MAP556 PC1 Exercice 1

Peng-Wei Chen

Question 1

On identifie la densité de X comme $\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{x\geq 0}$. On montre qu'on peut appliquer la méthode de vraisemblance à cette question :

1. La densité de X_λ est strictement positive sur $[0, +\infty[$ par rapport à la mesure $\mu(dx) = dx$.

2. La fonction $(\lambda, x) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R} \mapsto p(\lambda, x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{x\geq 0}$ est continûment différentiable par rapport à λ avec $|\partial_\lambda p(\lambda, x)| = |(1 - \lambda x)e^{-\lambda x}|$. On peut trouver une majoration intégrable de $|\partial_\lambda p(\lambda, x)|$ sur un voisinage de λ parce que c'est une fonction affine en x multipliée par $e^{-\lambda x}$.

3. Par la définition de F, F est measurable et bornée.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \partial_\lambda \mathbb{E}\left[F(X)\right] = \mathbb{E}\left[F(X)\partial_\lambda \left[log(p(\lambda, x)\right]|_{x=X}\right] \\ &= \int_0^{+\infty} F(x)\left(\tfrac{1}{\lambda} - x\right)\lambda e^{-\lambda x}dx \end{aligned}$$

Question 2

On peut écrire $X = -\frac{1}{\lambda}log(U)$ où U est une loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors,

$$\partial_\lambda X = \frac{1}{\lambda^2}log(U) = -\frac{1}{\lambda}X$$

On montre qu'on peut appliquer la méthode de dérivation à cette question :

1. La fonction $\lambda \mapsto -\frac{1}{\lambda}log(U)$ est C^1 p.s. Et $\partial_\lambda X < -\frac{4}{\lambda^2}log(U)$ sur le voisinage $]\frac{\lambda}{2}, 2\lambda[$ de λ. La majoration est intégrable sur ce voisinage aussi.

2. F est une fonction C^1 à dérivée bornée. (La question ne donne que D^1, mais cela n'est pas suffisant)

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \partial_\lambda \mathbb{E}\left[F(X)\right] = \mathbb{E}\left(\nabla F(X)\partial_\lambda X\right) \\ &= \mathbb{E}\left(-F'(X)\tfrac{X}{\lambda}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} -F'(x)\tfrac{x}{\lambda}\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \int_0^{+\infty} -F'(x)xe^{-\lambda x}dx \end{aligned}$$

Question 3

On va utiliser l'intégration par parties sur le résultat de la question 1. On prend $f(x) = F(x)$, $g'_\lambda(x) = \left(\frac{1}{\lambda} - x\right) \lambda e^{-\lambda x} dx$. Ainsi, on a

$$g_\lambda(x) = xe^{-\lambda x}$$

et donc

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} F(x) \left(\tfrac{1}{\lambda} - x\right) \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[F(x)xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} F'(x)xe^{-\lambda x} dx \\ &= -\int_0^{+\infty} F'(x)xe^{-\lambda x} dx\end{aligned}$$

où on retrouve le résultat de la question 2.