物理学ノート 2

pinspro

2025 年 2 月 23 日

電磁気学

2025 年 2 月 21 日の訂正

セクション「長岡電磁気の 10 章についてのメモ 1」において，注釈の 2 で「誘電体として扱っているものは…」とあるが，プラズマは金属中の話なので誘電体に当てはまらない.

長岡電磁気の 10 章についてのメモ 2

長岡電磁気 [1] の第 10 章ついてメモしておく.

物質中のマクスウェル方程式

長岡電磁気では，物質中の静電場において，誘電体中の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ における分極ベクトル $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ における電気双極子モーメントの体積密度として定義した．そして，誘電体中での電束密度を

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \coloneqq \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

として定義した．また，物質中の静磁場において，磁性体中の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ における磁化ベクトル $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ における磁気双極子モーメントの体積密度として定義した．そして，磁性体中での補助的な場（磁場の強さ）を

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \coloneqq \frac{1}{\mu_0} \left\{ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \right\} \tag{2}$$

と定義した．以上により，絶縁体に分類される物質について，静電場の基礎方程式は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \rho_{\mathrm{e}} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

であり，静磁場の基礎方程式は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}_{\mathrm{e}} \tag{6}$$

となった．真空中の静電場の基礎方程式は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \rho_{\mathrm{e}} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0} \tag{8}$$

であるから，誘電体中の静電場の基礎方程式と同じ形をしている．真空中の場合，電束密度は誘電体による分極がないので

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{9}$$

と表される．真空中の静磁場の基礎方程式は

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}_{\mathrm{e}} \tag{11}$$

であるから，磁性体中の静磁場の基礎方程式と同じ形をしている．真空中の場合，補助的な場（磁場の強さ）は磁性体による磁化がないので

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{12}$$

と表される．いままでの流れから，時間変化のない電場および磁場でのそれぞれの基礎方程式は，真空中でも物質中でも同じ形で表すことができることがわかった[1)]．

電場の時間変化があるとき磁場があり，磁場の時間変化があるとき電場がある．ある時刻において電場があるとき微小時間のあいだに磁場が変化する量がわかり，ある時刻において磁場があるとき微小時間のあいだに電場が変化する量がわかる．すなわち時間変化を考えるとき電場と磁場は両方考え，時間変化する電磁場を考察することになる．物質中で時間変化する電磁場について考える．誘電体を考えるとき，分極ベクトルが時間変化すると分極電荷も時間変化すると考えられる．実際，分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ と分極電荷密度 ρ_{p} について静電場で

$$\rho_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) \tag{13}$$

と言う関係にあったものは，電場の時間変化が激しいために誘電体を構成する分子を破壊することがない限り

$$\rho_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r}, t) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) \tag{14}$$

という関係が成り立つものとして拡張できる．また，磁性体を考えるとき，磁化ベクトルが時間変化すると磁化電流も時間変化すると考えられる．実際，磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ と磁化電流 $\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}$ について静磁場で

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \tag{15}$$

という関係にあったものは，磁化電流の時間変化がそれほど激しくない範囲では[2)]

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t) \tag{16}$$

という関係が成り立つものとして拡張できる．

1） 導体については，電荷分布の広がりが真空中のあるきまった領域に制限されたものとして考える．

2） 具体的にどの程度のものなのか私にはわからないし，この表現で正しいのかもわからない．長岡電磁気では，物質が関係してくる概念なのに何も言わずに適用範囲を拡張してしまっていて，自身はよくわからない．誰か教えてほしい．

物質中の電磁場が，それほど激しすぎない時間変化をしているとき，分極ベクトルは時間変化していて，それに対応して分極電流が流れていると考えることができる．このことについて以下の具体例で考える．誘電体を正の電荷分布をもったシートと負の電荷分布をもったシートの組が物質全体に敷き詰められたものとして考える．任意の時刻 t での位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ における分極ベクトル $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0, t)$ は，その $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ の近傍の微小体積 ΔV においてそれぞれのシートの電荷密度が一様で $\rho(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0)$ であるとして，その領域のシートの組の変位を $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0, t)$ であるとすると

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0, t) = \rho(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0, t) \tag{17}$$

と表される．位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ の周りでは電荷密度が一様であるから，分極が時間変化するとき，その変化はその領域のシートの組の変位の時間変化による（すなわち，時間微分による）．シートの変位の時間微分はそのシートに分布する電荷の運動する速度を表す．ゆえに位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ の周りでは電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0)$ の電荷が速度 $\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0, t)$ で運動しているので電流密度

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0, t) = \rho(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0, t)}{\mathrm{d}t} \tag{18}$$

が生じていると考えることができる．上式は分極ベクトルを用いて

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0, t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0, t)}{\mathrm{d}t} \tag{19}$$

と書ける．この電流密度を分極電流という．誘電体内の任意の領域で生じているので，シート上の電荷分布が一様であるとすると

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{20}$$

と書くことができる．今考えたシートのモデルに限らず，上式を分極電流と呼ぶことにする．すなわち，誘電体において分極ベクトルの時間微分を分極電流と呼ぶことにする．

誘電体中の静電場のときと同様に，分極電荷の寄与を基礎方程式に，現象論的に取り込むことを考える．まず，真空中のマクスウェル方程式のうち，時間変化する電場におけるガウスの法則は

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \rho(\boldsymbol{r}, t) \tag{21}$$

である（ただし $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$）．上式の $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ はシートのそれとは異なる真空中の電荷分布である．真空中の電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ を真電荷 $\rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, t)$ と分極電荷 $\rho_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r}, t)$ の和に置き換え，電束密度も誘電体中についての量に変わっていることに注意すると

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot [\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)] = \rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, t) + \rho_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r}, t) \tag{22}$$

$$= \rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, t) - \boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) \tag{23}$$

となり

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot \{[\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)] + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t)\} = \rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, t) \tag{24}$$

であり電束密度を

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) \coloneqq \varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) \tag{25}$$

と定義することで真空中と同じ形で表せる．

ここまでのまとめ　分極電荷や分極電流については定義する動機はあれど，あくまで定義であるから，はじめは定義を理解することがよい．物質中では分極が生じていて，それにより真電荷のほかに分極電荷というものが考えられる，分極電荷は分極ベクトルによって決まると考えると，分極ベクトルが時間依存するとき分極電荷も時間依存すると考えてよい．磁化ベクトルが生じているとき，磁化電流が生じていると考える．磁化ベクトルが時間依存しているときは，磁化電流も時間依存しているとする．分極ベクトルの時間変化により，分極電流が定義される．現時点では，分極電荷の寄与を電場についてのガウスの法則に取り込んだところである．いまのところ，電束密度の定義は誘電体中の静電場のものに時間依存性を付け加えただけで，形は変わらない．

Bibliography

[1]長岡洋介 (2017) 『電磁気学Ⅱ－変動する電磁場』, 岩波書店.