Notação assintótica

Sumário

- Definição intuitiva e aplicação das notações $\Theta, O, \Omega, o, \omega$.

Sumário

- Definição intuitiva e aplicação das notações $\Theta, O, \Omega, o, \omega$.
- Definição formal.

Sumário

- Definição intuitiva e aplicação das notações $\Theta, O, \Omega, o, \omega$.
- Definição formal.
- Principais propriedades da notação Θ.

Notação assintótica

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ significa que $f(n)$ e $g(n)$ **crescem iguais**.

Notação assintótica

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ significa que $f(n)$ e $g(n)$ **crescem iguais**.
- $f(n) \in o(g(n))$ significa que $f(n)$ **cresce menos** que $g(n)$.

Notação assintótica

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ significa que $f(n)$ e $g(n)$ **crescem iguais**.
- $f(n) \in o(g(n))$ significa que $f(n)$ **cresce menos** que $g(n)$.
- $f(n) \in \omega(g(n))$ significa que $f(n)$ **cresce mais** que $g(n)$.

Notação assintótica

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ significa que $f(n)$ e $g(n)$ **crescem iguais**.
- $f(n) \in o(g(n))$ significa que $f(n)$ **cresce menos** que $g(n)$.
- $f(n) \in \omega(g(n))$ significa que $f(n)$ **cresce mais** que $g(n)$.

- $f(n) \in O(g(n))$ significa que $f(n)$ **cresce igual ou cresce menos** que $g(n)$.

$$f(n) \in O(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad f(n) \in \Theta(g(n)) \ \vee \ f(n) \in o(g(n))$$

Notação assintótica

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ significa que $f(n)$ e $g(n)$ **crescem iguais**.
- $f(n) \in o(g(n))$ significa que $f(n)$ **cresce menos** que $g(n)$.
- $f(n) \in \omega(g(n))$ significa que $f(n)$ **cresce mais** que $g(n)$.

- $f(n) \in O(g(n))$ significa que $f(n)$ **cresce igual ou cresce menos** que $g(n)$.

$$f(n) \in O(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad f(n) \in \Theta(g(n)) \ \vee \ f(n) \in o(g(n))$$

- $f(n) \in \Omega(g(n))$ significa que $f(n)$ **cresce igual ou cresce mais** que $g(n)$.

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad f(n) \in \Theta(g(n)) \ \vee \ f(n) \in \omega(g(n))$$

Notação assintótica

Permite vários níveis de detalhe.

Notação assintótica

Permite vários níveis de detalhe.
Ex.: $T(n) = 5n^2 + 3n$.

Notação assintótica

Permite vários níveis de detalhe.
Ex.: $T(n) = 5n^2 + 3n$.

- $T(n) \in n^{\Theta(1)}$ (polinomial)

Notação assintótica

Permite vários níveis de detalhe.
Ex.: $T(n) = 5n^2 + 3n$.

- $T(n) \in n^{\Theta(1)}$ (polinomial)
- $T(n) \in \Theta(n^2)$ (quadrático)

Notação assintótica

Permite vários níveis de detalhe.
Ex.: $T(n) = 5n^2 + 3n$.

- $T(n) \in n^{\Theta(1)}$ (polinomial)
- $T(n) \in \Theta(n^2)$ (quadrático)
- $T(n) \in 5n^2 + o(n^2)$ ($5n^2$ mais algo que cresce menos que n^2)

Notação assintótica

Permite vários níveis de detalhe.
Ex.: $T(n) = 5n^2 + 3n$.

- $T(n) \in n^{\Theta(1)}$ (polinomial)
- $T(n) \in \Theta(n^2)$ (quadrático)
- $T(n) \in 5n^2 + o(n^2)$ ($5n^2$ mais algo que cresce menos que n^2)
- $T(n) \in 5n^2 + O(n)$ ($5n^2$ mais algo com crescimento no máximo linear)

Definição formal

Definição formal

Vamos assume que todas as funções são **assintoticamente positivas**, ou seja

Definição formal

Vamos assume que todas as funções são **assintoticamente positivas**, ou seja

$$\underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ “suficientemente grande”}} \qquad f(n) > 0$$

Definição formal

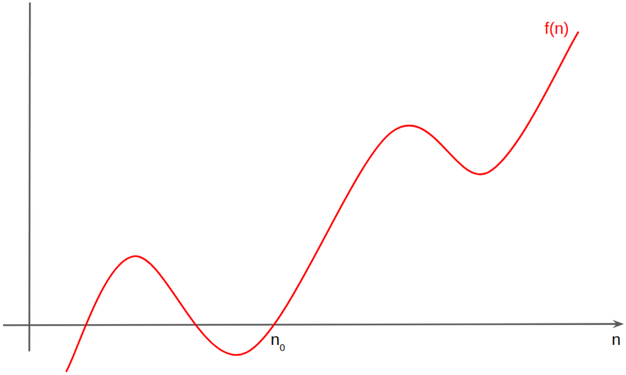
Vamos assume que todas as funções são **assintoticamente positivas**, ou seja

$$\underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ ``suficientemente grande''}} \qquad f(n) > 0$$

Definição formal

Vamos assume que todas as funções são **assintoticamente positivas**, ou seja

$$\underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ ``suficientemente grande''}} \qquad f(n) > 0$$



Definição formal

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c_1, c_2 > 0, \quad \underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ ``suficientemente grande''}} \quad c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

Definição formal

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c_1, c_2 > 0, \quad \underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ ``suficientemente grande''}} \quad c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

Definição formal

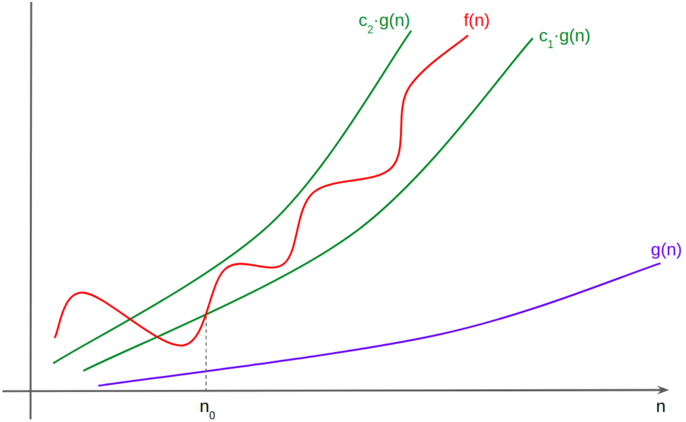
$$f(n) \in \Theta(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c_1, c_2 > 0, \quad \underbrace{\exists n_0, \ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ “suficientemente grande”}} \quad c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

Definição formal

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c_1, c_2 > 0, \quad \underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ ``suficientemente grande''}} \quad {\color{red} c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)}$$

Definição formal

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c_1, c_2 > 0, \quad \underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ “suficientemente grande”}} \quad c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$



Definição formal

Ex.: Provar que $2n^2 + 100n \in \Theta(n^2)$ usando a definição formal.

Definição formal

Ex.: Provar que $2n^2 + 100n \in \Theta(n^2)$ usando a definição formal.

- Você fornece as constantes positivas c_1, c_2, e a constante n_0.

Definição formal

Ex.: Provar que $2n^2 + 100n \in \Theta(n^2)$ usando a definição formal.

- Você fornece as constantes positivas c_1, c_2, e a constante n_0.
- O adversário fornece algum n maior ou igual a n_0.

Definição formal

Ex.: Provar que $2n^2 + 100n \in \Theta(n^2)$ usando a definição formal.

- Você fornece as constantes positivas c_1, c_2, e a constante n_0.
- O adversário fornece algum n maior ou igual a n_0.
- Você mostra que $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ para qualquer n fornecido pelo adversário.

Definição formal

Ex.: Provar que $2n^2 + 100n \in \Theta(n^2)$ usando a definição formal.

- Você fornece as constantes positivas c_1, c_2, e a constante n_0.
- O adversário fornece algum n maior ou igual a n_0.
- Você mostra que $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ para qualquer n fornecido pelo adversário.
- Suponha que você escolheu $c_1 = 2, c_2 = 3$ e $n_0 = 100$.

Definição formal

Ex.: Provar que $2n^2 + 100n \in \Theta(n^2)$ usando a definição formal.

- Você fornece as constantes positivas c_1, c_2, e a constante n_0.
- O adversário fornece algum n maior ou igual a n_0.
- Você mostra que $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ para qualquer n fornecido pelo adversário.
- Suponha que você escolheu $c_1 = 2, c_2 = 3$ e $n_0 = 100$.
- Seu objetivo é mostrar que $2n^2 \leq 2n^2 + 100n \leq 3n^2$ para todo $n \geq 100$.

Definição formal

Ex.: Provar que $2n^2 + 100n \in \Theta(n^2)$ usando a definição formal.

- Você fornece as constantes positivas c_1, c_2, e a constante n_0.
- O adversário fornece algum n maior ou igual a n_0.
- Você mostra que $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ para qualquer n fornecido pelo adversário.
- Suponha que você escolheu $c_1 = 2, c_2 = 3$ e $n_0 = 100$.
- Seu objetivo é mostrar que $2n^2 \leq 2n^2 + 100n \leq 3n^2$ para todo $n \geq 100$.

$$100 \leq n \;\Rightarrow\; 0 \leq 100n$$

Definição formal

Ex.: Provar que $2n^2 + 100n \in \Theta(n^2)$ usando a definição formal.

- Você fornece as constantes positivas c_1, c_2, e a constante n_0.
- O adversário fornece algum n maior ou igual a n_0.
- Você mostra que $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ para qualquer n fornecido pelo adversário.
- Suponha que você escolheu $c_1 = 2, c_2 = 3$ e $n_0 = 100$.
- Seu objetivo é mostrar que $2n^2 \leq 2n^2 + 100n \leq 3n^2$ para todo $n \geq 100$.

$$100 \leq n \;\Rightarrow\; 0 \leq 100n \;\Rightarrow\; 2n^2 \leq 2n^2 + 100n$$

Definição formal

Ex.: Provar que $2n^2 + 100n \in \Theta(n^2)$ usando a definição formal.

- Você fornece as constantes positivas c_1, c_2, e a constante n_0.
- O adversário fornece algum n maior ou igual a n_0.
- Você mostra que $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ para qualquer n fornecido pelo adversário.
- Suponha que você escolheu $c_1 = 2, c_2 = 3$ e $n_0 = 100$.
- Seu objetivo é mostrar que $2n^2 \leq 2n^2 + 100n \leq 3n^2$ para todo $n \geq 100$.

$$100 \leq n \;\Rightarrow\; 0 \leq 100n \;\Rightarrow\; 2n^2 \leq 2n^2 + 100n$$

$$100 \leq n \;\Rightarrow\; 100n \leq n^2$$

Definição formal

Ex.: Provar que $2n^2 + 100n \in \Theta(n^2)$ usando a definição formal.

- Você fornece as constantes positivas c_1, c_2, e a constante n_0.
- O adversário fornece algum n maior ou igual a n_0.
- Você mostra que $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ para qualquer n fornecido pelo adversário.
- Suponha que você escolheu $c_1 = 2, c_2 = 3$ e $n_0 = 100$.
- Seu objetivo é mostrar que $2n^2 \leq 2n^2 + 100n \leq 3n^2$ para todo $n \geq 100$.

$$100 \leq n \;\Rightarrow\; 0 \leq 100n \;\Rightarrow\; 2n^2 \leq 2n^2 + 100n$$

$$100 \leq n \;\Rightarrow\; 100n \leq n^2 \;\Rightarrow\; 2n^2 + 100n \leq 3n^2$$

Definição formal

$$f(n) \in O(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c > 0, \quad \underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ ``suficientemente grande''}} \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Definição formal

$$f(n) \in O(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c > 0, \quad \underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ “suficientemente grande”}} \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Definição formal

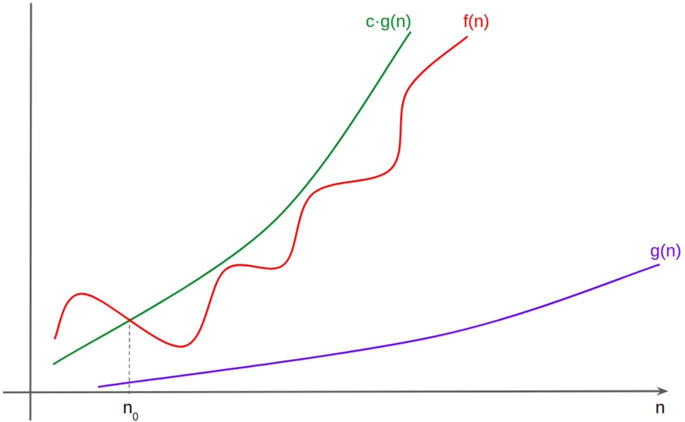
$$f(n) \in O(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c > 0, \quad \underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ ``suficientemente grande''}} \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Definição formal

$$f(n) \in O(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c > 0, \quad \underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ ``suficientemente grande''}} \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$$

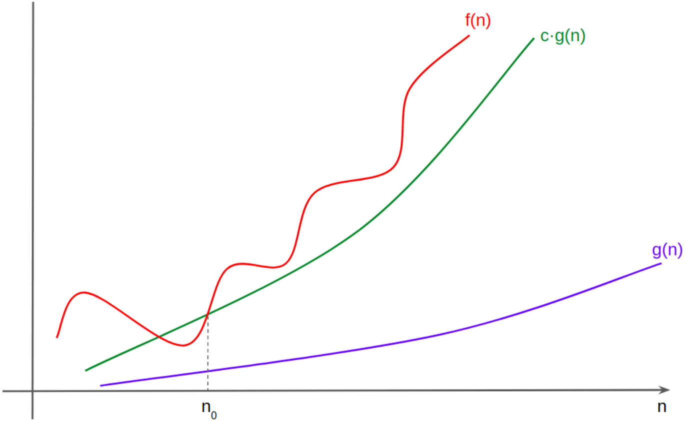
Definição formal

$$f(n) \in O(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c > 0, \quad \underbrace{\exists n_0, \ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ “suficientemente grande”}} \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$$



Definição formal

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c > 0, \quad \underbrace{\exists n_0, \ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ ``suficientemente grande''}} \quad c \cdot g(n) \leq f(n)$$



Definição formal

$$f(n) \in o(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall c > 0, \quad \underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ ``suficientemente grande''}} \quad f(n) < c \cdot g(n)$$

Definição formal

$$f(n) \in o(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad {\color{red}\forall c > 0,} \quad \underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ ``suficientemente grande''}} \quad f(n) < c \cdot g(n)$$

Definição formal

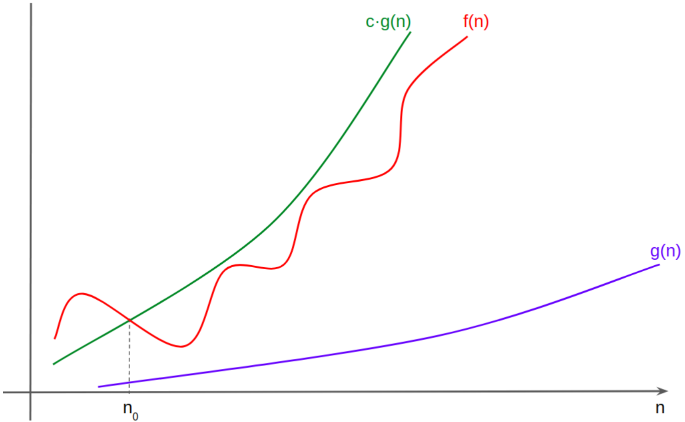
$$f(n) \in o(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall c > 0, \quad \underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ ``suficientemente grande''}} \quad f(n) < c \cdot g(n)$$

Definição formal

$$f(n) \in o(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall c > 0, \quad \underbrace{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ ``suficientemente grande''}} \quad f(n) < c \cdot g(n)$$

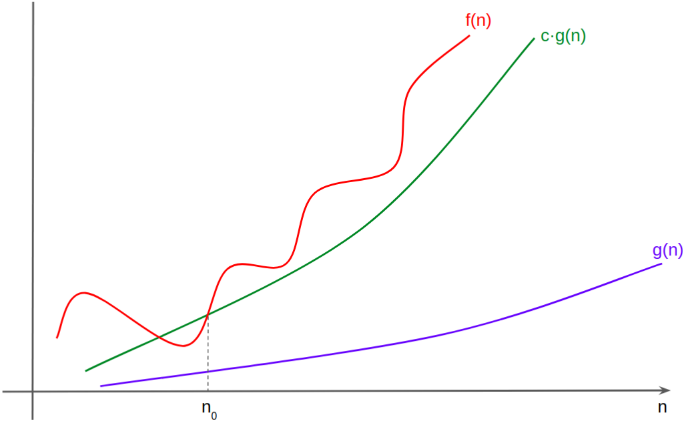
Definição formal

$$f(n) \in o(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall c > 0, \quad \underbrace{\exists n_0, \ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ “suficientemente grande”}} \quad f(n) < c \cdot g(n)$$



Definição formal

$$f(n) \in \omega(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall c > 0, \quad \underbrace{\exists n_0, \ \forall n \geq n_0,}_{\forall n \text{ ``suficientemente grande''}} \quad c \cdot g(n) < f(n)$$



Definição formal

Alguns pares de funções não possuem crescimento comparável.

Definição formal

Alguns pares de funções não possuem crescimento comparável.

- Ex.: n e $n^{1+\sin n}$, pois o expoente $1 + \sin n$ oscila entre 0 e 2.

Definição formal

Alguns pares de funções não possuem crescimento comparável.

- Ex.: n e $n^{1+\sin n}$, pois o expoente $1 + \sin n$ oscila entre 0 e 2.

Não vamos encontrar este problema em análise de algoritmo, mas é importante saber.

Definição formal

Alguns pares de funções não possuem crescimento comparável.

- Ex.: n e $n^{1+\sin n}$, pois o expoente $1 + \sin n$ oscila entre 0 e 2.

Não vamos encontrar este problema em análise de algoritmo, mas é importante saber.

- Ex.: $f(n) \notin \Omega(g(n))$ não é equivalente a $f(n) \in o(g(n))$.

Propriedades da notação Θ

Constante multiplicativa: Para toda constante $a > 0$, temos que $a \cdot f(n) \in \Theta(f(n))$.

Propriedades da notação Θ

Constante multiplicativa: Para toda constante $a > 0$, temos que $a \cdot f(n) \in \Theta(f(n))$.

Ex.: $3n^2 \in \Theta(n^2)$, fazendo $a = 3$ e $f(n) = n^2$.

Propriedades

Dominação: Se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) + g(n) \in \Theta(g(n))$.

Propriedades

Dominação: Se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) + g(n) \in \Theta(g(n))$.

Ex.: $n^2 + n \in \Theta(n^2)$, pois $n \in o(n^2)$.

Propriedades

Transitividade: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

Propriedades

Transitividade: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

Ex.: Como $3n^2 + n \in \Theta(3n^2)$ e $3n^2 \in \Theta(n^2)$, concluímos que $3n^2 + n \in \Theta(n^2)$.

Propriedades

Adição: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) + f_2(n) \in \Theta(g_1(n) + g_2(n))$.

Propriedades

Adição: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) + f_2(n) \in \Theta(g_1(n) + g_2(n))$.

Ex.: Como $3n^2 \in \Theta(n^2)$ e $2n^2 + n \in \Theta(n^2)$, temos $(3n^2) + (2n^2 + n) \in \Theta(n^2 + n^2) = \Theta(n^2)$.

Propriedades

Produto: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Theta(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

Propriedades

Produto: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Theta(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

Ex.:
Como $2^n + n^3 \in \Theta(2^n)$ e $\log(5n^2 + n) \in \Theta(\log n)$, temos $(2^n + n^3)\log(5n^2 + n) \in \Theta(2^n \log n)$.

Propriedades

Produto: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Theta(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

Ex.:
Como $2^n + n^3 \in \Theta(2^n)$ e $\log(5n^2 + n) \in \Theta(\log n)$, temos $(2^n + n^3)\log(5n^2 + n) \in \Theta(2^n \log n)$.

Ex.: Como $5n^3 + n \in \Theta(n^3)$, temos $(5n^3 + n)^2 = (5n^3 + n)(5n^3 + n) \in \Theta(n^3 \cdot n^3) = \Theta(n^6)$.

Propriedades

Produto: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Theta(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

Ex.:
Como $2^n + n^3 \in \Theta(2^n)$ e $\log(5n^2 + n) \in \Theta(\log n)$, temos $(2^n + n^3)\log(5n^2 + n) \in \Theta(2^n \log n)$.

Ex.: Como $5n^3 + n \in \Theta(n^3)$, temos $(5n^3 + n)^2 = (5n^3 + n)(5n^3 + n) \in \Theta(n^3 \cdot n^3) = \Theta(n^6)$.
De modo geral, polinômio de grau d elevado a k será $\Theta(n^{d \cdot k})$.

Propriedades

Inverso: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $1/f(n) \in \Theta(1/g(n))$.

Propriedades

Inverso: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $1/f(n) \in \Theta(1/g(n))$.

Ex.: Como $5n^2 + n \in \Theta(n^2)$, temos que

$$\frac{1}{5n^2 + n} \in \Theta\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Propriedades

Inverso: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $1/f(n) \in \Theta(1/g(n))$.

Ex.: Como $5n^2 + n \in \Theta(n^2)$, temos que

$$\frac{1}{5n^2 + n} \in \Theta\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ex.: Combinando com a propriedade do produto:

$$\frac{n^3 - 2n}{5n^2 + n} = (n^3 - 2n) \cdot \left(\frac{1}{5n^2 + n}\right) \in \Theta\left(n^3 \cdot \frac{1}{n^2}\right) = \Theta(n)$$

Propriedades

Logaritmo: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \omega(1)$, então $\log f(n) \in \Theta(\log g(n))$.

Propriedades

Logaritmo: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \omega(1)$, então $\log f(n) \in \Theta(\log g(n))$.

Ex.: Como $5n^2 + n \in \Theta(n^2)$ e $n^2 \in \omega(1)$, temos que $\log(5n^2 + n) \in \Theta(\log n^2) = \Theta(\log n)$.

Propriedades

Logaritmo: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \omega(1)$, então $\log f(n) \in \Theta(\log g(n))$.

Ex.: Como $5n^2 + n \in \Theta(n^2)$ e $n^2 \in \omega(1)$, temos que $\log(5n^2 + n) \in \Theta(\log n^2) = \Theta(\log n)$.

Quando $g(n)$ é constante pode não funcionar.

Propriedades

Logaritmo: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \omega(1)$, então $\log f(n) \in \Theta(\log g(n))$.

Ex.: Como $5n^2 + n \in \Theta(n^2)$ e $n^2 \in \omega(1)$, temos que $\log(5n^2 + n) \in \Theta(\log n^2) = \Theta(\log n)$.

Quando $g(n)$ é constante pode não funcionar.
Ex.: $1/2 \in \Theta(1)$, mas $\log_2(1/2) < 0$ (deveria ser assintoticamente positiva).

Propriedades

Podemos generalizar para qualquer composição de funções?

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \text{ implica em } h(f(n)) \in \Theta(h(g(n)))?$$

Propriedades

Podemos generalizar para qualquer composição de funções?

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \text{ implica em } h(f(n)) \in \Theta(h(g(n)))?$$

Funcionou para $h(n) = \log n$.

Propriedades

Podemos generalizar para qualquer composição de funções?

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \text{ implica em } h(f(n)) \in \Theta(h(g(n)))?$$

Funcionou para $h(n) = \log n$.

Para algumas funções não funciona.
Contraexemplo (fazendo $h(n) = 2^n$): $2n \in \Theta(n)$, mas $2^{2n} \notin \Theta(2^n)$.

Demonstrações das propriedades da notação Θ

Constante multiplicativa: Para toda constante $a > 0$, temos que $af(n) \in \Theta(f(n))$.

Constante multiplicativa: Para toda constante $a > 0$, temos que $af(n) \in \Theta(f(n))$.

- Assuma um valor positivo arbitrário para a constante a.

Constante multiplicativa: Para toda constante $a > 0$, temos que $af(n) \in \Theta(f(n))$.

- Assuma um valor positivo arbitrário para a constante a.
- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0 > 0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 f(n) \leq af(n) \leq c_2 f(n)$.

Constante multiplicativa: Para toda constante $a > 0$, temos que $af(n) \in \Theta(f(n))$.

- Assuma um valor positivo arbitrário para a constante a.
- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0 > 0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 f(n) \leq af(n) \leq c_2 f(n)$.
- Como $a > 0$, basta escolher $c_1 = a$, $c_2 = a$ e qualquer valor para n_0.

Dominação: Se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) + g(n) \in \Theta(g(n))$.

Dominação: Se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) + g(n) \in \Theta(g(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 g(n)$.

Dominação: Se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) + g(n) \in \Theta(g(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 g(n)$.
- Como $f(n)$ é assintoticamente positiva ($\exists m,\ \forall n \geq m,\ f(n) > 0$),

Dominação: Se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) + g(n) \in \Theta(g(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 g(n)$.
- Como $f(n)$ é assintoticamente positiva ($\exists m,\ \forall n \geq m,\ f(n) > 0$),

$$0 \leq f(n)$$

Dominação: Se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) + g(n) \in \Theta(g(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 g(n)$.
- Como $f(n)$ é assintoticamente positiva $(\exists m,\ \forall n \geq m,\ f(n) > 0)$,

$$0 \leq f(n) \quad \Rightarrow \quad g(n) \leq f(n) + g(n)$$

Dominação: Se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) + g(n) \in \Theta(g(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 g(n)$.
- Como $f(n)$ é assintoticamente positiva ($\exists m,\ \forall n \geq m,\ f(n) > 0$),

$$0 \leq f(n) \quad \Rightarrow \quad g(n) \leq f(n) + g(n) \qquad (\text{use } c_1 = 1 \text{ e } n_0 = m)$$

Dominação: Se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) + g(n) \in \Theta(g(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 g(n)$.
- Como $f(n)$ é assintoticamente positiva ($\exists m,\ \forall n \geq m,\ f(n) > 0$),

$$0 \leq f(n) \quad \Rightarrow \quad g(n) \leq f(n) + g(n) \qquad (\text{use } c_1 = 1 \text{ e } n_0 = m)$$

- Usando a premissa $\forall c' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ f(n) < c' g(n)$.

Dominação: Se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) + g(n) \in \Theta(g(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 g(n)$.
- Como $f(n)$ é assintoticamente positiva ($\exists m,\ \forall n \geq m,\ f(n) > 0$),

$$0 \leq f(n) \quad \Rightarrow \quad g(n) \leq f(n) + g(n) \qquad (\text{use } c_1 = 1 \text{ e } n_0 = m)$$

- Usando a premissa $\forall c' > 0,\ \exists n'_0,\ \forall n \geq n'_0,\ f(n) < c' g(n)$.
  - Sejam c'' e n''_0 valores particulares de c' e n'_0 que tornam $f(n) < c'' g(n)$ para todo $n \geq n''_0$.

Dominação: Se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) + g(n) \in \Theta(g(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 g(n)$.
- Como $f(n)$ é assintoticamente positiva ($\exists m,\ \forall n \geq m,\ f(n) > 0$),

$$0 \leq f(n) \quad \Rightarrow \quad g(n) \leq f(n) + g(n) \qquad (\text{use } c_1 = 1 \text{ e } n_0 = m)$$

- Usando a premissa $\forall c' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ f(n) < c' g(n)$.
  - Sejam c'' e n_0'' valores particulares de c' e n_0' que tornam $f(n) < c'' g(n)$ para todo $n \geq n_0''$.

$$f(n) < c'' g(n)$$

Dominação: Se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) + g(n) \in \Theta(g(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 g(n)$.
- Como $f(n)$ é assintoticamente positiva ($\exists m,\ \forall n \geq m,\ f(n) > 0$),

$$0 \leq f(n) \quad \Rightarrow \quad g(n) \leq f(n) + g(n) \qquad (\text{use } c_1 = 1 \text{ e } n_0 = m)$$

- Usando a premissa $\forall c' > 0,\ \exists n'_0,\ \forall n \geq n'_0,\ f(n) < c' g(n)$.
  - Sejam c'' e n''_0 valores particulares de c' e n'_0 que tornam $f(n) < c'' g(n)$ para todo $n \geq n''_0$.

$$f(n) < c'' g(n) \quad \Rightarrow \quad f(n) + g(n) < (c'' + 1) g(n)$$

Dominação: Se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) + g(n) \in \Theta(g(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 g(n)$.
- Como $f(n)$ é assintoticamente positiva ($\exists m,\ \forall n \geq m,\ f(n) > 0$),

$$0 \leq f(n) \quad \Rightarrow \quad g(n) \leq f(n) + g(n) \qquad (\text{use } c_1 = 1 \text{ e } n_0 = m)$$

- Usando a premissa $\forall c' > 0,\ \exists n'_0,\ \forall n \geq n'_0,\ f(n) < c' g(n)$.
  - Sejam c'' e n''_0 valores particulares de c' e n'_0 que tornam $f(n) < c'' g(n)$ para todo $n \geq n''_0$.

$$f(n) < c'' g(n) \quad \Rightarrow \quad f(n) + g(n) < (c'' + 1) g(n) \qquad (\text{use } c_2 = c'' + 1 \text{ e } n_0 = n''_0)$$

Dominação: Se $f(n) \in o(g(n))$ então $f(n) + g(n) \in \Theta(g(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 g(n)$.
- Como $f(n)$ é assintoticamente positiva $(\exists m,\ \forall n \geq m,\ f(n) > 0)$,

$$0 \leq f(n) \quad \Rightarrow \quad g(n) \leq f(n) + g(n) \qquad (\text{use } c_1 = 1 \text{ e } n_0 = m)$$

- Usando a premissa $\forall c' > 0,\ \exists n'_0,\ \forall n \geq n'_0,\ f(n) < c' g(n)$.
  - Sejam c'' e n''_0 valores particulares de c' e n'_0 que tornam $f(n) < c'' g(n)$ para todo $n \geq n''_0$.

$$f(n) < c'' g(n) \quad \Rightarrow \quad f(n) + g(n) < (c'' + 1) g(n) \qquad (\text{use } c_2 = c'' + 1 \text{ e } n_0 = n''_0)$$

- Devemos usar então $\max(m, n''_0)$ como valor de n_0.

Transitividade: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

Transitividade: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 h(n) \leq f(n) \leq c_2 h(n)$.

Transitividade: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 h(n) \leq f(n) \leq c_2 h(n)$.
- Pelas premissas,

$$\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$$

Transitividade: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 h(n) \leq f(n) \leq c_2 h(n)$.
- Pelas premissas,

$$\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$$

$$\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' h(n) \leq g(n) \leq c_2'' h(n)$$

Transitividade: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 h(n) \leq f(n) \leq c_2 h(n)$.
- Pelas premissas,

$$\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$$

$$\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' h(n) \leq g(n) \leq c_2'' h(n)$$

- Para $n_0 = \max(n_0', n_0'')$,

Transitividade: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 h(n) \leq f(n) \leq c_2 h(n)$.
- Pelas premissas,

$$\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$$

$$\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' h(n) \leq g(n) \leq c_2'' h(n)$$

- Para $n_0 = \max(n_0', n_0'')$,

$$c_1' g(n) \leq f(n)$$

Transitividade: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 h(n) \leq f(n) \leq c_2 h(n)$.
- Pelas premissas,

$$\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$$

$$\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' h(n) \leq g(n) \leq c_2'' h(n)$$

- Para $n_0 = \max(n_0', n_0'')$,

$$c_1' c_1'' h(n) \leq c_1' g(n) \leq f(n)$$

Transitividade: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 h(n) \leq f(n) \leq c_2 h(n)$.
- Pelas premissas,

$$\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$$

$$\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' h(n) \leq g(n) \leq c_2'' h(n)$$

- Para $n_0 = \max(n_0', n_0'')$,

$$c_1' c_1'' h(n) \leq c_1' g(n) \leq f(n) \quad (\text{faça } c_1 = c_1' c_1'' > 0)$$

Transitividade: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 h(n) \leq f(n) \leq c_2 h(n)$.
- Pelas premissas,

$$\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$$

$$\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' h(n) \leq g(n) \leq c_2'' h(n)$$

- Para $n_0 = \max(n_0', n_0'')$,

$$c_1' c_1'' h(n) \leq c_1' g(n) \leq f(n) \quad (\text{faça } c_1 = c_1' c_1'' > 0)$$

$$f(n) \leq c_2' g(n)$$

Transitividade: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 h(n) \leq f(n) \leq c_2 h(n)$.
- Pelas premissas,

$$\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$$

$$\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' h(n) \leq g(n) \leq c_2'' h(n)$$

- Para $n_0 = \max(n_0', n_0'')$,

$$c_1' c_1'' h(n) \leq c_1' g(n) \leq f(n) \quad (\text{faça } c_1 = c_1' c_1'' > 0)$$

$$f(n) \leq c_2' g(n) \leq c_2' c_2'' h(n)$$

Transitividade: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

- Queremos provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 h(n) \leq f(n) \leq c_2 h(n)$.
- Pelas premissas,

$$\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$$

$$\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' h(n) \leq g(n) \leq c_2'' h(n)$$

- Para $n_0 = \max(n_0', n_0'')$,

$$c_1' c_1'' h(n) \leq c_1' g(n) \leq f(n) \quad (\text{faça } c_1 = c_1' c_1'' > 0)$$

$$f(n) \leq c_2' g(n) \leq c_2' c_2'' h(n) \quad (\text{faça } c_2 = c_2' c_2'' > 0)$$

Adição: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) + f_2(n) \in \Theta(g_1(n) + g_2(n))$.

Adição: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) + f_2(n) \in \Theta(g_1(n) + g_2(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n)$
  - $\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' g_2(n) \leq f_2(n) \leq c_2'' g_2(n)$
- Provar que
  $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1(g_1(n) + g_2(n)) \leq f_1(n) + f_2(n) \leq c_2(g_1(n) + g_2(n))$.

Adição: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) + f_2(n) \in \Theta(g_1(n) + g_2(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n)$
  - $\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' g_2(n) \leq f_2(n) \leq c_2'' g_2(n)$
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1(g_1(n) + g_2(n)) \leq f_1(n) + f_2(n) \leq c_2(g_1(n) + g_2(n))$.
- Escolha n_0 que satisfaça simultaneamente as premissas, como $n_0 = \max(n_0', n_0'')$.
- Somando as premissas, obtemos

$$c_1' g_1(n) + c_1'' g_2(n) \leq f_1(n) + f_2(n) \leq c_2' g_1(n) + c_2'' g_2(n)$$

Adição: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) + f_2(n) \in \Theta(g_1(n) + g_2(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n)$
  - $\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' g_2(n) \leq f_2(n) \leq c_2'' g_2(n)$
- Provar que
  $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1(g_1(n) + g_2(n)) \leq f_1(n) + f_2(n) \leq c_2(g_1(n) + g_2(n))$.
- Escolha n_0 que satisfaça simultaneamente as premissas, como $n_0 = \max(n_0', n_0'')$.
- Somando as premissas, obtemos

$$c_1' g_1(n) + c_1'' g_2(n) \leq f_1(n) + f_2(n) \leq c_2' g_1(n) + c_2'' g_2(n)$$

$$\Rightarrow \quad \min(c_1', c_1'')(g_1(n) + g_2(n)) \leq f_1(n) + f_2(n) \leq \max(c_2', c_2'')(g_1(n) + g_2(n))$$

Adição: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) + f_2(n) \in \Theta(g_1(n) + g_2(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n)$
  - $\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' g_2(n) \leq f_2(n) \leq c_2'' g_2(n)$
- Provar que
  $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1(g_1(n) + g_2(n)) \leq f_1(n) + f_2(n) \leq c_2(g_1(n) + g_2(n))$.
- Escolha n_0 que satisfaça simultaneamente as premissas, como $n_0 = \max(n_0', n_0'')$.
- Somando as premissas, obtemos

$$c_1' g_1(n) + c_1'' g_2(n) \leq f_1(n) + f_2(n) \leq c_2' g_1(n) + c_2'' g_2(n)$$

$$\Rightarrow \quad \min(c_1', c_1'')(g_1(n) + g_2(n)) \leq f_1(n) + f_2(n) \leq \max(c_2', c_2'')(g_1(n) + g_2(n))$$

- Então basta escolher $c_1 = \min(c_1', c_1'')$ e $c_2 = \min(c_2', c_2'')$.

Produto: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Theta(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

Produto: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Theta(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n)$
  - $\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' g_2(n) \leq f_2(n) \leq c_2'' g_2(n)$
- Queremos provar $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g_1(n) g_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \leq c_2 g_1(n) g_2(n)$.

Produto: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Theta(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n)$
  - $\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' g_2(n) \leq f_2(n) \leq c_2'' g_2(n)$
- Queremos provar $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g_1(n) g_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \leq c_2 g_1(n) g_2(n)$.
- Como $f_2(n) > 0$ para n_0 suf. grande, multiplicar por $f_2(n)$ não altera as desigualdades.

$$c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n) \ \Rightarrow\ c_1' g_1(n) f_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \leq c_2' g_1(n) f_2(n)$$

Produto: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Theta(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n)$
  - $\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' g_2(n) \leq f_2(n) \leq c_2'' g_2(n)$
- Queremos provar $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g_1(n) g_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \leq c_2 g_1(n) g_2(n)$.
- Como $f_2(n) > 0$ para n_0 suf. grande, multiplicar por $f_2(n)$ não altera as desigualdades.

$$c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n) \ \Rightarrow\ c_1' g_1(n) f_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \leq c_2' g_1(n) f_2(n)$$

$$c_1' g_1(n)(c_1'' g_2(n)) \leq c_1' g_1(n) f_2(n) \leq f_1(n) f_2(n)$$

Produto: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Theta(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n)$
  - $\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' g_2(n) \leq f_2(n) \leq c_2'' g_2(n)$
- Queremos provar $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g_1(n) g_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \leq c_2 g_1(n) g_2(n)$.
- Como $f_2(n) > 0$ para n_0 suf. grande, multiplicar por $f_2(n)$ não altera as desigualdades.

$$c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n) \ \Rightarrow\ c_1' g_1(n) f_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \leq c_2' g_1(n) f_2(n)$$

$$c_1' g_1(n)(c_1'' g_2(n)) \leq c_1' g_1(n) f_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \qquad \text{(basta escolher } c_1 = c_1' c_1'' > 0\text{)}$$

Produto: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Theta(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n)$
  - $\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' g_2(n) \leq f_2(n) \leq c_2'' g_2(n)$
- Queremos provar $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g_1(n) g_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \leq c_2 g_1(n) g_2(n)$.
- Como $f_2(n) > 0$ para n_0 suf. grande, multiplicar por $f_2(n)$ não altera as desigualdades.

$$c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n) \;\Rightarrow\; c_1' g_1(n) f_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \leq c_2' g_1(n) f_2(n)$$

$$c_1' g_1(n)(c_1'' g_2(n)) \leq c_1' g_1(n) f_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \qquad \text{(basta escolher } c_1 = c_1' c_1'' > 0\text{)}$$

$$f_1(n) f_2(n) \leq c_2' g_1(n) f_2(n) \leq c_2' g_1(n)(c_2'' g_2(n))$$

Produto: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Theta(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n)$
  - $\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' g_2(n) \leq f_2(n) \leq c_2'' g_2(n)$
- Queremos provar $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g_1(n) g_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \leq c_2 g_1(n) g_2(n)$.
- Como $f_2(n) > 0$ para n_0 suf. grande, multiplicar por $f_2(n)$ não altera as desigualdades.

$$c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n) \ \Rightarrow\ c_1' g_1(n) f_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \leq c_2' g_1(n) f_2(n)$$

$$c_1' g_1(n)(c_1'' g_2(n)) \leq c_1' g_1(n) f_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \qquad \text{(basta escolher } c_1 = c_1' c_1'' > 0\text{)}$$

$$f_1(n) f_2(n) \leq c_2' g_1(n) f_2(n) \leq c_2' g_1(n)(c_2'' g_2(n)) \qquad \text{(basta escolher } c_2 = c_2' c_2'' > 0\text{)}$$

Produto: Se $f_1(n) \in \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Theta(g_2(n))$, então $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Theta(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n)$
  - $\exists c_1'', c_2'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c_1'' g_2(n) \leq f_2(n) \leq c_2'' g_2(n)$
- Queremos provar $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 g_1(n) g_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \leq c_2 g_1(n) g_2(n)$.
- Como $f_2(n) > 0$ para n_0 suf. grande, multiplicar por $f_2(n)$ não altera as desigualdades.

$$c_1' g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2' g_1(n) \ \Rightarrow\ c_1' g_1(n) f_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \leq c_2' g_1(n) f_2(n)$$

$$c_1' g_1(n)(c_1'' g_2(n)) \leq c_1' g_1(n) f_2(n) \leq f_1(n) f_2(n) \quad \text{(basta escolher } c_1 = c_1' c_1'' > 0\text{)}$$

$$f_1(n) f_2(n) \leq c_2' g_1(n) f_2(n) \leq c_2' g_1(n)(c_2'' g_2(n)) \quad \text{(basta escolher } c_2 = c_2' c_2'' > 0\text{)}$$

- Para n_0 escolhemos o menor valor que satisfaz as premissas e torna $f_2(n)$ positiva.

Inverso: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $1/f(n) \in \Theta(1/g(n))$.

Inverso: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $1/f(n) \in \Theta(1/g(n))$.

- Premissa: $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1(1/g(n)) \leq 1/f(n) \leq c_2(1/g(n))$.

Inverso: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $1/f(n) \in \Theta(1/g(n))$.

- Premissa: $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1(1/g(n)) \leq 1/f(n) \leq c_2(1/g(n))$.
- Como $f(n)$ e $g(n)$ são assintoticamente positivas, $1/f(n)$ e $1/g(n)$ também são.

Inverso: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $1/f(n) \in \Theta(1/g(n))$.

- Premissa: $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1(1/g(n)) \leq 1/f(n) \leq c_2(1/g(n))$.
- Como $f(n)$ e $g(n)$ são assintoticamente positivas, $1/f(n)$ e $1/g(n)$ também são.
- Como a função $1/n$ é decrescente, aplicando na premissa inverte as desigualdades:

Inverso: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $1/f(n) \in \Theta(1/g(n))$.

- Premissa: $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1(1/g(n)) \leq 1/f(n) \leq c_2(1/g(n))$.
- Como $f(n)$ e $g(n)$ são assintoticamente positivas, $1/f(n)$ e $1/g(n)$ também são.
- Como a função $1/n$ é decrescente, aplicando na premissa inverte as desigualdades:

$$c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c_2' g(n)} \leq \frac{1}{f(n)} \leq \frac{1}{c_1' g(n)}$$

Inverso: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $1/f(n) \in \Theta(1/g(n))$.

- Premissa: $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1(1/g(n)) \leq 1/f(n) \leq c_2(1/g(n))$.
- Como $f(n)$ e $g(n)$ são assintoticamente positivas, $1/f(n)$ e $1/g(n)$ também são.
- Como a função $1/n$ é decrescente, aplicando na premissa inverte as desigualdades:

$$c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c_2' g(n)} \leq \frac{1}{f(n)} \leq \frac{1}{c_1' g(n)}$$

Inverso: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $1/f(n) \in \Theta(1/g(n))$.

- Premissa: $\exists c'_1, c'_2 > 0,\ \exists n'_0,\ \forall n \geq n'_0,\ c'_1 g(n) \leq f(n) \leq c'_2 g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1(1/g(n)) \leq 1/f(n) \leq c_2(1/g(n))$.
- Como $f(n)$ e $g(n)$ são assintoticamente positivas, $1/f(n)$ e $1/g(n)$ também são.
- Como a função $1/n$ é decrescente, aplicando na premissa inverte as desigualdades:

$$c'_1 g(n) \leq f(n) \leq c'_2 g(n) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c'_2 g(n)} \leq \frac{1}{f(n)} \leq \frac{1}{c'_1 g(n)}$$

- Como $1/c'_1$ e $1/c'_2$ são positivos, basta fazer $c_1 = 1/c'_2$, $c_2 = 1/c'_1$ e $n_0 = n'_0$.

Logaritmo: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \omega(1)$, então $\log f(n) \in \Theta(\log g(n))$.

Logaritmo: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \omega(1)$, então $\log f(n) \in \Theta(\log g(n))$.

- Premissas:
    - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$.
    - $\forall c'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c'' < g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 \log g(n) \leq \log f(n) \leq c_2 \log g(n)$.

Logaritmo: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \omega(1)$, então $\log f(n) \in \Theta(\log g(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$.
  - $\forall c'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c'' < g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 \log g(n) \leq \log f(n) \leq c_2 \log g(n)$.
- Escolhemos n_0 tq $f(n) > 1$ e $g(n) > 1,\ \forall n \geq n_0$, tornando $\log f(n)$ e $\log g(n)$ positivas.

Logaritmo: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \omega(1)$, então $\log f(n) \in \Theta(\log g(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$.
  - $\forall c'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c'' < g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 \log g(n) \leq \log f(n) \leq c_2 \log g(n)$.
- Escolhemos n_0 tq $f(n) > 1$ e $g(n) > 1,\ \forall n \geq n_0$, tornando $\log f(n)$ e $\log g(n)$ positivas.
- Para base > 1 a função log é crescente, e portanto não altera as desigualdades:

Logaritmo: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \omega(1)$, então $\log f(n) \in \Theta(\log g(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$.
  - $\forall c'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c'' < g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 \log g(n) \leq \log f(n) \leq c_2 \log g(n)$.
- Escolhemos n_0 tq $f(n) > 1$ e $g(n) > 1$, $\forall n \geq n_0$, tornando $\log f(n)$ e $\log g(n)$ positivas.
- Para base > 1 a função log é crescente, e portanto não altera as desigualdades:

$$c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n) \quad \Rightarrow \quad \log(c_1') + \log g(n) \leq \log f(n) \leq \log(c_2') + \log g(n)$$

Logaritmo: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \omega(1)$, então $\log f(n) \in \Theta(\log g(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$.
  - $\forall c'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c'' < g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 \log g(n) \leq \log f(n) \leq c_2 \log g(n)$.
- Escolhemos n_0 tq $f(n) > 1$ e $g(n) > 1$, $\forall n \geq n_0$, tornando $\log f(n)$ e $\log g(n)$ positivas.
- Para base > 1 a função log é crescente, e portanto não altera as desigualdades:

$$c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n) \quad \Rightarrow \quad \log(c_1') + \log g(n) \leq \log f(n) \leq \log(c_2') + \log g(n)$$

  - Se $\log(c_1') \geq 0$, basta escolher $c_1 = 1$.

Logaritmo: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \omega(1)$, então $\log f(n) \in \Theta(\log g(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$.
  - $\forall c'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c'' < g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 \log g(n) \leq \log f(n) \leq c_2 \log g(n)$.
- Escolhemos n_0 tq $f(n) > 1$ e $g(n) > 1$, $\forall n \geq n_0$, tornando $\log f(n)$ e $\log g(n)$ positivas.
- Para base > 1 a função log é crescente, e portanto não altera as desigualdades:

$$c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n) \quad \Rightarrow \quad \log(c_1') + \log g(n) \leq \log f(n) \leq \log(c_2') + \log g(n)$$

  - Se $\log(c_1') \geq 0$, basta escolher $c_1 = 1$.
  - Se $\log(c_1') < 0$, faça $c_1 = 1/2$ e n_0'' tal que $g(n) \geq 1/c_1'^2$ para todo $n \geq n_0''$.

Logaritmo: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \omega(1)$, então $\log f(n) \in \Theta(\log g(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$.
  - $\forall c'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c'' < g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 \log g(n) \leq \log f(n) \leq c_2 \log g(n)$.
- Escolhemos n_0 tq $f(n) > 1$ e $g(n) > 1,\ \forall n \geq n_0$, tornando $\log f(n)$ e $\log g(n)$ positivas.
- Para base > 1 a função log é crescente, e portanto não altera as desigualdades:

$$c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n) \quad \Rightarrow \quad \log(c_1') + \log g(n) \leq \log f(n) \leq \log(c_2') + \log g(n)$$

  - Se $\log(c_1') \geq 0$, basta escolher $c_1 = 1$.
  - Se $\log(c_1') < 0$, faça $c_1 = 1/2$ e n_0'' tal que $g(n) \geq 1/c_1'^2$ para todo $n \geq n_0''$.
  - Se $\log(c_2') \leq 0$, basta escolher $c_2 = 1$.

Logaritmo: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \omega(1)$, então $\log f(n) \in \Theta(\log g(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$.
  - $\forall c'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c'' < g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 \log g(n) \leq \log f(n) \leq c_2 \log g(n)$.
- Escolhemos n_0 tq $f(n) > 1$ e $g(n) > 1,\ \forall n \geq n_0$, tornando $\log f(n)$ e $\log g(n)$ positivas.
- Para base > 1 a função log é crescente, e portanto não altera as desigualdades:

$$c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n) \quad \Rightarrow \quad \log(c_1') + \log g(n) \leq \log f(n) \leq \log(c_2') + \log g(n)$$

  - Se $\log(c_1') \geq 0$, basta escolher $c_1 = 1$.
  - Se $\log(c_1') < 0$, faça $c_1 = 1/2$ e n_0'' tal que $g(n) \geq 1/c_1'^2$ para todo $n \geq n_0''$.
  - Se $\log(c_2') \leq 0$, basta escolher $c_2 = 1$.
  - Se $\log(c_2') > 0$, faça $c_2 = 2$ e n_0'' tal que $g(n) \geq c_2'$ para todo $n \geq n_0''$.

Logaritmo: Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \omega(1)$, então $\log f(n) \in \Theta(\log g(n))$.

- Premissas:
  - $\exists c_1', c_2' > 0,\ \exists n_0',\ \forall n \geq n_0',\ c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n)$.
  - $\forall c'' > 0,\ \exists n_0'',\ \forall n \geq n_0'',\ c'' < g(n)$.
- Provar que $\exists c_1, c_2 > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ c_1 \log g(n) \leq \log f(n) \leq c_2 \log g(n)$.
- Escolhemos n_0 tq $f(n) > 1$ e $g(n) > 1$, $\forall n \geq n_0$, tornando $\log f(n)$ e $\log g(n)$ positivas.
- Para base > 1 a função log é crescente, e portanto não altera as desigualdades:

$$c_1' g(n) \leq f(n) \leq c_2' g(n) \quad \Rightarrow \quad \log(c_1') + \log g(n) \leq \log f(n) \leq \log(c_2') + \log g(n)$$

  - Se $\log(c_1') \geq 0$, basta escolher $c_1 = 1$.
  - Se $\log(c_1') < 0$, faça $c_1 = 1/2$ e n_0'' tal que $g(n) \geq 1/c_1'^2$ para todo $n \geq n_0''$.
  - Se $\log(c_2') \leq 0$, basta escolher $c_2 = 1$.
  - Se $\log(c_2') > 0$, faça $c_2 = 2$ e n_0'' tal que $g(n) \geq c_2'$ para todo $n \geq n_0''$.
  - Escolha para n_0 o menor valor que satisfaça todas as condições.