Capítulo 1

Lógica Proposicional.

1.1. Nota Preliminar.

Nos proponemos estudiar lógica.

Por qué la lógica.

La Lógica en el currículum.

Lógica Matemática.

La Lógica Matemática es enteramente simbólica, usa signos artificiales para convertir la argumentación en una suerte de cálculo al estilo algebraico; las reglas de las operaciones que se realiza se refieren a la forma de los signos (artificiales) y no a su sentido.

Vamos a estudiar la lógica Matemática en varias partes o niveles de lenguaje:

En el primer capítulo, veremos Lógica Proposicional.
En el capítulo 2, estudiaremos los Cuantificadores.
El capítulo 3 está destinado a la llamada Teoría de Conjuntos.

Para mayor comodidad y mejor comprensión, la aproximación que utilizaremos se basará en los llamados *valores de verdad*.

Plan del estudio.

En primer lugar hacemos una descripción de los elementos que constituyen la Lógica Proposicional: los *símbolos*, las *proposiciones* y su clasificación.

En segundo término estudiamos las *tautologías* fundamentales.

En tercer lugar analizamos los diversos métodos de demostración que se usa en la Lógica y en la Matemática.

Al final estudiamos lo que se llama el *álgebra de proposiciones*, es decir, cómo se manipula las proposiciones en un cálculo simbólico.

1.2. Descripción básica.

En esta sección, escribiremos con todo detalle las definiciones y los símbolos básicos que utilizaremos. Lo más importante está resumido en la tabla general al final de la sección.

1.2.1. Proposiciones.

Entenderemos por proposición una expresión acerca de la cual tiene sentido preguntarse si es *verdadera* o *falsa*.

Una proposición, entonces, corresponde, en español, a oraciones, esto es frases completas.

Ejemplo 1 *A manera de ilustración:*

1. *(En español)*

   a) El gato es café *es una proposición, pero*

   b) el gato café desdeñoso y cobarde *no lo es*
   –a la segunda expresión le falta un verbo–.

2. *(Simbólicamente)*

   a) *Son proposiciones expresiones tales como*
   $2 = 5$, $4 + \sqrt{7} < 5$, $\ell \perp \ell'$, *la recta* ℓ *pasa por el punto* P;

   b) *sin embargo,* $\sqrt[3]{8} + \pi$, $\frac{31}{4} - (5-2)^4$ *y similares*
   no son proposiciones, pues no hay afirmación,
   –no tiene sentido preguntarse acerca de su veracidad o falsedad–.

Observación 2 *Más adelante se estudiará el caso de expresiones abiertas, del tipo* $x + 3 = 5$, *que no son proposiciones –allí,* x *es una especie de espacio en blanco; sólo si se reemplaza* x *por un número, da una proposición, verdadera o falsa de acuerdo al número en cuestión–.*

1.2.2. Simbología.

Los símbolos básicos que se utilizará son:

Notación 3 *Las letras minúsculas* $p, q, r, \ldots$ *para denotar proposiciones;*
los conectivos $-$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\veebar$, *cuyo uso se detalla a continuación,*
y los paréntesis $(\ldots)$, *y* $[\ldots]$, *para separar expresiones.*

Usaremos además el símbolo informal " : " *para definir proposiciones específicas.*

Ejemplo 4 *Así,* $p : 2 > 5$
indica que la proposición p *es la afirmación de que* 2 *es mayor que* 5

1.2.3. Comentario.

Según se describe a continuación, si p es una proposición y q es una proposición, entonces sólo son proposiciones las expresiones que se construye con los conectivos:
$\overline{p},\ p \wedge q,\ p \vee q,\ p \Rightarrow q,\ p \Leftrightarrow q,\ p \veebar q,$
son proposiciones.

Esto significa que, por ejemplo,
$\left(\overline{((p \wedge q) \wedge r)} \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)\right)$ es una proposición,
pero no lo son $p \wedge \Leftrightarrow q$, ni pq, ni $p + q$, etc.

1.2.4. Tablas de verdad.

Para evitar ambigüedades, definiremos el uso de los símbolos mediante *tablas de verdad.*

Dichas tablas establecen todas las posibles combinaciones de valores de verdad (V, "verdadero", y F, "falso"), de las proposiciones que constituyen las expresiones que se define (o que se analiza, según se verá más adelante).

1.2.5. Los conectivos.

Negación.

Definición 5

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

Observación 6 *(En español:) Es decir, $\overline{p}$ es una proposición que es falsa cuando p es verdadera, y verdadera cada vez que p es falsa.*

($\overline{p}$ se escribe también, a veces, $\sim p$).

$$\overline{p} \text{ se lee } \text{"no } p\text{"}.$$

Ejemplo 7 *Si p : voy al cine, entonces su negación es*
$\overline{p}$: no voy al cine.

Simple, pero no debe confundirse $\overline{p}$ con lo contrario de p. (La negación de *Juan es rico* no es *Juan es pobre*).

Alguna sutileza adicional en el uso de la negación se verá a propósito de los cuantificadores, más adelante.

Disyunción.

Definición 8 *(Disyunción inclusiva, disyunción no-excluyente).*

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observación 9 *(En español:) Es decir, si p y q son proposiciones, entonces $p \vee q$ es una proposición que es verdadera cuando p es verdadera; cuando q es verdadera, y cuando p y q son ambas verdaderas (a la vez). (Note que la versión en español no distingue entre $p \vee q$ y $q \vee p$).*

$$p \vee q \textit{ se lee } \text{"(o bien) } p \text{ o (bien) } q\text{"}.$$

(El símbolo $\vee$ proviene de la letra v de la palabra latina *vel*).

El uso de este conectivo corresponde al de la expresión y/o que suele ocurrir en nuestro idioma (por ejemplo, en dicumentos legales).

Ejemplo 10 *Note que:*

1. *El sentido de la disyunción inclusiva es el que se encuentra en la expresión* como pan amasado o escucho música.

2. *Por el contrario, en la frase* ser o no ser, *no se usa éste sino otro conectivo, el de* disyunción excluyente, *que veremos más adelante.*

3. *La proposición* $(6 > 2) \vee (6 < 4)$ *es verdadera (en la teoría habitual de números).*

Conjunción.

Definición 11

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Observación 12 *(En español): Si p y q son proposiciones, entonces $p \wedge q$ es una proposición que es verdadera cuando y solamente cuando p y q son ambas verdaderas (a la vez).*

$$p \wedge q \textit{ se lee } \text{"}p \text{ y } q\text{"}.$$

(Tampoco aquí la versión en español distingue entre $p \wedge q$ y $q \wedge p$) .

Ejemplo 13 *(Aclaración)*

1. *En el uso corriente,* $\wedge$ *puede aparecer como:* pero, aunque, aún, también, sin embargo, más aún, *–etcétera–.*

2. $2 > 0 \wedge 3 < 0$ *es una proposición falsa.*

Implicación.

Definición 14 *(Condicional) Si* p *y* q *son proposiciones, entonces la proposición* $\overline{p} \vee q$ *se abrevia* $p \Rightarrow q$.

La tabla de verdad correspondiente se puede ahora calcular.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

De manera que la tabla que define la implicación es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observación 15 *(En español:) Si* p *y* q *son proposiciones, entonces* $p \Rightarrow q$ *es una proposición que es falsa cuando y sólo cuando (a la vez)* p *es verdadera y* q *es falsa.*

$p \Rightarrow q$ *se lee:*

p implica q,
si p (entonces) q,
p sólo si q,
p es condición suficiente para q,
q es condición necesaria para p.

Se dice además que p es el antecedente y el consecuente de la implicación. (No trate de memorizar ahora todas estas variantes, pues le distraerán del estudio; intente, mejor, ir reconociendo, en el uso mismo, estas maneras de decir. Lo relevante está en la tabla de verdad).

Ejemplo 16 *Se tiene:*

1. $1 + 2 = 3 \Rightarrow 4 + 5 = 9$ *es una proposición verdadera,*

2. $1 + 2 = 3 \Rightarrow 4 + 5 = 8$ *es una proposición falsa,*

3. $1 + 2 = 6 \Rightarrow 4 + 5 = 9$ *es una proposición verdadera,*

4. $1 + 2 = 6 \Rightarrow 4 + 5 = 8$ *es una proposición verdadera.*

Observación 17 *(Comentario).*

Es importante notar que $p \Rightarrow q$ no afirma nada acerca de p, ni acerca de q, sino que explica una cierta "relación" (dicho de un modo vago) entre p y q.

Note además que, dado que $p \Rightarrow q$ es una proposición, la expresión "Si $p \Rightarrow q$" es sólo una frase trunca. (En otras palabras, el signo $\Rightarrow$ no es una abreviatura de entonces*. Evite esa mala costumbre).*

Observación 18 *(Aclaración).*

La tabla de verdad de la implicación puede aparecer un tanto extraña a primera vista, pero es completamente natural y tiene más de dos mil años de vigencia.

Por otra parte, la siguiente ilustración muestra el hecho que usted seguramente viene usando el concepto de implicación desde hace bastante tiempo: Suponga de usted tiene unos 4 años y su tía le promete:

Si te tomas la sopa, (entonces) te compraré un helado.

¿Cuál sería el único caso en que usted reclamaría? En otras palabras, ¿Cuándo consideraría usted que no se ha cumplido el compromiso? Es claro que únicamente en el caso señalado como falso en la tabla. (Note que la frase no dice: Sólo si te tomas ...*).*

Observación 19 *(En español:) Según se ha sugerido en el ejemplo anterior, la estructura de la implicación aparece en frases del tipo* Si llueve, *(entonces)* mi jardín se moja. *Pero expresiones tales como* Hay torta, si quieres *no constituyen implicaciones.*

Note al pasar que es posible que efectivamente llueva y que, por alguna circunstancia, su jardín no se moje (puede usted pensar una media docena, como ejercicio de atención). Ello contrasta en forma notoria con el carácter necesario, inevitable, indispensable, insoslayable, inapelable, que tiene una implicación en una teoría matemática.

Observación 20 *Si p, q son proposiciones, y se tiene la implicación $p \Rightarrow q$, para referirse a las diferentes alternativas que puede darse, suele decirse que*

1. $p \Rightarrow q$ *es la implicación* directa,

2. $q \Rightarrow p$ *es la implicación* recíproca,

3. $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ *es la implicación* contraria *y*

4. $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ *es la implicación* contrapuesta *o* contra-recíproca.

Equivalencia

Definición 21 *(Equivalencia lógica, doble implicación, bi-condicional).*
Si p y q son proposiciones, $p \Leftrightarrow q$ es una abreviatura para escribir $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Así, la tabla de verdad de la equivalencia es:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Es decir

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Observación 22 *(En español:) Si p y q son proposiciones, $p \Leftrightarrow q$ es una proposición que es verdadera precisamente cuando los valores de verdad de p y de q coinciden.*
$p \Leftrightarrow q$ se lee

p si y sólo si q,
p es condición necesaria y suficiente para q,
p es equivalente a (con) q.

Informalmente, se escribe a veces p ssi *q.*

Ejemplo 23 *(Ilustración)*

1. *En el lenguaje coloquial, la doble implicación puede aparecer en frases al estilo de*

   Me da lo mismo ir a la ópera que al ballet,

   o bien, si quiero me pongo el chaleco, y si no, no.

2. *Las proposiciones*

   $(2 + 1 = 3) \Leftrightarrow (2 + 5 = 7)$ *y* $(2 + 1 = 4) \Leftrightarrow (2 + 5 = 8)$

   son ambas verdaderas.

Disyunción excluyente.

Definición 24 *(Disyunción exclusiva).*
Si p y q son proposiciones, la expresión $p \veebar q$ es una abreviatura de la proposición
$(p \vee q) \wedge \overline{p \wedge q}$.

De tal manera, su tabla de verdad se calcula como sigue:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$(p \vee q) \wedge \overline{p \wedge q}$
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

Esto es,

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observación 25 *(En español:) Si p y q son proposiciones, entonces $p \veebar q$ es una proposición que es verdadera precisamente cuando los valores de verdad de p y de q no coinciden. En otras palabras, $p \veebar q$ es verdadera si se tiene que sólo p es verdadera, o se tiene que sólo q es verdadera, pero no cuando ambas son verdaderas ni cuando ambas son falsas.*

Ejemplo 26 *(Ilustración)*

1. Tráiganlo vivo o (tráiganlo) muerto *es una instancia de la disyunción excluyente.*
2. $(6 > 2) \veebar (6 < 2)$ *es un ejemplo más formal.*

1.2.6. Paréntesis

Descripción.

Cuando se trabaja con proposiciones, es indispensable el buen uso de los paréntesis; su descuido provoca numerosos errores.

El papel de los paréntesis es similar al de la puntuación en nuestra gramática: separa unidades más pequeñas dentro del discurso.

Su importancia radica en que debemos procurar que lo que escribamos en Matemáticas no esté sujeto a interpretaciones distintas, es decir, que carezca de ambigüedad.

Observación 27 *(En español:) Tome en cuenta que en un cambio en la puntuación puede modificar completamente el sentido de una frase.*

Ejemplo 28 *Se cuenta que Edipo habría preguntado al oráculo de Apolo en Delfos acerca de su suerte en una futura batalla, y habría recibido como respuesta (en griego, claro) algo así como*

Irás y volverás nunca en la guerra perecerás.

Edipo habría equivocado la puntuación.

Vamos a detenernos un instante en esta importante cuestión de los paréntesis; le invitamos a tomar unos minutos en leer esta sección, registrar el breve resumen que ponemos al final de ella y tomar la costumbre de seguir estas indicaciones. Es bien posible que este simple ejercicio le permita evitar muchos errores en sus cálculos.

En el álgebra elemental.

El uso de paréntesis en proposiciones tiene análoga utilidad y similares convenciones que el uso de paréntesis en expresiones algebraicas. También en el álgebra elemental puede cambiar el significado de la expresión según los "separadores" que se emplea.

Ejemplo 29 *Veamos algunas situaciones:*

1. *Considere la conocida y mal hecha pregunta* ¿ Cuál es la mitad de dos más dos? *Como se sabe, la respuesta depende si usted entiende la pregunta como* $\left(\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 2\right)+2$, *ó bien,* $\frac{1}{2}\cdot(2+2)$.

2. *Note sin embargo que cuando se escribe* $ab+c$

   todo el mundo entiende $(ab)+c$ *y no* $a(b+c)$.

   En otras palabras,

   si usted quiere escribir $(ab)+c$, puede *escribir* $ab+c$,

   pero si quiere escribir $a(b+c)$, debe *escribirlo tal cual.*

   Para referirse a esta situación convencional, se suele decir que

   "la suma prevalece sobre *la multiplicación", o bien que* "el producto se hace antes que la suma".

   Estas expresiones en español no son excelentes, pero no traen problema si se las usa correctamente.

   En cualquier caso, usted puede escribir $2+3\times 5$ *y todos entenderán* 17 *(y no* 25*).*

3. *Ahora bien, si usted quiere escribir el número* $a(bc)$

   puede escribir abc,

   pero puede escribir también abc para expresar $(ab)c$.

   Esto se debe a la ley de la asociatividad en los números,

   que dice que se tiene $a(bc)=(ab)c$

   y, entonces, la expresión abc puede significar cualquiera de las dos.

En el álgebra de proposiciones.

Cuando se trabaja con proposiciones, la situación es análoga a la ya descrita.

1. *(Asociatividad)*

   Las propiedades de *asociatividad* de la inclusión y de la disyunción, que se probará más adelante indican que, (respectivamente):

   $$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

   y

   $$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

   Esto permitirá escribir sin ambigüedad

   $$p \wedge q \wedge r$$

   y

   $$p \vee q \vee r$$

   Algo análogo ocurre con la doble implicación y la disyunción excluyente.

2. *('Distributividad')*

   Por otra parte y por ejemplo,

   no se tiene $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$,

   ni se tiene $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow p \vee (q \wedge r)$

   (Ello se puede comprobar, por ejemplo, haciendo la tabla de verdad respectiva).

   Esto obliga a escribir con los respectivos paréntesis:

   ya sea *exactamente* $(p \wedge q) \vee r$ si es que piensa en esa expresión,

   o bien *precisamente* $p \wedge (q \vee r)$ si eso es lo que quiere escribir.

3. *(No asociatividad)*

   De análoga manera, es fácil convencerse de que

   $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ *no es equivalente a* $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ y de que

   y así, en este casos, es indispensable escribir los paréntesis.

4. De acuerdo a propiedades que se verá más adelante y para simplificar la escritura, se conviene que

   la implicación y la equivalencia prevalecen
   sobre la conjunción y la disyunción

   (Si en lugar de escribir $\overline{p}$ escribiéramos $\sim p$, habría que agregar que *la conjunción y la disyunción prevalecen sobre la negación).*

Ello significa, por ejemplo, que

la expresión $p \wedge q \Rightarrow r$ significa $(p \wedge q) \Rightarrow r$

pero $p \wedge q \Rightarrow r$ no significa $p \wedge (q \Rightarrow r)$.

Insistimos en que se trata aquí sólo de una convención para simplificar la escritura (no hay en esto algo necesario sino simplemente conveniencia).

5. (Compare usted, las expresiones $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow r$ y $p \Rightarrow (q \Longleftrightarrow r)$)

6. Se conviene también en escribir $\overline{\overline{p}}$ en lugar de $\overline{(\overline{p})}$.

Resumen 30 *Vamos a resumir lo descrito en esta pequeña sección:*

1. Se puede escribir*, sin ambigüedad y por propiedades que se demostrará,*

$$p \wedge q \wedge r, p \vee q \vee r, p \veebar q \veebar r.$$

2. Se puede escribir, *sin ambigüedad y por convenciones,*

$$p \wedge q \Rightarrow r, p \vee q \Rightarrow r, \text{ etc.}$$

3. No se debe escribir, *pues* no son proposiciones,

$p \wedge q \vee r,\ p \vee q \wedge r,\ p \Rightarrow q \Rightarrow r,\ p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r,\ p \Rightarrow q \Leftrightarrow r;$

(no se tiene propiedades ni convenios que permitan siquiera escribirlas).

Ejemplo 31 *Observe al pasar que la frase*
Tomo el bus y como chocolate o bebo agua.
tiene dos interpretaciones distintas –según dónde se ponga la separación (la coma, el paréntesis)– y por tanto no podemos aceptarla.

Observación 32 *(Llamado de atención). Es fácil y a veces un tanto doloroso comprobar que excesivo descuido en la escritura lleva a resultados erróneos, por ejemplo, porque quien escribe interpreta mal lo que acaba de escribir.*

1.2.7. Sumario

Bien entendido, los siguientes cuadros contienen toda la información relevante de esta sección:

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

;

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \veebar q$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

1.3. Tautologías.

1.3.1. Presentación.

Definición 33 *(Informalmente). Respecto de los llamados valores de verdad, se dice que una proposición es*
una tautología *si es siempre verdadera,*
un absurdo *o* contradicción *si es siempre falsa*
o bien una contingencia *(a veces verdadera, a veces falsa).*

Ejemplo 34 *(Anunciamos provisoriamente que) si p, q son proposiciones cualesquiera, entonces*
$p \vee \overline{p}$ *es una tautología,*
$p \wedge \overline{p}$ *es un absurdo y*
$p \vee q$ *es una contingencia (a menos que p sea una tautología, o que q sea una tautología, o bien que p y q sean absurdos).*

1.3.2. Tautologías Importantes.

A continuación probaremos una colección de tautologías interesantes, algunas de ellas con nombre propio.

No trate de memorizar la lista. Las tautologías son infinitas, en el sentido de que, a cualquier colección de tautologías que pudiéremos escribir en un lapso limitado, se le puede agregar una expresión distinta –como es fácil comprobar (inténtelo al final de esta sección)–.

Por supuesto, según la definición, si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ son tautologías, también lo son $\mathcal{V} \wedge \mathcal{V}', \mathcal{V} \vee \mathcal{V}', \mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{V}', \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{V}'$, etcétera, etcétera.

Observación 35 *Aproveche de advertir que la proposición $\mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{V}'$ que acabamos de escribir significa que*

todas las tautologías son equivalentes entre sí.

Iremos indicando, cada vez, la importancia relativa de las diversas tautologías, cuáles hay que tener siempre presentes y cuáles se declaran para ser "olvidadas" de inmediato –algunas son bastante fáciles de retener–.

Hay tres maneras de probar tautologías:

1. Usar *tablas de verdad*. Ello se hace de modo análogo a como hemos mostrado en la sección anterior, cuidando de escribir ordenadamente todas las combinaciones de valores de verdad posibles entre las proposiciones que intervienen (tome nota de la disposición que utilizaremos).

2. Hacer *derivación* o usar *álgebra de proposiciones*, es decir, proceder al modo algebraico. Esto significa que, a medida que se va probando determinados resultados, se los puede ir usando para simplificar o establecer otras propiedades.

3. Utilizar el *método indirecto*, en particular, la llamada *reducción al absurdo.*

Aquí usaremos primero tablas de verdad. Una vez probadas las tautologías fundamentales, podemos intentar hacer derivación. En la sección siguiente volveremos expresamente sobre los métodos de demostración.

Probaremos sólo algunas tautologías, y dejamos a usted la oportunidad de demostrar las restantes, ya sea imitando las que aquí hacemos o bien inventando otras. En cualquier caso, asegúrese primero de que puede hacer la demostración de cada tautología mediante tablas de verdad; luego puede estudiar la descripción de los otros métodos en la sección subsiguiente y posteriormente utilizarlos en nuestra lista de tautologías, desde y cuando sea posible.

Como se verá, las demostraciones en las que se usa tablas de verdad son independientes unas de otras. Hemos ordenado, sin embargo, la lista de tautologías para que después podamos usar unas para demostrar otras al modo algebraico.

Observación 36 *Es muy posible que usted quiera ir directamente a los ejercicios. Eso está muy bien, pero le advertimos que lo que usted necesitará una y otra vez, ya sea de manera expresa o implícita, tanto para ejercicios de Lógica como cuando vea otros capítulos de la Matemática, está en esta lista. Puede, entonces, considerarla como una lista excelente de ejercicios. (Difícilmente encontrará otros tan interesantes y relevantes, aunque puede, claro, encontrar otros más –inútilmente– complicados). Intente, entonces, probar las tautologías de la lista sin mirar las demostraciones que presentamos.*

Observación 37 *En cualquier caso, la idea* no es *aprender una lista de memoria sino considerar con claridad cada situación. Compobará usted que varias de las tautologías de la lista son fáciles de retener.*

Los teoremas 38 al 43 son muy simples, véalos, compréndalos y 'olvídelos'.

Los teoremas 44 al 49 son reglas algebraicas fáciles de recordar, por sus nombres.

Ponga mucha atención a y registre correctamente los teoremas $50, 52, 53, 56$.

Los restantes serán menos utilizados, en la práctica.

Teorema 38 *Si* $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ *son tautologías y* $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ *son absurdos, entonces*

1. $\mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{V}'$
2. $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}'$
3. $\overline{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \mathcal{V}$
4. $\overline{\mathcal{V}} \Leftrightarrow \mathcal{F}$

Demostración. Por ejemplo,

$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}'$	$\mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{V}'$
V	V	V

;

$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\overline{\mathcal{V}}$	$\bar{\mathcal{V}} \Leftrightarrow \mathcal{F}$
V	F	F	V

, etc. ∎

Se trata de una proposición bastante simple:
todos los absurdos son equivalentes, todas las tautologías son equivalentes, etcétera.

Teorema 39 *Si $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ son tautologías. $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ son absurdos y p es una proposición cualquiera, entonces:*

1. $p \Rightarrow \mathcal{V}$
2. $\mathcal{F} \Rightarrow p$
3. $p \wedge \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}$
4. $p \vee \mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{V}$
5. $p \vee \mathcal{F} \Leftrightarrow p$
6. $p \wedge \mathcal{V} \Leftrightarrow p$

Demostración. Por ejemplo,

p	$\mathcal{V}$	$p \Rightarrow \mathcal{V}$
V	V	V
F	V	V

■

Esta es una proposición bastante útil en los cálculos, pero muy fácil de recordar o re-inventar.

Observación 40 *Ahora que hemos establecido estos primeros dos teoremas, escribiremos (como casi todo el mundo) V en lugar de $\mathcal{V}$, y F en lugar de $\mathcal{F}$. Aún cuando en realidad $\mathcal{V}, \mathcal{F}$ son proposiciones y V, F valores de verdad, este abuso no se prestará a confusión.*

Teorema 41 *Si p es una proposición, entonces.*

1. $p \Leftrightarrow p$ *(principio de identidad)*
2. $\overline{p \wedge (\overline{p})}$ *(principio de (no) contradicción)*
3. $p \vee \overline{p}$ *(principio de tercero excluido)*

Demostración. Por ejemplo,

p	$\overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$	$\overline{p \wedge (\overline{p})}$
V	F	F	V
F	V	F	V

■

Estas proposiciones son bastante sencillas; son también los tres pilares que puso Aristóteles en su Lógica (vale decir, en sus *Analíticos*).

Teorema 42 *Si p es una proposición, entonces*

1. $p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$ *(duplex negatio, doble negación)*
2. $p \vee p \Leftrightarrow p$
3. $p \wedge p \Leftrightarrow p$

Como se ve, bastante fácil e inmediata. Si no le gusta el latín, puede decir *doble negación.*

Teorema 43 *Si p, q son proposiciones, entonces*

1. $p \wedge q \Rightarrow p$ *(simplificación)*
2. $p \Rightarrow p \vee q$ *(adición)*

Teorema 44 *Si p, q son proposiciones, entonces.*

1. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ *(conmutatividad)*
2. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ *(conmutatividad)*

Demostración. Por ejemplo,

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

■

Teorema 45 *Si p, q, r son proposiciones, entonces*

1. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ *(asociatividad).*
2. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ *(asociatividad).*

Demostración. La tabla es la siguiente:

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	V

■

Observación 46 *Note que ahora, para escribir ordenadamente todos los posibles valores de verdad de p, q, r respectivamente, hemos ido (de izquierda a derecha) de uno en uno ($VFVFVF\ldots$), de dos en dos ($VVFFVV\ldots$) y de cuatro en cuatro. En otras palabras, escribimos sucesivamente de 2^0 en 2^0, de 2^1 en 2^1 y de 2^2 en 2^2. Si hubiera habido una cuarta proposición, habríamos llegado hasta escribir los valores de ocho en ocho (etc.).*

Teorema 47 *Si p, q, r son proposiciones, entonces*

1. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ *(distributividad).*

2. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ *(distributividad).*

Observación 48 *Es importante considerar algunas cuestiones acerca de las leyes de distributividad.*

1. *En primer lugar, usando la conmutatividad, uno tiene que, por ejemplo,*

   $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow r \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (r \wedge p) \vee (r \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)\,;$

   de manera que la distributividad funciona "por ambos lados".

2. *Ahora bien, si se tiene una expresión del tipo* $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ *, se procede como sigue:*

   $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee r] \wedge [(p \wedge q) \vee s]$

   $\Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge [(p \vee s) \wedge (q \vee s)]$

   $\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee s)$

   En otras palabras y según se indicó antes,

   se trabaja de manera análoga al cálculo de álgebra elemental

   $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$

   (que se basa en las propiedades análogas para números);

   con la diferencia de que, en este caso, tanto " $\wedge$ *" como "* $\vee$ *" pueden jugar el papel de la multiplicación, a condición de que el otro sea la suma.*

3. *Repare, sin embargo, en que por ejemplo, en la expresión,*

   $(p \wedge q) \vee (r \vee s)$ *, la situación es distinta:*

   $(p \wedge q) \vee (r \vee s) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee r] \vee s$

   $\Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \vee s \Leftrightarrow (p \vee r \vee s) \wedge (q \vee r \vee s)$

Teorema 49 *Si* p, q, r *son proposiciones, entonces.*

1. $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ *(Ley de De Morgan)*
2. $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ *(Ley de De Morgan)*

Las reglas de conmutatividad, asociatividad, distributividad y de De Morgan son importantes para trabajar en el álgebra de proposiciones que se examina más adelante; pero son bastante sencillas de recordar.

(Usamos el nombre *leyes* de De Morgan, según la tradición, pero sólo se trata de un par de teoremas).

La siguiente e importante propiedad nos permite además presentar, en su demostración, cómo funciona el método de derivación.

Teorema 50 *Si* p, q, r *son proposiciones, entonces*

1. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$

2. $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$

3. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ *(contra-reciprocidad, contraposición)*

Demostración. Se tiene:

1. Ya está establecida, se trata de la definición de la implicación.

2. Se tiene sucesivamente
   $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \overline{\overline{p} \vee q}$ (por definición de la implicación)
   $\Leftrightarrow \overline{\overline{p}} \wedge \overline{q}$ (por una ley de De Morgan)
   $\Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$ (por duplex negatio).

3. Se tiene sucesivamente
   $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$ (por definición de la implicación)
   $\Leftrightarrow q \vee \overline{p}$ (por conmutatividad)
   $\Leftrightarrow \overline{\overline{q}} \vee \overline{p}$ (por doble negación).
   $\Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ (por definición de la implicación)
   (Se explicará el nombre *contra-reciprocidad* más adelante).

■

Observación 51 *La demostración anterior tiene alguna sutileza que se explica en la siguiente sección.*

De todas maneras, es indispensable recordar siempre este teorema; si algo va a poner en su disco duro, que sea esto.

Teorema 52 *Si* p, q, r *son proposiciones, entonces*

1. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

2. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

3. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q})$

4. $\overline{p \Leftrightarrow q} \Leftrightarrow (p \veebar q)$

Demostración. Haga las tablas correspondientes, salvo para el número 1, que es la definición de equivalencia. ■

Observe que se declara, también aquí, conmutatividad.

Teorema 53 *Si* p, q, r *son proposiciones, entonces.*

1. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ *(absorción).*

2. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ *(absorción).*

Las reglas de absorción son muy importantes en la práctica. Si usted intenta simplificar una expresión cualquiera y no lo logra, probablemente haría bien en intentar usar una de ellas. (Intente desarrollar, por ejemplo, $p \vee (p \wedge q)$ según la ley de la distributividad, y vea lo que ocurre desde el cuarto paso).

Teorema 54 *Si p, q, r son proposiciones, entonces*

1. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$ *(exportación)*
2. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$
3. $(p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$
4. $(p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$
5. $(p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)]$

Demostración. Es interesante hacer todas estas demostraciones mediante derivación. Por ejemplo:

1. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow \overline{p \wedge q} \vee r \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q}) \vee r$
   $\Leftrightarrow \overline{p} \vee (\overline{q} \vee r) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

■

Teorema 55 *Si p, q son proposiciones, entonces*

1. $[(p \vee q) \wedge \overline{p}] \Rightarrow q$ *(silogismo disyuntivo)*
2. $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ *(modus ponens)*
3. $[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$ *(modus tollens)*

Demostración. Use derivación. Por ejemplo:

1. $[(p \vee q) \wedge \overline{p}] \Rightarrow q$
   ssi $\overline{(p \vee q) \wedge \overline{p}} \vee q$
   ssi $[\overline{p \vee q} \vee \overline{\overline{p}}] \vee q$
   ssi $[\overline{p \vee q} \vee p] \vee q$
   ssi $\overline{p \vee q} \vee (p \vee q)$
   ssi V

■

Note que hemos evitado conscientemente la tentación de pasar de $\overline{p \vee q}$ a $\overline{p} \wedge \overline{q}$.

De todas maneras, tal tentación no es grave y sólo se traduciría en que la demostración, correcta, resultara un poco más larga y más inocente:

$[(p \vee q) \wedge \overline{p}] \Rightarrow q$ *ssi* $\overline{(p \vee q) \wedge \overline{p}} \vee q$ *ssi* $[\overline{p \vee q} \vee \overline{\overline{p}}] \vee q$
ssi $[(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee p] \vee q$ *ssi* $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \vee q)$ ssi $\overline{p \vee q} \vee (p \vee q)$ *ssi* V

([⋇] Para una reflexión posterior: si bien se piensa, el teorema de arriba expresa las maneras en que uno tradicionalmente obtiene conclusiones)

Teorema 56 *Si p, q, r son proposiciones, entonces*

1. $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ *(transitividad)*
2. $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (p \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ *(transitividad)*

Demostración. Use tablas. ■

Teorema 57 *Si p, q, r son proposiciones, entonces*

1. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Leftrightarrow q \wedge r)$
2. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Leftrightarrow q \vee r)$

Como se ve, se puede *simplificar.*

Teorema 58 *Si p, q, r son proposiciones, entonces*

1. $\overline{p \underline{\vee} q} \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
2. $(p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \overline{p \wedge q}$
3. $(p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$
4. $p \underline{\vee} V \Leftrightarrow \overline{p}$
5. $p \underline{\vee} F \Leftrightarrow p$
6. $(p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow (q \underline{\vee} p)$ *(conmutatividad)*
7. $[p \underline{\vee} (p \underline{\vee} r)] \Leftrightarrow [(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r]$ *(asociatividad)*
8. $p \wedge (q \underline{\vee} r) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \underline{\vee} (p \wedge r)]$ *(distributividad)*
9. $(p \underline{\vee} q) \Rightarrow p \vee q$

Demostración. La primera afirmación es inmediata según la definición de disyunción excluyente. .

Suponga que ha demostrado la segunda propiedad mediante una tabla. Entonces, para la tercera, se tiene sucesivamente:

$$\begin{aligned}
&(p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q}) \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{q}) \\
&\Leftrightarrow F \vee (p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{p}) \vee F \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{p}) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Como se ve, este teorema indica las propiedades más importantes de la operación "$\underline{\vee}$", en particular, las propiedades 2 y 3 permiten manejarla con mayor facilidad.

En cualquier caso, esta operación aparece menos que los otros conectivos en la práctica matemática corriente.

1.3.3. Las tautologías son naturales.

1.4. Acerca de las demostraciones.

1.4.1. Tablas de verdad.

1.4.2. Método Algebraico o de Derivación

1.4.3. Reducción al absurdo.

1.4.4. Contraposición.

1.5. Álgebra de Proposiciones.

1.5.1. El Álgebra.

1.5.2. La Regla de Substitución.

Es ésta una importante regla, que hemos usado anteriormente, y que ahora ponemos en evidencia.

Cuando hemos enunciado nuestras tautologías, se entiende como se dijo, que $p, q, r, \ldots$ son proposiciones cualesquiera; el hecho que las llamemos p, q, r no es en absoluto relevante.

En otras palabras, en una tautología en que se diga $p, q, \ldots,$ tales letras deben interpretarse como espacios en blanco que se rellena con proposiciones.

Ejemplo 59 *En el teorema que afirma*

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p,$$

el hecho de que p y q sean proposiciones cualesquiera indica que, en realidad, estamos afirmando, por ejemplo

1. $a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a$
2. $\overline{p} \wedge q \Leftrightarrow q \wedge \overline{p},$
3. $(p \vee r) \wedge q \Leftrightarrow q \wedge (p \vee r)\,,$
4. $[(a \veebar b) \wedge (t \Rightarrow s)] \Leftrightarrow [(t \Rightarrow s) \wedge (a \veebar b)]\,,$
5. *... etc., etc.*

Veamos ahora ejemplos más 'concretos'.

Ejemplo 60 *Para simplificar la expresión*
$[p \wedge (\overline{p} \vee (q \Rightarrow r))] \vee (r \Rightarrow p)\,,$
se procede como sigue, entendiéndose que cada paso es una equivalencia (usaremos absorción):

$[p \wedge (\overline{p} \vee (q \Rightarrow r))] \vee (r \Rightarrow p)$

$[(p \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge (\overline{q} \vee r))] \vee (\overline{r} \vee p)$

$[F \vee (p \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)] \vee (\overline{r} \vee p)$

$(p \wedge \overline{q}) \vee [(p \wedge r) \vee (\overline{r} \vee p)]$

$(p \wedge \overline{q}) \vee [((p \wedge r) \vee p) \vee \overline{r}]$

$(p \wedge \overline{q}) \vee (p \vee \overline{r})$

$((p \wedge \overline{q}) \vee p) \vee \overline{r}$

$p \vee \overline{r}$

Note la interesante aplicación de la ley de absorción en los últimos pasos. (Si se sigue trabajando sin ella, el ejemplo, en lugar de simplificarse, crecerá bastante, línea a línea).

Es muy interesante aprender a mirar ocasionalmente una proposición de modo que la regla de substitución evite una cantidad de cálculos sin mayor provecho.

El ejemplo siguiente muestra una situación de este tipo:

Ejemplo 61 *Según lo explicado, al simplificar la expresión*

$$[r \wedge (\overline{r} \Rightarrow s)] \vee \Big[\Big((p \Rightarrow \overline{r}) \wedge \overline{\overline{p} \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)}\Big) \wedge (r \vee (r \wedge (w \Rightarrow t)))\Big]$$

queda solamente r.

Lo interesante es que el resultado se puede alcanzar en sólo dos pasos.

1.5.3. El Álgebra y lenguaje habitual.

1.6. [⋇] Cuestiones ulteriores

1.6.1. El pensamiento correcto.

1.6.2. Lenguaje formal versus idioma común.

1.6.3. Los principios aristotélicos.

1.6.4. Tratamiento axiomático.

1.6.5. Modus ponens y modus tollens.

1.6.6. La demostración, nuevamente

1.7. Ejercicios

1.7.1. Ejercicios de lectura

1.7.2. Implicación

1.7.3. Valores y tablas de verdad

1.7.4. Otros conectivos

1.7.5. Simplificación

1.7.6. Tautologías.

1.7.7. Escritura y simplificación