Licence 3eme annee

Mention Mathematiques Appliquees aux Sciences Sociales

Spécialité : FICHES

Theorie des jeux

Cours en couleurs pour une vie coloree

Randall

BALESTRIERO

Année 2013 – 2014

Mr Thierry CHAMPION

Enseignant chercheur

Theorie des jeux

BALESTRIERO Randall

28 avril 2014

Résumé

Ce cours presente la theorie des jeux et s'appuie sur le cours de Mr Thierry CHAMPION.

Table des matières

1 Introduction **3**
1.1 histoire . . . 3
1.2 Exemple : etude d'un systeme de vote . . . 3

2 Les jeux sequentiels **4**
2.1 Definition . . . 4
2.2 Notations et strategies . . . 5
2.3 Formes strategiques . . . 5
2.4 Quelques jeux . . . 6
2.5 Resolution de jeux sequentiels, recherche des equilibres . . . 8
2.5.1 Equilibre parfait en sous-jeux . . . 9
2.5.2 Jeux strictement competitifs . . . 11
2.5.3 Valeur d'un jeu . . . 11

3 Les jeux a somme nulle **12**
3.1 Definition : jeux a somme nulle . . . 12
3.2 Recherche d'equilibres en strategies pures . . . 13
3.2.1 Definition : strategie pure prudente pour X . . . 14
3.2.2 Definition : strategie pure prudente pour Y . . . 15
3.2.3 Equilibre en strategie pure . . . 15

4 Les jeux bimatriciels **15**

1 Introduction

1.1 histoire

La theorie des jeux "moderne" apparait dans un article de John Von Neumann dans les annees 1920 et est ensuite developpee plus en detail dans un livre de J. Von Neuman et O. Morgenstein : "Theory of games and economic behaviour" en 1930. Depuis cette theorie s'est developpe dans de nombreuses directions : economie, biologie (modelisation de population), en mathematiques, sociologie etc. Dans un livre d'Ivar Ekelant, la theorie des jeux est introduite ainsi : "la theorie des jeux est l'etude des situations ou des personnes/joueurs ont a prendre des decisions tout depend d'un resultat qui les concerne.

1.2 Exemple : etude d'un systeme de vote

- **Situation :** trois joueurs composent une association : A, B et C. Deux autres joueurs veulent les rejoindre : D et E.
- **Regle de vote :** en deux tours :
  1. choix du nouvel adherent parmis les candidats donc lutte entre D et E.
  2. choix de prendre le candidat en 1 ou personne donc lutte entre D ou E et personne.
- **Preferences des votants :**

A	B	C
D	personne	E
personne	D	D
E	E	personne

- **Premiere analyse :**
  - Vote 1 : D obtient deux voix et E une voix, D gagne.
  - Vote 2 : D obtient deux voix et personne une voix, D gagne et adhere a l'association.
- **Deuxieme analyse :** B vote pour E a la place de voter pour personne au premier tour
  - Vote 1 : D obtient une voix et E obtient deux voix, E gagne.
  - Vote 2 : E obtient une voix et personne obtient deux voix, personne n'adhere a l'association.
- **Troisieme analyse :** B vote toujours pour E mais C change aussi son vote et choisit D
  - Vote 1 : D obtient deux voix et E obtient une voix, D gagne.
  - Vote 2 : D obtient deux voix et personne obtient une voix, D gagne.
- **Bilan :** si les trois joueurs jouent strategiquement le premier tour sera donc A vote D, B vote E, C vote D. Bien que ces choix ne soient pas forcement leurs premiers choix respectif, cela assure une maximisation de la satisfaction globale.

En theorie des jeu, on etudie des jeux pouvant avoir les proprietes suivantes :
- **jeux a information complete (resp. incomplete) :** jeu dans lequel chacun des joueurs connait toutes les regles du jeu et connait les preferences des autres joueurs.

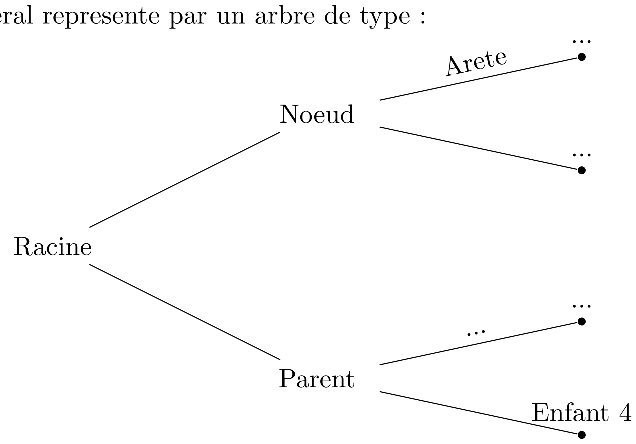
– **jeux a information parfaite (resp. imparfaite) :** jeu dans lequel chaque joueur connait toutes les actions des autres au moment de faire son choix (cas des jeux sequentiels). Il n'y a donc pas d'actions simultanees (jeux simultanes).
– **jeux cooperatifs (resp. non-cooperatifs) :** jeux dans lesquels les joueursp euvent collaborer, c'est a dire s'entendre sur leurs choix respectifs.

Le vote precedent est un exemple de jeu a information complete, imparfaite, non cooperatif.

2 Les jeux sequentiels

2.1 Definition

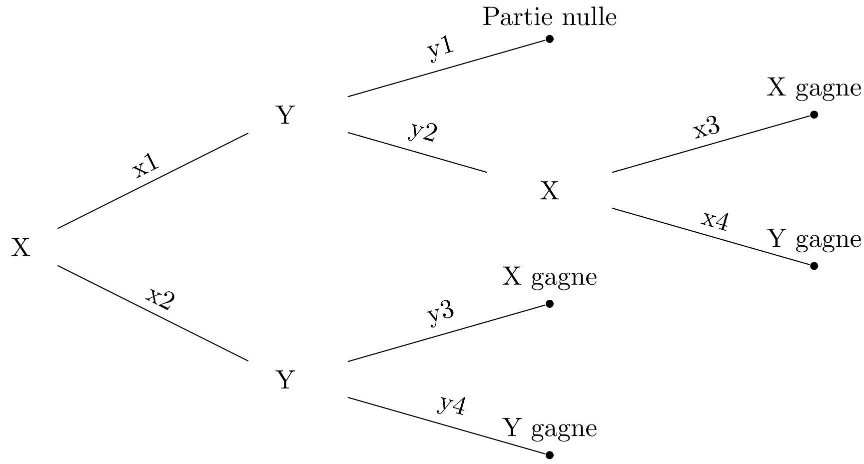
Un jeu sequentiel est un jeu a information complete et parfaite. Il est en general represente par un arbre de type :



Les enfants de la racine representent les differents choix du joueur qui joue en premier. Chaque noeud est associe a un joueur, et les enfants d'un noeud sont les choix du joueur correspondant a cette etape du jeu. Un noeud terminal correspond a la fin du jeu.

2.2 Notations et strategies

Notations :



Strategies

Une strategie pour un joueur est une liste de choix poru chacun des noeuds qui lui correspondent. Il faut donc inclure dans la strategie les choix du joueur pour chaque noeud meme si ceux si ne seront a prioris pas joues. *Exemple : strategie de X pour le jeu precedent* $\{(x_1x_3), (x_1x_4), (x_2x_3), (x_2x_4)\}$.

2.3 Formes strategiques

Definition

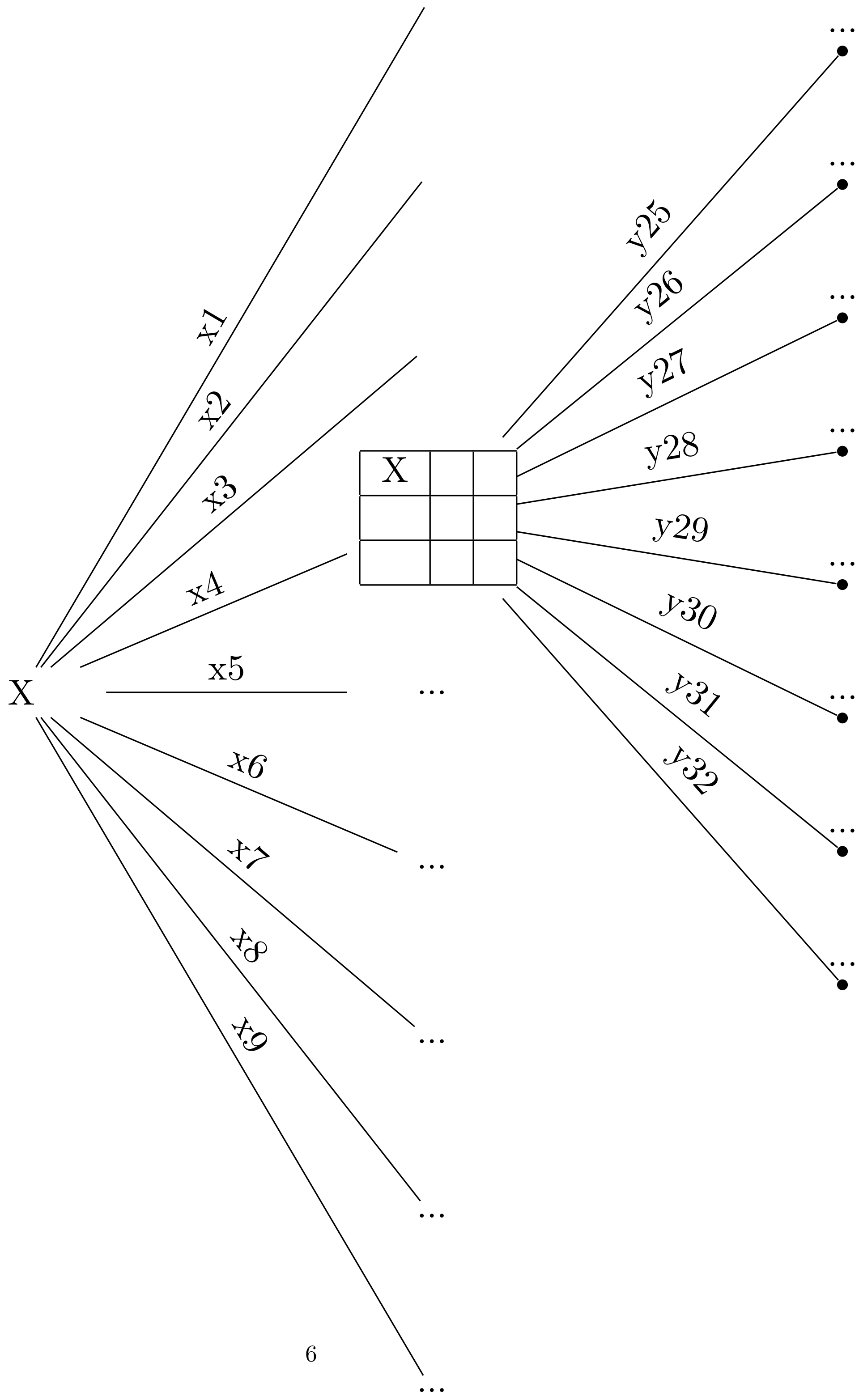
Un jeu sequentiel represente sous forme d'arbre peut etre associe a une representation sous forme strategique. Il s'agit d'un tableau donc chaque ligne correspond a une strategie de X et chaque colonne a une strategie de Y, contenant les resultats pour les choix correspondants.

Exemple

	y_1y_3	y_1y_4	y_2y_3	y_2y_4
x_1x_3	Partie nulle	Partie nulle	X gagne	X gagne
x_1x_4	Partie nulle	Partie nulle	Y gagne	Y gagne
x_2x_3	X gagne	Y gagne	X gagne	Y gagne
x_2x_4	X gagne	Y gagne	X gagne	Y gagne

2.4 Quelques jeux

Le jeu du morpion



Le noeud racine a 9 enfants, chaque enfant a 8 enfant, chacun d'eux possede a nouveau 7 enfants etc jusqu a ce que certains enfants des noeuds precedents ne possedent plus que 5 enfants dont certains sont des noeuds terminaux (car possibilite de gagner le jeu du morpion en 5 coups au plus vite et le premier joueur gagne, donc X pour nous).

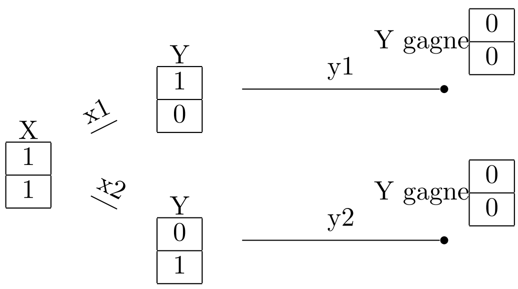
– Cet arbre a au moins 3000 noeuds ($9 * 8 * 7 * 6 * 5$).
– Ce jeu a 3 resultats possibles : X gagne, Y gagne et partie nulle.

Le jeu de dame ou des echecs

Ces jeux sont tres compliques, 10^{60}, toujours 3 resultats possibles etc.

Jeu de Nim

On dispose plusieurs allumettes sur plusieurs rangees. Chaque joueur a son tour doit tirer une ligne et retirer de celle-ci au moins une allumette (pas de maximum). Le gagne est celui qui retire la derniere allumette. Exemple :



Ce jeu a donc 2 resultats possibles : X gagne ou Y gagne. Dans ce cas on connait les "meilleurs" strategies.

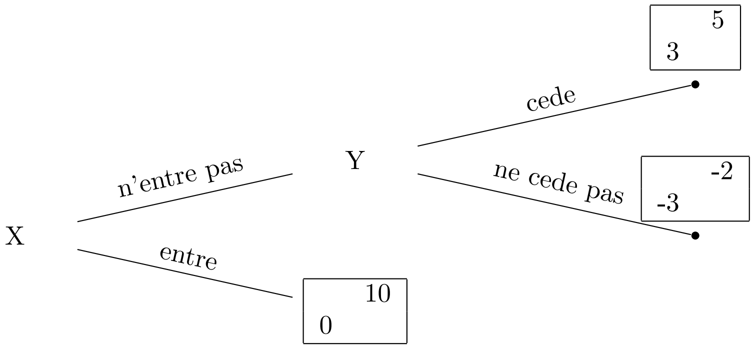
Jeu des hexagones

On dispose d'un pavage hexagonal. Chaque joueur possede deux territoires (2 bords) opposes du pavage. Chacun son tour, un joueur s'approprie un hexagone, celui qui gagne est celui qui reussit a relier ces deux bords.

FIGURE 1 – Exemple du jeu des hexagones

Le jeu d'entree

L'entreprise Y a un monopole et l'entreprise X hesite a rentrer sur ce marche. On represente cela par un arbre.



Ce jeux a 3 resultats :
- X gagne 3 et Y gagne 5
- X perd 3 et Y perd 2
- X gagne 0 et Y gagne 10

2.5 Resolution de jeux sequentiels, recherche des equilibres

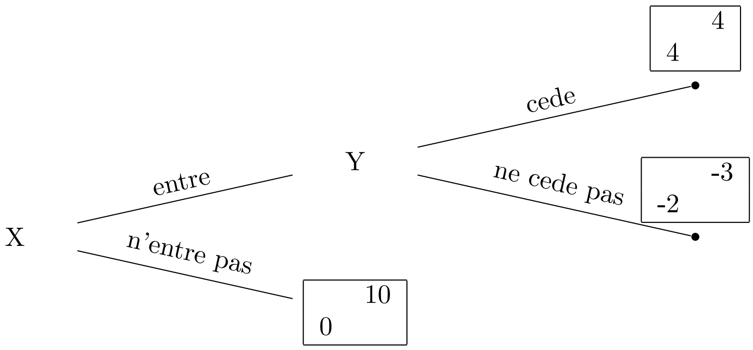
La resolution d'un jeu consiste a trouver les meilleurs strategies pour chaque joueur. La premiere difficultee est de donner un sens a la notion de meilleur strategie qui ne va pas de soi pour tous les jeux. Les strategies decrites ici sont celles qui assurent un equilibre.

Les equilibres de Nash

On represente les equilibres de Nash pour les jeux a 2 joueurs note X et Y.

Definition : meilleur reponse Etant donne une strategie y du joueur Y, la meilleur reponse de X a y esy l'ensemble de strategies x de X qui lui assurent le meilleur resultat lorsque Y joue y.

Notation La meilleur reponse de X a y est notee $BR_X y$. Un element de cet ensemble est une strategie de meilleur reponse. De la meme maniere, on definit la meilleur reponse $BR_Y(x)$ du joueur Y a la strategie x de X. BR est l'acronyme de Best Response.
Exemple :



Ici nous avons :
Pour X :
- $BR_X(Y cede) = \{entrer\}$
- $BR_X(Y necedepas) = \{nepasentrer\}$

Pour Y :
- $BR_Y(X entre) = \{ceder\}$
- $BR_Y(X n'entrepas) = \{ceder, nepasceder\}$

Definition : equilibre de Nash Un couple de strategies (pour 2 joueurs), (x,y) est un equilibre de Nash du jeu si chaque strategie x et y est une strategie de meilleur reponse a l'autre. Soit :

$$\left.\begin{array}{l} x = BR_X(y) \\ y = BR_Y(x) \end{array}\right\}$$

Dans l'exemple precedent, on a les equilibres de Nash suivant :{(X entre, Y cede), (X n'entre pas, Y ne cede pas)}

Commentaires Si (x,y) est un equilibre de Nash, alors aucun des deux joueurs n'a un interet strict a changer de strategie meme s'il connait la strategie de l'autre joueur. C'est en ce sens qu'on considere (x,y) comme un equilibre. Pour trouver les equilibres de Nash d'un jeu sequentiel, on presente ce jeu sous forme strategique et on entoure les trategies de BR de chacun des joueurs. Un equilibre de Nash correspondra a un cas dans lequel deux strategies sont entoures dans la meme case.

X,Y	Y cede	Y ne cede pas
X entre	4 / 4	-3 / -2
X n'entre pas	10 / 0	10 / 0

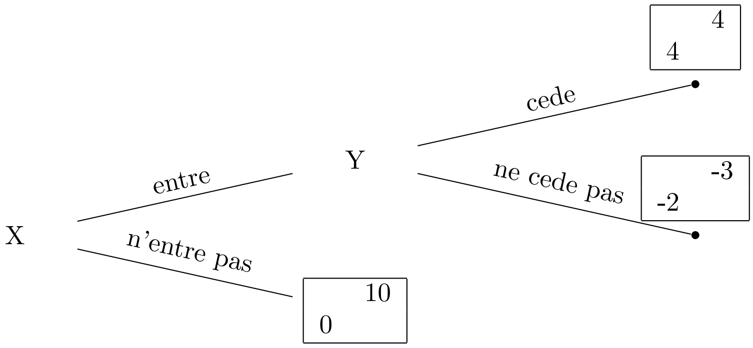
On obtient donc bien les deux equilibres.

Theoreme Tout jeu sequentiel fini a au moins un equilibre de Nash. Le probleme est qu'il peut y en avoir beaucoup. On va donc definir une notion un peu plus restrictive pour selectionner des meilleurs equilibres.

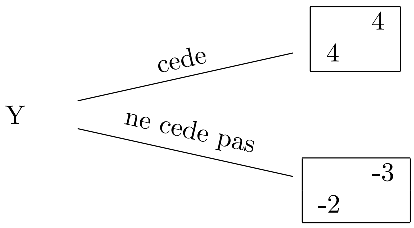
2.5.1 Equilibre parfait en sous-jeux

Definition : sous-jeux Soit G un jeu sequentiel fini donne par un arbre. Un sous-jeux de G est un jeux sequentiel G' dont l'arbre est obtenu a partir de celui de G en selectionnant un noeud considere desormais comme la racine donc en gardent l'arbre engendre par ce noeud.

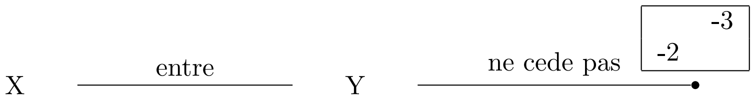
Exemple L'arbre suivant representant un jeu d'entree simple :



ne possede qu'un seul sous jeux qui est :



En effet, l'arbre suivant n'est pas un sous jeux du jeux d'entree donne car ne contient pas tous les sommets engendres par Y :



Definition : equilibre parfait en sous-jeux Un couple (x,y) de strategie est un equilibre parfait en sous-jeu si c'est un equilibre de Nash pour le jeu et si sa restriction a chaque sous-jeux est aussi un equilibre de Nash.

Exemple ARBRE JEU D ENTREE EXEMPLE

Methode On etudie chaque sous-jeux en remontant des plus petits au plus grand (le jeu total). EXEMPLE ARBRE SOUS JEUX

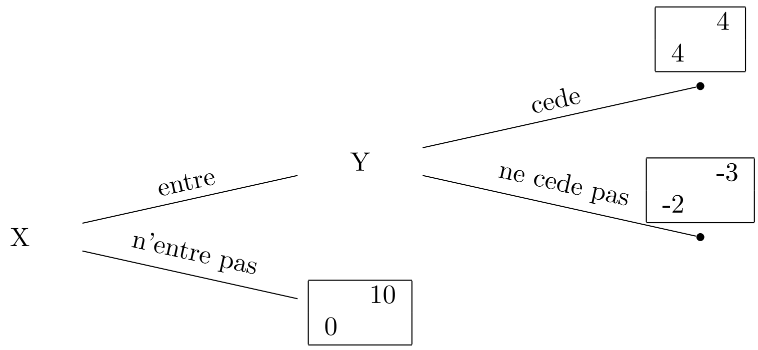
Exercice ARBRE EXERCICE SOUS JEU

Theoreme de Zermelo et applications

Theoreme de Zermelo Methode de recherche des equilibres parfaits en sous-jeux. La methode qui consiste a remonter dans l'arbre du jeu depuis les feuilles jusqu a la racine est a la base de la demonstration du theoreme de Zermelo

2.5.2 Jeux strictement competitifs

Un jeu G esT dit strictement competitif si l'ensemble de ces resultats $\{t_1, t_2, ..., t_k\}$ est muni d'un ordre stricte pour X et strictement inverse pour Y.
Exemple : Le jeu du morpion est un jeu strictement competitif :
X perd$<_X$partie nulle$<_X$X gagne
X perd$>_Y$partie nulle$>_Y$X gagne
En revanche, ce jeu d'entree ne l'est pas :



Car :
$\boxed{-3 \quad -2} <_X \boxed{0 \quad 10} <_X \boxed{4 \quad 4}$
$\boxed{-3 \quad -2} <_Y \boxed{4 \quad 4} <_Y \boxed{0 \quad 10}$

2.5.3 Valeur d'un jeu

La valeur du jeu est le resultat obtenu si les deux joueurs jouent strategiquement. Par exemple, la valeur du jeu du morpion est partie nulle. Soit G un jeu strictement competitif represente par un arbre fini. Alors il existe un resultat t_i de ce jeux tel que X a une strategie lui assurant au moins t_i et Y a une strategie lui assurant au moins t_i. Ce resultat est appele veleur du jeu G.

3 Les jeux a somme nulle

Le type de jeu qu'on etudie dans ce chapitre appartient a la famille des jeux bimatriciels : ceux sont des jeux a information complete et imparfaite (car simultanes). Ici les deux joueurs X et Y jouent simultanements.

Exemple : jeu des prisonniers

Deux personnes peuvent etre condamner a une amende de 10 et peuvent beneficier de la remise dans le tableau suivant.

X,Y	nier	avouer
nier	5 5	0 8
avouer	0 8	3 3

3.1 Definition : jeux a somme nulle

Pour decrire ce jeu on donne :

- pour chaque joueur X et Y l'ensemble des strategies possibles $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$.
- pour chacun des joueurs une fonction de gain :
  - $g_X(x, y)$
  - $g_Y(x, y)$

ou $g_X(x, y)$ est ce que gagne X si X joue x et Y joue y. Pour un jeu a somme nulle on suppose que la somme de ces deux gains est nulle, soit : $g_X(x, y)+g_Y(x, y) = 0$ ou encore $g_X(x, y) = -g_Y(x, y)$. Dans un jeu a somme nulle, le gain de X est donc egal a la perte de Y. Ainsi, le jeu des prisonniers n'est pas a somme nulle. On represente en general ce type de jeu sous forme strategique en n'indiquant que le gain de X.

	y_1	y_2	y_3	...
x_1	$g_X(x_1, y_1)$	$g_X(x_1, y_2)$	...	
x_2	...			
x_3				
...				

ou encore sous la forme d'une matrice de gain de X : $A = (g(x_i, y_j))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq k}$ soit :

$$\begin{pmatrix} g(x_1, y_1) & g(x_1, y_2) & ... \\ ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

Exemple : jeu des penalties

Sous forme strategique :

plonge,tire	droite	gauche
droite	-1	1
gauche	1	-1

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans la pratique on peut utiliser les deux types de description, mais pour les calculs nous n'utiliserons que la forme matricielle. Dans ce cadre on identifie l'ensemble des strategies de X $(x_1, x_2, ..., x_n)$ a la base canonique de ^{n} : $B_n = (e_1, e_2, ..., e_n)$ Soit ici :

- x_1="tirer a droite" $\Leftrightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- x_2="tirer a gauche" $\Leftrightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Remarque

Tous les vecteurs sont representes par des matrices colonnes. Les strategies de Y sont representes par $\{y_1, y_2, .., y_k\}$ et sont identifies a la base de ^{k}, $B'_k = (e'_1.e'_2, ..., e'_k)$. Ainsi, le gain de X lorsque X joue e_i et Y joue e'_j est $g_X(e_i, e'_j) = A_{ij} = e_i^T A e'_j$. *Soit dans l'exemple precedent pour X joue tire a gauche et Y plonge a droite :* (10)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

.

3.2 Recherche d'equilibres en strategies pures

Dans la suite nous considererons un jeu a deux joueurs a somme nulle represente par la matrice A des gains de X.

Vocabulaire

Les elements de B_n (base cannoniques de $\Re^n$) sont appeles strategies pures pour X. De meme, les elements de B'_k (base cannonique de $\Re^k$) sont les strategies pures de Y . Quand Y joue la strategie pure $x \in B_n$, il gagne au moins la valeur $min_{y \in B'_k} x^T Ay$, en effet si Y joue la strategie $y \in B'_k$ X gagne $x^T Ay$, donc il gagne au moins le minimum de ces valeurs.

Exemple

Soit le jeu A= $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, si X joue $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors il gagne au moins

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

soit le minimum est 1.
Ou encore :

$$\begin{aligned}
min_{y \in B'_k} x^T Ay &= \min_{y \in \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y \\
&= min\{(01)\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, (01)\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\} \\
&= min\{2, 1\} = 1
\end{aligned}$$

En jouant la deuxieme ligne X est sur de gagner au moins 1. Si X joue $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, alors il gagne au moins 0.

3.2.1 Definition : strategie pure prudente pour X

Une strategie pure prudente pour X est une strategie $x \in B_n$ qui realise le maximum du pire gain. $min_{y \in B'_k} \overline{x}^T Ay = max_{x \in B_n}(min_{y \in B'_k} x^T Ay)$

Exemple Soit a=$\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ si X joue $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ alors il gagne au moins 0 et s'il joue $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ alors ilgagne au moins 1. Donc ici la strategie prudente pour X est $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Notation On notera $\underline{v} = max_{x \in B_n}(min_{y \in B'_k} x^T Ay)$ pour la recherche de $\underline{v}$ et de strategie prudente pour X on ecrit en general :
$\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to 0 \\ \to 1 \end{matrix} \Rightarrow \underline{v} = 1$ et la strategie prudente est $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Exemple Soit le jeu des penalties :$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to -1 \\ \to -1 \end{matrix} \Rightarrow \underline{v} = -1$ et les strategies prudentes pour X sont : $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Remarque En choisissant une strategie prudente, X cherche a maximiser le pire gain possible et ne s'interesse pas au meilleur gain possible. Ceci est prudent car Y choisira toujours le pire gain pour X car le gain de X est ce que perd Y. Du point de vue de Y lorsqu'il joue la strategie $y \in B'_k$ y perds au plus $max_{x \in B_n} x_t Ay$

Exemple Pour le jeu $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ si Y joue $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors il perd au plus :

$$\begin{aligned} max_{x\in B_2} x^T A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= max_{x\in B_2} \left\{ x^T \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= max_{x\in B_2} \left\{ x^T \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= max \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= max \{0, 2\} = 2 \end{aligned}$$

3.2.2 Definition : strategie pure prudente pour Y

Une strategie pure prudente pour Y est une strategie $\overline{y} \in B'_k$ qui lui assure le minimum des pires pertes c'est a dire qui minimise :
$max_{x\in B_n} x^T A\overline{y} = min_{y\in B'_k} \left(max_{x\in B_n} x^T Ay \right)$

Notation On note : $\overline{v} = min_{y\in B'_k} \left(max_{x\in B_n} x^T Ay \right)$

Exemple Soit le jeu :

$$\begin{array}{l} \begin{matrix} 2 & 8 \end{matrix} \Rightarrow \overline{v} = 2 \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Et la strategie prudente pour Y est celle ou il perd 2 soit : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Remarque On a toujours $\underline{v} \leq \overline{v}$ c'est a dire :

$$max_{x\in B_n} min_{y\in B'_k} x^T Ay \leq min_{y\in B'_k} max_{x\in B_n} x^T y$$

Exemple :
Pour le jeu $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ on a $\overline{v} = 2$ et $\underline{v} = 1$ soit $\underline{v} \leq \overline{v}$

Preuve

3.2.3 Equilibre en strategie pure

On dit qu'un jeu G admet un equilibre en strategiee pure si $\underline{v} = \overline{v}$ et dans ce cas, les quilibres en strategie pures du jeu sont tous les couples $(\overline{x}, \overline{y})$ formes par les strategies prudentes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de X et Y.
Lorsque le jeu de matrice A admet un equilibre en strategie pure, la valeur commune

$$max_{x\in B_n} min_{y\in B'_k} x^T Ay = min_{y\in B'_k} max_{x\in B_n} x^T y$$

est appelee valeur du jeu.

4 Les jeux bimatriciels