2. Función lineal

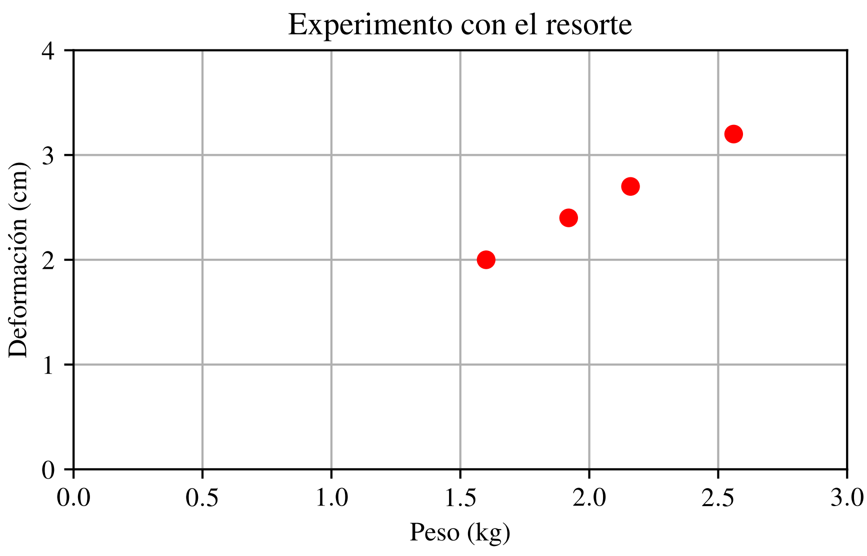
2.1 Función lineal

¿Has colgado un peso de un resorte? O, por ejemplo, ¿has visto esas balanzas en la feria que cuelgan de arriba y en la que pones la compra también colgando? Los resortes siguen una regla bien especial, conocida como ley de Hooke, que podemos redescubrir experimentalmente.

Esto fue lo que hizo un grupo de alumnos, precisamente: colgaron varios objetos de distinto peso y midieron cuánto se extendía un resorte a partir de su largo natural, lo que podríamos llamar la deformación del resorte. Algunos de sus resultados están en la siguiente tabla

Peso (kg)	1,6	1,92	2,16	2,56
Deformación (cm)	2	2,4	2,7	3,2

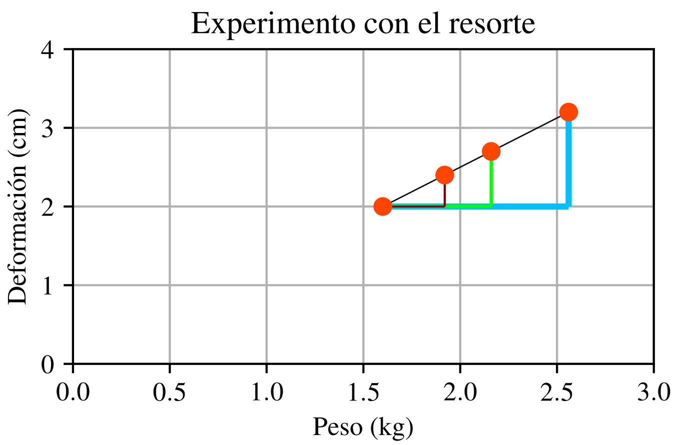
que podemos además graficar. De hecho, al hacerlo aparece una cierta regularidad.



Podemos notar algo desde el gráfico: los puntos parecen seguir una línea recta. En efecto, podemos trazar una línea uniendo los puntos.

¿Pero qué significa decir que los puntos están en línea recta? O dicho de otra forma, ¿qué hace que una línea recta sea, precisamente, recta? Una respuesta podría ser "es que va derechita" y probablemente ahí esté el fondo del asunto. Si lo pensamos bien, decir que la línea "va derechita" significa decir que no se desvía, es decir, que hay algo constante: la manera en que cambia.

Podemos precisar un poco esa idea intuitiva si nos damos cuenta de un fenómeno

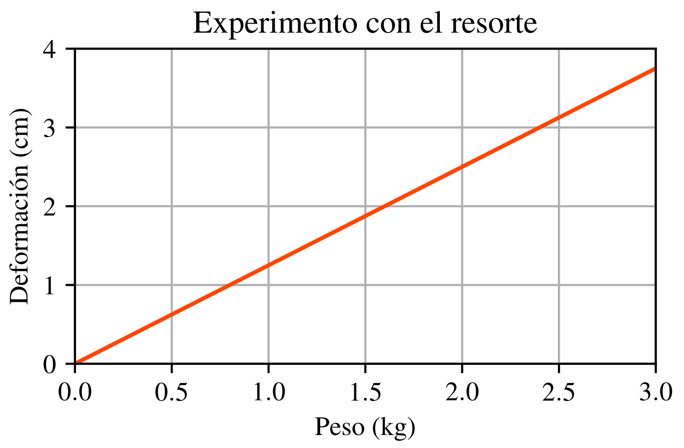


¡Lo que se mantiene constante es la diferencia en altura según avanzamos! De hecho podemos tabular las diferencias con el primer punto

Diferencia vertical (cm)	0,4	0,7	1,2
Diferencia horizontal (kg)	0,32	0,56	0,96
Cociente (cm/kg)	1,25	1,25	1,25

Para comparar, dado que tenemos distintos tipos de unidades, necesitamos hacer una razón, es decir necesitamos dividir y al hacerlo obtenemos una constante. Esta constante al dividir las diferencias con un punto de referencia es una manera de representar la manera en que cambia la función y la llamaremos la *pendiente* de la recta.

Podemos ahora dibujar la recta "completa". Si lo hacemos, obtenemos el gráfico siguiente

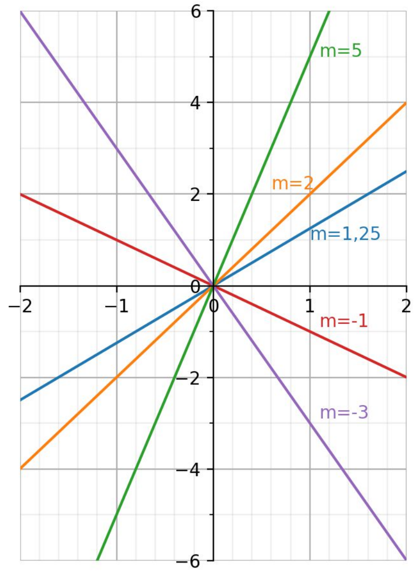


Una **recta** es, entonces, la representación gráfica de una **función lineal**. Descubrimos que la recta mantiene una constante, que es la manera en que cambia. Podemos llevar a números esa idea dividiendo el cambio vertical por el cambio horizontal: en una recta, eso siempre será un número constante, llamado *pendiente*.

Podemos graficar distintas rectas para ver qué ocurre al variar la pendiente

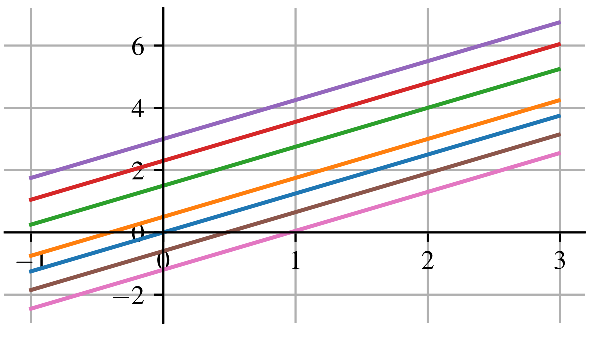
Relación gráfica y algebraica de la pendiente de la función lineal

Si la pendiente es **positiva**, la recta de la función lineal es *creciente*. Si la pendiente es **negativa**, la recta de la función lineal es *decreciente*.



Como vemos, mientras más "empinada" la recta, mayor es la pendiente. Si la gráfica de la función es decreciente, la pendiente es negativa.

Pero ocurre algo más. Mira el siguiente gráfico



Todas las rectas tienen la misma pendiente, pero todas ocupan una posición distinta.

Necesitamos una manera de identificar esa posición. Por motivos que veremos más adelante, una buena manera es identificar la altura a la que la función cruza (en palabras elegantes, intercepta) el eje Y. Llamaremos a ese valor el *coeficiente de posición.*

Relación gráfica y algebraica del coeficiente de posición de la función lineal

El coeficiente de posición representa el valor donde la recta de la función lineal intercepta en el eje Y del plano cartesiano.

El álgebra de la función lineal

¿Cómo unimos la geometría anterior con el álgebra? Nuestra intención es escribir una "fórmula" o, mejor dicho, una expresión para las funciones lineales. Aquí es que descubrimos la utilidad de definir el coeficiente de posición como lo hicimos previamente.

Si llamamos a nuestra función f, entonces al definir el coeficiente de posición como la altura en donde cruza la función al eje X, no podemos si no darnos cuenta que, como número, corresponde a $f(0)$.

¿Y qué pasa con la pendiente? Recordemos que definimos a la pendiente como el cociente entre lo que cambiamos verticalmente y lo que avanzamos horizontalmente

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{avance horizontal}}.$$

Simbolicemos a la pendiente por m. Una cuenta rápida nos dice que si nos movemos x unidades desde $x = 0$, verticalmente nos habremos movido mx. Pero partimos a la altura $f(0)$, por lo tanto, al movernos x unidades desde 0, la función estará a la altura

$$f(x) = mx + f(0).$$

Resulta conveniente darle un símbolo al coeficiente de posición, y tradicionalmente lo representamos por n. Con esto, la función lineal se puede describir como

$$f(x) = mx + n,$$

con m la pendiente y n el coeficiente de posición.

2.2 Utilizando Python para obtener la forma algebraica de una función lineal

De la situación anterior, hemos visto que los datos representados en el gráfico, provienen de la siguiente tabla:

Peso (kg)	1,6	1,92	2,16	2,56
Deformación (cm)	2	2,4	2,7	3,2

De aquí, se deduce que la deformación del resorte (medido en centímetros), depende del peso del objeto (medido en kilogramos). Es decir, la *variable independiente* corresponde al peso del objeto y la *variable dependiente* a la deformación del resorte. Es necesario buscar una forma de relacionar ambas variables, a través de una *"fórmula"*. A esta fórmula en el capítulo anterior la conocimos como *forma algebraica* de la función. Ya sabemos que ambas variables se relacionan gráficamente por medio de una recta; por lo tanto, debemos buscar la forma algebraica de la función lineal asociada. Es decir, la pendiente m y el coeficiente de posición n de la función.

Para obtener la expresión algebraica que modela esta situación, podremos utilizar el siguiente código:

Ejemplo de código

```
# Llamamos a la librería numpy que nos permitirá obtener
# la expresión algebraica de la función
# lineal del problema a través de la función polyfit
import numpy as np

# En la variable "peso", declaramos un arreglo que contenga
# los valores de la variable independiente del problema
peso= np.array([1.6, 1.92, 2.16, 2.56])

# En la variable "deformacion", declaramos un arreglo
# que contenga los valores de la variable dependiente
# del problema
deformacion=np.array([2, 2.4, 2.7, 3.2])

# A través de la herramienta polyfit se busca la pendiente
# y el coeficiente de posición que se ajusta a los datos
# ingresados en los arreglos anteriores. El valor "1"
# indica que los valores se ajustan a un polinomio de grado 1,
# es decir, a una función lineal
pendiente, intercepto = np.polyfit(peso, deformacion, 1)

# En pantalla muestra el resultado de la pendiente de
# la función lineal asociada
print(f'La pendiente es {round(pendiente,2)}')

# En pantalla muestra el resultado del coeficiente de
# posición de la función lineal asociada
print(f'El coeficiente de posición es {round(intercepto,2)}')
```

Función `polyfit` de `numpy`
`polyfit` es una función de la librería `numpy` la cual toma un conjunto de puntos de datos (x,y) y encuentra el polinomio de grado n que mejor se ajusta a esos datos. Para el caso de la función lineal, este polinomio es de grado 1, donde sus coeficientes son m y n respectivamente. El resultado de `polyfit` es un arreglo que contiene los coeficientes del polinomio. En el caso de la función lineal, el arreglo devolverá en una primera posición el valor de m, y en una segunda posición el valor de n.

Función `round`
La función `round` redondea un valor numérico con n cifras decimales. Para utilizarla se debe especificar el número que se desea redondear a y la cantidad n de cifras decimales a utilizar:
`round(a,n)`

Con esto, podemos comprobar que la pendiente encontrada a través del análisis gráfico anterior es $m = 1,25$ y el coeficiente de posición es $n = 0$.

Por lo tanto, la forma algebraica de la función lineal que relaciona a las variables peso y deformación es $f(x) = 1,25x$. Con esta función ya podemos hallar la deformación de cualquier objeto en función de su peso x.

Guía Laboratorio 2 (Descargar)

P1. Un equipo de desarrollo está evaluando la eficiencia de un nuevo algoritmo implementado en Python. Han medido el tiempo de ejecución del algoritmo en función de la cantidad de elementos de entrada, obteniendo los resultados que se muestran en la siguiente tabla:

Cantidad de elementos (unidades)	Tiempo de ejecución (ms)
100	2
200	4
500	10
1.000	20
2.000	40

a) Defina variable dependiente e independiente, indicando unidad de medida.

b) Encuentra la función que relaciona el tamaño de la entrada con el tiempo de ejecución del algoritmo. Para esto, utiliza la función `polyfit` de `numpy`.

c) Calcula el tiempo de ejecución para una entrada de 1.500 elementos.

d) Utiliza la función `fsolve` de `scipy` para determinar el tamaño de entrada que haría que el tiempo de ejecución sea de 50 milisegundos.

P2. Un equipo de TI está monitoreando el tráfico de datos en la red de la empresa. Han registrado el volumen de los datos transferidos y el tiempo que tomó cada transferencia en la siguiente tabla de datos:

Datos transferidos (GB)	Tiempo de transferencia (min)
5	10
10	20
25	50
50	100
100	200

a) Defina variable dependiente e independiente, indicando unidad de medida.

b) Utilizando la función `polyfit` de `numpy`, encuentra la función que modela el tiempo de transferencia $T(x)$ en función del volumen de los datos transferidos.

c) Interprete la pendiente en el contexto del problema.

d) ¿Cuánto tiempo toma una transferencia de 73,2 GB?

e) Utiliza la función `fsolve` de `scipy` para determinar la cantidad de datos que se puedan transferir en 123,5 minutos.

f) Grafica la función $T(x)$ indicando el nombre de los ejes y su unidad de medida. Interpreta lo observado. *Para graficar utiliza la biblioteca* `matplotlib`.

P3. Una empresa de tecnología quiere optimizar el tiempo de carga y descarga de archivos en su servicio de almacenamiento en la nube. Los tiempos medios para diferentes tamaños de archivos son los siguientes:

Tamaño del archivo (MB)	Tiempo de carga (s)	Tiempo de descarga (s)
50	10	8
100	20	16
250	50	40
500	100	80
1.000	200	160

a) Encuentra las funciones que modelan el tiempo de carga $f(x)$ y el tiempo de descarga $g(x)$ en función del tamaño del archivo x. Utiliza la función `polyfit` de `numpy` (debes encontrar dos funciones).

b) Define variable dependiente e independiente, para ambas funciones, indicando su unidad de medida.

c) Calcula el tiempo de carga y descarga para un archivo de 750 MB.

d) Utiliza la función `fsolve` de `scipy` para determinar el tamaño del archivo si el tiempo de carga es de 163 segundos.

e) Un trabajador insiste en que si el tiempo de descarga es de 195 segundos, el tamaño del archivo es 1.200 MB. ¿Tiene razón? Utiliza Python para determinar.

f) Grafica ambas funciones en el mismo gráfico, indicando nombre de los ejes y unidades de medida. Utiliza la librería `matplotlib` para graficar.

P4. El uso de memoria $M(x)$ (en GB) de un servidor en función del número de usuarios activos x está dado por la función lineal:

$$M(x) = 0{,}5x + 2\,.$$

a) Determina la variable dependiente e independiente, indicando unidad de medida.

b) Identifica e interpreta la pendiente de la función.

c) ¿Cuánta memoria del servidor está en uso cuando no hay usuarios activos?

d) ¿Cuánta memoria del servidor está en uso cuando hay 637 usuarios activos?

e) Utiliza Python para determinar cuántos usuarios activos provocan un uso de memoria de 32 GB.

f) ¿Es posible un uso de memoria de 59,8 GB?

P5. El costo de operación mensual $C(x)$ (en miles de dólares) de un data center en función del número de servidores x está dado por la función lineal:

$$C(x) = 1,5x + 10\,.$$

a) Determine la variable dependiente e independiente, indicando unidad de medida.

b) ¿Qué representa la pendiente en el contexto del problema?

c) ¿Qué representa el intercepto en el contexto del problema?

d) Calcula el costo de operación cuando hay 47 servidores.

e) Determina cuántos servidores hay cuando el costo de operación es de 92.500 dólares. Utiliza Python para resolver.

P6. El número de visitas diarias $V(x)$ en un sitio web, en función del número de campañas publicitarias x, está modelado por la función:

$$V(x) = 300x + 500\,.$$

Los administradores del sitio consideran contratar 20 campañas publicitarias como máximo.

a) Defina variable dependiente e independiente del problema, indicando unidad de medida.

b) Determine el dominio contextualizado de la función.

c) Interprete la pendiente de la función en el contexto del problema.

d) Determine la cantidad de visitas diarias cuando se ejecutan 5 campañas publicitarias.

e) Utilizando la función `fsolve` de `scipy` responde: ¿cuántas campañas publicitarias se deben ejecutar para alcanzar 4.700 visitas diarias?

P7. La depreciación es el proceso en que los activos físicos, como la maquinaria, vehículos, equipos, etc., pierden valor con el tiempo debido a factores como el desgaste, el uso y la obsolescencia. El valor estimado que tendrá el activo al final de su vida útil se conoce como *valor residual*.

En este contexto, sabemos que el valor residual $R(t)$ (en miles de dólares) de un equipo tecnológico está modelado por la función lineal:

$$R(t) = -1{,}2t + 10\,,$$

donde t corresponde a la antigüedad del equipo (en años).

a) Defina variable dependiente e independiente, indicando unidad de medida.

b) ¿Qué representa la pendiente de la función en el contexto del problema?

c) ¿Cuál es el valor residual inicial del equipo?

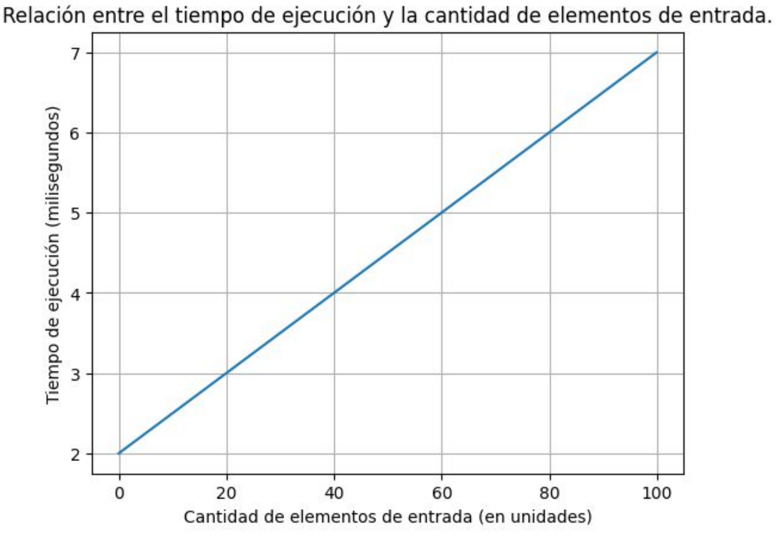
d) Determina el dominio contextualizado de la función, si sabe que el valor del equipo al final de su vida útil es de 400 dólares.

e) Determina, utilizando la función `def` de Python, el valor residual del equipo con 3 años y seis meses de antigüedad.

f) Determina, utilizando la función `fsolve` de `scipy`, la antigüedad del equipo cuando su valor residual es de 4.000 dólares.

g) Grafica la función utilizando la biblioteca `matplotlib`. Interpreta lo observado.

P8. El tiempo de ejecución $T(x)$ (en milisegundos) de un algoritmo depende de la cantidad de elementos de entrada (en unidades) mediante una función lineal cuya gráfica se muestra en la siguiente imagen:

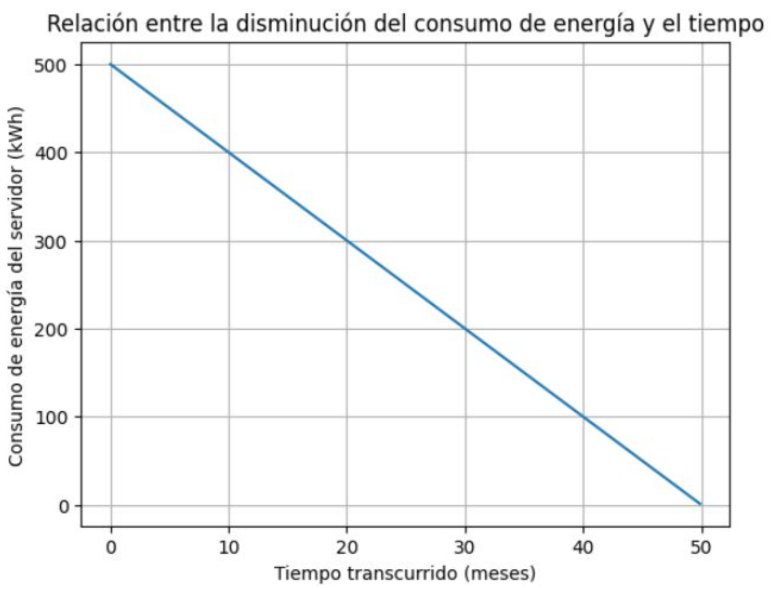


a) Determina la forma algebraica de la función que mejor se ajusta al gráfico. Utiliza la función `polyfit` de `scipy` para calcular.

b) Determina el tiempo de ejecución del algoritmo para 67 elementos de entrada.

c) ¿Cuántos elementos de entrada se utilizaron si el tiempo de ejecución fue de $6,4$ milisegundos?

P9. El consumo de energía de un servidor $E(t)$ en función del tiempo t después de implementar una optimización, está modelado por la función lineal que se observa en el siguiente gráfico:



a) Utiliza la función `polyfit` de `numpy` para determinar la forma algebraica que mejor se ajusta al gráfico.

b) Interprete la pendiente en el contexto del problema.
c) Determine el consumo de energía luego de un año desde que se implementó la optimización.
d) Encuentre el tiempo transcurrido desde la implementación de la optimización para que la energía consumida sea de 200 kWh.

P10. Dos atletas profesionales corren por un camino recto. Durante los primeros 10 segundos del trayecto, la distancia recorrida (en metros) por el atleta 1 está dada por la función:

$$g(t) = 0{,}7t^2\,,$$

mientras que la distancia recorrida por el atleta 2 está dada por la función:

$$f(t) = 10t\,,$$

donde t corresponde al tiempo transcurrido (en segundos) desde el inicio del trayecto.

a) ¿Cuál de los dos atletas siempre mantuvo una velocidad constante? Justifique. *Recomendación: grafica las funciones utilizando* `matplotlib`.
b) Si la meta se encontraba a 100 metros de la partida ¿cuál atleta llega primero?
c) ¿A qué distancia se encontraban uno del otro cuando transcurren 8 segundos? ¿Y cuando transcurren 10 segundos?
d) Entre el segundo 8 y el 10, ¿cuál atleta iba más rápido? Justifique apropiadamente.

P11. Un *Data Center* ha cotizado el costo de desarrollar un proyecto con dos empresas. El costo (en millones de pesos) entregado por la empresa 1 está modelado por la función:

$$C_1(t) = 12t + 50\,,$$

y el costo (en millones de pesos) entregado por la empresa 2 está modelado por la función:

$$C_2(t) = 8t + 100\,,$$

donde t corresponde al tiempo que demoren en realizar el proyecto (en semanas).

a) Utilizando la biblioteca `matplotlib` grafique ambas funciones, indicando el nombre de los ejes coordenados junto con su unidad de medida.
b) Si con la empresa 1 pagaron 155 millones de pesos ¿cuántas semanas duró el trabajo?
c) Analizando el gráfico de la parte *a)*, ¿cuándo conviene desarrollar el proyecto con la empresa 1? ¿Y la empresa 2?

Problemas de sección 2

P1. Los alumnos de recursos naturales modelaron la población de abejas en la ciudad de Santiago con la función lineal $A(t) = -9.780t + 997.560$, donde t es el tiempo transcurrido en meses iniciada la investigación.

a) Defina las variables dependiente e independiente, indicando unidad de medida.

b) ¿Cuántas abejas había al inicio del estudio?

c) ¿En cuánto disminuye la cantidad de abejas mensualmente?

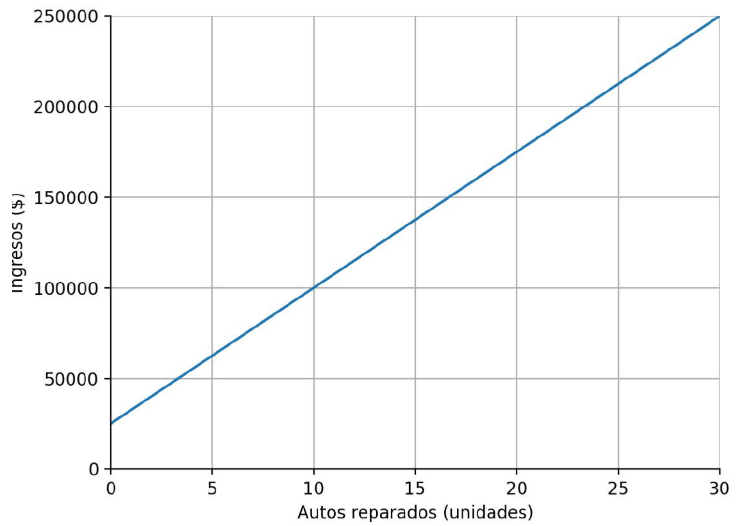
d) Los alumnos concluyen que las abejas desaparecerán al transcurrir 100 meses. ¿Qué opinas de esa conclusión? Argumenta matemáticamente.

e) Al momento de terminar el estudio había 381.420 abejas. ¿Cuánto duró la investigación?

f) Determine el dominio contextualizado de la función.

g) Grafique la función utilizando la biblioteca `matplotlib`.

P2. En un taller mecánico se analizan los ingresos en pesos obtenidos por la reparación de bujías en autos. Estos ingresos están modelados por una función lineal $f(x)$, donde la variable x representa la cantidad de autos reparados.



a) Determine la forma algebraica que mejor se ajusta al gráfico.

b) Interprete la pendiente en el contexto del problema.

c) Determine los ingresos obtenidos en el taller, si se reparan 20 autos.

d) Determine la cantidad de autos reparados si el ingreso obtenido por le taller mecánico fue de \$422.500

P3. Una empresa de limpieza de automóviles ofrece una tarifa especial a los clientes frecuentes que laven su vehículo como mínimo 8 veces en el mes y como máximo 15 veces. La tarifa "Cliente Frecuente" es de \$2.000 por cada lavado, considerando un costo fijo mensual de \$4.000.

a) Determina la forma algebraica de la función que describe al problema.

b) Determina el dominio contextualizado de la función.

c) ¿Cuál es la tarifa a cancelar si se lava el vehículo 10 veces al mes?

d) ¿Cuántos veces en el mes lavaron el vehículo de un cliente, si éste canceló $34.000?

P4. Dos amigas emprendedoras quieren sacar una agenda al mercado, por lo que luego de diseñarlas necesitan mandarlas a imprimir. La imprenta Gute cobra $3.800 por agenda más $24.000 por costos de despacho. La imprenta Aldus cobra $4.000 por agenda más $18.000 por costos de despacho.

a) Escribe la función costo para cada empresa de forma algebraica.

b) Grafique las funciones obtenidas en *a)*, utilizando la biblioteca `matplotlib`.

c) Si las amigas pagaron $430.000 en la imprenta Aldus, ¿cuántas agendas mandaron a imprimir?

d) ¿Cuándo conviene la imprenta Gute?

P5. Una empresa importadora de autos modela sus utilidades mediante una función lineal. La utilidad por importar vehículos de marca CAR modelo exa está dada por la siguiente tabla:

Cantidad de vehículos	5	7	8	10
Utilidad ($)	3.000.000	4.000.000	4.500.000	5.500.000

a) Escribe algebraicamente la función que describe el problema.

b) Define las variables independiente y dependiente, con su unidad de medida.

c) ¿Cuántos autos debe vender la empresa para obtener una utilidad de $7.500.000?

d) ¿Es posible obtener una utilidad de $5.750.000?

e) ¿Qué significa la pendiente de la función?