Matematyka Dyskretna 1., WEiI, Katedra Elektrotechniki i Podstaw Informatyki PRz.

Wyznaczanie w grafie nieskierowanym podzbiorów wierzchołków i krawędzi o wybranych właściwościach

Celem tego ćwiczenia jest wyznaczanie specyficznych podzbiorów zbioru wierzchołków lub zbioru krawędzi grafu, które to podzbiory mogą mieć zastosowanie do rozwiązywania różnych problemów praktycznych. Rozważane są grafy nieskierowane bez wag, ale można by wierzchołkom albo krawędziom przypisać pewne wartości liczbowe i wtedy wśród specyficznych zbiorów szukać takiego, dla którego suma wag wierzchołków albo krawędzi będzie najmniejsza (albo największa).

1. Szukanie minimalnych pokryć wierzchołkowych, maksymalnych zbiorów niezależnych wierzchołków oraz klik.

Zbiorem niezależnym grafu $G = (V, E)$ nazywamy zbiór wierzchołków $U \subseteq V$ taki, że żadne dwa wierzchołki z tego zbioru nie są połączone ze sobą bezpośrednio krawędzią. Przyjmuje się, że zbiór U składający się z jednego, dowolnego wierzchołka zbioru V jest zbiorem niezależnym. Graf zazwyczaj posiada wiele zbiorów niezależnych. Mogą się one różnić liczbą wierzchołków.

Zbiór niezależny jest maksymalny, jeżeli nie jest podzbiorem żadnego innego zbioru niezależnego. Innymi słowy, do maksymalnego zbioru niezależnego S nie można dołożyć żadnego wierzchołka ze zbioru $V \setminus S$, ponieważ każdy wierzchołek ze zbioru $V \setminus S$ sąsiaduje z co najmniej jednym wierzchołkiem ze zbioru S. Graf może posiadać wiele maksymalnych zbiorów niezależnych i mogą one różnić się liczbą wierzchołków.

Najbardziej liczny maksymalny zbiór niezależny określa się mianem największego zbioru niezależnego. Graf może posiadać wiele największych zbiorów niezależnych. Jeśli jest ich więcej niż jeden, wówczas wszystkie mają po tyle samo wierzchołków. Każdy największy zbiór niezależny jest równocześnie maksymalnym zbiorem niezależnym, ale stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tzn. nie każdy maksymalny zbiór niezależny jest największym. Liczbę wierzchołków w największym zbiorze niezależnym (w każdym największym, jeżeli jest ich kilka) oznacza się przez $\alpha(G)$ i nazywa **liczbą niezależności** grafu G.

Przeciwieństwem zbiorów niezależnych są tzw. **kliki**, tzn. zbiory wierzchołków wzajemnie sąsiednich. Zauważmy, że wierzchołki każdego zbioru niezależnego grafu G są jednocześnie wierzchołkami pewnej kliki w grafie dopełnienia, czyli w $\bar{G}$. W szczególności wierzchołki, które tworzą największy zbiór niezależny w grafie G, są wierzchołkami największej kliki w grafie $\bar{G}$, czyli kliki z największą liczbą wierzchołków. Jeżeli oznaczyć liczbę wierzchołków największej kliki w grafie G za pomocą $\omega(G)$, wówczas $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$ oraz $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$. Z tego wynika, że problemy wyznaczania największego zbioru niezależnego i największej kliki są równoważne. Znając metodę rozwiązania jednego z nich, możemy, po utworzeniu grafu dopełnienia, zastosować ją do drugiego problemu.

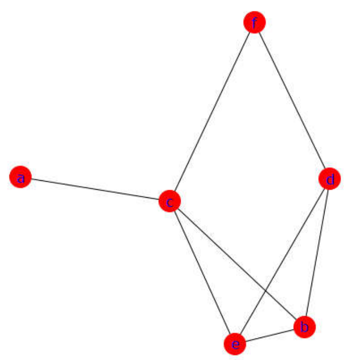
Pokryciem wierzchołkowym grafu $G = (V, E)$ nazywamy zbiór wierzchołków $P \subseteq V$ taki, że każda krawędź $e \in E$ jest incydentna z przynajmniej jednym wierzchołkiem ze zbioru P. Innymi słowy, każda krawędź ma przynajmniej jeden koniec w zbiorze P. Oznacza te, że liczba wierzchołków każdego pokrycia należy do przedziału $\langle 1, n \rangle$, gdzie $n = |V|$. W grafie zazwyczaj istnieje więcej niż jedno pokrycie i mogą one różnić się liczbą wierzchołków.

Pokrycie P jest minimalne, jeżeli usunięcie jakiegokolwiek wierzchołka $v \in P$ powoduje, że $P \backslash \{v\}$ nie jest pokryciem. Innymi słowy, pokrycie jest minimalne, jeżeli żaden podzbiór wierzchołków tego pokrycia nie jest pokryciem. Jeżeli przez $|P|$ oznaczymy liczbę wierzchołków pokrycia P, to aby zbadać podanym sposobem, czy jest ono minimalne, należy rozważyć $2^{|P|} - 1$ podzbiorów zbioru P (-1 wynika z faktu, że podzbioru w postaci zbioru pustego nie uwzględniamy). Jeżeli żaden z tych podzbiorów nie jest pokryciem, to P jest pokryciem minimalnym. Zbiór pokryć minimalnych jest podzbiorem zbioru wszystkich pokryć.

Pokrycie minimalne o najmniejszej liczbie wierzchołków nazywa się najmniejszym pokryciem wierzchołkowym. Liczbę wierzchołków najmniejszego pokrycia wierzchołkowego oznacza się przez $\beta(G)$. Konieczność wyznaczania najmniejszych pokryć pojawia się w zagadnieniach, w których chcemy w węzłach pewnej sieci rozmieścić jak najmniej zasobów obsługujących, monitorujących lub nadzorujących połączenia między węzłami tej sieci. Na przykład zadanie może polegać na rozmieszczeniu (wybudowaniu, ustanowieniu) posterunków policji w jak najmniejszej liczbie miejscowości (wierzchołków grafu) tak, aby każda droga między dwiema miejscowościami (aby każda krawędź) mogła być bezpośrednio kontrolowana przez co najmniej jeden patrol policji, zainstalowany na jednym z końców tej drogi (na jednym z końców krawędzi).

Jeden z algebraicznych sposobów systematycznego wyznaczania wszystkich albo tylko minimalnych pokryć wierzchołkowych opiera się na odpowiednio skonstruowanej funkcji boolowskiej, w której zmiennymi są nazwy wierzchołków. Zgodnie z definicją pokrycia wierzchołkowego, każda krawędź grafu G ma co najmniej jeden koniec w pokryciu. Zatem w pokryciu jest jeden <u>lub</u> drugi koniec krawędzi. Ta alternatywa końców musi zachodzić dla każdej krawędzi, czyli funkcja boolowska będzie miała postać koniunkcji alternatyw. Na przykład dla grafu przedstawionego na rysunku poniżej funkcja boolowska przyjmie postać:

$$fun(V) = (a + c)(c + e)(e + b)(b + c)(b + d)(d + e)(c + f)(d + f).$$



Symbol + oznacza logiczny *or*, natomiast niewidoczny symbol * między nawiasami oznacza logiczny *and*. Wymnożenie tych nawiasów zgodnie z klasycznymi regułami algebry, bez wykonywania jakichkolwiek uproszczeń, doprowadzi do sumy iloczynów. W tej sumie niektóre iloczyny będą się powtarzać, tzn. wystąpią więcej niż jeden raz. Te nadmiarowe iloczyny nie wnoszą żadnej dodatkowej informacji o pokryciach wierzchołkowych, dlatego można (należy) je usunąć. Wierzchołki każdego iloczynu otrzymanej sumy logicznej będą stanowić jedno pokrycie wierzchołkowe grafu. Aby wyznaczyć pokrycia minimalne, należy doprowadzić funkcję $fun(V)$ do minimalnej formuły alternatywnej, czyli do sumy jak najmniejszej liczby niepochłaniających się iloczynów, stosując reguły upraszczania wyrażeń boolowskich. Szczegóły sprawnego upraszczania były wyjaśniane na wykładzie.

$$fun(V) = (a+c)(c+e)(e+b)(b+c)(b+d)(d+e)(c+f)(d+f) =$$

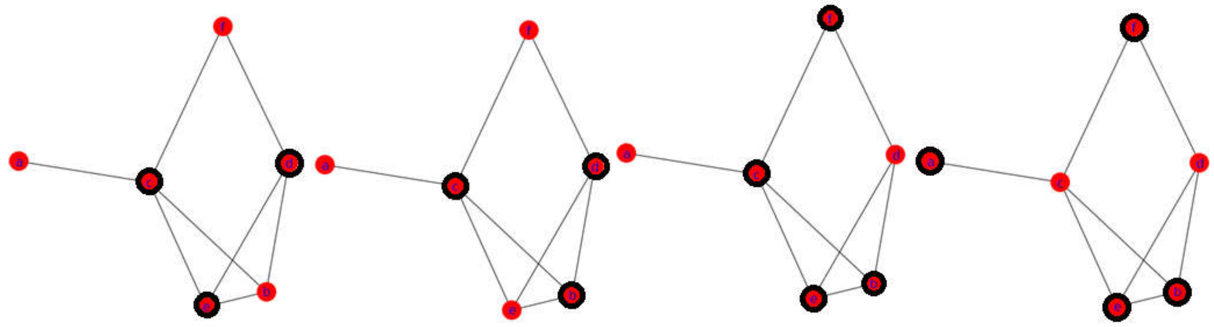
$$= (c+abef)(d+bef)(e+b) = (cd+cbef+abefd+abef)(e+b) =$$

$$= (cd+cbef+abef)(e+b) = cde+cdb+cbef+cbef+abef+abef =$$

$$= cde+cdb+cbef+abef$$

Tak więc, minimalne pokrycia wierzchołkowe to następujące zbiory:

$B_1 = \{c,d,e\}$, $B_2 = \{c,d,b\}$, $B_3 = \{c,b,e,f\}$, $B_4 = \{a,b,e,f\}$.



B_1 B_2 B_3 B_4

Zauważmy, że pomiędzy wierzchołkami, które nie należą do danego pokrycia wierzchołkowego P (minimalnego lub nie) nie może być żadnej łączącej je krawędzi. Gdyby bowiem jakaś krawędź istniała, to żaden z dwóch końców tej krawędzi nie byłby wierzchołkiem z pokrycia P, a to jest sprzeczne z definicją pokrycia, która mówi, że każda krawędź ma przynajmniej jeden koniec w pokryciu. W takim razie dla każdego pokrycia P wierzchołki zbioru $V \backslash P$ tworzą zbiór niezależny, gdyż między żadną parą wierzchołków ze zbioru $V \backslash P$ nie istnieje krawędź, a taka jest właśnie definicja zbioru niezależnego wierzchołków w grafie. Ponadto, dla każdego pokrycia minimalnego wierzchołki nie należące do tego pokrycia tworzą maksymalny zbiór niezależny wierzchołków. I w końcu, wierzchołki nie należące do najmniejszego pokrycia, tworzą największy maksymalny zbiór niezależny wierzchołków.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że maksymalne zbiory niezależne wierzchołków można wyznaczyć dla rozważanego grafu w prosty sposób, za pomocą różnicy zbiorów, jeśli oczywiście wcześniej wyznaczono (np. metodą algebry Boole'a) wszystkie minimalne pokrycia wierzchołkowe.

Dla rozważnego grafu maksymalne zbiory niezależne wierzchołków mają więc postać:

$S_1 = V \backslash B_1 = \{a,b,f\}$, $S_2 = V \backslash B_2 = \{a,e,f\}$, $S_3 = V \backslash B_3 = \{a,d\}$, $S_4 = V \backslash B_4 = \{c,d\}$,

gdzie $V = \{a,b,c,d,e,f\}$ to oczywiście zbiór wszystkich wierzchołków grafu.

Niech $\alpha(G)$ oznacza liczbę wierzchołków w największym zbiorze niezależnym. Wówczas dla każdego grafu G prawdziwa jest równość: $\alpha(G) + \beta(G) = n$. Liczbę $\alpha(G)$ nazywa się liczbą niezależności grafu G, natomiast liczbę $\beta(G)$ nazywa się pokryciową liczbą wierzchołkową grafu G lub czasem liczbą bazową. W tym przypadku $\alpha(G) = 3$ oraz $\beta(G) = 3$ i oczywiście $n = 6$.

2. Szukanie maksymalnych zbiorów niezależnych krawędzi oraz minimalnych pokryć krawędziowych.

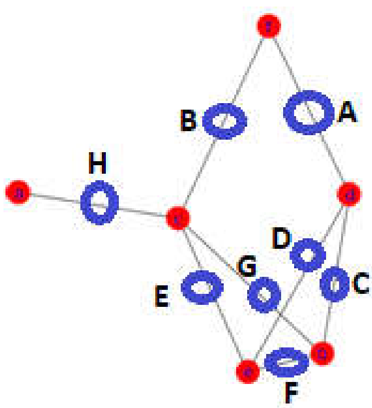
Odpowiednikiem zbioru niezależnego wśród krawędzi jest **skojarzenie**. Skojarzeniem w grafie nieskierowanym $G = (V, E)$ nazywamy zbiór krawędzi $M \subseteq E$ taki, że żadne dwie krawędzie ze zbioru M nie są sąsiednie, czyli nie mają wspólnych wierzchołków. Skojarzenie jest doskonałe, gdy każdy wierzchołek grafu jest incydenty z pewną krawędzią tego skojarzenia. Jeśli w grafie istnieje skojarzenie doskonałe, to ma ono liczność $\frac{n}{2}$. Zatem skojarzenia doskonałego na pewno nie mają grafy z nieparzystą liczbą wierzchołków. Także nie ma go część grafów z parzystą liczbą wierzchołków.

Skojarzenie M jest maksymalne, gdy nie można do niego dołożyć żadnej krawędzi ze zbioru $E \backslash M$. Skojarzenie maksymalne nie jest podzbiorem żadnego innego skojarzenia. Najbardziej liczne skojarzenie, które oczywiście jest maksymalne, nazywa się największym skojarzeniem. Liczbę krawędzi największego skojarzenia oznacza się symbolem $\upsilon(G)$. W ogólnym przypadku $\upsilon(G) \leq \frac{n}{2}$. Dla skojarzenia doskonałego zachodzi $\upsilon(G) = \frac{n}{2}$ i jeżeli ono istnieje w grafie, to równocześnie jest skojarzeniem największym. Najprostszy sposób wyznaczenia wszystkich maksymalnych skojarzeń w grafie polega na wyznaczeniu wszystkich maksymalnych zbiorów niezależnych wierzchołków w grafie krawędziowym (liniowym) $L(G)$.

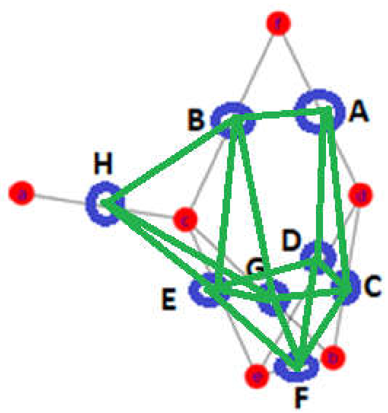
Jeżeli krawędzie grafu G oznaczymy dużymi literami tak jak na rysunku, wówczas funkcja boolowska do wyznaczenia wszystkich maksymalnych skojarzeń przyjmie postać:

$$\begin{aligned} fun(E) &= (C+F)(C+G)(G+F)(B+G)(B+E)(B+H)(G+E)(G+H)(E+H)(A+D)(A \\ &\quad + C)(C+D)(E+D)(E+F)(D+F)(A+B) \\ &= (C+FADG)(B+GEAH)(D+AEF)(E+FGH)(G+H) = \cdots \end{aligned}$$

Po uproszczeniu tej funkcji do postaci minimalnej formuły alternatywnej, zbiory dopełnień wierzchołków dla każdego otrzymanego iloczynu do zbioru V będą stanowić maksymalne zbiory niezależne krawędzi w grafie G.



Graf *G*
(czerwone wierzchołki i szare krawędzie)



Graf krawędziowy *L*(*G*)
(niebieskie wierzchołki i zielone krawędzie)

Zgodnie z tw. Koniga dla dowolnego grafu <u>dwudzielnego</u> zachodzi $\beta(G) = \upsilon(G)$. Stąd wynika, że skojarzenie doskonałe w grafie <u>dwudzielnym</u> istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta(G) = \frac{n}{2}$.

Można wykazać, że dla dowolnego grafu G zachodzi $n - 2\upsilon(G) \leq \alpha(G) \leq n - \upsilon(G)$.

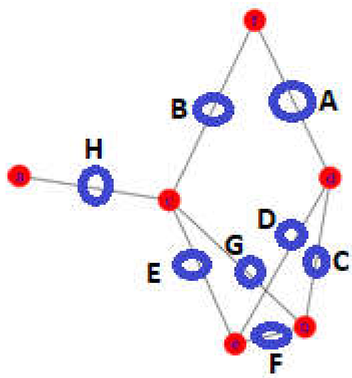
Można wykazać, że dla dowolnego grafu G zachodzi $\alpha(G) \leq n - \frac{liczba\ krawędzi\ w\ G}{\Delta(G)}$.

Można wykazać, że dla dowolnego grafu G zachodzi $\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}$.

Można wykazać, że dla dowolnego grafu G zachodzi $\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1+deg(v)}$.

Pokryciem krawędziowym grafu nieskierowanego $G = (V, E)$ nazywamy taki zbiór krawędzi $F \subseteq E$, że każdy wierzchołek grafu G jest incydenty z przynajmniej jedną krawędzią ze zbioru F. Pokrycie krawędziowe istnieje tylko wtedy, gdy w grafie nie ma wierzchołków stopnia zero, czyli izolowanych. Minimalnym pokryciem krawędziowym nazywamy takie pokrycie, dla którego usunięcie jakiejkolwiek krawędzi powoduje, że pozostałe krawędzie nie stanowią pokrycia. Innymi słowy pokrycie krawędziowe jest minimalne, gdy żaden podzbiór krawędzi tego pokrycia nie jest pokryciem. Najmniej liczne pokrycie minimalne określa się mianem pokrycia najmniejszego. Liczbę wierzchołków najmniejszego pokrycia oznacza się symbolem $\rho(G)$. Jeżeli graf nie posiada izolowanych wierzchołków, wówczas każdy jego wierzchołek jest incydenty z co najmniej jedną krawędzią pokrycia i z co najwyżej jedną krawędzią skojarzenia, zatem zachodzą nierówności: $\rho(G) \geq \frac{n}{2} \geq \upsilon(G)$. Poza tym, dla każdego grafu zachodzi twierdzenie Gallaia: $\rho(G) + \upsilon(G) = n$.

Zgodnie z definicją pokrycia krawędziowego, każdy wierzchołek grafu sąsiaduje z przynajmniej jedną krawędzią z pokrycia, a więc funkcja boolowska, z której będzie można wyznaczyć wszystkie pokrycia, musi być iloczynem tylu nawiasów, ile jest wierzchołków, a w każdym nawiasie musi znaleźć się suma logiczna krawędzi incydentnych z danym wierzchołkiem.



Dla powyższego grafu funkcja boolowska do wyznaczenia pokryć krawędziowych ma postać:

$$\begin{aligned} fun(E) &= (H)(C+G+F)(B+E+G+H)(A+C+D)(D+E+F)(A+B) \\ &= (H)(C+G+F)(A+C+D)(D+E+F)(A+B) \\ &= (H)(C+(G+F)(A+D))(D+E+F)(A+B) \\ &= (H)(C+GA+GD+FA+FD)(DA+DB+EA+EB+FA+FB) = \\ &= (H)(FA+(C+GA+GD+FD)(DA+DB+EA+EB+FB)) = \cdots \end{aligned}$$

Najmniejsze pokrycie krawędziowe, czyli składające się z najmniejszej liczby krawędzi, można wyznaczyć na podstawie największego skojarzenia. Mianowicie, dla każdego wierzchołka, który nie jest incydenty z żadną krawędzią największego skojarzenia, należy wybrać jedną dowolną krawędź incydentną z tym wierzchołkiem. Te wszystkie dodatkowe krawędzie, wraz z krawędziami największego skojarzenia, utworzą najmniejsze pokrycie krawędziowe.

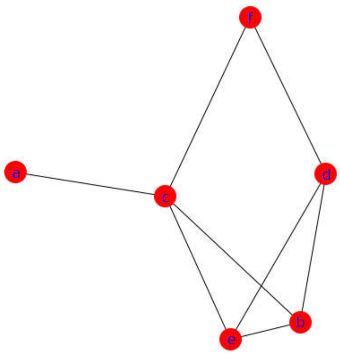
3. Szukanie minimalnych zbiorów dominujących wierzchołków oraz minimalnych zbiorów totalnie dominujących wierzchołków.

Zbiorem dominującym w grafie $G = (V, E)$ nazywamy taki zbiór wierzchołków $D \subseteq V$, że każdy wierzchołek ze zbioru $V \backslash D$ posiada co najmniej jednego sąsiada w zbiorze D. Tak więc zbiór dominujący D ma taką właściwość, że każdy jego wierzchołek albo jest dominujący, albo ma w D sąsiada.

Minimalnym zbiorem dominującym nazywamy taki zbiór dominujący, dla którego usunięcie jakiegokolwiek wierzchołka powoduje, że pozostałe wierzchołki nie stanowią zbioru dominującego w ogóle. Innymi słowy, dominujący zbiór wierzchołków jest minimalny, gdy żaden jego podzbiór nie jest dominujący. Najmniej liczny minimalny zbiór dominujący nazywamy najmniejszym zbiorem dominującym. Liczbę wierzchołków najmniejszego zbioru dominującego oznacza się symbolem $\gamma(G)$ i nazywa liczbą dominowania grafu G.

Analogicznie definiuje się pojęcia: totalnie dominującego zbioru wierzchołków, minimalnego zbioru totalnie dominującego i najmniejszego zbioru totalnie dominującego, z tym, że zbiór $D_{tot} \subseteq V$ jest totalnie dominujący, jeżeli każdy wierzchołek z D_{tot} ma sąsiada w D_{tot}, i każdy wierzchołek z $V \backslash D_{tot}$ ma sąsiada w D_{tot}.

Z definicji zbioru dominującego wynika, że funkcja boolowska będzie iloczynem tylu nawiasów, ile jest wierzchołków w grafie, i każdy nawias będzie zawierał alternatywę (sumę logiczną) danego wierzchołka i wszystkich jego sąsiadów.



Dla rozważanego przykładowego grafu ta funkcja będzie miała postać:

$$\begin{aligned} fun(V) &= (a+c)(b+c+d+e)(c+a+b+e+f)(d+b+e+f)(e+b+c+d)(f+c+d) \\ &= (a+c)(b+c+d+e)(d+b+e+f)(f+c+d) \\ &= (a+c)(b+d+e+cf)(f+c+d) = (c+af+ad)(b+d+e+cf) \\ &= cb+cd+ce+cf+afb+afd+afe+afc+adb+ad+ade+adcf \\ &= cb+\boldsymbol{cd}+ce+cf+\boldsymbol{afb}+\boldsymbol{afe}+\boldsymbol{ad} \end{aligned}$$

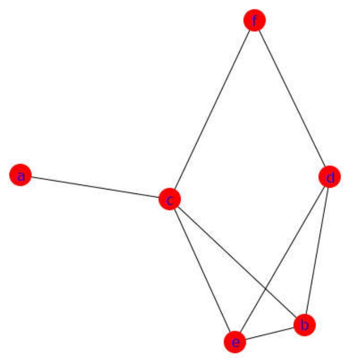
Zatem minimalne zbiory dominujące to:

$D_1 = \{b, c\}$, $D_2 = \{c, d\}$, $D_3 = \{c, e\}$, $D_4 = \{c, f\}$, $D_5 = \{a, b, f\}$, $D_6 = \{a, e, f\}$ i $D_7 = \{a, d\}$.

Z definicji minimalnego zbioru dominującego wynika, że każdy maksymalny zbiór niezależny wierzchołków jest równocześnie minimalnym zbiorem dominującym. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Rzeczywiście, wyznaczone wcześniej zbiory $S_1 = V \backslash B_1 = \{a, b, f\}$, $S_2 = V \backslash B_2 = \{a, e, f\}$, $S_3 = V \backslash B_3 = \{a, d\}$ i $S_4 = V \backslash B_4 = \{c, d\}$ znajdują się wśród znalezionych minimalnych zbiorów dominujących. Pozostałe minimalne zbiory dominujące, tzn. $D_1 = \{b, c\}$, $D_2 = \{c, e\}$ i $D_3 = \{c, f\}$, nie są niezależne.

Każdy maksymalny zbiór niezależny S wierzchołków jest równocześnie minimalnym zbiorem dominującym, ponieważ każdy wierzchołek ze zbioru $V \backslash S$ sąsiaduje z co najmniej jednym wierzchołkiem ze zbioru S. Gdyby tak nie było, to istniałby w zbiorze $V \backslash S$ wierzchołek, który nie sąsiaduje z żadnym wierzchołkiem ze zbioru S, a to oznaczałoby, że zbiór S nie jest maksymalny niezależny, gdyż można by do niego ten wierzchołek dodać.

Z definicji totalnie dominującego zbioru wierzchołków wynika, że funkcja boolowska będzie iloczynem tylu nawiasów, ile jest wierzchołków w grafie, i dla każdego wierzchołka będzie zapisany jeden nawias, w którym znajdzie się suma wierzchołków sąsiadujących z danym wierzchołkiem. Zatem funkcja boolowska, z której wyznaczymy minimalne zbiory totalnie dominujące wierzchołków, dla rozważanego grafu, będzie miała postać:



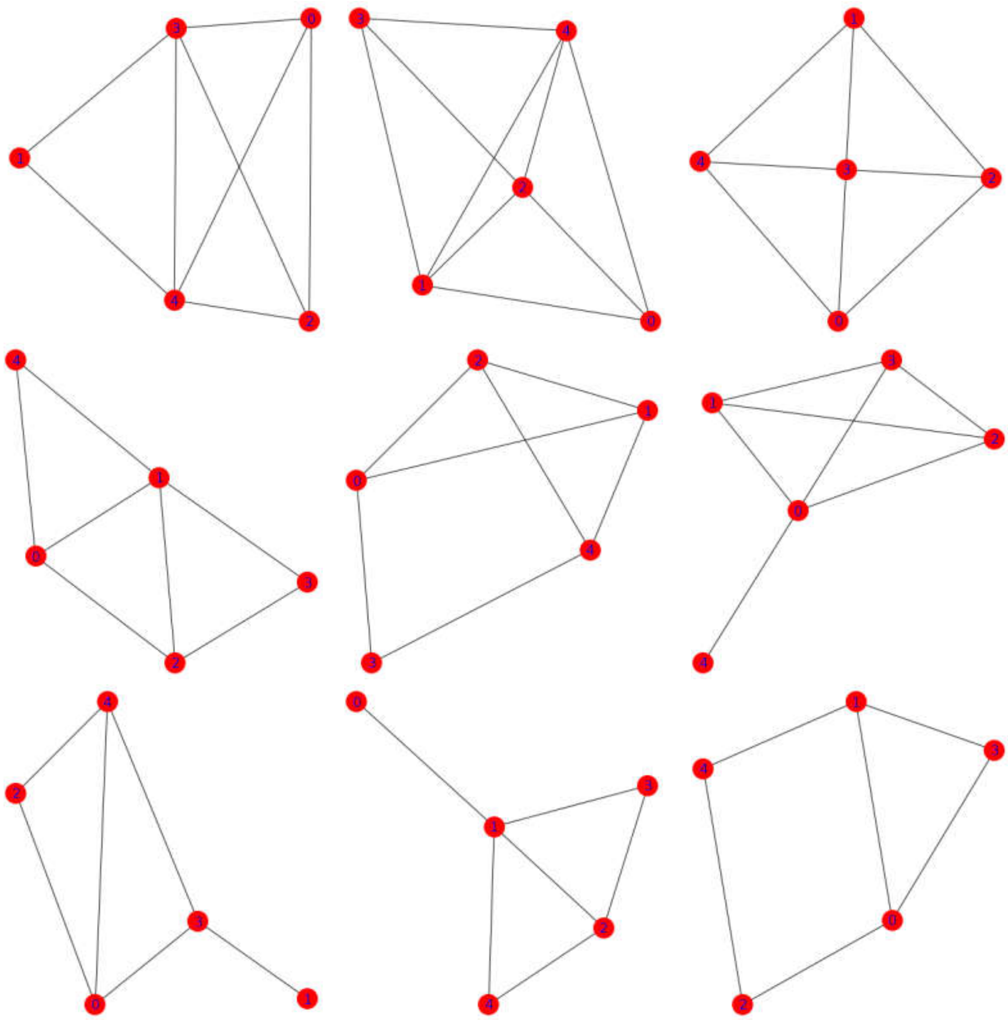
$$fun(V) = (c)(c + d + e)(a + b + e + f)(b + e + f)(b + c + d)(c + d) = (c)(b + e + f)$$
$$= cb + ce + cf$$

Tak więc istnieją tylko trzy totalnie dominujące minimalne zbiory wierzchołków: $D_{t1} = \{b, c\}$, $D_{t2} = \{c, e\}$ i $D_{t3} = \{c, f\}$. Ponieważ definicja totalnego dominowania jest bardziej restrykcyjna niż zwykłego dominowania, dlatego zbiorów totalnie dominujących jest zazwyczaj dużo mniej niż zbiorów „słabo” dominujących.

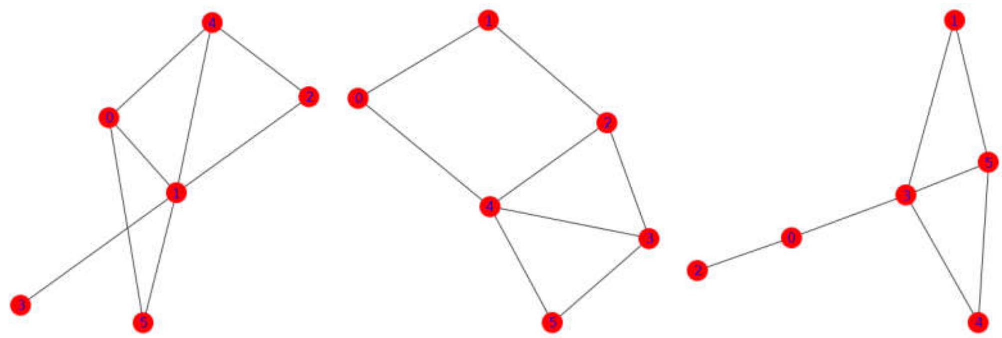
Polecenie: Dla jednego i tego samego grafu przydzielonego przez prowadzącego zajęcia, wyznaczyć metodą funkcji boolowskiej: minimalne pokrycia wierzchołkowe, maksymalne zbiory niezależne wierzchołków, maksymalne zbiory niezależne krawędzi, minimalne pokrycia krawędziowe, minimalne zbiory dominujące wierzchołków, minimalne zbiory totalnie dominujące wierzchołków. Zilustrować wyznaczone zbiory wierzchołków lub krawędzi na badanym grafie, tzn. zaznaczyć każdy zbiór na oddzielnej kopii grafu oryginalnego. Dokonać analizy otrzymanych wyników i sformułować odpowiednie wnioski. Wymyślić praktyczne problemy, których rozwiązanie sprowadza się do wyznaczenia wymienionych wyżej zbiorów wierzchołków i krawędzi. Sprawdzić wyniki obliczeń ręcznych za pomocą podanych na następnej stronie funkcji z biblioteki kombinatoryczno-grafowej. Przekonać się, wykonując stosowne obliczenia, że nierówności ze strony piątej są spełnione.

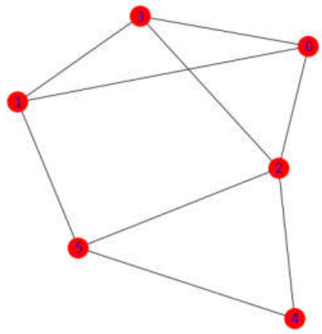
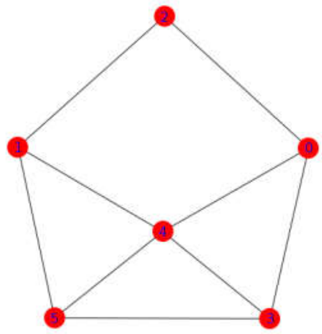
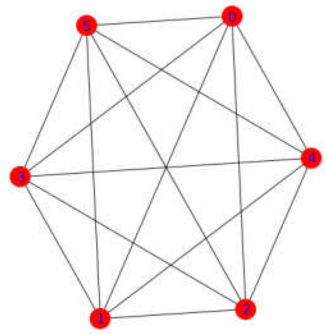
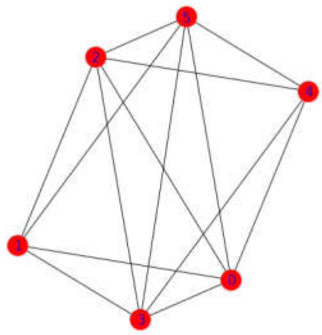
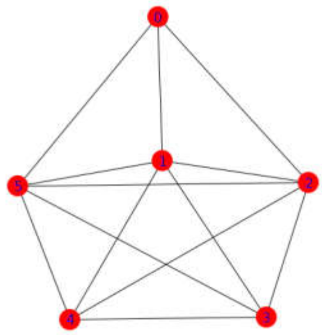
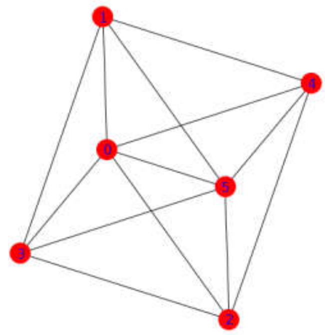
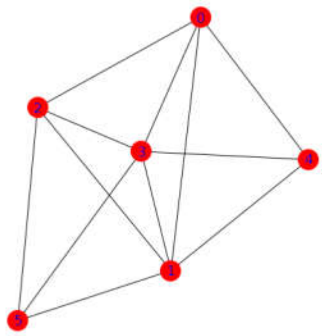
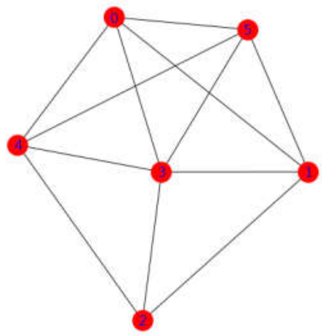
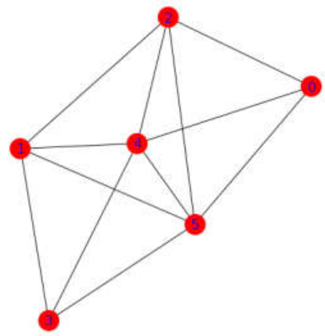
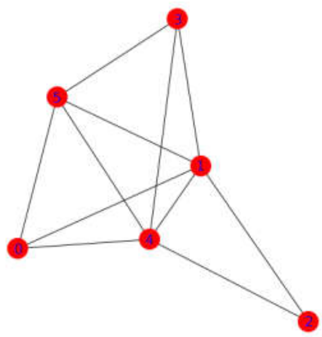
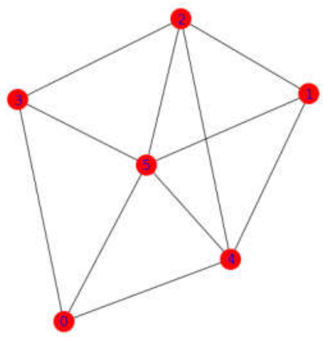
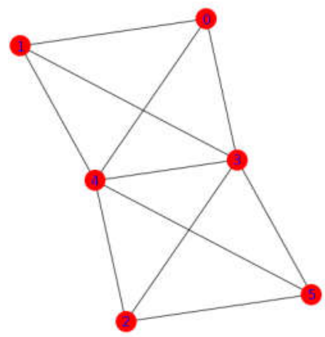
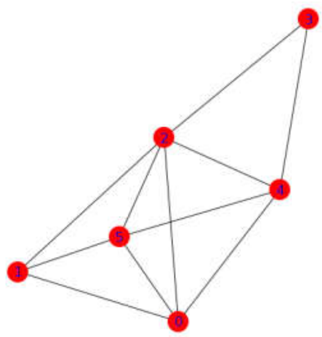
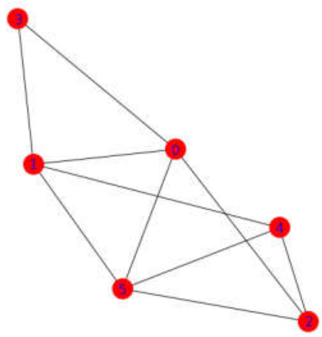
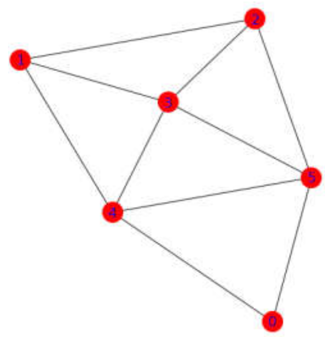
all_minimal_vertex_covers(graf, [licznosc]),
all_maximal_independent_vertex_sets(graf, [licznosc]),
all_maximal_independent_edge_sets(graf, [licznosc]),
all_minimal_edge_covers(graf, [licznosc]),
all_minimal_dominating_vertex_sets(graf, [licznosc]),
all_minimal_total_dominating_vertex_sets(graf, [licznosc]).

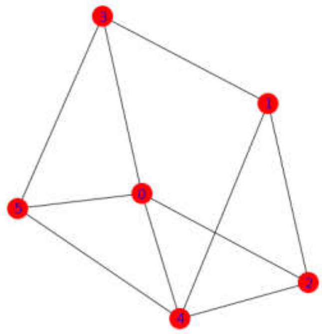
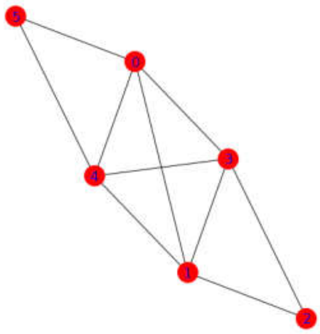
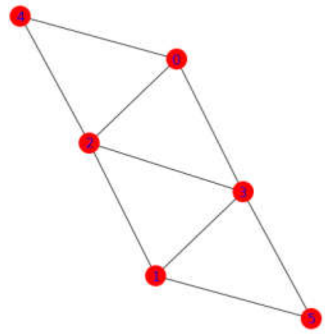
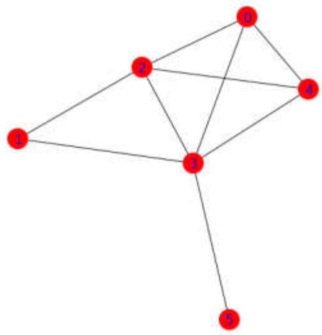
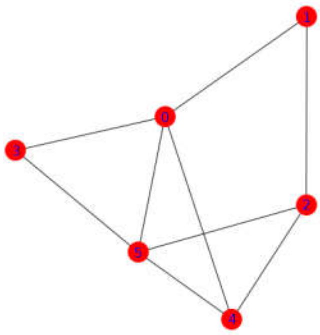
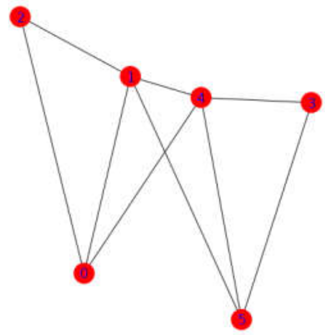
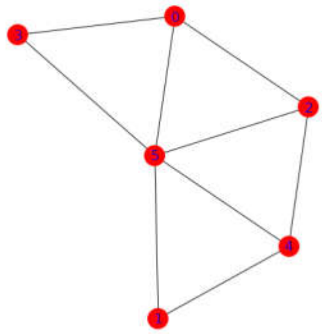
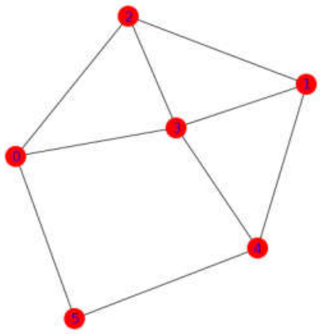
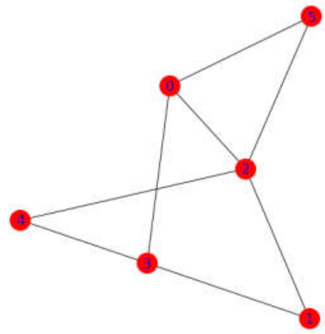
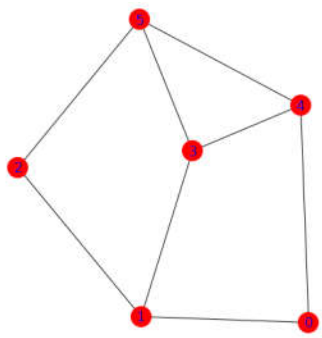
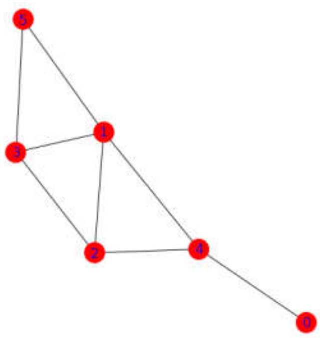
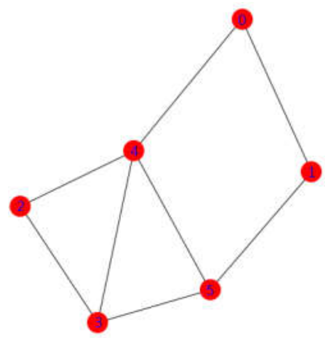
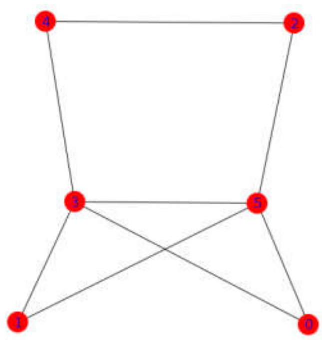
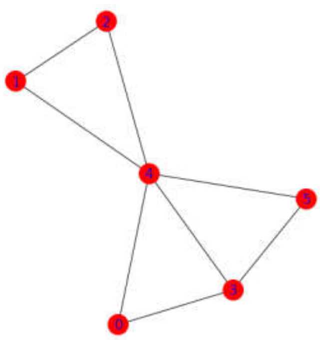
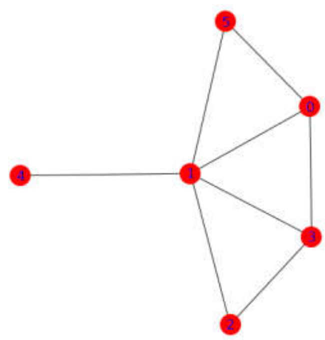
Przykładowe grafy o pięciu wierzchołkach, do wykorzystania:

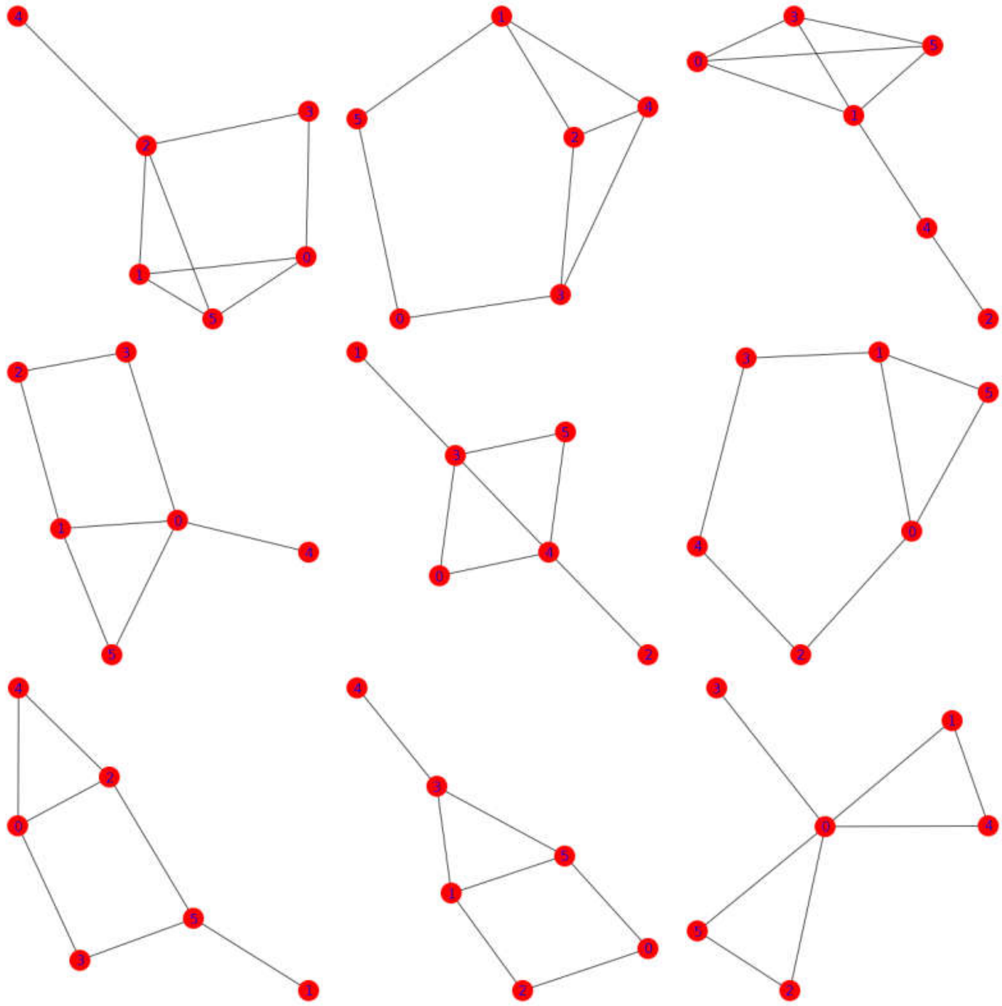


Przykładowe grafy o sześciu wierzchołkach, do wykorzystania:





Dla ambitnych:

1) Napisać w Maximie skrypt, który dla podanego iloczynu sum w nawiasach, wymnoży te nawiasy w zwykły algebraiczny sposób i następnie wszystkie potęgi symboli wyższe niż jeden zastąpi potęgą pierwszą, i w końcu w powstałej sumie iloczynów, wyeliminuje zbędne powtórzenia iloczynów. W ten sposób otrzymamy np. wszystkie pokrycia wierzchołkowe, wszystkie zbiory dominujące wierzchołków, wszystkie pokrycia krawędziowe itd. W tym skrypcie żadnych operacji boolowskich nie trzeba używać. Do osiągnięcia podanego celu można wykorzystać operację różniczkowania funkcji wielu zmiennych, czyli pochodne cząstkowe odpowiedniego rzędu albo funkcję args i inne funkcje dostępne w Maximie do operowania na wyrażeniach algebraicznych. Zadanie nie jest banalne.

2) Dla szachownicy o rozmiarach 4 x 4, 5 x 5, …, 8 x 8 wyznaczyć w Maximie, odpowiednimi funkcjami z biblioteki kombinatorycznej, wszystkie takie rozstawienia hetmanów (nie wiadomo ilu, to trzeba określić), aby żadne dwa wzajemnie się nie atakowały i dodanie kolejnego hetmana nie było możliwe na żadnym wolnym polu, bo pola nieatakowanego dostępnego nie będzie. Aby to zadanie rozwiązać, należy utworzyć tzw. queen graph. Powstaje on w taki sposób, że każde pole szachownicy staje się wierzchołkiem grafu, a krawędź w tym grafie istnieje między wierzchołkami v i w, jeżeli hetman może w jednym ruchu dostać się z pola v na pole w. Naprzemienność kolorów pól szachownicy jest w tym

problemie bez znaczenia. W tak utworzonym grafie, żeby zadanie rozwiązać, należy wyznaczyć wszystkie maksymalne zbiory niezależne wierzchołków. Każdy taki zbiór będzie kodował jedno rozwiązanie, czyli te pola szachownicy, na których należy postawić hetmany. Ponieważ graf będzie posiadał n*n wierzchołków i sporo krawędzi, to czas obliczeń na komputerze może być długi. n oznacza oczywiście rozmiar szachownicy, czyli liczbę jej wierszy (a także liczbę kolumn).

3) Dla szachownicy o rozmiarach 4 x 4, 5 x 5, …, 8 x 8 wyznaczyć w Maximie, odpowiednimi funkcjami z biblioteki kombinatorycznej, wszystkie takie rozstawienia hetmanów (nie wiadomo ilu, to trzeba określić), aby każde pole szachownicy było atakowane przez co najmniej jednego hetmana. Hetmany mogą wzajemnie atakować się. Aby to zadanie rozwiązać, należy utworzyć tzw. queen graph. Powstaje on w taki sposób, że każde pole szachownicy staje się wierzchołkiem grafu, a krawędź w tym grafie istnieje między wierzchołkami v i w, jeżeli hetman może w jednym ruchu dostać się z pola v na pole w. Naprzemienność kolorów pól szachownicy jest w tym problemie bez znaczenia. W tak utworzonym grafie, żeby zadanie rozwiązać, należy wyznaczyć wszystkie minimalne zbiory dominujące wierzchołków. Każdy taki zbiór będzie kodował jedno rozwiązanie, czyli te pola szachownicy, na których należy postawić hetmany. Ponieważ graf będzie posiadał n*n wierzchołków i sporo krawędzi, to czas obliczeń na komputerze może być długi. n oznacza oczywiście rozmiar szachownicy, czyli liczbę jej wierszy (a także kolumn).