Rapport de TIPE
Morpion

Peng-Wei Chen, MP, 2017-2018

13 mai 2018

1 Introduction

La règle du morpion

Deux joueurs jouent sur une grille de taille 15×15 sur le papier. Chaqu'un prend un symbole et on dessine au tour par tour son symbole sur la grille. Le but est d'aligner 5 symboles verticalement, horizontalement ou en diagonale pour gagner. Dans le cas généralisé, nous appelons (m, n, k)-jeu où la taille de la grille est $m \times n$ et il faut k symboles dans une ligne pour gagner.

Méthode

Il existe deux méthodes pour déterminer s'il existe une telle stratégie :

— On cherche tous les cas possibles.

— On apparie les points de la grille. Si le deuxième joueur peut toujours prévenir la réussite du premier joueur en jouant le pairage, alors il n'y a pas d'une telle stratégie.

Dans le cas où k $\leq$ 7, on utilise la première méthode avec l'arbre de décision. Chaque nœud de cet arbre est un état de la grille. Par exemple (figure. 1) , la racine de cet arbre est la grille sans symbole. Ensuite, les fils de chaque nœud sont les états de la grille où on place un symbole de plus au dessus. Enfin, les feuilles sont les cas où un des joueurs a gagné ou où personne n'a gagné (c'est-à-dire que la grille a été remplie et que aucun joueur a aligné k symboles).

Or, la complexité de chercher tous les cas possibles est en O($(m \times n)\,!$). Ainsi, on utilise une fonction gloutonne pour chercher le cas le « plus »possible. Avec cette fonction, on donne une note à chaque point. Si un point est plus possible pour gagner, alors sa note est plus élevée.
On utilise la deuxième méthode lorsque k $>$ 7.

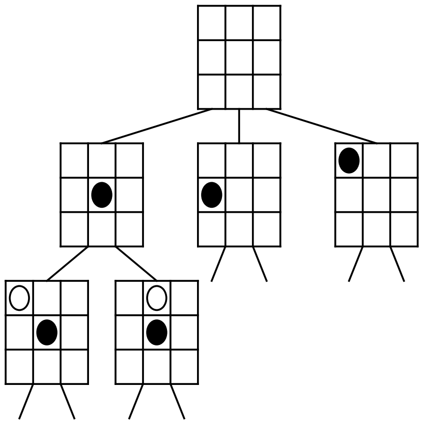

FIGURE 1 – Arbre de décision (le cercle noir est le symbole du premier joueur)

2 Exploitation

$\mathbf{k \leq 5}$

$\mathbf{k \geq 8}$

En effet, si on peut montrer que le premier joueur n'a pas de stratégie gagnante lorsque k = 8, alors le premier joueur n'en a pas pour tout k $\geq$ 8 car la même stratégie du deuxième joueur parvient le premier à aligner 8 symboles. On donne notamment le pairage du cas k = 9 (figure. 2) car il est plus intuitif. On voit que si le deuxième joueur suit le pairage, alors le premier joueur ne peut jamais réussir (les lignes rouges).
Lorsque k = 8, on divise le jeu en des sous-jeux. Ces sous-jeux se jouent sur la grille de la forme comme figure. 3. Il y a trois façons de gagner ce sous-jeu (figure. 4) :

— Aligner trois symboles en diagonale.
— Aligner verticalement deux symboles.
— Aligner horizontalement quatre symboles.

Ainsi, puisque le premièr joueur ne peut jamais gagner ce sous-jeu, il ne peut pas non plus gagner le (m, n, 8)-jeu. (figure. 5)

3 Conclusion

— k = 1
— k = 2
— k = 3
— k = 4

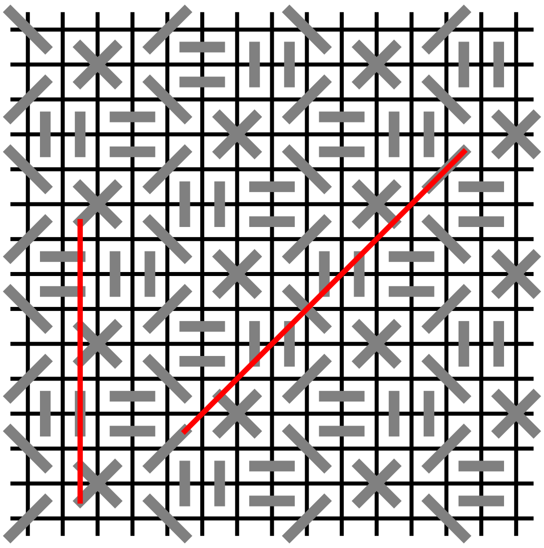

FIGURE 2 – (m, n, 9)-jeu

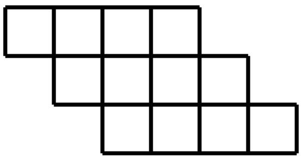

FIGURE 3 – La grille du sous-jeu

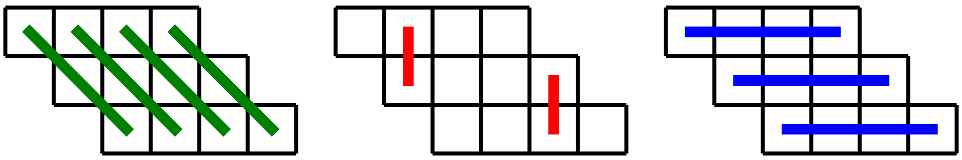

FIGURE 4 – Les trois façons pour gagner dans le sous-jeu.

— $k = 5$

— $k \geq 8$

Une telle stratégie n'existe pas.

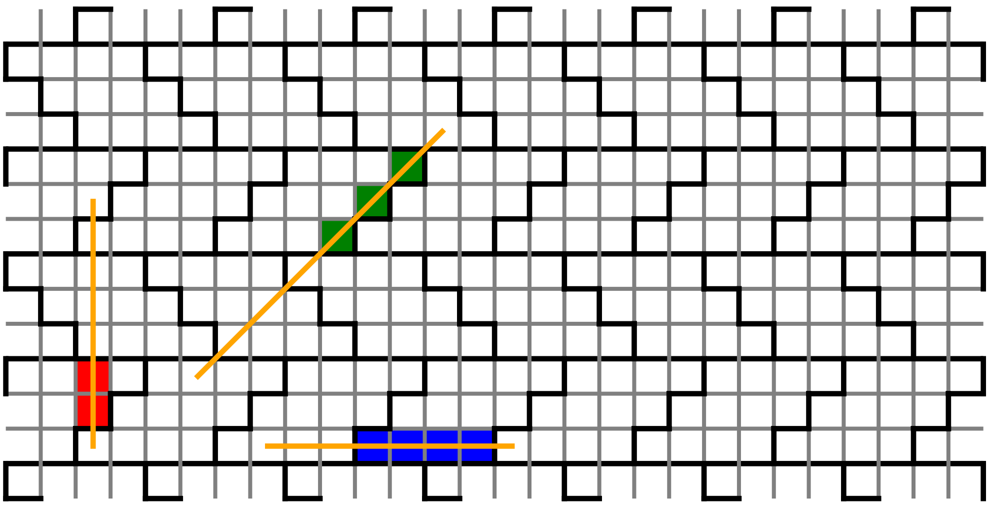

Figure 5 – (m, n, 8)-jeu : toutes les lignes de longueur 8 passent une des lignes du sous-jeu.