PIEMONTE

FONDI STRUTTURALI E DI INVESTIMENTO EUROPEI 2014/2020

fondo sociale europeo

# Elementi di Programmazione con Python e Analisi dei Dati
# Lezione 9: teoria della REGRESSIONE LINEARE

Stefano Andreozzi, PhD

Formazione continua individuale – id Attività: 2523945 Codice Corso: B341-1-2019-0

8 giugno 2020

Accademia FormaWeb

UNIONE EUROPEA

REGIONE PIEMONTE

per una crescita intelligente, sostenibile ed inclusiva

www.regione.piemonte.it/europa2020

INIZIATIVA CO-FINANZIATA CON FSE

# La Regressione Lineare (Semplice)

- Relazione funzionale e statistica tra due variabili
- Modello di regressione lineare semplice
- Stima puntuale dei coefficienti di regressione
- Decomposizione della varianza
- Coefficiente di determinazione
- Proprietà degli stimatori dei coefficienti
- Proprietà dello stimatore della risposta media
- Errori standard

Accademia FormaWeb

## Introduzione

Dall'analisi ed inferenza riguardante una singola variabile statistica passiamo alla **relazione tra (due) variabili statistiche.**

Le relazioni tra variabili importanti nell'analisi della realtà economico-aziendale possono essere matematicamente espresse come:

$$Y=f(X)$$

dove la funzione ***f*** può assumere varie forme, lineari o non lineari, e può non essere conosciuta in modo preciso.

Consideriamo il caso più semplice quello lineare:

→ **regressione lineare semplice**

## Esempi

- Il presidente di una ditta di materiali da costruzione ritiene che la Quantità media annua di piastrelle, ***Q***, venduta sia una funzione (lineare) del Valore complessivo dei permessi edilizi rilasciati, ***V***, nell'anno passato: ***Q=f(V)*** .
- Un grossista di cereali vuole conoscere l'effetto della produzione annua Complessiva, ***C***, sul prezzo di vendita a tonnellata, ***P***: ***Q=f(P).***
- L'area marketing di un'azienda ha necessità di sapere come il prezzo della Benzina influenzi la quantità venduta: ricorrendo alla serie storica dei prezzi settimanali e dei dati di vendita intendono sviluppare un modello (lineare) che indichi di quanto variano le vendite al variare del prezzo: ***Q=f(P).***

# Relazione funzionale e statistica

**Obiettivo:**

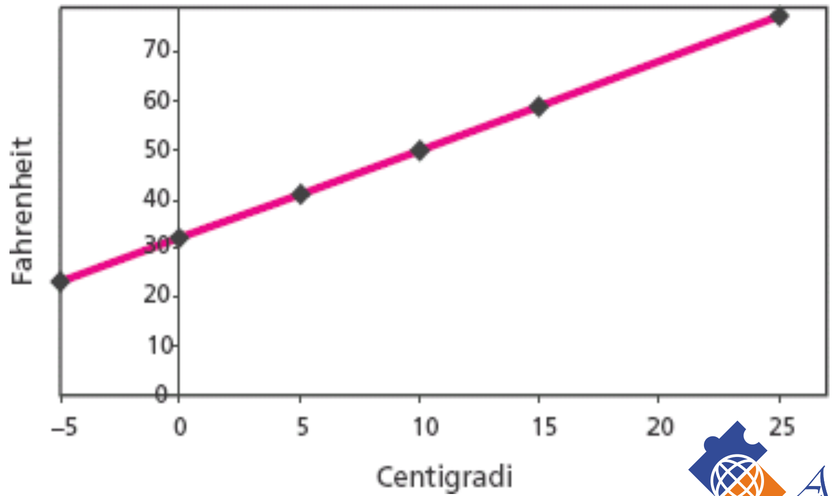
Date due variabili, X e Y, si è interessati a comprendere come la variabile Y (dipendente o risposta) sia influenzata dalla X (esplicativa o indipendente).

**Y è funzione di X se ad ogni valore di X corrisponde un solo valore di Y**. La relazione funzionale è lineare, se possiamo scrivere:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

$\beta_0$ =intercetta

$\beta_1$ =coefficiente angolare



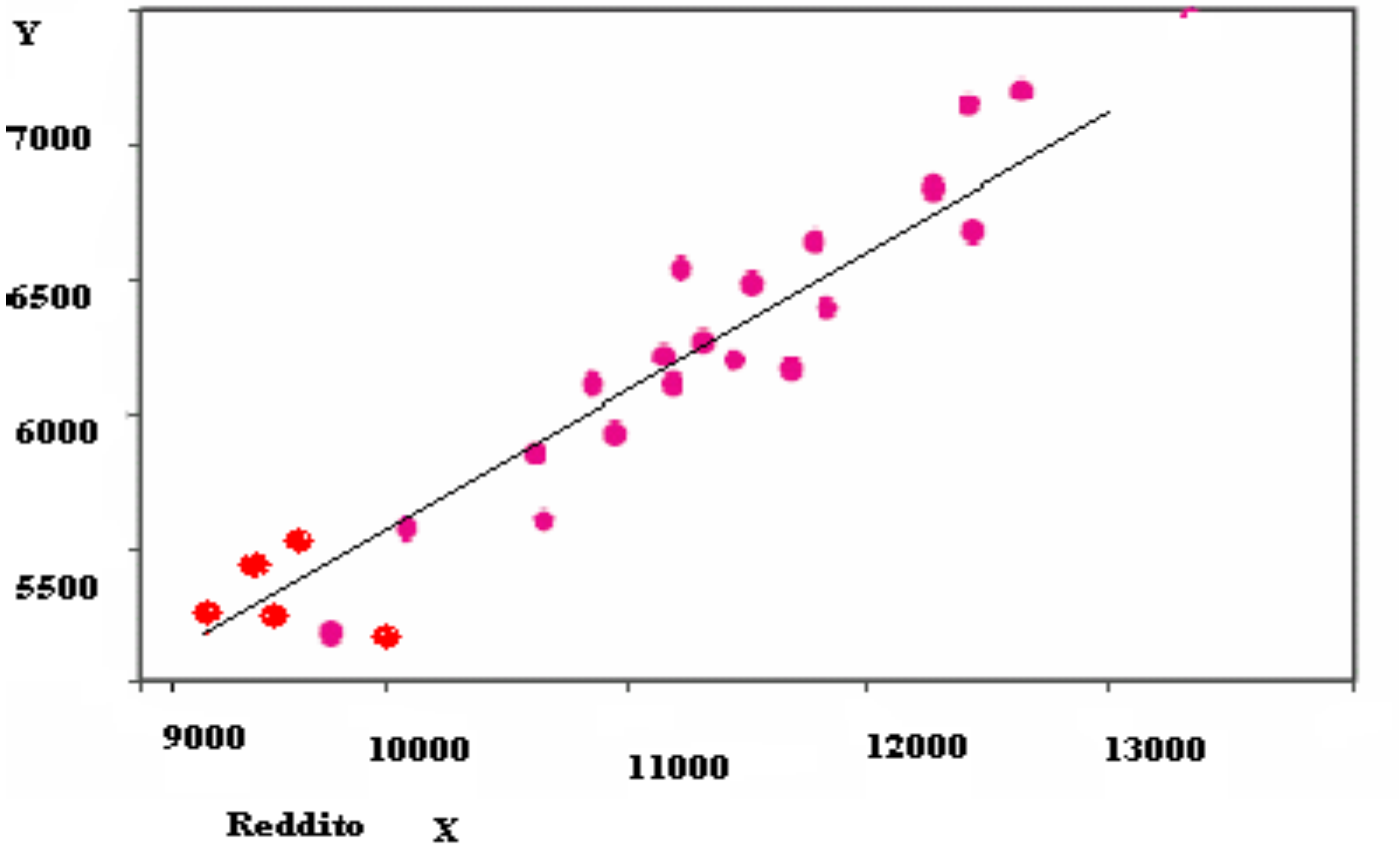
# Esempio

Per dislocare in maniera ottimale i punti vendita, un'azienda vuole stimare un modello lineare che prevede le vendite per nucleo familiare in funzione del reddito familiare disponibile sulla base dei dati provenienti da una indagine campionaria :

| anno | Reddito (X) | Vendite (Y) | anno | Reddito (X) | Vendite (Y) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9098 | 5492 | 12 | 11307 | 5907 |
| 2 | 9138 | 5540 | 13 | 11432 | 6124 |
| 3 | 9094 | 5305 | 14 | 11449 | 6186 |
| 4 | 9282 | 5507 | 15 | 11697 | 6224 |
| 5 | 9229 | 5418 | 16 | 11871 | 6496 |
| 6 | 9347 | 5320 | 17 | 12018 | 6718 |
| 7 | 9525 | 5538 | 18 | 12523 | 6921 |
| 8 | 9756 | 5692 | 19 | 12053 | 6471 |
| 9 | 10282 | 5871 | 20 | 12088 | 6394 |
| 10 | 10662 | 6157 | 21 | 12215 | 6555 |
| 11 | 11019 | 6342 | 22 | 12494 | 6755 |

Accademia FormaWeb

Il diagramma a dispersione indica una relazione lineare; all'aumentare del reddito disponibile aumentano le vendite:




L'analisi della regressione fornisce il modello:

$$Y=1922.39+0.381517X$$

Il modello riassume le informazioni dei dati campionari e non dimostra che un aumento del reddito determina un aumento delle vendite.

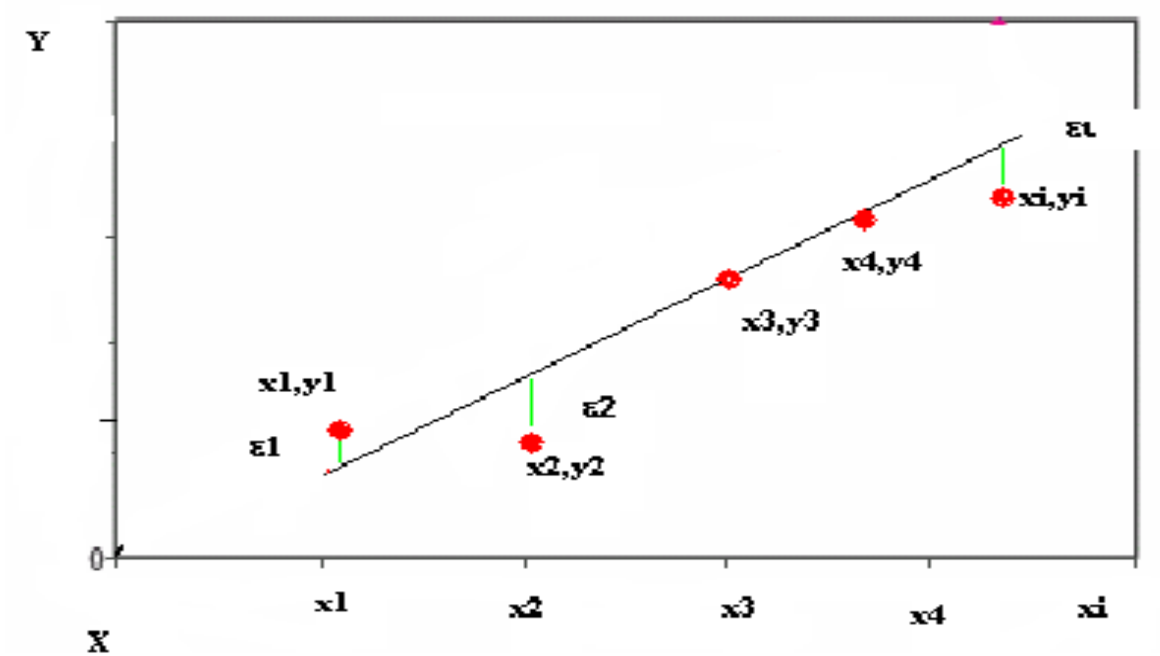
La teoria economica postula l'esistenza di un legame causa-effetto, i preliminari risultati precedenti, possono fornire l'evidenza empirica .

**In generale una buona analisi statistica combinata alla teoria e all'esperienza può consentire di giungere a fondate conclusioni.**

Nell'esempio, è noto dalla teoria che la quantità di beni acquistata in un certo mercato (Y) può essere modellizzata come funzione lineare del reddito disponibile (X): se il reddito disponibile è $x_i$ la quantità acquistata sarà $y_i$.

Altri fattori tuttavia influenzano le quantità acquistate, alcuni sconosciuti (es. la diversa propensione al consumo delle famiglie), altri identificabili quali il prezzo del bene, e quello dei beni concorrenti, etc.

Ciò fa sì che:

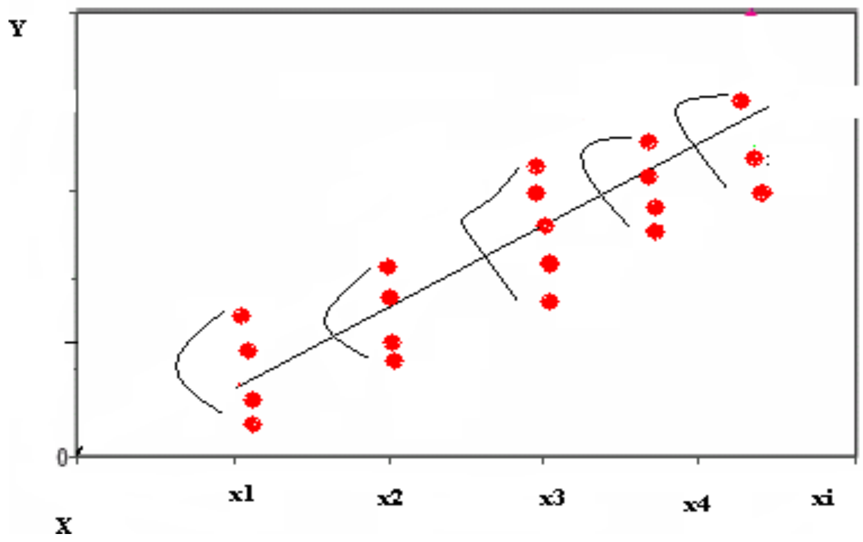



Nel modello lineare semplice gli effetti di tutti i fattori diversi dal reddito, per spiegare la quantità acquistata vengono sintetizzati in una componente di errore: $\varepsilon_i$.

Per il generico valore sarà quindi $y_i=\beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon_\iota$

Al variare del campione inoltre avremo in corrispondenza di ogni dato valore $x_i$ tutto un insieme di possibili valori (una distribuzione di valori) di Y

Pertanto si assume che in P per ogni valore di X, sia il valore medio di Y funzione lineare di X: $Y=\beta_0+\beta_1 x$




Il modello di regressione lineare fornisce il valore atteso della **variabile aleatoria** Y (v. dipendente o risposta) quando X assume un particolare valore; in base all'ipotesi di linearità l'espressione per il valore atteso può essere scritta come:

$$E(Y/X=x)=\beta_0+\beta_1 x$$

Il valore osservato di Y in corrispondenza ad un dato valore di X è invece pari al valore atteso (o media di P) più un errore aleatorio $\varepsilon$

$$y_i=\beta_0+\beta_1 x+\varepsilon_i$$

La variabile $\varepsilon$, errore aleatorio, rappresenta la variazione di Y non spiegata dalla relazione lineare.

In sintesi: negli studi empirici, la relazione tra Y e X non è mai funzionale (a un valore X corrispondono più valori di Y).

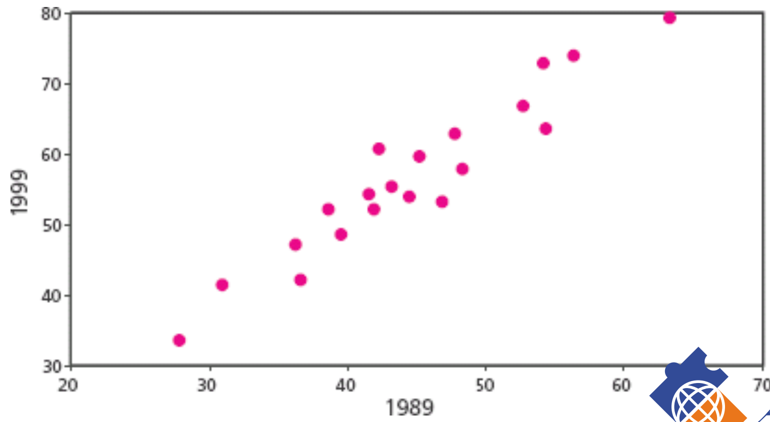
Una **relazione statistica** tra la Y e la X può essere descritta da:

$$Y = f(X) + \varepsilon$$

$f(X)$ definisce il contributo della X

$\varepsilon$ rappresenta il contributo di tutti i fattori non osservati

- $f(X)$ **è una componente deterministica**
- $\varepsilon$ **è una componente stocastica**
- Y **è una variabile casuale.**



## Modello di regressione lineare semplice

Introducendo opportune assunzioni si ottiene il modello di regressione lineare semplice.

**Assunzione 1**:

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ **per ogni osservazione i=1,...n**

**Assunzione 2**:

**Le $\varepsilon_i$ sono variabili casuali indipendenti con valore atteso $E(\varepsilon_i) = 0$ e varianza costante $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ per ogni i=1,...,n**

**Assunzione 3**:

**I valori $x_i$ della variabile esplicativa X sono noti senza errore**

AccademiaFormaWeb

# Modello di regressione lineare semplice

**Assunzione 1**: **implica che la funzione f(X) è lineare.**

**Assunzione 2**: **implica che per ogni valore fissato di X, la Y possiede sempre lo stesso grado di variabilità (ipotesi di omoschedasticità). Inoltre, poiché la $\varepsilon_i$ è una variabile casuale, anche Y è una variabile casuale.**

**Pertanto, le osservazioni $y_i$ sono realizzazioni di variabili casuali**

- **indipendenti**
- **con valore atteso** $E\left(Y_i \middle| X = x_i\right) = \beta_0 + \beta_1 x_i$
- **con varianza** $V\left(Y_i \middle| X = x_i\right) = \sigma^2$

Accademia FormaWeb

# Stima puntuale dei coefficienti di regressione

Indicheremo con: $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$

il valore di Y fornito dalla retta stimata dove $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ sono le stime dei coefficienti di regressione.

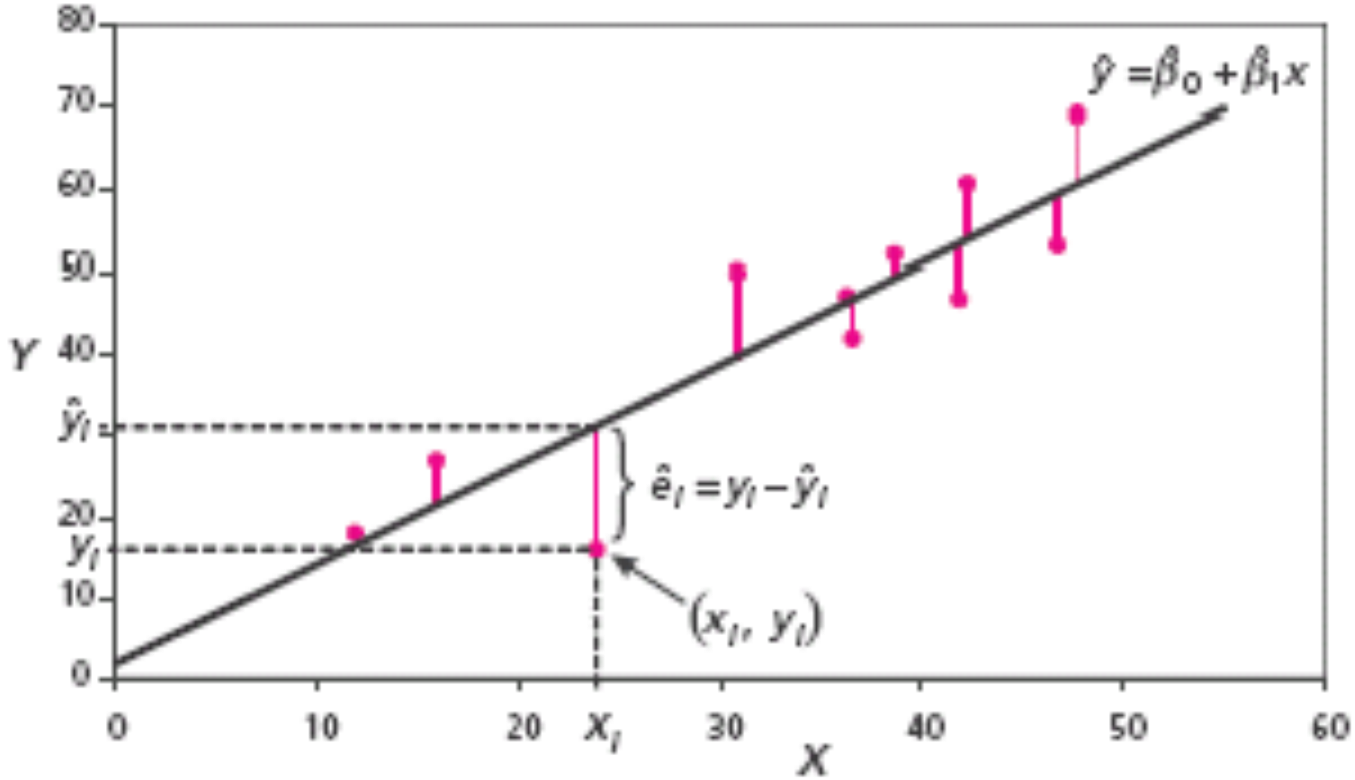
Metodo di stima → **Metodo dei minimi quadrati**

Consiste nel ricercare le stime di $\beta_0$ e $_1$, che rendono minima la funzione di perdita:

$$\boxed{G(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}$$

# Stima puntuale dei coefficienti di regressione

Chiameremo residuo i-esimo la differenza tra il valore osservato $y_i$ e quello fornito dalla retta stimata, $\hat{y}_i$



# Stima puntuale dei coefficienti di regressione

Procedimento:

1) Porre uguali a zero le derivate prime rispetto ai parametri

$$\frac{\partial G(\beta_0,\beta_1)}{\partial \beta_0} = 0$$

$$\frac{\partial G(\beta_0,\beta_1)}{\partial \beta_1} = 0$$

2) Risolvendo il sistema si ottengono le stime dei minimi quadrati dei coefficienti di regressione

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Accademia FormaWeb

# Decomposizione della varianza

Le stime dei minimi quadrati possiedono un'importante proprietà, nota come **decomposizione della varianza totale**:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i^2$$

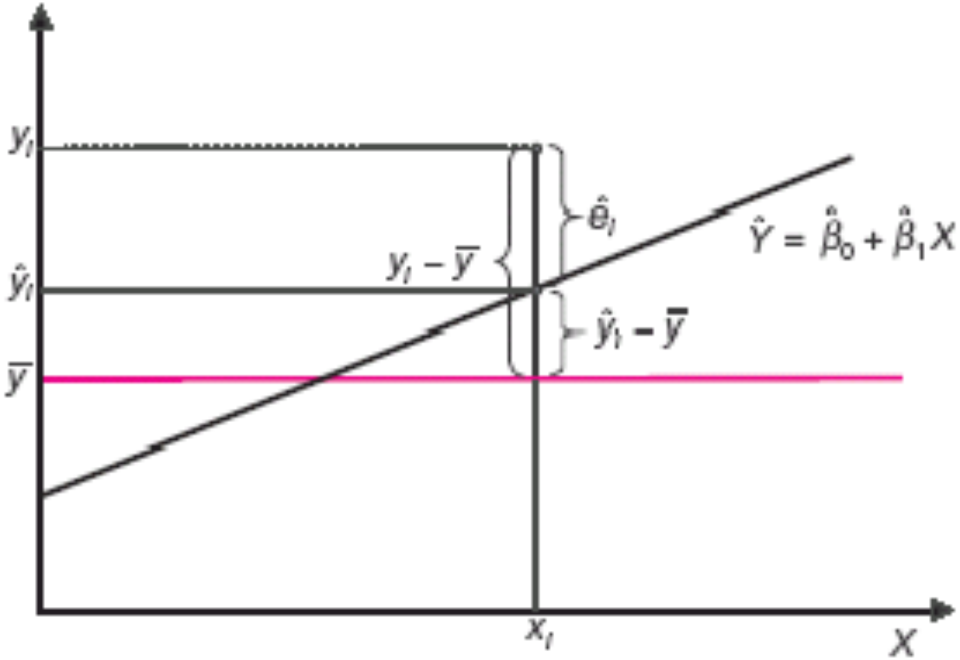
Somma totale dei quadrati (SQT) $$SQT = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

Somma dei quadrati della regressione (SQR) $$SQR = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

Somma dei quadrati degli errori (SQE) $$SQE = \sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i^2$$

Accademia FormaWeb

# Decomposizione della varianza




- **SQR=0** ⇒ **SQE=SQT e i valori stimati sono tutti uguali alla media campionaria** $\bar{y}$

- **SQR=SQT** ⇒ **SQE=0 e tutti i valori stimati sono uguali a quelli osservati.**

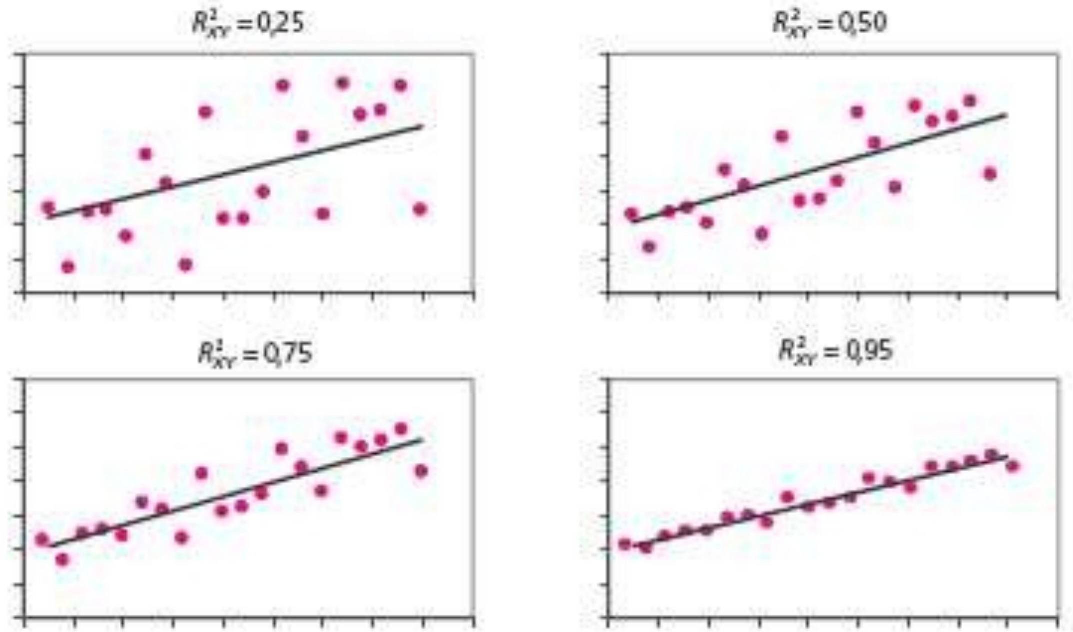
# Coefficiente di determinazione

**Dalla relazione SQT=SQR+SQE si può definire un indice che misura la bontà di adattamento della retta di regressione.**

**Il rapporto**

$$R^2_{XY} = \frac{SQR}{SQT} = 1 - \frac{SQE}{SQT}$$

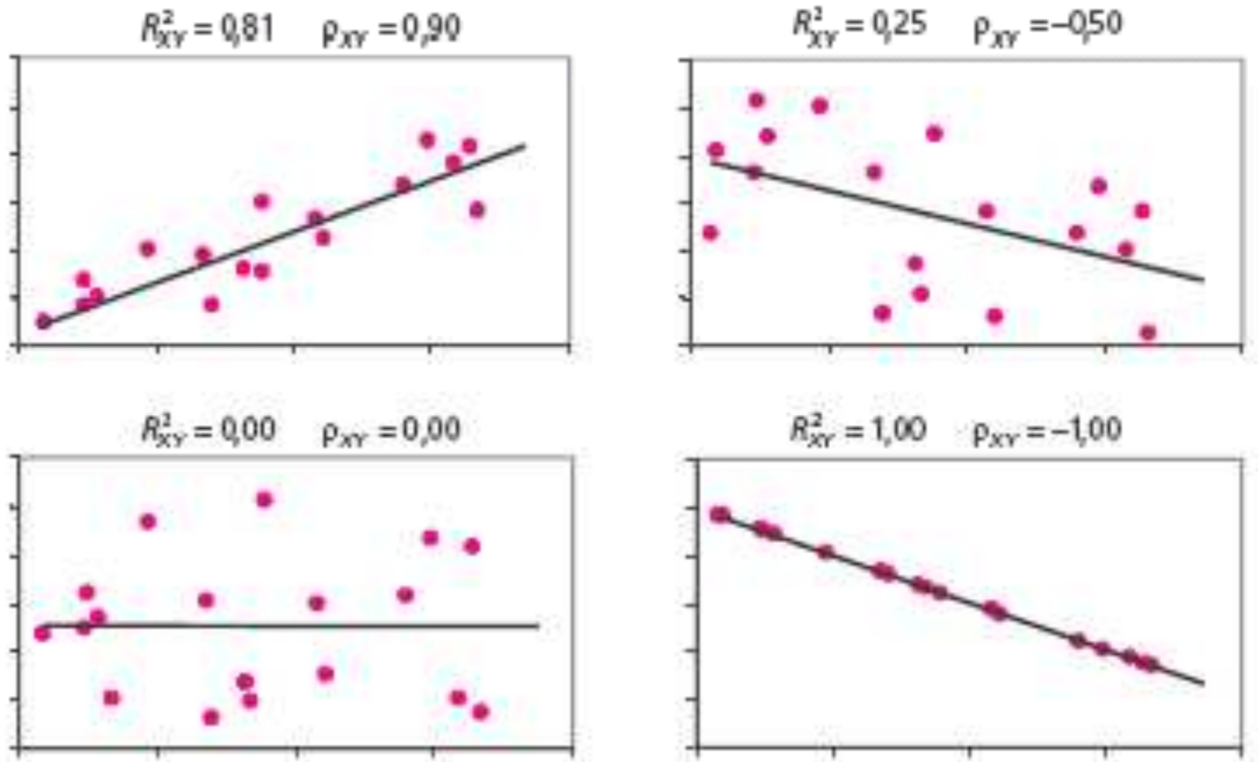
**è detto coefficiente di determinazione e indica la proporzione di variabilità di Y spiegata dalla variabile esplicativa X, attraverso il modello di regressione.**



# Coefficiente di determinazione

**Si può dimostrare che il coefficiente di determinazione corrisponde al quadrato del coefficiente di correlazione lineare:**

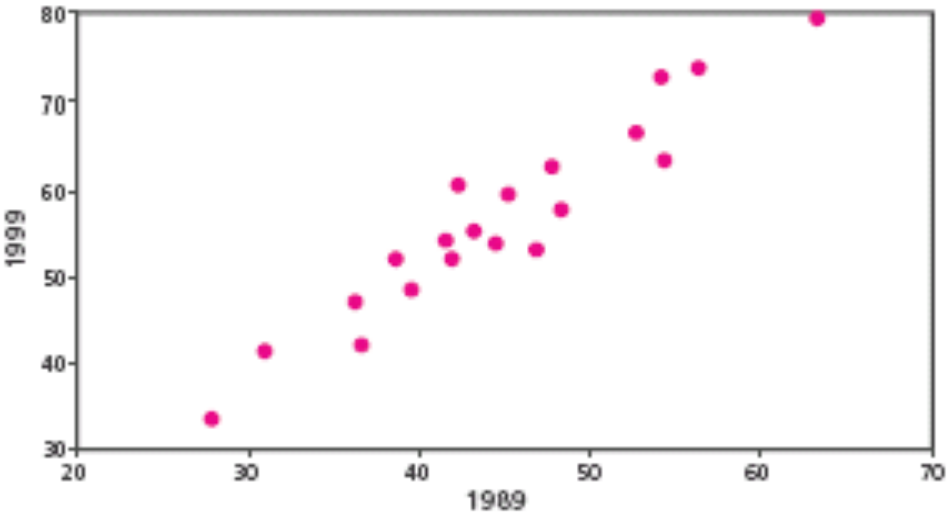
$$R^2_{XY} = \left(\rho^2_{XY}\right) = \left(\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}\right)^2$$




Accademia FormaWeb

# Modello di regressione lineare - esempio

**Su un campione di 20 aree amministrative si osserva il reddito pro-capite nel 1989 (X) e 1999 (Y).**




**Si ipotizza il seguente modello:**

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

| Area | X:1989 | Y:1999 |
|---|---|---|
| 1 | 47,8 | 63,0 |
| 2 | 27,9 | 33,4 |
| 3 | 36,6 | 42,0 |
| 4 | 54,2 | 72,8 |
| 5 | 41,9 | 52,0 |
| 6 | 44,4 | 54,0 |
| 7 | 54,3 | 63,4 |
| 8 | 42,3 | 60,7 |
| 9 | 48,2 | 58,0 |
| 10 | 41,5 | 54,4 |
| 11 | 43,2 | 55,5 |
| 12 | 56,3 | 74,0 |
| 13 | 63,3 | 79,2 |
| 14 | 46,8 | 53,1 |
| 15 | 45,2 | 59,6 |
| 16 | 38,7 | 52,0 |
| 17 | 36,3 | 47,2 |
| 18 | 39,5 | 48,7 |
| 19 | 30,9 | 41,4 |
| 20 | 52,6 | 66,9 |

Accademia FormaWeb

# Modello di regressione lineare - esempio

**Si ottengono le seguente stime dei coefficienti del modello:**

$$\hat{\beta}_1 = 1{,}255 \qquad \hat{\beta}_0 = 0{,}595$$

**ossia la retta di regressione:** $\hat{y}_i = 0{,}595 + 1{,}255 x_i$

**Il coefficiente di correlazione è** $\rho_{XY} = 0{,}956$

**SQT=2497,6 da cui:** $R^2_{XY} = (0{,}956)^2 = 0{,}914$

**ossia circa il 91% della variabilità totale di Y è spiegata dal modello di regressione.**

# Proprietà degli stimatori dei coefficienti

**Proprietà degli stimatori dei minimi quadrati**

1. $B_0$ **e** $B_1$ **sono stimatori corretti di** $\beta_0$ **e** $\beta_1$
2. **Nella classe degli stimatori corretti di** $\beta_0$ **e** $\beta_1$ **che sono funzioni lineari delle** $Y_i$ **, gli stimatori dei minimi quadrati sono i più efficienti. (Gauss-Markov)**
3. **La varianza e covarianza degli stimatori dei minimi quadrati sono:**

$$V(B_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad V(B_0) = \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

$$Cov(B_0, B_1) = -\sigma^2 \frac{\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

# Proprietà dello stimatore della risposta media

**Per lo stimatore della risposta media $\hat{Y}_i$ valgono le seguenti proprietà:**

1. **Lo stimatore $\hat{Y}_i$ è corretto, ossia** $E(\hat{Y}_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$
2. **La varianza è:**

$$V(\hat{Y}_i) = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{h=1}^{n} (x_h - \bar{x})^2} \right]$$

**Una misura della variabilità degli stimatori dei coefficienti di regressione e della risposta media è data dagli errori standard, ossia le radici quadrate delle varianze:**

$$\sigma(B_0) = \sqrt{V(B_0)} \quad \sigma(B_1) = \sqrt{V(B_1)} \quad \sigma(\hat{Y}_i) = \sqrt{V(\hat{Y}_i)}$$

# Errore standard

**Ora sebbene il metodo M.Q. indivua la retta che minimizza la differenza tra i valori osservati e quelli previsti, questa non conduce quasi mai a previsioni scevre da errori. E' quindi necessaria una statistica campionaria che misuri la variabilità degli scostamenti dei valori osservati dai previsti.**

**Inoltre, gli errori standard dipendono dalla quantità ignota:**

$$\sigma^2 = V(Y_i) = V(\varepsilon_i)$$

**pertanto la si sostituisce con una sua stima** $s^2$ **ottenendo gli stimatori**

$$s(B_0) \qquad s(B_1) \qquad s(\hat{Y}_i)$$

**Lo stimatore che si utilizza per ottenere la stima della varianza è dato da:**

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}$$

**La radice quadrata è una misura della variabilità degli scostamenti dei valori osservati da quelli previsti dal modello e viene chiamato errore standard della stima (di regressione).**

Accademia FormaWeb