Perlin-zaj

Pintér Bálint

2026. január 25.

Tartalomjegyzék

1. Perlin-zaj 3

1.1. Működése összefoglalva . . . 3

2. Előkészítés 3

2.1. Gradiens tábla . . . 3

2.1.1. Vektor generálás . . . 4

2.2. Permutációs tábla . . . 4

3. Zajszámítás 5

3.1. Rácspontok meghatározása . . . 5

3.2. Skaláris szorzat kiszámítása . . . 6

3.2.1. Gradiens vektorok kiválasztása . . . 6

3.2.2. A sarkokból a pontba mutató vektorok kiszámítása . . . 6

3.2.3. Skaláris szorzat kiszámítása . . . 7

3.3. Interpoláció . . . 7

3.3.1. Simítófüggvény . . . 7

3.3.2. Interpoláció . . . 8

4. Teljes zajfüggvény 9

5. Fractal Brownian Motion (Fraktál zaj) 10

Forrásjegyzék 11

1. Perlin-zaj

A Perlin-zaj egy gradiens alapú zajgenerálási algoritmus, amelynek a célja a véletlenszerű, de összefüggő zaj létrehozása. [1] Segítségével a természetben előforduló véletlenszerű jelenségeket jól lehet szimulálni, mint például domborzatok, felhők vagy a víz hullámzása. Tetszőleges n dimenzióra létrehozható, de jellemzően az 1-től a 4. dimenzióig alkalmazzák. A kódban egy kétdimenziós Perlin-zaj van implementálva.

1.1. Működése összefoglalva

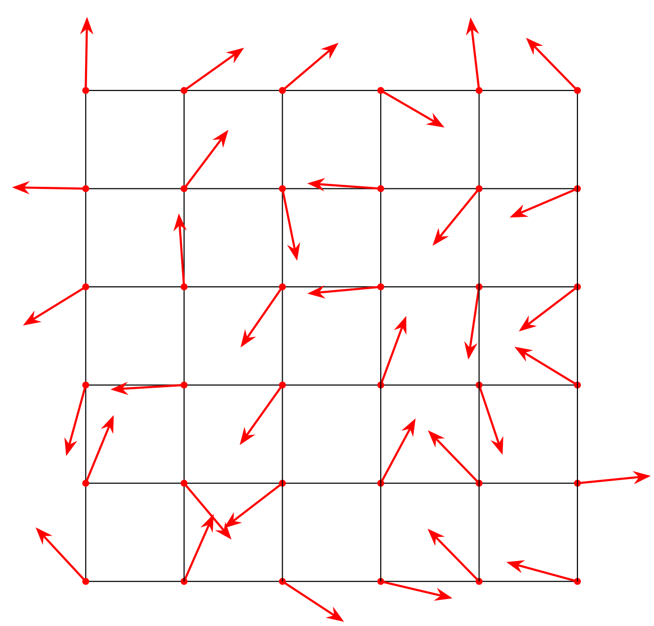
1. **Rács meghatározása:** A zaj dimenziójában egy szabályos rácsot határozunk meg, amelynek minden sarkához egy véletlenszerűen generált egységvektort rendelünk. A rácsvonalak jellemzően az egész koordinátáknál helyezkednek el.
2. **Rácsnégyzeten belüli vektorok kiszámítása:** Kiszámoljuk a rácsnégyzetén belüli pontba a rács sarkaiból mutató vektorokat.
3. **Skaláris szorzás:** Az adott sarokból a pontba mutató vektornak és az adott sarokhoz rendelt vektornak vesszük a skaláris szorzatát.
4. **Interpoláció:** A kapott skaláris szorzatokat végül tengelyekként interpoláljuk egy simítófüggvénnyel. Például a kétdimenziós zajnál először az x tengely mentén interpolálunk majd a kapott részeredményeket az y tengely mentén interpoláljuk.

2. Előkészítés

A Perlin-zaj hatékony generálásához két adat inicializálására van szükség: egy gradiens táblára és egy permutációs táblára.

2.1. Gradiens tábla

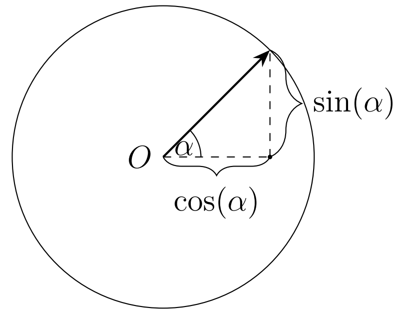
A Perlin-zaj egy úgynevezett gradiens-zaj. Eszerint rácspontokat határozunk meg, amikhez egy véletlenszerű vektort rendelünk. A gradiens tábla ezeket a véletlenszerű vektorokat tárolja. A vektorok dimenziószáma megegyezik a zaj dimenziószámával. (Kétdimenziós zaj $\rightarrow$ kétdimenziós vektor)



1. Ábra
A záj rácsainák szemléltetése.

2.1.1. Vektor generálás

Generálunk egy véletlenszerű számot $[0; 2\pi[$ intervallumban. Majd egyszerű trigonometriával a szöget egy vektorrá alakítjuk, ahol a vektor x komponense a véletlen szög koszinusza, és az y komponense a szög szinusza.



2. Ábra
A vektorok előállításának szemléltetése.

2.2. Permutációs tábla

A permutációs tábla kezdetben 0-tól 255-ig tartalmazza a számokat növekvő sorrendben. Ezt a listát egy véletlenszám-generátor segítségével összekeverjük és önmaga után fűzzük (ezzel egy 512 elemű tömböt kapunk). Így a hashelésnél elkerülhető a túlindexelés, ami gyorsítja a zajgenerálást, mivel elhagyható a túlindexelésre való ellenőrzés.

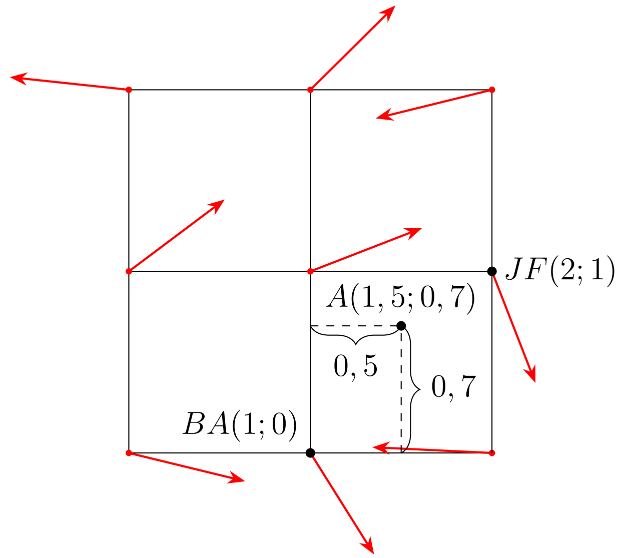
1. Algoritmus: Permutációs tábla létrehozása

```
Konstans: MaxP=512
Típus: VéletlenSzámGenerátor=Osztály (
    jelenlegiSzám:Egész
    Függvény Következő:Egész
)
Eljárás PermutaciosTablaGeneral (Változó: PermutaciosTabla:Tömb(1..MaxP:Egész),
Rand:VéletlenSzámGenerátor ):
    Változó: i, j, temp:Egész

    Ciklus i := 1-től 256-ig
        PermutaciosTabla[i] := i
    Ciklus vége

    Ciklus i := 256-tól 2-ig −1-esével
        j := Rand.Következő() Mod (i + 1)
        temp := PermutaciosTabla[i]
        PermutaciosTabla[i] := PermutaciosTabla[j]
        PermutaciosTabla[j] := temp
    Ciklus vége

    Ciklus i := 1-től 256-ig
        PermutaciosTabla[i + 256] := PermutaciosTabla[i]
    Ciklus vége
Eljárás vége
```

3. Zajszámítás

3.1. Rácspontok meghatározása

Először meghatározzuk, hogy az adott $(x,\ y)$ pont melyik négyzetbe tartozik ezt a bitenkénti ÉS 255 művelettel tesszük, így az eredmény a $[0; 255]$ tartományba fog esni: ha az érték nagyobb 255-től, akkor visszafordul az intervallum elejére (pl. 256-ból 0 lesz). Ezt elvégezve az x-re és y-ra megkapjuk a bal alsó rácspont koordinátáit. A bal alsó rácspont koordinátáihoz hozzáadva 1-et majd egy bitenkénti ÉS 255 művelettel megkapjuk a jobb felső rácspont koordinátáit. A négyzeten belüli pontot úgy kapjuk meg, hogy a szám egész részét elhagyjuk.



3. Ábra
A rácspont koordinátáainak szemléltetése.

Pszeudókódban megvalósítva:

2. Algoritmus: Rácspontok és négyzeten belüli koordináták kiszámolása

```
Típus: Rácspont=Rekord (
        balAlsóPontX, balAlsóPontY:Egész
        jobbFelsőPontX, jobbFelsőPontY:Egész
        relatívX, relatívY :Valós
)
Függvény RacspontKiszamolasa(Konstans: x, y: Valós) : Rácspont:
    Változó: jelenlegiRácspont: Rácspont
    jelenlegiRácspont.balAlsóPontX := (Egész)floor(x) & 256 + 1
    jelenlegiRácspont.balAlsóPontY := (Egész)floor(y) & 256 + 1

    jelenlegiRácspont.jobbAlsóPontX := (jelenlegiRácspont.balFelsőPontX + 1) & 256
    jelenlegiRácspont.jobbAlsóPontY := (jelenlegiRácspont.balFelsőPontY + 1) & 256

    jelenlegiRácspont.relatívX := x− floor(x)
    jelenlegiRácspont.relatívY := y− floor(y)
    RacspontKiszamolasa := jelenlegiRácspont
Függvény vége
```

3.2. Skaláris szorzat kiszámítása

3.2.1. Gradiens vektorok kiválasztása

A gradiens vektorokat a permutációs tábla segítségével válasszuk ki. Vesszük a permutációs tábla x-edik elemét, hozzáadjuk az y értékét, majd az így kapott összeget használjuk indexként a permutációs táblában. Az így kapott eredmény lesz az indexe a gradiens vektornak a gradiens táblából.

3. Algoritmus: Gradiens vektor kiválasztása

Típus: Vektor=Rekord (
  x:Valós
  y:Valós
)
Konstans: MaxP=512, MaxG=256
Változó: PermutaciosTabla:Tömb(1..MaxP:Egész)
Változó: GradiensTabla:Tömb(1..MaxG:Egész)

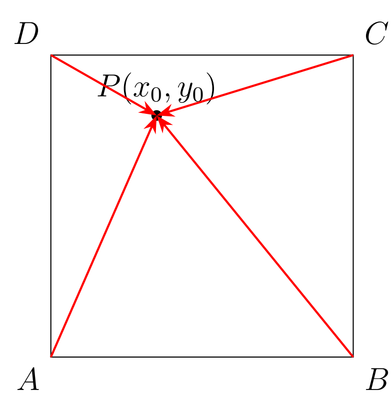
Függvény *Hash(**Konstans**: x, y: Egész) : Egész*:
  Hash := PermutaciosTabla[PermutaciosTabla[x] + y]
Függvény vége

Függvény *GradiensVektorKivalaszt(**Konstans**: x, y: Egész) : Vektor*:
  GradiensVektorKivalaszt := GradiensTabla[hash(x, y)]
Függvény vége

3.2.2. A sarkokból a pontba mutató vektorok kiszámítása

Legyen a négyzeten belüli P pont relatív koordinátái (x_0, y_0), ahol $x_0, y_0 \in [0; 1]$. A rácsnégyzet sarkai legyen A, B, C, D.
Így a sarkokból a pontba mutató vektorok:

- **Bal alsó:** $\vec{v}_{AP}(x_0, y_0)$
- **Jobb alsó:** $\vec{v}_{BP}(x_0 - 1, y_0)$
- **Bal felső:** $\vec{v}_{CP}(x_0, y_0 - 1)$
- **Jobb felső:** $\vec{v}_{DP}(x_0 - 1, y_0 - 1)$



4. Ábra
Relatív vektorok.

3.2.3. Skaláris szorzat kiszámítása

A vektorok meghatározása után kiszámítjuk az adott sarokhoz tartozó gradiens- és relatív vektorok skaláris szorzatát. A skaláris szorzatot a matematikai definíció alapján végezzük: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \times x_b + y_a \times y_b$"fade" vagy "quintic"

4. Algoritmus: Skaláris szorzat

Típus: Vektor=Rekord (
    x:Valós
    y:Valós
)
Függvény *SkalarisSzorzat(**Konstans**: v1, v2: Vektor) : Valós*:
    SkalarisSzorzat := v1.x * v2.x + v1.y * v2.y
Függvény vége

3.3. Interpoláció

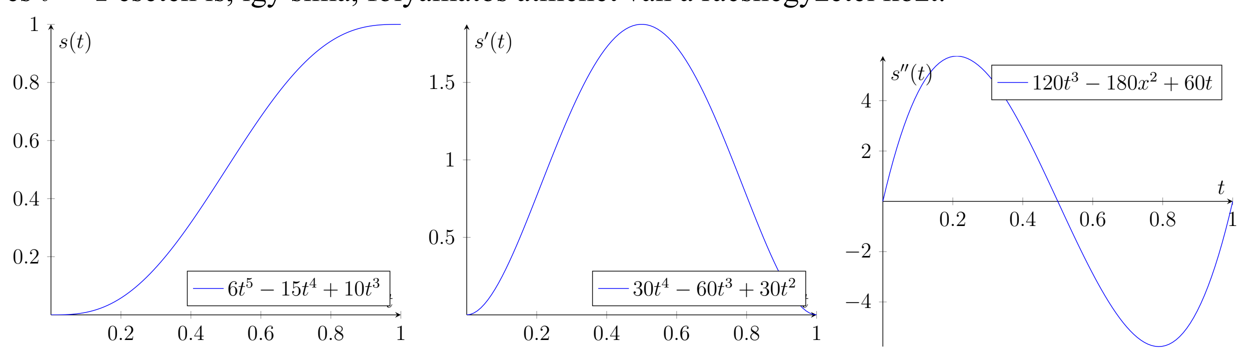
A kapott skalárszorzatokat végül egy simítófüggvény segítségével interpoláljuk a tengelyek mentén.

3.3.1. Simítófüggvény

Simítófüggvényként a Ken Perlin által 2002-ben, az 'Improved Noise'-ban bevezetett függvényt használjuk. [2]

$$s(t) = 6t^5 - 15t^4 + 10t^3$$

A függvény fontos jellemzője, hogy az első deriváltja és második deriváltja is egyenlő 0-val $t = 0$ és $t = 1$ esetén is, így sima, folyamatos átmenet van a rácsnégyzetei közt.



5. Algoritmus: Simítófüggvény

Függvény *Simitofuggveny(**Konstans**: t: Valós) : Valós*:
    Simitofuggveny := $6t^5 - 15t^4 + 10t^3$
Függvény vége

3.3.2. Interpoláció

A végeredményt a skaláris szorzatok interpolálásával kapjuk. Kétdimenzió esetén először kiszámoljuk a relatív x-koordináta simítófüggvénybeli értékét majd eszerint interpoláljuk a skaláris szorzatokat az x tengely mentén, tehát a felső skaláris szoraztokat és az alsó skaláris szorzatokat. Majd kiszámoljuk a relatív y-koordináta simítófüggvénybeli értékét és eszerint interpoláljuk az előző kettő interpolált részeredményt.

---

6. Algoritmus: Interpoláció

Függvény *Interpolacio(**Konstans**: a, b, t: Valós) : Valós***:**
    Interpolacio $:= a + t \times (b - a)$
Függvény vége

---

4. Teljes zajfüggvény

Először kiszámoljuk a vizsgált pontot tartalmazó rácsnégyzet koordinátáit és a ponton belüli relatív helyzetét a *RacspontKiszamolasa* függvénnyel. Ezt követően lekérjük a négy sarokhoz tartozó vektorokat a *GradiensVektorKivalaszt* függvénnyel, majd kiszámítjuk a sarkokból a pontba mutató távolságvektorokat. Végül kiszámoljuk a skaláris szorzatukat az adott sarkokhoz való vektoroknak a *SkalarisSzorzat* segítségével. Végül interpoláljuk a skaláris szorzatokat az *Interpolacio* függvénnyel.

7. Algoritmus: Teljes zajfüggvény

```
Típus: Vektor=Rekord (x, y: Valós)
Típus: Rácspont=Rekord (
    balAlsóPontX, balAlsóPontY:Egész
    jobbFelsőPontX, jobbFelsőPontY:Egész
    relatívX, relatívY :Valós
)
Függvény Zaj(Konstans: x, y: Valós) : Valós:
    Változó: rácspont: Rácspont
    Változó: g00, g10, g01, g11: Vektor
    Változó: p00, p10, p01, p11: Vektor
    Változó: u, v, a, b: Valós
    [1. Rácspont és relatív koordináták kiszámítása ]
    rácspont := RacspontKiszamolasa(x, y)
    [2. Gradiens vektorok lekérdezése ]
    g00 := GradiensVektorKivalaszt(rácspont.balAlsóPontX, rácspont.balAlsóPontY)
    g10 := GradiensVektorKivalaszt(rácspont.jobbFelsőPontX, rácspont.balAlsóPontY)
    g01 := GradiensVektorKivalaszt(rácspont.balAlsóPontX, rácspont.jobbFelsőPontY)
    g11 := GradiensVektorKivalaszt(rácspont.jobbFelsőPontX, rácspont.jobbFelsőPontY)
    [3. Relatív vektorok definiálása ]
    p00.x := rácspont.relatívX
    p00.y := rácspont.relatívY
    p10.x := rácspont.relatívX - 1.0
    p10.y := rácspont.relatívY
    p01.x := rácspont.relatívX
    p01.y := rácspont.relatívY - 1.0
    p11.x := rácspont.relatívX - 1.0
    p11.y := rácspont.relatívY - 1.0
    [4. Simítófüggvény alkalmazása ]
    u := Simitofuggveny(rácspont.relatívX)
    v := Simitofuggveny(rácspont.relatívY)
    [5. Skaláris szorzatok kiszámítása és interpolálásuk ]
    a := Interpolacio(SkalarisSzorzat(g00, p00), SkalarisSzorzat(g10, p10), u)
    b := Interpolacio(SkalarisSzorzat(g01, p01), SkalarisSzorzat(g11, p11), u)
    Zaj := Interpolacio(a, b, v)
Függvény vége
```

5. Fractal Brownian Motion (Fraktál zaj)

Forrásjegyzék

[1] Ken Perlin. “An image synthesizer”. *SIGGRAPH Comput. Graph.* 19.3 (1985. júl.), 287–296. old. ISSN: 0097-8930. DOI: 10.1145/325165.325247. URL: https://doi.org/10.1145/325165.325247.

[2] Ken Perlin. “Improving noise”. *ACM Trans. Graph.* 21.3 (2002. júl.), 681–682. old. ISSN: 0730-0301. DOI: 10.1145/566654.566636. URL: https://doi.org/10.1145/566654.566636.