

Edge Function

Pintér Bálint

November 25, 2025

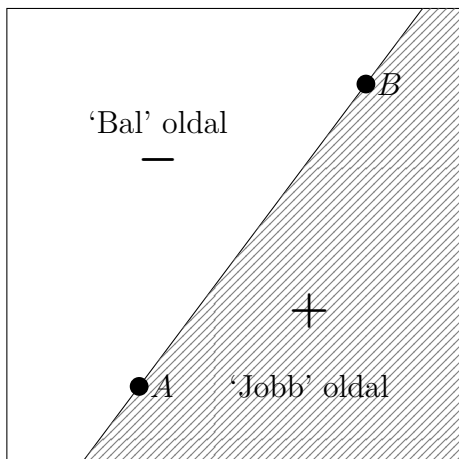
Tartalomjegyzék

1	Bevezetés	3
2	Edge function levezetése	4
3	Edge function működési elve	5
3.1	Edge function geometriai jelentése	5
3.1.1	Baricentrikus koordináták	5
3.2	Vektoriális szorzatos magyarázat	6
4	Inkrementalitás	7

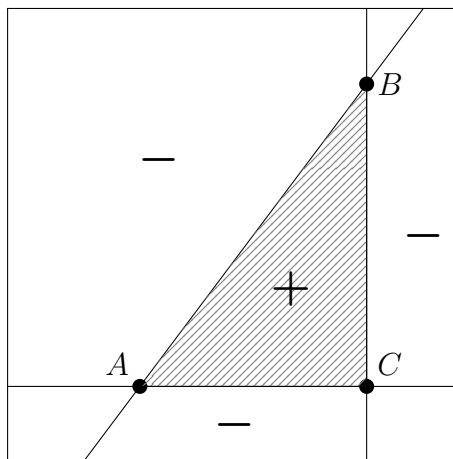
1 Bevezetés

Az edge function egy lineáris függvény, amellyel egy egyenessel kettéosztott síkon lévő pontokat lehet három régióba osztani:

- Az egyenestől ‘jobbra’ lévő pontok (ahol a függvény értéke pozitív).
- Az egyenestől ‘balra’ lévő pontok (ahol a függvény értéke negatív).
- Az egyenesre illeszkedő pontok (ahol a függvény értéke nulla).



1. Ábra
Sík felosztása A-n és B-n átmenő egyenessel



2. Ábra
Az AB, BC és CA szakaszok által meghatározott egyenesek ‘jobb’ oldalainak metszete egy háromszög belseje

A 2. ábra szemlélteti, hogy a háromszög ‘belseje’ a három oldalhoz tartozó megfelelő irányú edge function előjelei alapján meghatározható. Ezt használjuk 3D renderelésben, hogy a pixelt (pontot) tartalmazza-e a háromszög.

2 Edge function levezetése

- Legyen a szakasz kezdőpontja $P_0 = (X, Y)$
- Legyen a szakasz végpontja $P_1 = (X + dX, Y + dY)$
 - Ekkor a $P_0\vec{P}_1 = \vec{v} = ((X + dX) - X, (Y + dY) - Y) = (dX, dY)$
- Legyen a vizsgált pont $P = (x, y)$
 - Ekkor a $P_0\vec{P} = \vec{u} = (x - X, y - Y)$

Az edge function lényegében a két vektor által alkotott 2×2 -es mátrix determinánsa.

$$\det \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = u_x v_y - u_y v_x \quad / \quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Helyettesítsük be az értékeinket:

$$\begin{aligned} u_x &= x - X \\ u_y &= y - Y \\ v_x &= dX \\ v_y &= dY \end{aligned}$$

A végeredmény:

$$\begin{aligned} E(x, y) &= (x - X)dY - (y - Y)dX \\ E_{P_0 P_1}(P) &= (x - X)dY - (y - Y)dX \end{aligned}$$

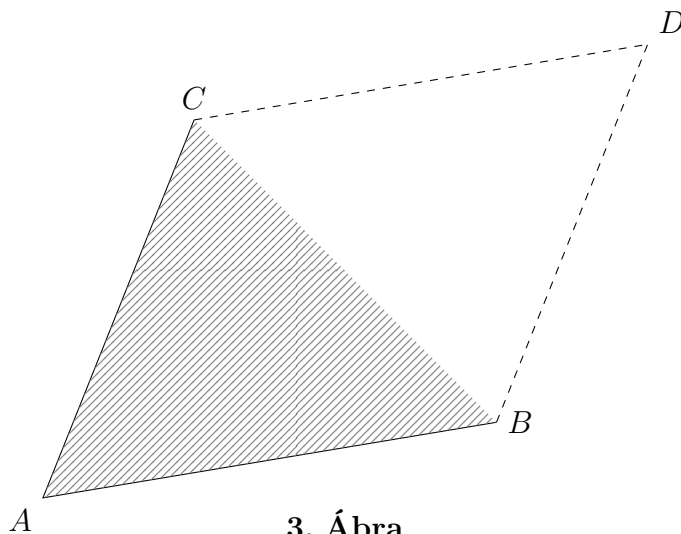
3 Edge function működési elve

3.1 Edge function geometriai jelentése

A determináns előjele 2×2 -es mátrix esetén:

- Pozitív esetben a vektorok jobbsodrású (pozitív irányítású) rendszert alkotnak.
- Negatív esetben a vektorok balsodrású (negatív irányítású) rendszert alkotnak.
- Nulla esetén párhuzamosak.

A determináns abszolút értéke 2×2 -es mátrix esetén a mátrix sorvektorai által kifeszített paralelogramma területét jelenti. Így, ha ezt elosztjuk kettővel, akkor megkapjuk a háromszög területét.

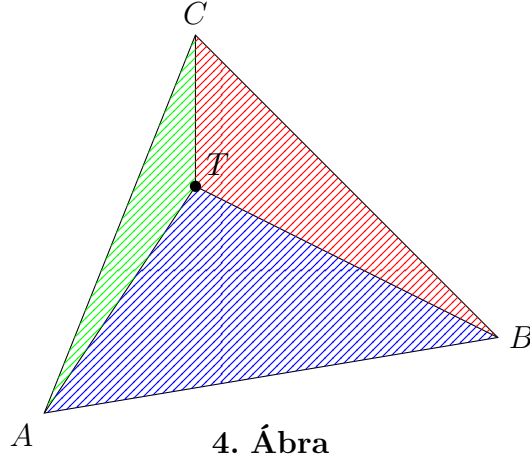


3. Ábra
Paralelogramma területe

$$E_{AC}(B) = T_{ABCD_{\square}}$$
$$\frac{1}{2}E_{AC}(B) = T_{ABC_{\Delta}}$$

3.1.1 Baricentrikus koordináták

Az előbb kiszámolt területet felhasználjuk a háromszögön belüli pont (pixel) baricentrikus koordinátáinak kiszámolására (A baricentrikus koordinátákkal tudjuk interpolálni a háromszög egy belső pontjára a háromszög csúcsaihoz vett értékeket).



4. Ábra

A háromszög egy belső
ponttal felosztva.

$$\lambda_A = \frac{T_{TBC\Delta}}{T_{ABC\Delta}}$$

$$/ T_{TBC\Delta} = \frac{1}{2} E_{CB}(T)$$

$$\lambda_B = \frac{T_{ATC\Delta}}{T_{ABC\Delta}}$$

$$/ T_{ATC\Delta} = \frac{1}{2} E_{AC}(T)$$

$$\lambda_C = \frac{T_{ATB\Delta}}{T_{ABC\Delta}}$$

$$/ T_{ATB\Delta} = \frac{1}{2} E_{BA}(T)$$

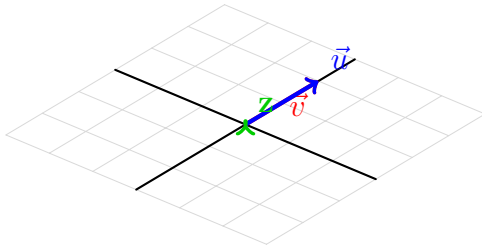
Fontos tulajdonságuk:

$$\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1$$

/ Területszámítás axiómáiból is következik

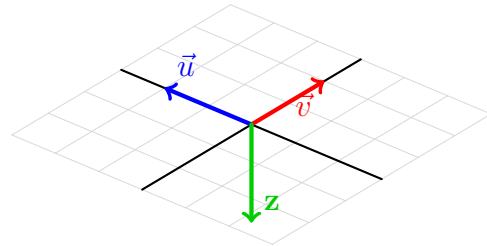
3.2 Vektoriális szorzatos magyarázat

A vektoriális szorzat definíció szerint csak háromdimenziós vektorokra van értelmezve. Ha azonban a \vec{u} és \vec{v} vektorainkat kiegészítjük $z = 0$ koordinátával, akkor az így kapott két vektor vektoriális szorzatának a z koordinátája az edge function értéke.



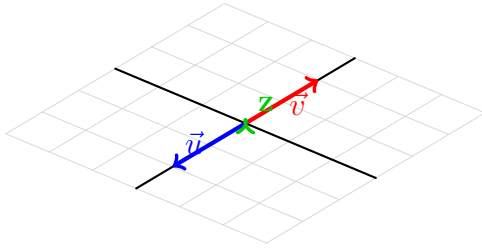
$$z = 0 \Rightarrow$$

Párhuzamos a két vektor
A pont a vonalon van



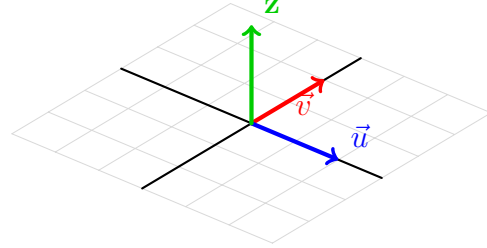
$$z < 0 \Rightarrow$$

A pont 'balra' van a vonaltól



$$z = 0 \Rightarrow$$

Párhuzamos a két vektor
A pont a vonalon van



$$z > 0 \Rightarrow$$

A pont 'jobbra' van a vonaltól

5. Ábra

Vektoriális szorzattal szemléltetve

4 Inkrementalitás

Mivel az edge function lineáris számolhatjuk inkrementálisan. Elég egyszer kiszámolni mindegyik oldalra magát az edge functiont:

$$E(x, y) = (x - X)dY - (y - Y)dX$$

Utána egy összeadással kiszámolhatjuk a többi pontokra (pixelekre)

A következő egyenletek képernyő térbeli koordináta-rendszerben vannak x jobbra nő, y lefele nő:

$$E(x + 1, y) = E(x, y) + dY$$

$$E(x - 1, y) = E(x, y) - dY$$

$$E(x, y + 1) = E(x, y) - dX$$

$$E(x, y - 1) = E(x, y) + dX$$

Az edge function 5 műveletjét (3 kivonás, 2 szorzás), így lecsökkentjük egy műveletre (1 összeadás). Ez egy 1920×1080 felbontású képnél például jelentős mennyiségű műveletet jelent. Használhatjuk egy adott L távol lévő pixelre is.

$$E(x + L, y) = E(x, y) + L \times dY$$

$$E(x - L, y) = E(x, y) - L \times dY$$

$$E(x, y + L) = E(x, y) - L \times dX$$

$$E(x, y - L) = E(x, y) + L \times dX$$

Bizonyítása egyik esetre:

$$E(x + L, y) = ((x + L) - X)dY - (y - Y)dX$$

$$E(x + L, y) = (x - X + L)dY - (y - Y)dX$$

$$E(x + L, y) = (x - X)dY + L \times dY - (y - Y)dX$$

$$E(x + L, y) = (x - X)dY - (y - Y)dX + L \times dY \quad / \quad E(x, y) = (x - X)dY - (y - Y)dX$$

$$E(x + L, y) = E(x, y) + L \times dY$$

A többi esetet is hasonlóan lehet belátni.

Források

Juan Pineda. A parallel algorithm for polygon rasterization. Technical report, Apollo Computer Inc., 1988. URL <https://www.cs.drexel.edu/~deb39/Classes/Papers/comp175-06-pineda.pdf>.