

Sprawozdanie - Projekt 2

Układy równań liniowych

Implementacja metod Jacobiego, Gaussa-Seidla i LU

Damian Jankowski s188597

27 kwietnia 2023

1 Wstęp

Celem projektu było zaimplementowanie metod Jacobiego, Gaussa-Seidla i LU oraz porównanie wydajności, dokładności, jak również czasu ich wykonania.

Każda z metod w różny sposób rozwiązuje pewien układ równań liniowych:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1)$$

gdzie:

- \mathbf{A} – macierz kwadratowa zawierająca współczynniki układu równań,
- \mathbf{b} – wektor wyrazów wolnych,
- \mathbf{x} – wektor rozwiązań układu.

Macierz \mathbf{A} została zdefiniowana jako macierz pasmowa o rozmiarze 997×997 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie:

$$a_1 = 10, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -1$$

Wektor \mathbf{b} długości 997 został zdefiniowany jako:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sin(0 \cdot (f+1)) \\ \sin(1 \cdot (f+1)) \\ \sin(2 \cdot (f+1)) \\ \vdots \\ \sin(996 \cdot (f+1)) \end{bmatrix} \quad f = 8 \quad (3)$$

2 Metody rozwiązywania układów równań liniowych

Istnieje wiele metod rozwiązywania układów równań liniowych. W projekcie zostały zaimplementowane trzy z nich: metoda Jacobiego, Gaussa-Seidla i LU.

Pierwsze dwa należą do grupy metod iteracyjnych, natomiast ostatnia jest metodą bezpośrednią.

2.1 Metody iteracyjne

Metody iteracyjne polegają na wyznaczeniu kolejnych przybliżeń rozwiązania układu równań liniowych.

Korzystają one z tzw. macierzy: trójkątnej dolnej (*Lower*) L , górnej (*Upper*) U oraz diagonalnej D , które spełniają warunek:

$$A = L + U + D \quad (4)$$

Przykładowo dla macierzy A (2), macierze L , U i D wyglądają następująco:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Warunkiem zakończenia iteracji jest osiągnięcie zadanej dokładności lub maksymalnej liczby iteracji.

2.1.1 Metoda Jacobiego

Metoda Jacobiego polega na wyznaczeniu kolejnych przybliżeń rozwiązania układu równań liniowych zgodnie ze wzorem:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b \quad (8)$$

gdzie:

- $x^{(k)}$ - wektor przybliżenia rozwiązania w k -tej iteracji

Problemem tej metody jest konieczność wyznaczenia odwrotności macierzy D , co może być bardzo kosztowne obliczeniowo. Natomiast z racji, że macierz D jest diagonalna, to jej odwrotność jest równa odwrotności każdego z jej elementów na przekątnej.

2.1.2 Metoda Gaussa-Seidla

Metoda Gaussa-Seidla polega na wyznaczeniu kolejnych przybliżeń rozwiązania układu równań liniowych zgodnie ze wzorem:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k+1)} + D^{-1}b \quad (9)$$