

## MODELAGEM MAGNÉTICA 3D DE CORPOS ELIPSOIDAIOS

Diego Takahashi Tomazella

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Geofísica do Observatório Nacional/MCTI, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Grau de Mestre em Geofísica.

Orientador: Vanderlei Coelho de Oliveira Jr.

Rio de Janeiro  
Março de 2017

“MODELAGEM MAGNÉTICA 3D DE CORPOS ELIPSOIDAIAS”

DIEGO TAKAHASHI TOMAZELLA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO  
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU  
DE MESTRE EM GEOFÍSICA.

Aprovada por:

  
Dr. Vanderlei Coelho de Oliveira Jr. – ON/MCTIC  
(Orientador)

  
Dra. Valeria Cristina Ferreira Barbosa – ON/MCTIC

  
Dr. Wladimir Shukowsky – IAG/USP

RIO DE JANEIRO – BRASIL

27 DE MARÇO DE 2017

Takahashi Tomazella, Diego

Modelagem Magnética 3D de corpos elipsoidais/Diego  
Takahashi Tomazella. – Rio de Janeiro: ON/MCTI, 2017.

XVI, 60 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Vanderlei Coelho de Oliveira Jr.

Dissertação (mestrado) – ON/MCTI/Programa de Pós-  
graduação em Geofísica, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 50 – 54.

- |                        |  |              |
|------------------------|--|--------------|
| 1. Métodos Potenciais. | 2. Magnetometria.                                | 3.           |
| Modelagem direta.      | 4. Modelagem elipsoidal.                         | I.           |
| , .                    | II. Observatório Nacional/MCTI, Programa de Pós- |              |
|                        | graduação em Geofísica.                          | III. Título. |

*Dedico este trabalho a todos que  
ainda sobrevivem com a ciência.*

*Apesar do golpe.*

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que me acompanharam ao longo deste trabalho e que de alguma forma contribuíram para que fosse concluído.

À minha mãe, que ainda me aceita dentro de casa toda vez que volto lá.

Aos amigos do Observatório Nacional, que me aceitam toda vez que volto aqui.

Ao meu orientador Vanderlei, que sempre arranja tempo para mais uma conversa e mais uma explicação.

Aos companheiros de janta, que sempre arranjam estômago para mais uma pizza e um hambúrguer, em especial, Daniel, Felipe e Wellington.

Às companheiras de trabalho, que sempre me alertam para o perigo de mais uma pizza e um hambúrguer, em especial, Larissa, Pillar e Shayane.

Ao senhor Sérgio do prédio, que me deixa o jornal todos os dias no escaninho do apartamento.

Ao Dr. Renato Cordani pelas contribuições feitas ao trabalho.

E também ao CNPq, que financiou esta pesquisa e não me deixou morrer de fome.

Resumo da Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Geofísica do Observatório Nacional/MCTI como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Geofísica (M.Sc.)

## MODELAGEM MAGNÉTICA 3D DE CORPOS ELIPSOIDAIOS

Diego Takahashi Tomazella

Março/2017

Orientador: Vanderlei Coelho de Oliveira Jr.

Programa: Geofísica

Desde a segunda metade do século dezenove, uma vasta literatura sobre a modelagem magnética de corpos elipsoidais foi publicada. Apresenta-se, nesta dissertação, uma revisão integrada da teoria sobre a modelagem magnética de elipsoides triaxiais, prolatas e oblatis, com orientações arbitrárias, com ou sem magnetização remanente e com suscetibilidade magnética tanto isotrópica como anisotrópica. Este trabalho também apresenta uma discussão teórica acerca do valor de 0,1 SI que é comumente utilizado na literatura como a susceptibilidade isotrópica, a partir da qual a desmagnetização deve ser levada em consideração na modelagem. Este valor parece ter sido obtido de forma empírica e pouco tem sido discutido sobre isso na comunidade geocientífica. Este trabalho propõe uma definição deste valor limite com base no conhecimento prévio do intérprete sobre a forma do corpo e sobre o erro relativo máximo permitido na magnetização resultante calculada na modelagem. Conjuntamente, apresenta-se uma série de rotinas capazes de calcular o campo magnético gerado por fontes elipsoidais triaxiais, prolatas e oblitas. As rotinas foram desenvolvidas em linguagem *Python*, com base no pacote *Fatiando a Terra* e exemplos apresentados nesta dissertação demonstram a facilidade de uso destas. Estas rotinas podem ser utilizadas tanto como ferramenta educacional (e.g., métodos potenciais e magnetismo de rochas) como para a geofísica aplicada (e.g., caracterização de corpos mineralizados de alta susceptibilidade) e estão disponibilizadas livremente no link <https://github.com/DiegoTaka/ellipsoid-magnetic> para toda a comunidade científica.

Abstract of Dissertation presented to Observatório Nacional/MCTI as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## 3D MAGNETIC MODELLING FOR ELLIPSOIDAL BODIES

Diego Takahashi Tomazella

March/2017

Advisor: Vanderlei Coelho de Oliveira Jr.

Department: Geophysics

Since the second half of the nineteenth century, a vast literature has been published on the magnetic modeling of uniformly magnetized ellipsoids. In this work, we present a integrated review about magnetic modeling of triaxial, prolate and oblate ellipsoids, with arbitrary orientation, with or without remanent magnetization and with both isotropic and anisotropic susceptibilities. We also bring a theoretical discussion regarding the common value of isotropic susceptibility (0.1 SI), widely used by geoscientific community, and not often discussed, as the limit of which the self-demagnetization can be overlooked in magnetic modeling. Apparently, this value was obtained empirically and we propose an alternative way of determining its limit, based on previous knowledge of the shape and the maximum relative error allowed in the resultant magnetization. Jointly, we provide a set of routines capable of modeling the magnetic field produce by triaxial, prolate and oblate ellipsoidal bodies. These routines are written in Python language as part of the *Fatiando a Terra* package. Examples in this work show the friendly and easy usage of the program. Hence, we hope that this work can be useful both as educational tool (e.g. Potential Methods and rock magnetism) as to applied geophysics (e.g. high susceptibility bodies characterization) and are freely available at the link <https://github.com/DiegoTaka/ellipsoid-magnetic> for the geoscientific community.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Metodologia</b>	<b>4</b>
2.1 Parâmetros geométricos e sistemas de coordenadas . . . . .	4
2.2 Background Teórico . . . . .	6
2.3 Transformação de coordenadas . . . . .	8
2.4 Tensores de depolarização transformados $\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}})$ . . . . .	10
2.4.1 Tensor de depolarização $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$ . . . . .	10
2.4.2 Tensor de depolarização $\tilde{\mathbf{N}}^\ddagger(\tilde{\mathbf{r}})$ . . . . .	12
2.5 Campo magnético interno e magnetização . . . . .	13
2.6 Campo magnético externo e anomalia de campo-total . . . . .	17
<b>3 Implementação computacional</b>	<b>20</b>
<b>4 Simulações Numéricas e Discussões</b>	<b>26</b>
4.1 Modelos elipsoidais . . . . .	26
4.2 Fatores de desmagnetização . . . . .	34
4.3 Comparações entre a $\Delta T(\mathbf{r})$ produzida por modelos elipsoidais similares	37
4.4 Susceptibilidade . . . . .	44
4.5 Anisotropia de forma . . . . .	46
<b>5 Conclusões</b>	<b>48</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>50</b>
<b>A Relação entre as derivadas das funções <math>f(\mathbf{r})</math> e <math>\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})</math></b>	<b>55</b>

<b>B Parâmetro <math>\lambda</math> e suas derivadas espaciais</b>	<b>57</b>
B.1 Parâmetro $\lambda$ definido para os elipsoides triaxiais . . . . .	57
B.2 Parâmetro $\lambda$ que define os elipsoides prolatos e oblatis . . . . .	59
B.3 Derivadas espaciais do parâmetro $\lambda$ . . . . .	60

# Listas de Figuras

2.1	Esquema representativo do sistema de coordenadas usado para representar um corpo elipsoidal.	19
3.1	Exemplo de <i>script</i> para gerar um modelo elipsoidal triaxial e calcular a anomalia de campo total $\Delta T(\mathbf{r})$ (Eq. 2.78). O dicionário com as propriedades físicas contém a ‘ <i>remanence</i> ’ (intensidade, inclinação e declinação) e ‘ <i>k</i> ’ ( $k_1, k_2, k_3$ , strike, dip, rake).	22
3.2	Anomalia de campo total $\Delta T(\mathbf{r})$ (Eq. 2.78) produzida pelo código da Fig. 3.1.	23
3.3	Código fonte da rotina “ <i>tf_c</i> ” utilizada para calcular a anomalia de campo total $\Delta T(\mathbf{r})$ (Eq. 2.78) produzida pelo modelo elipsoidal definido na Fig. 3.1. Esta rotina utiliza outras rotinas que também foram desenvolvidas neste trabalho como parte do módulo <i>ellipsoid_triaxial</i> (Fig. 3.1).	24
3.4	Validação dos fatores de desmagnetização. Foram gerados 200 elipsóides triaxiais com semi-eixos $a = a_0 + u$ , $b = b_0 + u$ e $c = c_0 + u$ , em que $a_0 = 500$ m, $b_0 = 100$ m, $c_0 = 50$ m e $500 \leq u \leq 30000$ m. A figura mostra a soma dos fatores de desmagnetização $\tilde{n}_{11}^\dagger$ , $\tilde{n}_{22}^\dagger$ e $\tilde{n}_{33}^\dagger$ (Eqs. 2.30, 2.31 e 2.32), que está representada pela linha azul, que é igual à 1 (um), independente do tamanho dos eixos e do tipo de elipsoide.	25
4.1	Campo gerado pelo elipsoide triaxial definido na Tabela 4.1. Componentes A) $x$ , B) $y$ e C) $z$ da indução magnética $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$ (Eq. 2.77). D) Anomalia de campo total $\Delta T(\mathbf{r})$ (Eq. 2.78). Todos os valores estão em nT.	27
4.2	Campo gerado pelo elipsoide prolato definido na Tabela 4.2. Componentes A) $x$ , B) $y$ e C) $z$ da indução magnética $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$ (Eq. 2.77). D) Anomalia de campo total $\Delta T(\mathbf{r})$ (Eq. 2.78). Todos os valores estão em nT.	29

4.3 Campo gerado pelo elipsoide oblato definido na Tabela 4.3. Componentes A) $x$ , B) $y$ e C) $z$ da indução magnética $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$ (Eq. 2.77). D) Anomalia de campo total $\Delta T(\mathbf{r})$ (Eq. 2.78). Todos os valores estão em nT. . . . .	30
4.4 Campo gerado pelos elipsoides triaxiais definido na Tabela 4.4. Componentes A) $x$ , B) $y$ e C) $z$ da indução magnética $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$ (Eq. 2.77). D) Anomalia de campo total $\Delta T(\mathbf{r})$ (Eq. 2.78). Todos os valores estão em nT. . . . .	32
4.5 Scripts utilizados para gerar os resultados mostrados: A) na Figura 4.1, B) na Figura 4.2, C) na Figura 4.3 e D) na Figura 4.4. A descrição do código é similar àquela mostrada na Figura 3.1. . . . .	33
4.6 Comparação entre os fatores de desmagnetização $\tilde{n}_{11}^\dagger$ (azul), $\tilde{n}_{22}^\dagger$ (verde) e $\tilde{n}_{33}^\dagger$ (vermelho) de um conjunto de 200 elipsoides triaxiais com semi-eixos $a = a_0 + u$ , $b = b_0 + u$ e $c = c_0 + u$ , em que $500 \leq u \leq 30000$ , $a_0 = 500$ m, $b_0 = 100$ m e $c_0 = 50$ m. A linha preta horizontal tracejada representa o valor 1/3. Os fatores de desmagnetização foram calculados, respectivamente, pelas Eqs. 2.30, 2.31 e 2.32. . . . .	34
4.7 Comparação entre os fatores de desmagnetização $\tilde{n}_{11}^\dagger$ (azul) e $\tilde{n}_{22}^\dagger$ (verde) de um conjunto de 200 elipsoides prolatos com semi-eixos $a = mb_0$ e $b = b_0$ , em que $b_0 = 100$ m e $1,1 \leq m \leq 100$ m. A linha preta horizontal tracejada representa o valor 1/3. Os fatores de desmagnetização foram calculados, respectivamente pelas Eq. 2.35, 2.36. . . . .	35
4.8 Comparação entre os fatores de desmagnetização $\tilde{n}_{11}^\dagger$ (azul) e $\tilde{n}_{22}^\dagger$ (verde) de um conjunto de 200 elipsoides oblatos com semi-eixos $a = mb_0$ e $b = b_0$ , em que $b_0 = 1000$ m e $0,05 \leq m \leq 1$ . A linha preta horizontal tracejada representa o valor 1/3. Os fatores de desmagnetização foram calculados, respectivamente pelas Eq. 2.37, 2.38. . . . .	36
4.9 Comparação entre a anomalia de campo total $\Delta T(\mathbf{r})$ (Eq. 2.78) produzida (A) pelo elipsoide triaxial definido na Tabela 4.5 e (B) por uma esfera com centro em $(0, 0, 1000)$ e raio 500 m. Os dois corpos sintéticos possuem a mesma magnetização $\mathbf{M}$ (Eq. 2.60). A anomalia produzida pela esfera foi calculada utilizando-se o pacote <i>Fatiando a Terra</i> . Os dados estão calculados em uma malha regular de $200 \times 200$ pontos, no plano horizontal $z = 0$ m. . . . .	38
4.10 Comparação entre a anomalia de campo total $\Delta T(\mathbf{r})$ (Eq. 2.78) produzida (A) pelo elipsoide triaxial definido na Tabela 4.6 e (B) produzida pelo elipsoide prolato definido na Tabela 4.7. . . . .	41

4.11 Comparação entre a anomalia de campo total $\Delta T(\mathbf{r})$ (Eq. 2.78) produzida (A) pelo elipsoide triaxial definido na Tabela 4.8 e (B) produzida pelo elipsoide oblato definido na Tabela 4.9. . . . .	43
4.12 Efeito da susceptibilidade isotrópica $\chi$ na modelagem do elipsoide triaxial definido na Tabela 4.10. As linhas azul e verde representam, respectivamente, a inclinação $I$ e a declinação $D$ da magnetização resultante $\mathbf{M}$ (Eq. 2.60) deste elipsoide em função da suscetibilidade isotrópica $\chi$ . As linhas pontilhadas horizontais preta e vermelha representam, respectivamente, a inclinação $I_0$ e a declinação $D_0$ do campo geomagnético local (Tabela 4.10). A linha vertical preta representa o valor de suscetibilidade isotrópica $\chi = 0,1 \text{ SI}$ , que é comumente aceito como o limite a partir do qual a desmagnetização deve ser considerada na modelagem. A linha vertical amarela representa a suscetibilidade isotrópica $\chi_{max}$ calculado com a Eq. 2.72 para que o erro relativo na magnetização seja menor ou igual a $\epsilon = 5\%$ . . . . .	45
4.13 Simulação, da mudança do vetor de magnetização resultante (Eq. 2.17), de um elipsoide triaxial com o aumento do semi-eixo maior. O elipsoide está imerso em um campo externo constante de declinação $90^\circ$ e possui o semi-eixo maior orientado com um azimute de $10^\circ$ . Ao longo da sequência das figuras, aumentei o semi-eixo maior $a$ do elipsoide (Tabela 4.11) e mantive os demais eixos fixos. Nota-se a tendência do vetor de magnetização resultante (seta em vermelho) em se alinhar com o semi-eixo maior. . . . .	47

# Listas de Tabelas

4.1	Parâmetros do elipsoide triaxial que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.1. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulos de <i>strike</i> , <i>dip</i> e <i>rake</i> , respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários $\mathbf{u}_1$ , $\mathbf{u}_2$ , $\mathbf{u}_3$ por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8. . . . .	26
4.2	Parâmetros do elipsoide prolato que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.2. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulos de <i>strike</i> , <i>dip</i> e <i>rake</i> , respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários $\mathbf{u}_1$ , $\mathbf{u}_2$ , $\mathbf{u}_3$ por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8. . . . .	28
4.3	Parâmetros do elipsoide oblato que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.3. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulos de <i>strike</i> , <i>dip</i> e <i>rake</i> , respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários $\mathbf{u}_1$ , $\mathbf{u}_2$ , $\mathbf{u}_3$ por meio das Eqs. 2.9, 2.10 e 2.11. . . . .	28
4.4	Parâmetros dos dois elipsoides triaxiais que produzem o campo magnético mostrado na Figura 4.4. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulos de <i>strike</i> , <i>dip</i> e <i>rake</i> , respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários $\mathbf{u}_1$ , $\mathbf{u}_2$ , $\mathbf{u}_3$ por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8. . . . .	31
4.5	Parâmetros do elipsoide triaxial que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.9A. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulos de <i>strike</i> , <i>dip</i> e <i>rake</i> , respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários $\mathbf{u}_1$ , $\mathbf{u}_2$ , $\mathbf{u}_3$ por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8. . . . .	37
4.6	Parâmetros do elipsoide triaxial que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.10A. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulos de <i>strike</i> , <i>dip</i> e <i>rake</i> , respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários $\mathbf{u}_1$ , $\mathbf{u}_2$ , $\mathbf{u}_3$ por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8. . . . .	40

4.7 Parâmetros do elipsoide prolato que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.10B. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulos de <i>strike</i> , <i>dip</i> e <i>rake</i> , respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários $\mathbf{u}_1$ , $\mathbf{u}_2$ , $\mathbf{u}_3$ por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8. . . . .	40
4.8 Parâmetros do elipsoide triaxial que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.11A. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulos de <i>strike</i> , <i>dip</i> e <i>rake</i> , respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários $\mathbf{u}_1$ , $\mathbf{u}_2$ , $\mathbf{u}_3$ por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8. . . . .	42
4.9 Parâmetros do elipsoide oblato que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.11B. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulos de <i>strike</i> , <i>dip</i> e <i>rake</i> , respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários $\mathbf{u}_1$ , $\mathbf{u}_2$ , $\mathbf{u}_3$ por meio das Eqs. 2.9, 2.10 e 2.11. . . . .	42
4.10 Parâmetros do elipsoide triaxial que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.12. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulos de <i>strike</i> , <i>dip</i> e <i>rake</i> , respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários $\mathbf{u}_1$ , $\mathbf{u}_2$ , $\mathbf{u}_3$ por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8. . . . .	45
4.11 Parâmetros do elipsoide triaxial modelado. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulos de <i>strike</i> , <i>dip</i> e <i>rake</i> , respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários $\mathbf{u}_1$ , $\mathbf{u}_2$ , $\mathbf{u}_3$ por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8. . . . .	46

# Listas de símbolos

$U$ : Potencial gravitacional escalar.

$\rho$ : densidade.

$x, y, z$  Sistema de coordenadas Cartesianas principal.

$(x_c, y_c, z_c)$ : Centro do elipsoide.

$a, b, c$ : Semi-eixos maior, intermediário e menor, respectivamente.

$\mathbf{r}$ : vetor que define um ponto na superfície do elipsoide.

$\mathbf{r}_c$ : vetor que define o centro do elipsoide.

$\varepsilon, \zeta, \eta$ : Orientações do elipsoide (*strike, dip, rake*, respectivamente), utilizadas para calcular  $\alpha, \gamma$ , e  $\delta$ .

$\mathbf{V}$ : Matriz de transformação de coordenadas, cujas colunas são definidas por vetores unitários  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , e  $\mathbf{v}_3$ , calculadas a partir dos ângulos  $\alpha, \gamma$ , e  $\delta$ .

$\sim$ : Símbolo que denota grandezas referidas ao sistema de coordenadas local.

$\mathbf{H}_0$ : Campo geomagnético (intensidade).

$\mathbf{H}$ : Campo magnético (intensidade em A/m).

$V$ : Potencial magnético escalar.

$\mathbf{M}$ : Vetor de magnetização.

$\dagger$ : Símbolo que denota grandezas referidas dentro do corpo.

$\ddagger$ : Símbolo que denota grandezas referidas fora do corpo.

$\mathbf{K}$ : Tensor de segunda ordem, que representa a susceptibilidade magnética do corpo.

$k_1, k_2, k_3$ : valores de susceptibilidade principais.

$\mathbf{U}$ : Matriz que contém os vetores unitários das direções de susceptibilidade.

$\chi$ : Susceptibilidade para o caso isotrópico.

$\mathbf{N}$ : Tensor de segunda ordem, que representa a depolarização.

$n_{11}^\dagger, n_{22}^\dagger, n_{33}^\dagger$ : Fatores de desmagnetização, referentes ao semi-eixos maior, intermediário e menor, respectivamente.

$\lambda$ : maior raiz real da equação cúbica ou quadrática que define a superfície de um elipsoide (ver Apêndice B).

$F(\kappa, \phi), E(\kappa, \phi)$ : Integrais elípticas normais de Legendre de primeiro e segundo tipo, respectivamente.

$\epsilon$ : Erro relativo máximo da magnetização.

$\Delta\mathbf{H}$ : O campo magnético (intensidade em A/m) produzido por um elipsoide.

$\Delta T$ : Anomalia de campo total.

$\mathbf{B}_0$ : Campo geomagnético (indução) local (em nT).

$\Delta \mathbf{B}$ : Campo magnético (indução em nT) pelo elipsoide.

# Capítulo 1

## Introdução

Baseado na teoria matemática da indução magnética desenvolvida por POISSON (1824), MAXWELL (1873), afirmou que se  $U$  é o potencial gravitacional produzido por um corpo de densidade  $\rho$  e forma geométrica arbitrária em um ponto  $(x, y, z)$ , então  $-\frac{\partial U}{\partial x}$  é o potencial magnético escalar que seria produzido por este mesmo corpo, no mesmo ponto, se sua magnetização fosse uniforme ao longo do eixo  $x$  e tivesse intensidade  $\rho$ . MAXWELL (1873), generalizou essa ideia como uma forma de determinar o potencial magnético escalar produzido por um corpo magnetizado uniformemente em qualquer direção. Presumindo que esta magnetização uniforme seria devida à indução e proporcional ao campo magnético resultante (intensidade) dentro do corpo, Maxwell postulou que este campo também deveria ser uniforme e paralelo à magnetização, uma vez que este é proporcional ao gradiente do potencial magnético escalar dentro do corpo. Como consequência, o potencial gravitacional  $U$  nos pontos dentro do corpo deveria ser descrito por uma função quadrática das coordenadas espaciais. Aparentemente, MAXWELL (1873) foi o primeiro a postular que elipsoides são os únicos corpos finitos que possuem um potencial gravitacional que satisfaz essa propriedade e que, portanto, são os únicos que podem ser magnetizados uniformemente na presença de um campo magnético uniforme.

A capacidade de ser magnetizado uniformemente na presença de um campo magnético uniforme pode ser estendida para outros corpos cuja forma se deriva de um elipsoide (e.g., esferas, cilindros elípticos). Por outro lado, todos os demais corpos não podem ser magnetizados uniformemente na presença de um campo indutor uniforme (CLARK e EMERSON, 1999; JAHREN, 1963; JOSEPH e SCHLÖMANN, 1965). Uma consequência importante proveniente da uniformidade do campo magnético interno em elipsoides, é que estes corpos são os únicos que possuem solução verdadeiramente analítica para a desmagnetização (CLARK *et al.*, 1986). A desmagnetização é o efeito produzido pelo campo que é criado no interior dos corpos (campo desmagnetizante) em resposta ao campo indutor. A desmagnetização contribui para o decréscimo da magnetização resultante e dependente apenas da forma do corpo,

isto é, depende apenas dos seus semi-eixos. A desmagnetização dá origem a anisotropia magnética de forma. O termo anisotropia de forma pode ser definido como a existência de direções preferenciais de magnetização dentro do corpo, isto é, há direções em que o corpo é magnetizado com mais facilidade e direções em que é mais difícil (CLARK e EMERSON, 1999; DUNLOP e ÖZDEMIR, 1997; THOMPSON e OLDFIELD, 1986). Há outros dois tipos de anisotropia magnética: a anisotropia magnetocristalina e a anisotropia magnetostritiva. A anisotropia magnetocristalina é resultado da geometria interna e da composição química dos minerais que formam o corpo. Já a anisotropia magnetostritiva ocorre quando as propriedades magnéticas do corpo são alteradas quando este é submetido a uma tensão (TAUXE, 2003; THOMPSON e OLDFIELD, 1986).

É comumente aceito pela comunidade científica, que a desmagnetização pode ser negligenciada se o corpo possui uma susceptibilidade menor que 0.1 SI (AUSTIN *et al.*, 2014; CLARK *et al.*, 1986; CLARK, 2014; EMERSON *et al.*, 1985; ESKOLA e TERVO, 1980; GUO *et al.*, 1998, 2001; HILLAN e FOSS, 2013; PURSS e CULL, 2005). Também é comumente aceito que negligenciar a desmagnetização em corpos que possuem susceptibilidade maior que 0.1 SI, tal como formações ferríferas bandadas, pode comprometer drasticamente os resultados obtidos por modelagem magnética.

Devido a flexibilidade de parametrização, elipsoides podem assumir uma grande variedade de formas e assim serem usados para representar por exemplo, desde corpos esféricos (três semi-eixos similares) até corpos mineralizados em formato de *pipe* (um semi-eixo mais alongado). FARRAR (1979) demonstrou a importância do modelo elipsoidal ao utilizá-lo para representar em consideração a desmagnetização de forma adequada a determinar direções de perfuração confiáveis no campo de Tennant Creek, Austrália. Posteriormente, HOSCHKE (1991) também mostrou a eficiência do modelo elipsoidal para localizar e definir os limites de corpos mineralizados de ferro no campo de Tennant Creek. CLARK (2000) forneceu uma discussão detalhada sobre a influência da desmagnetização na interpretação magnética do depósito de cobre-ouro de Osborne, Austrália. Este depósito é hospedado por corpos mineralizados de ferro de alta susceptibilidade. De acordo com CLARK (2000), negligenciar a desmagnetização levaria à um erro de  $\approx 55^\circ$  na interpretação do mergulho real da estrutura. Baseado em modelagem magnética e em medidas de propriedades magnéticas, AUSTIN *et al.* (2014) mostraram que, ao contrário de interpretações anteriores, a magnetização do depósito de óxido de ferro-cobre-ouro (IOCG) em Candelaria, Chile, não é dominada pela componente da indução. Na verdade, o depósito tem uma fraca magnetização remanente e é fortemente afetada pela desmagnetização.

Estes exemplos mostram a importância prática da desmagnetização para a correta

interpretação dos dados magnéticos produzidos por corpos geológicos de alta susceptibilidade. Além disso, mostram a importância do modelo elipsoidal para produzir modelos geológicos confiáveis de corpos mineralizados, o que pode significar em uma redução significativa dos custos associados com perfuração.

Uma vasta literatura sobre a modelagem magnética de corpos elipsoidais foi desenvolvida ao longo dos anos por muitos pesquisadores. No entanto, é muito difícil encontrar, em um mesmo trabalho, os aspectos teóricos envolvidos na modelagem magnética de elipsoides triaxiais, prolatos e oblato, que possuam susceptibilidade magnética isotrópica e anisotrópica e que esteja orientado de forma arbitrária. Além disso, falta para a comunidade de geociências uma ferramenta de fácil uso para simular o campo magnético produzido por elipsoides uniformemente magnetizados. Tal ferramenta seria útil tanto para ensino como para a pesquisa em geofísica de exploração.

Nesta dissertação, apresento uma revisão teórica integrada sobre a modelagem magnética de corpos elipsoidais. A revisão considera corpos triaxiais, prolatos e oblato, com susceptibilidade isotrópica e anisotrópica e com a presença de magnetização remanente. Além disso, apresento uma discussão sobre o valor de susceptibilidade isotrópica acima do qual a desmagnetização deve ser levada em consideração na modelagem. Este valor limite é definido com base na forma do corpo e no erro relativo máximo que o intérprete define para a magnetização resultante calculada na modelagem. Nesta dissertação, também apresento uma série de rotinas, escritas em linguagem *Python* para modelar o campo magnético produzido por elipsoides. As rotinas foram baseadas no pacote *Fatiando a Terra* (UIEDA *et al.*, 2013), que é um projeto de código aberto e acesso livre para a modelagem e inversão em geofísica.

# Capítulo 2

## Metodologia

### 2.1 Parâmetros geométricos e sistemas de coordenadas

Seja  $(x, y, z)$  um ponto referido à um sistema de coordenadas Cartesianas com eixo  $x$  apontado para o norte,  $y$  para leste e  $z$  para baixo. Por conveniência, este sistema de coordenadas foi denominado *sistema de coordenadas principal*. Considerando um corpo elipsoidal com centro no ponto  $(x_c, y_c, z_c)$ , semi-eixos definidos por constantes positivas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e orientações definidas por três ângulos  $\varepsilon$ ,  $\zeta$ , e  $\eta$  (Figura 2.1). Os ângulos  $\varepsilon$ ,  $\zeta$ , e  $\eta$  são chamados *strike*, *dip* e *rake*, respectivamente, e são comumente usados para definir a orientação de estruturas geológicas (ALLMENDINGER *et al.*, 2012; CLARK *et al.*, 1986).

Os pontos localizados sobre a superfície deste corpo elipsoidal satisfazem a seguinte equação:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)^T \mathbf{A} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) = 1 , \quad (2.1)$$

em que  $\mathbf{r} = [ x \ y \ z ]^\top$ ,  $\mathbf{r}_c = [ x_c \ y_c \ z_c ]^\top$ ,  $\mathbf{A}$  é uma matriz positiva definida dada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-2} \end{bmatrix} \mathbf{V}^\top , \quad (2.2)$$

e  $\mathbf{V}$  é uma matriz ortogonal cujas colunas são definidas por vetores unitários  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , e  $\mathbf{v}_3$  (Fig. 2.1b), respectivamente. Estes vetores unitários são comumente descritos em termos de ângulos auxiliares  $\alpha$ ,  $\gamma$ , e  $\delta$ , que não são usados pela comunidade geocientífica. Entretanto podemos defini-los a partir de  $\varepsilon$ ,  $\zeta$ , e  $\eta$  como dado por (CLARK *et al.*, 1986):

$$\alpha = \varepsilon - \cos^{-1} \left[ \frac{\cos \eta}{(1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \eta)^{\frac{1}{2}}} \right], \quad (2.3)$$

$$\gamma = \tan^{-1} \left( \frac{\cos \zeta}{\sin \zeta \cos \eta} \right) \quad (2.4)$$

e

$$\delta = \sin^{-1} (\sin \zeta \sin \eta), \quad (2.5)$$

em que  $-90^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$  e  $0 \leq \delta \leq 90^\circ$ . Assim, dados os ângulos  $\varepsilon$ ,  $\zeta$ , e  $\eta$  (Fig. 2.1a e Eqs. 2.3, 2.4, e 2.5), podemos definir os vetores unitários  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , e  $\mathbf{v}_3$  (Fig. 2.1b) de acordo com o tipo de elipsoide. Para elipsoides triaxiais (i.e.,  $a > b > c$ ), estes vetores unitários são dados por (CLARK *et al.*, 1986):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \cos \delta \\ -\sin \alpha \cos \delta \\ -\sin \delta \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma \sin \delta + \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma \sin \delta - \cos \alpha \sin \gamma \\ -\cos \gamma \cos \delta \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \sin \delta \\ -\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \sin \delta \\ \sin \gamma \cos \delta \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Similarmente, os vetores unitários  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  para elipsoides prolatos (i.e.,  $a > b = c$ ) são calculados de acordo com as Eqs. 2.6, 2.7, e 2.8, mas com  $\gamma = 0^\circ$  (EMERSON *et al.*, 1985).

Finalmente, os vetores unitários  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  para elipsoides oblatos (i.e.,  $a < b = c$ ) são calculados da seguinte forma:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \gamma \sin \delta + \sin \alpha \cos \gamma \\ -\sin \alpha \sin \gamma \sin \delta - \cos \alpha \cos \gamma \\ \sin \gamma \cos \delta \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \cos \delta \\ -\sin \alpha \cos \delta \\ -\sin \delta \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \sin \delta \\ -\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \sin \delta \\ -\cos \gamma \cos \delta \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Dessa forma, a matriz  $\mathbf{V}$  fica definida como:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} . \quad (2.12)$$

em que  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  são calculados com as Eqs. 2.6, 2.7, e 2.8 dependendo do tipo de elipsoide.

A modelagem magnética de um corpo elipsoidal é comumente feita em um sistema de coordenadas Cartesianas particular, alinhado com os semi-eixos e sua origem coincidente com o centro do elipsoide (Fig. 2.1b). Por conveniência, este sistema de coordenadas foi denominado *sistema de coordenadas local*. A relação entre as coordenadas Cartesianas  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  de um ponto no sistema de coordenadas local e as coordenadas Cartesianas  $(x, y, z)$  do mesmo ponto no sistema principal é dada por:

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{V}^\top (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) , \quad (2.13)$$

em que  $\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z}]^\top$ ,  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}_c$  são definidas na Eq. 2.1 e a matriz  $\mathbf{V}$  (Eq. 2.12) é definida de acordo com o tipo de elipsoide. Ao longo deste trabalho, as grandezas referidas ao sistema de coordenadas local são representadas utilizando-se símbolo "˜".

## 2.2 Background Teórico

Considere um corpo geológico localizado na crosta, que possua volume  $\vartheta$ , formato aproximadamente elipsoidal e que esteja imerso em um campo magnético uniforme  $\mathbf{H}_0$  ( $\text{Am}^{-1}$ ) dado por:

$$\mathbf{H}_0 = \|\mathbf{H}_0\| \begin{bmatrix} \cos I \cos D \\ \cos I \sin D \\ \sin I \end{bmatrix} , \quad (2.14)$$

em que  $\|\cdot\|$  é a norma Euclidiana e  $D$  e  $I$  são respectivamente, a declinação e inclinação do campo no sistema de coordenadas principal (Fig. 2.1a). Este campo uniforme representa a componente principal do campo magnético da Terra, que presume ser gerado na núcleo externo líquido da Terra. Ao longo deste trabalho, este campo uniforme é denominado *campo geomagnético local*. Na ausência de correntes de condução, o campo magnético total  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.2) na posição  $\mathbf{r}$  (Eq. 2.13) de um ponto no sistema de coordenadas principal é definido como (ESKOLA e TERVO, 1980; REITZ *et al.*, 1992; SHARMA, 1966; STRATTON, 2007):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 - \nabla V(\mathbf{r}) , \quad (2.15)$$

em que o segundo termo é o gradiente negativo do potencial magnético escalar  $V(\mathbf{r})$  dado por:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\vartheta} \mathbf{M}(\mathbf{r}')^\top \nabla \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) dx' dy' dz'. \quad (2.16)$$

Nesta equação,  $\mathbf{r}' = [x' \ y' \ z']^\top$  é o vetor posição de um ponto localizado dentro do volume  $\vartheta$ , a integral é feita sobre as variáveis  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  e  $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$  é o vetor de magnetização (em  $\text{Am}^{-1}$ ). A Eq. 2.16 é válida para pontos localizados dentro ou fora do corpo magnetizado (DUBOIS, 1896; REITZ *et al.*, 1992; STRATTON, 2007).

Considere que o corpo tem uma magnetização uniforme dada por:

$$\mathbf{M} = \mathbf{K} \mathbf{H}^\dagger, \quad (2.17)$$

em que  $\mathbf{H}^\dagger$  é o campo magnético uniforme resultante em qualquer ponto dentro do corpo e  $\mathbf{K}$  é um tensor de segunda ordem constante, que representa a susceptibilidade magnética do corpo. Esta é uma boa aproximação para corpos em temperatura ambiente, sujeitos a um campo indutor com intensidade  $\leq 1$  mT (ROCHETTE *et al.*, 1992). Neste caso, o tensor de susceptibilidade  $\mathbf{K}$  é representado, no sistema de coordenadas principal (Fig. 2.1a), como:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \mathbf{U}^\top, \quad (2.18)$$

em que  $k_1 > k_2 > k_3$  são as *susceptibilidades principais* e  $\mathbf{U}$  é uma matriz ortogonal cujas colunas  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são vetores unitários chamados de *direções principais*. Os vetores unitários  $\mathbf{u}_i$  podem ser definidos de modo similar a que foi utilizada para definir os vetores  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , e  $\mathbf{v}_3$  (Eqs. 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, e 2.11), por um conjunto de ângulos  $\varepsilon$ ,  $\zeta$ , e  $\eta$  e por conseguinte os ângulos auxiliares  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  (Eqs. 2.3, 2.4, e 2.5).

Se as susceptibilidades principais são diferentes umas das outras, dizemos que o corpo possui uma anisotropia de susceptibilidade magnética (AMS). A AMS é geralmente associada à anisotropia magnetocristalina, que é causada por uma orientação preferencial dos grãos magnéticos dos minerais que formam a rocha (DUNLOP e ÖZDEMİR, 1997; FULLER, 1963; HROUDA, 1982; JANÁK, 1972; MACDONALD e ELLWOOD, 1987; ROCHETTE *et al.*, 1992; TAUXE, 2003; THOMPSON e OLDFIELD, 1986; UYEDA *et al.*, 1963). Para o caso particular em que as direções principais coincidem com os eixos do elipsoide, a matriz  $\mathbf{U}$  é igual a matriz  $\mathbf{V}$  (Eq. 2.2). Outro caso particular importante, é quando a susceptibilidade é isotrópica e, consequentemente, as susceptibilidades principais  $k_1$ ,  $k_2$ , e  $k_3$  (Eq. 2.18) são iguais a

constante  $\chi$ . Neste caso, o tensor de susceptibilidades  $\mathbf{K}$  (Eq. 2.18) assume a forma particular:

$$\mathbf{K} = \chi \mathbf{I}, \quad (2.19)$$

em que  $\mathbf{I}$  representa a matriz identidade.

Usando a magnetização  $\mathbf{M}$  definida pela Eq. 2.17, o campo magnético total  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.15) pode ser reescrito como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 - \mathbf{N}(\mathbf{r}) \mathbf{K} \mathbf{H}^\dagger, \quad (2.20)$$

em que  $\mathbf{N}(\mathbf{r})$  é uma matriz simétrica. O elemento  $ij$  de  $\mathbf{N}(\mathbf{r})$  é dado por:

$$n_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.21)$$

$r_1 = x$ ,  $r_2 = y$ ,  $r_3 = z$  são os elementos do vetor posição  $\mathbf{r}$  (Eq. 2.1), e

$$f(\mathbf{r}) = \iiint_{\vartheta} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dx' dy' dz'. \quad (2.22)$$

Note que a função escalar  $f(\mathbf{r})$  (Eq. 2.22) é proporcional ao potencial gravitacional que seria produzido pelo corpo elipsoidal de volume  $\vartheta$  se este tivesse uma densidade uniforme igual  $1/G$ , sendo  $G$  a da constante gravitacional. Pode ser mostrado que os elementos  $n_{ij}(\mathbf{r})$  são finitos tanto se  $\mathbf{r}$  é um ponto dentro ou fora do volume  $\vartheta$  (PEIRCE, 1902; WEBSTER, 1904). A matriz  $\mathbf{N}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.20) é chamada de *tensor de depolarização* (SOLIVÉREZ, 1981, 2008).

A parte seguinte desta dissertação é dedicada a descrever o campo magnético  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.20) nos pontos localizados tanto dentro como fora do volume  $\vartheta$  do corpo elipsoidal. Entretanto, o desenvolvimento matemático é convenientemente feito no sistema de coordenadas local (Fig. 2.1b).

## 2.3 Transformação de coordenadas

Para continuar a descrição da modelagem magnética de corpos elipsoidais, é conveniente definir duas importantes transformações de coordenadas. A primeira transforma a função escalar  $f(\mathbf{r})$  (Eq. 2.22) do sistema de coordenadas principal para uma nova função escalar  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$  no sistema de coordenada local. A função  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$  foi apresentada pela primeira vez por DIRICHLET (1839) para descrever o potencial gravitacional produzido por elipsoides homogêneos. Posteriormente, diversos autores deduziram e usaram esta função para descrever os campos magnéticos e gravitacionais produzidos por elipsoides triaxiais, prolatos e oblatis (CHANG, 1961; CLARK *et al.*, 1986; DUBOIS, 1896; KELLOGG, 1929; LOWES, 1974; MAXWELL, 1873;

OSBORN, 1945; PEAKE e DAVY, 1953; PEIRCE, 1902; STONER, 1945; STRATTON, 2007; TEJEDOR *et al.*, 1995; THOMSON e TAIT, 1879; WEBSTER, 1904). É conveniente usar  $\tilde{f}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}})$  e  $\tilde{f}^\ddagger(\tilde{\mathbf{r}})$  para definir a função  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$ , calculada nos pontos  $\tilde{\mathbf{r}}$  dentro e fora do volume  $\vartheta$  do corpo elipsoidal, respectivamente.

A função escalar  $\tilde{f}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}})$  é dada por:

$$\tilde{f}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}}) = \pi abc \int_0^\infty \left( 1 - \frac{\tilde{x}^2}{a^2 + u} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2 + u} - \frac{\tilde{z}^2}{c^2 + u} \right) \frac{1}{R(u)} du, \quad \tilde{\mathbf{r}} \in V, \quad (2.23)$$

em que

$$R(u) = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}. \quad (2.24)$$

Esta função representa o potencial gravitacional que seria produzido pelo corpo elipsoidal nos pontos localizados dentro do volume  $\vartheta$  se possuísse uma densidade uniforme igual ao inverso da constante gravitacional. Note que, para este caso, o potencial gravitacional é uma função quadrática das coordenadas espaciais  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ , e  $\tilde{z}$ . De forma similar, a função  $\tilde{f}^\ddagger(\tilde{\mathbf{r}})$  é dada por:

$$\tilde{f}^\ddagger(\tilde{\mathbf{r}}) = \pi abc \int_\lambda^\infty \left( 1 - \frac{\tilde{x}^2}{a^2 + u} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2 + u} - \frac{\tilde{z}^2}{c^2 + u} \right) \frac{1}{R(u)} du, \quad \tilde{\mathbf{r}} \notin V, \quad (2.25)$$

em que  $R(u)$  é definido pela Eq. 2.24 e o parâmetro  $\lambda$  é definido de acordo com o tipo de elipsoide como uma função das coordenadas espaciais  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ , e  $\tilde{z}$  (ver Apêndice B). Uma discussão detalhada sobre o parâmetro  $\lambda$  pode ser encontrada em WEBSTER (1904, p. 234), KELLOGG (1929, p. 184) e CLARK *et al.* (1986).

A segunda importante transformação de coordenadas é definida com respeito a Eq. 2.20. Usando a ortogonalidade de matriz  $\mathbf{V}$  (Eqs. 2.12), o campo magnético  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.20) pode ser transformado do sistema de coordenadas principal para o sistema de coordenadas local usando:

$$\underbrace{\mathbf{V}^\top \mathbf{H}(\mathbf{r})}_{\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{r}})} = \underbrace{\mathbf{V}^\top \mathbf{H}_0}_{\tilde{\mathbf{H}}_0} - \underbrace{\mathbf{V}^\top \mathbf{N}(\mathbf{r}) \mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}})} \underbrace{\mathbf{V}^\top \mathbf{K} \mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{K}}} \underbrace{\mathbf{V}^\top \mathbf{H}^\dagger}_{\tilde{\mathbf{H}}^\dagger}, \quad (2.26)$$

Nesta equação, o tensor de depolarização transformado  $\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}})$  é calculado como uma função do tensor de depolarização original  $\mathbf{N}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.20). Neste caso, os elementos de  $\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}})$  são calculados como função das derivadas segundas da função  $f(\mathbf{r})$  (Eq. 2.22), que é definida no sistema de coordenadas principal. Pode ser mostrado (Apêndice A), entretanto, que os elementos  $\tilde{n}_{ij}(\tilde{\mathbf{r}})$  de  $\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}})$  também podem ser calculados como:

$$\tilde{n}_{ij}(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_i \partial \tilde{r}_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.27)$$

em que  $\tilde{r}_1 = \tilde{x}$ ,  $\tilde{r}_2 = \tilde{y}$ , e  $\tilde{r}_3 = \tilde{z}$  são os elementos do vetor transformado  $\tilde{\mathbf{r}}$  (Eq. 2.13) e  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$  é dada pela Eq. 2.23 ou 2.25, dependendo se  $\tilde{\mathbf{r}}$  representa um ponto localizado dentro ou fora do volume  $\vartheta$  do corpo elipsoidal.

## 2.4 Tensores de depolarização transformados $\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}})$

### 2.4.1 Tensor de depolarização $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$

Sendo  $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$  o tensor de depolarização transformado para o caso em que  $\tilde{\mathbf{r}}$  (Eq. 2.13) representa um ponto dentro do corpo elipsoidal. Neste caso, os elementos de  $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$  são calculados de acordo com a Eq. 2.27, com  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$  dada por  $\tilde{f}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}})$  (Eq. 2.23). Como mencionado anteriormente,  $\tilde{f}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}})$  (Eq. 2.23) é uma função quadrática das coordenadas espaciais  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  and  $\tilde{z}$ . Consequentemente, os elementos  $\tilde{n}_{ij}^\dagger$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3$ , de  $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$  não dependem do vetor de posição transformado  $\tilde{\mathbf{r}}$  (equação 2.13). Além disso, os elementos fora da diagonal são nulos e os elementos da diagonal são dados por (STONER, 1945):

$$\tilde{n}_{ii}^\dagger = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{1}{(e_i^2 + u) R(u)} du , \quad i = 1, 2, 3 , \quad (2.28)$$

em que  $R(u)$  é definido pela Eq. 2.24 e  $e_1 = a$ ,  $e_2 = b$ , e  $e_3 = c$ . Estes elementos são comumente conhecidos como *fatores de desmagnetização* e são definidos de acordo com o tipo de elipsoide. Observe que, de acordo com as Eqs. 2.26 e A.7,

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \mathbf{V}^\top , \quad (2.29)$$

em que  $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$  é uma matriz diagonal e  $\mathbf{V}$  (Eqs. 2.12) é uma matriz ortogonal. Esta equação mostra que, para o caso particular em que  $\mathbf{r}$  e consequentemente  $\tilde{\mathbf{r}}$  representam um ponto dentro do volume  $\vartheta$  do elipsoide, os elementos  $\tilde{n}_{ii}^\dagger$  (Eq. 2.28) de  $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$  representam os autovalores, enquanto as colunas de  $\mathbf{V}$  representam os autovetores do tensor de depolarização  $\mathbf{N}(\mathbf{r})$  definido no sistema de coordenadas principal.

**Elipsoides triaxiais** Para elipsoides triaxiais (e.g.,  $a > b > c$ ), os fatores de desmagnetização obtidos a partir da Eq. 2.28 são dados por:

$$\tilde{n}_{11}^\dagger = \frac{abc}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} (a^2 - b^2)} [F(\kappa, \phi) - E(\kappa, \phi)] , \quad (2.30)$$

$$\tilde{n}_{22}^\dagger = -\frac{abc}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} (a^2 - b^2)} [F(\kappa, \phi) - E(\kappa, \phi)] + \frac{abc}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} (b^2 - c^2)} E(\kappa, \phi) - \frac{c^2}{b^2 - c^2} \quad (2.31)$$

e

$$\tilde{n}_{33}^\dagger = -\frac{abc}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} (b^2 - c^2)} E(\kappa, \phi) + \frac{b^2}{b^2 - c^2}, \quad (2.32)$$

em que

$$F(\kappa, \phi) = \int_0^\phi \frac{1}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}}} d\psi, \quad (2.33)$$

e

$$E(\kappa, \phi) = \int_0^\phi (1 - \kappa^2 \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}} d\psi, \quad (2.34)$$

com  $\kappa = [(a^2 - b^2) / (a^2 - c^2)]^{\frac{1}{2}}$  e  $\cos \phi = c/a$ . As funções  $F(\kappa, \phi)$  (Eq. 2.33) e  $E(\kappa, \phi)$  (Eq. 2.34) são chamadas de integrais elípticas normais de Legendre de primeiro e segundo tipo, respectivamente. STONER (1945) apresentou uma dedução detalhada dos fatores de desmagnetização  $\tilde{n}_{11}^\dagger$  (Eq. 2.30),  $\tilde{n}_{22}^\dagger$  (Eq. 2.31) e  $\tilde{n}_{33}^\dagger$  (Eq. 2.32). CLARK *et al.* (1986) apresentou fórmulas similares. Pode ser mostrado que estes fatores de desmagnetização satisfazem as condições  $\tilde{n}_{11}^\dagger + \tilde{n}_{22}^\dagger + \tilde{n}_{33}^\dagger = 1$  e  $\tilde{n}_{33}^\dagger > \tilde{n}_{22}^\dagger > \tilde{n}_{11}^\dagger$

**Elipsoides prolatos** Para elipsoides prolatos (e.g.,  $a > b = c$ ), os fatores de desmagnetização obtidos a partir da Eq. 2.28, sendo dados por:

$$\tilde{n}_{11}^\dagger = \frac{1}{m^2 - 1} \left\{ \frac{m}{(m^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \ln \left[ m + (m^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right] - 1 \right\} \quad (2.35)$$

e

$$\tilde{n}_{22}^\dagger = \frac{1}{2} \left( 1 - \tilde{n}_{11}^\dagger \right), \quad (2.36)$$

em que  $\tilde{n}_{33}^\dagger = \tilde{n}_{22}^\dagger$ , e  $m = a/b$ . As deduções detalhadas dos fatores de desmagnetização  $\tilde{n}_{11}^\dagger$  (Eq. 2.35) e  $\tilde{n}_{22}^\dagger$  (Eq. 2.36) podem ser encontradas, por exemplo, em STONER (1945). Essas fórmulas foram posteriormente apresentadas por EMERSON *et al.* (1985), mas sem nenhuma prova matemática. Pode ser mostrado que estes fatores de desmagnetização satisfazem as condições  $\tilde{n}_{11}^\dagger + 2\tilde{n}_{22}^\dagger = 1$  e  $\tilde{n}_{22}^\dagger > \tilde{n}_{11}^\dagger$ .

**Elipsoides oblatos** Para elipsoides oblatos (e.g.,  $a < b = c$ ), os fatores de desmagnetização obtidos a partir da Eq. 2.28 são dados por:

$$\tilde{n}_{11}^\dagger = \frac{1}{1 - m^2} \left[ 1 - \frac{m}{(1 - m^2)^{\frac{1}{2}}} \cos^{-1} m \right], \quad (2.37)$$

e

$$\tilde{n}_{22}^\dagger = \frac{1}{2} \left( 1 - \tilde{n}_{11}^\dagger \right), \quad (2.38)$$

em que  $\tilde{n}_{33}^\dagger = \tilde{n}_{22}^\dagger$  e  $m = a/b$ . As deduções detalhadas dos fatores de desmagnetização podem ser encontradas em STONER (1945). Essas fórmulas também podem ser encontradas em EMERSON *et al.* (1985), mas sem nenhuma prova matemática. A única diferença, entretanto, é que EMERSON *et al.* (1985) trocou o termo  $\cos^{-1}$  por um termo  $\tan^{-1}$ , de acordo com a identidade trigonométrica  $\tan^{-1}x = \cos^{-1}(1/\sqrt{x^2+1})$ ,  $x > 0$ . Pode ser mostrado que estes fatores de desmagnetização satisfazem as condições  $\tilde{n}_{11}^\dagger + 2\tilde{n}_{22}^\dagger = 1$  e  $\tilde{n}_{11}^\dagger > \tilde{n}_{22}^\dagger$ .

## 2.4.2 Tensor de depolarização $\tilde{\mathbf{N}}^\ddagger(\tilde{\mathbf{r}})$

Seja  $\tilde{\mathbf{N}}^\ddagger(\tilde{\mathbf{r}})$  o tensor de depolarização definido para o caso em que  $\tilde{\mathbf{r}}$  representa um ponto localizado fora do volume  $\vartheta$  do corpo. Os elementos  $\tilde{n}_{ij}^\ddagger(\tilde{\mathbf{r}})$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3$ , de  $\tilde{\mathbf{N}}^\ddagger(\tilde{\mathbf{r}})$  são calculadas de acordo com a Eq. 2.27, com  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$  dado por  $\tilde{f}^\ddagger(\tilde{\mathbf{r}})$  (Eq. 2.25). Rearranjando as equações apresentadas por CLARK *et al.* (1986), os elementos da diagonal  $\tilde{n}_{ii}^\ddagger$  e os elementos fora da diagonal  $\tilde{n}_{ij}^\ddagger$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3$ , são dados por:

$$\tilde{n}_{ii}^\ddagger(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{abc}{2} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{r}_i} h_i \tilde{r}_i - g_i \right) \quad (2.39)$$

e

$$\tilde{n}_{ij}^\ddagger(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{abc}{2} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{r}_i} h_j \tilde{r}_j \right) , \quad (2.40)$$

Em que

$$h_i = \frac{1}{(e_i^2 + \lambda) R(\lambda)} , \quad (2.41)$$

$$g_i = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{(e_i^2 + u) R(u)} du , \quad (2.42)$$

$e_1 = a$ ,  $e_2 = b$ ,  $e_3 = c$ , e  $\frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{r}_i}$  é definido no Apêndice B (Eq. B.22). As funções  $g_i$  (Eq. 2.42) são definidas de acordo com o tipo de elipsoide.

**Elipsoides Triaxiais** Para elipsoides triaxiais (e.g.,  $a > b > c$ ), as funções  $g_i$  (Eq. 2.42) são dadas por (CLARK *et al.*, 1986):

$$g_1 = \frac{2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}} [F(\kappa, \phi) - E(\kappa, \phi)] , \quad (2.43)$$

$$g_2 = \frac{2(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} \left[ E(\kappa, \phi) - \frac{(b^2 - c^2)}{(a^2 - c^2)} F(\kappa, \phi) - \frac{\kappa^2 \sin \phi \cos \phi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (2.44)$$

e

$$g_3 = \frac{2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{\sin \phi (1 - \kappa^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}{\cos \phi} - E(\kappa, \phi) \right] , \quad (2.45)$$

em que  $F(\kappa, \phi)$  e  $E(\kappa, \phi)$  são, respectivamente, definidas pelas Eqs. 2.33 e 2.34, mas com  $\sin \phi = \sqrt{(a^2 - c^2) / (a^2 + \lambda)}$ .

**Elipsoides prolatos** Para elipsoides prolatos (e.g.,  $a > b = c$ ), as funções  $g_i$  (Eq. 2.42) são dadas por:

$$g_1 = \frac{2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \ln \left[ \frac{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} + (a^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}}}{(b^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}}} \right] - \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2 + \lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.46)$$

e

$$g_2 = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{[(a^2 - b^2)(a^2 + \lambda)]^{\frac{1}{2}}}{b^2 + \lambda} - \ln \left[ \frac{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} + (a^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}}}{(b^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\}, \quad (2.47)$$

em que  $g_3 = g_2$ . Estas fórmulas podem ser obtidas manipulando apropriadamente aquelas apresentadas por EMERSON *et al.* (1985).

**Elipsoides oblato**s Para elipsoides oblato (i.e.,  $a < b = c$ ), as funções  $g_i$  (Eq. 2.42) são dadas por:

$$g_1 = \frac{2}{(b^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \left( \frac{b^2 - a^2}{a^2 + \lambda} \right)^{\frac{1}{2}} - \tan^{-1} \left[ \left( \frac{b^2 - a^2}{a^2 + \lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (2.48)$$

e

$$g_2 = \frac{1}{(b^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \tan^{-1} \left[ \left( \frac{b^2 - a^2}{a^2 + \lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{[(b^2 - a^2)(a^2 + \lambda)]^{\frac{1}{2}}}{b^2 + \lambda} \right\}, \quad (2.49)$$

em que  $g_3 = g_2$ . De forma similar ao caso prolato mostrado anteriormente, estas fórmulas podem ser obtidas manipulando apropriadamente aquelas apresentadas por (EMERSON *et al.*, 1985).

## 2.5 Campo magnético interno e magnetização

Utilizando a Eq. 2.26, é possível definir o campo magnético uniforme resultante  $\tilde{\mathbf{H}}^\dagger$  dentro do corpo como:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}^\dagger &= \tilde{\mathbf{H}}_0 - \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{H}}^\dagger \\ &= (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \tilde{\mathbf{K}})^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$  está definido na subseção 2.4.1.

Transformando o campo magnético  $\tilde{\mathbf{H}}^\dagger$  para o sistema de coordenadas principal,

obtém-se:

$$\underbrace{\mathbf{V}^\top \tilde{\mathbf{H}}^\dagger}_{\mathbf{H}^\dagger} = \underbrace{\mathbf{V} \left( \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \tilde{\mathbf{K}} \right)^{-1} \mathbf{V}^\top}_{\Upsilon} \underbrace{\mathbf{V} \tilde{\mathbf{H}}_0}_{\mathbf{H}_0} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{H}^\dagger = \Upsilon \mathbf{H}_0 , \quad (2.52)$$

em que

$$\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{V}^\top \tilde{\mathbf{H}}^\dagger , \quad (2.53)$$

$$\Upsilon = \mathbf{V} \left( \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \tilde{\mathbf{K}} \right)^{-1} \mathbf{V}^\top \quad (2.54)$$

e

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{H}}_0 . \quad (2.55)$$

Pré-multiplicando o campo interno uniforme  $\tilde{\mathbf{H}}^\dagger$  (Eq. 2.52) pelo tensor de susceptibilidade transformado  $\mathbf{K}$  (Eq. 2.18) obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \tilde{\mathbf{K}} \left( \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \tilde{\mathbf{K}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_0 \\ &= \left( \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \right)^{-1} \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{H}}_0 , \end{aligned} \quad (2.56)$$

em que  $\mathbf{M}$  representa a magnetização definida no sistema de coordenadas principal (Eqs. 2.17). A identidade matricial usada para obter a segunda linha da Eq. 2.56 é dada por SEARLE (1982, p. 151).

De forma similar a transformação de coordenadas da Eq. 2.52, podemos reescrever a equação 2.56 no sistema principal:

$$\mathbf{M} = \Lambda \mathbf{K} \mathbf{H}_0 \quad (2.57)$$

em que

$$\Lambda = \mathbf{V} \left( \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \right)^{-1} \mathbf{V}^\top . \quad (2.58)$$

A equação 2.57 pode ser facilmente generalizada para o caso em que o elipsoide também possui uma magnetização remanente uniforme  $\mathbf{M}_R$ . Primeiramente, consideremos que a magnetização remanente uniforme satisfaz a condição  $\mathbf{H}_A = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}_R$ , em que  $\mathbf{H}_A$  representa um campo uniforme hipotético. Assim, se assumirmos que  $\mathbf{H}_0$ , nas Eqs. 2.52 e 2.57, é de fato a soma do campo magnético uniforme  $\mathbf{H}_0$  e o campo hipotético  $\mathbf{H}_A$ , obtemos a seguinte equação generalizada:

$$\mathbf{M} = \Lambda (\mathbf{K} \mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_R) , \quad (2.59)$$

em que  $\Lambda$  é dado na equação 2.58.

A equação 2.59 é consistente com aquela apresentada por CLARK *et al.* (1986, Eq. 38) e mostra o efeito combinado da anisotropia de susceptibilidade magnética (AMS) e da anisotropia de forma. A AMS é representada pelo tensor de susceptibilidade  $\mathbf{K}$  (Eq. 2.18) e reflete a orientação preferencial dos minerais magnéticos que formam o corpo. O tensor de susceptibilidade aparece na Eq. 2.59, definido no sistema de coordenadas principal (Fig. 2.1a), e na Eq. 2.56, definido no sistema de coordenada local (Fig. 2.1b). A anisotropia de forma, é representada pelo tensor de depolarização  $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$  e reflete a desmagnetização associada à forma do corpo. Note que a magnetização resultante,  $\mathbf{M}$  (Eq. 2.59), não necessariamente possui a mesma direção do campo indutor  $\mathbf{H}_0$  (Eq. 2.14). A diferença angular entre a magnetização resultante e o campo indutor depende do efeito combinado da anisotropia de susceptibilidade magnética e da anisotropia de forma.

Para o caso particular em que a susceptibilidade é isotrópica, o tensor de susceptibilidade é definido de acordo com a Eq. 2.19. Neste caso, a magnetização  $\mathbf{M}$  (Eqs. 2.17 e 2.59), referida no sistema de coordenada principal (Fig. 2.1a), e a matriz  $\Lambda$  (Eq. 2.58) podem ser reescritas como segue:

$$\mathbf{M} = \Lambda (\chi \mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_R) , \quad (2.60)$$

e

$$\Lambda = \mathbf{V} \left( \mathbf{I} + \chi \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \right)^{-1} \mathbf{V}^\top . \quad (2.61)$$

Desconsiderando a transformação de coordenadas representada pela matriz  $\mathbf{V}$  (Eq. 2.2), esta equação está perfeitamente de acordo com as apresentadas por GUO *et al.* (2001, Eqs. 13–15). O primeiro termo, dependente do campo indutor  $\mathbf{H}_0$  (Eq. 2.14), representa a magnetização induzida, enquanto o termo dependente de  $\mathbf{M}_R$  é a magnetização remanente resultante. A equação 2.60 mostra que, como apontado por vários autores (e.g., CLARK *et al.*, 1986; DUBOIS, 1896; MAXWELL, 1873; STONER, 1945; STRATTON, 2007), a magnetização induzida se opõe ao campo indutor quando este é paralelo a um eixo do elipsoide, independente do tipo de elipsoide. Por outro lado, a magnetização não é necessariamente paralela ao campo indutor quando este não está alinhado a um eixo do elipsoide. Se adicionalmente considerarmos que  $\chi \ll 1$ , a matriz  $\Lambda$  (Eq. 2.61) se aproxima da matriz identidade e a magnetização  $\mathbf{M}$  (Eq. 2.60) pode ser aproximada por:

$$\check{\mathbf{M}} = \chi \mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_R , \quad (2.62)$$

que é a equação clássica que descreve a magnetização resultante em geofísica aplicada (BLAKELY, 1996, p. 89). Notemos que, neste caso particular, a magnetização induzida é paralela ao campo indutor  $\mathbf{H}_0$  (Eq. 2.14), seja ele paralelo a algum eixo do

elipsoide ou não. Usualmente, Eq. 2.62 é considerada uma boa aproximação quando  $\chi \leq 0.1$  SI. Apesar de este valor ser amplamente utilizado na literatura, houve poucas investigações empíricas e/ou teóricas sobre como este valor foi determinado.

### Relação entre $\chi$ e o erro da magnetização

No caso da susceptibilidade isotrópica, a magnetização resultante  $\mathbf{M}$  (Eq. 2.60) pode ser determinada resolvendo o seguinte sistema linear:

$$\Lambda^{-1} \mathbf{M} = \chi \mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_R , \quad (2.63)$$

em que, de acordo com a Eq. 2.61,

$$\Lambda^{-1} = \mathbf{V} \left( \mathbf{I} + \chi \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \right) \mathbf{V}^\top . \quad (2.64)$$

Considere uma matriz  $\delta\Lambda^{-1}$  dada por:

$$\delta\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} - \mathbf{I} \quad (2.65)$$

e, similarmente, um vetor de magnetização perturbado  $\delta\mathbf{M}$  dado por:

$$\delta\mathbf{M} = \mathbf{M} - \check{\mathbf{M}} , \quad (2.66)$$

Usando estas duas equações, podemos reescrever a magnetização aproximada  $\check{\mathbf{M}}$  (Eq. 2.62) como:

$$(\Lambda^{-1} - \delta\Lambda^{-1}) (\mathbf{M} - \delta\mathbf{M}) = \chi \mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_R . \quad (2.67)$$

Subtraindo a magnetização verdadeira  $\mathbf{M}$  (Eq. 2.63) deste sistema linear (Eq. 2.67) e rearranjando os termos, obtemos o seguinte sistema linear para a magnetização perturbada  $\delta\mathbf{M}$  (Eq. 2.66):

$$\delta\mathbf{M} = -\delta\Lambda^{-1}\mathbf{M} . \quad (2.68)$$

Usando o conceito de norma de um vetor e seu correspondente operador de norma (DEMME, 1997; GOLUB e LOAN, 2013), podemos usar a Eq. 2.68 para escrever a seguinte desigualdade:

$$\|\delta\mathbf{M}\| \leq \|\delta\Lambda^{-1}\| \|\mathbf{M}\| , \quad (2.69)$$

e portanto:

$$\frac{\|\delta\mathbf{M}\|}{\|\mathbf{M}\|} \leq \|\delta\Lambda^{-1}\| . \quad (2.70)$$

em que  $\|\delta\mathbf{M}\|$  e  $\|\mathbf{M}\|$  representam a norma Euclidiana (ou norma-2) e o termo  $\|\delta\Lambda^{-1}\|$  representa a norma-2 da matriz de  $\delta\Lambda^{-1}$ . Usando as Eqs. 2.64 e 2.65 e a

invariância da norma-2 de matrizes em relação a matrizes ortogonais (DEMMEL, 1997; GOLUB e LOAN, 2013), definimos  $\|\delta\Lambda^{-1}\|$  como:

$$\|\delta\Lambda^{-1}\| = \chi \tilde{n}_{max}^\dagger , \quad (2.71)$$

em que  $\tilde{n}_{max}^\dagger$  é o fator de desmagnetização associado ao menor semi-eixo do elipsoide. Para um elipsoide triaxial,  $\tilde{n}_{max}^\dagger \equiv \tilde{n}_{33}^\dagger$  (Eq. 2.32). Para um elipsoide prolato,  $\tilde{n}_{max}^\dagger \equiv \tilde{n}_{22}^\dagger$  (Eq. 2.36). Para um elipsoide oblato,  $\tilde{n}_{max}^\dagger \equiv \tilde{n}_{11}^\dagger$  (Eq. 2.37). É importante lembrar que, independentemente do tipo de elipsoide,  $\tilde{n}_{max}^\dagger$  é uma função escalar dos semi-eixos do elipsoide. Na Eq. 2.70, a razão  $\|\delta\mathbf{M}\| \|\mathbf{M}\|^{-1}$  representa o *erro relativo* da magnetização aproximada  $\check{\mathbf{M}}$  (Eq. 2.62) com relação a magnetização verdadeira  $\mathbf{M}$  (Eqs. 2.60 e 2.63).

Dado um erro relativo fixo e um elipsoide com determinados semi-eixos, podemos usar a desigualdade representada pela Eq. 2.71 para definir

$$\chi_{max} = \frac{\epsilon}{\tilde{n}_{max}^\dagger} , \quad (2.72)$$

que representa a máxima susceptibilidade isotrópica que o corpo elipsoidal pode assumir para garantir um erro relativo menor que ou igual a  $\epsilon$  na magnetização resultante calculada. Para susceptibilidades isotrópicas maiores que  $\chi_{max}$ , não é possível garantir que o erro relativo na magnetização aproximada  $\check{\mathbf{M}}$  (Eq. 2.62) com relação a magnetização verdadeira  $\mathbf{M}$  (Eqs. 2.60 e 2.63) seja menor ou igual a  $\epsilon$ . A comunidade geocientífica tem usado  $\chi_{max} = 0.1$  SI como um valor limite para negligenciar a desmagnetização e, consequentemente, utilizar a magnetização  $\check{\mathbf{M}}$  (Eq. 2.62) como uma boa aproximação para a magnetização verdadeira  $\mathbf{M}$  (Eqs. 2.60 e 2.63). Por outro lado, a equação 2.72, define  $\chi_{max}$  como uma função dos semi-eixos do elipsoide, de acordo com um erro relativo  $\epsilon$  especificado pelo intérprete.

## 2.6 Campo magnético externo e anomalia de campo-total

O campo magnético  $\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r})$  produzido por um elipsoide nos pontos externos como a diferença entre o campo resultante  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  e o campo uniforme  $\mathbf{H}_0$  (Eq. 2.14). De acordo com a Eq. 2.15:

$$\underbrace{\mathbf{H} - \mathbf{H}_0}_{\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r})} = -\mathbf{N}(\mathbf{r}) \underbrace{\mathbf{K} \mathbf{H}^\dagger}_{\mathbf{M}} \quad (2.73)$$

Como é fora do elipsoide:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}) = \mathbf{N}^\dagger(\mathbf{r}) , \quad (2.74)$$

Logo:

$$\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\mathbf{N}^\ddagger(\mathbf{r}) \mathbf{M}, \quad (2.75)$$

em que  $\mathbf{N}^\ddagger(\mathbf{r})$  é dado por:

$$\mathbf{N}^\ddagger(\mathbf{r}) = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{N}}^\ddagger(\mathbf{r}) \mathbf{V}^\top, \quad (2.76)$$

sendo  $\mathbf{V}$  definida na Eq. 2.12 e  $\mathbf{N}^\ddagger$  definida a partir dos elementos dados nas Eqs. 2.39 e 2.40. A equação 2.75 fornece o campo magnético (em  $\text{A m}^{-1}$ ). Entretanto, na geofísica, é mais usual utilizar a indução magnética, que é definida em nT. Esta conversão pode ser facilmente feita multiplicando a Eq. 2.75 por  $k_m = 10^9 \mu_0$ , em que  $\mu_0$  representa a constante magnética (em  $\text{H m}^{-1}$ ).

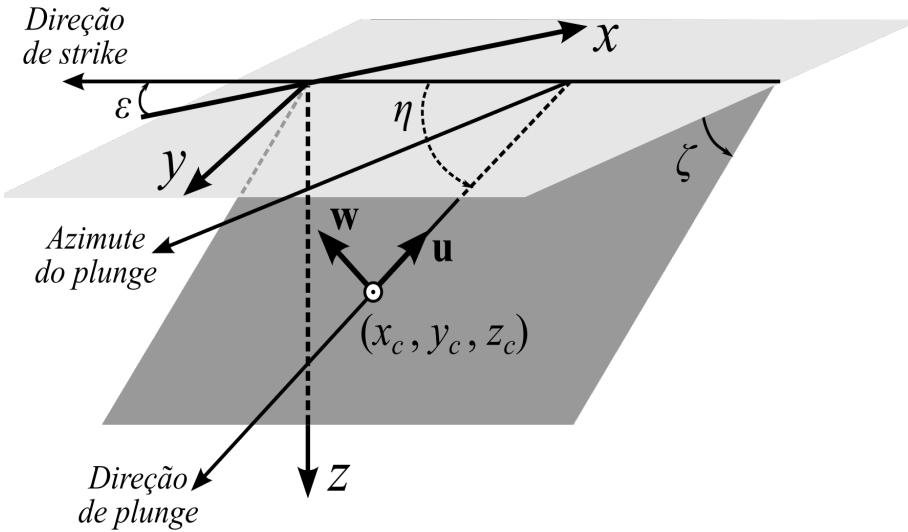
Para aplicações geofísicas, é preferível calcular a anomalia de campo total produzida por fontes magnéticas. Esta quantidade escalar é definida como (BLAKELY, 1996):

$$\Delta T(\mathbf{r}) = \|\mathbf{B}_0 + \Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})\| - \|\mathbf{B}_0\|, \quad (2.77)$$

em que  $\mathbf{B}_0 = k_m \mathbf{H}_0$  e  $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k_m \Delta\mathbf{H}(\mathbf{r})$ , com  $\mathbf{H}_0$  definido na eq 2.14 e  $\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r})$  definido na Eq. 2.75. Em situações práticas, entretanto,  $\|\mathbf{B}_0\| >> \|\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})\|$  e, consequentemente, a seguinte aproximação é válida (BLAKELY, 1996):

$$\Delta T(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{B}_0^\top \Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\|\mathbf{B}_0\|}. \quad (2.78)$$

(a)



(b)

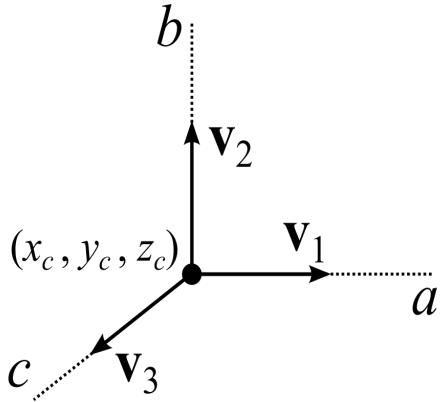


Figura 2.1: Esquema representativo do sistema de coordenadas usado para representar um corpo elipsoidal. a) Sistema de coordenadas principal com eixo  $x$  apontado para norte,  $y$  apontado para leste e  $z$  para baixo. O plano cinza escuro contém o centro  $(x_c, y_c, z_c)$  (círculo branco) e dois vetores unitários,  $u$  e  $w$ , que definem dois semi-eixos do corpo elipsoidal. Para elipsóides triaxiais e proláticos,  $u$  e  $w$  definem, respectivamente, os semi-eixos  $a$  e  $b$ . Para elipsóides obláticos,  $u$  e  $w$  definem os semi-eixos  $b$  e  $a$ , respectivamente. A *direção de strike* é definida pela intersecção do plano cinza escuro e o plano horizontal (representado em cinza claro), que contém os eixos  $x$  e  $y$ . O ângulo  $\varepsilon$  entre "menos  $x$ " e a *direção de strike* é chamado de *strike*. O ângulo  $\zeta$  entre o plano horizontal e o plano cinza escuro é chamado de *dip*. A linha que contém o vetor unitário  $u$  define a *direção de plunge*. O ângulo  $\eta$  entre a *direção de strike* e a *direção de plunge* é chamada de *rake*. A projeção da *direção de plunge* no plano horizontal é chamado de *direção azimutal de plunge*. b) Sistema de coordenadas local com origem no centro do elipsoide  $(x_c, y_c, z_c)$  (ponto preto) e eixos definidos pelos vetores unitários  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ . Estes vetores unitários definem os semi-eixos  $a$ ,  $b$  e  $c$  dos elipsóides triaxiais, proláticos e obláticos da mesma forma. Para os elipsóides triaxiais e proláticos, os vetores unitários  $u$  e  $w$ , mostrados em (a), coincidem com  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente. Para elipsóides obláticos, os vetores unitários  $u$  e  $w$ , mostrados em (a), coincidem com  $v_2$  e  $v_3$ , respectivamente.

# Capítulo 3

## Implementação computacional

A implementação computacional das rotinas desenvolvidas nesta dissertação foi feita em linguagem livre Python, que é gratuita, bem documentada, roda em praticamente todos os sistemas operacionais e vem sendo amplamente utilizada pela comunidade científica. As rotinas desenvolvidas ao longo deste trabalho foram baseadas no pacote *Fatiando a Terra* UIEDA *et al.* (2013), que é livre, de código aberto e desenvolvido para modelagem e inversão em geofísica. A documentação e as instruções para instalação da versão mais atual do *Fatiando a Terra* podem ser encontrados em <http://www.fatiando.org>. As rotinas desenvolvidas aqui estão livremente disponibilizadas no Github pelo link: <https://github.com/DiegoTaka/ellipsoid-magnetic>. A Figura 3.1 exemplifica como calcular a anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78) gerada por um elipsoide triaxial. Como mostrado neste exemplo, é necessário importar outros módulos do *Fatiando a Terra* antes de criar o modelo elipsoidal desejado. A parte “*The local-geomagnetic field*” define a intensidade ( $nT$ ), inclinação e declinação ( $^{\circ}$ ) do campo geomagnético local. A variável “*model*” contém um objeto da classe “*EllipsoidTriaxial*”, que foi desenvolvida neste trabalho como parte do subpacote “*meshes*” do Fatiando a Terra. Esta variável contém os parâmetros que definem o modelo de elipsoide triaxial. Os parâmetros são, respectivamente: posição  $x_c$ ,  $y_c$  e  $z_c$  ( $m$ ) do centro do corpo, semi-eixos  $a$ ,  $b$  e  $c$  ( $m$ ), orientações de *strike*, *dip* e *rake* ( $^{\circ}$ ) e um dicionário que contém as propriedades físicas do modelo. O item “*remanence*” contém a intensidade ( $A/m$ ), inclinação e declinação ( $^{\circ}$ ) do vetor de magnetização remanente  $\mathbf{M}_R$  (Eq. 2.59). O item ‘*k*’ contém as susceptibilidades principais  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  (Eq. 2.18) e as orientações *strike*, *dip* e *rake* utilizadas para calcular os vetores unitários  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$  que formam as colunas da matriz ortogonal  $\mathbf{U}$  (Eq. 2.18). Os vetores foram calculados utilizando-se as Eqs. 2.6, 2.7, 2.8. As linhas seguintes definem as coordenadas dos pontos ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) em que será calculada a anomalia de campo total produzida pelo modelo elipsoidal. Para tanto, utilizou-se o subpacote “*gridder*” do Fatiando a Terra. Neste exemplos, os pontos estão distribuídos em uma grade regular de 200 x 200 (definida pela variável “*shape*”),

sobre um plano horizontal em  $z = 0$  m. Os pontos são calculados sobre uma área que varia de -5000 até 5000 metros ao longo das direções  $x$  e  $y$ , tal como definido pela variável “*area*”. As coordenadas são armazenadas nos “*numpy arrays*”: “*xp*”, “*yp*” e “*zp*”. Em seguida, a anomalia de campo total é calculada utilizando-se a rotina “*tf\_c*”. Esta função está contida no módulo “*ellipsoid\_triaxial*”, que foi desenvolvido neste trabalho como parte do subpacote “*gravmag*” do Fatiando a Terra. As linhas finais do exemplo mostrado na Fig. 3.1 são para plotar a anomalia de campo total produzida pelo modelo elipsoidal utilizando-se o módulo “*mpl*”, que está contido no subpacote “*vis*” do Fatiando a Terra.

A Fig. 3.2 mostra o resultado produzido pelo código da Fig. 3.1. A Fig. 3.3 mostra o código fonte da rotina “*tf\_c*” (Fig. 3.1) utilizada para calcular a anomalia de campo total mostrada na Fig. 3.2. As rotinas também contam com classes que separam os três tipos de elipsoides tratados neste trabalho.

É importante ressaltar que diversos cálculos são feitos com auxílio de bibliotecas do *Python* como o *Scipy* JONES *et al.* (2001–), *Matplotlib* HUNTER (2007–) e do pacote *NumPy* STÉFAN VAN DER WALT e VAROQUAUX (2011–). Uma nota a respeito das funções *scipy.special.ellipkinc* e *scipy.special.ellipeinc* do pacote SciPy para o cálculo das integrais elípticas normais incompletas de Legendre de primeiro e segundo tipo (Eqs. 2.33 e 2.34): a variável  $\kappa$  das funções  $F(\kappa, \phi)$  e  $E(\kappa, \phi)$  já deve ser elevada ao quadrado.

Tal como definido anteriormente, a soma dos fatores de desmagnetização deve ser igual à 1 (um), independente do tamanho dos eixos e do tipo de elipsoide. Para verificar esta propriedade, foram gerados 200 elipsoides triaxiais com semi-eixos  $a = a_0 + u$ ,  $b = b_0 + u$  e  $c = c_0 + u$ , em que  $a_0 = 500$  m,  $b_0 = 100$  m,  $c_0 = 50$  m e  $500 \leq u \leq 30000$  m. A Fig. 3.4 mostra a soma dos fatores de desmagnetização  $\tilde{n}_{11}^\dagger$ ,  $\tilde{n}_{22}^\dagger$  e  $\tilde{n}_{33}^\dagger$  calculados pelas Eqs. 2.30, 2.31 e 2.32 para este conjunto de elipsoides e serve como validação de parte das rotinas apresentadas neste trabalho.

```

"""
GravMag: 3D forward modeling of total-field magnetic anomaly using triaxial
ellipsoids (model with induced and remanent magnetization)
"""

# Import the required modules
from fatiando import mesher, gridded, utils
from fatiando.gravmag import ellipsoid_triaxial
from fatiando.vis import mpl

# The local-geomagnetic field
inten, inc, dec = 60000., 30, -15
model = [mesher.EllipsoidTriaxial(-2500., -2500., 500., 2000., 100., 50., 0., 0., 0.,
                                    {'remanence': [100, 90., 0.],
                                     'k': [0.2, 0.1, 0.05, 0., 90., 90.]}),
          mesher.EllipsoidTriaxial(2500., 2500., 500., 2000., 100., 50., 0., 0., 0.,
                                    {'remanence': [100, 90., 0.],
                                     'k': [0.2, 0.1, 0.05, 0., 90., 90.]})]

# Create a regular grid at 0m height
shape = (200, 200)
area = [-5000, 5000, -5000, 5000]
xp, yp, zp = gridded.regular(area, shape, z=0)
# Calculate the anomaly for a given regional field
tf = ellipsoid_triaxial.tf_c(xp, yp, zp, inten, inc, dec, model)
# Plot
mpl.figure()
mpl.title("Total-field anomaly (nT)")
mpl.axis('scaled')
mpl.contourf(yp, xp, tf, shape, 15)
mpl.colorbar()
mpl.xlabel('East y (km)')
mpl.ylabel('North x (km)')
mpl.m2km()
mpl.show()

```

Figura 3.1: Exemplo de *script* para gerar um modelo elipsoidal triaxial e calcular a anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78). O dicionário com as propriedades físicas contém a ‘*remanence*’ (intensidade, inclinação e declinação) e ‘*k*’ ( $k_1, k_2, k_3$ , strike, dip, rake).

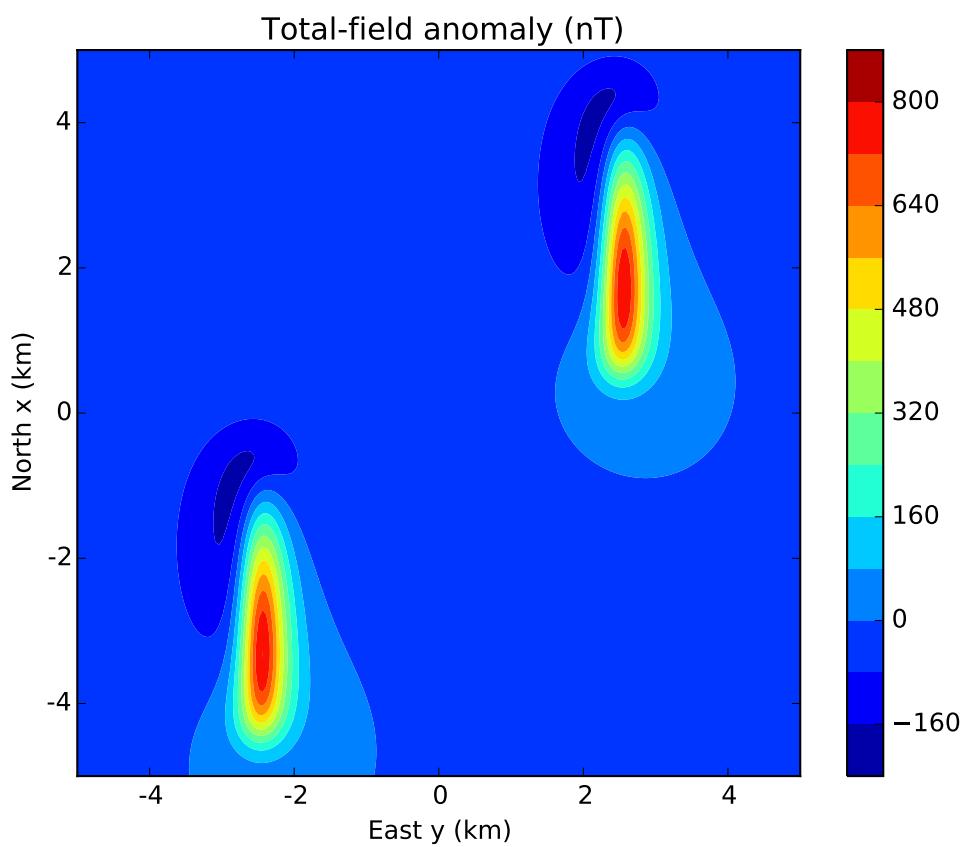


Figura 3.2: Anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78) produzida pelo código da Fig. 3.1.

```

def tf_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,ellipsoids):
    """
    Calculates the approximated total-field anomaly generated by n-ellipsoid.

    Parameters:
    * xp,yp,zp: arrays
        Grid of observation points x, y, and z.
    * inten,inc,dec: floats
        Intensity, inclination and declination of the Earth's magnetic field.
    * ellipsoids: list of :class:`fatiando.meshes.Sphere`
        Ellipsoid model.

    Returns:
    * tf : array
        The total-field anomaly
    """

if xp.shape != yp.shape != zp.shape:
    raise ValueError("Input arrays xp, yp, and zp must have same shape!")
size = len(xp)
res = np.zeros(size, dtype=np.float)
ctemag = 100.

for ellipsoid in ellipsoids:
    b1,b2,b3,V,N1,N2,N3,JRD_ang = ellipsoid_def (xp,yp,zp,inten,inc,dec,ellipsoid)
    bx = (b1*V[0,0]+b2*V[0,1]+b3*V[0,2])*ctemag
    by = (b1*V[1,0]+b2*V[1,1]+b3*V[1,2])*ctemag
    bz = (b1*V[2,0]+b2*V[2,1]+b3*V[2,2])*ctemag
    tf = bx*np.cos(np.deg2rad(inc))*np.cos(np.deg2rad(dec)) + by*np.cos\
        (np.deg2rad(inc))*np.sin(np.deg2rad(dec)) + bz*np.sin(np.deg2rad(inc))
    res += tf
res = res
return res

```

Figura 3.3: Código fonte da rotina “*tf\_c*” utilizada para calcular a anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq.2.78) produzida pelo modelo elipsoidal definido na Fig. 3.1. Esta rotina utiliza outras rotinas que também foram desenvolvidas neste trabalho como parte do módulo *ellipsoid\_triaxial* (Fig. 3.1).

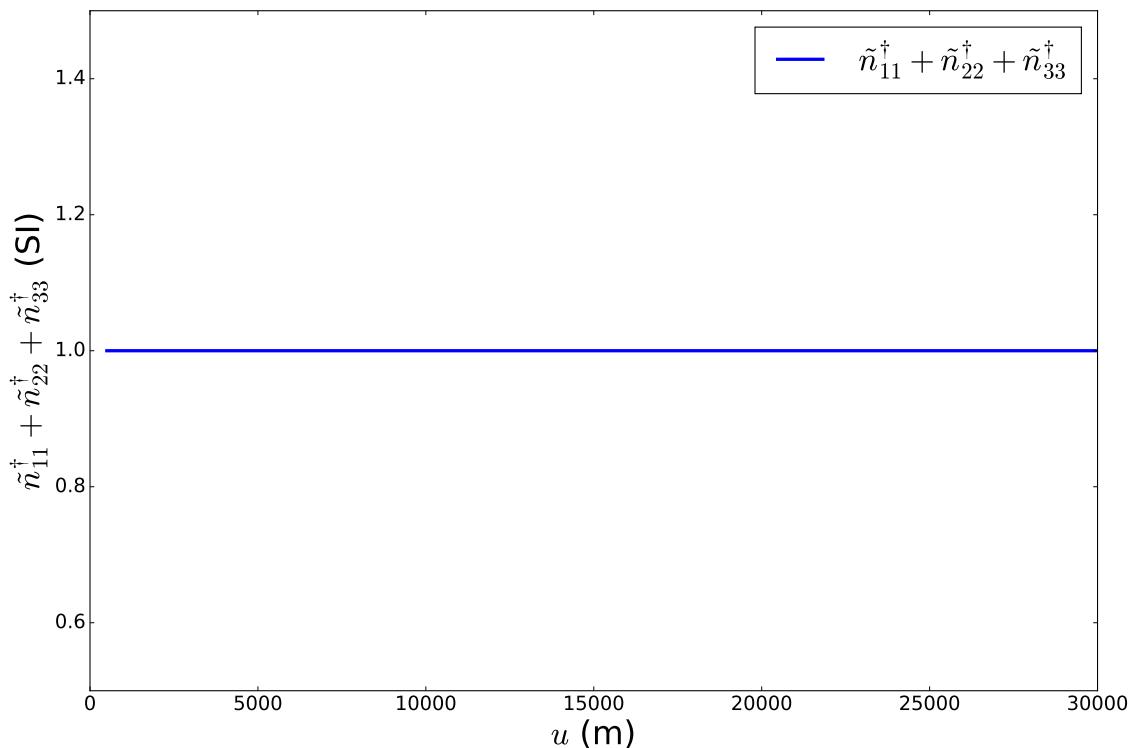


Figura 3.4: Validação dos fatores de desmagnetização. Foram gerados 200 elipsoides triaxiais com semi-eixos  $a = a_0 + u$ ,  $b = b_0 + u$  e  $c = c_0 + u$ , em que  $a_0 = 500$  m,  $b_0 = 100$  m,  $c_0 = 50$  m e  $500 \leq u \leq 30000$  m. A figura mostra a soma dos fatores de desmagnetização  $\tilde{n}_{11}^\dagger$ ,  $\tilde{n}_{22}^\dagger$  e  $\tilde{n}_{33}^\dagger$  (Eqs. 2.30, 2.31 e 2.32), que está representada pela linha azul, que é igual à 1 (um), independente do tamanho dos eixos e do tipo de elipsoide.

# Capítulo 4

## Simulações Numéricas e Discussões

### 4.1 Modelos elipsoidais

As Figuras 4.1A, 4.1B, 4.1C e 4.1D mostram, respectivamente, as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  da indução magnética  $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.77) e a anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78) produzidas pelo elipsoide triaxial definido de acordo com os parâmetros da Tabela 4.1. Os dados foram calculados em uma malha de  $200 \times 200$  pontos (total de 40000 pontos) localizada no plano horizontal  $z = 0$  m.

Parâmetro	Valor	Unidade
$a, b, c$	150, 100, 75	m, m, m
<i>strike</i>	0	°
<i>dip</i>	0	°
<i>rake</i>	0	°
$x_c$	0	m
$y_c$	0	m
$z_c$	1000	m
$\mathbf{M}_R^*$	100, 25, 40	$A/m, ^\circ, ^\circ$
$\mathbf{B}_0^*$	60000, 50, 20	$nT, ^\circ, ^\circ$
$k_1, k_2, k_3$	0,01, 0,01, 0,01	SI, SI, SI
Orientação das colunas da matriz $\mathbf{U}^{**}$	0, 90, 90	°, °, °

Tabela 4.1: Parâmetros do elipsoide triaxial que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.1. \*Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. \*\*Ângulos de *strike*, *dip* e *rake*, respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_3$  por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8.

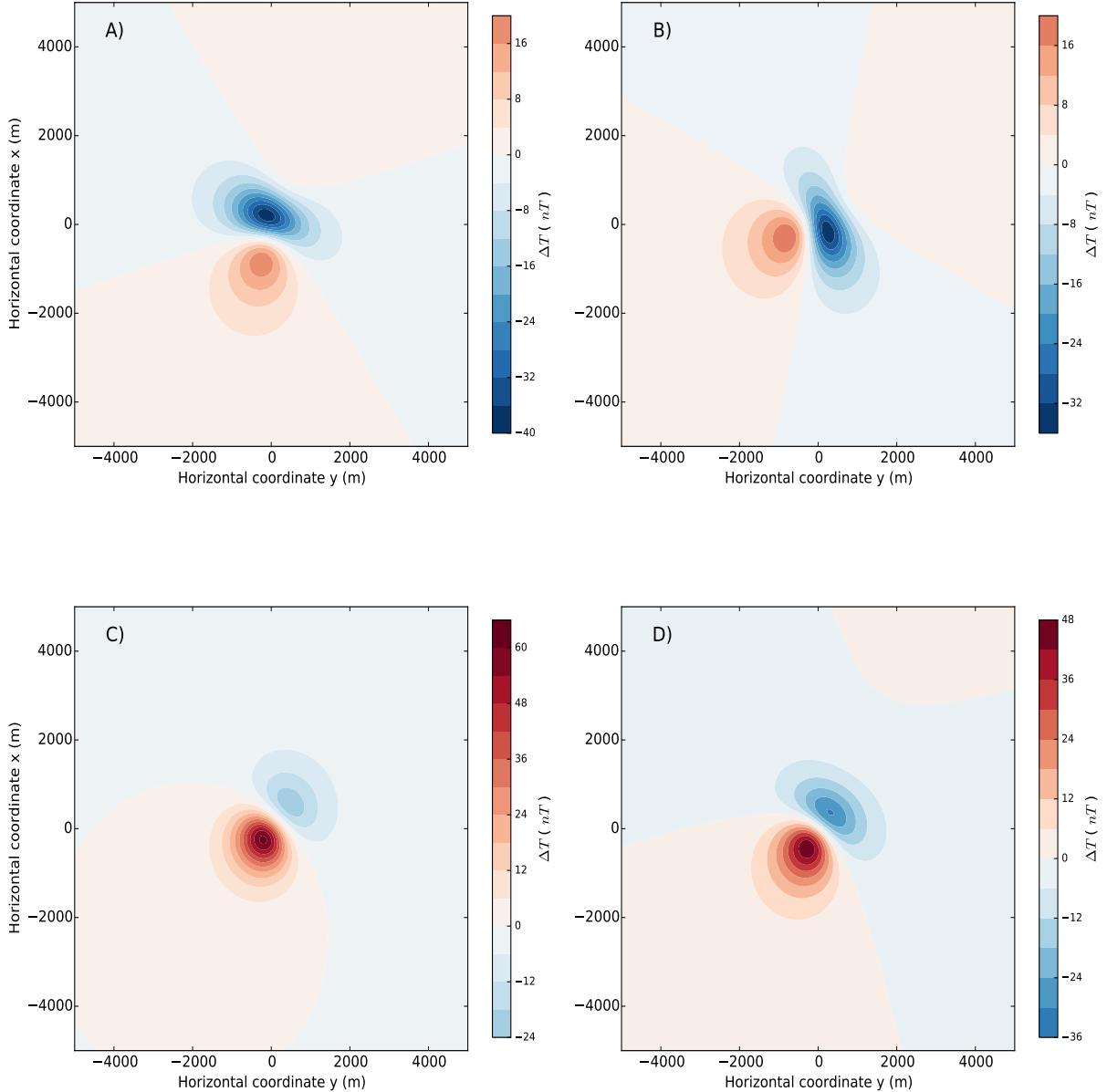


Figura 4.1: Campo gerado pelo elipsoide triaxial definido na Tabela 4.1. Componentes A)  $x$ , B)  $y$  e C)  $z$  da indução magnética  $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.77). D) Anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78). Todos os valores estão em nT.

As Figuras 4.2A), 4.2B), 4.2C) e 4.2D) mostram, respectivamente, as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  da indução magnética  $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.77) e a anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78) produzidas pelo elipsoide prolato definido de acordo com os parâmetros da Tabela 4.2.

As Figuras 4.3A), 4.3B), 4.3C) e 4.3D) mostram, respectivamente, as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  da indução magnética  $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.77) e a anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78) produzidas pelo elipsoide prolato definido de acordo com os parâmetros da Tabela 4.3.

Parâmetro	Valor	Unidade
$a, b$	200, 100	m, m, m
<i>strike</i>	45	°
<i>dip</i>	0	°
<i>rake</i>	0	°
$x_c$	0	m
$y_c$	0	m
$z_c$	1000	m
$\mathbf{M}_R^*$	100, 90, 0	A/m, °, °
$\mathbf{B}_0^*$	60000, 50, 20	nT, °, °
$k_1, k_2, k_3$	0,01, 0,01, 0,01	SI, SI, SI
Orientação das colunas da matriz $\mathbf{U}^{**}$	0, 90, 90	°, °, °

Tabela 4.2: Parâmetros do elipsoide prolato que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.2. \*Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. \*\*Ângulos de *strike*, *dip* e *rake*, respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8.

Parâmetro	Valor	Unidade
$a, b$	100, 200	m, m, m
<i>strike</i>	45	°
<i>dip</i>	0	°
<i>rake</i>	0	°
$x_c$	0	m
$y_c$	0	m
$z_c$	1000	m
$\mathbf{M}_R^*$	100, 90, 0	A/m, °, °
$\mathbf{B}_0^*$	60000, 50, 20	nT, °, °
$k_1, k_2, k_3$	0,01, 0,01, 0,01	SI, SI, SI
Orientação das colunas da matriz $\mathbf{U}^{**}$	0, 90, 90	°, °, °

Tabela 4.3: Parâmetros do elipsoide oblato que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.3. \*Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. \*\*Ângulos de *strike*, *dip* e *rake*, respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  por meio das Eqs. 2.9, 2.10 e 2.11.

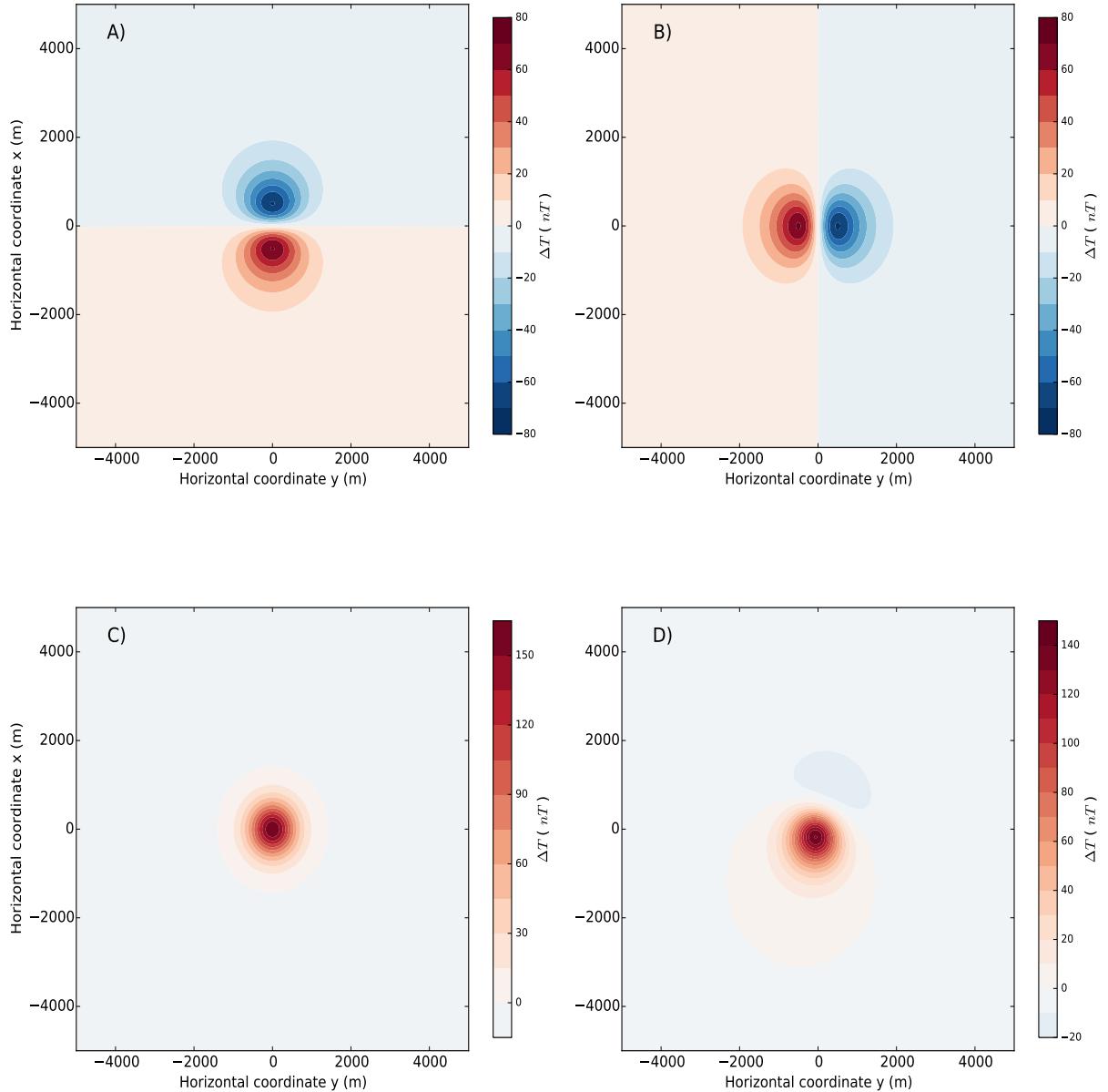


Figura 4.2: Campo gerado pelo elipsoide prolato definido na Tabela 4.2. Componentes A)  $x$ , B)  $y$  e C)  $z$  da indução magnética  $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.77). D) Anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78). Todos os valores estão em nT.

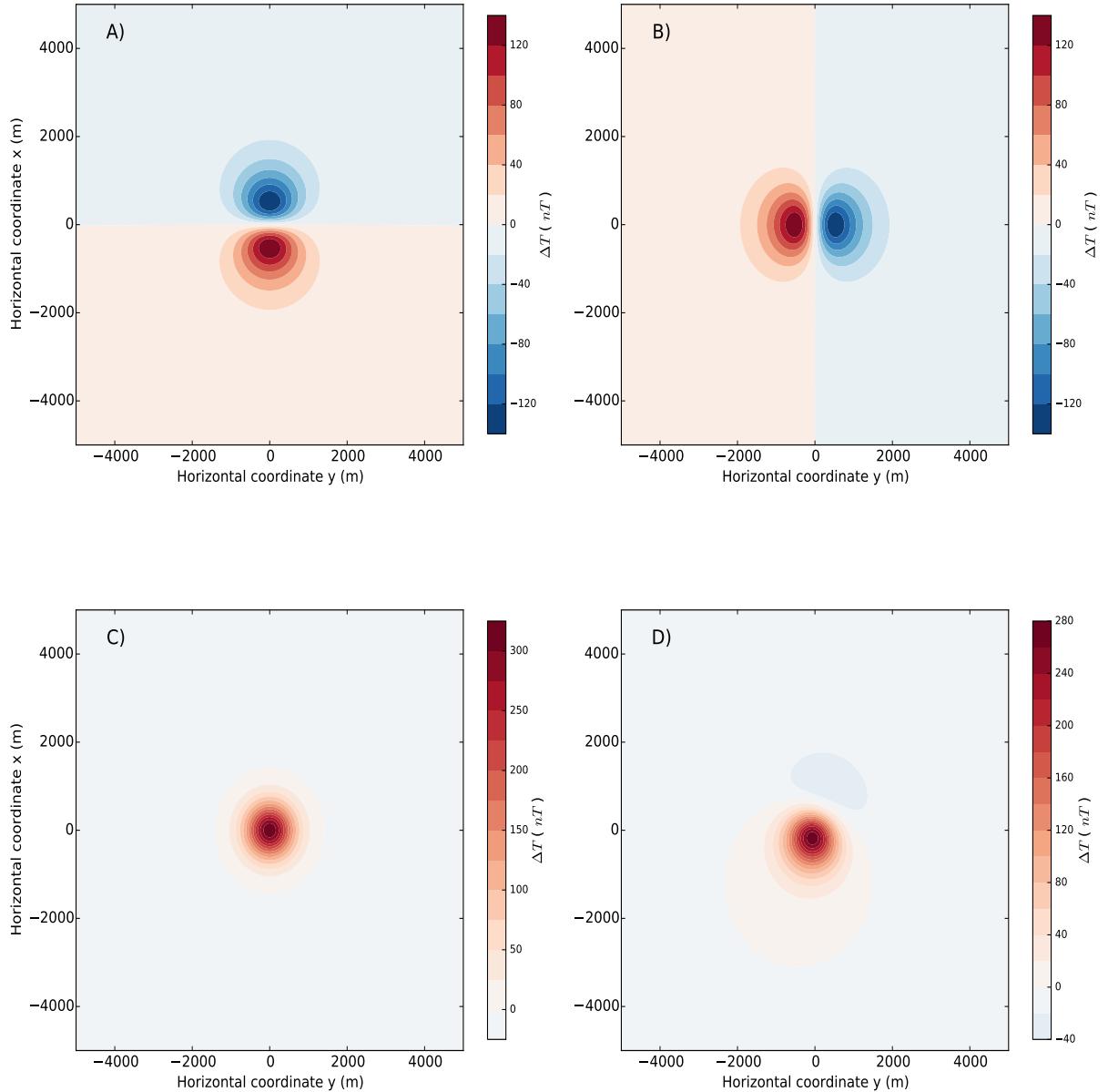


Figura 4.3: Campo gerado pelo elipsoide oblato definido na Tabela 4.3. Componentes A)  $x$ , B)  $y$  e C)  $z$  da indução magnética  $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.77). D) Anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78). Todos os valores estão em nT.

As Figuras 4.4A), 4.4B), 4.4C) e 4.4D) mostram, respectivamente, as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  da indução magnética  $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.77) e a anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78) produzidas por dois elipsóides triaxiais definidos de acordo com os parâmetros da Tabela 4.4.

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
$a, b, c$	150, 100, 75	m, m, m
$strike$	0	°
$dip$	0	°
$rake$	0	°
$x_c$	-2500	m
$y_c$	-2500	m
$z_c$	1000	m
$\mathbf{M}_R^*$	100, 25, 40	A/m, °, °
$k_1, k_2, k_3$	0,01, 0,01, 0,01	SI, SI, SI
Orientação das colunas da matriz $\mathbf{U}^{**}$	0, 90, 90	°, °, °
$a_2, b_2, c_2$	200, 120, 60	m, m, m
$strike_2$	0	°
$dip_2$	0	°
$rake_2$	0	°
$x_{c2}$	2500	m
$y_{c2}$	2500	m
$z_{c2}$	750	m
$\mathbf{M}_{R2}^*$	75, 25, 40	A/m, °, °
$k_{12}, k_{22}, k_{32}$	0,01, 0,01, 0,01	SI, SI, SI
Orientação das colunas da matriz $\mathbf{U}_2^{**}$	0, 90, 90	°, °, °
$\mathbf{B}_0^*$	60000, 50, 20	nT, °, °

Tabela 4.4: Parâmetros dos dois elipsoides triaxiais que produzem o campo magnético mostrado na Figura 4.4. \*Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. \*\*Ângulos de *strike*, *dip* e *rake*, respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_3$  por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8.

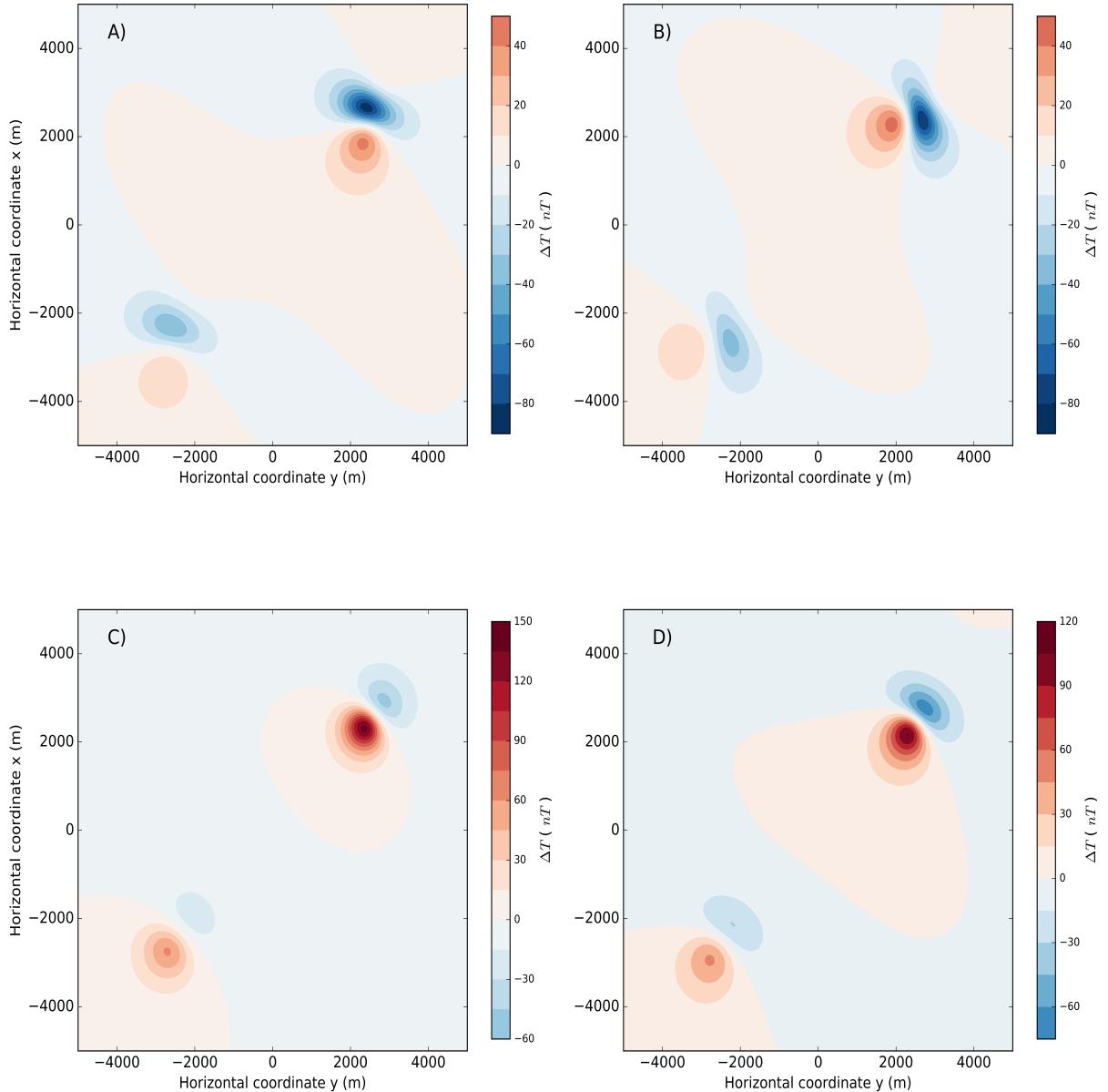


Figura 4.4: Campo gerado pelos elipsoides triaxiais definido na Tabela 4.4. Componentes A)  $x$ , B)  $y$  e C)  $z$ , da indução magnética  $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.77). D) Anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78). Todos os valores estão em nT.

A Figura 4.5 contém os *scripts* com os parâmetros usados para a modelagem dos exemplos mostrados acima.

```

# The regional field
inten,inc, dec = 60000., 50., 20.
# Create a regular grid at 100m height
shape = (200, 200)
area = [-5000, 5000, -5000, 5000]
xp, yp, zp = gridded.regular(area, shape, z=0)

model_t1 = [mesher.EllipsoidTriaxial(0.,0.,1000.,150.0, 100.0, 75.0, 0.,0.,0.,
                                      {'remanence': [100, 25., 40.],
                                       'k': [0.01, 0.01, 0.01, 0., 90., 90.]})]

A) # Calculate the anomaly for a given regional field
bx_t = ellipsoid_triaxial.bx_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_t1)
by_t = ellipsoid_triaxial.by_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_t1)
bz_t = ellipsoid_triaxial.bz_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_t1)
tf_t = ellipsoid_triaxial.tf_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_t1)

model_p = [mesher.EllipsoidProlate(0.,0.,1000.,200.,100.,45.,0.,0.,
                                      {'remanence': [100, 90., 0.],
                                       'k': [0.01, 0.01, 0.01, 0., 90., 90.]})]

B) # Calculate the anomaly for a given regional field
bx_p = ellipsoid_prolate.bx_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_p)
by_p = ellipsoid_prolate.by_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_p)
bz_p = ellipsoid_prolate.bz_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_p)
tf_p = ellipsoid_prolate.tf_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_p)

model_o = [mesher.EllipsoidOblate(0.,0.,1000.,100,200.,45.,0., 0.,
                                      {'remanence': [100, 90., 0.],
                                       'k': [0.01, 0.01, 0.01, 0., 90., 90.]})]

C) # Calculate the anomaly for a given regional field
bx_o = ellipsoid_oblate.bx_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_o)
by_o = ellipsoid_oblate.by_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_o)
bz_o = ellipsoid_oblate.bz_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_o)
tf_o = ellipsoid_oblate.tf_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_o)

model_t2 = [mesher.EllipsoidTriaxial(-2500.,-2500.,1000.,150.0, 100.0, 75.0, 0.,0.,0.,
                                         {'remanence': [100, 25., 40.],
                                          'k': [0.01, 0.01, 0.01, 0., 90., 90.]}),
            mesher.EllipsoidTriaxial(2500.,2500.,750.,200.0, 120.0, 60.0, 0.,0.,0.,
                                         {'remanence': [75, 25., 40.],
                                          'k': [0.01, 0.01, 0.01, 0., 90., 90.]})]

D) # Calculate the anomaly for a given regional field
bx_t2 = ellipsoid_triaxial.bx_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_t2)
by_t2 = ellipsoid_triaxial.by_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_t2)
bz_t2 = ellipsoid_triaxial.bz_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_t2)
tf_t2 = ellipsoid_triaxial.tf_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,model_t2)

```

Figura 4.5: Scripts utilizados para gerar os resultados mostrados: A) na Figura 4.1, B) na Figura 4.2, C) na Figura 4.3 e D) na Figura 4.4. A descrição do código é similar àquela mostrada na Figura 3.1.

## 4.2 Fatores de desmagnetização

Os fatores de desmagnetização são importantíssimos para a modelagem de corpos com alta susceptibilidade e dependem apenas da sua forma geométrica. Nesta seção, apresento simulações numéricas que visam ilustrar o comportamento dos fatores de desmagnetização em função do tamanho dos semi-eixos de elipsoides triaxiais, prolatos e oblatos. A partir de um elipsoide triaxial com semi-eixos  $a_0 = 500$  m,  $b_0 = 100$  m e  $c_0 = 50$  m, gerei 200 outros elipsoides triaxiais com os semi-eixos destes dados por  $a = a_0 + u$ ,  $b = b_0 + u$  e  $c = c_0 + u$ , em que  $500 \leq u \leq 30000$ . Note que, quando a variável  $u$  assume valores pequenos, os elipsoides têm formato mais próximo ao elipsoide original. Por outro lado, quanto maior essa variável, mais esféricos serão os elipsoides obtidos. A Figura 4.6 mostra os fatores de desmagnetização  $\tilde{n}_{11}^\dagger$  (em azul),  $\tilde{n}_{22}^\dagger$  (em verde) e  $\tilde{n}_{33}^\dagger$  (em vermelho) calculados pelas Eqs. 2.30, 2.31 e 2.32, respectivamente, para este conjunto de 200 elipsoides em função da variável  $u$ . Os resultados mostram que, para altos valores de  $u$ , todos os fatores de desmagnetização tendem ao valor de  $1/3$ , que é típico de uma esfera. Por outro lado, quando a variável  $u$  assume valores pequenos, os fatores de desmagnetização são muito diferentes uns dos outros.

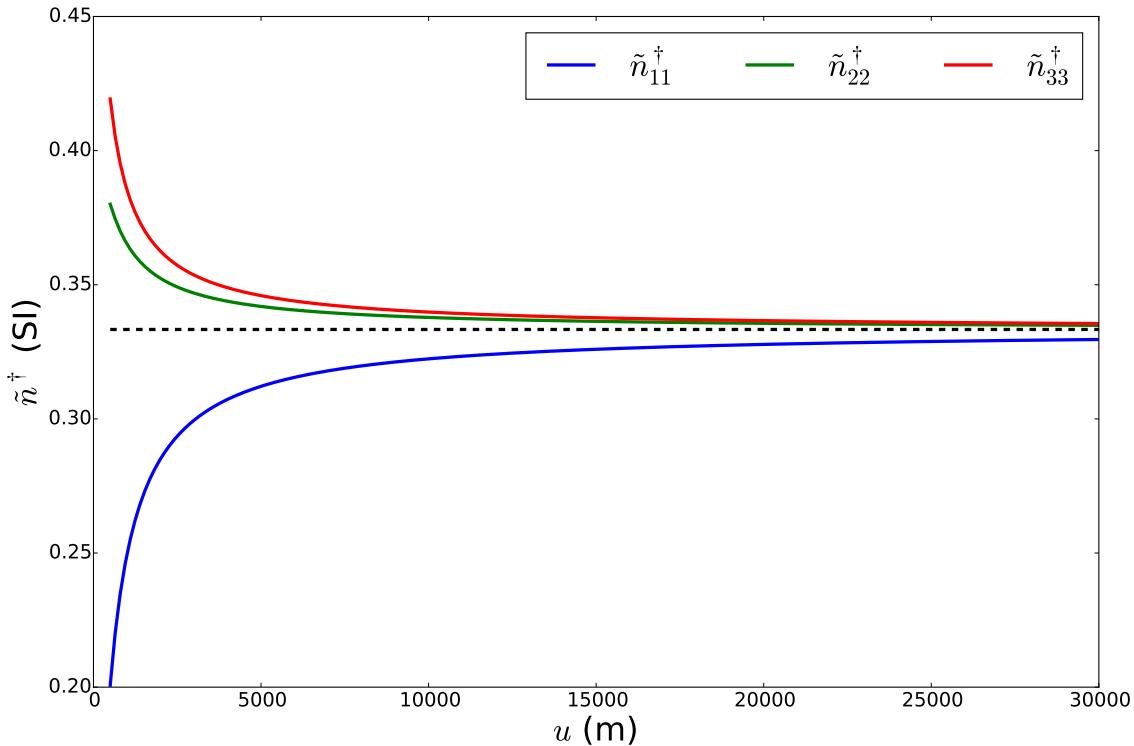


Figura 4.6: Comparação entre os fatores de desmagnetização  $\tilde{n}_{11}^\dagger$  (azul),  $\tilde{n}_{22}^\dagger$  (verde) e  $\tilde{n}_{33}^\dagger$  (vermelho) de um conjunto de 200 elipsoides triaxiais com semi-eixos  $a = a_0 + u$ ,  $b = b_0 + u$  e  $c = c_0 + u$ , em que  $500 \leq u \leq 30000$ ,  $a_0 = 500$  m,  $b_0 = 100$  m e  $c_0 = 50$  m. A linha preta horizontal tracejada representa o valor  $1/3$ . Os fatores de desmagnetização foram calculados, respectivamente, pelas Eqs. 2.30, 2.31 e 2.32.

Na Figura 4.7, observamos o mesmo padrão dos fatores de desmagnetização para o caso de elipsoides prolatos. Neste caso, simulei 200 elipsoides prolatos com semi-eixos  $a = m b_0$  e  $b = b_0$ , em que  $b_0 = 100$  m e  $1,1 \leq m \leq 100$  m. A Figura 4.7 mostra um gráfico dos seus fatores de desmagnetização  $\tilde{n}_{11}^\dagger$  (Eq. 2.35) e  $\tilde{n}_{22}^\dagger$  (Eq. 2.36) em função da variável  $m$ . Para valores de  $m$  próximos a 1, em que os semi-eixos têm tamanhos próximos, os fatores de desmagnetização tendem à  $1/3$ . Por outro lado, à medida em que  $m$  aumenta, o semi-eixo  $a$  fica muito maior que  $b$  e os fatores de desmagnetização ficam muito diferentes um do outro.

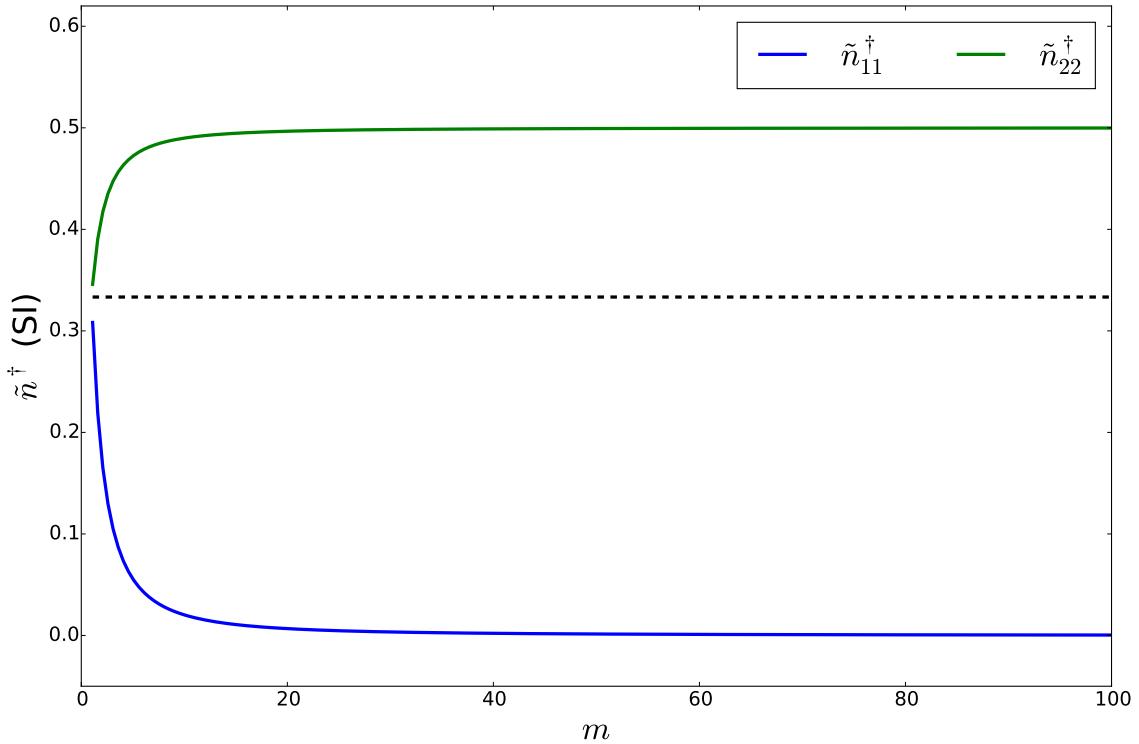


Figura 4.7: Comparaçāo entre os fatores de desmagnetizaçāo  $\tilde{n}_{11}^\dagger$  (azul) e  $\tilde{n}_{22}^\dagger$  (verde) de um conjunto de 200 elipsoides prolatos com semi-eixos  $a = m b_0$  e  $b = b_0$ , em que  $b_0 = 100$  m e  $1,1 \leq m \leq 100$  m. A linha preta horizontal tracejada representa o valor  $1/3$ . Os fatores de desmagnetizaçāo foram calculados, respectivamente pelas Eq. 2.35, 2.36.

De forma similar, simulei 200 elipsoides oblato com semi-eixos  $a = m b_0$  e  $b = b_0$ , em que  $b_0 = 1000$  m e  $0,05 \leq m \leq 1$  e calculei seus fatores de desmagnetizaçāo  $\tilde{n}_{11}^\dagger$  e  $\tilde{n}_{22}^\dagger$  utilizando, respectivamente, as Eqs. 2.37, 2.38. Lembre que, caso de elipsoides oblato,  $a$  é o semi-eixo menor e  $b$  o semi-eixo maior. A Figura 4.8 mostra o resultado dessa simulaçāo, para este conjunto de 200 elipsoides em função da variável  $m$ . Os resultados mostram que, para pequenos valores de  $m$ , que representa elipsoides com semi-eixos muito diferentes entre si, os fatores de desmagnetizaçāo são muito diferentes um do outro. Por outro lado, quando a variável  $m$  assume valores mais altos, todos os fatores de desmagnetizaçāo tendem ao valor de  $1/3$ , que é típico de

uma esfera.

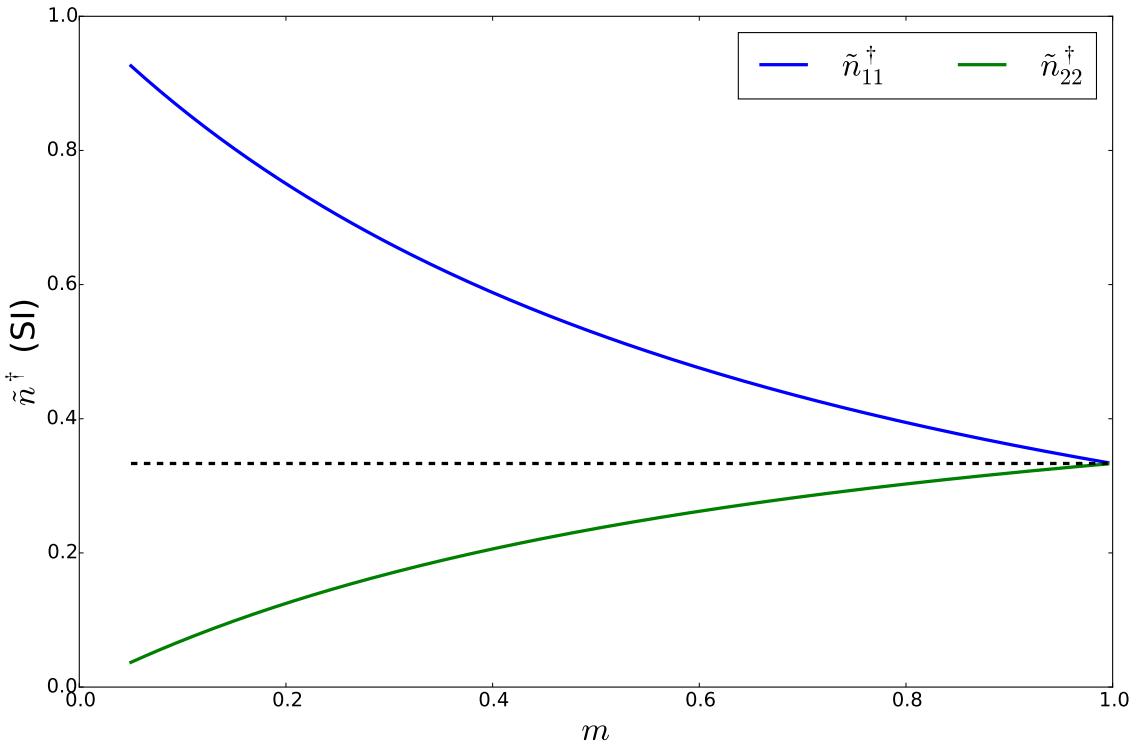


Figura 4.8: Comparação entre os fatores de desmagnetização  $\tilde{n}_{11}^\dagger$  (azul) e  $\tilde{n}_{22}^\dagger$  (verde) de um conjunto de 200 elipsoides oblatos com semi-eixos  $a = m b_0$  e  $b = b_0$ , em que  $b_0 = 1000$  m e  $0,05 \leq m \leq 1$ . A linha preta horizontal tracejada representa o valor  $1/3$ . Os fatores de desmagnetização foram calculados, respectivamente pelas Eq. 2.37, 2.38.

Através destes gráficos é possível observar que os fatores de desmagnetização possuem valor menor, quanto maior o semi-eixo do elipsoide. Fisicamente, isto significa que há a tendência do elipsoide se desmagnetizar com maior intensidade na direção dos seus semi-eixos menores.

### 4.3 Comparações entre a $\Delta T(\mathbf{r})$ produzida por modelos elipsoidais similares

Nesta seção é apresentada uma série de comparações entre os elipsoides e implementações diversas afim de validação dos resultados. A Figura 4.9 mostra as anomalias de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  2.78 produzidas pelo elipsoide triaxial definido na Tabela 4.5 e por uma esfera. Os dados produzidos pela esfera foram calculados com o pacote *Fatiando a Terra*.

Parâmetro	Valor	Unidade
$a, b, c$	500,0001, 500,0, 499,9999	m
<i>strike</i>	0	°
<i>dip</i>	0	°
<i>rake</i>	0	°
$x_c$	0	m
$y_c$	0	m
$z_c$	1000	m
$\mathbf{M}_R^*$	100, 25, 40	$A/m, ^\circ, ^\circ$
$\mathbf{B}_0^*$	1, 50, 20	$nT, ^\circ, ^\circ$
$k_1, k_2, k_3$	0,1, 0,1, 0,1	SI, SI, SI
Orientação das colunas da matriz $\mathbf{U}^{**}$	0, 90, 90	°, °, °

Tabela 4.5: Parâmetros do elipsoide triaxial que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.9A. \*Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. \*\*Ângulos de *strike*, *dip* e *rake*, respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8.

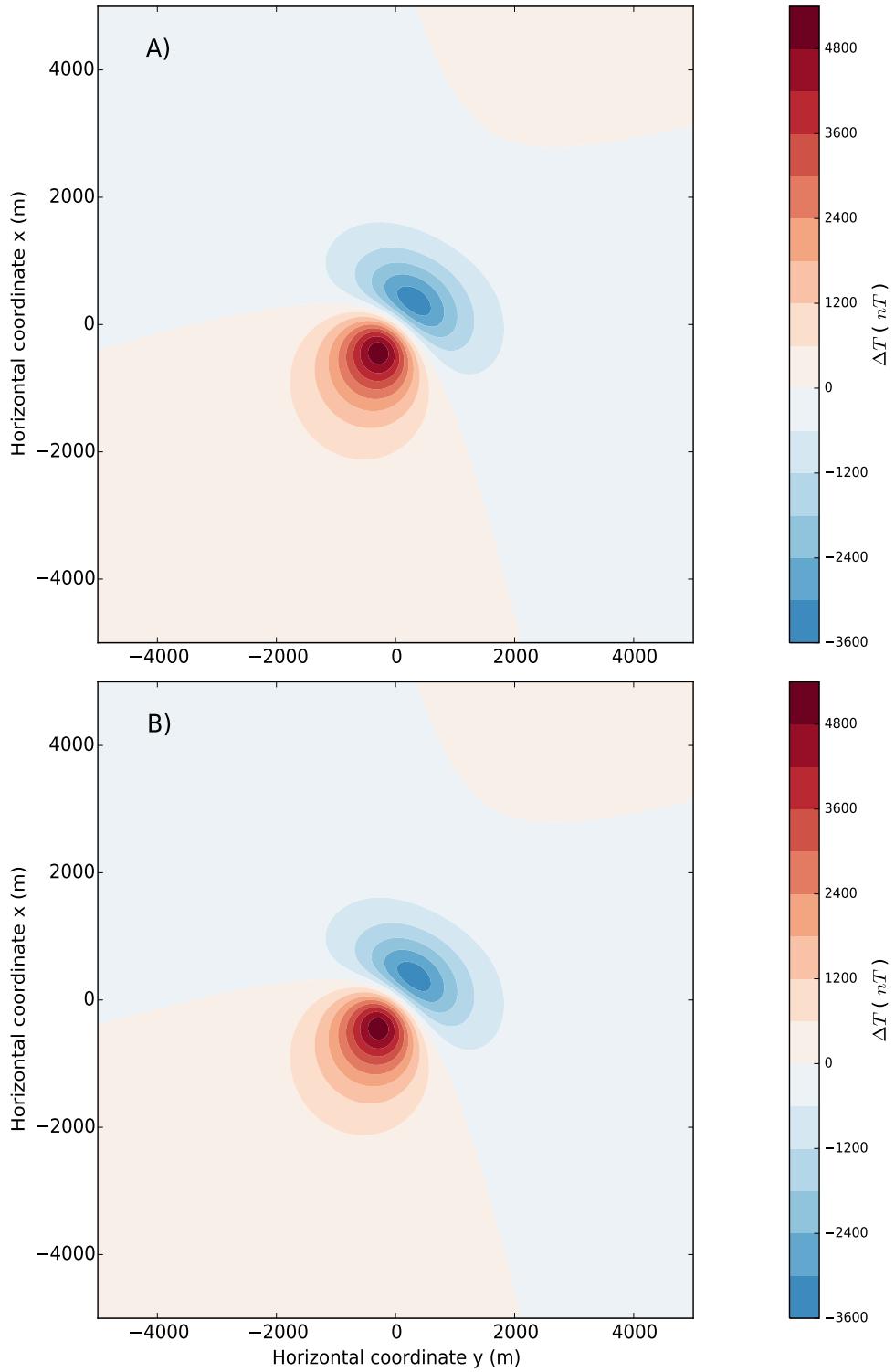


Figura 4.9: Comparação entre a anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78) produzida (A) pelo elipsoide triaxial definido na Tabela 4.5 e (B) por uma esfera com centro em  $(0, 0, 1000)$  e raio 500 m. Os dois corpos sintéticos possuem a mesma magnetização  $\mathbf{M}$  (Eq. 2.60). A anomalia produzida pela esfera foi calculada utilizando-se o pacote *Fatiando a Terra*. Os dados estão calculados em uma malha regular de  $200 \times 200$  pontos, no plano horizontal  $z = 0$  m.

Tal como esperado, as anomalias de campo total produzidas pelo elipsoide triaxial (Fig. 4.9A) e pela esfera (Fig. 4.9B) são muito próximas. As diferenças máximas ocorrem nas regiões próximas de máximo e mínimo das anomalias e atingem um valor absoluto de  $\sim 0.000349$  nT. Estes resultados representam uma validação numérica das rotinas desenvolvidas neste trabalho para calcular a anomalia de campo total produzida por elipsoides triaxiais.

As Figuras 4.10A e 4.10B mostram as anomalias de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78) produzidas, respectivamente, pelo elipsoide triaxial definido na Tabela 4.6 e pelo elipsoide prolato definido na Tabela 4.7. As maiores diferenças ocorrem próximas as região de máximo e minimo das anomalias e atingem um valor absoluto de  $\sim 0.003788$  nT. Similarmente, as Figuras 4.11A e 4.11B mostram as anomalias de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78) produzidas, respectivamente, pelo elipsoide triaxial definido na Tabela 4.8 e pelo elipsoide oblato definido na Tabela 4.9. As maiores diferenças ocorrem na região de máximo/minimo das anomalias e atingem um valor absoluto de  $\sim 46.71$  nT, o que representa cerca de 0,5% do valor máximo da anomalia apresentada nesta simulação. Estes resultados servem como validação numérica e mostram a consistência entre as rotinas desenvolvidas neste trabalho.

Parâmetro	Valor	Unidade
$a, b, c$	500, 100, 99.99	m
<i>strike</i>	90	°
<i>dip</i>	45	°
<i>rake</i>	0	°
$x_c$	0	m
$y_c$	0	m
$z_c$	1000	m
$\mathbf{M}_R^*$	100, 90, 0	$A/m, ^\circ, ^\circ$
$\mathbf{B}_0^*$	60000, 50, 20	$nT, ^\circ, ^\circ$
$k_1, k_2, k_3$	0,2, 0,1, 0,05	SI, SI, SI
Orientação das colunas da matriz $\mathbf{U}^{**}$	0, 90, 90	°, °, °

Tabela 4.6: Parâmetros do elipsóide triaxial que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.10A. \*Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. \*\*Ângulos de *strike*, *dip* e *rake*, respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8.

Parâmetro	Valor	Unidade
$a, b$	500, 100	m
<i>strike</i>	90	°
<i>dip</i>	45	°
<i>rake</i>	0	°
$x_c$	0	m
$y_c$	0	m
$z_c$	1000	m
$\mathbf{M}_R^*$	100, 90, 0	$A/m, ^\circ, ^\circ$
$\mathbf{B}_0^*$	60000, 50, 20	$nT, ^\circ, ^\circ$
$k_1, k_2, k_3$	0,2, 0,1, 0,05	SI, SI, SI
Orientação das colunas da matriz $\mathbf{U}^{**}$	0, 90, 90	°, °, °

Tabela 4.7: Parâmetros do elipsóide prolato que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.10B. \*Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. \*\*Ângulos de *strike*, *dip* e *rake*, respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8.

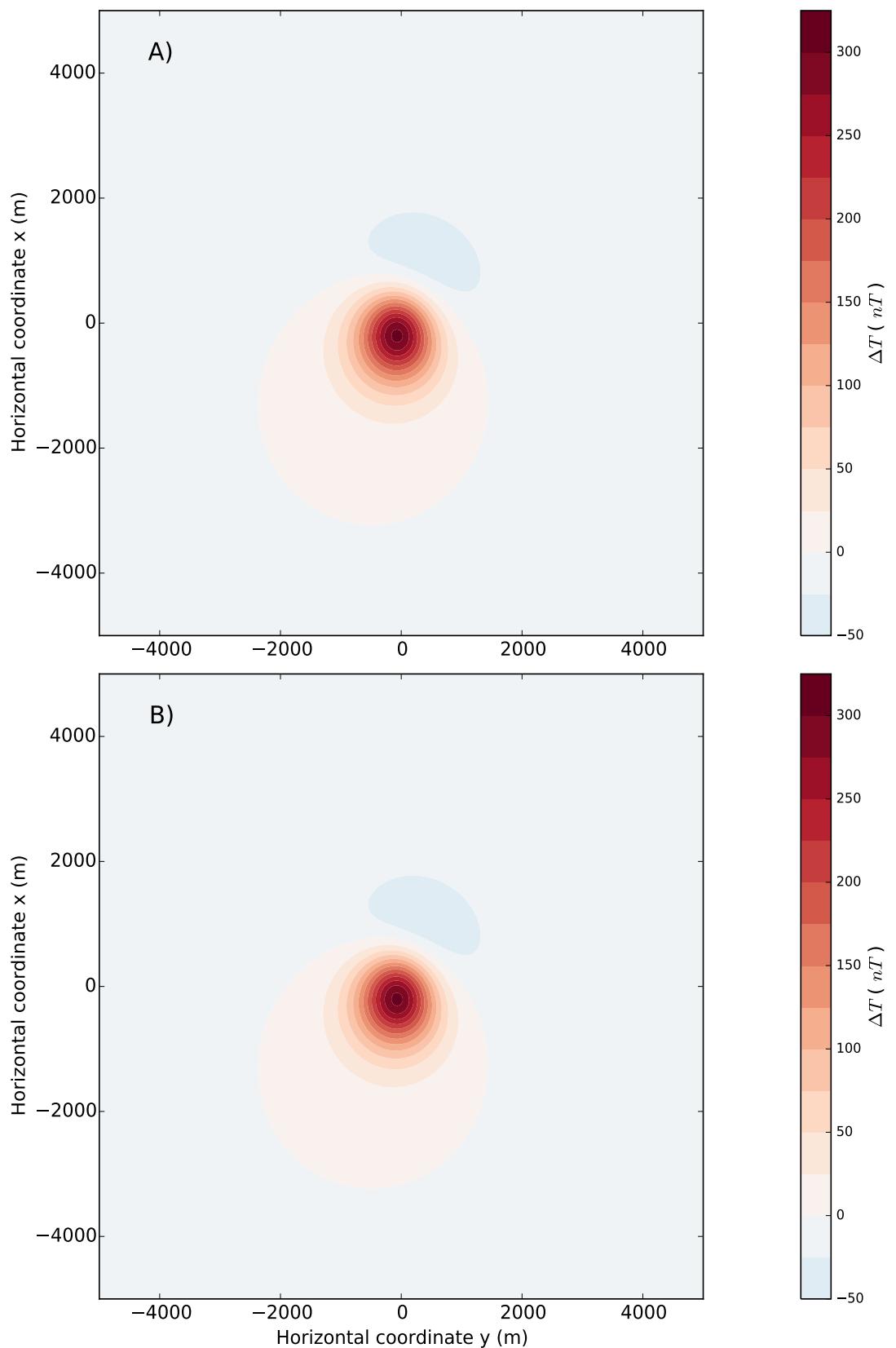


Figura 4.10: Comparação entre a anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78) produzida (A) pelo elipsoide triaxial definido na Tabela 4.6 e (B) produzida pelo elipsoide prolato definido na Tabela 4.7.

Parâmetro	Valor	Unidade
$a, b, c$	500, 499.99, 499.98	m
<i>strike</i>	0	°
<i>dip</i>	0	°
<i>rake</i>	90	°
$x_c$	0	m
$y_c$	0	m
$z_c$	1000	m
$\mathbf{M}_R^*$	100, 90, 0	A/m, °, °
$\mathbf{B}_0^*$	60000, 50, 20	nT, °, °
$k_1, k_2, k_3$	0,1, 0,1, 0,1	SI, SI, SI
Orientação das colunas da matriz $\mathbf{U}^{**}$	0, 90, 90	°, °, °

Tabela 4.8: Parâmetros do elipsoide triaxial que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.11A. \*Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. \*\*Ângulos de *strike*, *dip* e *rake*, respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8.

Parâmetro	Valor	Unidade
$a, b$	499,99, 500	m
<i>strike</i>	0	°
<i>dip</i>	0	°
<i>rake</i>	90	°
$x_c$	0	m
$y_c$	0	m
$z_c$	1000	m
$\mathbf{M}_R^*$	100, 90, 0	A/m, °, °
$\mathbf{B}_0^*$	60000, 50, 20	nT, °, °
$k_1, k_2, k_3$	0,1, 0,1, 0,1	SI, SI, SI
Orientação das colunas da matriz $\mathbf{U}^{**}$	0, 90, 90	°, °, °

Tabela 4.9: Parâmetros do elipsoide oblato que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.11B. \*Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. \*\*Ângulos de *strike*, *dip* e *rake*, respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  por meio das Eqs. 2.9, 2.10 e 2.11.

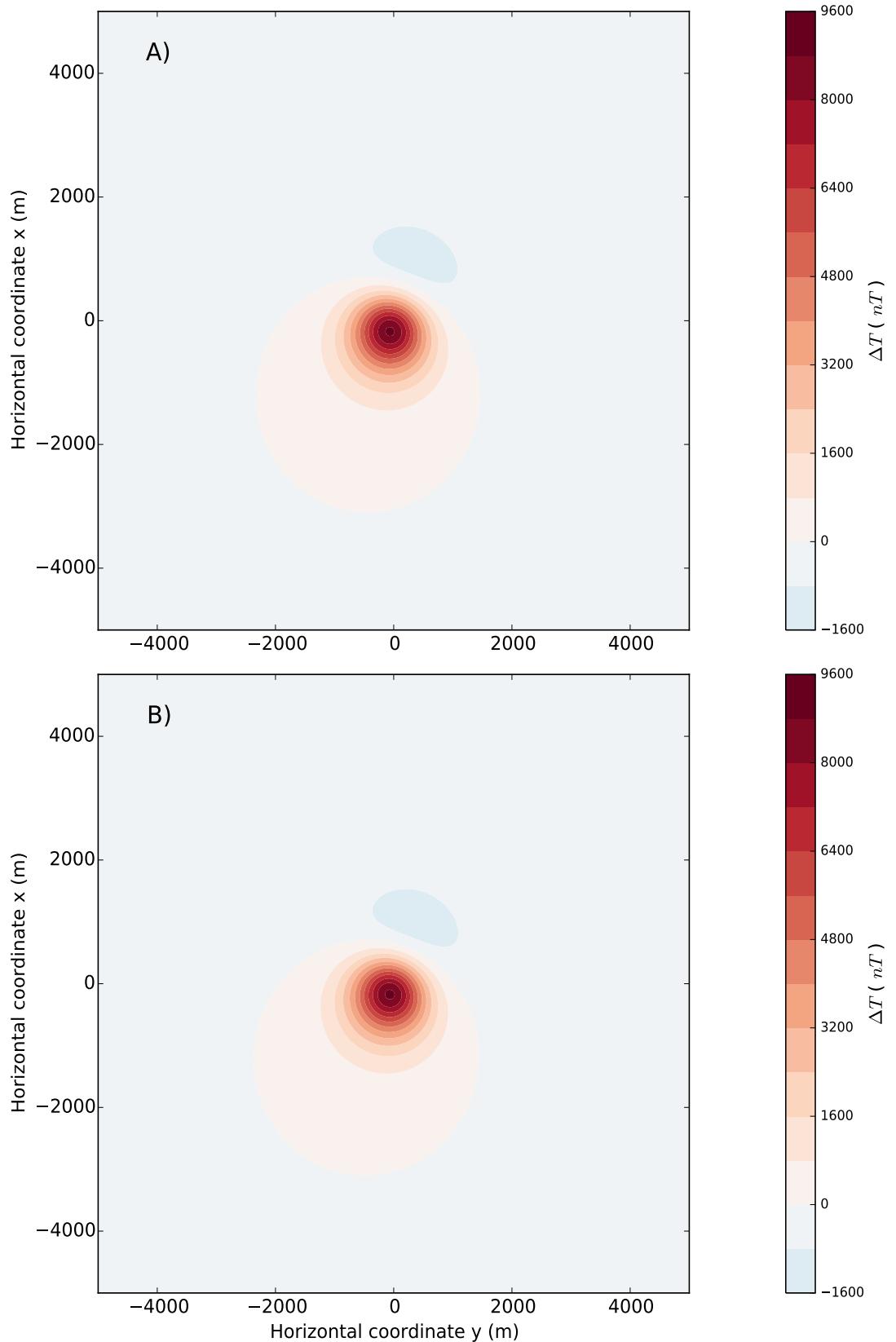


Figura 4.11: Comparação entre a anomalia de campo total  $\Delta T(\mathbf{r})$  (Eq. 2.78) produzida (A) pelo elipsoide triaxial definido na Tabela 4.8 e (B) produzida pelo elipsoide oblato definido na Tabela 4.9.

## 4.4 Susceptibilidade

Sabe-se que, na modelagem magnética de corpos geológicos com alta susceptibilidade, a desmagnetização é um fator muito importante. Nestes casos, negligenciar a desmagnetização e, consequentemente, utilizar a magnetização aproximada  $\tilde{\mathbf{M}}$  (Eq. 2.62) ao invés da magnetização  $\mathbf{M}$  (Eq. 2.60), pode acarretar em erros de interpretação das anomalias em dados magnéticos. É comumente aceito na literatura que 0,1 SI é o valor de suscetibilidade isotrópica a partir do qual a desmagnetização deve ser considerada na modelagem ou seja, é o valor a partir do qual a magnetização aproximada  $\tilde{\mathbf{M}}$  (Eq. 2.62) não é considerada uma boa aproximação para a magnetização  $\mathbf{M}$  (Eq. 2.60). Para suscetibilidades menores que 0,1 SI, considera-se que  $\tilde{\mathbf{M}}$  (Eq. 2.62) é uma boa aproximação para a magnetização resultante e que a parcela induzida tem a mesma direção do campo geomagnético local.

Para analisar o efeito da suscetibilidade na modelagem magnética, calculamos a magnetização resultante  $\mathbf{M}$  (Eq. 2.60) do elipsoide triaxial definido na Tabela 4.10 para diferentes valores de suscetibilidade isotrópica  $0,0001 \leq \chi \leq 0,05$ . A Figura 4.12 mostra a inclinação (linha azul) e a declinação (linha verde) da magnetização resultante  $\mathbf{M}$  (Eq. 2.60) em função da suscetibilidade  $\chi$ . A inclinação e a declinação do campo geomagnético local estão representadas, respectivamente, pelas linhas horizontais preta e vermelha. Nota-se que, para valores de suscetibilidade  $\chi$  menores que 0,1 SI (linha preta vertical na Figura 4.12), a diferença entre a inclinação da magnetização resultante do elipsoide e do campo geomagnético local é menor que  $-0,58$  graus. Já para a declinação, a diferença é menor que  $0,85$  graus. Por outro lado, as diferenças na inclinação e declinação para valores de suscetibilidade  $\chi = 0,5$  SI são próximos a  $-2,71$  e  $3,4$  graus, respectivamente. A linha vertical amarela na Figura 4.12 mostra a suscetibilidade  $\chi_{max}$  (Eq. 2.72) predita para que o erro relativo na magnetização resultante deste elipsoide seja menor ou igual a  $\epsilon = 5\%$ . Neste caso, a suscetibilidade  $\chi_{max}$  (0,077 SI) é menor que aquela comumente utilizada na literatura (0,1 SI), as diferenças na inclinação e declinação são iguais a  $-0,46$  e  $0,68$  graus, respectivamente, e o erro relativo da magnetização é igual a  $1,593\%$ . Este resultado mostra que o valor de suscetibilidade isotrópica a partir do qual a desmagnetização deve ser considerada na modelagem pode ser escolhido de acordo com dois critérios: i) o conhecimento prévio do intérprete sobre a forma do corpo e ii) o máximo erro relativo  $\epsilon$  permitido para a magnetização resultante.

Parâmetro	Valor	Unidade
$a, b, c$	500, 100, 50	m, m, m
<i>strike</i>	0	°
<i>dip</i>	0	°
<i>rake</i>	0	°
$x_c$	0	m
$y_c$	0	m
$z_c$	500	m
$\mathbf{M}_R^*$	0, 0, 0	A/m, °, °
$\mathbf{B}_0^*$	60000, 30, -15	nT, °, °
Orientação das colunas da matriz $\mathbf{U}^{**}$	0, 90, 90	°, °, °

Tabela 4.10: Parâmetros do elipsóide triaxial que produz o campo magnético mostrado na Figura 4.12. \*Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. \*\*Ângulos de *strike*, *dip* e *rake*, respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_3$  por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8.

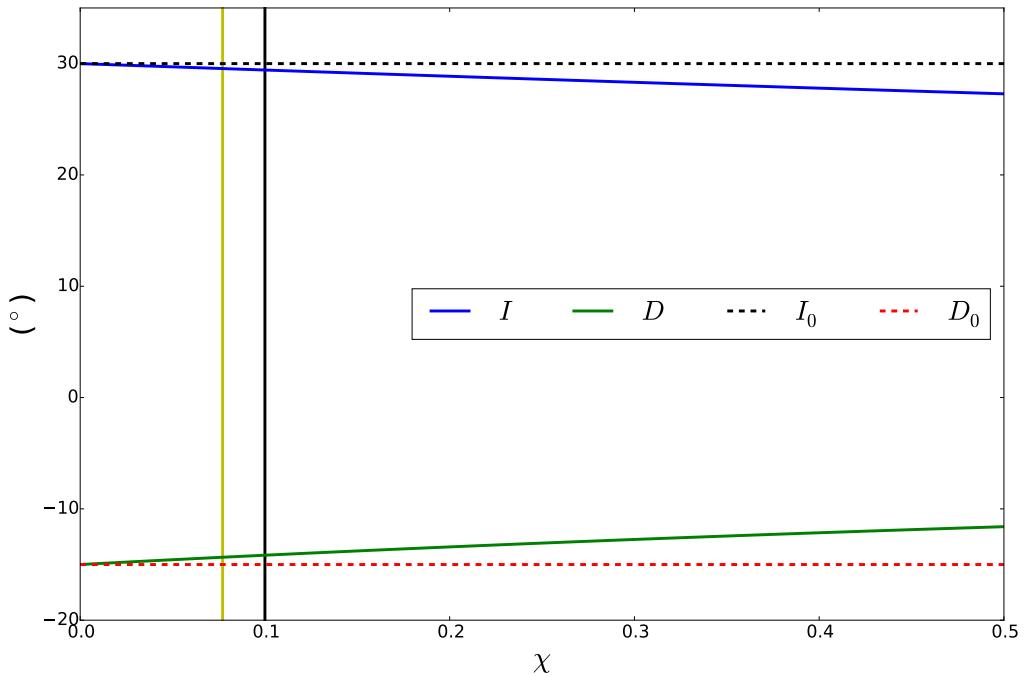


Figura 4.12: Efeito da susceptibilidade isotrópica  $\chi$  na modelagem do elipsóide triaxial definido na Tabela 4.10. As linhas azul e verde representam, respectivamente, a inclinação  $I$  e a declinação  $D$  da magnetização resultante  $\mathbf{M}$  (Eq. 2.60) deste elipsóide em função da susceptibilidade isotrópica  $\chi$ . As linhas pontilhadas horizontais pretas e vermelhas representam, respectivamente, a inclinação  $I_0$  e a declinação  $D_0$  do campo geomagnético local (Tabela 4.10). A linha vertical preta representa o valor de susceptibilidade isotrópica  $\chi = 0,1$  SI, que é comumente aceito como o limite a partir do qual a desmagnetização deve ser considerada na modelagem. A linha vertical amarela representa a susceptibilidade isotrópica  $\chi_{max}$  calculado com a Eq. 2.72 para que o erro relativo na magnetização seja menor ou igual a  $\epsilon = 5\%$ .

## 4.5 Anisotropia de forma

Conforme mostrado na seção 4.2 existe uma relação entre os fatores de desmagnetização e os semi-eixos. Nesta seção, simulei um elipsoide triaxial com os três semi-eixos muito próximos uns dos outros (Tabela 4.11) para analisar o efeito da desmagnetização. A Figura 4.5A mostra a anomalia de campo total produzida pelo elipsoide definido na Tabela 4.11. Os dados foram calculados em uma malha regular de 200 por 200 pontos sobre uma plano horizontal localizado na coordenada vertical  $z = -1000$  m. As Figuras 4.5B-F mostram como o aumento do semi-eixo maior afeta o vetor de magnetização resultante (Eq. 2.17). Nota-se que quando os três semi-eixos estão muito próximos, simulando uma esfera, o vetor de magnetização resultante se alinha ao campo geomagnético  $\mathbf{B}_0$  (Tabela 4.11). Porém a medida que aumenta-se o semi-eixo maior  $a$ , ocorre a desmagnetização nas direções dos semi-eixos menores e o vetor de magnetização resultante tende a se alinhar na direção do semi-eixo maior (neste caso o elipsoide triaxial possui um azimute de  $10^\circ$ ).

Parâmetro	Valor	Unidade
$a, b, c$	50,1-1000, 50, 49,9	m, m, m
<i>strike</i>	10	°
<i>dip</i>	0	°
<i>rake</i>	0	°
$x_c$	0	m
$y_c$	0	m
$z_c$	1000	m
$\mathbf{M}_R^*$	100, 0, 0	A/m, °, °
$\mathbf{B}_0^*$	60000, 0, 90	nT, °, °
$k_1, k_2, k_3$	2, 2, 2	SI, SI, SI
Orientação das colunas da matriz $\mathbf{U}^{**}$	0, 90, 90	°, °, °

Tabela 4.11: Parâmetros do elipsoide triaxial modelado. \*Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. \*\*Ângulos de *strike*, *dip* e *rake*, respectivamente, utilizados para calcular os vetores unitários  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  por meio das Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8.

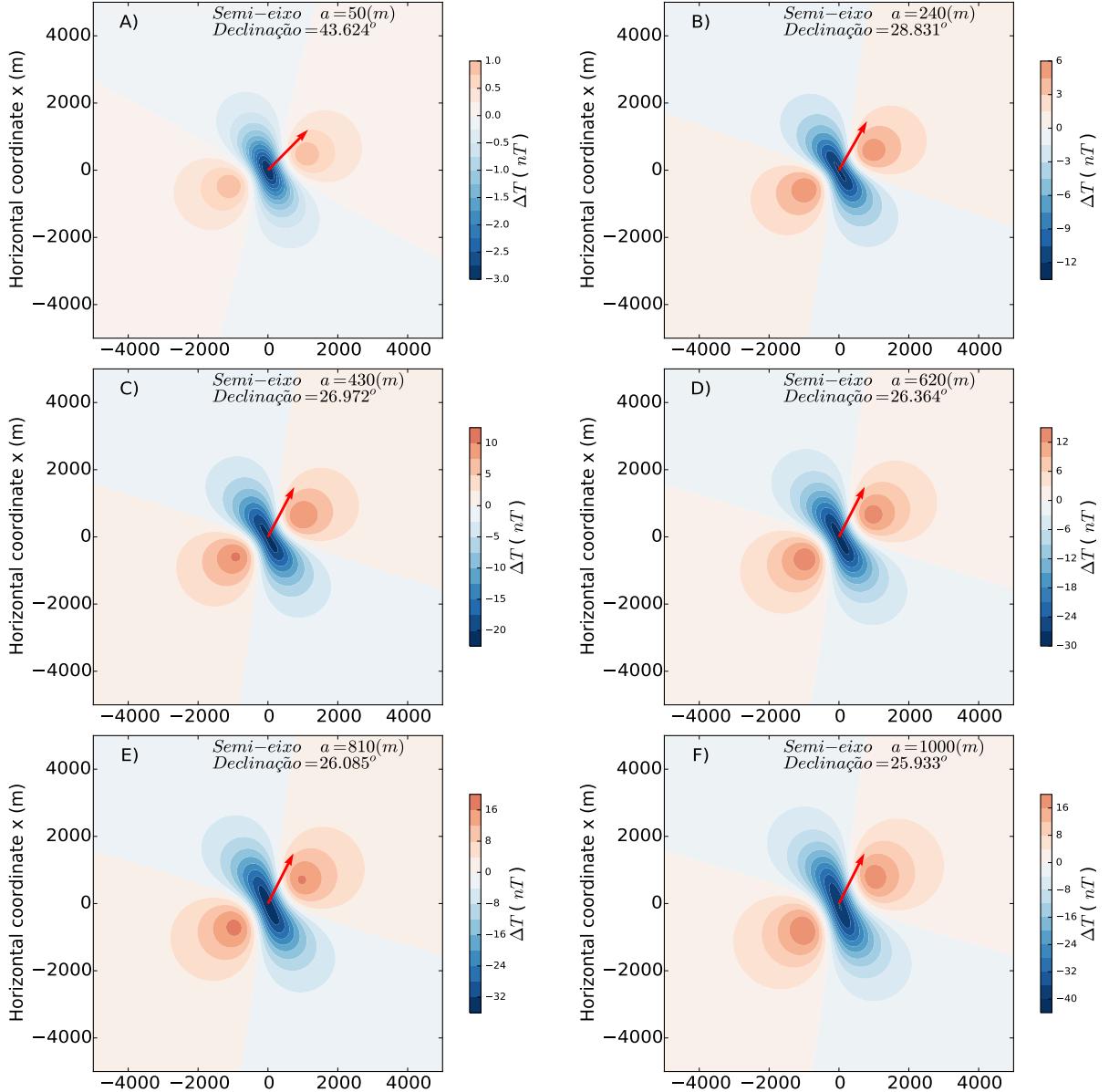


Figura 4.13: Simulação, da mudança do vetor de magnetização resultante (Eq. 2.17), de um elipsoide triaxial com o aumento do semi-eixo maior. O elipsoide está imerso em um campo externo constante de declinação  $90^\circ$  e possui o semi-eixo maior orientado com um azimute de  $10^\circ$ . Ao longo da sequência das figuras, aumentei o semi-eixo maior  $a$  do elipsoide (Tabela 4.11) e mantive os demais eixos fixos. Nota-se a tendência do vetor de magnetização resultante (seta em vermelho) em se alinhar com o semi-eixo maior.

# Capítulo 5

## Conclusões

Esta dissertação apresenta uma revisão da vasta literatura sobre a modelagem magnética de elipsoides triaxiais, prolatos e oblatos, com orientação espacial arbitrária, suscetibilidade anisotrópica e magnetização remanente. Conjuntamente, apresenta uma forma alternativa de determinar a suscetibilidade isotrópica a partir da qual a desmagnetização deve ser considerada na modelagem e também a implementação de uma série de rotinas para o cálculo do campo magnético de corpos elipsoidais.

A modelagem direta do campo magnético gerado por fontes elipsoidais se mostrou satisfatória para os testes conduzidos neste trabalho. As componentes do campo magnético e a anomalia de campo total foram calculadas conforme o esperado para as três implementações propostas: para elipsoides triaxiais, prolatos e oblatos. As validações das rotinas desenvolvidas neste trabalho foram feitas comparando-se as anomalias de campo total produzida por corpos com formato similar e localizados na mesma posição. As comparações foram feitas utilizando-se: i) um elipsoide triaxial e uma esfera, ii) um elipsoide triaxial e um elipsoide prolato e iii) um elipsoide triaxial e um elipsoide oblato. Os dados produzidos pelos elipsoides foram calculados com as rotinas desenvolvidas neste trabalho. Já os dados produzidos pela esfera foram calculados com o pacote Fatiando a Terra. Em todos os casos, as anomalias calculadas ficaram muito próximas entre si.

Outra simulação mostrou que os fatores de desmagnetização calculados para todos os tipos de elipsoide são i) diferentes uns dos outros quando os semi-eixos dos elipsoides têm valores diferentes entre si e ii) tendem a 1/3 quando o tamanho dos semi-eixos dos elipsoides são próximos uns aos outros.

Testes numéricos mostraram a mudança da direção do vetor de magnetização resultante em função da intensidade da susceptibilidade isotrópica. Estes testes ilustraram o critério alternativo proposto nesta dissertação para determinar o valor de suscetibilidade isotrópica a partir do qual a desmagnetização deve ser levada em consideração na modelagem magnética de corpos elipsoidais. Este critério é baseado

no conhecimento prévio sobre a forma do corpo e no máximo erro relativo permitido na magnetização. Este critério é uma alternativa ao valor de 0,1 SI que tem sido utilizado de forma empírica pela comunidade geocientífica.

As rotinas desenvolvidas aqui se mostraram eficazes para calcular, de forma relativamente simples, o campo magnético produzido por múltiplos corpos. Estas rotinas foram desenvolvidas com base no pacote *Fatiando a Terra* com o intuito de torná-las acessíveis para a comunidade científica. As rotinas estão disponibilizadas livremente no seguinte repositório no GitHub: <https://github.com/DiegoTaka/ellipsoid-magnetic>.

Futuramente estas rotinas poderão ser utilizadas tanto para modelar situações geológicas reais quanto para ensino. Estudos teóricos também poderão ser feitos para determinar o valor de suscetibilidade isotrópica a partir do qual a desmagnetização pode ser negligenciada com base no erro relativo máximo permitido no campo magnético calculado. As rotinas também poderão ser utilizadas para estudos de inversão magnética, podendo-se estimar diversos parâmetros como o vetor de magnetização, semi-eixos e as orientações angulares do corpo elipsoidal.

# Referências Bibliográficas

- ALLMENDINGER, R., CARDOZO, N., FISHER, D. M., 2012, *Structural geology algorithms : vectors and tensors.* Cambridge University Press. ISBN: 978-1-107-40138-9.
- AUSTIN, J., GEUNA, S., CLARK, D., et al., 2014, “Remanence, self-demagnetization and their ramifications for magnetic modelling of iron oxide copper-gold deposits: An example from Candelaria, Chile”, *Journal of Applied Geophysics*, v. 109, pp. 242 – 255. ISSN: 0926-9851. doi: 10.1016/j.jappgeo.2014.08.002.
- BLAKELY, R. J., 1996, *Potential theory in gravity and magnetic applications.* Cambridge University Press.
- CHANG, H., 1961, “Fields external to open-structure magnetic devices represented by ellipsoid or spheroid”, *British Journal of Applied Physics*, v. 12, n. 4, pp. 160.
- CLARK, D., 2000, “Self-Demagnetisation in Practice: the Osborne Cu-Au Deposit”, *Preview (Magazine of the Australian Society of Exploration Geophysicists)*, , n. 85, pp. 31–36. ISSN: 1443-2471.
- CLARK, D., EMERSON, D., 1999, “Self-Demagnetisation”, *Preview (Magazine of the Australian Society of Exploration Geophysicists)*, , n. 79, pp. 22–25.
- CLARK, D., SAUL, S., EMERSON, D., 1986, “Magnetic and gravity anomalies of a triaxial ellipsoid”, *Exploration Geophysics*, v. 17, n. 4, pp. 189–200.
- CLARK, D. A., 2014, “Methods for determining remanent and total magnetisations of magnetic sources—a review”, *Exploration Geophysics*, v. 45, n. 4, pp. 271–304.
- DEMMELO, J. W., 1997, *Applied Numerical Linear Algebra.* SIAM. ISBN: 0898713897.

- DIRICHLET, L. P. G., 1839, “Sur un nouvelle methode pour la determination des integrales multiples”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, v. 1, n. 4, pp. 164–168. Disponível em: <[http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA\\_1839\\_1\\_4\\_A11\\_0.pdf](http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA_1839_1_4_A11_0.pdf)>.
- DUBOIS, H., 1896, *The Magnetic Circuit in Theory and Practice*. Longmans, Green, and Co.
- DUNLOP, D., ÖZDEMİR, Ö., 1997, *Rock Magnetism: Fundamentals and Frontiers*. Cambridge Studies in Magnetism. Cambridge University Press. ISBN: 9780521325141.
- EMERSON, D. W., CLARK, D., SAUL, S., 1985, “Magnetic exploration models incorporating remanence, demagnetization and anisotropy: HP 41C handheld computer algorithms”, *Exploration Geophysics*, v. 16, n. 1, pp. 1–122.
- ESKOLA, L., TERVO, T., 1980, “Solving the magnetostatic field problem (a case of high susceptibility) by means of the method of subsections”, *Geoexploration*, v. 18, n. 2, pp. 79 – 95. ISSN: 0016-7142. doi: 10.1016/0016-7142(80)90022-8.
- FARRAR, L., 1979, “Some comments on detailed magnetic investigations of ellipsoidal bodies at Tennant Creek”, *Exploration Geophysics*, v. 10, n. 1, pp. 26–33.
- FULLER, M. D., 1963, “Magnetic anisotropy and paleomagnetism”, *Journal of Geophysical Research*, v. 68, n. 1, pp. 293–309. ISSN: 2156-2202. doi: 10.1029/JZ068i001p00293.
- GOLUB, G. H., LOAN, C. F. V., 2013, *Matrix Computations (Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences)*. Johns Hopkins University Press. ISBN: 978-1-4214-0794-4.
- GUO, W., DENTITH, M. C., LI, Z., et al., 1998, “Self demagnetisation corrections in magnetic modelling: some examples”, *Exploration Geophysics*, v. 29, n. 3/4, pp. 396–401.
- GUO, W., DENTITH, M. C., BIRD, R. T., et al., 2001, “Systematic error analysis of demagnetization and implications for magnetic interpretation”, *Geophysics*, v. 66, n. 2, pp. 562–570.

- HILLAN, D., FOSS, C., 2013, “Correction schemes for self-demagnetisation”. In: *ASEG Extended Abstracts 2012: 22nd Geophysical Conference*, pp. 1–4. doi: 10.1071/ASEG2012ab402.
- HOSCHKE, T., 1991, “Geophysical discovery and evaluation of the West Peko copper-gold deposit, Tennant Creek”, *Exploration Geophysics*, v. 22, n. 3, pp. 485–495.
- HROUDA, F., 1982, “Magnetic anisotropy of rocks and its application in geology and geophysics”, *Geophysical surveys*, v. 5, n. 1, pp. 37–82.
- HUNTER, J. D., 2007–. “Matplotlib: A 2D Graphics Environment”. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/content/aip/journal/cise/9/3/10.1109/MCSE.2007.55>>. [Online; accessed 2017-02-02].
- JAHREN, C. E., 1963, “Magnetic susceptibility of bedded iron-formation”, *GEOPHYSICS*, v. 28, n. 5, pp. 756–766. doi: 10.1190/1.1439268.
- JANÁK, F., 1972, “Magnetic susceptibility anisotropy of various rock types and its significance for geophysics and geology”, *Geophysical Prospecting*, v. 20, n. 2, pp. 375–384. ISSN: 1365-2478. doi: 10.1111/j.1365-2478.1972.tb00640.x.
- JONES, E., OLIPHANT, T., PETERSON, P., et al., 2001–. “SciPy: Open source scientific tools for Python”. Disponível em: <<http://www.scipy.org/>>. [Online; accessed 2017-02-02].
- JOSEPH, R. I., SCHLÖMANN, E., 1965, “Demagnetizing Field in Nonellipsoidal Bodies”, *Journal of Applied Physics*, v. 36, n. 5, pp. 1579–1593. doi: 10.1063/1.1703091.
- KELLOGG, O. D., 1929, *Foundations of Potential Theory*. Frederick Ungar Publishing Company.
- LOWES, F. J., 1974, “The Torque on a Magnet”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, v. 337, n. 1611, pp. 555–567. ISSN: 00804630. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/78532>>.
- MACDONALD, W. D., ELLWOOD, B. B., 1987, “Anisotropy of magnetic susceptibility: Sedimentological, igneous, and structural-tectonic applications”, *Reviews of Geophysics*, v. 25, n. 5, pp. 905–909. ISSN: 1944-9208. doi: 10.1029/RG025i005p00905.

MAXWELL, J. C., 1873, *A treatise on electricity and magnetism*, v. 2. Clarendon press.

OSBORN, J., 1945, “Demagnetizing factors of the general ellipsoid”, *Physical review*, v. 67, n. 11-12, pp. 351.

PEAKE, H. J., DAVY, N., 1953, “The magnetic fields produced by uniformly magnetized ellipsoids of revolution”, *British Journal of Applied Physics*, v. 4, n. 7, pp. 207.

PEIRCE, B., 1902, *Elements of the Theory of the Newtonian Potential Function*. Cornell University Library historical math monographs. Ginn.

POISSON, S. D., 1824, “Second mémoire sur la théorie du magnétisme”, *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, pp. 488–533.

PURSS, M. B. J., CULL, J. P., 2005, “A new iterative method for computing the magnetic field at high magnetic susceptibilities”, *GEOPHYSICS*, v. 70, n. 5, pp. L53–L62. doi: 10.1190/1.2052469.

REITZ, J. R., MILFORD, F. J., CHRISTY, R. W., 1992, *Foundations of Electromagnetic Theory*. Addison Wesley. ISBN: 0201526247.

ROCHETTE, P., JACKSON, M., AUBOURG, C., 1992, “Rock magnetism and the interpretation of anisotropy of magnetic susceptibility”, *Reviews of Geophysics*, v. 30, n. 3, pp. 209–226. ISSN: 1944-9208. doi: 10.1029/92RG00733.

SEARLE, S. R., 1982, *Matrix Algebra Useful for Statistics*. Wiley-Interscience. ISBN: 0471866814.

SHARMA, P. V., 1966, “Rapid computation of magnetic anomalies and demagnetization effects caused by bodies of arbitrary shape”, *pure and applied geophysics*, v. 64, n. 1, pp. 89–109. ISSN: 1420-9136. doi: 10.1007/BF00875535.

SOLIVÉREZ, C. E., 1981, “Magnetostatics of anisotropic ellipsoidal bodies”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 17, n. 3 (May), pp. 1363–1364. ISSN: 0018-9464. doi: 10.1109/TMAG.1981.1061200.

SOLIVÉREZ, C. E., 2008, “Campos eléctricos generados por elipsoides uniformemente polarizados”, *Revista mexicana de física E*, v. 54 (12), pp. 203 – 207. ISSN: 1870-3542.

- STÉFAN VAN DER WALT, S. C. C., VAROQUAUX, G., 2011–. “The NumPy Array: A Structure for Efficient Numerical Computation”. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/content/aip/journal/cise/13/2/10.1109/MCSE.2011.37>>. [Online; accessed 2017-02-02].
- STONER, E. C., 1945, “The demagnetizing factors for ellipsoids”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 36, n. 263, pp. 803–821.
- STRATTON, J. A., 2007, *Electromagnetic Theory*. Wiley-IEEE Press. ISBN: 0470131535.
- TAUXE, L., 2003, “Rudiments of rock magnetism”, *Paleomagnetic Principles and Practice*, pp. 35–81.
- TEJEDOR, M., RUBIO, H., ELBAILE, L., et al., 1995, “External fields created by uniformly magnetized ellipsoids and spheroids”, *IEEE transactions on magnetics*, v. 31, n. 1, pp. 830–836.
- THOMPSON, R., OLDFIELD, F., 1986, *Environmental magnetism*. Springer Science & Business Media.
- THOMSON, W., TAIT, P., 1879, “Treatise on Natural Philosophy”, *Part II*,” Cambridge University Press, Cambridge.
- UIEDA, L., JR, V. C. O., BARBOSA, V. C. F., 2013, “Modeling the Earth with Fatiando a Terra”. In: van der Walt, S., Millman, J., Huff, K. (Eds.), *Proceedings of the 12th Python in Science Conference*, pp. 96 – 103.
- UYEDA, S., FULLER, M. D., BELSHÉ, J. C., et al., 1963, “Anisotropy of magnetic susceptibility of rocks and minerals”, *Journal of Geophysical Research*, v. 68, n. 1, pp. 279–291. ISSN: 2156-2202. doi: 10.1029/JZ068i001p00279.
- WEBSTER, A., 1904, *The Dynamics of Particles and of Rigid, Elastic, and Fluid Bodies: Being Lectures on Mathematical Physics*. B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. B.G. Teubner.
- WEISSTEIN, E. W., 2017. “Cubic Formula: From MathWorld – A Wolfram Web Resource”. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html>>. [Online; accessed 2017-01-23].

# Apêndice A

## Relação entre as derivadas das funções $f(\mathbf{r})$ e $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$

Sendo  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$  a função escalar obtida transformando  $f(\mathbf{r})$  (Eq. 2.22) do sistema de coordenadas principal para um sistema de coordenadas local, por conveniência, reescreveremos a Eq. 2.13 como:

$$\tilde{r}_k = v_{k1} r_1 + v_{k2} r_2 + v_{k3} r_3 + c_k , \quad (\text{A.1})$$

em que  $\tilde{r}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , são os elementos do vetor posição transformado  $\tilde{\mathbf{r}}$  (Eq. 2.13),  $r_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , são os elementos do vetor posição  $\mathbf{r}$  (Eq. 2.1),  $v_{kj}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , são os elementos da matriz  $\mathbf{V}$  (Eq. 2.12), e  $c_k$  é uma constante definida pelas coordenadas  $x_c$ ,  $y_c$ , e  $z_c$  do centro do corpo elipsoidal.

Considerando as funções  $f(\mathbf{r})$  (Eq. 2.22) e  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$  calculadas no mesmo ponto, mas em diferentes sistemas de coordenadas, temos:

$$\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_j} = \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_1} \frac{\partial \tilde{r}_1}{\partial r_j} + \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_2} \frac{\partial \tilde{r}_2}{\partial r_j} + \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_3} \frac{\partial \tilde{r}_3}{\partial r_j} , \quad j = 1, 2, 3 ,$$

que, da Eq. A.1, pode ser dada por:

$$\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_j} = v_{j1} \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_1} + v_{j2} \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_2} + v_{j3} \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_3} , \quad j = 1, 2, 3 . \quad (\text{A.2})$$

Derivando  $\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_j}$  (Eq. A.2) com respeito ao  $i$ -ésimo elemento  $r_i$  do vetor posição  $\mathbf{r}$

(Eq. 2.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_j} &= v_{j1} \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_1} \right) + v_{j2} \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_2} \right) + v_{j3} \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_3} \right) \\
&= v_{j1} \left( \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_1 \partial \tilde{r}_1} v_{i1} + \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_2 \partial \tilde{r}_1} v_{i2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_3 \partial \tilde{r}_1} v_{i3} \right) + \\
&\quad + v_{j2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_1 \partial \tilde{r}_2} v_{i1} + \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_2 \partial \tilde{r}_2} v_{i2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_3 \partial \tilde{r}_2} v_{i3} \right) + \\
&\quad + v_{j3} \left( \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_1 \partial \tilde{r}_3} v_{i1} + \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_2 \partial \tilde{r}_3} v_{i2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_3 \partial \tilde{r}_3} v_{i3} \right) \\
&= \begin{bmatrix} v_{j1} & v_{j2} & v_{j3} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}) \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

em que  $\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}})$  é uma matriz  $3 \times 3$ , cujo  $ij$ -ésimo elemento é  $\frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_i \partial \tilde{r}_j}$ . Da Eq. A.3, obtemos:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}) \mathbf{V}^\top, \tag{A.4}$$

em que  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  é uma matriz  $3 \times 3$ , cujo  $ij$ -ésimo elemento é  $\frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_j}$  e  $\mathbf{V}$  é definido pelas Eq. 2.12, dependendo do tipo de elipsoide. Como pode ser notado, as matrizes  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  e  $\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}})$  representam as Hessianas das funções  $f(\mathbf{r})$  (Eq. 2.22) e  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$ , respectivamente. Além disso, o tensor de depolarização  $\mathbf{N}(\mathbf{r})$  (Eq. 2.20) cujo  $ij$ -ésimo elemento é dado pela Eq. 2.21 pode se reescrito usando a matriz  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  como:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}). \tag{A.5}$$

Usando apropriadamente a ortogonalidade de matrizes  $\mathbf{V}$ , podemos reescrever a Eq. A.4 como:

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}) = \mathbf{V}^\top \mathbf{F}(\mathbf{r}) \mathbf{V}. \tag{A.6}$$

Finalmente, multiplicando os dois lados da Eq. A.6 por  $-\frac{1}{4\pi}$  e usando a Eq. A.5, concluímos que

$$\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}}) = \mathbf{V}^\top \mathbf{N}(\mathbf{r}) \mathbf{V}. \tag{A.7}$$

# Apêndice B

## Parâmetro $\lambda$ e suas derivadas espaciais

Aqui, mostramos o raciocínio apresentado por WEBSTER (1904) para análise do parâmetro  $\lambda$  que define os elipsoides triaxiais (Eq. B.10), prolatos e oblatis (Eq. B.21).

### B.1 Parâmetro $\lambda$ definido para os elipsoides triaxiais

Consideremos um elipsoide de semi-eixos  $a$ ,  $b$  e  $c$  orientados ao longo dos eixos  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ , e  $\tilde{z}$ , respectivamente, no seu sistema de coordenadas local, em que  $a > b > c > 0$ . Este elipsoide é definido pela seguinte equação:

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} + \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = 1 . \quad (\text{B.1})$$

Uma superfície quádrica (e.g., elipsoide, hiperboloides de uma camada ou hiperboloides de duas camadas) que é confocal à um elipsoide definido pela Eq. B.1 pode ser descrito como:

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2 + u} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2 + u} + \frac{\tilde{z}^2}{c^2 + u} = 1 , \quad (\text{B.2})$$

em que  $u$  é um número real. A equação B.2 representa um elipsoide para  $u$  que satisfaz a condição:

$$u + c^2 > 0 . \quad (\text{B.3})$$

Dado  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e um  $u$  que satisfaz B.3, podemos usar B.2 para determinar um conjunto de pontos  $(x, y, z)$  situado na superfície de um elipsoide que é confocal aquele definido pela Eq. B.1. Considere o problema em determinar o elipsoide que é confocal com aquele definido em B.1 e que passa por um ponto particular  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ .

Este problema consiste em determinar o número real  $u$  que, dado  $a, b, c, \tilde{x}, \tilde{y}$ , e  $\tilde{z}$ , satisfaz a Eq. B.2 e a condição expressa pela Eq. B.3. Rearranjando a Eq. B.2, obtemos a seguinte equação cúbica para  $u$

$$p(u) = (a^2+u)(b^2+u)(c^2+u) - (b^2+u)(c^2+u)\tilde{x}^2 - (a^2+u)(c^2+u)\tilde{y}^2 - (a^2+u)(b^2+u)\tilde{z}^2. \quad (\text{B.4})$$

Esta equação cúbica mostra que:

$$u = \begin{cases} d \rightarrow \infty & , \quad p(u) > 0 \\ -c^2 & , \quad p(u) < 0 \\ -b^2 & , \quad p(u) > 0 \\ -a^2 & , \quad p(u) < 0 \end{cases}. \quad (\text{B.5})$$

Note que, de acordo com B.5, a menor, a intermediária e a maior raiz da equação cúbica  $p(u)$  (Eq. B.4) estão localizadas, respectivamente, nos intervalos  $[-a^2, -b^2]$ ,  $[-b^2, -c^2]$  and  $[-c^2, \infty[$ . Lembremos que estamos procurando um  $u$  que satisfaz a condição expressa pela Eq. B.3. Consequentemente, de acordo com a análise de sinal mostrada na Eq. B.5, estamos interessados na maior raiz  $\lambda$  da equação cúbica  $p(u)$  (Eq. B.4).

Da Eq. B.4, obtemos uma mais simples dada por:

$$p(u) = u^3 + p_2 u^2 + p_1 u + p_0, \quad (\text{B.6})$$

em que

$$p_2 = a^2 + b^2 + c^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2, \quad (\text{B.7})$$

$$p_1 = b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2 - (b^2 + c^2) \tilde{x}^2 - (a^2 + c^2) \tilde{y}^2 - (a^2 + b^2) \tilde{z}^2 \quad (\text{B.8})$$

e

$$p_0 = a^2 b^2 c^2 - b^2 c^2 \tilde{x}^2 - a^2 c^2 \tilde{y}^2 - a^2 b^2 \tilde{z}^2. \quad (\text{B.9})$$

Finalmente, das Eqs. B.7, B.8 e B.9, a maior raiz  $\lambda$  de  $p(u)$  (Eq. B.6) pode ser calculada como mostra (WEISSTEIN, 2017):

$$\lambda = 2 \sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{p_2}{3}, \quad (\text{B.10})$$

em que

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right), \quad (\text{B.11})$$

$$Q = \frac{3p_1 - p_2^2}{9} \quad (\text{B.12})$$

e

$$R = \frac{9 p_1 p_2 - 27 p_0 - 2 p_2^3}{54} . \quad (\text{B.13})$$

## B.2 Parâmetro $\lambda$ que define os elipsoides prolatos e oblatos

Vamos agora considerar um elipsoide prolato de semi-eixos  $a, b, c$  orientados ao longo dos eixos  $\tilde{x}, \tilde{y}$ , e  $\tilde{z}$ , respectivamente, de seu sistema de coordenadas local, em que  $a > b = c > 0$ . Neste caso, a equação que define a superfície do elipsoide é obtida substituindo  $c = b$  na Eq. B.1. Consequentemente, a equação que define a respectiva superfície quádrica confocal é dada por:

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2 + u} + \frac{\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}{b^2 + u} = 1 \quad (\text{B.14})$$

e a nova condição que a variável  $u$  precisa satisfazer para que a Eq. B.14 represente um elipsoide é:

$$u + b^2 > 0 . \quad (\text{B.15})$$

Similarmente ao caso do elipsoide triaxial apresentado na subseção anterior, estamos interessados em determinar o número real  $u$  que, dado  $a, b, \tilde{x}, \tilde{y}$ , e  $\tilde{z}$ , satisfaz a Eq. B.14 e a condição expressa por Eq. B.15. Da Eq. B.14, obtemos a seguinte equação quádrica para  $u$ :

$$p(u) = (a^2 + u)(b^2 + u) - (b^2 + u) \tilde{x}^2 - (a^2 + u) (\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) . \quad (\text{B.16})$$

Esta equação mostra que:

$$u = \begin{cases} d \rightarrow \infty & , \quad f(\rho) > 0 \\ -b^2 & , \quad f(\rho) < 0 \\ -a^2 & , \quad f(\rho) > 0 \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

e, consequentemente, que duas raízes se situam nos intervalos  $[-a^2, -b^2]$  e  $[-b^2, \infty[$ . Assim, de acordo com a condição estabelecida pela Eq. B.15 e a análise de sinais mostrada na Eq. B.17, estamos interessados na maior raiz  $\lambda$  da equação quádrica  $p(u)$  (Eq. B.16).

Manipulando corretamente a Eq. B.16, obtemos uma mais simples dada por:

$$p(u) = u^2 + p_1 u + p_0 , \quad (\text{B.18})$$

em que

$$p_1 = a^2 + b^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 \quad (\text{B.19})$$

e

$$p_0 = a^2 b^2 - b^2 \tilde{x}^2 - a^2 (\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) . \quad (\text{B.20})$$

Finalmente, usando as Eqs. B.19 e B.20, a maior raiz  $\lambda$  de  $p(u)$  (Eq. B.18) pode ser facilmente calculada como:

$$\lambda = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4 p_0}}{2} . \quad (\text{B.21})$$

Para o caso do elipsoide oblato, o procedimento para determinar o parâmetro  $\lambda$  é muito similar para os elipsoides prolatos. Os semi-eixos  $a, b, c$  do elipsoide oblato são definidos de forma que  $b = c > a > 0$  e a condição que a variável  $u$  deve satisfazer é  $u + a^2 > 0$ . Neste caso, as duas raízes que resultam da equação quádrica situam-se nos intervalos  $[-b^2, -a^2]$  e  $[-a^2, \infty[$ . Consequentemente, continuamos interessados na maior raiz da equação quádrica para a variável  $u$ , que também é calculada usando a Eq. B.21.

### B.3 Derivadas espaciais do parâmetro $\lambda$

A modelagem magnética dos elipsoides triaxiais, prolatos e oblatos necessitam além do parâmetro  $\lambda$  definidos pelas Eqs. B.10 e B.21, das suas derivadas com respeito as coordenadas espaciais  $\tilde{x}, \tilde{y}$ , and  $\tilde{z}$ . Felizmente, as derivadas espaciais do parâmetro  $\lambda$  podem ser calculadas de forma bastante similares para todos os tipos de elipsoides. Vamos considerar um elipsoide triaxial primeiro. Neste caso, as derivas espaciais de  $\lambda$  são dadas por:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{r}_j} = \frac{\frac{2 \tilde{r}_j}{(e_j^2 + \lambda)}}{\left(\frac{\tilde{x}}{a^2 + \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{y}}{b^2 + \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{z}}{c^2 + \lambda}\right)^2}, \quad j = 1, 2, 3 , \quad (\text{B.22})$$

em que  $\tilde{r}_1 = \tilde{x}$ ,  $\tilde{r}_2 = \tilde{y}$ ,  $\tilde{r}_3 = \tilde{z}$ ,  $e_1 = a$ ,  $e_2 = b$ , and  $e_3 = c$ . Esta equação pode ser determinada diretamente da equação B.2. As derivadas espaciais de  $\lambda$  no caso dos elipsoides prolatos e oblatos podem ser calculados usando a Eq. B.22 para o o caso particular em que  $b = c$ .