3. Aplicaciones de funciones

Analicemos la siguiente situación: Dos atletas se están preparando para la competencia "200 metros planos". Compararemos las distancias recorridas por dos atletas en función de su tiempo durante los primeros 20 segundos del trayecto.

La distancia recorrida (medida en metros) por el Atleta 1, está dada por la función $f(x) = 0{,}7x^2$ y la distancia recorrida (medida en metros) por el Atleta 2, está dada por la función $g(x) = 10x$, donde x es el tiempo medido en segundos, desde que comienzan el trayecto.

Es natural, que para realizar la comparación pensemos en hacerlo de forma gráfica: para esto, debemos generar un código que nos permita mostrar ambas funciones en un gráfico, durante los primeros 20 segundos del trayecto:

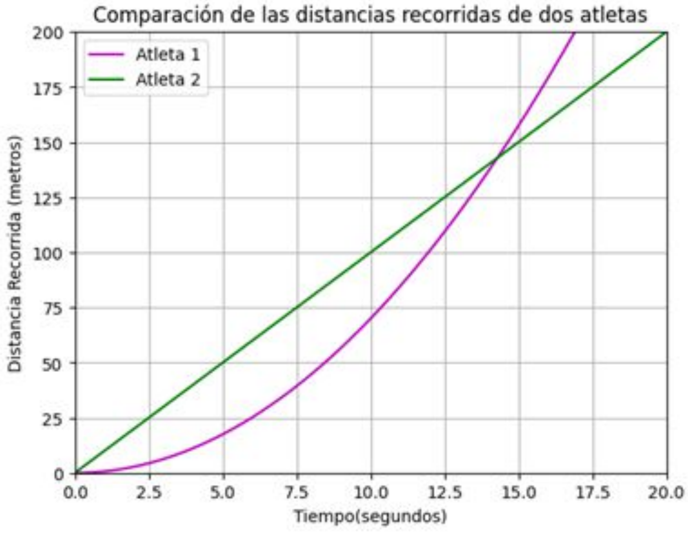
Ejemplo de código: Graficar funciones

```python
# Llamamos a las librerías matplotlib y numpy para crear nuestro
# gráfico y para definir las funciones
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Definimos las funciones f(x) y g(x) de la situación planteada
def f(x):
    return 0.7*x**2
def g(x):
```

```
    return 10*x

# El tiempo debe ser positivo por lo que no cometemos error
# alguno en definir al eje x entre 0 y 50. Aquí ya podríamos
# definirlo de 0 a 20 (pues del problema plantea estudiar
# lo que ocurre en los primeros 20 segundos, pero lo haremos
# a través de otra instrucción posteriormente
x=np.arange(0, 50, 0.01)

# Trazamos la función f(x) en el gráfico, con el color magenta
# y la etiqueta "Atleta 1"
plt.plot(x, f(x),color='m',label='Atleta 1')

# Trazamos la función g(x) en el gráfico, con el color verde y
# la etiqueta "Atleta 2"
plt.plot(x, g(x),color='g',label='Atleta 2')

# Definimos el recorrido de nuestras funciones entre 0 y 200.
# Se deduce del problema que las distancias deben ser positivas
# y los atletas recorrerán una distancia de hasta 200 m
plt.ylim(0, 200)

# Definimos el dominio de nuestras funciones entre 0 y 20.
# Se deduce del problema que los tiempos son positivos y se
# analizará el trayecto durante los primeros 20 segundos
plt.xlim(0, 20)

# Agregamos un título al gráfico
plt.title('Comparación de las distancias recorridas de dos
atletas')

# Agregamos título eje X
plt.xlabel('Tiempo(segundos)')

# Agregamos título eje Y
plt.ylabel('Distancia Recorrida (metros)')

# Agregamos una grilla
plt.grid(True)

# Agregamos las etiquetas mencionadas anteriormente en
# la leyenda del gráfico
plt.legend()
```

```
# A través de esta instrucción mostramos el gráfico generado.
plt.show()
```

La consola mostrará el siguiente gráfico:



Y desde aquí podemos responder las siguientes interrogantes:

1. *¿Cuál de los dos atletas siempre mantuvo una velocidad constante?*
   Esto lo podemos observar desde el mismo gráfico. Por los conocimientos adquiridos en el capítulo anterior, ya podemos observar que una de las funciones representadas es lineal, y la característica principal de ella, es que crece (o decrece) de forma constante. Por lo que ya tendríamos la respuesta a esta pregunta: El Atleta 2, mantuvo una velocidad constante. Esto lo podemos verificar a través de las siguientes tablas de valores:

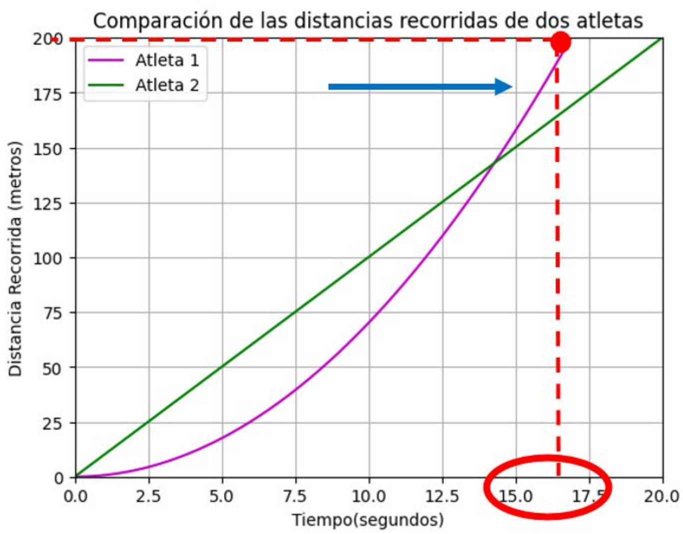
Tiempo (segundos)	**Distancia recorrida por Atleta 1 (metros)**	
1	$f(1) = 0{,}7 \cdot 1^2 = 0{,}7$	
2	$f(2) = 0{,}7 \cdot 2^2 = 2{,}8$	Aumentó 2,1 m
3	$f(3) = 0{,}7 \cdot 3^2 = 6{,}3$	Aumentó 3,5 m
4	$f(4) = 0{,}7 \cdot 4^2 = 11{,}2$	Aumentó 4,9 m

De lo anterior, el Atleta 1 fue aumentando la distancia recorrida por segundo, pero no de forma constante.

Tiempo (segundos)	Distancia recorrida por Atleta 2 (metros)	
1	$g(1) = 10 \cdot 1 = 10$	
2	$g(2) = 10 \cdot 2 = 20$	Aumentó 10 m
3	$g(3) = 10 \cdot 3 = 30$	Aumentó 10 m
4	$g(4) = 10 \cdot 4 = 40$	Aumentó 10 m

De lo anterior, el Atleta 2 fue aumentando la distancia recorrida por segundo de forma constante.

2. *Si la meta es recorrer* 200 m *desde el punto de partida, ¿qué atleta llegó primero y en cuántos segundos lo hizo?*
Esto también lo podemos observar y estimar a partir del gráfico. Si hacemos la comparación, la función que se presenta más a la izquierda del valor $y = 200$ nos indicaría el atleta que menos demoró. Por lo tanto el Atleta 1 lo hizo primero (ver flecha azul). ¿En qué momento? Esto se podría estimar a partir de la gráfica:



El óvalo de color rojo indicaría una aproximación de dicho momento. Puede ser entre 16 y 17 segundos. Para saberlo con exactitud, tendríamos que utilizar `fsolve` para resolverlo, ya que se trata de encontrar una **preimagen**:

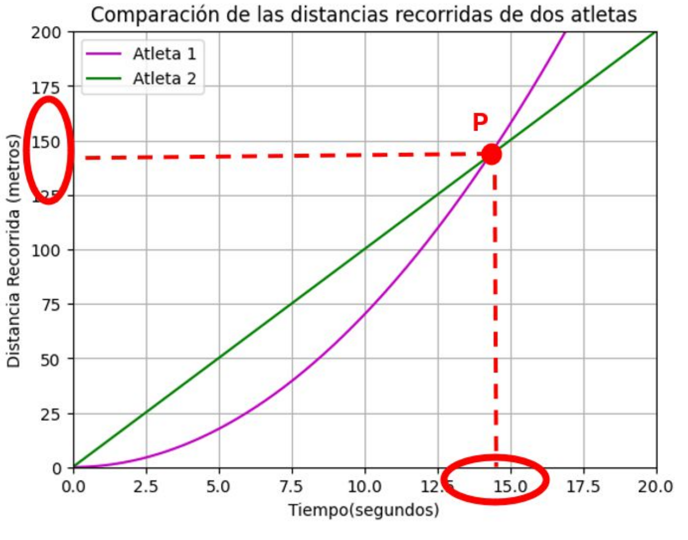
Ejemplo de código: determinar una preimagen

```
# Se llama a la biblioteca numpy, para trabajar con
# arreglos de datos
import numpy as np

# Módulo de la biblioteca scipy que nos permitirá poder
# resolver ecuaciones a través de la función "fsolve"
```

```
from scipy.optimize import fsolve

# Se define la función f(x) y se retorna la expresión
# resultante del igualar a cero
def pre(x):
    return 0.7*x**2-200
    # Lo que retorna proviene del siguiente despeje:
    # 0,7x^2 = 200 --> 0,7x^2 - 200 = 0

# Arreglo o vector que contiene solo el elemento 0
t = np.linspace(0, 10000, 1)

# np.around() permite redondear un valor. En este caso,
# los valores obtenidos de "fsolve" se redondean a
# 1 cifra decimal
sol = np.round(fsolve(pre, t),1)

# En pantalla mostrará el resultado obtenido del despeje
# de la ecuación
print(sol[0])
```

Por lo tanto, a los 16,9 segundos, el Atleta 1 llegó primero a los 200 m.

3. *¿En qué momento los atletas se encuentran?*
   También los podemos estimar desde el gráfico. Observemos que ambas funciones se "encuentran" en un punto P (señalado de color rojo). A dicho punto se le conoce como **punto de intersección** o **punto de equilibrio**. En él ocurre que para un valor de x sucede que $f(x) = g(x)$, es decir $f(x) - g(x) = 0$ o $g(x) - f(x) = 0$.



Por lo tanto, adecuándonos al contexto del problema, en un "determinado tiempo", llevarán las "mismas distancias recorridas". ¿Cómo encontrar dicho tiempo? Podemos estimar observando el gráfico que, acercándonos a 15 segundos ambos atletas llevan recorriendo una distancia que se aproxima a 150 m. Pero ¿cómo lo verificamos? Podemos utilizar el siguiente código que resuelve esta inquietud:

Ejemplo de código: Punto de intersección

```
import numpy as np
from scipy.optimize import fsolve

# Definiendo la función igualada a cero
def inter(x):
    return f(x)-g(x)

# Se asigna a un arreglo x, 15 elementos en total con
# valores desde 0 hasta 15 distribuidos uniformemente
x = np.linspace(0, 15, 15)

solucion = np.around(fsolve(inter, x),1)

# np.unique() permite eliminar las soluciones repetidas
interseccion = np.unique(solucion)

# En pantalla mostrará la(s) intersección(es) de las
# funciones f(x) y g(x)
print(f'El(los) punto(s) de intersección de las funciones
está(n) en x = {interseccion}')
```

En la consola aparecerá un arreglo que contiene dos valores: 0 y 14,3. Por lo tanto, hay dos momentos donde la distancia recorrida por los atletas será la misma: a los 0 segundos, instante en el cual ambos atletas comenzaron su trayecto; y también a los 14,3 segundos. Este último instante tiene relevancia, puesto que los atletas ya llevaban una distancia recorrida. ¿Cuál es dicha distancia? Bastará con utilizar las funciones ya definidas en `def`, con $x = 14{,}3$ para calcularlo. Por lo que podemos agregar al código anterior, las siguientes instrucciones:

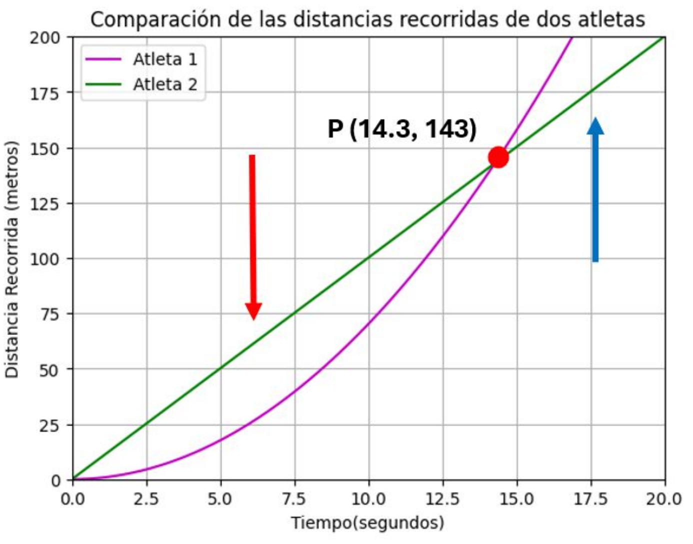
Continuación y cierre

```
a=f(14.3)
b=g(14.3)

# En pantalla mostrará el resultado obtenido de f(14.3)
print(f'La distancia recorrida por el Atleta 1 a los
14,3 segundos es {round(a,0)}')
```

```
# En pantalla mostrará el resultado obtenido de g(14.3)
print(f'La distancia recorrida por el Atleta 2 a los
14,3 segundos es {round(b,0)}')
```

Por lo tanto, la distancia que recorren ambos atletas a los 14,3 segundos es la misma, la cual corresponde a 143 m aprox. Esto se traduce a que el **punto de intersección** P señalado en la gráfica anteriormente, tiene coordenadas $P(14{,}3;143)$.

4. *¿En qué periodo el Atleta 1 es más rápido que el Atleta 2?*
   Ya conocido los puntos de intersección de las funciones, podemos dar una respuesta rápida a esta interrogante. Sucede que antes de los 14,3 segundos, la función de color verde está por sobre la función de color magenta (ver flecha roja). Esto quiere decir que el Atleta 2 era más rápido que el Atleta 1 en los primeros 14,3 segundos. Posterior a este tiempo, el Atleta 2 fue más lento que el Atleta 1, hasta terminar la carrera porque la función de color verde está por debajo de la función de color magenta (ver flecha azul).



De aquí, la importancia de obtener los puntos de intersección entre las funciones. Podemos analizar los cambios que ocurren en ellas a partir de sus intersecciones, lo que nos permitirá concluir implicaciones significativas en una variedad de campos y situaciones.

Guía Laboratorio 3 (Descargar)

P1. Sean las funciones:

$$r(x) = -1{,}5x^2 + 11{,}5x - 15$$
$$g(x) = 1{,}58x^4 - 19{,}17x^3 + 80{,}92x^2 - 139{,}33x + 85\,.$$

Considerando que $0 \leq x \leq 6$, $-10 \leq y \leq 10$, realice lo siguiente:

a) Grafique ambas funciones considerando el dominio indicado. Sugerencia: utilice `plt.xlim()` y `plt.ylim()` para definir los límites de los ejes en el gráfico.

b) ¿Cuáles son los puntos de intersección entre las funciones? Utilice `fsolve` para encontrar las soluciones.

P2. Sean las funciones:

$$h(x) = 2(x-2)^2$$
$$i(x) = x + 1\,.$$

a) Grafique ambas funciones en un mismo gráfico utilizando `matplotlib`.

b) ¿En qué punto(s) intersecta la función $h(x)$ al eje X? ¿Y la función $i(x)$?

c) ¿Las gráficas de las funciones se intersectan en algún punto?

d) ¿Para qué valores de x ocurre que $h(x) \leq i(x)$?

e) Determine el punto en que $h(x) = 50$.

P3. Sean las funciones:

$$w(x) = 0{,}6x^2 + 1{,}5$$
$$t(x) = 0{,}8x^3 - 10x + 10\,.$$

Considerando que $-3 \leq x \leq 4$, $-4 \leq y \leq 24$, realice lo siguiente:

a) Grafique ambas funciones en un mismo gráfico, indicando unidad de medida. Utilice `matplotlib`.

b) Determine el intervalo en que $w(x) \geq t(x)$.

c) Encuentre los puntos en que $t(x) = 6$.

P4. Suponga que está trabajando en un proyecto de análisis demográfico para estimar el crecimiento poblacional en diferentes países usando modelos matemáticos.
De acuerdo a los datos recopilados, las siguientes funciones modelan la población de Chile, Ecuador y Honduras (en miles de habitantes), donde x corresponde al tiempo transcurrido (en años) desde el inicio de 1960. Suponga, además, que estos modelos son válidos solo hasta el inicio del año 2023.

Chile:

$$C(x) = 19.493e^{0{,}01x}$$

Ecuador:

$$E(x) = 17.575e^{0{,}012x}$$

Honduras:

$$H(x) = 10.117e^{0{,}015x}$$

a) ¿Para cuáles valores de x las funciones D, E y H modelan el problema?

b) Grafique las funciones en un mismo gráfico, indicando unidad de medida y título del gráfico. Utilice la biblioteca `matplotlib`.

c) Según los modelos ¿qué país tiene mayor población a inicios de 1960? Indique la población del país a inicios de 1960.

d) Utilice la función `def` de Python, para calcular la población estimada para cada país en el año 2000.

e) Calcule desde qué año se espera que la población de Ecuador supere a la de Chile.

f) Determine en qué año la población de Honduras y Chile es la misma. Analice el valor obtenido considerando el dominio contextualizado.

P5. Te contrataron como asesor en una campaña de marketing digital y necesitas equilibrar el ingreso por ventas con los costos de inversión.
Las funciones de ingresos por ventas $I(x)$ y costos de inversión $C(x)$ (ambas en miles de pesos) son:

$$I(x) = -20x + 1.000$$
$$C(x) = 200x + 500\,,$$

donde x corresponde al tiempo transcurrido desde que se inició la campaña (en semanas).

a) Analice el comportamiento del ingreso por ventas y del costo de inversión a medida que aumenta el tiempo desde que se inició la campaña. Considere la pendiente y el intercepto de cada función para realizar el análisis.

b) Grafique ambas funciones en un mismo gráfico, indicando nombre de los ejes. Utilice `matplotlib`.

c) Determine, utilizando Python, el **punto de equilibrio** entre ambas funciones e interprete el resultado.

d) Utilizando el gráfico y lo realizado en el punto *c)*, ¿qué puedes concluir? ¿Aconsejarías mantener la campaña transcurridas 5 semanas desde el inicio de la campaña?

P6. Eres responsable de una granja de servidores, y necesitas optimizar la energía utilizada $E(x)$ (en kWh), en función de la cantidad de servidores activos x. Luego de varias mediciones y tratamiento de datos encuentras que la función que modela la relación entre ambas variables es:

$$E(x) = 200\sqrt{x} + 500\,.$$

a) Define variable dependiente e independiente, indicando unidad de medida.

b) Grafica la función utilizando `matplotlib`.

c) Determina la energía utilizada cuando hay 25 servidores activos.

d) Encuentra el número máximo de servidores activos para que la energía no supere los 1.900 kWh. Utiliza Python para calcular.

P7. Te contrataron para realizar una optimización de una plataforma de streaming. Debes determinar donde se equilibran los ingresos por suscripciones con los costos de operación.
Las funciones de ingresos por suscriptores $I(x)$ y costos de operación $C(x)$ (ambos en miles de pesos) son:

$$I(x) = 10x^2 + 50x$$
$$C(x) = 5x^2 + 80x + 100\,,$$

donde x corresponde al número de suscriptores (en miles).

a) Debes determinar dónde se equilibran los ingresos por suscripciones con los costos de operación.

b) Analice en qué tramo los costos de operación son mayores que los ingresos por suscriptores.

P8. Constanza es agente inmobiliario, el sueldo en su actual trabajo depende de la cantidad de casas vendidas, le pagan \$600.000 de sueldo base, más una comisión del 5 % por cada casa vendida. Lo anterior puede modelarse mediante la función $S_{\text{actual}}(x)$ (en miles de pesos), definida como:

$$S_{\text{actual}} = 600 \cdot 1{,}05^x\,,$$

donde x corresponde a la cantidad de casas vendidas durante el mes. Debido al aumento en el costo de la vida, necesita aumentar sus ingresos. Luego de postular a varios trabajos, recibió una oferta laboral donde le ofrecen un sueldo base de \$500.000 más una comisión de venta del 7 % por cada casa vendida.
Considerando el contexto anterior encuentre:

a) La forma algebraica que modela el sueldo mensual de la oferta recibida.

b) Grafique ambas funciones usando `matplotlib`. Considera que vende un máximo de 30 casas mensuales.

c) Si tuvieras que aconsejar a Constanza, ¿le recomendarías que tome la oferta o que se mantenga en su actual trabajo? Justifica matemáticamente.

P9. En un laboratorio de biología marina, los científicos están estudiando el crecimiento de dos especies de algas en función de la luz solar recibida. Las funciones $f(x)$ y $g(x)$, que describen la tasa de crecimiento de las algas en milímetros por día (mm/día) son:

$$f(x) = \sqrt{500x + 2.000}$$
$$g(x) = \sqrt{80x + 1.000},$$

donde x corresponde a la intensidad de la luz (en lux).

a) Determina el punto en el que ambas especies de algas tienen la misma tasa de crecimiento. Además, calcula la tasa de crecimiento en ese punto. Visualiza apropiadamente.

b) Considerando lo obtenido en el ítem anterior, analice y compare el crecimiento de las dos especies en función de la intensidad de la luz.

P10. En una planta de tratamiento de aguas residuales, los ingenieros están estudiando la eficiencia, medida en porcentaje, de dos diferentes procesos de filtración para eliminar contaminantes. La eficiencia de cada proceso varía en función del tiempo de tratamiento t, medido en horas.
Las funciones que describen la eficiencia de los procesos son las siguientes:

Proceso A:

$$A(t) = 1{,}4t^4 - 2{,}55t^3 - 3{,}37t^2 + 2{,}75t + 10$$

Proceso B:

$$B(t) = t^4 - 2{,}67t^3 - t^2 + 2t + 20\,.$$

a) Grafique ambas funciones indicando el nombre de cada eje coordenado, junto con su unidad de medida. Utilice `matplotlib`.

b) Transcurridas 3 horas y media, ¿qué porcentaje de eficiencia tiene el proceso A? ¿Y el B?

c) ¿Para cuántas horas transcurridas el proceso A tiene la misma eficiencia que el proceso B? Indique la eficiencia en este punto.

d) Si sabe que los procesos demoran como máximo 5 horas, analice cuándo es conveniente aplicar el proceso A.

P11. Sea la función f, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1, \\ 3 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

a) Describa el comportamiento del gráfico de la función.

b) ¿Cuál es el valor de $f(x)$ si $x = -5$? ¿Y si $x = 5$?

P12. Un hotel del sur de Chile cobra \$70.000 por noche para las tres primeras noches, y \$54.000 por cada noche adicional. El costo total de alojamiento T es una función que depende del número de noches x que permanece un huésped.

a) Complete la siguiente tabla, indicando los valores de $T(x)$ para la cantidad de noches indicada.

x	$T(x)$
0	\$0
1	\$70.000
2	\$140.000
3	$\cdots$
4	$\cdots$
5	$\cdots$
6	$\cdots$
7	$\cdots$

b) Complete la forma algebraica de la función $T(x)$, definida por partes:

$$T(x) = \begin{cases} \cdots & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ \cdots & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

c) ¿En qué tramo aumenta con mayor rapidez? Justifique gráficamente.

Problemas de sección 3

P1. En un laboratorio están experimentando paralelamente con 2 sustancias químicas. Al cabo de x minutos las temperaturas de las sustancias A y B en grados celsius están dadas respectivamente por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Temperatura sustancia A $f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{71}{3}x$

Temperatura sustancia B $g(x) = 2x^2 - 23x + 80$

a) Grafique ambas funciones en un mismo diagrama. Para ello considere etiquetar a ambos ejes con las magnitudes representadas y a cada curva con la función correspondiente.

b) A partir de las funciones graficadas en *a)*, estime en qué instantes las temperaturas de ambos líquidos se igualan.

c) Indique en qué rango de tiempo, la temperatura de la sustancia B es menor a la temperatura de la sustancia A.

P2. Para determinar la cantidad de productos que fabrican dos grupos de trabajadores de una misma empresa, al cabo de t días de trabajo, se utilizan las siguientes funciones

Grupo 1 $A(t) = 0{,}36t^2$

Grupo 2 $B(t) = 0{,}16t^2 + t + 10$

a) Determine la cantidad de días de trabajo para que la producción en cada grupo sea la misma.

b) Grafique ambas funciones para confirmar los resultados obtenidos en la parte *a)*.

c) Indique en qué rango de tiempo la producción del segundo grupo supera a la del primero.

P3. Una fábrica de neumáticos dispone de dos precios de venta para sus neumáticos del tipo 185/65 R15 T88 para un Peugeot 207. El precio de cada neumático al detalle es de 40 mil pesos, mientras que el precio unitario del mismo neumático al por mayor es de 30 mil pesos, considerando en este último caso un costo fijo adicional de 40 mil pesos por el total de la compra.

a) Define las funciones que modelan los distintos precios.

b) ¿Cuántos neumáticos se debe comprar para que el precio al por mayor sea más conveniente? Compara de forma gráfica.