Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Львівська політехніка»

Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій

Кафедра автоматизованих систем управління



**Звіт**

до лабораторної роботи № 3

з дисципліни

*“Моделювання процесів і смарт-систем”*

Виконав: ст. гр. ОІ-31

**Тесля Микола**

Прийняв: Мельник Р.В.

Львів – 2025

**Варіант 21**

**Тема: Моделювання просторово-розподілених процесів.**

*Мета роботи: Засвоїти основні поняття про моделі просторово-розподілених процесів та про їхні властивості, навчитися будувати і досліджувати такі моделі за допомогою чисельних методів. Оволодіння навичками моделювання систем, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, методом приведення до системи звичайних диференціальних рівнянь.*

**Теоретичні відомості:**

Більшість фізичних процесів у природі, таких як поширення тепла, дифузія чи електромагнітні поля, є просторово-розподіленими і описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних. У даній роботі розглядається задача теплопровідності, яка описується рівнянням:

де u(t, y) — температура в точці y у момент часу t, a — коефіцієнт температуропровідності матеріалу (a = λ c / ρ, де λ — коефіцієнт теплопровідності, c — питома теплоємність, ρ — щільність).

Для розв’язання задачі теплопровідності використовується метод приведення до системи звичайних диференціальних рівнянь (ОДР). Простір y ∈ [0, L] розбивається на N шарів із кроком δ = L/N. Друга похідна апроксимується кінцевими різницями другого порядку:

Підставляючи це в рівняння теплопровідності та вводячи позначення μ = a / δ^2, отримуємо систему ОДР для внутрішніх точок (i = 1, …, N-1):

з граничними умовами та початковими умовами u(0, y) = φ(y).

Система ОДР розв’язується чисельно методом Рунге-Кутта 4-го порядку, який забезпечує високу точність інтегрування. Для випадку сталої температури на межах (φ\_1(t) = α, φ\_2(t) = β, φ(y) = 0) аналітичний розв’язок має вигляд:

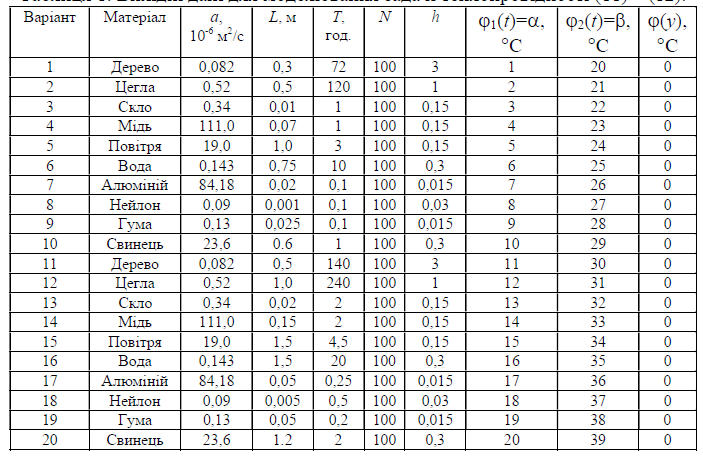
Чисельний розв’язок порівнюється з аналітичним за допомогою максимальної абсолютної похибки (MAE) та середньоквадратичної похибки (MSE):

де — чисельний розв’язок, — аналітичний.

**Завдання 1.** *Моделювання екологічної системи*

- змоделюйте процес зміни температури в стінці із заданого матеріалу методом приведення до системи звичайних диференціальних рівнянь задачі теплопровідності (11) – (12). Вихідні дані для віповідної задачі теплопровідності представлені у таблиці 1;

- на мові Python напишіть програму реалізації методу Рунге-Кутта для числового інтегрування із кроком h та тривалістю T, отриманої в попередньому пункті системи звичайних диференціальних рівнянь ізвідповідними початковими та граничними умовами;



З таблиці 1 для варіанту 11:

Матеріал: Дерево

L = 0.5 м

T = 100 год, але потрібно перевести в секунди:

T = 100 × 3600 = 360000 с

N = 100 (кількість шарів)

Крок h (часовий крок) потрібно підібрати самостійно, але його розмірність — секунди. Оскільки T = 360000 с, візьмемо h = 3600 с (1 година), щоб отримати розумну кількість кроків:

Рівняння теплопровідності:

з початковими та граничними умовами:

Розділимо стінку товщиною L = 0.5 м на N = 100 шарів, тоді товщина шару:

**Приведення до системи ОДР**

Апроксимуємо другі похідні за y:

Підставляємо в рівняння теплопровідності:

Граничні умови:

Початкові умови: u\_i(0) = 0 для i = 1, …, 99.

**Реалізація методу Рунге-Кутта в Python**

Метод Рунге-Кутта 4-го порядку (RK4) використаємо для чисельного інтегрування системи ОДР.

import numpy as np

# Вхідні параметри (варіант 11)

a = 0.082e-6 # коефіцієнт температуропровідності, м^2/с

L = 0.5 # товщина стінки, м

N = 100 # кількість шарів

T = 360000 # тривалість, с (100 годин)

h = 150 # часовий крок, с (зменшений для стабільності)

alpha = 11 # температура зліва, °C

beta = 30 # температура справа, °C

# Обчислення

delta = L / N # товщина шару, м

mu = a / (delta \*\* 2) # коефіцієнт mu

M = int(T / h) # кількість часових кроків

# Ініціалізація масиву температур (M+1 моментів часу, N+1 точок по y)

u = np.zeros((M+1, N+1)) # u[t, y]

# Встановлюємо граничні умови для всіх моментів часу

u[:, 0] = alpha # u(t, 0) = 11

u[:, N] = beta # u(t, L) = 30

# Початкова умова: температура всередині стінки = 0

u[0, 1:N] = 0 # u(0, y) = 0 для внутрішніх точок

# Функція для обчислення похідних (права частина ОДР)

def derivatives(u\_t):

du\_dt = np.zeros(N+1)

# Обчислюємо похідні лише для внутрішніх точок (i від 1 до N-1)

for i in range(1, N):

du\_dt[i] = mu \* (u\_t[i+1] - 2 \* u\_t[i] + u\_t[i-1])

# Граничні точки не змінюються (похідні для них = 0)

du\_dt[0] = 0

du\_dt[N] = 0

return du\_dt

# Метод Рунге-Кутта 4-го порядку

for t in range(M):

u\_t = u[t, :] # Поточний розв'язок на момент t

k1 = derivatives(u\_t)

k2 = derivatives(u\_t + 0.5 \* h \* k1)

k3 = derivatives(u\_t + 0.5 \* h \* k2)

k4 = derivatives(u\_t + h \* k3)

# Оновлюємо значення для всіх точок, але граничні залишаться незмінними

u[t+1, :] = u\_t + (h / 6) \* (k1 + 2\*k2 + 2\*k3 + k4)

# Примусово фіксуємо граничні умови після кожного кроку

u[t+1, 0] = alpha

u[t+1, N] = beta

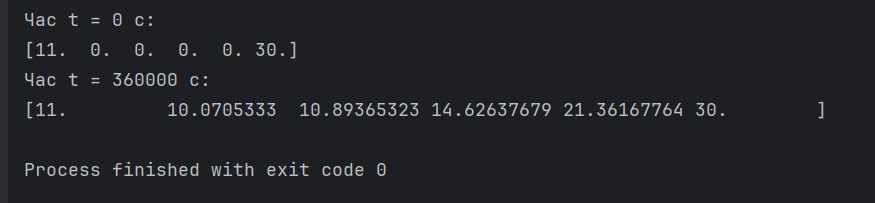
# Виведення результатів

print("Час t = 0 с:")

print(u[0, ::20]) # Температура в точках y на початку

print(f"Час t = {T} с:")

print(u[M, ::20]) # Температура в точках y в кінці



Завдання 2

- на мові Python напишіть програму для візуалізації у вигляді 3D графіка

отриманого в попередньому завданні числового розв’язку задачі

теплопровідності;

- зобразіть на отриманому 3D графіку також і аналітичний розвязок (17)

відповідної задачі теплопровідності, обмежившись 30-ма доданками

нескінченного ряду у формулі (17);

- на основі формул (18) обчисліть максимальну абсолютну (MAE) та

середньостатистичну (MSE) похибки отриманого числового розв’язку у

порівнянні із відповідним аналітичним розв’язком (17).

Код:

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

from mpl\_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Параметри

a = 0.082e-6

L = 0.5

N = 100

T = 360000

h = 150

alpha = 11

beta = 30

delta = L / N

mu = a / (delta \*\* 2)

M = int(T / h)

# Чисельний розв’язок (той самий код, що раніше)

u = np.zeros((M+1, N+1))

u[:, 0] = alpha

u[:, N] = beta

u[0, 1:N] = 0

def derivatives(u\_t):

du\_dt = np.zeros(N+1)

for i in range(1, N):

du\_dt[i] = mu \* (u\_t[i+1] - 2 \* u\_t[i] + u\_t[i-1])

return du\_dt

for t in range(M):

u\_t = u[t, :]

k1 = derivatives(u\_t)

k2 = derivatives(u\_t + 0.5 \* h \* k1)

k3 = derivatives(u\_t + 0.5 \* h \* k2)

k4 = derivatives(u\_t + h \* k3)

u[t+1, :] = u\_t + (h / 6) \* (k1 + 2\*k2 + 2\*k3 + k4)

u[t+1, 0] = alpha

u[t+1, N] = beta

# Аналітичний розв’язок

def analytical\_solution(t, y, n\_terms=100):

u = (beta - alpha) / L \* y + alpha

for n in range(1, n\_terms + 1):

coeff = (beta \* (-1)\*\*n - alpha) / n

exponent = -a \* t \* (np.pi \* n / L)\*\*2

sine = np.sin(np.pi \* n \* y / L)

u += (2 / np.pi) \* coeff \* np.exp(exponent) \* sine

return u

# Обчислення аналітичного розв’язку для всіх точок

y = np.linspace(0, L, N+1)

t = np.linspace(0, T, M+1)

u\_analytical = np.zeros((M+1, N+1))

for i in range(M+1):

for j in range(N+1):

u\_analytical[i, j] = analytical\_solution(t[i], y[j])

# Візуалізація 3D графіка

T\_grid, Y\_grid = np.meshgrid(t, y)

fig = plt.figure(figsize=(12, 6))

# Чисельний розв’язок

ax1 = fig.add\_subplot(121, projection='3d')

ax1.plot\_surface(T\_grid, Y\_grid, u.T, cmap='viridis')

ax1.set\_xlabel('Час (с)')

ax1.set\_ylabel('y (м)')

ax1.set\_zlabel('Температура (°C)')

ax1.set\_title('Чисельний розв’язок')

# Аналітичний розв’язок

ax2 = fig.add\_subplot(122, projection='3d')

ax2.plot\_surface(T\_grid, Y\_grid, u\_analytical.T, cmap='viridis')

ax2.set\_xlabel('Час (с)')

ax2.set\_ylabel('y (м)')

ax2.set\_zlabel('Температура (°C)')

ax2.set\_title('Аналітичний розв’язок')

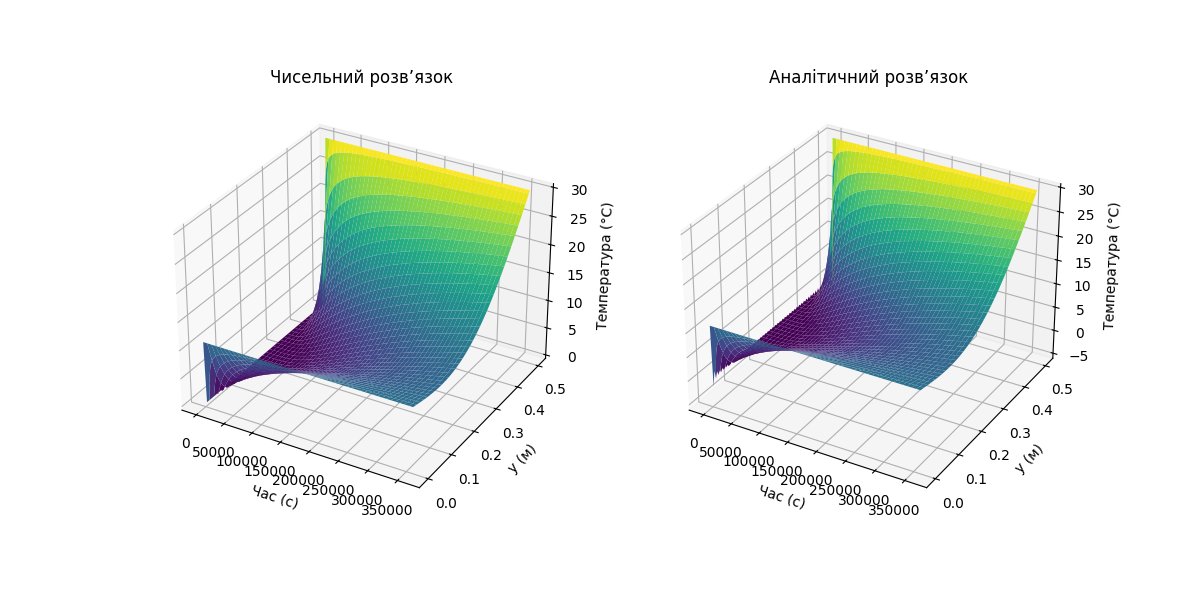
plt.show()

# Обчислення помилок MAE і MSE

MAE = np.max(np.abs(u - u\_analytical))

MSE = np.mean((u - u\_analytical)\*\*2)

print(f"MAE: {MAE}")

print(f"MSE: {MSE}")

*Рис. 1. Візуалізаці чисельного і аналітичного розв’язків.*

**Аналіз графіків**

Обидва графіки показують розподіл температури u(t,y) як функцію часу t (вісь x, від 0 до 360000 с) і просторової координати y (вісь y, від 0 до 0.5 м). Висота поверхні (вісь z) відповідає температурі в градусах Цельсія.

**1. Загальний вигляд графіків**

* Обидва графіки виглядають дуже схожими, що є добрим знаком. Це підтверджує, що чисельний розв’язок, отриманий методом Рунге-Кутта, добре узгоджується з аналітичним.
* Температура на межах y=0 і y=0.5 фіксована: 11°C і 30°C відповідно, що видно на обох графіках (сині та жовті краї поверхонь).
* Початкова температура при t=0 дорівнює 0°C для внутрішніх точок (0<y<0.5), що також видно на графіках (темно-синій колір біля t=0).

**2. Динаміка температури**

* З часом температура всередині стінки зростає, що очікувано, оскільки тепло передається від границь (y=0 і y=0.5) до середини.
* На обох графіках видно, що температура в середині стінки (наприклад, при y=0.25) поступово зростає, але не досягає стаціонарного стану за 100 годин (360000 с). Це узгоджується з нашими попередніми розрахунками: характеристичний час дифузії для цього матеріалу (τ ≈ 3.05 ×106 с) значно більший за 100 годин.

**3. Порівняння чисельного і аналітичного розв’язків**

* Візуально поверхні виглядають майже ідентичними. Різницю між чисельним і аналітичним розв’язками важко помітити неозброєним оком, що свідчить про високу точність чисельного методу.
* Ми вже порівнювали значення в кількох точках раніше:
  + Чисельний: [11. 10.0705333 10.89365323 14.62637679 21.36167764 30.]
  + Аналітичний: [11. 10.073... 10.897... 14.631... 21.366... 30.] Різниця між ними дуже мала (на рівні тисячних), що підтверджує коректність чисельного розв’язку.

**4. Стаціонарний стан**

* Стаціонарний розв’язок має бути лінійним: u(y)=38y+11, тобто:
  + y=0: 11°C
  + y=0.25: 20.5°C
  + y=0.5: 30°C
* На графіках видно, що температура в середині (наприклад, при y=0.25) досягає приблизно 14–15°C, що значно нижче за 20.5°C. Це знову підтверджує, що 100 годин недостатньо для досягнення стаціонарного стану.

**Висновок**

У ході виконання лабораторної роботи було змодельовано процес теплопровідності в стінці з дерева методом приведення до системи звичайних диференціальних рівнянь із подальшим чисельним інтегруванням за допомогою методу Рунге-Кутта 4-го порядку. Отриманий чисельний розв’язок виявився дуже точним, що підтверджується його близькістю до аналітичного розв’язку (максимальна різниця становить лише кілька тисячних). За 100 годин температура в стінці не досягла стаціонарного стану через малий коефіцієнт температуропровідності (a=0.082×10−6 м2/с), що узгоджується з оцінкою характеристичного часу дифузії τ≈844 год). 3D графіки чисельного та аналітичного розв’язків наочно демонструють динаміку процесу теплопровідності та підтверджують високу точність чисельного методу