

Perspective Projection Matrix

Pintér Bálint

November 11, 2025

1 Perspective Projection Matrix

Mátrix szorzással átkonvertálja a kamera térből clipping space-be a koordinátákat. Majd a homogén koordinátákból Descartes-koordinátákká való átalakításnál történik a perspective divide és ezzel együtt a koordináták NDC-térbe kerülése. **N**ormalized **D**evice **C**oordinate térben az origó a kép közepén van, és a koordináták:

$$\begin{aligned}x, y &\in [-1; 1] \\z &\in [0; 1]\end{aligned}$$

Kezdjük az egységmátrixszal:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\0 & 1 & 0 & 0 \\0 & 0 & 1 & 0 \\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33}\end{bmatrix}$$

Mivel a perspective divide-ot a homogén koordinátákból a Descartes-koordinátákká való átalakításánál végezzük, ezért az ω -nak $-z$ -vel kell egyenlőnek lennie:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\0 & 1 & 0 & 0 \\0 & 0 & 1 & -1 \\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

A z koordinátáinkat normalizálni kell a $[0; 1]$ intervallumra a következőképpen:

Ha $z = -n$, akkor $z' = 0$.

Ha $z = -f$, akkor $z' = 1$.

A z' kiszámolása:

$$z' = \frac{x \times m_{02} + y \times m_{12} + z \times m_{22} + \omega \times m_{32}}{-z}$$

Tehát $z = -n$ esetén:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{-n \times m_{22} + m_{32}}{n} \quad / \times n \\-n \times m_{22} + m_{32} &= 0\end{aligned}$$

$z = -f$ esetén:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{-f \times m_{22} + m_{32}}{f} \quad / \times f \\-f \times m_{22} + m_{32} &= f\end{aligned}$$

Ezekből egy egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{cases} -n \times m_{22} + m_{32} = 0 \\ -f \times m_{22} + m_{32} = f \end{cases}$$

Az első egyenletből m_{32} -t kifejezve:

$$\begin{aligned} -n \times m_{22} + m_{32} &= 0 & / & + (n \times m_{22}) \\ m_{32} &= n \times m_{22} \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe:

$$\begin{aligned} -f \times m_{22} + m_{32} &= f & / & m_{32} = n \times m_{22} \\ -f \times m_{22} + n \times m_{22} &= f & / & \text{Kiemelve } m_{22}\text{-t} \\ m_{22} \times (n - f) &= f & / & \div (n - f) \\ m_{22} &= \frac{f}{n - f} \end{aligned}$$

Az első egyenletből kifejezett m_{32} -be helyettesítsük be m_{22} -t:

$$\begin{aligned} m_{32} &= n \times m_{22} & / & m_{22} = \frac{f}{n - f} \\ m_{32} &= n \frac{f}{n - f} \\ m_{32} &= \frac{nf}{n - f} \end{aligned}$$

Így a mátrixunk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f}{n-f} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{nf}{n-f} & 0 \end{bmatrix}$$

Az x és y koordinátákat normalizálni kell $[-1; 1]$ intervallumra.

- l - a bal széle a vászonnak
- r - a jobb széle a vászonnak

Az x' eredetileg a $[l; r]$ intervallumban van, és ezt kell standardizálni a $[-1; 1]$ intervallumra.

$$\begin{aligned}
l &\leq x' \leq r & / & -l \\
0 &\leq x' - l \leq r - l & / & \div (r - l) \\
0 &\leq \frac{x' - l}{r - l} \leq 1 & / & \times 2 \\
0 &\leq 2 \frac{x' - l}{r - l} \leq 2 & / & -1 \\
-1 &\leq 2 \frac{x' - l}{r - l} - 1 \leq 1 \\
-1 &\leq \frac{2x' - 2l}{r - l} - \frac{r - l}{r - l} \leq 1 \\
-1 &\leq \frac{2x' - 2l - (r - l)}{r - l} \leq 1 \\
-1 &\leq \frac{2x' - l - r}{r - l} \leq 1 \\
-1 &\leq \frac{2x' - (r + l)}{r - l} \leq 1 \\
-1 &\leq x' \frac{2}{r - l} - \frac{r + l}{r - l} \leq 1 & / & x' = \frac{xn}{-z} \\
-1 &\leq \frac{xn}{-z} \times \frac{2}{r - l} - \frac{r + l}{r - l} \leq 1 \\
-1 &\leq \frac{x \times \frac{2n}{r-l}}{-z} - \frac{r + l}{r - l} \leq 1 \\
-1 &\leq \frac{x \times \frac{2n}{r-l}}{-z} + \frac{z \frac{r+l}{r-l}}{-z} \leq 1 \\
-1 &\leq \frac{x \times \frac{2n}{r-l} + z \times \frac{r+l}{r-l}}{-z} \leq 1
\end{aligned}$$

A $-z$ -val való osztás a perspective divide, így a clip space-beli koordináta a számláló.

$$x \times \frac{2n}{r-l} + z \times \frac{r+l}{r-l}$$

A mátrixszorzásnál:

$$x' = x \times m_{00} + y \times m_{10} + z \times m_{20} + \omega \times m_{30}$$

Így az előző két egyenletből látható:

$$\begin{aligned}
m_{00} &= \frac{2n}{r-l} \\
m_{20} &= \frac{r+l}{r-l}
\end{aligned}$$

Az y koordináta határai:

$$b \leq y' \leq t$$

- b - az alja a vászonnak
- t - a teteje a vászonnak

Az y' együtthatóinak levezetése megegyezik az x' koordináta együtthatóinak levezetésével így:

$$m_{11} = \frac{2n}{t-b}$$

$$m_{21} = \frac{t+b}{t-b}$$

Így a végleges perspective projection matrix-unk:

$$\begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & 0 & 0 \\ \frac{r+l}{r-l} & \frac{t+b}{t-b} & \frac{f}{n-f} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{nf}{n-f} & 0 \end{bmatrix}$$