Sprawozdanie - Projekt 3
Aproksymacja profilu wysokościowego
Metoda Lagrange'a oraz splajnów

Damian Jankowski s188597

25 maja 2023

Spis treści

1 Wstęp

Celem projektu było zaimplementowanie dwóch metod interpolacji: metody Lagrange'a i metody wykorzystującej funkcje sklejane trzeciego stopnia oraz porównanie ich działania na podstawie wybranego profilu wysokościowego.

2 Opis metod

2.1 Metoda interpolacji Lagrange'a

Metoda Lagrange'a polega na znalezieniu wielomianu $F(x)$, który składa się z funkcji określonych wzorem:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

gdzie:

- n - liczba węzłów interpolacji

Każdy z tych wielomianów spełnia następujący warunek:

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} \tag{2}$$

Wielomian $F(x)$ można zapisać jako sumę iloczynów wartości funkcji w węźle x_i oraz funkcji $\phi_i(x_i)$ w tym punkcie:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\phi_i(x) \tag{3}$$

2.2 Metoda interpolacji funkcjami sklejanymi (splajnami) trzeciego stopnia

Metoda interpolacji funkcjami sklejanymi polega na znalezieniu dla każdego podprzedziału stworzonego z sąsiednich węzłów interpolacji $[x_i, x_{i+1}]$ wielomianu trzeciego stopnia $S_i(x)$:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \tag{4}$$

gdzie:

- a_i, b_i, c_i, d_i - szukane współczynniki wielomianu $S_i(x)$
- x_i - początek podprzedziału

Gdy mamy n węzłów interpolacji, to mamy $n-1$ podprzedziałów, a więc $n-1$ wielomianów $S_i(x)$ do znalezienia. W celu wyznaczenia współczynników tych wielomianów należy spełnić następujące warunki:

1. $S_i(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$
2. $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$
3. $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 0, 1, \ldots, n-2$
4. $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 0, 1, \ldots, n-2$
5. $S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n) = 0$

Warunki 1. i 2. wynikają z tego, że wielomiany $S_i(x)$ muszą osiągać te same wartości co funkcja $f(x)$ w węzłach interpolacji, jest to warunek konieczny, by wielomiany te były wielomianami interpolacyjnymi.

Warunki 3. i 4. wynikają z tego, że wielomiany $S_i(x)$ oraz $S_{i+1}(x)$ muszą być ciągłe w punkcie x_{i+1}. Warunki te są konieczne, by wielomiany te były funkcjami sklejanymi.

Warunek 5. tyczy się początku i końca przedziału interpolacji.

Do rozwiązania takiego układu równań można zbudować macierze A oraz b i wykorzystując jedną z metod rozwiązywania układów równań liniowych, np. metodę eliminacji Gaussa, wyznaczyć współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i. Z racji, że musimy wyznaczyć n wielomianów $S_i(x)$, to musimy rozwiązać $4n$ równań liniowych.

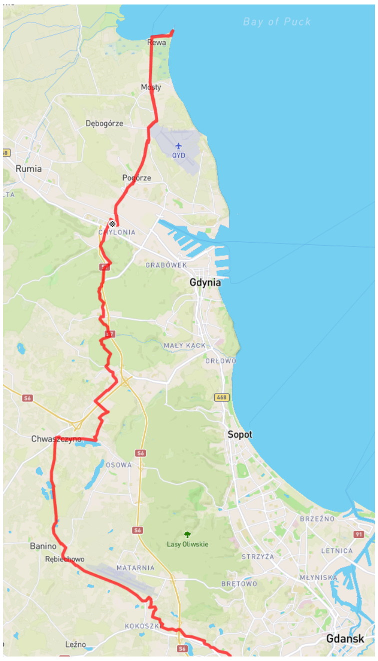
3 Dane wejściowe

Dane wejściowe to trzy trasy rowerowe w formacie GPX, które zawierają informacje o współrzędnych geograficznych punktów na trasie oraz ich wysokościach.

- Trasa 1: Gdańsk - Kąty Rybackie - Gdańsk
  Dystans: 114.076 km
  Różnica wysokości: 56.400 m
  Ilość punktów danych: 18090

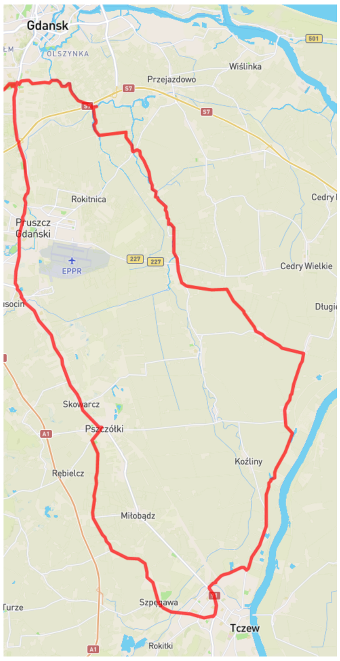
W większości płaska, występują na niej niewielkie różnice wysokości, nie licząc początka i końca trasy

- Trasa 2: Gdańsk - Rewa
  Dystans: 67.362 km
  Różnica wysokości: 168.400 m
  Ilość punktów danych: 11889



Odznacza się dużym wzniesieniem oraz kilkoma mniejszymi, głównie na końcu trasy

- Trasa 3: Gdańsk - Tczew - Gdańsk
  Dystans: 80.121 km
  Różnica wysokości: 55.300 m
  Ilość punktów danych: 14807



Zróżnicowana, występują na niej zarówno płaskie odcinki, jak również jedno wyraźnie wzniesienie

4 Implementacja

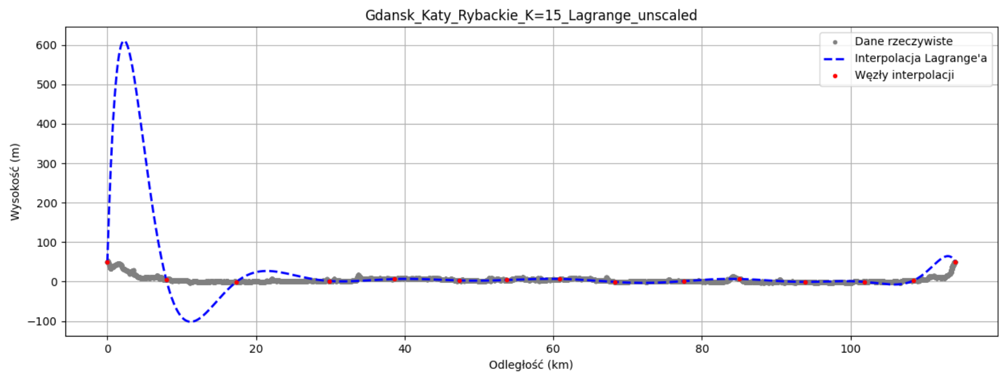
Wszystkie metody zaimplementowałem w języku *Python* z wykorzystaniem biblioteki *numpy* do obliczeń numerycznych (np. do rozwiązywania układów równań liniowych — funkcja *numpy.linalg.solve*) oraz biblioteki *matplotlib* do generowania wykresów.

Każde dwie metody przetestowałem na wcześniej wspomnianych trzech profilach wysokościowych. Węzły interpolacji wybierałem na dwa sposoby: równomiernie oraz losowo. Zdecydowałem również o wybraniu różnej ilości węzłów (15 oraz 30), by móc zauważyć wpływ ich ilości na dokładność interpolacji.

4.1 Trasa 1

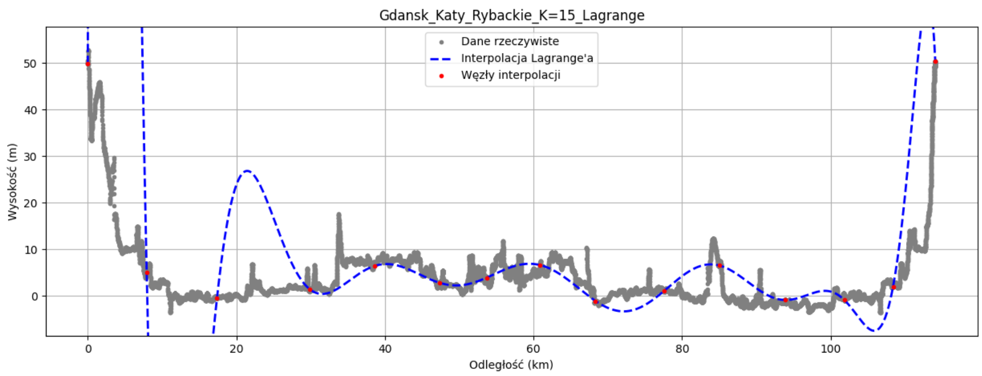
4.1.1 Interpolacja Lagrange'a

15 węzłów

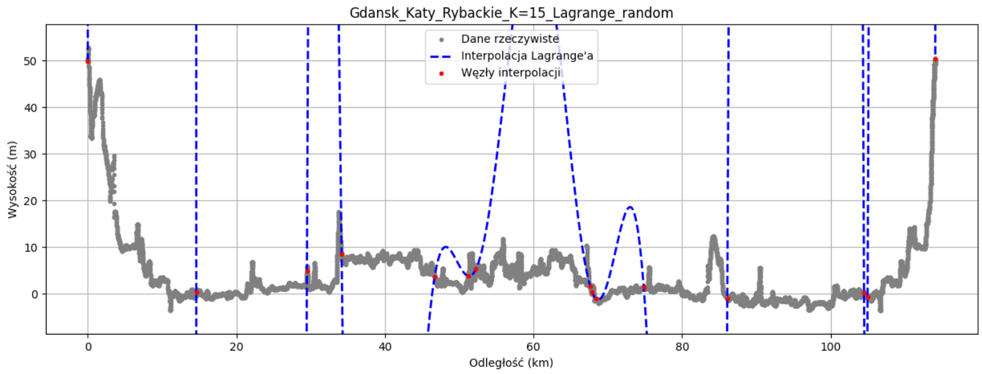


Rysunek 1: Interpolacja Lagrange'a, 15 węzłów, trasa 1

Z racji dużych wahań wartości interpolowanej funkcji, kolejne wykresy będą przeskalowane do danych rzeczywistych.



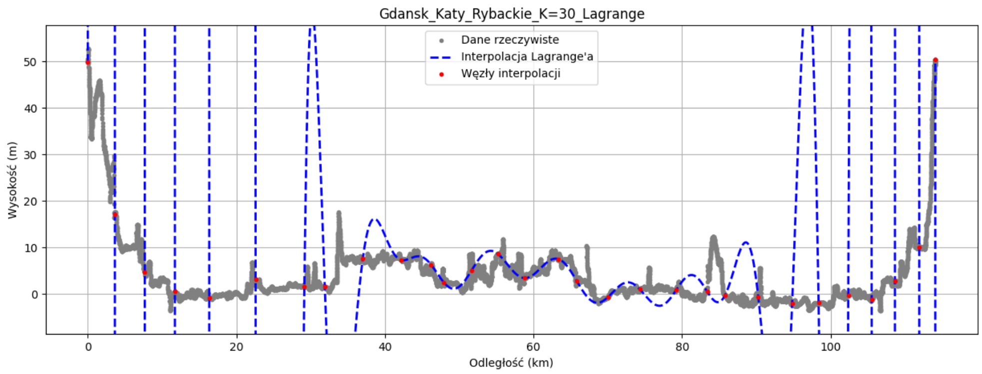
Rysunek 2: Interpolacja Lagrange'a, 15 węzłów, trasa 1



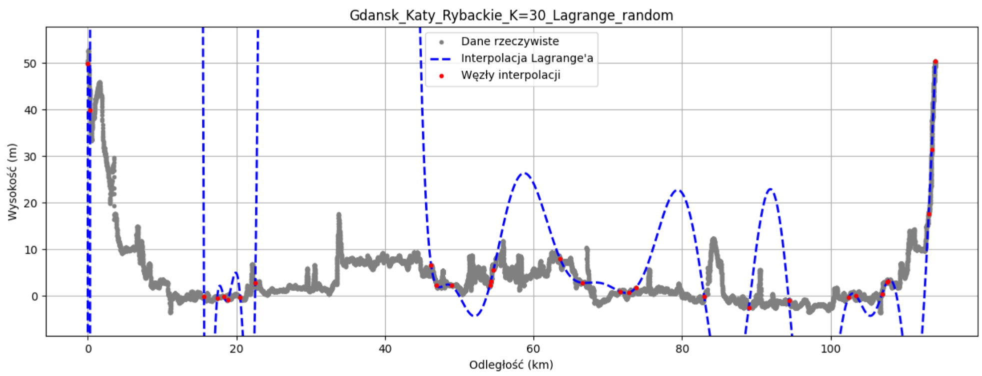
Rysunek 3: Interpolacja Lagrange'a, 15 węzłów, trasa 1, węzły losowe

Z wykresów interpolacji Lagrange'a widać, że metoda ta nie radzi sobie dobrze z interpolacją. Uwydatnia się tu tzw. efekt Rungego, czyli oscylacje wielomianu interpolacyjnego na krańcach interpolowanego przedziału. Widać to szczególnie na wykresie z węzłami wybieranymi losowo, gdzie wielomian interpolacyjny mocno oscyluje w okolicach punktów skrajnych.

30 węzłów



Rysunek 4: Interpolacja Lagrange'a, 30 węzłów, trasa 1

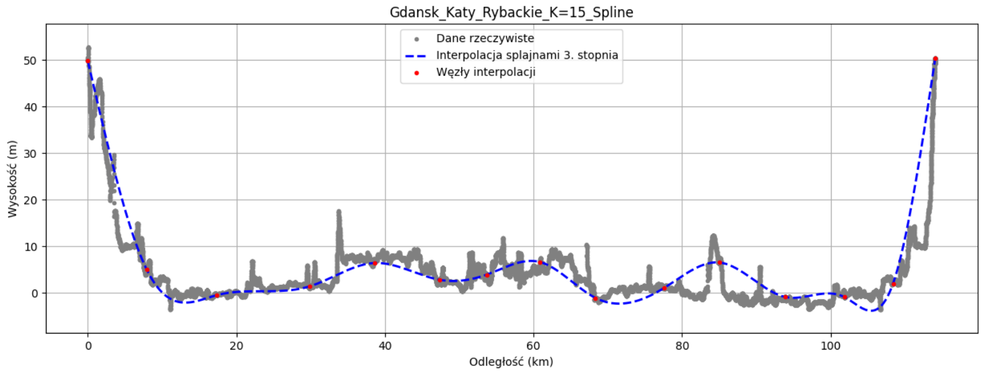


Rysunek 5: Interpolacja Lagrange'a, 30 węzłów, trasa 1, węzły losowe

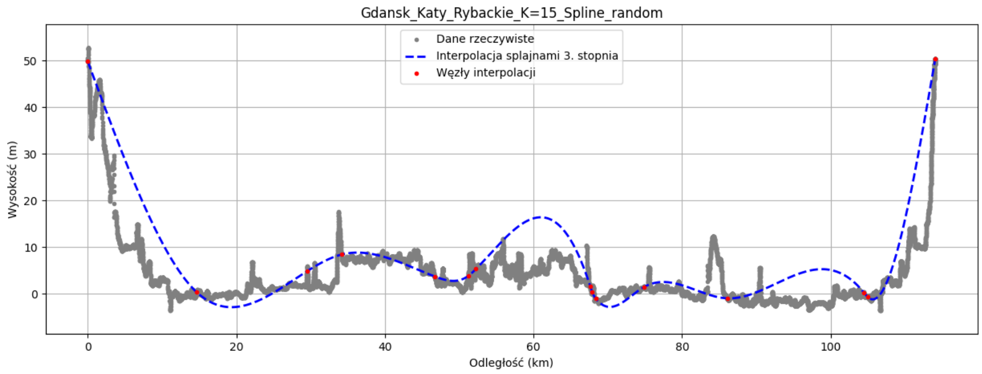
Zwiększenie ilości węzłów mocno pogarsza interpolację. Efekt Rungego jest jeszcze bardziej widoczny, co powoduje, że wielomian interpolacyjny prawie w ogóle nie pokrywa się z danymi wejściowymi.

4.1.2 Interpolacja splajnami 3. stopnia

15 węzłów



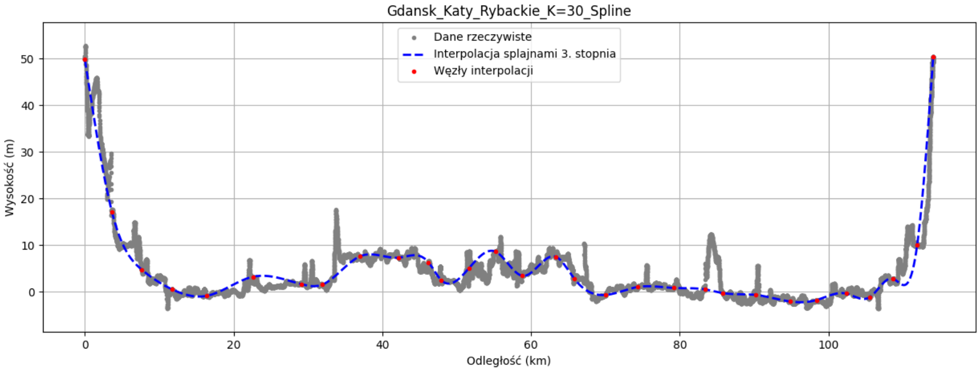
Rysunek 6: Interpolacja splajnami 3. stopnia, 15 węzłów, trasa 1



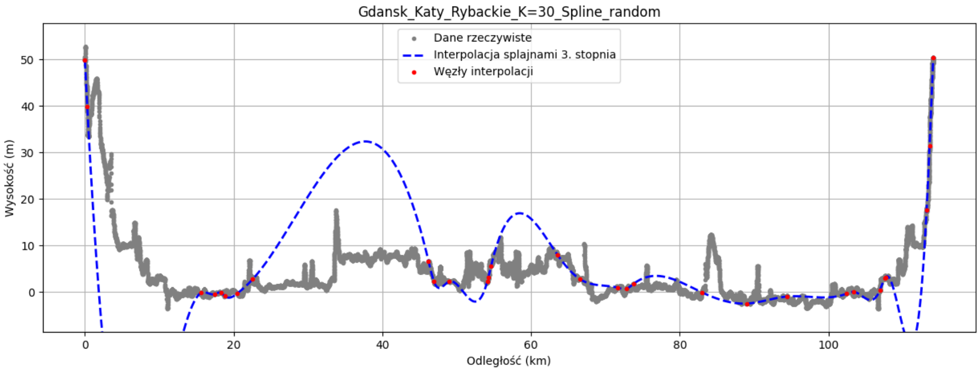
Rysunek 7: Interpolacja splajnami 3. stopnia, 15 węzłów, trasa 1, węzły losowe

Interpolacja splajnami 3. stopnia radzi sobie zdecydowanie lepiej niż interpolacja Lagrange'a. Niewystępowanie efektu Rungego powoduje, że wielomian interpolacyjny dobrze pokrywa się z interpolowanym profilem wysokościowym. Natomiast losowe wybieranie węzłów podobnie jak w przypadku interpolacji Lagrange'a przynosi gorsze rezultaty, wszystko zależy od szczęścia w wyborze węzłów. Punkty bliżej siebie mogą powodować, że wielomian interpolacyjny będzie mocno oscylował w ich okolicach.

30 węzłów



Rysunek 8: Interpolacja splajnami 3. stopnia, 30 węzłów, trasa 1



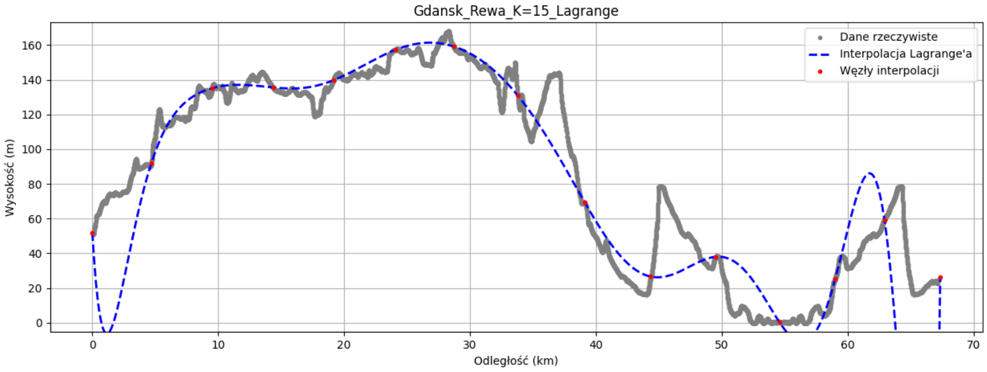
Rysunek 9: Interpolacja splajnami 3. stopnia, 30 węzłów, trasa 1, węzły losowe

Zwiększenie ilości węzłów znacząco poprawia interpolację. Widać to na wykresie z węzłami równomiernymi, gdzie wielomian interpolacyjny dość dobrze pokrywa się z danymi wejściowymi. W przypadku węzłów losowych widać problem z oscylacjami, jednak nie są one tak duże jak w przypadku interpolacji Lagrange'a.

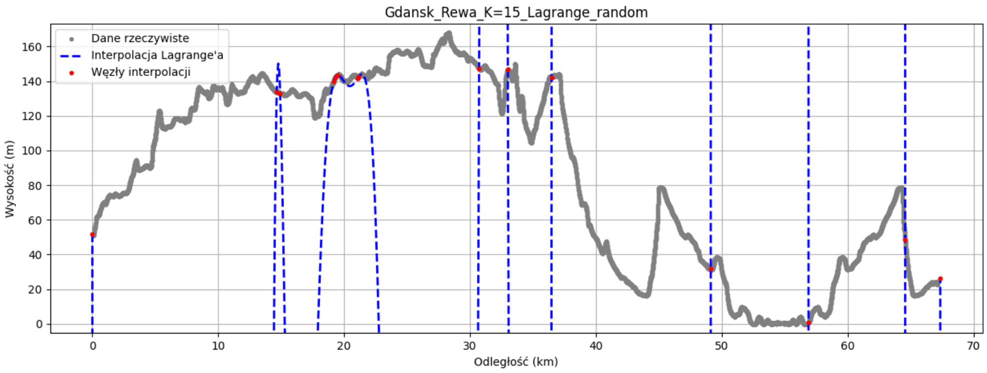
4.2 Trasa 2

4.2.1 Interpolacja Lagrange'a

15 węzłów



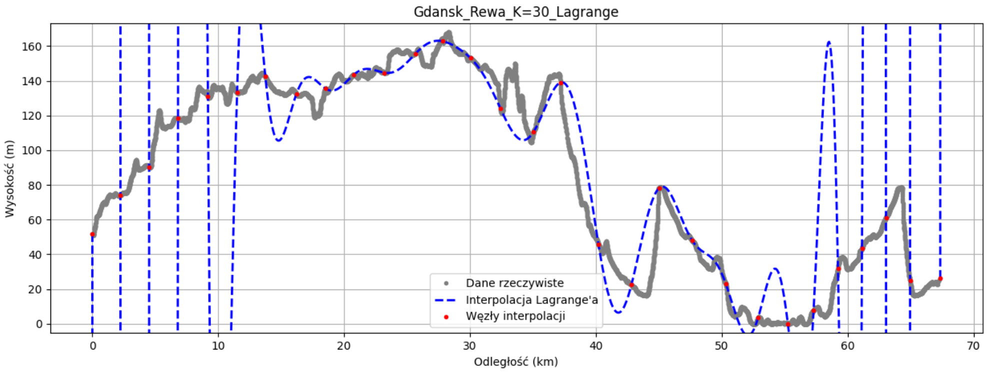
Rysunek 10: Interpolacja Lagrange'a, 15 węzłów, trasa 2



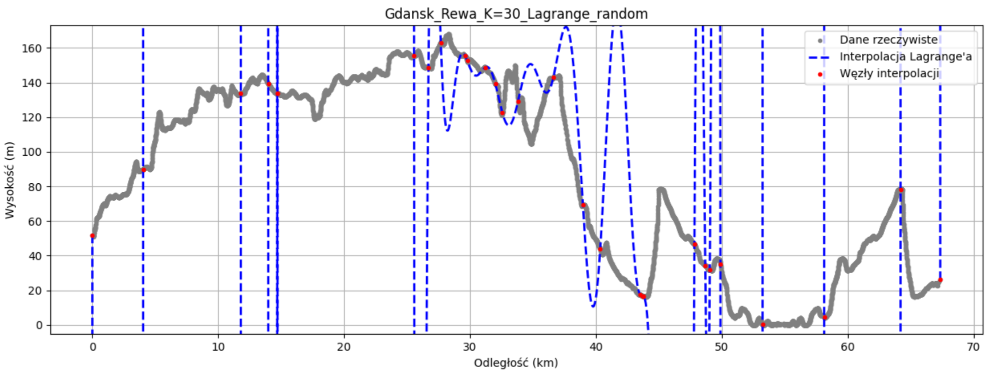
Rysunek 11: Interpolacja Lagrange'a, 15 węzłów, trasa 2, węzły losowe

Podobnie jak w przypadku trasy 1, interpolacja Lagrange'a nie radzi sobie dobrze z interpolacją. W granicach interpolowanego przedziału wielomian interpolacyjny mocno oscyluje, co powoduje znaczną rozbieżność z danymi wejściowymi. Profil trasy również nie pomaga, ponieważ jest on bardziej nieregularny niż w przypadku trasy 1.

30 węzłów



Rysunek 12: Interpolacja Lagrange'a, 30 węzłów, trasa 2

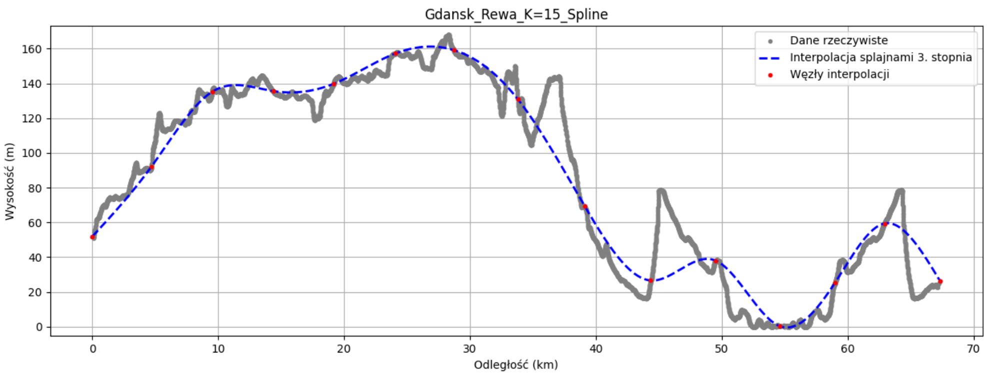


Rysunek 13: Interpolacja Lagrange'a, 30 węzłów, trasa 2, węzły losowe

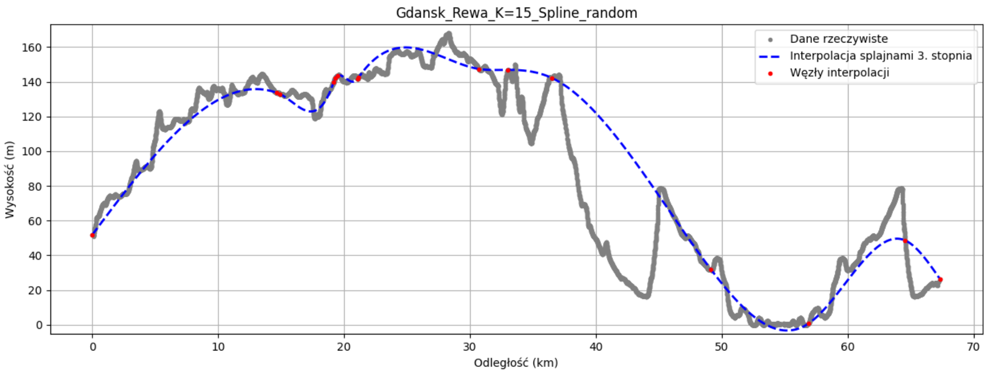
Bez względu na sposób wyboru węzłów, funkcja interpolowana metodą Lagrange'a nie jest zadowalająca. Na wykresie z węzłami wybranymi losowo nie da się nawet zauważyć odcinka interpolowanego profilu, ponieważ wielomian interpolacyjny zwraca bardzo chaotyczne wartości.

4.2.2 Interpolacja splajnami 3. stopnia

15 węzłów



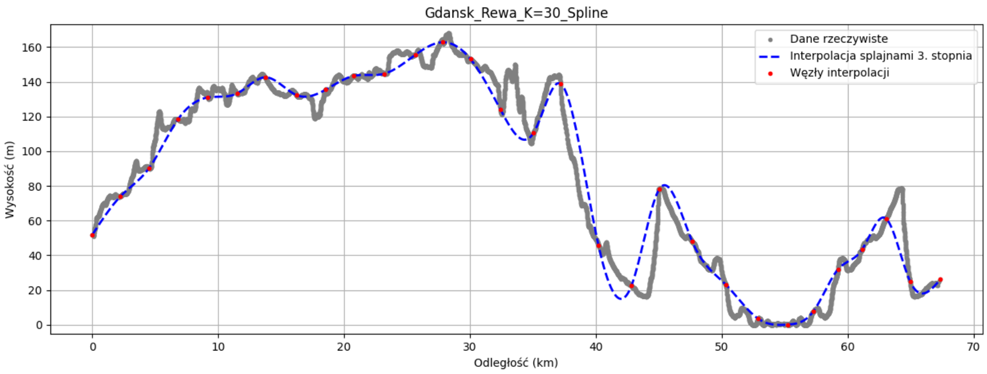
Rysunek 14: Interpolacja splajnami 3. stopnia, 15 węzłów, trasa 2



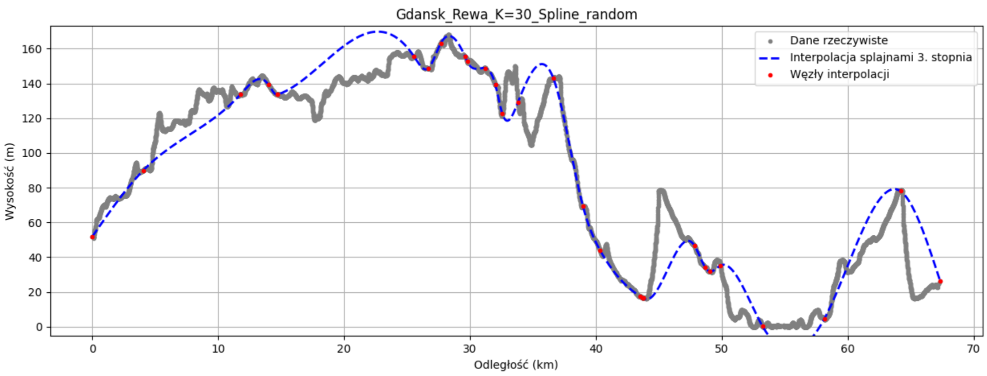
Rysunek 15: Interpolacja splajnami 3. stopnia, 15 węzłów, trasa 2, węzły losowe

Interpolacja splajnami 3. stopnia radzi sobie lepiej niż interpolacja Lagrange'a, natomiast mała ilość węzłów powoduje, że wielomian interpolacyjny nie pokrywa się z gwałtownymi zmianami profilu trasy.

30 węzłów



Rysunek 16: Interpolacja splajnami 3. stopnia, 30 węzłów, trasa 2



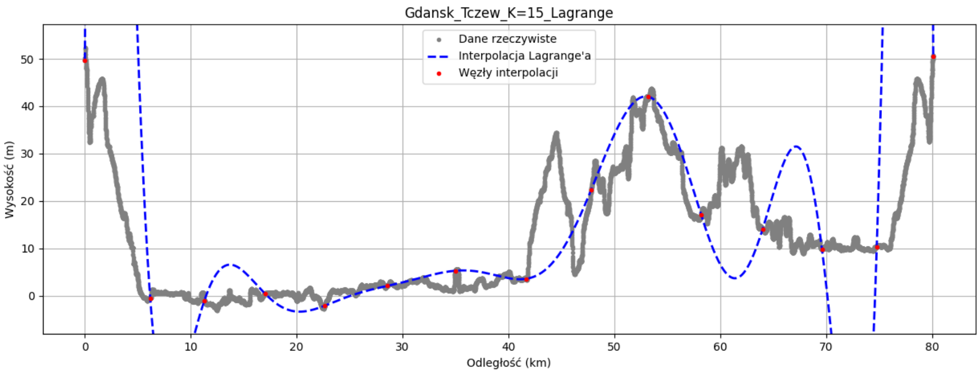
Rysunek 17: Interpolacja splajnami 3. stopnia, 30 węzłów, trasa 2, węzły losowe

Podobnie jak w przypadku pierwszej trasy, zwiększenie ilości węzłów poprawia aproksymację profilu. Funkcja interpolowana splajnami 3. stopnia jest gładka, nie ma w niej dużych oscylacji, a jej wartości są zbliżone do wartości funkcji interpolowanej. Problemem jest jednak wybór węzłów, ponieważ w przypadku pechowego losowania, funkcja źle przewidzi gwałtowne zmiany profilu.

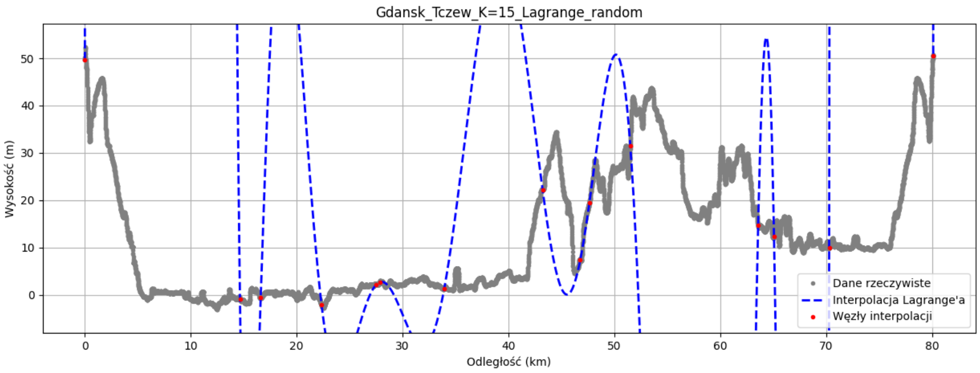
4.3 Trasa 3

4.3.1 Interpolacja Lagrange'a

15 węzłów



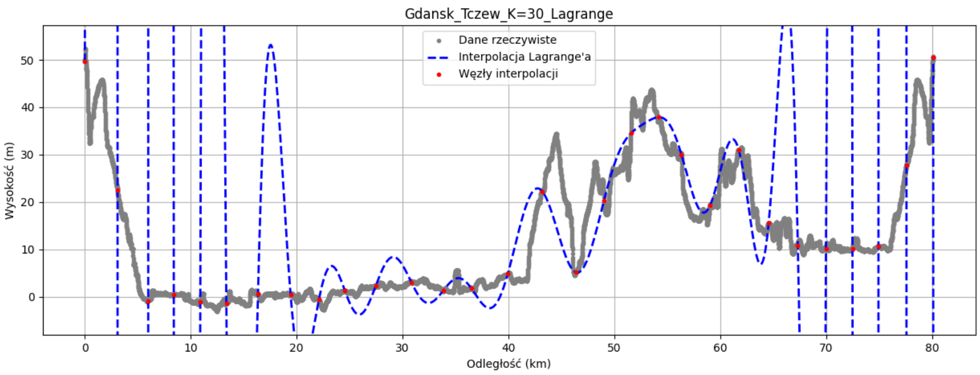
Rysunek 18: Interpolacja Lagrange'a, 15 węzłów, trasa 3



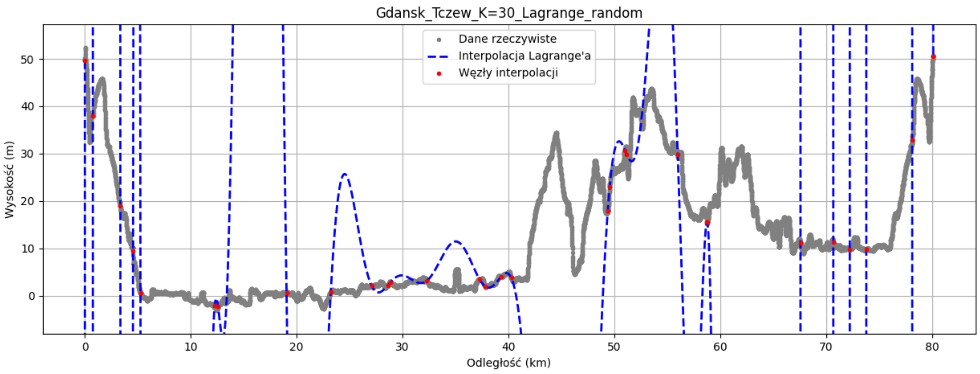
Rysunek 19: Interpolacja Lagrange'a, 15 węzłów, trasa 3, węzły losowe

Profil trasy 3 jest najbardziej nieregularny ze wszystkich trzech tras. W przypadku interpolacji Lagrange'a, wielomian interpolacyjny zdecydowanie nie radzi sobie z aproksymacją profilu.

30 węzłów



Rysunek 20: Interpolacja Lagrange'a, 30 węzłów, trasa 3

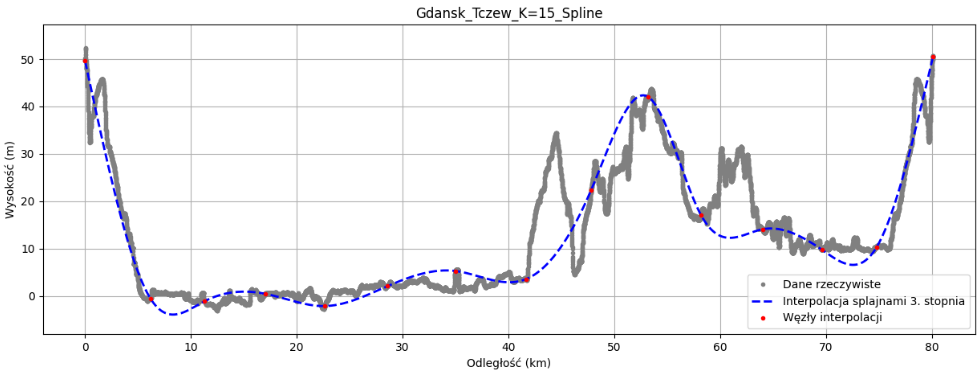


Rysunek 21: Interpolacja Lagrange'a, 30 węzłów, trasa 3, węzły losowe

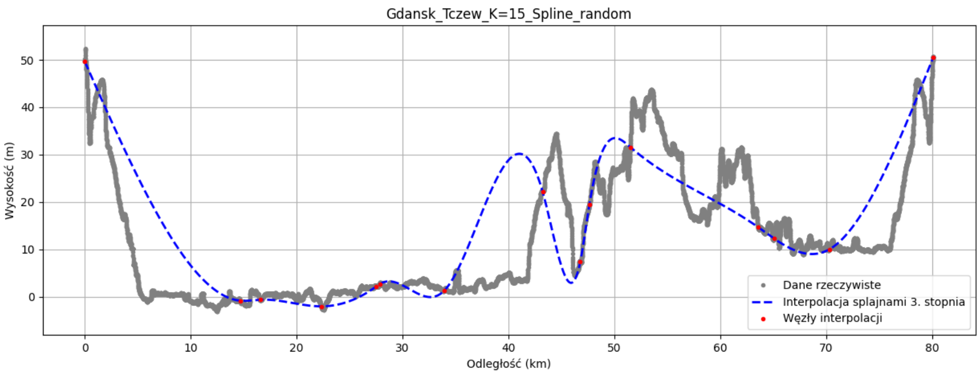
Zwiększenie ilości węzłów pogarsza aproksymację profilu trasy 3. W przypadku węzłów równoodległych widzimy mocny wpływ efektu Rungego, natomiast w przypadku węzłów losowych, wielomian interpolacyjny przyjmuje bardzo zróżnicowane i nieprzewidywalne wartości.

4.3.2 Interpolacja splajnami 3. stopnia

15 węzłów



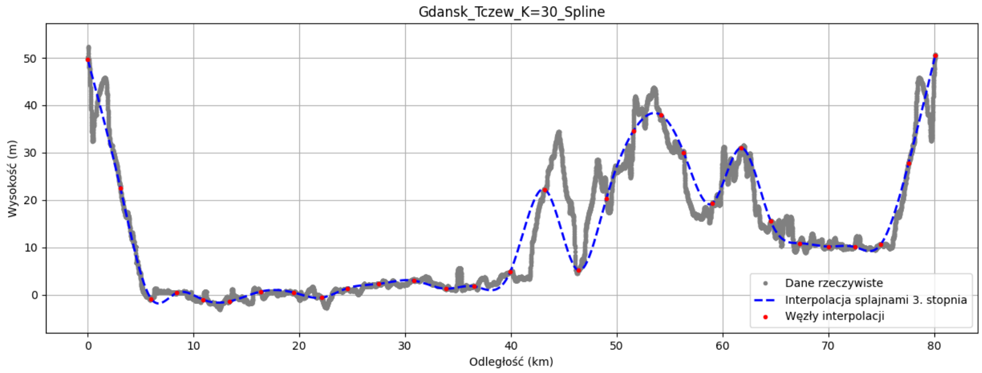
Rysunek 22: Interpolacja splajnami 3. stopnia, 15 węzłów, trasa 3



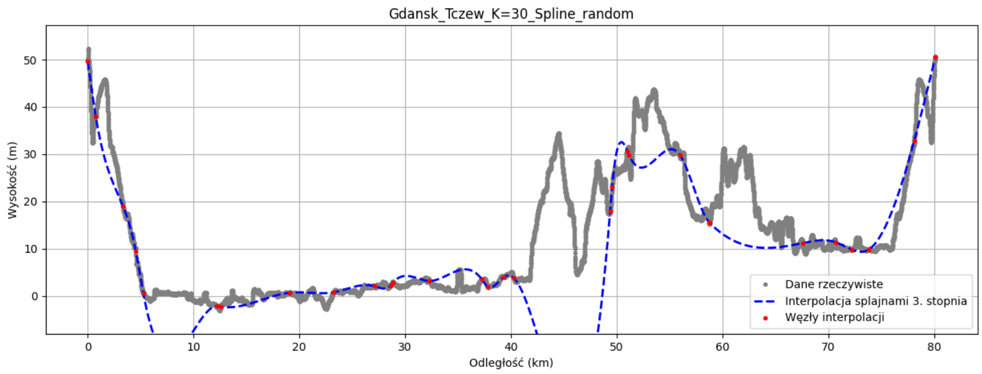
Rysunek 23: Interpolacja splajnami 3. stopnia, 15 węzłów, trasa 3, węzły losowe

Interpolacja splajnami 3. stopnia po raz kolejny radzi sobie lepiej niż interpolacja Lagrange'a. Nawet w przypadku wybrania tylko 15 węzłów, wielomian interpolacyjny aproksymuje profil trasy w sposób zadowalający.

30 węzłów



Rysunek 24: Interpolacja splajnami 3. stopnia, 30 węzłów, trasa 3



Rysunek 25: Interpolacja splajnami 3. stopnia, 30 węzłów, trasa 3, węzły losowe

Podwojenie ilości węzłów interpolacji dla tej metody podobnie jak w przypadku dwóch poprzednich profili poprawia aproksymację. Natomiast wszystko zależy od tego, w jaki sposób zostały wybrane. W przypadku węzłów równoodległych, wielomian interpolacyjny radzi sobie dobrze, natomiast w przypadku węzłów losowych, funkcja interpolowana może oscylować w miejscach, gdzie wylosowano blisko siebie wiele węzłów.

5 Wnioski

- Interpolacja Lagrange'a jest wrażliwa na efekt Rungego, który odznacza się dużymi oscylacjami w przypadku interpolacji wielomianowej przy równoodległych węzłach. Dlatego zaleca się wybór mniejszej ilości węzłów w celu zmniejszenia tego efektu.
- Interpolacja funkcjami sklejanymi 3. stopnia radzi sobie lepiej z aproksymacją profilu trasy. Dzięki swojej gładkości, funkcja interpolowana nie wykazuje dużych oscylacji i lepiej odzwierciedla rzeczywiste zmiany wysokości terenu.
- Zwiększenie ilości węzłów interpolacji często prowadzi do lepszych rezultatów w przypadku interpolacji funkcjami sklejanymi 3. stopnia. Więcej węzłów pozwala na bardziej precyzyjne dopasowanie funkcji interpolującej do danych.
- Implementacja interpolacji Lagrange'a jest prostsza i mniej kosztowna pamięciowo oraz obliczeniowo w porównaniu do interpolacji funkcjami sklejanymi 3. stopnia. Lagrange jest oparty na wielomianach interpolacyjnych, podczas gdy splajny wymagają rozwiązania układu równań, w którym liczba niewiadomych jest równa pomnożonej przez 4 ilości przedziałów. Ta właściwość może być kluczowa, gdy nie zależy nam na dokładności interpolacji, a chcemy jak najszybciej otrzymać wynik.

  Z powyższych wniosków wynika, że w przypadku prostych profilów tras, gdzie nie występują duże oscylacje, interpolacja Lagrange'a może być wystarczająca i bardziej efektywna. Jednak w przypadku bardziej złożonych profili terenowych, interpolacja funkcjami sklejanymi 3. stopnia może dawać lepsze rezultaty.

Źródła

[1] Kurs e-nauczanie Metody Numeryczne (Informatyka) - 2023
Wykład 5

[2] Wikipedia, *Interpolacja wielomianowa*
`https://pl.wikipedia.org/wiki/Interpolacja_wielomianowa`

[3] Wikipedia, *Efekt Rungego*
`https://pl.wikipedia.org/wiki/Efekt_Rungego`

[4] Wikipedia, *Splajn*
`https://pl.wikipedia.org/wiki/Splajn`

[5] Wikipedia, *Interpolacja funkcjami sklejanymi*
`https://pl.wikipedia.org/wiki/Interpolacja_funkcjami_sklejanymi`