Projeto e Análise de Algoritmos

Conceitos básicos
Metodo de provas: Indução

Diane Castonguay
diane@inf.ufg.br

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás

Notações

$\forall$ = para todo
$\exists$ = existe
$!$ = único
$\prod$ = produto
$\sum$ = soma
$\Rightarrow$ = implica
$\Leftrightarrow$ = se e somente se
$|$ = divide
tq = tal que

Notações

$\mathbb{N}$ = conjunto dos inteiros naturais = $\{0, 1, 2, ...\}$

$\mathbb{Z}$ = conjunto dos inteiros = $\{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$

$\mathbb{Q}$ = conjunto dos números racionais

= $\{x : \exists\ a, b \in \mathbb{Z}, (b \neq 0)$ tal que $x=a \div b\}$

= $\{x : \exists\ a, b \in \mathbb{Z}, (b \neq 0)$ tal que $bx=a\}$

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números reais

$\mathbb{N}_*$= conjunto dos naturais positivos = $\{1, 2, ...\}$

$\mathbb{R}^+$= conjunto dos números reais não-negativos

= $\{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

Funções: Pisos e Tetos

Seja $x \in \mathbb{R}$. Denotamos
o maior inteiro menor que ou igual a x por $\lfloor x \rfloor$
(piso)
e
o menor inteiro maior que ou igual a x por $\lceil x \rceil$
(teto).

$$x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$$

Funções: Pisos e Tetos

Propriedades

Seja $n \in \mathbb{Z}$.

$$\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$$

Sejam $x \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{N}_*$.

$$\lceil \lceil n/a \rceil / b \rceil = \lceil n/ab \rceil$$

$$\lfloor \lfloor n/a \rfloor / b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor$$

$$\lfloor a/b \rfloor \leq (a + (b-1))/b$$

$$\lceil a/b \rceil \leq (a - (b-1))/b$$

Funções: Aritmética modular

Teorema: Sejam $a \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}_*$.

$\exists!\ q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < n$ tais que

$$a = qn + r,$$

O quociente da divisão de a por n, q, é o piso de a/n.

Notação: a div n = q = $\lfloor a/n \rfloor$

O resto da divisão de a por n, r, é dado por a-$\lfloor a/n \rfloor$*n

Notação: a mod n = r = a-$\lfloor a/n \rfloor$*n

Funções: Fatoriais

Definição recursiva de n!

$0! = 1$

$(n+1)! = (n+1)*n!$

para $n \geq 0$

Exemplo

$3! = 3*2! = 3*2*1! = 3*2*1*0! = 3*2*1*1$

$3! = 6$

Funções: Exponenciais

Para todos os valores $a \neq 0$, m, n reais, temos as seguintes identidades

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-1} = 1/a$$

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

Funções: Exponenciais

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Temos que:

$$e^x \geq 1+x$$

$$\text{para } |x| \leq 1,\ 1+x \leq e^x \leq 1+x+x^2$$

$$e^x = 1+x+\Theta(x^2)$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Funções: Logaritmos

Notações

$\lg n = \log_2 n$ (logaritmo binário)

$\ln n = \log_e n$ (logaritmo natural)

$\lg^k n = (\lg n)^k$ (exponenciação)

$\lg \lg n = \lg(\lg n)$ (composição)

Funções: Logaritmos

Notações

$$\lg^{(i)} n = \begin{cases} n & \text{se } i = 0 \\ \lg(\lg^{(i-1)} n) & \text{se } i > 0 \text{ e } \lg^{(i-1)} n > 0 \\ \text{indefinido} & \text{se } i > 0 \text{ e } \lg^{(i-1)} n < 0 \\ & \text{ou } \lg^{(i-1)} n \text{ é indefinido} \end{cases}$$

$$\lg^{*} n = \min\{i \geq 0 : \lg^{(i)} n \leq 1\} \quad \text{(log estrela)}$$

Funções: Logaritmos

Propriedades

Para todo $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ e n

$$a = b^{\log_b(a)}$$

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_b a^n = n \log_b a$$

$$\log_b a = \log_c a / \log_c b$$

$$a^{\log_b(n)} = n^{\log_b(a)}$$

Funções: Somatórias

$$\sum_{i=1}^{n} i * 2^{i} = (n-1) * 2^{k+1} + 2, \quad para\, k \geq 1$$

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad (H(n)\, é\; o\; k - ésimo\; número\; harmonico)$$

$$\ln n \leq H(n) \leq 1 + \ln n$$

$$\sum_{i=1}^{n} H(i) = (n+1) H(n) - n$$

Funções: Somatórias

$$Expandindo\,e\,Contraindo\,Somas$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} k$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{n(n+1) - (j-1)j}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} n(n+1) + \sum_{j=1}^{n} j - j^2$$

$$S_2 = \frac{1}{2} n(n + \frac{1}{2})(n+1) - \frac{1}{2} S_2$$

$$S_2 = \frac{1}{6} n(2\mathrm{n}+1)(n+1)$$

Funções: Somatórias

Dividindo as Somas

$$\sum_{k=n_0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n_0-1} k^2$$

$$= \frac{1}{6} n(2\mathrm{n}+1)(n+1) - \frac{1}{6}(n_0-1)(2(n_0-1)+1)n_0$$

$$= \frac{1}{6}\left[n(n+1)(2\mathrm{n}+1) - n_0(n_0-1)(2n_0-1)\right]$$

Notação Assintótica: Definição O

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\left(\text{ou } \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\right)$ duas funções.

Dizemos que:

$$f(n) \in O(g(n))$$

se exitem duas constantes positivas

$c,\ n_0 > 0$ tais que

$$|\ f(n)\ | \leq c * |g(n)| \quad \forall n \geq n_0.$$

Notação Assintótica: Definição Ω

Sejam f, g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$) duas funções.
Dizemos que:

$$f(n) \in \Omega(g(n))$$

se exitem duas constantes positivas
c, $n_0 > 0$ tais que

$$c * | g(n) | \leq | f(n) | \quad \forall n \geq n_0.$$

Notação Assintótica: Definição Θ

Sejam f, g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$) duas funções.
Dizemos que:

$$f(n) \in \Theta(g(n))$$

se

$$f(n) \in O(g(n)) \text{ e } f(n) \in \Omega(g(n))$$

Notação: Por abuso de linguagem, dizemos que

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

Notação Assintótica: Polinômios

Um polinômio em n de grau d é dado da forma

$$P(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i, \quad a_d \neq 0$$

Observação: P(n) = $\Theta(n^d)$

Dizemos que uma função é limitada polinomialmente se f(n) = $O(n^k)$ para alguma constante k

Notação Assintótica: Polinômios e Exponenciais

Para todas constantes reais a e b, a >1, temos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$$

Conclusão

$n^b = O(a^n)$

Notação Assintótica: Fatorial e log

$$n! = O(n^n)$$
$$n! = \Omega(2^n)$$
$$\log(n!) = \Theta(n \log n)$$

para qualquer $a > 0$.

$$\lg n \quad = O(n^a)$$
$$\lg^k n = (\lg n)^k = O(n^a) \text{ para qualquer } k$$

Notação Assintótica: Somatórias

Dividindo as Somas

$$\sum_{k=n_0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n_0-1} k^2$$

$$= \frac{1}{6} n(2\mathrm{n}+1)(n+1) - \frac{1}{6}(n_0-1)(2(n_0-1)+1)n_0$$

$$= \frac{1}{6}\left[n(n+1)(2\mathrm{n}+1) - n_0(n_0-1)(2n_0-1)\right]$$

Metodos de provas: $p \Rightarrow q$

Prova direita $p \Rightarrow q$

Prova por contraposição $\neg p \Rightarrow \neg q$

Prova por contradição $\neg(p \wedge \neg q)$

Metodos de provas

Prova por Construção

Contre-exemplo

Prova por casos

INDUÇÃO

Prova direita: $p \Rightarrow q$

Teorema

Sejam f, g, h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\left(\text{ou } \mathbb{N} \to \mathbb{N}\right)$ três funções.

Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$

então $f(n) \in O(h(n))$

Prova feita em sala de aula.

Prova por contraposta: $\neg p \Rightarrow \neg q$

Reformulação du Teorema

Sejam f, g, h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\left(\text{ou } \mathbb{N} \to \mathbb{N}\right)$ três funções.

Se $f(n) \notin O(h(n))$

então $f(n) \notin O(g(n))$ OU $g(n) \notin O(h(n))$

Prova por contradição: $\neg(p \land \neg q)$

Teorema: O número $\sqrt{2}$ é irracional

Prova feita em sala de aula.

Prova por Construção

Teorema

Existem s e t dois inteiros tais que $5s+7t=1$.

Contre-exemplo

Afirmação falsa

Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\left(\text{ou } \mathbb{N} \to \mathbb{N}\right)$ duas funções.

Se $f(n) \in O(g(n))$ então $g(n) \in O(f(n))$.

Prova feita em sala de aula.

Prova por casos

$$\max(a, b) \geq a$$

Prova por Indução

Problema:

Seja P uma propriedade.
Queremos ver que P(n) é verdadeira
para todo os inteiros naturais n.

Prova por Indução

BASE

Prove que P(1) é verdadeira

HIPOTESIS DE INDUÇÃO

Suponha que P(k) é verdadeiro para algum

PASSO DE INDUÇÃO

Mostre que P(k+1) é verdadeira

INDUÇÃO

Teorema

Seja n um inteiro positivo então $n < 2^n$.

Corolario

$$\lg n \in o(n)$$

provar por contradição que $n \notin O(\lg n)$

```
/*
 * Ordena um vetor.
 * O comprimento do vetor é denotado por comprimento[A].
 */
INSERTION-SORT(A)
    para j ← 2 até comprimento[A] faça
        chave ← A[j]
        // Inserir A[j] na seqüência ordenada A[1..j-1]
        i ← j-1
        enquanto i > 0 e A[i] > chave faça
            A[i+1] ← A[i]
            i ← i-1
        fim-enquanto
        A[i+1] ← chave
    fim-para
```

Linha	Custo	Vezes
1. <u>para</u> j← 2 <u>até</u> n	c1	n
2. *chave* ← A[j]	c2	n-1
3. // Comentário	0	n-1
4. i ← j-1	c4	n-1
5. <u>enquanto</u> i > 0 e A[i] > *chave* <u>faça</u>	c5	$\sum_j t_j$
6. A[i+1] ← A[i]	c6	$\sum_j (t_j-1)$
7. i ← i-1	c7	“
8. <u>fim-enquanto</u>	0	$\sum_j t_j$
9. A[i+1] ← *chave*	c9	n-1
10. <u>fim-para</u>	0	n-1

```
SELEÇÃO-SORT(A)
    para i ← 1 até comprimento[A]-1 faça
        //achamos o iesimo menor valor do vetor
        menor ← i
        para j ← i+1 até comprimento[A] faça
            se V[j] < V[menor]
                então menor ← j
            fim-se
        fim-para
        se menor ← i
            //trocamos os valores de V[menor] e V[i]
        então   aux ← V[menor]
                V[menor] ← V[i]
                V[i] ← aux
      fim-se
fim-para
```

```
BOLHA(A)
para i ← 1 até comprimento[A]-1 faça
    para j ← 1 até comprimento[A]-i faça
        se A[j] > A[j+1])
            //troca A[j] com A[j+1]
        então aux ← A[j]
              A[j] ← A[j+1]
              A[j+1] ← aux
        fim-se
    fim-para
fim-para
```

BOLHA-MELHOR(A)

1. *ultimatroca* ← *comprimento*[A]
2. *troca* ← 1
3. enquanto *ultimatroca* > 1 faça
2.   para j ← 1 até *ultimatroca*-1 faça
3.   se A[j] > A[j+1]
4.   //troca A[j] com A[j+1]
5.   então *aux* ← A[j]
6.   A[j] ← A[j+1]
7.   A[j+1] ← *aux*
8.   *troca* ← j
8.   fim-se
9.   fim-para
10.   ultimatroca ← troca
11.   troca ← 1
10. fim-enquanto