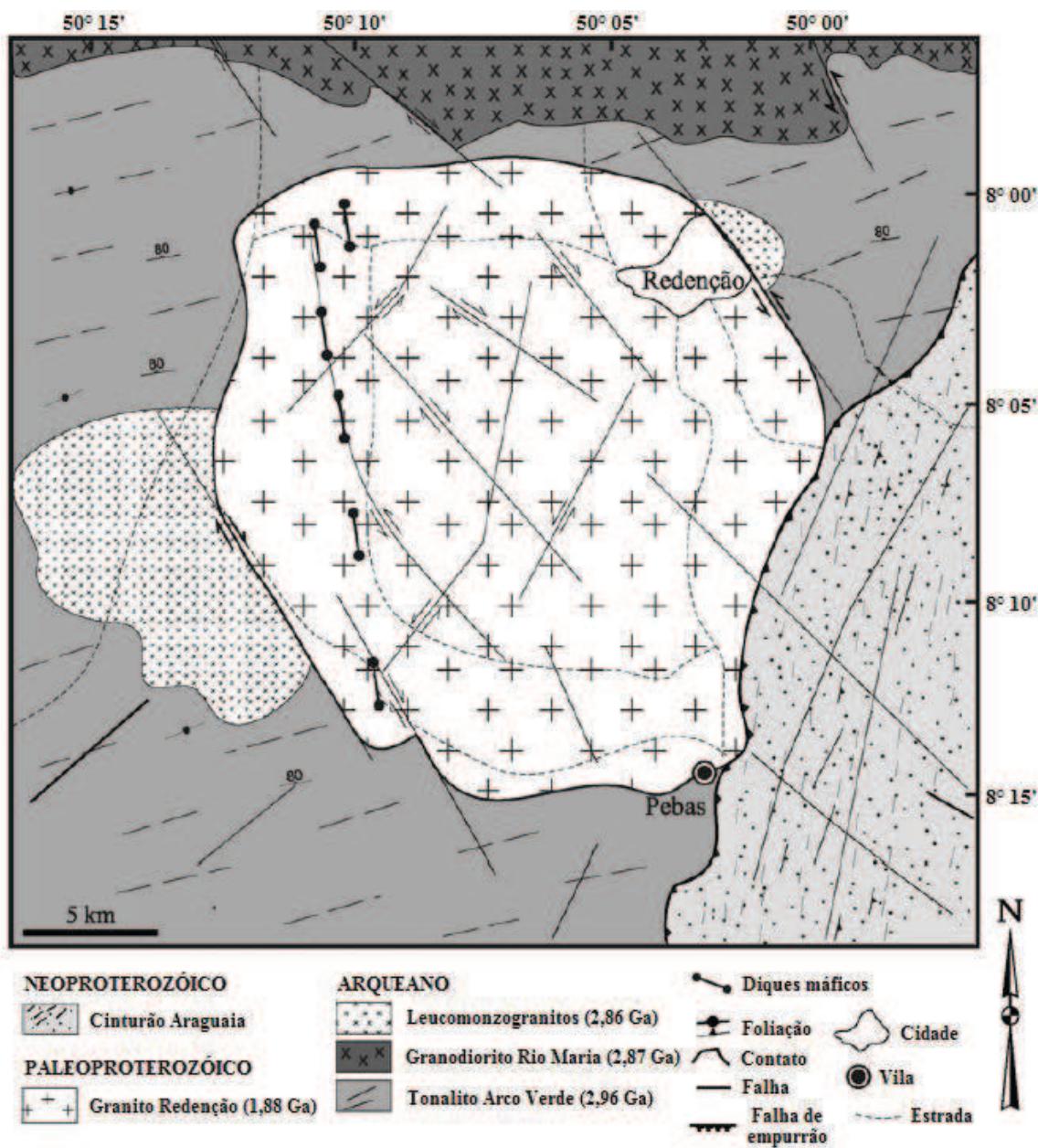
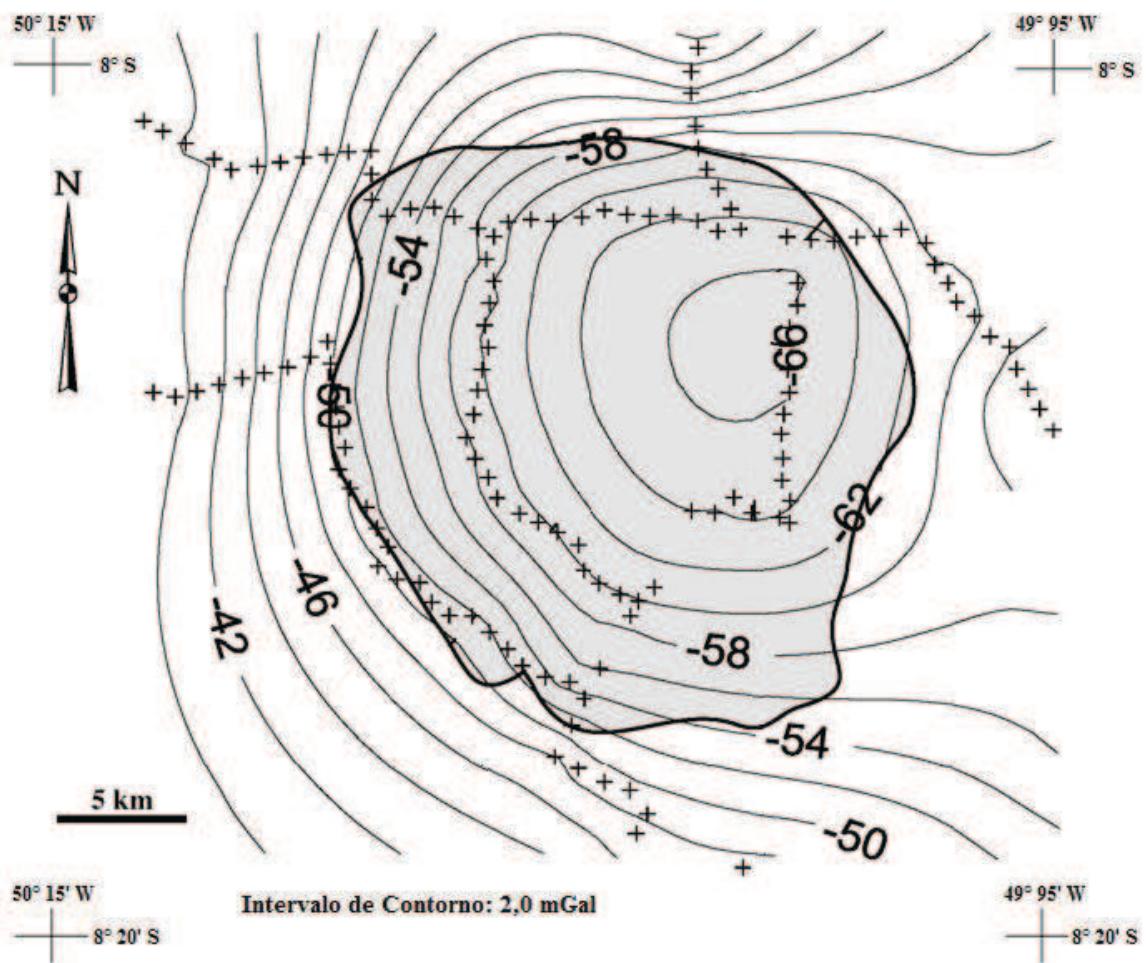
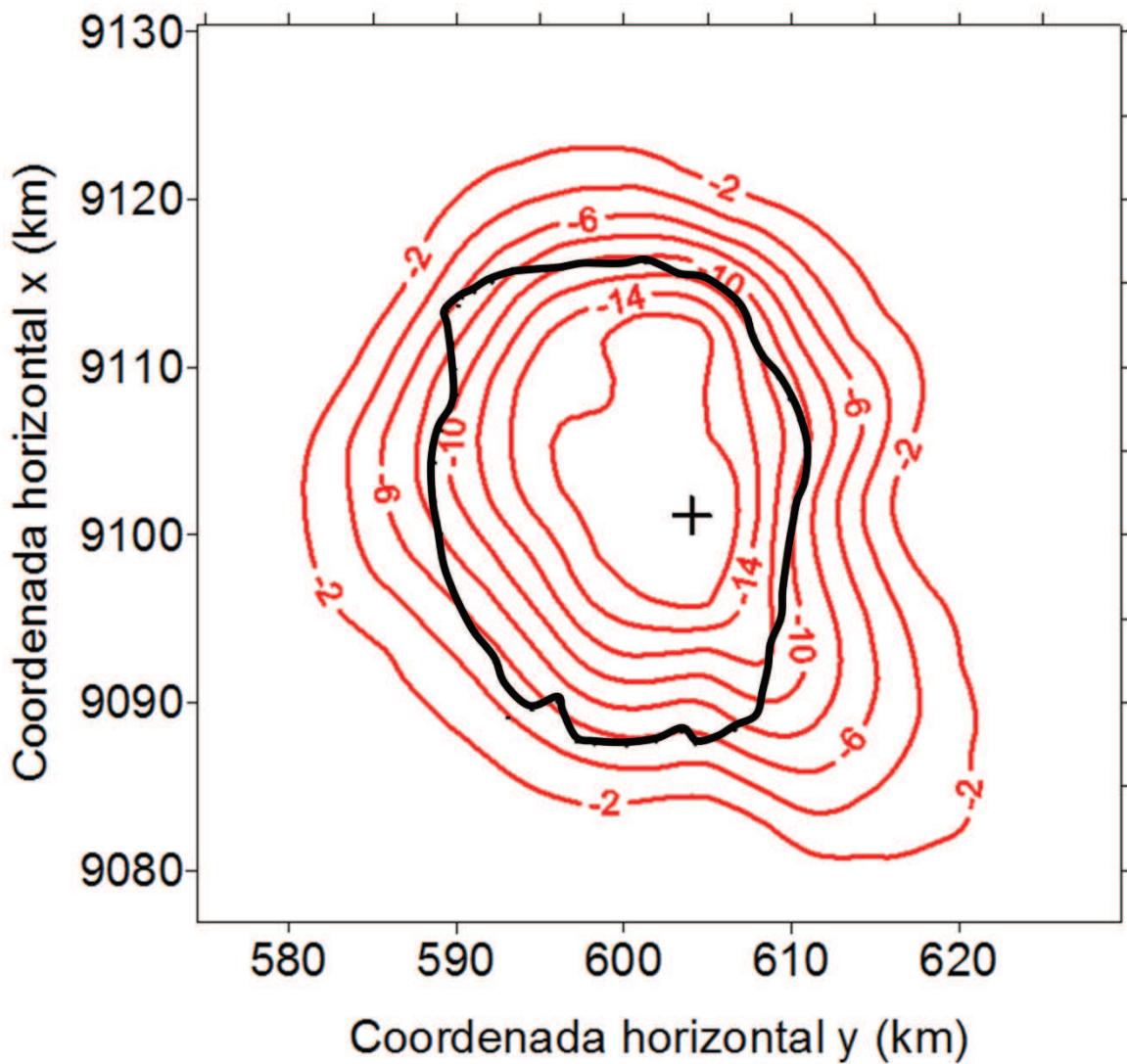


Figura 5.1 Mapa geológico do granito Redenção e das áreas adjacentes (Modificado de Oliveira *et al.*, 2008).



*Figura 5.2 Mapa de contorno da anomalia Bouguer observada, disposição das estações gravimétricas (cruzes pretas) e a parte aflorante do granito Redenção (área em cinza). (Modificado de Oliveira et al., 2008).*



*Figura 5.3 Anomalia Bouguer residual (linhas vermelhas). Os valores estão em mGal e a linha preta representa o contorno da parte aflorante do granito Redenção. A cruz preta representa a origem arbitrária.*

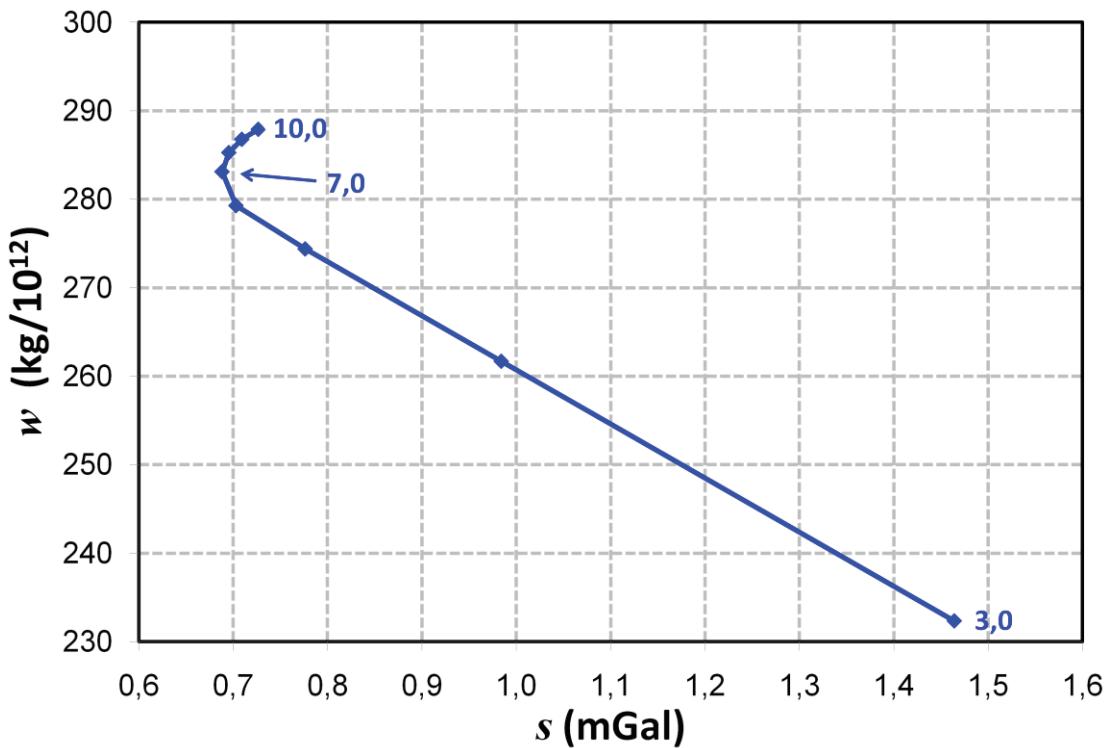
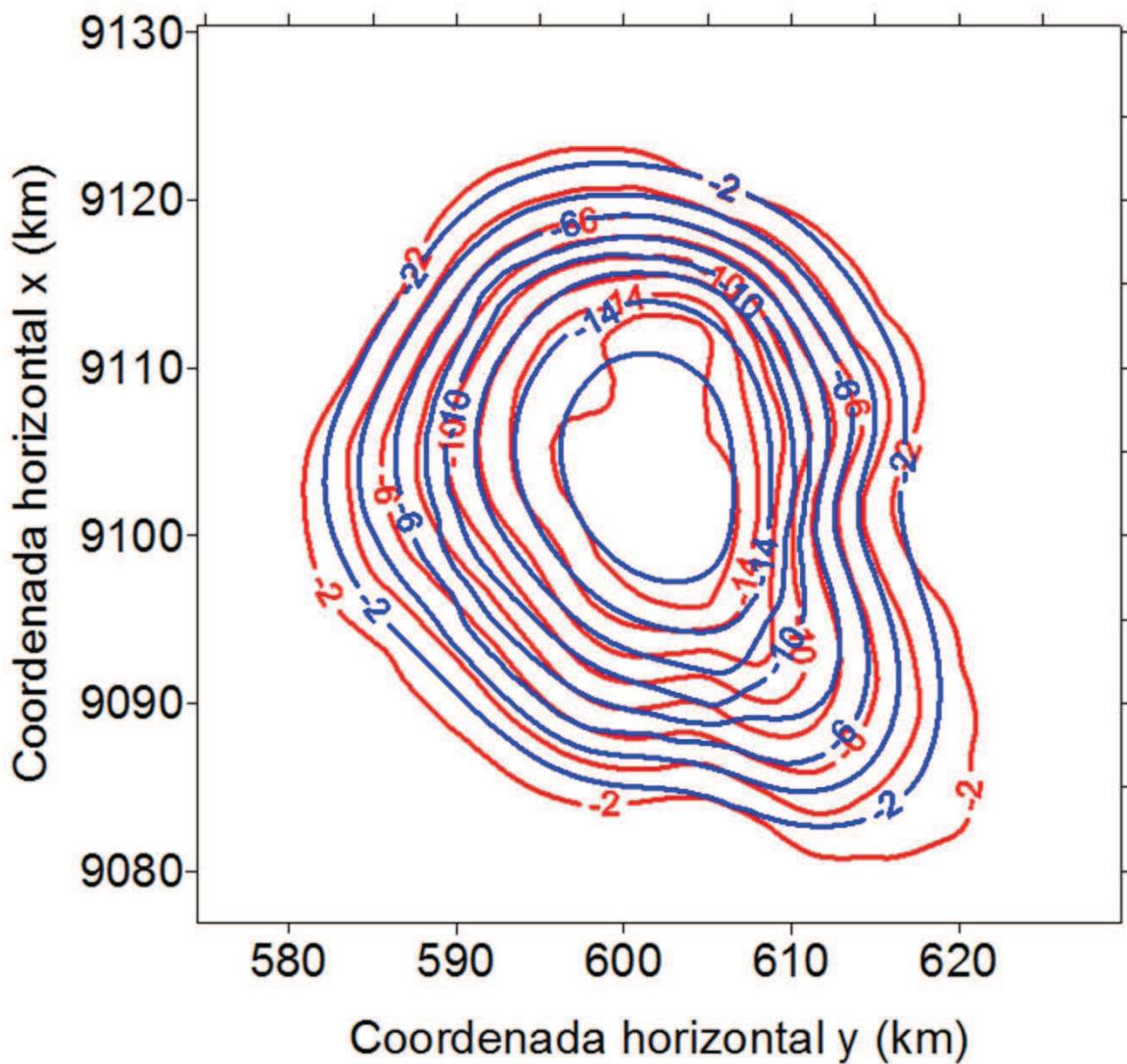
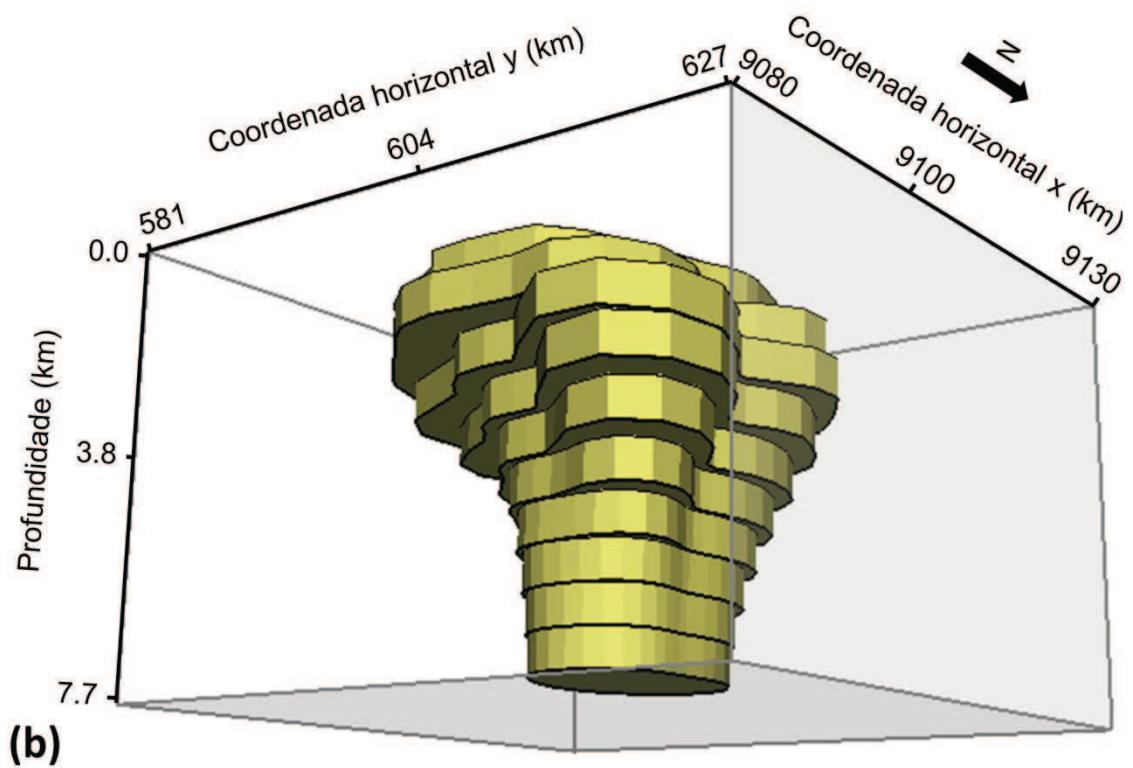
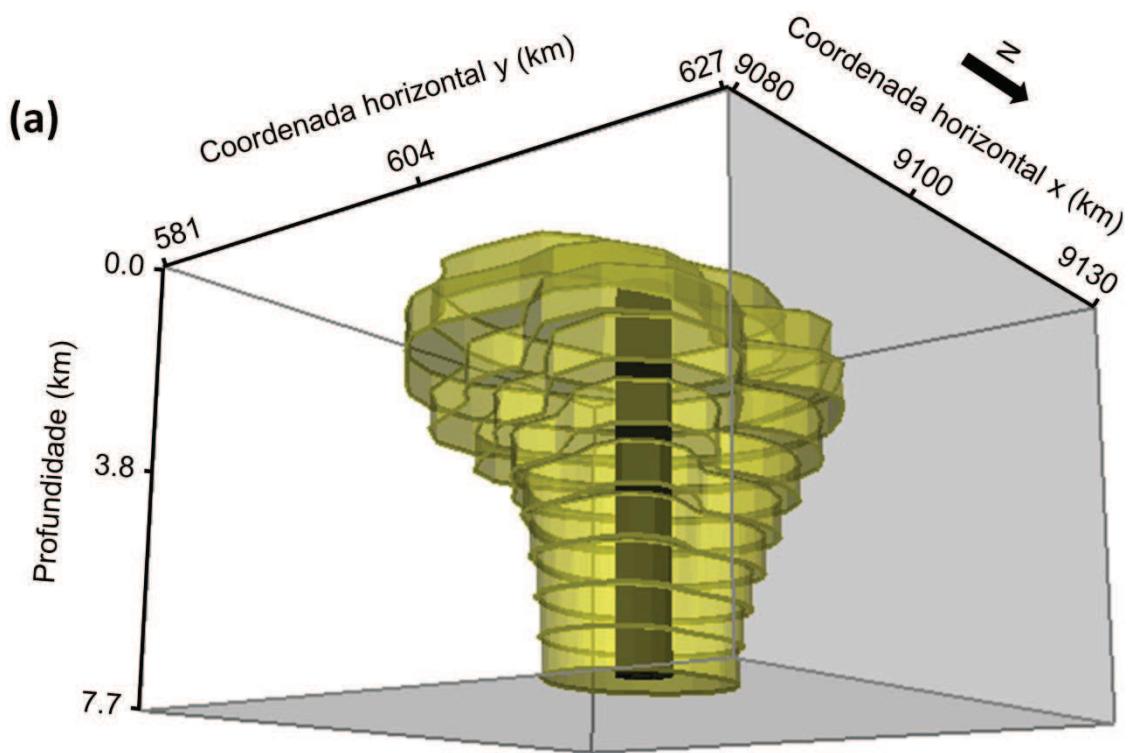


Figura 5.4 Curva  $w \times s$  produzida na interpretação dos dados gravimétricos observados sobre o granito Redenção. Os pontos são os diferentes valores da máxima profundidade ( $z_{\max}$ ) atribuída aos diferentes modelos interpretativos. Os números ao lado da curva indicam o valor de  $z_{\max}$  (em km) para alguns pontos  $w \times s$ .





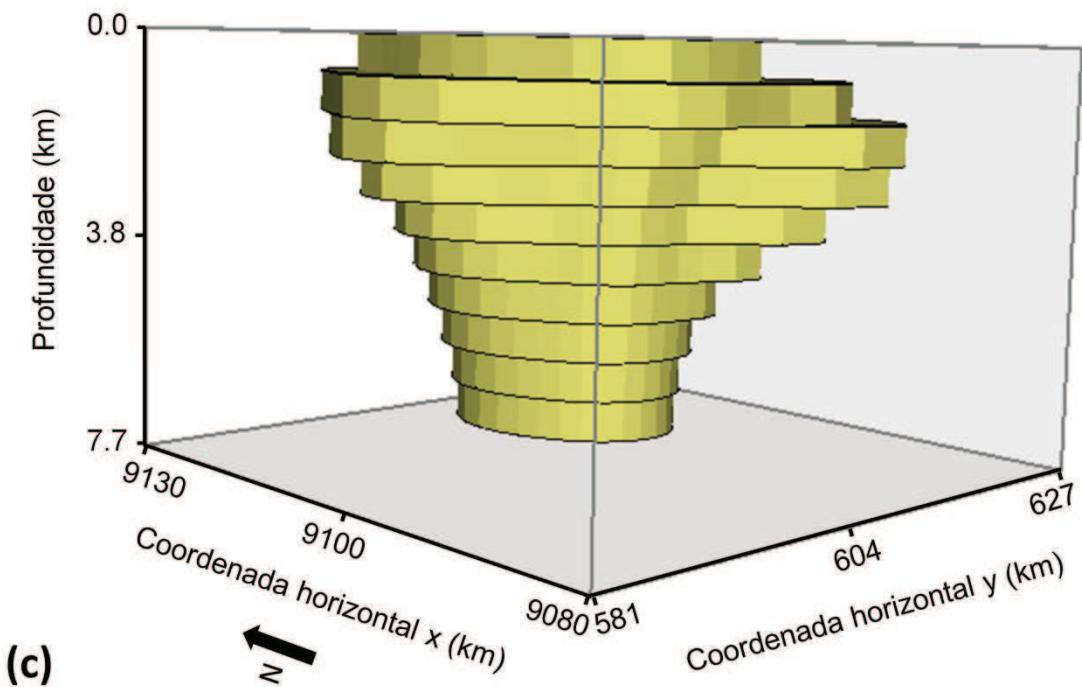
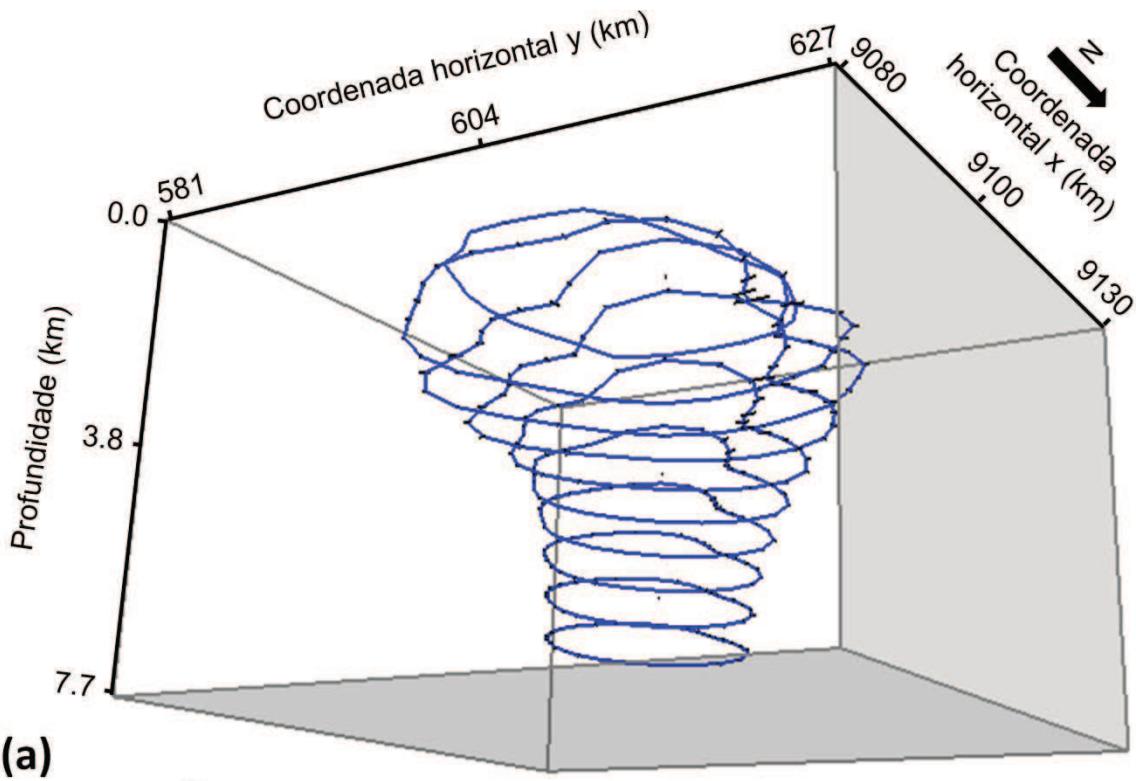


Figura 5.6 Estimativa (prismas amarelos) obtida na interpretação dos dados gravimétricos observados sobre o granito Redenção. Em (a), os prismas amarelos representam o corpo estimado e os prismas pretos representam a aproximação inicial. A aproximação inicial utilizada possui todos os prismas com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (9101,136 \text{ km}, 604,033 \text{ km})$  e todas as distâncias radiais iguais a  $r_j^k = 2,0 \text{ km}$  ( $k = 1, \dots, L$  e  $j = 1, \dots, M$ ). (b) e (c) mostram vistas em perspectiva da estimativa (prismas amarelos): (b) visada inferior, (c) visada lateral. O corpo estimado tem a profundidade da base igual a  $z_{\max} = 7,0 \pm 0,5 \text{ km}$  (Equação 2.21), inferida com base na curva  $w \times s$  (Figura 5.4.).



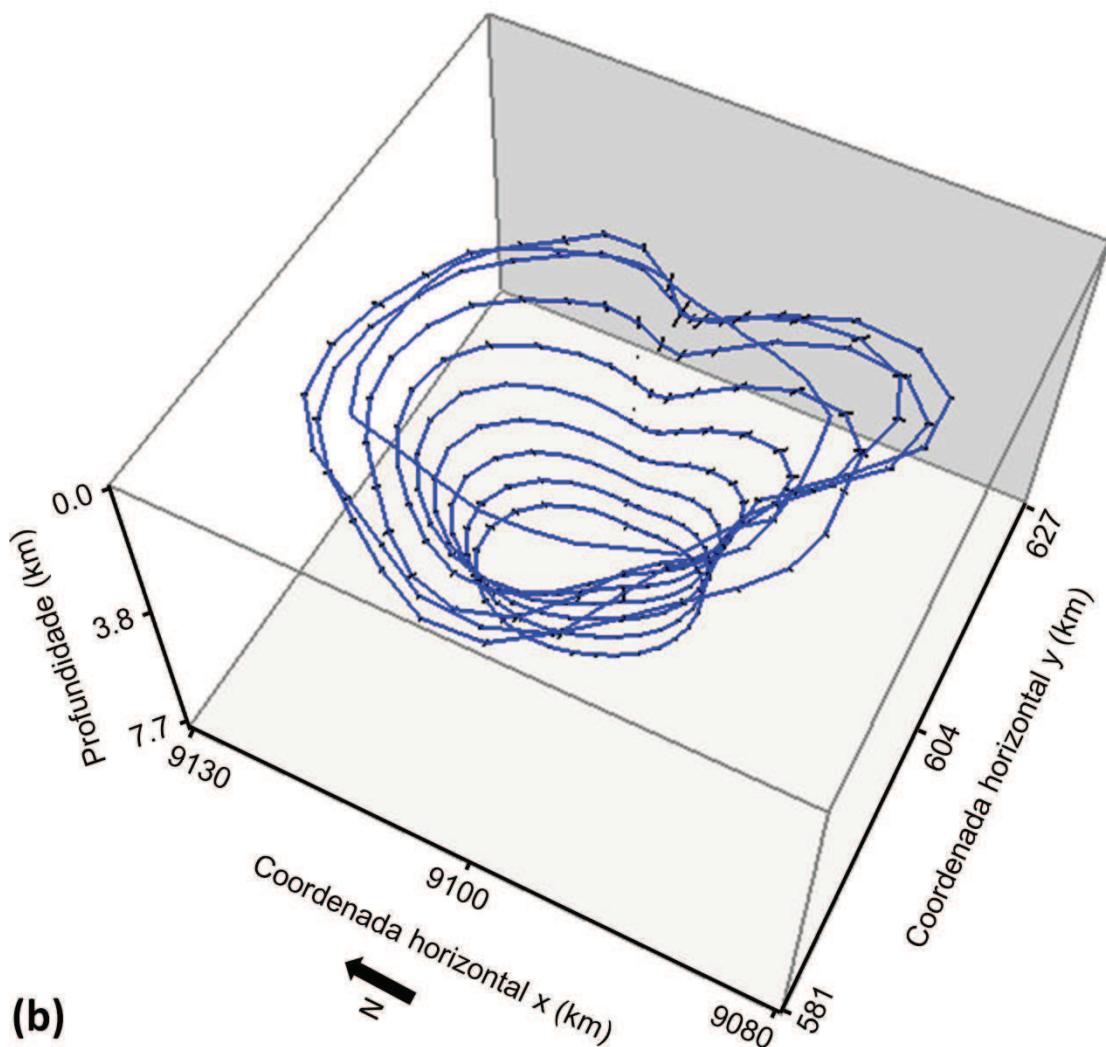


Figura 5.7 Incerteza dos parâmetros estimados na interpretação dos dados gravimétricos observados sobre o granito Redenção. (a) Visada superior e (b) visada inferior dos contornos das seções horizontais dos prismas que compõem o corpo estimado. A incerteza dos parâmetros (Equação 2.20) está representada pelas barras pretas. Observa-se que a incerteza das distâncias radiais (barras pretas sobre as linhas azuis) é muito pequena e a incerteza das coordenadas horizontais das origens são menores ainda, de tal forma que as barras aparecem como pontos.

## **5.2) GREENSTONE BELT MATSITAMA**

### **5.2.1) DESCRIÇÃO DA GEOLOGIA E DOS DADOS GRAVIMÉTRICOS**

O greenstone belt Matsitama é um corpo geológico extenso, situado no nordeste de Botsuana, centro-sul da África (Figura 5.8). Observa-se que este corpo é progressivamente encoberto em direção a oeste pelos sedimentos das coberturas sedimentares de Kalahari e Karoo. Segundo Reeves (1985), as feições gravimétricas indicam que o corpo se estende para noroeste e faz curvas para norte e nordeste (circunferências pretas representados na Figura 5.8). Segundo esse autor, essa interpretação é confirmada por um poço raso localizado na cobertura Karoo, que encontrou rochas ultramáficas precambrianas sob os sedimentos. A Figura 5.9 mostra a anomalia Bouguer residual (dados observados) e a interpretação de REEVES (1985) sobre a projeção horizontal da direção do greenstone belt Matsitama (circunferências pretas).

### **5.2.2) VARIÁVEIS DEFINIDAS A PRIORI**

Em todas as estimativas feitas nesta aplicação, o modelo interpretativo possui contraste de densidade  $\rho = 0,4 \text{ g/cm}^3$  (SILVA, J. B. C. et al., 2007), profundidade do topo  $z_0 = 0,0 \text{ km}$ , quantidade de prismas  $L = 14$  e quantidade de vértices  $M = 16$  para o polígono que descreve a seção horizontal de todos os prismas. A aproximação inicial utilizada em todas as estimativas é formada por duas partes similares a cilindros. A primeira é composta pelos primeiros sete prismas (mais rasos) do modelo interpretativo, todos com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (51,671 \text{ km},$

96,453 km),  $k = 1, \dots, 7$ . A segunda parte da aproximação inicial é composta pelos últimos sete prismas (mais profundos) do modelo interpretativo, todos com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (128,156 \text{ km}, 65,686 \text{ km})$ ,  $k = 8, \dots, 14$ . Todas as distâncias radiais de todos os prismas são iguais a 5,0 km. Os vínculos utilizados em todas as estimativas são definidos por:

- i) Parâmetro de regularização (Equação 2.6a):  $\mu = 1,0$ .
- ii) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes ao mesmo prisma (Equação 2.7):  $\alpha_1 = 0,0001$ .
- iii) Vínculo de suavidade nas distâncias radiais adjacentes pertencentes a prismas adjacentes (Equação 2.8):  $\alpha_2 = 0,001$ .
- iv) Vínculo do afloramento (Equações 2.9 e 2.10):  $\alpha_3 = 0,0$ ,  $\alpha_4 = 0,1$ ,  $x_0^0 = 38,420 \text{ km}$  e  $y_0^0 = 98,121 \text{ km}$  (cruz preta na Figura 5.9).
- v) Vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes (Equação 2.11):  $\alpha_5 = 0,01$ .
- vi) Vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais (Equação 2.12):  $\alpha_6 = 0,00005$ .
- vii) Vínculo de desigualdade (Equação 2.6b):  $x_{0 \min} = 20,0 \text{ km}$ ,  $x_{0 \max} = 160,0 \text{ km}$ ,  $y_{0 \min} = 10,0 \text{ km}$ ,  $y_{0 \max} = 130,0 \text{ km}$ ,  $r_{\min} = 0,0 \text{ km}$  e  $r_{\max} = 50,0 \text{ km}$ . Estes valores foram estabelecidos com base na extensão horizontal da anomalia Bouguer residual (Figura 5.9).

Tal como no teste sintético que simula um corpo complexo (Subseção 4.2), os dados observados (Figura 5.9) sugerem que o corpo verdadeiro seja inclinado, formando um arco que sai da parte aflorante em direção a noroeste, onde os gradientes horizontais são maiores, e sofre uma deflexão em direção a nordeste, onde os gradientes horizontais são menores. Essa característica justifica a utilização de

uma aproximação inicial formada por duas partes similares a cilindros localizados em diferentes profundidades e de uma combinação de vínculos que penalizam correções nas distâncias radiais e incentivam deslocamentos relativos entre prismas adjacentes. O vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais (Equação 2.12) foi utilizado apenas para estabilizar a estimativa.

### 5.2.3) RESULTADOS

A Figura 5.10 mostra a curva  $w \times s$  observada produzida nesta aplicação. Observa-se um ponto com  $s$  mínimo muito bem definido, sugerindo que os dados observados (Figura 5.9) têm resolução suficiente para determinar a profundidade deste corpo granítico, sendo esta estimada em  $8,0 \pm 0,5$  km. As Figuras 5.11, 5.12 e 5.13 mostram os dados gravimétricos ajustados, a aproximação inicial, a estimativa e sua incerteza, respectivamente. Essas Figuras revelam que os dados preditos (linhas azuis na Figura 5.11) ajustam os dados observados (linhas vermelhas na Figura 5.11) dentro da precisão experimental, que a estimativa (prismas amarelos na Figura 5.12) possui inclinação variando em profundidade e que a incerteza nos parâmetros é pequena (Figura 5.13), mostrando que a estimativa é estável. Esses resultados concordam com a hipótese de Reeves (1985), que considera o corpo inclinado, estendendo-se para noroeste e fazendo uma curva para norte e depois para nordeste (circunferências pretas na Figura 5.9).

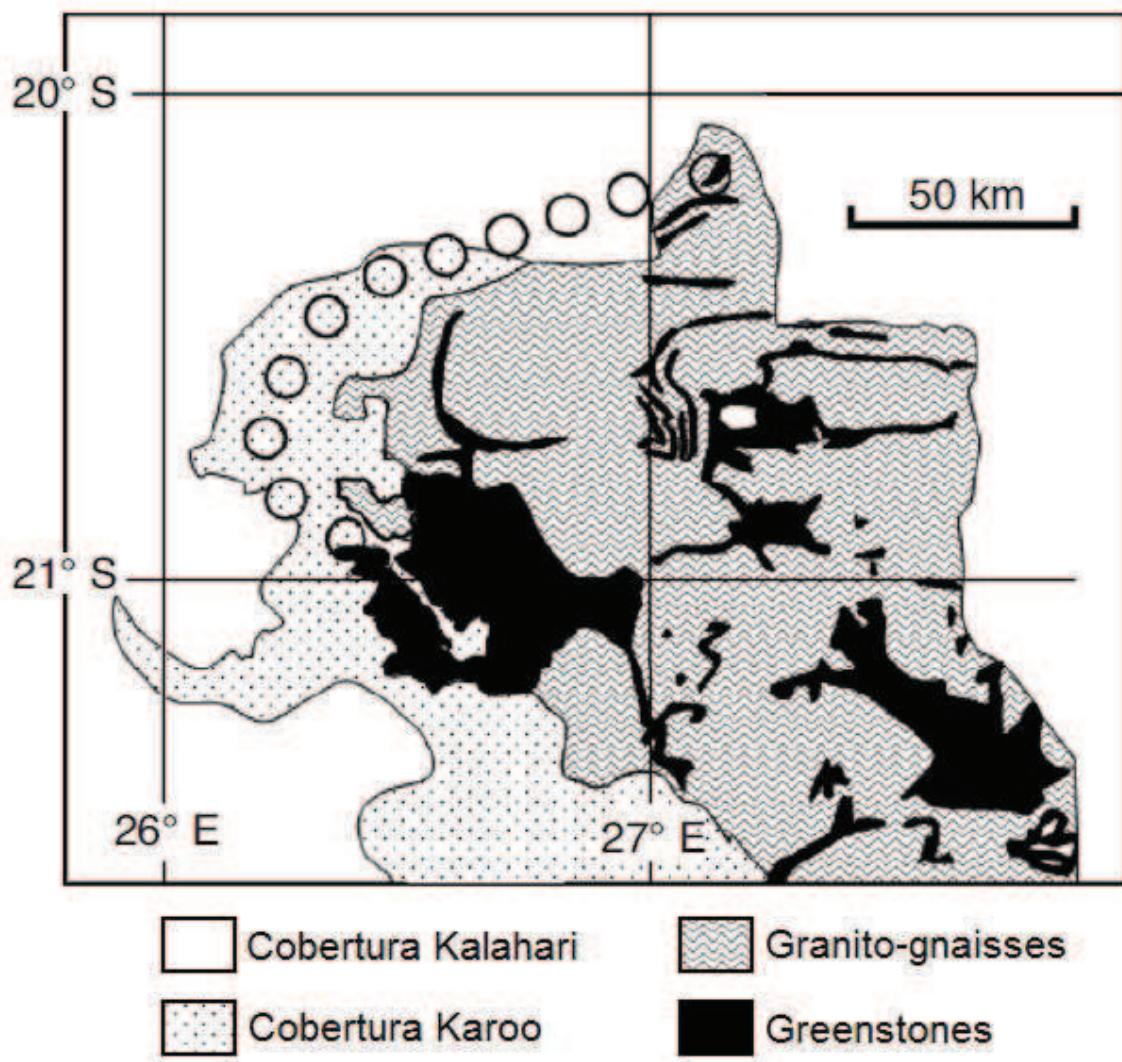
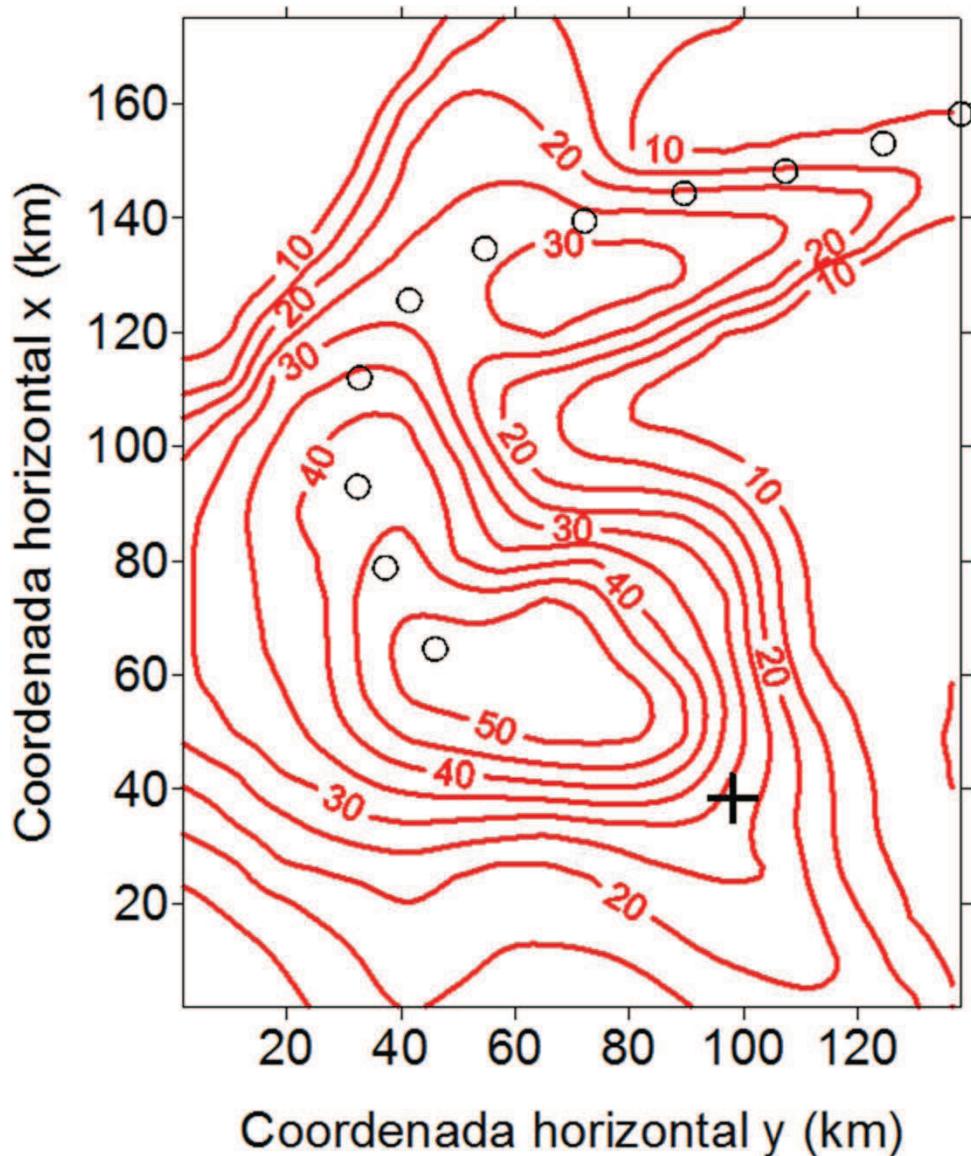


Figura 5.8 Mapa geológico do greenstone belt Matsitama e das áreas adjacentes. O greenstone belt Matsitama é o que está mais a oeste e a geometria deste está representada pelas circunferências pretas, segundo Reeves (1985).



*Figura 5.9 Anomalia Bouguer residual (linhas vermelhas). Os valores estão em mGal e as circunferências pretas representam a projeção na horizontal da direção do greenstone belt Matsitama, segundo Reeves (1985). A cruz preta é a localização de um ponto sobre a parte aflorante do corpo.*

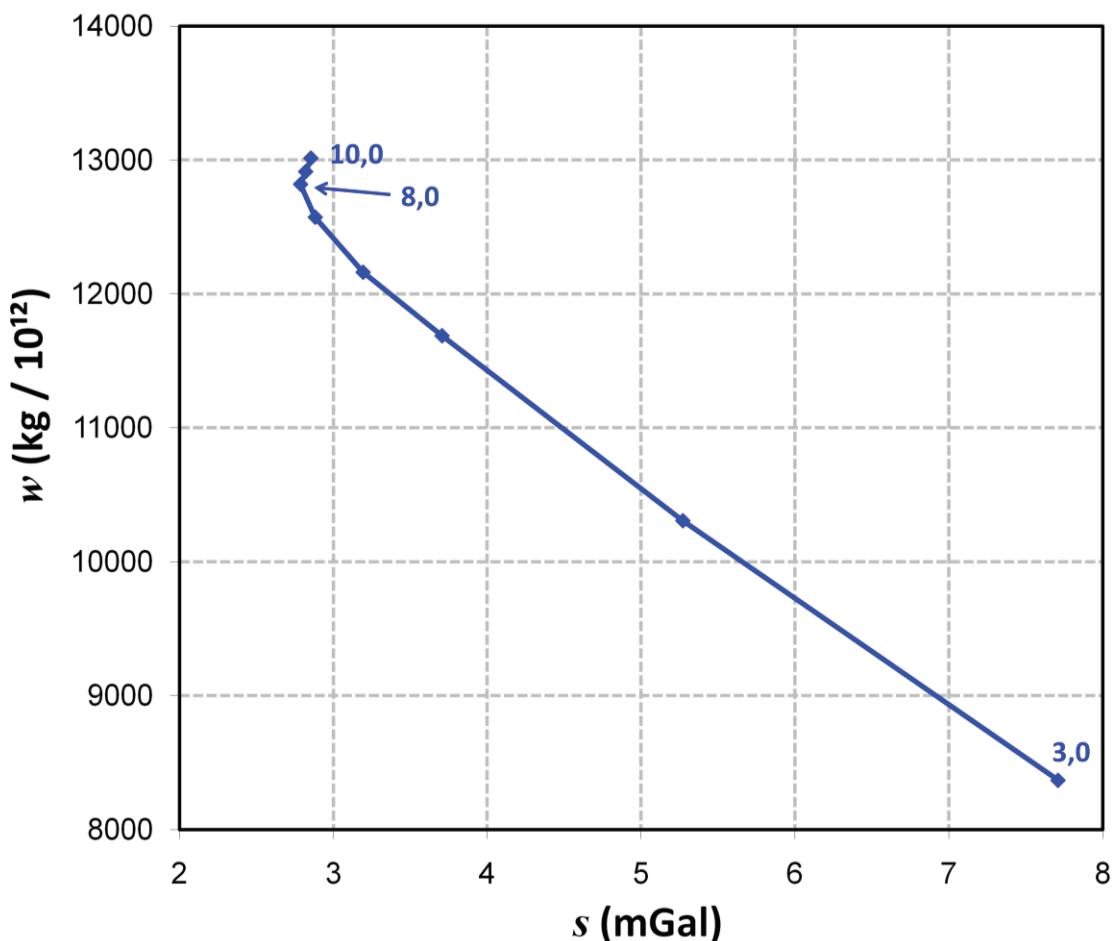


Figura 5.10 Curva  $w$  x  $s$  produzida na interpretação dos dados gravimétricos observados sobre o greentone belt Matsitama. Os pontos são os diferentes valores da máxima profundidade ( $z_{\max}$ ) atribuída aos diferentes modelos interpretativos. Os números ao lado da curva indicam o valor de  $z_{\max}$  (em km) para alguns pontos  $w$  x  $s$ .

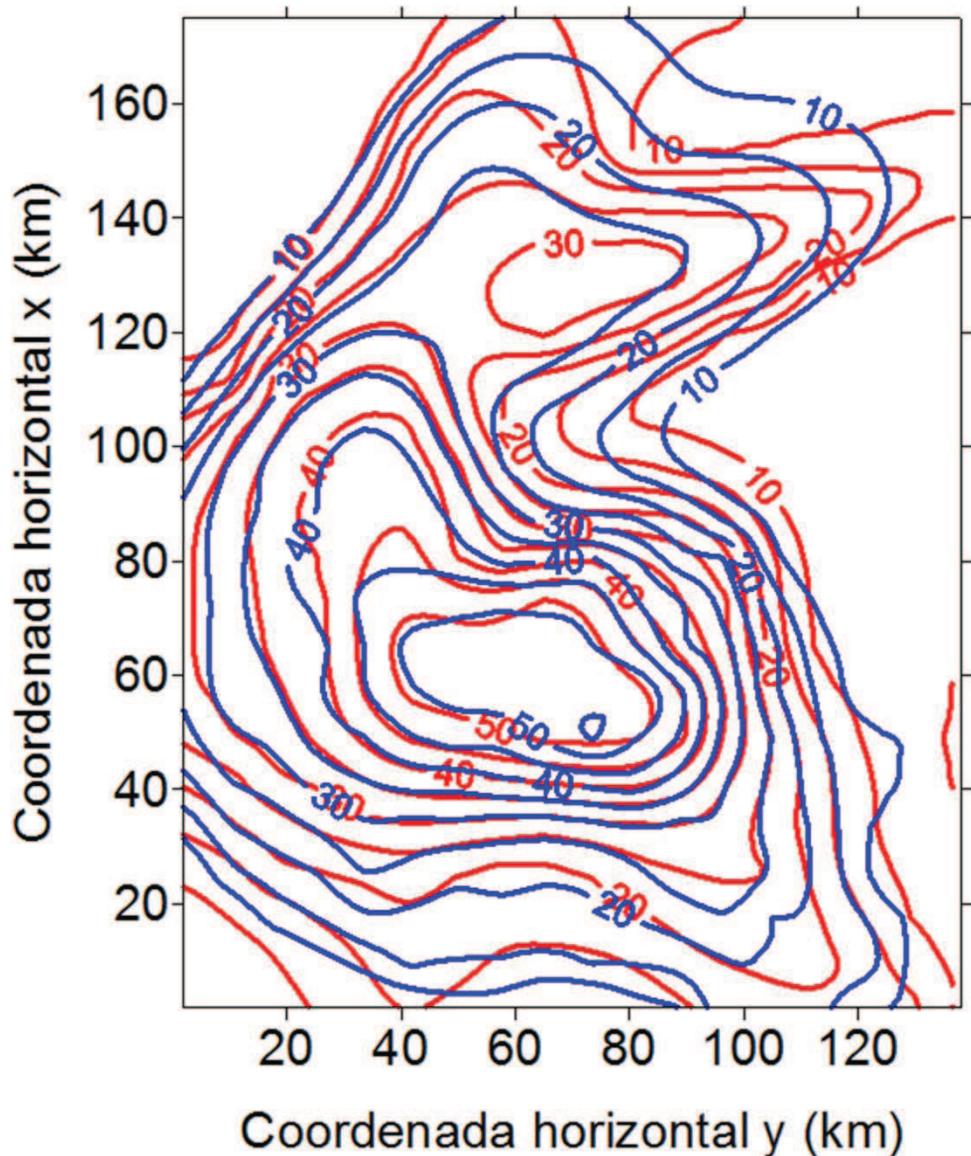
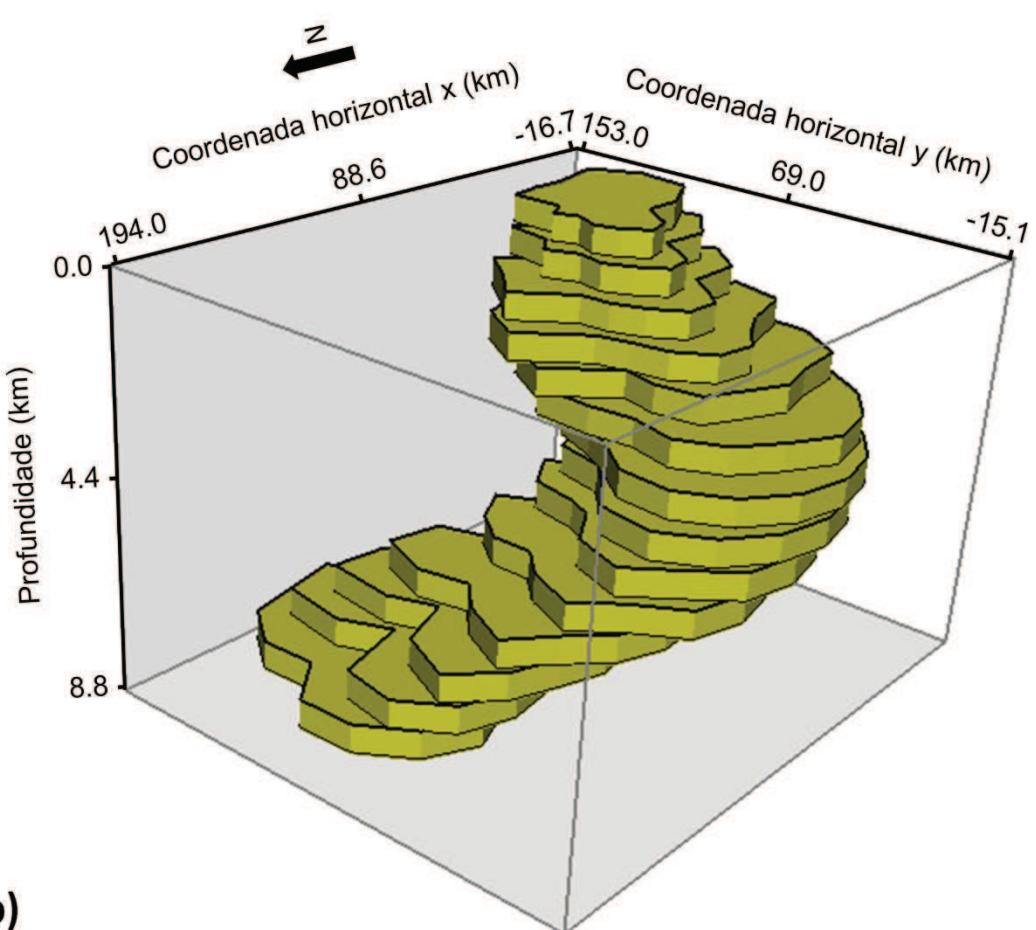
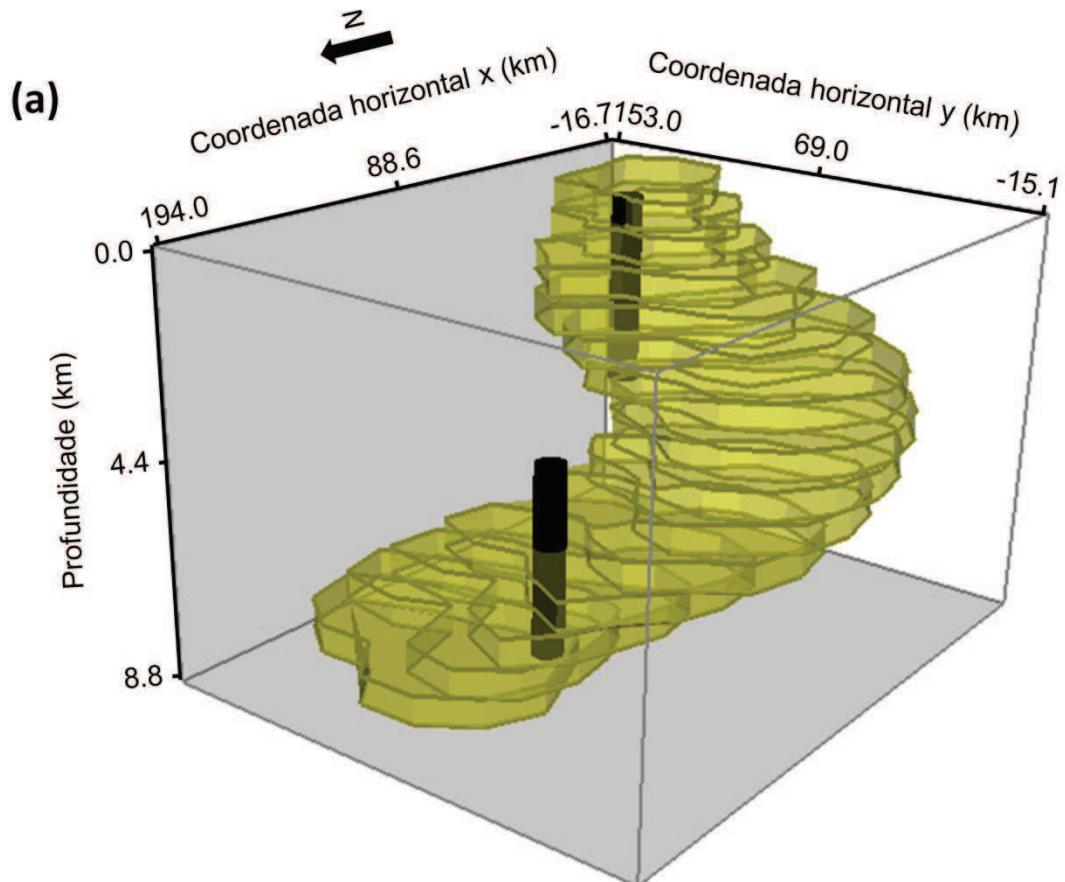
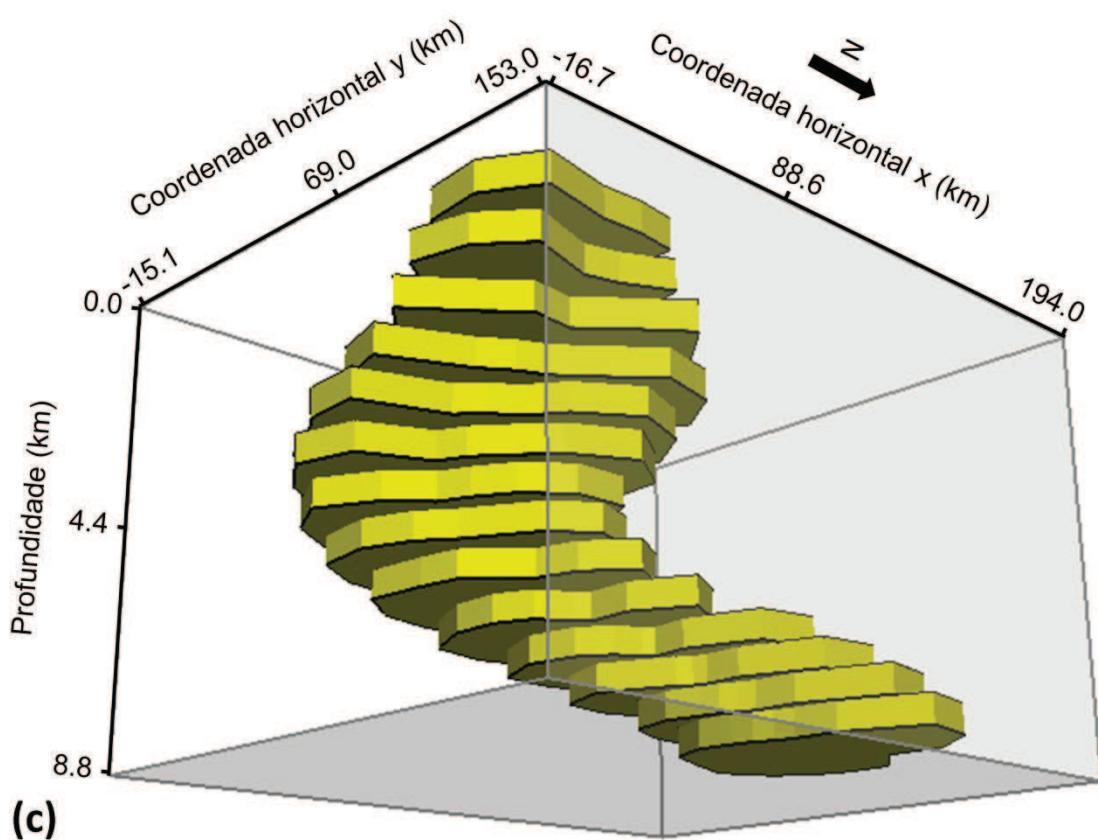
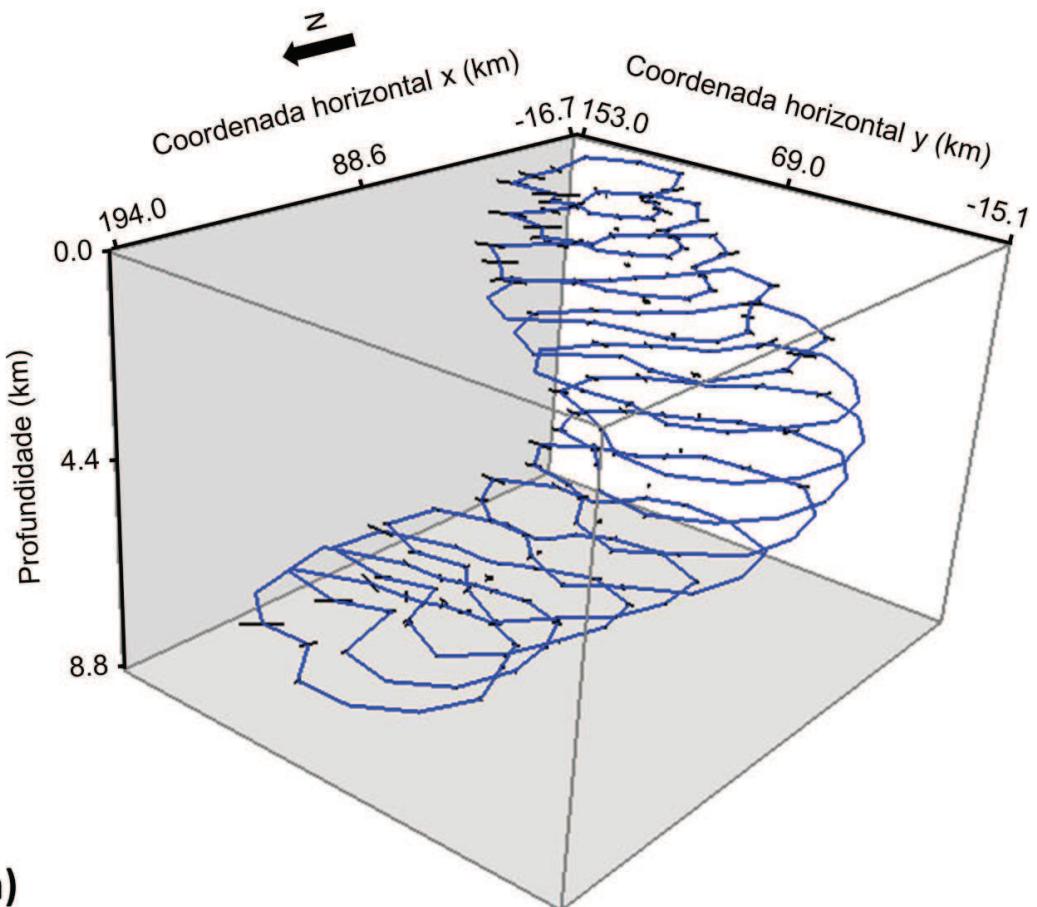


Figura 5.11 Ajuste produzido na interpretação dos dados gravimétricos observados sobre o greentone belt Matsitama. As linhas vermelhas são os dados observados e as linhas azuis são os dados preditos pela estimativa obtida na inversão (Figura 5.12). Os valores estão em mGal.

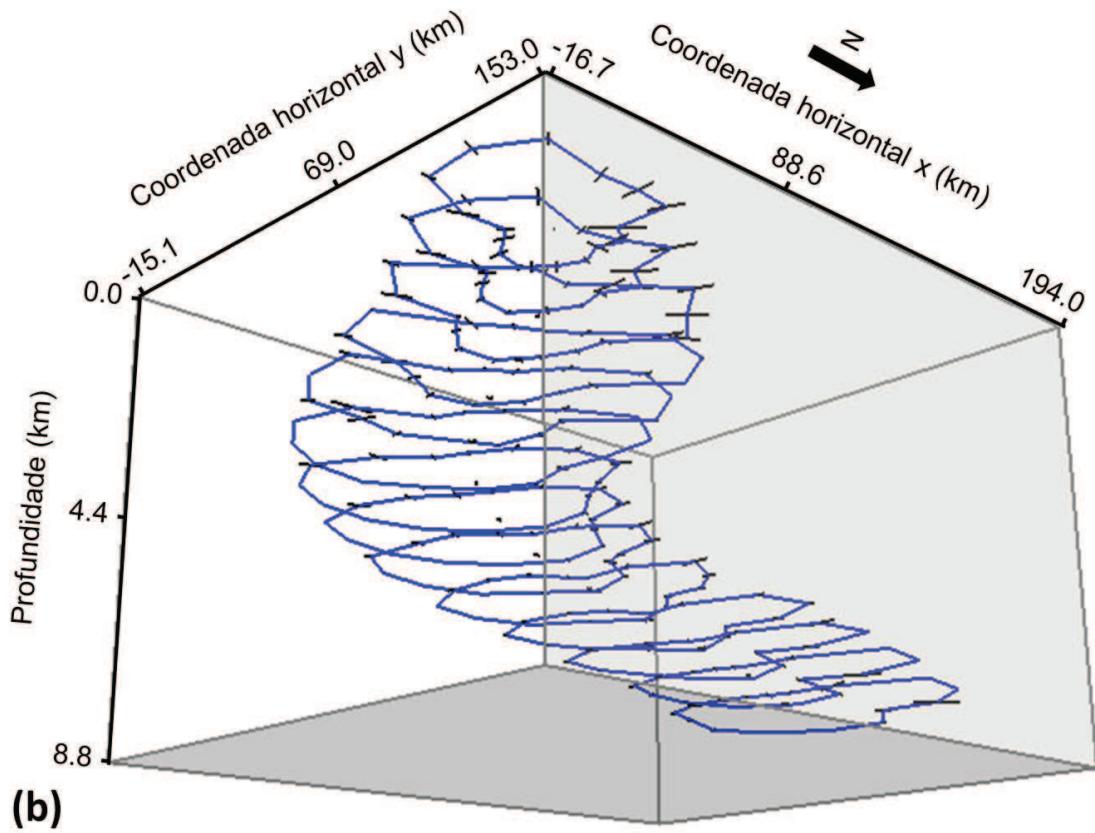




*Figura 5.12 Estimativa (prismas amarelos) obtida na interpretação dos dados gravimétricos observados sobre o greentone belt Matsitama. Em (a), os prismas amarelos representam o corpo estimado e os prismas pretos representam a aproximação inicial, que é formada por duas partes iguais. A primeira é composta pelos primeiros sete prismas mais rasos, todos com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (51,671 \text{ km}, 96,453 \text{ km})$ ,  $k = 1, \dots, 7$ . A segunda parte da aproximação inicial é composta pelos sete prismas mais profundos do modelo interpretativo, todos com as coordenadas da origem iguais a  $(x_0^k, y_0^k) = (128,156 \text{ km}, 65,686 \text{ km})$ ,  $k = 8, \dots, 14$ . Todas as distâncias radiais de todos os prismas da aproximação inicial são iguais a 5,0 km. (b) e (c) mostram vistas em perspectiva da estimativa (prismas amarelos): (b) visada superior e (c) visada inferior. A profundidade da base foi estimada em  $z_{\max} = 8,0 \pm 0,5 \text{ km}$  (Equação 2.21), com base na curva  $w \times s$  (Figura 5.10).*



(a)



*Figura 5.13 Incerteza dos parâmetros estimados na interpretação dos dados gravimétricos observados sobre o greentone belt Matsitama. (a) Visada superior e (b) visada inferior dos contornos das seções horizontais dos prismas que compõem o corpo estimado. A incerteza dos parâmetros (Equação 2.20) está representada pelas barras pretas. Observa-se que a incerteza das distâncias radiais (barras pretas sobre as linhas azuis) é muito pequena e a incerteza das coordenadas horizontais das origens são menores ainda, de tal forma que as barras aparecem como pontos.*

## 6) CONCLUSÃO

Apresentamos um novo método de inversão gravimétrica 3D, que estima a forma de corpos geológicos isolados e localizados em subsuperfície, sob a premissa do conhecimento da profundidade do topo e do contraste de densidade entre o corpo e o meio. Aproximamos o corpo geológico por um modelo interpretativo formado por um conjunto de prismas 3D, retos, justapostos verticalmente e com seção horizontal descrita por um polígono com um número fixo de vértices igualmente espaçados entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ . Esses vértices são descritos em coordenadas polares referidas a uma origem arbitrária localizada dentro desse polígono. Os parâmetros estimados neste trabalho são as distâncias radiais associadas aos vértices e as coordenadas horizontais das origens arbitrárias dos polígonos que descrevem a seção horizontal de cada um dos prismas do modelo interpretativo. A estabilidade da estimativa desses parâmetros foi garantida utilizando-se a regularização de Tikhonov, que consiste em incorporar informação a priori por meio de vínculos matemáticos. Para todas as estimativas obtidas neste trabalho, analisamos a estabilidade e calculamos a incerteza de todas as estimativas de parâmetros. Contudo, há conjuntos de estimativas que são estáveis, que ajustam os dados, mas que são obtidas usando diferentes valores para a profundidade máxima do modelo interpretativo. Para reduzir essa ambiguidade, desenvolvemos um procedimento prático com base na massa anômala da estimativa  $w$  e na medida  $s$  do desajuste dos dados gravimétricos. Este procedimento é capaz de inferir, quando os dados têm resolução suficiente, a profundidade da base do modelo interpretativo que mais se aproxima da profundidade do corpo verdadeiro. Para tanto, computamos um conjunto de estimativas com diferentes valores tentativos para a profundidade da base do modelo interpretativo e geramos um gráfico  $w \times s$ . Se esse gráfico exibir um mínimo valor de  $s$  bem definido, os dados gravimétricos têm resolução suficiente para recuperar completamente a forma geométrica da fonte

anômala e o valor tentativo para a profundidade da base que produz esse menor valor de  $s$  no gráfico  $w \times s$  é a melhor estimativa da profundidade da base do corpo verdadeiro. Caso contrário, os dados gravimétricos não têm resolução suficiente para recuperar perfeitamente a fonte anômala. Neste último caso, a curva  $w \times s$  indica uma profundidade mínima para a base do corpo verdadeiro. Mesmo neste caso em que os dados não têm boa resolução, nosso método recupera a porção do corpo anômalo localizada acima dessa profundidade mínima. Isso indica que a curva de  $w \times s$  é uma ferramenta útil não só para estimar a profundidade da base do corpo verdadeiro, mas também para indicar se os dados têm ou não resolução suficiente para que a inversão recupere completamente a geometria da fonte.

Fizemos aplicações a dados sintéticos e avaliamos o desempenho do nosso método em recuperar a geometria e inferir a profundidade da base do corpo verdadeiro. Os resultados mostram o bom desempenho da curva  $w \times s$  em indicar se os dados têm ou não resolução suficiente para estimar completamente a geometria do corpo verdadeiro, mesmo no caso em que estes sejam complexos e retratem ambientes geológicos reais. Nos testes em que a curva  $w \times s$  indicou que os dados têm resolução, o método foi capaz de estimar completamente, de maneira estável, a geometria e a profundidade da base do corpo verdadeiro. Por outro lado, no teste em que a curva  $w \times s$  indicou que os dados não têm resolução suficiente para recuperar completamente a geometria da fonte, a curva  $w \times s$  indicou uma profundidade mínima acima da qual o método foi capaz de estimar, também de maneira estável, a geometria do corpo verdadeiro. Fundamentados nos resultados obtidos com dados sintéticos, aplicamos nosso método aos dados gravimétricos localizados sobre o granito Redenção (Brasil) e sobre o greenstone belt Matsitama (Botsuana). Nos dois casos, a curva  $w \times s$  indicou que os dados gravimétricos tem resolução suficiente e o método inferiu, de maneira estável, a geometria e a profundidade da base desses corpos. Os resultados obtidos estão de acordo com interpretações anteriores.

A metodologia desenvolvida neste trabalho requer que o corpo verdadeiro possua seções horizontais homogêneas e que seja isolado. Essa condição de homogeneidade é uma hipótese que, embora não represente fielmente ambientes geológicos em grande escala, é capaz de descrever satisfatoriamente ambientes geológicos em escala local. Já a condição de que o corpo verdadeiro seja isolado faz com que a metodologia deva ser utilizada para testar a hipótese de que a anomalia de gravidade observada seja causada por um único corpo geológico. No entanto, a generalização para a situação em que a anomalia é causada por múltiplos corpos é algo possível e relativamente simples do ponto de vista teórico. Outras possíveis generalizações para a metodologia desenvolvida neste trabalho é a aplicação a dados magnetométricos e de gradiometria gravimétrica e magnética. Estas generalizações possibilitariam a inversão conjunta utilizando esses diferentes tipos de dados observados. No entanto, vale ressaltar que o critério da curva  $w \times s$  para estimar a profundidade máxima do corpo deverá ser modificado para os casos de múltiplos corpos e de corpos magnéticos. Por fim, fica claro que a metodologia desenvolvida neste trabalho é uma ferramenta muito versátil e útil na interpretação de dados gravimétricos.

## 7) REFERÊNCIAS

- BARBOSA, V. C. F.; SILVA, J. B. C. e MEDEIROS, W. E. Gravity inversion of a discontinuous relief stabilized by weighted smoothness constraints on depth. **Geophysics**, vol. 64, n.º 5, p. 1429 – 1437, 1999.
- BARNETT, C. Theoretical modeling of the magnetic and gravitational fields of an arbitrarily shaped three-dimensional body. **Geophysics**, vol. 41, n.º 6, p. 1353–1364, 1976.
- BEAR, G. W.; AL-SHUKRI, H. J. e RUDMAN, A. J. Linear inversion of gravity data for 3-D density distributions. **Geophysics**, vol. 60, n.º 5, p. 1354–1364, 1995.
- CAMACHO, A. G.; MONTESINOS, F. G. e VIEIRA, R. Gravity inversion by means of growing bodies. **Geophysics**, vol. 65, n.º 1, p. 95–101, 2000.
- DALL'AGNOL, R.; TEIXEIRA, N. P.; RÄMÖ, O. T.; MOURA, C. A. V.; MACAMBIRA, M. J. B. e OLIVEIRA, D. C. Petrogenesis of the Paleoproterozoic rapakivi A-type granites of the Archean Carajás metallogenis province, Brazil. **Lithos**, vol. 80, p. 101 – 129, 2005.
- HAMMER, S. Estimating ore masses in gravity prospecting. **Geophysics**, vol. 10, n.º 1, p. 50 – 62, 1945.
- HEISKANEN, W. A. e MORITZ, H. **Physical Geodesy**. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1967. 364 p.
- KELLEY, C. T. **Iterative methods for optimization**. Raleigh: SIAM, 1999. 180 p.

LAST, B. J. e KUBIK, K. Compact gravity inversion. **Geophysics**, vol. 48, n.º 6, p. 713 – 721, 1983.

LI, Y. e OLDENBURG, D. W. 3-D inversion of gravity data. **Geophysics**, vol. 63, n.º 1, p. 109-119, 1998.

LUO, X. Constraining the shape of a gravity anomalous body using reversible jump Markov chain Monte Carlo. **Geophysical Journal International**, vol. 180, p. 1067 – 1079, 2010.

MARQUARDT, D.W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. **Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics**, vol. 11, n.º 2, p. 601–612, 1963.

MORAES, R. A. V. e HANSEN, R. O. Constrained inversion of gravity fields for complex 3D structures. **Geophysics**, vol. 66, n.º 2, p. 501–510, 2001.

NAGIHARA, S. e HALL, S. A. Three-dimensional gravity inversion using simulated annealing: Constraints on the diapiric roots of allochthonous salt structures. **Geophysics**, vol. 66, n.º 5, p. 1438–1449, 2001.

OEZSEN, R. Velocity modeling and prestack depth imaging below complex salt structures: a case history from on-shore Germany. **Geophysical Prospecting**, vol. 52, p. 693-705, 2004.

OLIVEIRA, D. C.; DALL'AGNOL, R.; SILVA, J. B. C. e ALMEIDA, J. A. C. Gravimetric, radiometric, and magnetic susceptibility study of the Paleoproterozoic Rendençao and Bannach plutons, eastern Amazonian Craton, Brazil: Implications for architecture and zoning of A-type granites. **Journal of South American Earth Sciences**. vol. 25, p. 100-115, 2008.

PLOUFF, D. Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections. **Geophysics**. vol. 41, n.º 4, p. 727-741, 1976.

PORTNIAGUINE, O. e ZHDANOV, M.S. Focusing geophysical inversion images. **Geophysics**, vol. 64, n.º 3, p. 874–887, 1999.

REEVES, C. V. The Kalahari Desert, central southern Africa: A case history of regional gravity and magnetic exploration. In: HINZE, W. J. **The utility of regional gravity and magnetic anomaly maps**: SEG, 1985. p. 144-153.

RENÉ, R. M. Gravity inversion using open, reject, and “shape of the anomaly” fill criteria. **Geophysics**, vol. 51, n.º 4, p. 988–994, 1986.

SILVA, J. B. C. e BARBOSA, V. C. F. Generalized radial inversion of 2D potential field data. **Geophysics**. vol. 69, n.º 6, p. 1405-1413, 2004.

SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E. e BARBOSA, V. C. F. Potential field inversion: Choosing the appropriate technique to solve a geologic problem. **Geophysics**, vol. 66, n.º 2, p. 511–520, 2001.

SILVA, J. B. C.; OLIVEIRA, F. S.; BARBOSA, V. C. F. e CAMPOS VELHO, H. F. Apparent –density mapping using entropic regularization. **Geophysics**. vol. 72, n.º 4, p. 151-160, 2007.

SILVA DIAS, F. J. S. **Inversão gravimétrica assistida**. 2007. 159 f. Tese (Doutorado em geofísica) – Observatório Nacional. Rio de Janeiro, 2007.

SILVA DIAS, F. J. S.; BARBOSA, V. C. F. e SILVA, J. B. C. 3D gravity inversion incorporating prior information through an adaptive learning procedure. In: Society of Exploration Geophysicists 2007 International Exposition and 77th Annual Meeting, 2007, San Antonio. **SEG 2007 International Exposition and 77th Annual Meeting**. Tulsa: SEG - Society of Exploration Geophysicists, 2007. v.GM1. p. 745 – 749.

SILVA DIAS, F. J. S.; BARBOSA, V. C. F. e SILVA, J. B. C. 3D gravity inversion through an adaptative-learning procedure. **Geophysics**, vol. 74, n.º 3, p. 9 – 21, 2009.

STARICH, P. J.; LEWIS, G. G.; FAULKENR, J.; STANDLEY, P. G. e SETTERQUIST, S. Integrated geophysical study of an onshore salt dome. **The Leading Edge**, vol. 13, p. 880–884, 1994.

TARANTOLA, A. **Inverse problem theory and methods for model parameter estimation**. Philadelphia: SIAM, 2005. 342 p.

TIKHONOV, A. N. e ARSENIN, V. Y. **Solutions of ill-posed problems**. W. H. Winston & Sons, 1977.

WILDMAN, R. A. e GAZONAS, G. A. Gravitational and magnetic anomaly inversion using a tree-based geometry representation. **Geophysics**, vol. 74, n.º 3, p. 23 – 35, 2009.

## APÊNDICE A – Vínculo de desigualdade

Seja um vetor de parâmetros tal como definido pela expressão 2.4, isto é,

$$\bar{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{M^1} \\ m_{M^1+1} \\ m_{M^1+2} \\ \vdots \\ m_{P-M^L-2} \\ \vdots \\ m_{P-2} \\ m_{P-1} \\ m_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^1 \\ \vdots \\ r_{M^1}^1 \\ x_0^1 \\ y_0^1 \\ \vdots \\ r_1^L \\ \vdots \\ r_{M^L}^L \\ x_0^L \\ y_0^L \end{bmatrix}_{P \times 1} \quad (\text{A.1})$$

e cujos elementos satisfazem a desigualdade  $m_{i \min} < m_i < m_{i \max}$ ,  $i = 1, \dots, P$ .

Para introduzirmos o vínculo de desigualdade 2.6b ao problema de minimizar a expressão 2.6a, definimos um vetor de parâmetros transformados  $\check{m} \equiv \{\check{m}_i\} \in ]-\infty, +\infty[$ ,  $i = 1, \dots, P$ , da seguinte forma

$$\check{m} = \begin{bmatrix} \check{m}_1 \\ \vdots \\ \check{m}_{M^1} \\ \check{m}_{M^1+1} \\ \check{m}_{M^1+2} \\ \vdots \\ \check{m}_{P-M^L-2} \\ \vdots \\ \check{m}_{P-2} \\ \check{m}_{P-1} \\ \check{m}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(m_1) \\ \vdots \\ f(m_{M^1}) \\ f(m_{M^1+1}) \\ f(m_{M^1+2}) \\ \vdots \\ f(m_{P-M^L-2}) \\ \vdots \\ f(m_{P-2}) \\ f(m_{P-1}) \\ f(m_P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(r_1^1) \\ \vdots \\ f(r_{M^1}^1) \\ f(x_0^1) \\ f(y_0^1) \\ \vdots \\ f(r_1^L) \\ \vdots \\ f(r_{M^L}^L) \\ f(x_0^L) \\ f(y_0^L) \end{bmatrix}_{P \times 1}, \quad (\text{A.2})$$

em que

$$\tilde{m}_i = f(m_i) = -\ln \left( \frac{m_{i \max} - m_i}{m_i - m_{i \min}} \right), \quad (\text{A.3})$$

$m_i$  é o i-ésimo elemento de  $\bar{m}$  (Equação A.1),  $m_{i \min}$  e  $m_{i \max}$  são definidos pelo intérprete como sendo, respectivamente, os limites inferior e superior de  $m_i$  (Equação 2.6b) e  $\tilde{m}_i$  é o i-ésimo elemento do vetor de parâmetros transformados  $\tilde{m}$  (Equação A.2).

Neste trabalho, por simplicidade, se  $m_i$  for uma distância radial  $r_j^k$ ,  $m_{i \min} = r_{\min}$  e  $m_{i \max} = r_{\max}$  para qualquer  $j$  e  $k$ , se  $m_i$  for a coordenada  $x_0^k$  da origem do k-ésimo prisma,  $m_{i \min} = x_{0 \min}$  e  $m_{i \max} = x_{0 \max}$ , para qualquer  $k$ , e se  $m_i$  for a coordenada  $y_0^k$  da origem de do k-ésimo prisma,  $m_{i \min} = y_{0 \min}$  e  $m_{i \max} = y_{0 \max}$ , para qualquer  $k$ .

A função A.3 é homeomórfica, ou seja, para qualquer  $m_i$ , há um único  $f(m_i) = \tilde{m}_i$  e para qualquer  $\tilde{m}_i$ , há um único  $f^{-1}(\tilde{m}_i) = m_i$ , dado pela inversa da função A.3:

$$m_i = f^{-1}(\tilde{m}_i) = m_{i \min} + \left( \frac{m_{i \max} - m_{i \min}}{1 + e^{-\tilde{m}_i}} \right). \quad (\text{A.4})$$

Logo, dado um vetor de parâmetros transformados  $\tilde{m}$  (Equação A.2), é possível calcular um vetor de parâmetros  $\bar{m}$  (Equação A.1) por meio da expressão A.4 da seguinte forma

$$\bar{\vec{m}} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{M^1} \\ m_{M^1+1} \\ m_{M^1+2} \\ \vdots \\ m_{P-M^L-2} \\ \vdots \\ m_{P-2} \\ m_{P-1} \\ m_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^1 \\ \vdots \\ r_{M^1}^1 \\ x_0^1 \\ y_0^1 \\ \vdots \\ r_1^L \\ \vdots \\ r_{M^L}^L \\ x_0^L \\ y_0^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{-1}(\check{m}_1) \\ \vdots \\ f^{-1}(\check{m}_{M^1}) \\ f^{-1}(\check{m}_{M^1+1}) \\ f^{-1}(\check{m}_{M^1+2}) \\ \vdots \\ f^{-1}(\check{m}_{P-M^L-2}) \\ \vdots \\ f^{-1}(\check{m}_{P-2}) \\ f^{-1}(\check{m}_{P-1}) \\ f^{-1}(\check{m}_P) \end{bmatrix}_{P \times 1}. \quad (\text{A.5})$$

A expansão da expressão A.4 em série de Taylor até primeira ordem em torno de  $\check{m}_i$  é dada por

$$f^{-1}(\check{m}_i + \Delta\check{m}_i) \approx f^{-1}(\check{m}_i) + \frac{df^{-1}(\check{m}_i)}{d\check{m}_i} \Delta\check{m}_i, \quad (\text{A.6})$$

sendo

$$\frac{df^{-1}(\check{m}_i)}{d\check{m}_i} = \frac{(m_{i \max} - m_i)(m_i - m_{i \min})}{(m_{i \max} - m_{i \min})}. \quad (\text{A.7})$$

Ao aplicar a expressão A.6 em todos os elementos do vetor  $\check{\vec{m}}$ , é possível escrever o seguinte sistema linear

$$\begin{aligned} f^{-1}(\check{m}_1 + \Delta\check{m}_1) &\approx f^{-1}(\check{m}_1) + \frac{df^{-1}(\check{m}_1)}{d\check{m}} \Delta\check{m}_1 \\ &\vdots \\ f^{-1}(\check{m}_P + \Delta\check{m}_P) &\approx f^{-1}(\check{m}_P) + \frac{df^{-1}(\check{m}_P)}{d\check{m}} \Delta\check{m}_P, \end{aligned} \quad (\text{A.8a})$$

que pode ser escrito em notação matricial da seguinte forma

$$\Delta \bar{m} \approx \bar{\bar{T}}(\hat{m}) \Delta \check{m}, \quad (\text{A.8b})$$

em que

$$\Delta \bar{m} = \begin{bmatrix} f^{-1}(\check{m}_1 + \Delta \check{m}_1) \\ \vdots \\ f^{-1}(\check{m}_P + \Delta \check{m}_P) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f^{-1}(\check{m}_1) \\ \vdots \\ f^{-1}(\check{m}_P) \end{bmatrix}_{P \times 1},$$

$$\Delta \check{m} = \begin{bmatrix} \Delta \check{m}_1 \\ \vdots \\ \Delta \check{m}_P \end{bmatrix}_{P \times 1}$$

e

$$\bar{\bar{T}}(\hat{m}) = \begin{bmatrix} df^{-1}(\check{m}_1) / d\check{m} & & & \\ & \ddots & & \\ & & df^{-1}(\check{m}_P) / d\check{m} \end{bmatrix}_{P \times P}, \quad (\text{A.9})$$

em que o i-ésimo elemento da diagonal da matriz  $\bar{\bar{T}}(\check{m})$  é dado pela expressão A.7.

O sistema linear A.8 relaciona uma correção  $\Delta \bar{m}$  no vetor de parâmetros  $\bar{m}$  (Equação A.1) com uma correção  $\Delta \check{m}$  no vetor de parâmetros transformados  $\check{m}$  (Equação A.2).

## APÊNDICE B – Método de Levenberg-Marquardt

O método iterativo de Levenberg-Marquardt (MARQUARDT, 1963) é utilizado para estimar o mínimo de funções não lineares. Esse método calcula uma nova estimativa dos parâmetros  $\hat{\bar{m}}_{k+1}$ , na iteração  $k + 1$ , a partir de uma estimativa dos parâmetros  $\hat{\bar{m}}_k$ , calculado na iteração anterior  $k$ . Em cada iteração, a função a ser minimizada (que neste trabalho é a função  $\Gamma(\bar{m})$ , definida na expressão 2.6a) é linearizada em torno de  $\hat{\bar{m}}_k$  e são estimados uma correção  $\Delta\hat{\bar{m}}_k$  e uma nova estimativa dos parâmetros é obtida calculando-se  $\hat{\bar{m}}_{k+1} = \hat{\bar{m}}_k + \Delta\hat{\bar{m}}_k$ . Esse procedimento é repetido enquanto  $\Gamma(\hat{\bar{m}}_{k+1}) < \Gamma(\hat{\bar{m}}_k)$  e até que o critério de parada (Equação 2.13) seja satisfeito. Nesse método, a linearização é feita por meio de uma expansão da função  $\Gamma(\bar{m})$  (Equação 2.6a) em série de Taylor até segunda ordem em torno de  $\hat{\bar{m}}_k$

$$\Gamma(\hat{\bar{m}}_k + \Delta\bar{m}_k) \approx \Gamma(\hat{\bar{m}}_k) + \bar{\nabla}\Gamma(\hat{\bar{m}}_k)^T \Delta\bar{m}_k + \frac{1}{2} \Delta\bar{m}_k^T \bar{\nabla}\Gamma(\hat{\bar{m}}_k) \Delta\bar{m}_k = \Psi(\Delta\bar{m}_k), \quad (\text{B.1})$$

sendo  $\bar{\nabla}\Gamma(\hat{\bar{m}}_k)$  o vetor-gradiente e  $\bar{\nabla}\Gamma(\hat{\bar{m}}_k)$  a matriz Hessiana da expressão 2.6a, ambos avaliados na estimativa  $\hat{\bar{m}}_k$ , obtida na  $k$ -ésima iteração. Em seguida, computa-se a correção  $\Delta\hat{\bar{m}}_k$  que minimiza  $\Psi(\Delta\bar{m}_k)$  (expressão B.1). Duas condições são necessárias para que  $\Delta\hat{\bar{m}}_k$  seja o mínimo de  $\Psi(\Delta\bar{m}_k)$ : i)  $\bar{\nabla}\Psi(\Delta\hat{\bar{m}}_k) = \bar{0}$ , o que significa que  $\Delta\hat{\bar{m}}_k$  deve ser um ponto estacionário de  $\Psi(\Delta\bar{m}_k)$  e ii)  $\bar{\nabla}\Psi(\Delta\hat{\bar{m}}_k)$  deve ser positiva semidefinida, ou seja,  $\bar{x}^T \bar{\nabla}\Psi(\Delta\hat{\bar{m}}_k) \bar{x} \geq 0, \forall \bar{x}$ . No entanto, estas

condições não garantem que  $\Delta\hat{\bar{m}}_k$  seja o mínimo de  $\Psi(\Delta\bar{m}_k)$ . Para tanto, além da condição i,  $\overline{\nabla}\Psi(\Delta\hat{\bar{m}}_k)$  deve ser positiva definida, ou seja,  $\bar{x}^T\overline{\nabla}\Psi(\Delta\hat{\bar{m}}_k)\bar{x} > 0, \forall \bar{x}$  (KELLEY, 1999). Considerando  $\Delta\hat{\bar{m}}_k$  como um ponto estacionário de  $\Psi(\Delta\bar{m}_k)$  (Equação B.1), ou seja, derivando  $\Psi(\Delta\bar{m}_k)$  em relação a  $\Delta\bar{m}_k$  e igualando o resultado ao vetor nulo, temos

$$\overline{\nabla}\Psi(\Delta\hat{\bar{m}}_k) = \overline{\nabla}\left[\Gamma(\hat{\bar{m}}_k)\right] + \overline{\nabla}\left[\overline{\nabla}\Gamma(\hat{\bar{m}}_k)^T \Delta\hat{\bar{m}}_k\right] + \overline{\nabla}\left[\frac{1}{2} \Delta\hat{\bar{m}}_k^T \overline{\nabla}\Gamma(\hat{\bar{m}}_k) \Delta\hat{\bar{m}}_k\right] = \bar{0}$$

e, uma vez que  $\Gamma(\hat{\bar{m}}_k)$ ,  $\overline{\nabla}\Gamma(\hat{\bar{m}}_k)$  e  $\overline{\nabla}\Gamma(\hat{\bar{m}}_k)$  não dependem de  $\Delta\bar{m}_k$ , chegamos ao seguinte sistema linear

$$\overline{\nabla}\Gamma(\hat{\bar{m}}_k) \Delta\hat{\bar{m}}_k = -\overline{\nabla}\Gamma(\hat{\bar{m}}_k), \quad (\text{B.2})$$

em que  $\Delta\hat{\bar{m}}_k$  é a estimativa, na k-ésima iteração, da correção dos parâmetros,

$$\overline{\nabla}\Gamma(\hat{\bar{m}}_k) = \overline{\nabla}\phi(\hat{\bar{m}}_k) + \mu \sum_{j=1}^{NF} \alpha_j \overline{\nabla}\varphi_j(\hat{\bar{m}}_k), \quad (\text{B.3a})$$

$$\overline{\nabla}\Gamma(\hat{\bar{m}}_k) = \overline{\nabla}\phi(\hat{\bar{m}}_k) + \mu \sum_{j=1}^{NF} \alpha_j \overline{\nabla}\varphi_j(\hat{\bar{m}}_k), \quad (\text{B.3b})$$

em que

$$\overline{\nabla}\phi(\hat{\bar{m}}_k) = -\frac{2}{N-P} \overline{\nabla}\bar{G}(\hat{\bar{m}}_k)^T [\bar{d} - \bar{g}(\hat{\bar{m}}_k)] \quad (\text{B.4a})$$

e

$$\overline{\nabla} \phi(\hat{m}_k) \approx \frac{2}{N-P} \overline{\overline{G}}(\hat{m}_k)^T \overline{\overline{G}}(\hat{m}_k), \quad (\text{B.4b})$$

são, respectivamente, o vetor gradiente e a matriz Hessiana da função  $\phi(\bar{m})$  (Equação 2.5), avaliadas em  $\hat{m}_k$  e

$$\overline{\overline{G}}(\hat{m}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\hat{m}_k)}{\partial m_1} & \frac{\partial g_1(\hat{m}_k)}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial g_1(\hat{m}_k)}{\partial m_P} \\ \frac{\partial g_2(\hat{m}_k)}{\partial m_1} & \frac{\partial g_2(\hat{m}_k)}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial g_2(\hat{m}_k)}{\partial m_P} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_N(\hat{m}_k)}{\partial m_1} & \frac{\partial g_N(\hat{m}_k)}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial g_N(\hat{m}_k)}{\partial m_P} \end{bmatrix}_{N \times P}, \quad (\text{B.5})$$

em que  $P = L(M+2)$  é a quantidade de parâmetros do problema inverso e  $N$  é o número de observações geofísica. Os termos  $\overline{\nabla} \varphi_j(\hat{m}_k)$  (Equação B.3a) e  $\overline{\nabla} \varphi_j(\hat{m}_k)$  (Equação B.3b) são, respectivamente, a matriz Hessiana e o vetor gradiente do j-ésimo vínculo  $\varphi_j(\bar{m})$ . Para defini-los, é mais fácil expressar todos os vínculos (Equações 2.7 a 2.12) em notação matricial e depois derivar em relação ao vetor de parâmetros  $\bar{m}$  (Equação 2.4). Sendo assim, os vínculos podem ser escritos em notação matricial da seguinte forma:

$$\varphi_1(\bar{m}) = \alpha_1 \bar{m}^T \overline{\overline{R}}_1^T \overline{\overline{R}}_1 \bar{m}, \quad (\text{B.6})$$

$$\varphi_2(\bar{m}) = \alpha_2 \bar{m}^T \overline{\overline{R}}_2^T \overline{\overline{R}}_2 \bar{m}, \quad (\text{B.7})$$

$$\varphi_3(\bar{m}) = \alpha_3 (\bar{\bar{A}} \bar{m} - \bar{m}'')^T (\bar{\bar{A}} \bar{m} - \bar{m}'') , \quad (\text{B.8})$$

$$\varphi_4(\bar{m}) = \alpha_4 (\bar{\bar{B}} \bar{m} - \bar{m}')^T (\bar{\bar{B}} \bar{m} - \bar{m}') , \quad (\text{B.9})$$

$$\varphi_5(\bar{m}) = \alpha_5 \bar{m}^T \bar{\bar{R}}_5^T \bar{\bar{R}}_5 \bar{m} , \quad (\text{B.10})$$

$$\varphi_6(\bar{m}) = \alpha_6 \bar{m}^T \bar{\bar{C}}^T \bar{\bar{C}} \bar{m} , \quad (\text{B.11})$$

em que ,

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{I}} & \bar{0} \end{bmatrix}_{(M+2) \times P} , \quad (\text{B.12})$$

sendo  $\bar{\bar{I}}$  a matriz identidade de ordem  $M+2$  ,

$$\bar{m}'' = \begin{bmatrix} r_1^0 \\ r_2^0 \\ \vdots \\ r_M^0 \\ x_0^0 \\ y_0^0 \end{bmatrix}_{(M+2) \times 1} , \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{\bar{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{B}}^\# & \bar{0} \end{bmatrix}_{2 \times P} , \quad (\text{B.14})$$

$$\bar{\bar{B}}^\# = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times (M+2)} , \quad (\text{B.15})$$

$$\bar{m}' = \begin{bmatrix} x_0^0 \\ y_0^0 \end{bmatrix}_{2 \times 1}, \quad (\text{B.16})$$

sendo  $r_j^0$  ( $j=1, \dots, M$ ) e  $(x_0^0, y_0^0)$ , respectivamente, as distâncias radiais e as coordenadas da origem que descrevem o contorno da parte aflorante do corpo geológico (Subseção 2.2.1.3),

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{C}}^\# & \bar{\bar{0}} & \cdots & \bar{\bar{0}} \\ \bar{\bar{0}} & \bar{\bar{C}}^\# & \cdots & \bar{\bar{0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\bar{0}} & \bar{\bar{0}} & \cdots & \bar{\bar{C}}^\# \end{bmatrix}_{P \times P}, \quad (\text{B.17})$$

$$\bar{\bar{C}}^\# = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{(M+2) \times (M+2)}, \quad (\text{B.18})$$

e  $\bar{\bar{R}}_1$ ,  $\bar{\bar{R}}_2$  e  $\bar{\bar{R}}_5$  são matrizes particionadas, cujas linhas possuem apenas dois elementos não nulos e são definidas da seguinte forma

$$\bar{\bar{R}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\bar{R}}^\# & \bar{\bar{0}} & \cdots & \bar{\bar{0}} \\ \bar{\bar{0}} & \bar{\bar{R}}^\# & \cdots & \bar{\bar{0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\bar{0}} & \bar{\bar{0}} & \cdots & \bar{\bar{R}}^\# \end{bmatrix}_{ML \times P}, \quad (\text{B.19})$$

sendo

$$\overline{\overline{R}}^\# = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{M \times (M+2)}, \quad (\text{B.20})$$

$$\overline{\overline{R}}_2 = \begin{bmatrix} \overline{\overline{R}}_2^- & \overline{\overline{R}}_2^+ & \overline{\overline{0}} & \cdots & \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{0}} \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{R}}_2^- & \overline{\overline{R}}_2^+ & \cdots & \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{0}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{0}} & \cdots & \overline{\overline{R}}_2^- & \overline{\overline{R}}_2^+ \end{bmatrix}_{M(L-1) \times P}, \quad (\text{B.21})$$

sendo

$$\overline{\overline{R}}_2^- = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{M \times (M+2)}, \quad (\text{B.22})$$

e

$$\overline{\overline{R}}_2^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{M \times (M+2)}, \quad (\text{B.23})$$

$$\overline{\overline{R}}_5 = \begin{bmatrix} \overline{\overline{R}}_5^- & \overline{\overline{R}}_5^+ & \overline{\overline{0}} & \cdots & \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{0}} \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{R}}_5^- & \overline{\overline{R}}_5^+ & \cdots & \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{0}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{0}} & \cdots & \overline{\overline{R}}_5^- & \overline{\overline{R}}_5^+ \end{bmatrix}_{2(L-1) \times P}, \quad (\text{B.24})$$

sendo

$$\bar{\bar{R}}_5^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times (M+2)} \quad (\text{B.25})$$

e

$$\bar{\bar{R}}_5^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times (M+2)}. \quad (\text{B.26})$$

Por fim, os termos  $\bar{\bar{\nabla}}\varphi_j(\hat{m}_k)$  (Equação B.3a) e  $\bar{\nabla}\varphi_j(\hat{m}_k)$  (Equação B.3b) ficam definidos como

$$\bar{\bar{\nabla}}\varphi_l(\bar{m}) = \alpha_l \bar{\bar{R}}_l^T \bar{\bar{R}}_l, \quad (\text{B.27})$$

$$\bar{\nabla}\varphi_l(\bar{m}) = \alpha_l \bar{R}_l^T \bar{R}_l, \quad (\text{B.28})$$

$$\bar{\nabla}\varphi_2(\bar{m}) = \alpha_2 \bar{\bar{R}}_2^T \bar{\bar{R}}_2, \quad (\text{B.29})$$

$$\bar{\nabla}\varphi_2(\bar{m}) = \alpha_2 \bar{R}_2^T \bar{R}_2, \quad (\text{B.30})$$

$$\bar{\nabla}\varphi_3(\bar{m}) = \alpha_3 \bar{\bar{A}}^T \bar{\bar{A}}, \quad (\text{B.31})$$

$$\bar{\nabla}\varphi_3(\bar{m}) = \alpha_3 \bar{A}^T (\bar{\bar{A}} \bar{m} - \bar{m}''), \quad (\text{B.32})$$

$$\overline{\nabla} \varphi_4(\bar{m}) = \alpha_4 \overline{\bar{B}}^T \overline{\bar{B}}, \quad (\text{B.33})$$

$$\overline{\nabla} \varphi_4(\bar{m}) = \alpha_4 \overline{\bar{B}}^T (\overline{\bar{B}} \bar{m} - \bar{m}'), \quad (\text{B.34})$$

$$\overline{\nabla} \varphi_5(\bar{m}) = \alpha_5 \overline{\bar{R}_5}^T \overline{\bar{R}_5}, \quad (\text{B.35})$$

$$\overline{\nabla} \varphi_5(\bar{m}) = \alpha_5 \overline{\bar{R}_5}^T \overline{\bar{R}_5} \bar{m}, \quad (\text{B.36})$$

$$\overline{\nabla} \varphi_6(\bar{m}) = \alpha_6 \overline{\bar{C}}^T \overline{\bar{C}} \bar{m} \quad (\text{B.37})$$

e

$$\overline{\nabla} \varphi_6(\bar{m}) = \alpha_6 \overline{\bar{C}}^T \overline{\bar{C}} \bar{m}. \quad (\text{B.38})$$

A solução do sistema linear dado pela expressão B.2 é a base do método de Gauss-Newton para a minimização da função não linear  $\Gamma(\bar{m})$ . No método de Gauss-Newton, para que a correção  $\Delta\hat{\bar{m}}_k$  leve ao decréscimo da função  $\Gamma(\bar{m})$ , é necessário que a matriz Hessiana seja positiva definida. No entanto, em geral, essa condição só é satisfeita quando o ponto  $\hat{\bar{m}}_k$  está próximo de um ponto mínimo. Nessa circunstância, o método converge para o ponto mínimo rapidamente. Por outro lado, quando o ponto  $\bar{m}_k$  está longe de um ponto de mínimo, a correção  $\Delta\bar{m}_k$  pode não levar ao decréscimo da função (KELLEY, 1999). Para contornar esse problema, no método de Levenberg-Marquardt, o cálculo de  $\Delta\hat{\bar{m}}_k$  é feito pela seguinte expressão

$$\left[ \bar{\nabla} \Gamma(\hat{m}_k) + \lambda \bar{I} \right] \Delta \hat{m}_k = -\bar{\nabla} \Gamma(\hat{m}_k), \quad (\text{B.39})$$

em que  $\lambda$  é um escalar positivo que é modificado em cada iteração e é denominado parâmetro de Levenberg-Marquardt. Quando  $\lambda$  é muito grande, o termo  $\lambda \bar{I}$  é muito maior que o termo  $\bar{\nabla} \Gamma(\hat{m}_k)$  e a correção  $\Delta \hat{m}_k$  é calculada de acordo com o método *steepest descent* (ou método do declive máximo). Neste caso, garante-se que a correção seja pequena e na direção de decréscimo da função

$$\Delta \hat{m}_k \cong -\frac{1}{\lambda} \bar{\nabla} \Gamma(\hat{m}_k). \quad (\text{B.40})$$

Por outro lado, quando  $\lambda$  é muito pequeno, o termo  $\lambda \bar{I}$  é muito menor que o termo  $\bar{\nabla} \Gamma(\hat{m}_k)$  e a correção  $\Delta \hat{m}_k$  é calculada de acordo com o método de Gauss-Newton (Equação B.2). O método de Levenberg-Marquardt foi implementado da seguinte forma:

- 
- 1) Iteração  $k = 0$ : Estabeleça uma aproximação inicial do vetor de parâmetros  $\bar{m}_0$  em que todos os elementos satisfaçam os vínculos de desigualdade dado pela inequação 2.6b e um valor real positivo grande para  $\lambda$  (Equação B.39).
  - 2) Calcule os parâmetros transformados  $\check{m}_k$  por meio da expressão A.3 (Apêndice A).
  - 3) *Laço externo*: Calcule  $\bar{\nabla} \Gamma(\hat{m}_k)$  (Equação B.3a),  $\bar{\nabla} \Gamma(\hat{m}_k)$  (Equação B.3b) e  $\bar{T}(\hat{m}_k)$  (Equação 2.16).
    - a) *Laço interno*: Calcule  $\Delta \check{m}_k$  solucionando o sistema linear definido pela expressão 2.15.
    - b) Calcule  $\check{m}_{k+1} = \check{m}_k + \Delta \check{m}_k$ .

c) Compute  $\hat{\bar{m}}_{k+1}$  usando a expressão A.4 (Apêndice A).

d) Enquanto  $\Gamma(\hat{\bar{m}}_{k+1}) > \Gamma(\hat{\bar{m}}_k)$ :

i)  $\lambda = \lambda \cdot d\lambda$

ii) Retorne para a etapa “3a”.

e)  $\lambda = \frac{\lambda}{d\lambda}$

4) Enquanto  $\Gamma(\hat{\bar{m}}_{k+1}) < \Gamma(\hat{\bar{m}}_k)$  e  $\frac{|\Gamma(\hat{\bar{m}}_{k+1}) - \Gamma(\hat{\bar{m}}_k)|}{|\Gamma(\hat{\bar{m}}_k)|} > \varepsilon$ :

a)  $k = k + 1$ .

b) Retorne para a etapa “2”.

---

em que  $d\lambda$  é uma constante  $> 1$  que modifica o parâmetro de Levenberg-Marquardt durante o laço interno,  $\varepsilon$  é um real positivo, pequeno e que controla a convergência do algoritmo (Equação 2.13). Todas essas variáveis são definidas a priori pelo intérprete e, por conveniência, são denominadas *variáveis da otimização*.