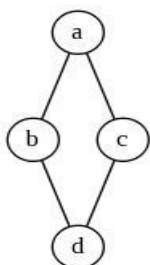


1.1. Algorytmy kolorowania wierzchołków grafu

1.1.1. Kolorowanie zachłanne wierzchołków

Kolorowaniem zachłannym (ang. *greedy coloring*) jest kolorowanie wierzchołków grafu, przy pomocy algorytmu zachłannego, który dla ustalonej wcześniej kolejności przegląda wszystkie wierzchołki i każdemu wierzchołkowi przydziela pierwszy z dostępnych kolorów. Jeśli chodzi o osiągnięcie kolorowania minimalną ilość kolorów, to kolorowanie zachłanne tego nie gwarantuje, jednakże algorytm zachłanny wykorzystywany jest w wielu algorytmach kolorowań wierzchołków takich jak *SL* (ang. *smallest last*) czy też *LF* (ang. *largest first*). Rozważmy działanie algorytmu zachłannego na podstawie grafu nieskierowanego, który posiada 4 wierzchołki i 4 krawędzie dla kolejności: *a*, *b*, *c*, *d*.

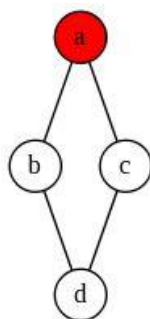
Graf wyjściowy:



Rys. 2.1 Graf pierwotny

Początkowo rezerwujemy taką ilość kolorów, jaką graf posiada ilość wierzchołków:

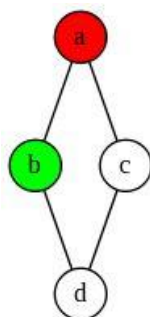
1. czerwony
2. zielony
3. niebieski
4. żółty



Wybieramy wierzchołek *a*.

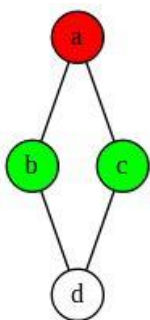
Kolorujemy go pierwszym dostępnym kolorem, czyli kolorem czerwonym.

Rys.2.2 Algorytm zachłanny krok 1



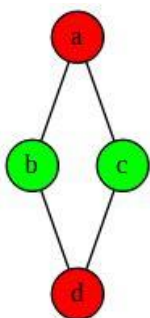
Wybieramy wierzchołek *b*. Przeglądamy jego sąsiadów i wykreślamy z listy dostępnych kolorów kolory użyte. W tym przypadku wierzchołek *a*, który jest sąsiadem wierzchołka *b*, posiada kolor czerwony. Zatem wierzchołkowi *b*, nie możemy przydzielić koloru czerwonego. Przydzielamy mu następny dostępny kolor, czyli kolor zielony.

Rys. 2.3 Algorytm zachłanny krok 2



Rys.2.4 Algorytm zachłanny krok 3

Wybieramy wierzchołek *c*. Przeglądamy jego sąsiadów i wykreślamy z listy dostępnych kolorów kolory użyte. Pierwszy z kolorów – czerwony jest użyty przez sąsiada – wierzchołek *a*. Z dostępnych kolorów wybieramy kolejny kolor – zielony.



Rys. 2.4 Algorytm zachłanny krok 4

Wybieramy ostatni z wierzchołków – wierzchołek *d*. Jego sąsiedzi – wierzchołki *b* i *c* posiadają kolor zielony. Dlatego też możemy pokolorować wierzchołek *d* pierwszym kolorem z listy, czyli kolorem czerwonym. Tym oto sposobem mamy pokolorowany graf, składający się z czterech wierzchołków, tylko dwoma kolorami.

1.1.2. Algorytm SL

Algorytm SL (ang. *smallest last*) wykorzystuje wcześniej omawiany algorytm zachłanny. Działanie algorytmu SL dzielimy na dwie fazy. Pierwsza to faza redukcji grafu. Szukamy wierzchołka o minimalnym stopniu a następnie usuwamy go z grafu. Krok ten należy powtarzać dopóki graf nie jest pusty. Druga z faz polega na kolorowaniu wierzchołków zachłannie, według kolejności, która ustaliliśmy w fazie pierwszej. Zaczynamy od wierzchołków usuwanych później. Algorytm ten dobrze radzi sobie z kolorowaniem grafów cyklicznych, kołowych oraz drzew. Nie radzi sobie natomiast z grafami dwudzielnymi.

1.1.3. Algorytm LF

Algorytm LF (ang. *largest first*) tak samo jak algorytm SL, również wykorzystuje algorytm zachłanny. Kolorowanie wierzchołków grafu za pomocą algorytmu LF można przedstawić:

- Należy uporządkować wierzchołki grafu malejąco według ich stopni.
- Następnie kolorować wierzchołki zachłannie zgodnie z przyjętą permutacją

Algorytm LF jest algorytmem statycznym, ponieważ raz ustalona kolejność wierzchołków nie ulega zmianie w trakcie jego działania. Najmniejszym dość trudnym grafem do pokolorowania dla

tego algorytmu jest tzw. „koperta”, która jest grafem 3-barwnym, natomiast algorytm wykorzystuje cztery kolory.

1.1.4. Algorytm dokładny

Pokolorowanie wierzchołków grafu z wykorzystaniem najmniejszej możliwej liczby kolorów można rozwiązać za pomocą algorytmu dokładnego. W algorytmie tym sprawdzane są wszystkie dostępne układy kolorowania wierzchołków, a następnie wybierany jest ten układ w którym zużyta jest najmniejsza liczba kolorów.

Przy założeniu że graf nie jest zerowy, jego działanie przedstawiane jest następująco:

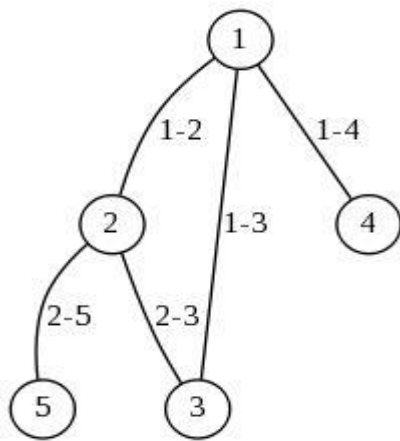
- Kolorowane są wierzchołki grafu wszystkimi dostępnymi kombinacjami pierwszych dwóch kolorów. Podczas każdej z kombinacji sprawdzany jest warunek czy żadne z sąsiadujących wierzchołków nie posiadają tego samego koloru.
- Następnie zwiększana jest liczba kombinacji kolorów do n , gdzie n oznacza liczbę wierzchołków w grafie. Krok ten powtarzany jest do momentu, gdy znaleziona zostanie kombinacja spełniająca warunek pokolorowania grafu

Algorytm ten jednak cechuje się niekorzystną klasą złożoności obliczeniowej, dlatego też jego wykorzystanie jest zalecane tylko w mniejszych grafach, maksymalnie 10 – 12 wierzchołków.

1.2. Algorytmy kolorowania krawędzi

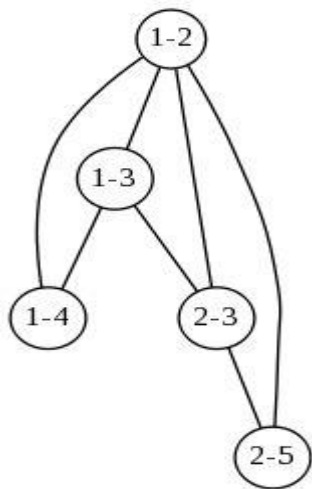
1.2.1. Kolorowanie krawędzi z grafem krawędziowym

W pierwszym kroku tego algorytmu tworzony jest graf krawędziowy GK dla grafu wejściowego G . Graf krawędziowy GK jest tworzony w taki sposób, że krawędzie z grafu wejściowego G odpowiadają wierzchołkom w grafie krawędziowym GK . Dwa wierzchołki (x_1, x_2) i (x_3, x_4) grafu krawędziowego GK są ze sobą połączone jeśli w grafie G : $x_1 = x_3$ lub $x_1 = x_4$ lub $x_2 = x_3$ lub $x_2 = x_4$, czyli krawędzie (x_1, x_2) i (x_3, x_4) są połączone ze sobą przez wspólny wierzchołek. Należy również odpowiednio nazwać utworzone wierzchołki w grafie krawędziowym GK , tak by efektywnie móc przekształcić graf krawędziowy GK , z powrotem do grafu wejściowego. Po poprawnym utworzeniu grafu krawędziowego, kolorujemy graf krawędziowy algorytmem zachłannym. Następnie powracamy do grafu wejściowego i krawędziom grafu wejściowego przypisujemy odpowiadające im kolory wierzchołków grafu krawędziowego. Poniżej przedstawione został działanie algorytmu kolorowania krawędzi z wykorzystaniem grafu krawędziowego na podstawie przykładowego grafu.



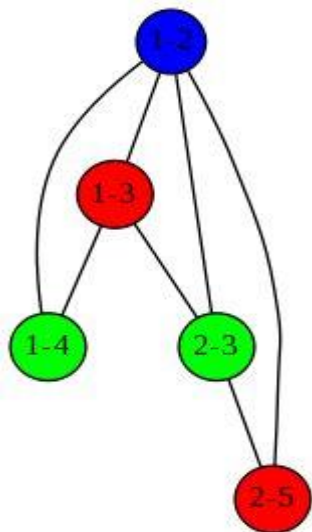
Rys. 2.5 Graf pierwotny

Na rysunku 2.5 przedstawiony został graf pierwotny, którego krawędzie będą kolorowane.



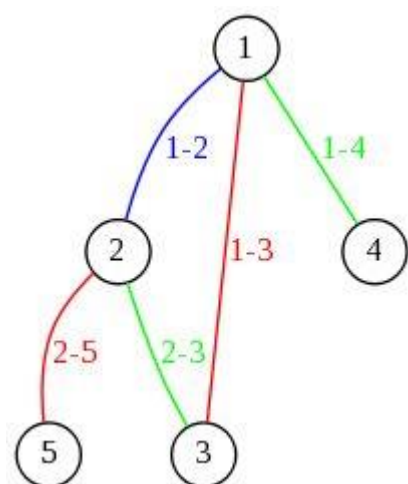
Rys. 2.6 Utworzony graf krawędziowy na podstawie grafu pierwotnego

Na rysunku 2.6 przedstawiony został utworzony graf krawędziowy na podstawie grafu pierwotnego. Nazwy wierzchołków odpowiadają nazwom krawędzi grafu pierwotnego. Połączenia między wierzchołkami w grafie krawędziowym są tworzone, jeśli dwie krawędzie grafu pierwotnego są incydentne z tym samym wierzchołkiem.



Rys. 2.7 Wynik kolorowania wierzchołków grafu krawędziowego

Na rysunku 2.7 przedstawiono wynik kolorowania wierzchołków grafu krawędziowego.



Na rysunku 2.8 przedstawiono wynik kolorowania krawędzi grafu pierwotnego. Kolory krawędzi odpowiadają uzyskanym kolorom wierzchołków grafu krawędziowego.

Rys. 2.8 Wynik kolorowania krawędzi grafu pierwotnego

Zestawy prawidłowych kolorowań generują funkcje w Maximie opisane w laboratorium nr 7.