TERCERA PRUEBA DE ELECTROMAGNETISMO

NOMBRE: Felipe Pizarro **PJE.:** **NOTA:**

1. Dado el siguiente alambre, **ABCDEF**, que está compuesto por dos tramos rectos $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$; también por dos tramos circulares $\widehat{BC}$ y $\widehat{DE}$, cuyos radios son **"a"** y **"b"** respectivamente, por el cual circula una corriente **"I"**, cuya dirección y sentido están indicados en la **Figura 1.** Calcular el campo magnético resultante en el origen del sistema de coordenadas.

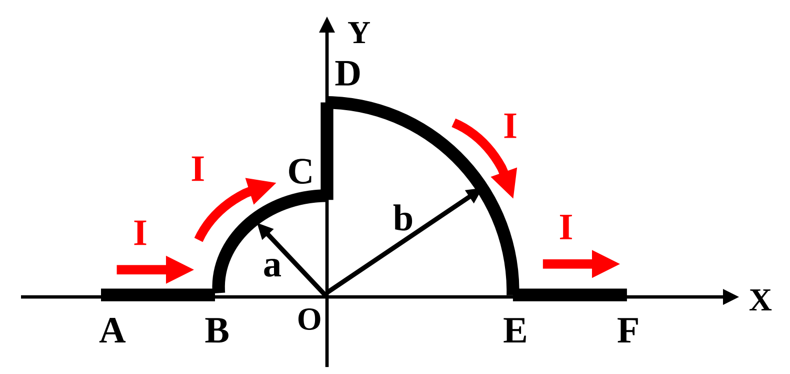


Figura 1

Aplicamos savart

$$\vec{B}_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\vec{dL}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$\vec{r} = 0\hat{i}+0\hat{j}$; $\vec{r}-\vec{r}\,' = -x\hat{i}$

$\vec{r}\,' = x\hat{i}$; $|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3 = (x^2)^{3/2}$

$\vec{dl} = dx\hat{i}$

$l \to A \to B$

$\vec{dl}\times(\vec{r}\times\vec{r}\,') = dx\hat{i}\; x\text{-}x\hat{i} = 0$

$\vec{B} = 0\hat{i}$ (T)

$\vec{B}_{BC} \Rightarrow \vec{r} = 0\hat{i}+0\hat{j}$

$\vec{r}\,' = a(\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j})$

$\vec{r}-\vec{r}\,' = a\cos\theta\,\hat{i} + a\sin\theta\,\hat{j}$

$|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3 = (a^2)^{3/2}$

$\vec{dL} = \overset{a}{r}d\theta(\cos(\theta-\pi/2)\hat{i} + \sin(\theta-\pi/2)\hat{j})$

$= a\,d\theta(\cos\theta\cos\pi/2 + \sin\theta\sin\pi/2)\hat{i} + (\sin\theta\cos\pi/2 - \sin\pi/2\cos\theta)\hat{j}$

$= a\,d\theta(\sin\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j})$

$$\vec{dL}\times\vec{r}-\vec{r}\,' \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a\sin\theta d\theta & -a\cos\theta d\theta & 0 \\ -a\cos\theta & -a\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}(-a^2\sin^2\theta d\theta - a^2\cos^2\theta d\theta)$$

$= -a^2 d\theta\,\hat{k}$; $\pi/2 \le \theta \le \pi$

$$\Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{-a^2\, d\theta}{(a^2)^{3/2}}\,\hat{k}$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\pi - \pi/2\right)\hat{k}$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\pi/2\right)\hat{k} \quad (T)$$

$\Rightarrow$ tramo C-D

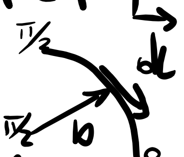
$$\left.\begin{array}{l} \vec{r} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} \\ \vec{r}\,' = y\hat{\jmath} \\ \vec{r} - \vec{r}\,' = -y\hat{\jmath} \\ |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 = y^3 \\ dL = dy\hat{\jmath} \end{array}\right\} \begin{array}{l} d\vec{L}\,\hat{\imath} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')\hat{\imath} = 0\hat{\imath} \\ dy\hat{\jmath} \times -y\hat{\jmath} = 0 \\ \vec{B}_{CD} = 0 \ (T) \end{array}$$

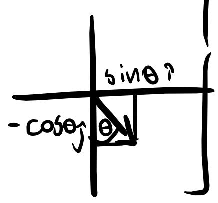
$\Rightarrow$ tramo D-E

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{r} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} \\ \vec{r}\,' = b(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}) \end{array}\right\} \vec{r} - \vec{r}\,' = -b\cos\theta\,\hat{\imath} - b\sin\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow b^3 = |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3$$

$\Rightarrow dL =$





$$d\vec{L} = b\,d\theta(\sin\theta\,\hat{\imath} - \cos\theta\,\hat{\jmath}) \Rightarrow d\vec{L} \times \vec{r} - \vec{r}\,'$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ b\sin\theta\, d\theta & -b\cos\theta & 0 \\ -b\cos\theta & -b\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = (-b^2 - b^2)\,\hat{k}$$

$$(-2b^2)\,\hat{k}$$

$$B_{DE} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{-2b^2\, d\theta\, \hat{k}}{b^3} \Rightarrow -\frac{2\mu_0 I}{4\pi b}\int_0^{\pi/2} d\theta\, (\hat{k}) = \boxed{-\frac{\mu_0 I}{4b}}\,\hat{k}\ (T)$$

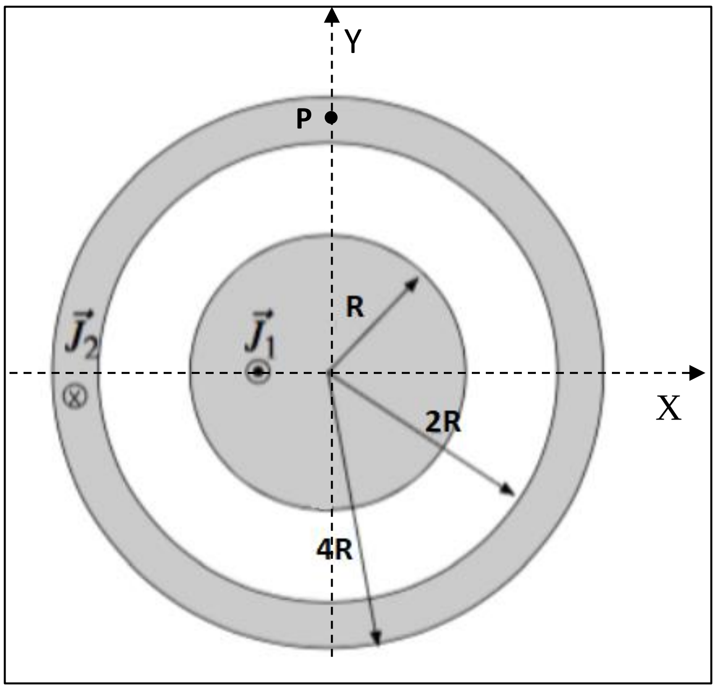
$\Rightarrow$ tramo E - F

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} \\ \vec{r}\,' = x\hat{\imath} \end{array}\right\} \vec{r} - \vec{r}\,' = -x\hat{\imath} \Big\} |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 = x^3 \Big\} \quad B_{E-F} = \emptyset \ (T)$$

$$d\vec{L} = dx\,\hat{\imath} \Rightarrow d\vec{L}\,\hat{\imath} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')\hat{\imath} = 0$$

$$\vec{B}_{res} = \left(-\frac{\mu_0 I}{8a} - \frac{\mu_0 I}{4b}\right)\hat{k} \quad (T)$$

2. Un cable coaxial es creado a partir de un cilindro solido de radio **R**. Dicho cilindro es rodeado por un cascaron conductor (de la misma geometría) concéntrico de radio interior **2R** y exterior 4**R**. El conductor interior tiene una densidad de corriente dada por: $\vec{J_1} = Ar^2(\hat{k})$, donde A es constante. El cilindro exterior tiene una densidad de corriente: $\vec{J_2} = \frac{B}{r}(-\hat{k})$ donde B es una constante positiva. Los conductores transportan una corriente igual y opuesta de magnitud I_0. Entre ambos conductores hay vacío. Determine:
   a) Los valores **A** y **B** en término de **R** y de la corriente I_0 y sus respectivas magnitudes físicas.
   b) El vector campo magnético en **P** que se encuentra a **3R** del centro.



$I = \int \vec{J}\, d\vec{s}$

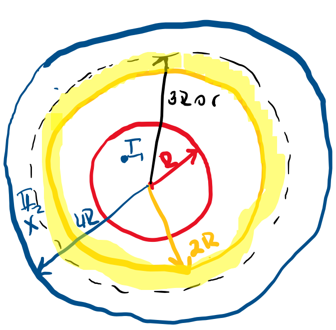
$J_1 = Ar^2(\hat{k}) \Rightarrow J \neq cte$

$I_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} Ar^2(r\,d\theta\,dr) \Rightarrow 2A\pi \int_0^R r^3 dr \Rightarrow 2A\pi\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^R \Rightarrow \frac{A\pi R^4}{2}(\hat{k}) = I_1$

$I_2 = \int_{2R}^{4R}\int_0^{2\pi} \frac{B}{\cancel{r}}(-\hat{k})\,\cancel{r}\,d\theta\,dr \Rightarrow B2\pi(2R) = 4R\pi B(-\hat{k})$

a) $I_0 = I_1 \Rightarrow A = \frac{2I_0}{\pi R^4}(-\hat{k})$

$I_0 = I_2 \Rightarrow B = \frac{I_0}{4R\pi}(\hat{k})$



$\Rightarrow I_{enc} = I_1 - I_2$

$I_1 = \frac{A\pi R^4}{2}$

$I_2 \Rightarrow J \neq cte \Rightarrow \frac{I_{enc2}}{A_{enc2}} = \frac{I_{T2}}{A_{T2}}$

$\Rightarrow I_{enc} = \frac{I_{T2}\cdot A_{enc}}{A_{T2}} = \frac{(4R\pi B \cdot \cancel{\pi} r^2)}{\cancel{\pi}(4R)^2} = \frac{\pi B r^2}{4R}$

Luego

$$I_{enc} = I_1 - I_2'$$

$$I_{enc} = \frac{A\pi R^4}{2} - \frac{\pi B r^2}{4R}$$

Por Ampere

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0\left(\frac{A\pi R^4}{2} - \frac{\pi B r^2}{4R}\right)$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\cancel{\pi} r}\left(\frac{A\cancel{\pi} R^4}{2} - \frac{\cancel{\pi} B r^2}{4R}\right)$$

$$\Rightarrow B(r=3R) = \frac{\mu_0}{2(3R)}\left(\frac{AR^4}{2} - \frac{B(3R)^2}{4R}\right) \ (T)$$

reemplazando $A = \dfrac{2I_0}{\pi R^4} \wedge B = I_0/4R\pi$

b) $$\Rightarrow B = \frac{\mu_0}{6R}\left(\frac{I_0}{\pi} - \frac{I_0}{4R\pi}\left(\frac{3R^2}{4R}\right)\right) \ (T)$$

Puntaje Total: 60 puntos
Puntaje Nota 4,0: 36 puntos