Perspective Projection Matrix

Pintér Bálint

2026. január 24.

Tartalomjegyzék

1.1. Perspective Projection Matrix

Mátrix szorzással átkonvertálja a kamera térből clipping space-be a koordinátákat. Majd a homogén koordinátákból Descartes-koordinátákká való átalakításnál történik a perspective divide és ezzel együtt a koordináták NDC-térbe kerülése. **N**ormalized **D**evice **C**oordinate térben az origó a kép közepén van, és a koordináták:

$$x, y \in [-1; 1]$$
$$z \in [0; 1]$$

1.2. Perspective divide

Kezdjük az egységmátrixszal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

Mivel a perspective divide-ot a homogén koordinátákból a Descartes-koordinátákká való átalakításánál végezzük, ezért az ω-nak $-z$-vel kell egyenlőnek lennie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3. Z-koordináta együtthatói

A z koordinátáinkat normalizálni kell a $[0; 1]$ intervallumra a következőképpen:
Ha $z = -n$, akkor $z' = 0$.
Ha $z = -f$, akkor $z' = 1$.
A z' kiszámolása:

$$z' = \frac{x \times m_{02} + y \times m_{12} + z \times m_{22} + \omega \times m_{32}}{-z}$$

Tehát $z = -n$ esetén:

$$0 = \frac{-n \times m_{22} + m_{32}}{n} \quad / \times n$$
$$-n \times m_{22} + m_{32} = 0$$

$z = -f$ esetén:

$$1 = \frac{-f \times m_{22} + m_{32}}{f} \quad / \times f$$
$$-f \times m_{22} + m_{32} = f$$

Ezekből egy egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{cases} -n \times m_{22} + m_{32} = 0 \\ -f \times m_{22} + m_{32} = f \end{cases}$$

Az első egyenletből m_{32}-t kifejezve:

$$\begin{aligned} -n \times m_{22} + m_{32} = 0 \quad / + (n \times m_{22}) \\ m_{32} = n \times m_{22} \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe:

$$\begin{aligned} -f \times m_{22} + m_{32} &= f && / \, m_{32} = n \times m_{22} \\ -f \times m_{22} + n \times m_{22} &= f && / \text{ Kiemelve } m_{22}\text{-t} \\ m_{22} \times (n - f) &= f && / \div (n - f) \\ m_{22} &= \frac{f}{n - f} \end{aligned}$$

Az első egyenletből kifejezett m_{32}-be helyettesítsük be m_{22}-t:

$$\begin{aligned} & m_{32} = n \times m_{22} \quad / \, m_{22} = \frac{f}{n - f} \\ & m_{32} = n \frac{f}{n - f} \\ & m_{32} = \frac{nf}{n - f} \end{aligned}$$

Így a mátrixunk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f}{n-f} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{nf}{n-f} & 0 \end{bmatrix}$$

1.4. X és Y-koordináta együtthatói

Az x és y koordinátákat normalizálni kell $[-1; 1]$ intervallumra.

- l - a bal széle a vászonnak
- r - a jobb széle a vászonnak

Az x' eredetileg a $[l;r]$ intervallumban van, és ezt kell standardizálni a $[-1;1]$ intervallumra.

$$
\begin{aligned}
l &\le x' \le r && / -l \\
0 &\le x' - l \le r - l && / \div (r-l) \\
0 &\le \frac{x'-l}{r-l} \le 1 && / \times 2 \\
0 &\le 2\frac{x'-l}{r-l} \le 2 && / -1 \\
-1 &\le 2\frac{x'-l}{r-l} - 1 \le 1 \\
-1 &\le \frac{2x'-2l}{r-l} - \frac{r-l}{r-l} \le 1 \\
-1 &\le \frac{2x'-2l-(r-l)}{r-l} \le 1 \\
-1 &\le \frac{2x'-l-r}{r-l} \le 1 \\
-1 &\le \frac{2x'-(r+l)}{r-l} \le 1 \\
-1 &\le x'\frac{2}{r-l} - \frac{r+l}{r-l} \le 1 && / x' = \frac{xn}{-z} \\
-1 &\le \frac{xn}{-z} \times \frac{2}{r-l} - \frac{r+l}{r-l} \le 1 \\
-1 &\le \frac{x \times \frac{2n}{r-l}}{-z} - \frac{r+l}{r-l} \le 1 \\
-1 &\le \frac{x \times \frac{2n}{r-l}}{-z} + \frac{z\frac{r+l}{r-l}}{-z} \le 1 \\
-1 &\le \frac{x \times \frac{2n}{r-l} + z \times \frac{r+l}{r-l}}{-z} \le 1
\end{aligned}
$$

A $-z$-val való osztás a perspective divide, így a clip space-beli koordináta a számláló.

$$x \times \frac{2n}{r-l} + z \times \frac{r+l}{r-l}$$

A mátrixszorzásnál:

$$x' = x \times m_{00} + y \times m_{10} + z \times m_{20} + \omega \times m_{30}$$

Így az előző két egyenletből látható:

$$
\begin{aligned}
m_{00} &= \frac{2n}{r-l} \\
m_{20} &= \frac{r+l}{r-l}
\end{aligned}
$$

Az y koordináta határai:

$$b \leq y' \leq t$$

- b - az alja a vászonnak
- t - a teteje a vászonnak

Az y' együtthatóinak levezetése megegyezik az x' koordináta együtthatóinak levezetésével így:

$$m_{11} = \frac{2n}{t-b}$$
$$m_{21} = \frac{t+b}{t-b}$$

Így a végleges perspective projection matrix-unk:

$$\begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & 0 & 0 \\ \frac{r+l}{r-l} & \frac{t+b}{t-b} & \frac{f}{n-f} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{nf}{n-f} & 0 \end{bmatrix}$$