Ayudantía N° 2 Estadística 2020-01

Profesores: Lucia Morales, Andres Olivares
Ayudantes: Mariana Callejas, Felipe Cavieres, Benjamín González.

<u>Bayes y Ley de la Probabilidad Total</u>

Resumen Bayes:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P\left(\frac{B}{A}\right) \times P(A)}{P(B)}$$

Resumen Ley de probabilidad total:

$$P(C) = P\left(\frac{C}{A}\right) \times P(A) + P\left(\frac{C}{B}\right) \times P(B)$$

Ejercicios Resueltos:

1) El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que los no ingenieros y los no economistas solamente el 20% ocupa un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?

   Datos:
   A=que sea ingeniero
   B=que sea economista
   C=que sea otro
   D=directivo
   P(A)=0,2
   P(B)=0,2
   P(C)=0,6
   P(D/A) =0,75
   P(D/B) =0,5
   P(D/C) =0,2

   Se busca P(A/D) para eso se utilizará el teorema de Bayes
   P(A/D)=(P(D/A))/(P(D))
   Para encontrar la probabilidad de D se utilizará la ley de la probabilidad total

   P(D)=P(A)*P(D/A)+P(B)*P(D/B)+P(C)*P(D/C)
   P(D)=0,2*0,75+0,2*0,5+0,6*0,2
   P(D)=0,37

Por lo tanto, la probabilidad de que sea ingeniero dado que es directivo es P(A/D)=(0,2*0,75)/0,37=0,4054

2) En la ganadera Rio Claro, se preparan para que los animales puedan obtener inmunidad contra distintas bacterias, esta inmunidad puede ser producida por tres tipos de Virus A, B y C. En el laboratorio se tienen tres tubos con los Virus A, dos con el Virus B y cinco con el Virus C. La probabilidad de que el virus A produzca la inmunidad contra la Bacteria 1 es de 1/3, que la produzca B es de 2/3 y que la produzca C es de 1/7. Por otro lado, la inmunidad para la Bacteria 2 tiene las probabilidades de 2/5, 3/4 y 1/3 utilizando los virus A, B y C respectivamente.

Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la Probabilidad de que no se genere inmunidad para la Bacteria 1? (5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de generar simultáneamente Inmunidad para las Bacterias 1 y 2? (5 puntos)

c) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un vacuno inmunizado al azar (por las dos bacterias) y que el virus A haya hecho efecto? (5 puntos)

a)

$P(I_1^C) = P(I_1^C/A)*P(A) + P(I_1^C/B)*P(B) + P(I_1^C/C)*P(C)$

$= (2/3)(3/10) + (1/3)*(2/10) + (6/7)*(5/10)$

$= 73/105 = 0,6952$

b)

$P(I_1 \cap I_2) = P(I_1/A)*P(I_2/A)*P(A) + P(I_1/B)P(I_2/B)*P(B) + P(I_1/C)*P(I_2/C)*P(C)$

$= (1/3)*(2/5)*(3/10) + (2/3)*(3/4)*(2/10) + (1/7)*(1/3)*(5/10)$

$= 85/525 = 0,1638$

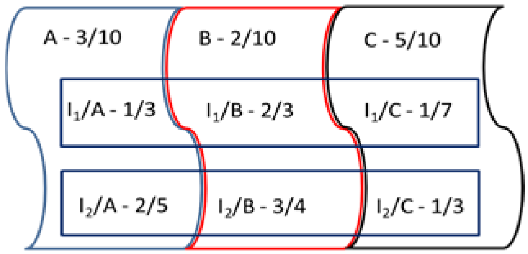
c)

$P(A / I_1 \cap I_2) = P(I_1 \cap I_2/A)*P(A) / P(I_1 \cap I_2)$

$P(A / I_1 \cap I_2) = P(I_1/A)\ P(I_2/A)*P(A) / P(I_1 \cap I_2)$

$= ((1/3)*(2/5)*(3/10)) / (85/525)$

$= 21/86 = 0,2442$



3)El dueño de una cadena de pasteles recibe distintos pedidos a sus distintas sucursales , entre las cuales destacan las más populares ; Pasteleria dulces, Pasteleria salados o Pasteleria mixtos, en una proporción de 22.5%, 30,5% y 47% respectivamente. Se tiene información de que se los pedidos se han quejado en un 3.2%, 2,1% y 5% respectivamente.

Si se selecciona a un pedido al azar ¿cuál es la probabilidad de que no se haya quejado?

Si se selecciona a un pedido al azar y se evidencia que, no se quejó del servicio prestado, ¿cuál es la probabilidad de que se haya realizado el pedido en la pastelería salado?

Si el visitante seleccionado se quejó del servicio prestado, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido en la pastelería mixto?

Si un visitante se quejó del servicio recibido ¿cuál es la probabilidad de que el visitante (seleccionado al azar) no haya pedido en la pastelería dulce?

NQ = no se queja del pedido

Q = evento de que se queje del pedido

D = pedido de la pastelería Dulce

S = pedido de la pastelería Salado

M = pedido de la pastelería Mixtos

a. P(NQ) = P(D)P(NQD) + P(S)P(NQS) + P(M)P(NQM)

= 0.225*0.968 + 0.305*0.979 + 0.47*0.95

= 0.9628

La probabilidad de que no se le haya dado un mal servicio es de un 96,28%

b.

P(SNQ)=P(SNQ)/P(NQ)

=(0.305*0.979)/0.9628

= 0.31013

La probabilidad de que no se haya quejado siendo que realizo el pedido a la pastelería Salado es de un 31,01%

c.

P(MQ) = P(MQ)/P(Q)

= 0.47*0.05/(1-0.9628)

=0,6317

La probabilidad de que se haya quejado siendo realizo el pedido a la pastelería Mixto es de un 63,17%

d.

P(Dc / Q) = P(S Q)/P(Q) + P(M Q)/P(Q)

= 0,1648

La probabilidad de que se haya quejado un visitante siendo que no realizo el pedido en la pastelería Dulce es de un 16,48%

4)

2. El departamento de personal de una gran empresa ha descubierto que solo un 60 % de los candidatos entrevistados están realmente calificados (C) para asumir un cargo de analista de recursos humanos en esta empresa. Una revisión de los registros de la empresa muestra que de quienes estaban calificados, un 60 % tenía una capacitación previa en Estadística (E), mientras que solo el 20 % de quienes no estaban calificados había sido capacitado previamente en Estadística. El director de personal puede observar claramente que dado que una persona está calificada, es más probable que esta persona tenga una capacitación previa en Estadística que si no está calificado. Se pierde mucho tiempo entrevistando a candidatos que resultaron no estar calificados; sin embargo el director está considerando entrevistar solo a quienes han tenido una capacitación previa en Estadística. Con esto el director espera incrementar la probabilidad de encontrar candidatos calificados para ocupar el cargo de analista. De acuerdo a lo planteado:

a) Formule el problema definiendo las variables y las hipótesis a considerar en la solución
b) ¿Es más probable que un candidato que ha tenido capacitación en Estadística califique?
c) Emita sus conclusiones respecto de la idea del director de optimizar el tiempo

a) Sean los sucesos siguientes:

C = el candidato está calificado para el cargo

E = El candidato tiene capacitación previa en Estadística

P(C) = 0.60 ; P(E/C) = 0.67 ; P(E/C^c) = 0.20 Importante: 0.67 > 0.20

C y C^c son sucesos disjuntos y particionan el espacio mestral S (Total de candidatos)

E es un suceso que tiene intersección no vacía con C y con C^c

Por lo tanto se cumplen las hipótesis de la probabilidad total y Teorema de Bayes

b)

$$P(C/E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{P(C)\,P(E/C)}{P(E)} = \frac{(0.60)(0.67)}{P(E)}$$

Ahora:

$$P(E) = P(C)P(C/E) + P(C^c)\,P(E/C^c) = (0.60)(0.67) + (0.40)(0.20) = 0.482$$

$$P(C/E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{P(C)\,P(E/C)}{P(E)} = \frac{(0.60)(0.67)}{P(E)} = \frac{(0.60)(0.67)}{0.482} = 0.834$$

Entonces se tiene que: P(C) = 0.60 y P(C /E) = 0.834

c) Conclusión

Para aumentar la probabilidad de entrevistar solo candidatos calificados, el departamento de personal debería entrevistar solamente a los candidatos con capacitación previa en análisis Estadístico

Teoría de Conjuntos

Resumen:

Propiedades

$$P(\emptyset) = 0$$
$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(A^C) = 1 - P(A)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$Si\ A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$Si\ B \subset A \Longrightarrow P(A \cap B^C) = P(A) - P(B)$$

Eventos Mutuamente Excluyentes: Cuando una colección de k eventos no tienen resultados en común se dice que son eventos mutuamente excluyentes o disjuntos.

$$A_1 \cap A_2 \cap \ \ldots \ \cap A_k = \emptyset$$

Eventos Exhaustivos: Cuando una colección de k eventos tiene como resultado todos los elementos del espacio muestral se dice que son eventos exhaustivos.

$$A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \ \cup A_k = S$$

Leyes de Morgan:

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$
$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

Ejercicios Resueltos:

1) Un inversionista estima que la probabilidad de que un proyecto sea rentables es de 0.65.Para asegurarse contrata los servicios de dos analistas externos que evalúan el proyecto en forma independiente. El historial del analista 1, permite suponer que evaluará el proyecto como rentable, cuando en realidad lo sea con probabilidad de 0,9 mientras que la probabilidad que lo evalúe como rentable cuando no lo es, es de 0.05. El historial del analista 2 garantiza que evalúa como rentables proyectos que sí lo sean un 85% de las veces y evalúa cómo rentables aquellos que no son en un 10%
    a) Determine la probabilidad de que ambos analistas evalúen el proyecto como rentable.
    b) Si el proyecto se evaluó rentable para ambos analistas, determine la probabilidad de que sea rentable.
    c) Si el proyecto resultó rentable, determine la probabilidad de que al menos un analista haya acertado.

DEFINIR EVENTOS

R {El proyecto sea Rentable}

RC {El proyecto NO es Rentable}

ER1 {Analista 1 Evalúa como Rentable}

ER2 {Analista 2 Evalúa como Rentable}

a) Determine la probabilidad de que ambos analistas evalúen el proyecto como rentable.

$P(ER1 \cap ER2) = P(ER1 \cap ER2 / R) * P(R) + P(ER1 \cap ER2 / Rc) * P(RC)$

$P(ER1 \cap ER2) = P(ER1/R) * P(ER2/R) * P(R) + P(ER1/Rc) * P(ER2/Rc) * P(RC)$

$P(ER1 \cap ER2) = 0{,}90*0{,}85*0{,}65 + 0{,}05*0{,}10*0{,}35$

$P(ER1 \cap ER2)$ 0,499

b) Si el proyecto se evaluó rentable por ambos analistas, determine la probabilidad de que sea rentable.

$P(R/ ER1 \cap ER2) =$ $P(ER1 \cap ER2 / R) * P(R)$

$P(ER1 \cap ER2)$

$= P(ER1/R) * P(ER2/R) * P(R)$

$P(ER1 \cap ER2)$

$= 0{,}90*0{,}85*0{,}65$

$P(R/ER1 \cap ER2) =$ 0,99649299

c) Si el proyecto resultó rentable, determine la probabilidad de que al menos un analista haya acertado.

$$P(ER1 \cup ER2\ /R) = P(ER1\ /R) + P(ER2\ /R) - P(ER1 \cap ER2/R)$$

$$= P(ER1\ /R) + P(ER2\ /R) - P(ER1/R\ ) * P(ER2/R)$$

$$= 0{,}90 + 0{,}85 - 0{,}90*0{,}85$$

$$0{,}9850$$

2) En una sala existe un cierto número de alumnos que hemos de determinar. Se sabe que cada uno de los alumnos estudia al menos una de las tres asignaturas siguientes: Matemáticas, Física y Química. En una encuesta realizada por el director se obtuvieron los siguientes resultados:

a) Matemáticas 48

b) Física 45

c) Química 49

d) Matemática y física 28

e) Matemática y química 26

f) Física y química 28

g) Matemática, física y química 18

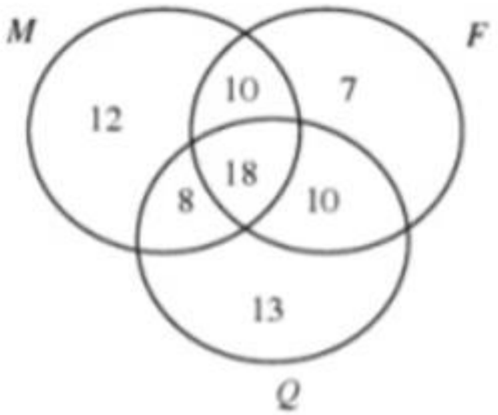
Entonces se requiere saber:

1°) ¿Cuántos alumnos hay en la sala?

2°) ¿Cuántos estudian matemática y física, pero no química?

3°) ¿Cuántos estudian solo química? ¿Y solo matemáticas?

Desarrollo



Luego para saber cuántos alumnos hay en la sala se utiliza la propiedad

P(M U F U Q)=P(M)+P(F) +P(Q)-P(M U F)-P(M U Q)-P(F U Q)+P(M U F U Q)

= 48 +45+49-28-26-28+18

=78

1°) En la sala hay 78 estudiantes.

2°) 10 alumnos estudian matemática y física

3°) 13 alumnos estudian sólo química y 12 alumnos estudian sólo matemáticas.

3) En una encuesta sobre consumo de bebestibles, se obtuvieron los siguientes datos:

a) 67% beben Alcohol o Bebidas, y 13% beben ambas.

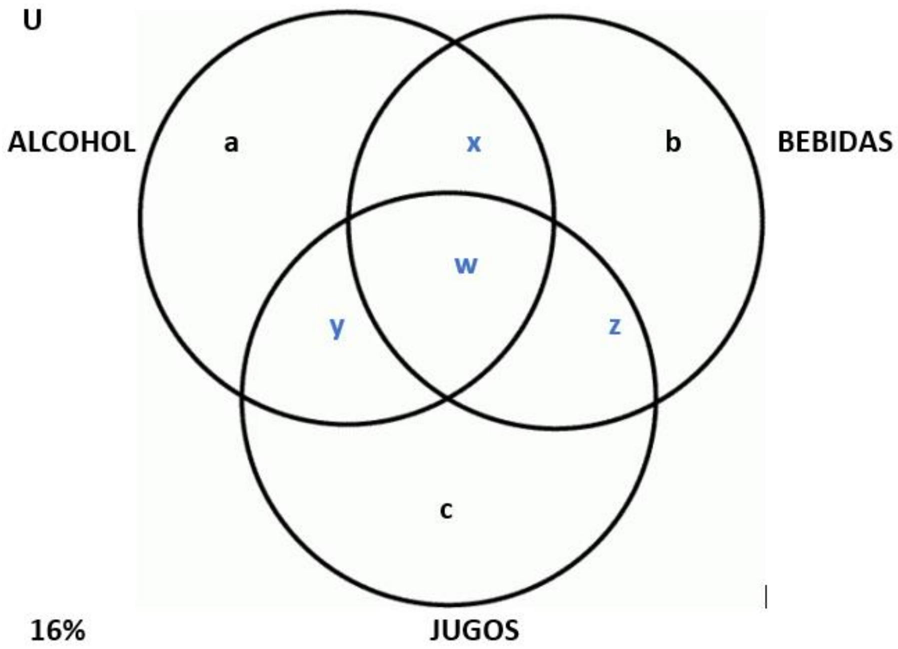
b) 59% beben Bebidas o Jugos y 11% beben ambas.

c) 75% beben Alcohol o Jugos y 15% beben ambas.

d) el 16% no consume ninguno de los anteriores.

1°) Determine el porcentaje que beben las tres opciones.

2°) Calcular el porcentaje de la suma de los que consumen sólo una opción.



Se tiene que

I. **a**+**b**+x+y+z+w =67%

*x+w=13%

II. **b**+**c** +x+y+z+w=59%

*w+z=11%

III. **a**+**c**+x+y+z+w=75%

*w+y=15%

luego haciendo sistema de ecuación i. ii. Y iii.con los (*) Quedan las siguientes ecuaciones

a+b+y+z=54%

b+c+x+y=48%

a+c+x+z=60%

sumando estas tres ecuaciones nos queda

a+b+c+x+y+z=81%

Para encontrar las otras ecuaciones se hace un sistema de ecuación con solo los (*)

X+y+z+3w=39%

Finalmente, la última ecuación se calcula del universo

a+b+c+x+y+w+z+16%=100%

$a+b+c+x+y+z+w=84\%$ y comparándola con la ecuación

$a+b+c+x+y+z=81\%$ se obtiene que $w=3\%$

El porcentaje que consume las tres opciones es 3%

$X+y+z+3*3\%=39\%$

Por lo tanto $x+y+z=30\%$

Entonces $a+b+c+30\%=81\%$

$a+b+c=51\%$

4) Las asistentes de limpieza de una región están preocupadas por la calidad de limpieza de sus pisos, ya que se ha detectado en ciertas áreas la existencia de sustancias contaminantes en el suelo. Para analizarla, se segmenta por plantas de de 5 m2, y se concluye que hay una probabilidad de 0.6 de encontrar estos contaminantes en una determinada planta. Se pide:

a) Si una asistente debe limpiar 15 de estas plantas. ¿Qué probabilidad hay de que tenga alguna contaminada? (aproximadamente)

   a) 0%

   b) 25%

   c) 50%

   d) 100%

b) Una corporativa posee 200 pisos del tipo anterior. ¿Qué probabilidad hay de que tenga entre 100 y 150 pisos contaminados?

   a) 97.74%

   b) 98.74%

   c) 99.74%

   d) 100%

c) Si por cada piso contaminada la corporativa sufre unas pérdidas de 1000 pesos, ¿cuál es la perdida que la cooperativa espera tener?

   a) $90.000

   b) $60.000

   c) $120.000

   d) $150.000

5) Supóngase que las reparaciones de componentes eléctricos de cierta compañía se distribuyen normalmente con media m = US $35 y una desviación estándar s = US $5. Supóngase, además que la duración de la reparación de estos componentes se distribuye normalmente, con media m = 20 años y varianza s^2=16 años^2

a) Si se realiza una venta de a lo más US $40 y la duración de reparación de un componente es a lo menos 16 años. Calcular la probabilidad de que ambos sucesos ocurran simultáneamente. (Suponga independencia entre los sucesos)

a) 13.35%

b) 70.79%

c) 99.99%

d) 75.25%

b) Si se conserva la varianza de la distribución de las ventas de la compañía, ¿cuál debe ser la nueva media de las ventas si se desea que el 15% de las ventas sea de a lo menos US $50? (aproximadamente)

a) 42

b) 43

c) 44

d) 45

c) Si se selecciona una muestra aleatoria de 50 componentes, ¿cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 componentes (inclusive) duren al menos 16 años?

a) 26.29%

b) 88.16%

c) 70.79%

d) 78.35%