

# Perspective Projection Matrix

Pintér Bálint

November 11, 2025

# Tartalomjegyzék

1.1	Perspective Projection Matrix . . . . .	2
1.2	Perspective divide . . . . .	2
1.3	Z-koordináta együtthatói . . . . .	2
1.4	X és Y-koordináta együtthatói . . . . .	3

## 1.1 Perspective Projection Matrix

Mátrix szorzással átkonvertálja a kamera térből clipping space-be a koordinátákat. Majd a homogén koordinátákból Descartes-koordinátákká való átalakításnál történik a perspective divide és ezzel együtt a koordináták NDC-térbe kerülése. **N**ormalized **D**evice **C**oordinate térben az origó a kép közepén van, és a koordináták:

$$\begin{aligned}x, y &\in [-1; 1] \\z &\in [0; 1]\end{aligned}$$

## 1.2 Perspective divide

Kezdjük az egységmátrixszal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

Mivel a perspective divide-ot a homogén koordinátákból a Descartes-koordinátákká való átalakításánál végezzük, ezért az  $\omega$ -nak  $-z$ -vel kell egyenlőnek lennie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 1.3 Z-koordináta együtthatói

A  $z$  koordinátáinkat normalizálni kell a  $[0; 1]$  intervallumra a következőképpen:

Ha  $z = -n$ , akkor  $z' = 0$ .

Ha  $z = -f$ , akkor  $z' = 1$ .

A  $z'$  kiszámolása:

$$z' = \frac{x \times m_{02} + y \times m_{12} + z \times m_{22} + \omega \times m_{32}}{-z}$$

Tehát  $z = -n$  esetén:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{-n \times m_{22} + m_{32}}{n} \quad / \times n \\ -n \times m_{22} + m_{32} &= 0\end{aligned}$$

$z = -f$  esetén:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{-f \times m_{22} + m_{32}}{f} \quad / \times f \\ -f \times m_{22} + m_{32} &= f\end{aligned}$$

Ezekből egy egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{cases} -n \times m_{22} + m_{32} = 0 \\ -f \times m_{22} + m_{32} = f \end{cases}$$

Az első egyenletből  $m_{32}$ -t kifejezve:

$$\begin{aligned} -n \times m_{22} + m_{32} &= 0 & / & + (n \times m_{22}) \\ m_{32} &= n \times m_{22} \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe:

$$\begin{aligned} -f \times m_{22} + m_{32} &= f & / & m_{32} = n \times m_{22} \\ -f \times m_{22} + n \times m_{22} &= f & / & \text{Kiemelve } m_{22}\text{-t} \\ m_{22} \times (n - f) &= f & / & \div (n - f) \\ m_{22} &= \frac{f}{n - f} \end{aligned}$$

Az első egyenletből kifejezett  $m_{32}$ -be helyettesítsük be  $m_{22}$ -t:

$$\begin{aligned} m_{32} &= n \times m_{22} & / & m_{22} = \frac{f}{n - f} \\ m_{32} &= n \times \frac{f}{n - f} \\ m_{32} &= \frac{nf}{n - f} \end{aligned}$$

Így a mátrixunk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f}{n-f} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{nf}{n-f} & 0 \end{bmatrix}$$

## 1.4 X és Y-koordináta együtthatói

Az x és y koordinátákat normalizálni kell  $[-1; 1]$  intervallumra.

- l - a bal széle a vászonnak
- r - a jobb széle a vászonnak

Az  $x'$  eredetileg a  $[l; r]$  intervallumban van, és ezt kell standardizálni a  $[-1; 1]$  intervallumra.

$$\begin{aligned}
l &\leq x' \leq r && / -l \\
0 &\leq x' - l \leq r - l && / \div (r - l) \\
0 &\leq \frac{x' - l}{r - l} \leq 1 && / \times 2 \\
0 &\leq 2 \frac{x' - l}{r - l} \leq 2 && / -1 \\
-1 &\leq 2 \frac{x' - l}{r - l} - 1 \leq 1 \\
-1 &\leq \frac{2x' - 2l}{r - l} - \frac{r - l}{r - l} \leq 1 \\
-1 &\leq \frac{2x' - 2l - (r - l)}{r - l} \leq 1 \\
-1 &\leq \frac{2x' - l - r}{r - l} \leq 1 \\
-1 &\leq \frac{2x' - (r + l)}{r - l} \leq 1 \\
-1 &\leq x' \frac{2}{r - l} - \frac{r + l}{r - l} \leq 1 && / x' = \frac{xn}{-z} \\
-1 &\leq \frac{xn}{-z} \times \frac{2}{r - l} - \frac{r + l}{r - l} \leq 1 \\
-1 &\leq \frac{x \times \frac{2n}{r-l}}{-z} - \frac{r + l}{r - l} \leq 1 \\
-1 &\leq \frac{x \times \frac{2n}{r-l}}{-z} + \frac{z \frac{r+l}{r-l}}{-z} \leq 1 \\
-1 &\leq \frac{x \times \frac{2n}{r-l} + z \times \frac{r+l}{r-l}}{-z} \leq 1
\end{aligned}$$

A  $-z$ -val való osztás a perspective divide, így a clip space-beli koordináta a számláló.

$$x \times \frac{2n}{r-l} + z \times \frac{r+l}{r-l}$$

A mátrixszorzásnál:

$$x' = x \times m_{00} + y \times m_{10} + z \times m_{20} + \omega \times m_{30}$$

Így az előző két egyenletből látható:

$$\begin{aligned}
m_{00} &= \frac{2n}{r-l} \\
m_{20} &= \frac{r+l}{r-l}
\end{aligned}$$

Az  $y$  koordináta határai:

$$b \leq y' \leq t$$

- $b$  - az alja a vászonnak
- $t$  - a teteje a vászonnak

Az  $y'$  együtthatóinak levezetése megegyezik az  $x'$  koordináta együtthatóinak levezetésével így:

$$m_{11} = \frac{2n}{t-b}$$

$$m_{21} = \frac{t+b}{t-b}$$

Így a végleges perspective projection matrix-unk:

$$\begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & 0 & 0 \\ \frac{r+l}{r-l} & \frac{t+b}{t-b} & \frac{f}{n-f} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{nf}{n-f} & 0 \end{bmatrix}$$