2D Temperaturleitung mit ortsabhängigem Leitkoeffizienten

Markus Towara und Uwe Naumann

LuFG Informatik 12: Software and Tools for Computational Engineering
RWTH Aachen

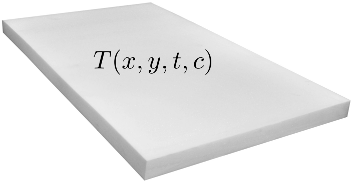
Mathematisches Modell (1D)

$$\text{(1D)} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = c(x) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad , \quad T = T(x, t, c)$$

x : Ortskoordinate
t : Zeit
c : Temperaturleitfähigkeit
T : Temperaturverteilung

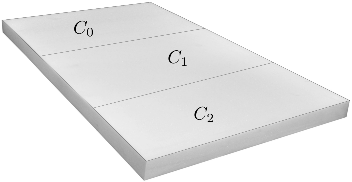
Mathematisches Modell (2D) (I)

$$(2D) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = c(x,y) \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad , \quad T = T(x,y,t,c)$$



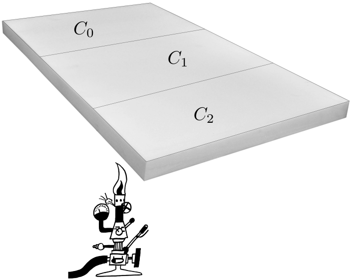
Mathematisches Modell (2D) (II)

$$(2D) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = c(x,y) \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad , \quad T = T(x,y,t,c)$$



Mathematisches Modell (2D) (III)

$$\text{(2D)} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = c(x,y) \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q(x,y) \quad , \quad T = T(x,y,t,c)$$



Problem-Beschreibung (1D)

$$(1D) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = c(x) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q(x) = r(T, x, c, t) \quad , \quad T = T(x, t, c)$$

x :	Ortskoordinate
t :	Zeit
c :	Temperaturleitfähigkeit
T :	Temperaturverteilung
q :	Wärmestromdichte
r :	Residuum zum stationären Zustand

$T(x, t = 0) \equiv 300K$:	Startverteilung
$T(x = 0, t) = 300K$:	linker Randwert
$T(x = 1, t) = 330K$:	rechter Randwert

(1D) Diskretisierung – Raum

- wir betrachten einen Stab der Einheitslänge 1m mit n äquidistanten Stützstellen, d.h.

$$\Delta x = \frac{1}{n-1}$$

(1D) Diskretisierung – Raum

- wir betrachten einen Stab der Einheitslänge 1m mit n äquidistanten Stützstellen, d.h.

$$\Delta x = \frac{1}{n-1}$$

- Diskretisierung der zweiten Ableitung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t, x_j, c) \approx \frac{T_{j+1} - 2 \cdot T_j + T_{j-1}}{(\Delta x)^2} , \quad j = 1, \ldots, n-2 ,$$

(1D) Diskretisierung – Raum

- wir betrachten einen Stab der Einheitslänge 1m mit n äquidistanten Stützstellen, d.h.

$$\Delta x = \frac{1}{n-1}$$

- Diskretisierung der zweiten Ableitung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t, x_j, c) \approx \frac{T_{j+1} - 2 \cdot T_j + T_{j-1}}{(\Delta x)^2} , \quad j = 1, \ldots, n-2 ,$$

- was zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen führt

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = r_j(c, \Delta x, T) , \quad j = 0, \ldots, n-1$$

Zeitliche Veränderung der Temperatur an der Stelle x_j

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = r_j(c, \Delta x, T) \; , \quad j = 0, \ldots, n-1$$

Zeitliche Veränderung der Temperatur an der Stelle x_j

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = r_j(c, \Delta x, T)\ , \quad j = 0, \ldots, n-1$$

- wobei das Residuum

$$r_j = 0 \qquad\qquad j \in \{0, n-1\}$$

$$r_j = \frac{c_j}{(\Delta x)^2} \cdot (T_{j+1} - 2 \cdot T_j + T_{j-1}) + q_j \qquad j \in \{1, \ldots, n-2\}$$

Zeitliche Veränderung der Temperatur an der Stelle x_j

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = r_j(c, \Delta x, T) \ , \quad j = 0, \ldots, n-1$$

- wobei das Residuum

$$\begin{aligned} r_j &= 0 && j \in \{0, n-1\} \\ r_j &= \frac{c_j}{(\Delta x)^2} \cdot (T_{j+1} - 2 \cdot T_j + T_{j-1}) + q_j && j \in \{1, \ldots, n-2\} \end{aligned}$$

- und da die Differentialgleichung linear in T ist, können wir ohne Fehler eine erste-Ordnung Taylor-Approximation um $T = 0$ vornehmen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{r(c, \Delta x, 0)}_{=q_i} + \frac{\partial r}{\partial T}(c, \Delta x) \cdot (T - 0)$$

Beispiel für $n = 6$

$$\frac{\partial T}{\partial t}(c, \Delta x) = \frac{c}{(\Delta x)^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T + q$$

Die erste und die letzte Zeile der Matrix sind wegen der konstanten Randwerte jeweils 0.

(1D) Diskretisierung – Zeit

- Die Simulationszeit beträgt 1s und wird in m äquidistante Zeitschritte unterteilt

$$\Delta t = \frac{1}{m}$$

(1D) Diskretisierung – Zeit

- Die Simulationszeit beträgt 1s und wird in m äquidistante Zeitschritte unterteilt

$$\Delta t = \frac{1}{m}$$

- wir approximieren die Zeitableitung mit einem backward Euler (oder anderen Verfahren, wie Runge-Kutta höherer Ordnung)

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} \approx \frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta t} = \frac{\partial r_j}{\partial T} \cdot T^{k+1} + q_j$$

(1D) Diskretisierung – Zeit

- Die Simulationszeit beträgt 1s und wird in m äquidistante Zeitschritte unterteilt
$$\Delta t = \frac{1}{m}$$
- wir approximieren die Zeitableitung mit einem backward Euler (oder anderen Verfahren, wie Runge-Kutta höherer Ordnung)
$$\frac{\partial T_j}{\partial t} \approx \frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta t} = \frac{\partial r_j}{\partial T} \cdot T^{k+1} + q_j$$
- was zur Vorschrift
$$\left(I - \Delta t \cdot \frac{\partial r}{\partial T} \right) \cdot T^{k+1} = T^k + \Delta t \cdot q \text{ führt.}$$

Beispiel für $n = 6$

$$c(x) = \begin{cases} c_0 & \text{für } x \leq 0.5 \\ c_1 & \text{für } x > 0.5 \end{cases}$$

$$q(x) = \delta(x - 0.4) \cdot q_c, \quad q_c = 1W/m^2$$

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot \begin{pmatrix} \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_0 & 2c_0 + \psi & -c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_0 & 2c_0 + \psi & -c_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & c_1 + \psi & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_0 & 2c_1 + \psi & -c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi \end{pmatrix} \cdot T^{k+1} = T^k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta t \cdot q_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit $\psi = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$.

Anforderung

- Grafisches Tool zur Eingabe der Netzparameter (z.B. Diskretisierungsgrößen n, m und die Aufteilung des Leitkoeffizienten $c(x, y)$)
- Simulationsprogramm
- Visualisierung (z.B. Video der zeitlichen Entwicklung der Temperaturverteilung)

Zur Aufgabe mitgeliefert

Chapter 2

Sample Chapter

Uwe Naumann and Johannes Lotz

Figure 2.1. *Illustration of the Real-World Problem by the Authors: Naumann (Left) and Lotz (Right)*

TODO *Short intro and description of the real-world problem*

We consider the estimation of the *thermal diffusivity* $c \in I\!R$ of a given very thin stick. Thermal diffusivity describes the speed at which heat "spreads" within the material. High thermal diffusivity implies quick heat conduction. Our mathematical model depends on the unknown/uncertain parameter c, which is to be calibrated using experimentally obtained real-world measurements. The results of a numerical simulation of the temperature distribution within the stick after heating one of its two ends for some time are compared with given measurements. Refer to Figure 2.1 for a graphical illustration of the problem. The pictures in the upper row show the measuring of the initial temperature distribution in the stick. This process is continued while heating one end of the stick as shown in the pictures in the lower

Zeitintervall: $[0, 1] \longrightarrow m$ Zeitschritte $k = \underset{\text{Anfang}}{0}, \ldots, \underset{\text{Ende}}{m}$

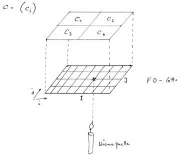
Gebiet: $\Omega = [0,1] \times [0,1] \longrightarrow$ äquidistantes Finite-Differenzen-Gitter: n Punkte pro Dimension

$n = 0, \ldots, n$ Rand

Temperaturleitung: $\frac{\partial T}{\partial t} = c \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

(1-D)

$c = (c_i)$



Vorwärtsproblem:

geg.: $T^0_{i,j}$ Anfangstemperaturverteilung

I, J Ort der Wärmequelle

$T^k_{0,j}, T^k_{n,j}, T^k_{i,0}, T^k_{i,n}$ Randwerte

ges.: Temperaturverteilung im Zeitintervall $[0, 1]$

Inverses Problem:

geg.: $T^0_{i,j}$, I, J, Quellterm q

$T^k_{0,j}, T^k_{n,j}, T^k_{i,0}, T^k_{i,n}$

$\hat{T}^m_{i,j}$ Temp.-Verteilung zum Zeitpunkt $t = 1$

ges.: $\min_c \sum_{i,j} \left(T^m_{i,j} - \hat{T}^m_{i,j}\right)^2$

Software and Tools for Computational Engineering
Prof. Dr. Uwe Naumann

LuFG Informatik 12, RWTH Aachen, D-52056 Aachen

SSELAB GbH
Aachen

Aachen, 6. Mai 2013

Auftrag zur Entwicklung einer Simulationssoftware

Sehr geehrte Damen und Herren,

wenn wir gerade mal nicht forschen oder lehren, dann entwickeln wir $1m \times 1m$ Metallplatten aus Schrott, um unseren Kunden die Möglichkeit zu geben, diese an einem Punkt zu erhitzen und die resultierende zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung in den Platten zu studieren. Warum man auf diese Idee kommen könnte interessiert uns nicht – es existiert ein Markt ...

Aus der Verwendung unterschiedlichster Schrotttypen folgt eine Inhomogenität der Metallplatten bezüglich der örtlichen Verteilung des Temperaturleitkoeffizienten. Zur Aufwertung unseres Produktportfolios soll eine Simulationssoftware entwickelt werden, die unseren Kunden erlaubt, verschiedene Konfigurationen numerisch zu testen. Dabei soll mithilfe einer graphischen Benutzerschnittstelle die Platte in beliebige Gebiete zerlegt und diesen jeweils Werte für den lokalen Temperaturleitkoeffizienten zugewiesen werden. Desweitern sollen Anfangstemperaturverteilung in der Platte, deren Randtemperatur und Ort und Intensität der Wärmezufuhr spezifiziert werden können. Verschiedene Integrationsverfahren sollen zur Verfügung gestellt und der Verlauf der Simulation graphisch (z.B. durch Einfärben der Platte) visualisiert werden.

Diesem Anschreiben liegt ein Dokument bei, welches das Grundprinzip der Wärmeausbreitung anhand eines einseitig erhitzten Stabes erläutert. Dieser Ansatz bedarf der Verallgemeinerung im Sinne des oben beschriebenen Szenarios. Desweiteren finden Sie Skizzen diverser Szenarien des beschriebenen Problems. Literatur zur mathematischen Behandlung der Wärmeausbreitung gibt es "wie Sand am Meer." Unsere Ingenieure sind gern bereit, die Anforderungen an das zu implementierende System im Rahmen diverser Diskussionen mit Ihnen zu konkretisieren. Wir freuen uns auf eine effektive und effiziente Zusammenarbeit.

Optional: Parameter-Fitting

Für Messungen O, minimiere das Zielfunktional

$$J(c) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-2} (T_j^m(c) - O_j)^2$$

mithilfe eines Steepest Descent Algorithmus'

$$c^{i+1} = c^i - \nabla_c J(c) = c^i - s \cdot \frac{\partial J}{\partial c}$$

mit Parameter s.
Der benötigte Gradient $\nabla_c J(c)$ kann mithilfe von finiten Differenzen, oder besser, mithilfe automatischen Differenzierens berechnet werden.