# Praca domowa 6
# Klasyfikator Bayesa oraz K-NN

Damian Jankowski s188597

29 maja 2023

## 1 Wstęp

Celem pracy domowej było zapoznanie się z klasyfikatorem Bayesa oraz klasyfikatorem K-NN. W dziedzinie uczenia maszynowego klasyfikatory Bayesa i K-NN (k najbliższych sąsiadów) są często wykorzystywane do rozwiązywania problemów klasyfikacji. Klasyfikator Bayesa jest probabilistycznym modelem, który wykorzystuje twierdzenie Bayesa do obliczenia prawdopodobieństwa przynależności obserwacji do danej klasy. Klasyfikator K-NN natomiast jest modelem, który przypisuje nową obserwację do klasy najczęściej występującej wśród jej k najbliższych sąsiadów.

### 1.1 Klasyfikator Bayesa

Klasyfikator Bayesa oparty jest na twierdzeniu Bayesa, które jest podstawą teorii prawdopodobieństwa. Zakłada się, że obserwacje są niezależne i pochodzą z pewnego rozkładu prawdopodobieństwa. Klasyfikator Bayesa wykorzystuje te informacje, aby obliczyć prawdopodobieństwo przynależności danej obserwacji do poszczególnych klas.

Załóżmy, że mamy zbiór danych uczących składający się z obserwacji $d$ i odpowiadających im etykiet klas $C$. Klasyfikator Bayesa szacuje prawdopodobieństwo warunkowe $P(C_i|d)$, czyli prawdopodobieństwo przynależności i-tej klasy do obserwacji. Wykorzystuje przy tym twierdzenie Bayesa, które można zapisać jako:

$$P(C_i|d) = \frac{P(C_i)P(d|C_i)}{P(d)} \tag{1}$$

Po zamianie obserwacji $d$ na wektor cech $w$ otrzymujemy:

$$P(C_i|w_1, w_2, ..., w_n) = \frac{P(C_i)P(w_1, w_2, ..., w_n|C_i)}{P(w_1, w_2, ..., w_n)} \tag{2}$$

co można przedstawić w postaci:

$$P(C_i|w_1, w_2, ..., w_n) = \frac{P(C_i)\prod_{j=1}^{n} P(w_j|C_i)}{P(w_1, w_2, ..., w_n)} \tag{3}$$

gdzie:

- $P(C_i)$ - prawdopodobieństwo wystąpienia i-tej klasy, wyrażona jako stosunek liczby obserwacji ze znaną i-tą klasą do liczby wszystkich obserwacji należących do $m$ klas: $P(C_i) = \frac{|C_i|}{\sum_{j=1}^{m} |C_j|}$
- $P(w_j|C_i)$ - prawdopodobieństwo wystąpienia j-tej cechy w i-tej klasie, wyrażona jako stosunek liczby obserwacji z i-tą klasą, w których występuje j-ta cecha, do liczby wszystkich obserwacji z i-tą klasą: $P(w_j|C_i) = \frac{|w_j, C_i|}{|C|}$

By uniknąć problemu z zerowymi prawdopodobieństwami, które mogą wystąpić, gdy na przykład w zbiorze uczącym nie ma obserwacji z daną cechą, stosuje się wygładzanie Laplace'a. Polega ono na wyznaczeniu stosunku liczby wystąpień danej cechy w danej klasie powiększonej o 1, do liczby wszystkich cech w danej klasie powiększonej o liczbę wszystkich cech w zbiorze uczącym.

$$P(w_j|C_i) = \frac{|w_j, C_i| + 1}{|w, C_i| + |v|} \tag{4}$$

Po wyznaczeniu prawdopodobieństw warunkowych $P(C_i|w_1, w_2, ..., w_n)$ dla każdej klasy $C_i$ klasyfikator Bayesa przypisuje obserwację $d$ do klasy $C_i$, dla której prawdopodobieństwo warunkowe jest największe (z zasady maksimum a posteriori).

$$C_{pred} = \arg\max_i P(C_i|w_1, w_2, ..., w_n) \tag{5}$$

## 1.2 Klasyfikator K-NN

Klasyfikator K-NN przypisuje nową obserwację do klasy najczęściej występującej wśród jej k najbliższych sąsiadów. W tym celu wykorzystuje metrykę odległości, która określa odległość między dwoma obserwacjami. Najczęściej stosowaną metryką jest metryka euklidesowa, która dla dwóch obserwacji $d_1$ i $d_2$ wyraża się wzorem:

$$d(d_1, d_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_{1i} - d_{2i})^2} \tag{6}$$

gdzie:

- $d_{1i}$ - i-ta cecha obserwacji $d_1$
- $d_{2i}$ - i-ta cecha obserwacji $d_2$
- $n$ - liczba cech

Klasyfikator K-NN wyznacza k najbliższych sąsiadów dla danej obserwacji i przypisuje jej klasę, która występuje najczęściej wśród tych sąsiadów.

# 2 Przykładowe obliczenia

## 2.1 Klasyfikator Bayesa

Przygotowałem przykładowe dane do obliczeń. Zadaniem jest klasyfikacja obserwacji $d_6$ do jednej z 3 klas $C_1$, $C_2$ lub $C_3$.

Klasyfikator Bayesa

$$P(C_i) = \frac{|C_i|}{\sum_{j=1}^{m} |C_j|} \qquad \prod_{i=1}^{n} P(w_i|C) = \prod_{i=1}^{n} \frac{|(w_i, C)| + 1}{|(w, C)| + |U|}$$

| Klasa | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | $d_1$ |
| $C_2$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | $d_2$ |
| $C_2$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | $d_3$ |
| $C_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | $d_4$ |
| $C_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $d_5$ |

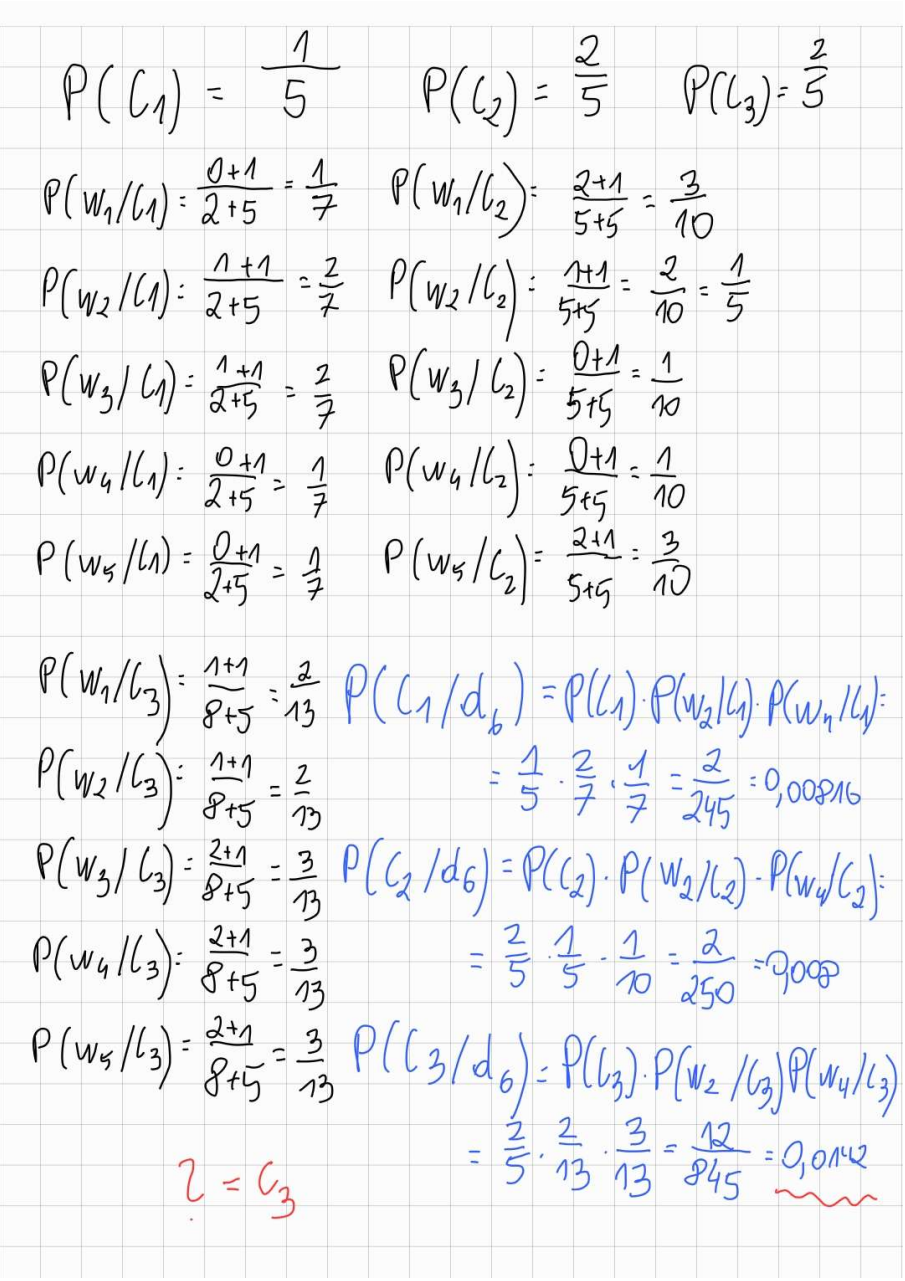
| Klasa | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2. | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | $d_6$ |

Korzystając z twierdzenia Bayesa wyznaczamy najpierw prawdopodobieństwa:

- wystąpienia każdej klasy $P(C_i)$
- wystąpienia każdej cechy w każdej klasie $P(w_j|C_i)$

Następnie wyznaczamy prawdopodobieństwa warunkowe $P(C_i|d_6)$, i przypisujemy obserwację $d_6$ do klasy, dla której prawdopodobieństwo warunkowe jest największe.

W tym przypadku obserwacja $d_6$ zostanie przypisana do klasy $C_3$.

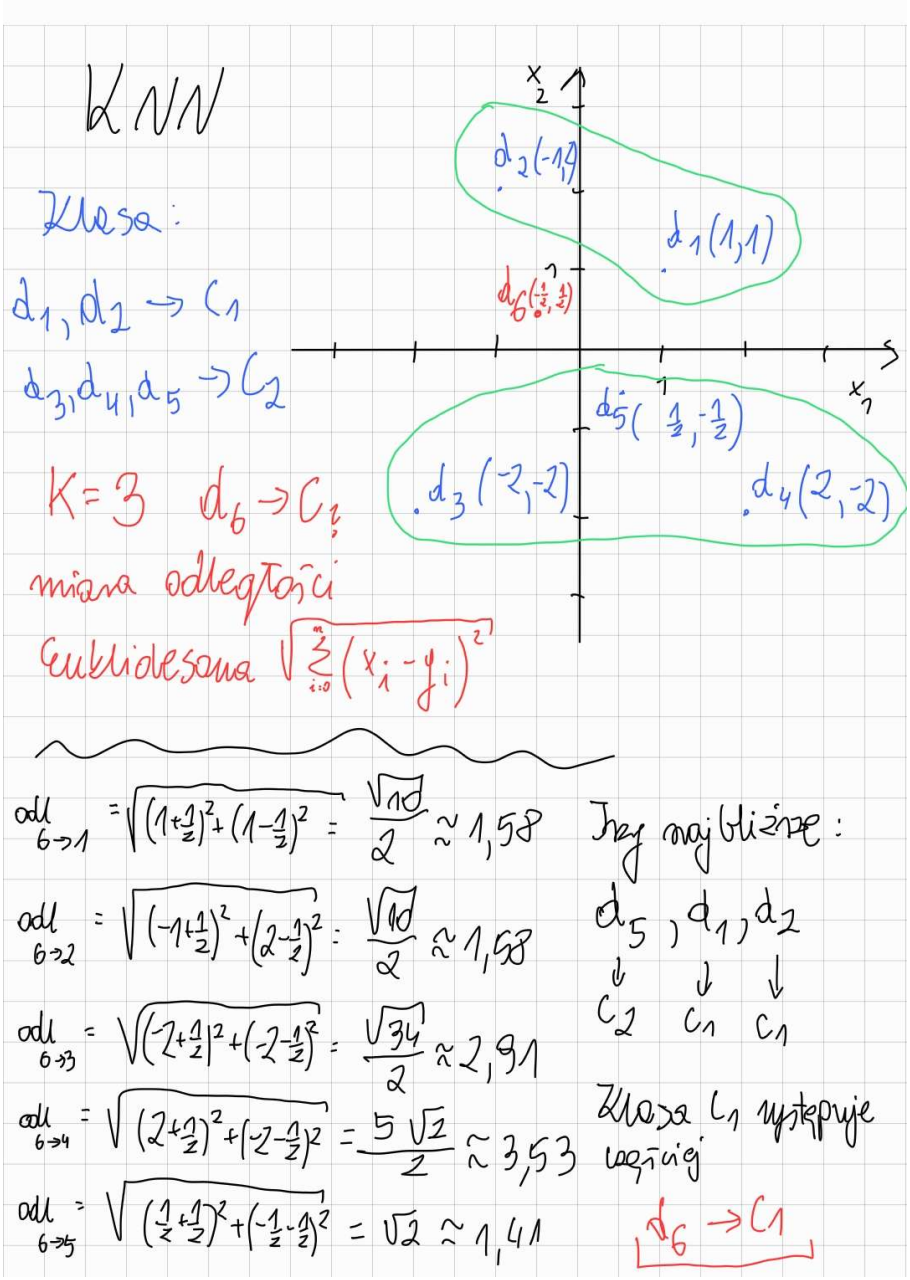


## 2.2 Klasyfikator K-NN

Wybrałem następujące punkty obserwacji:

- $d_1 = (1, 1)$ Klasa: $C_1$
- $d_2 = (-1, 2)$ Klasa: $C_1$
- $d_3 = (-2, -2)$ Klasa: $C_2$
- $d_4 = (2, -2)$ Klasa: $C_2$
- $d_5 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ Klasa: $C_2$

Zadaniem jest sklasyfikowanie obserwacji $d_6 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Za metrykę odległości przyjąłem metrykę euklidesową oraz $K = 3$.




Według tego modelu obserwacja $d_6$ zostanie przypisana do klasy $C_1$.