Zadania dodatkowe

Termin: wrzesień

Zadanie 1. Podać przykład figury (wystarczy rysunek), która składa się z dwóch prostokątów (ale nie jest kwadratem), ma środek symetrii oraz 4 osie symetrii.

Zadanie 2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, takie że liczba $7p^2+8$ jest pierwsza.

Zadanie 3. Rozważmy liczbę $1000(5\sqrt{2}-7)^2$. Ile wynosi jej przybliżenie, gdy użyjemy standardowego przybliżenia $\sqrt{2}\approx 1,41$ wstawiając je bezpośrednio do powyższej postaci? A ile będzie wynosić to przybliżenie, gdy użyjemy kalkulatora naukowego (czyli znacznie dokładniejszego przybliżenia)? Ile będzie wynosić przybliżenie, gdy najpierw podniesiemy nawias do kwadratu ze wzoru skróconego mnożenia i wtedy wstawimy przybliżenie $1,41$? O czym świadczą otrzymane wyniki?

Zadanie 4. Czy istnieje czworościan, którego siatka jest trójkątem prostokątnym?

Zadanie 5. Rozważmy nierówności $x^2+1 \geqslant g(x) \geqslant -x^2-1$. Podaj przykład funkcji g spełniającej powyższe nierówności dla każdego x, aby:
a) g była stała,
b) g była liniowa ale nie stała,
c) istniały x_1, x_2 realizujące równość, tzn. aby wykres g był styczny do wykresu funkcji danej wzorem $y=x^2+1$ oraz do wykresu funkcji danej wzorem $y=-x^2-1$.

Termin: październik

Zadanie 6. Wykaż, że w dowolnym trójkącie środek ciężkości, ortocentrum oraz środek okręgu opisanego leżą na jednej prostej.
Wskazówka: Umieść trójkąt w układzie współrzędnych tak, by wierzchołki były na osiach Ox i Oy.

Zadanie 7. Rozważmy następujący ciąg równości:

$$\frac{23}{24}=\frac{2323}{2424}=\frac{232323}{242424}=\dots,$$

gdzie każdy kolejny ułamek powstaje przez dopisanie do licznika liczby 23, a do mianownika liczby 24. Wykazać, że możemy dowolnie długo go przedłużać i równości nadal będą zachodzić.

Zadanie 8. Niech w, k, s oznacza kolejno liczbę wierzchołków, krawędzi, ścian w wielościanie wypukłym. Czy istnieje taki wielościan, dla którego zachodzi $w\cdot k\cdot s = 2023^{2023}$?

Zadanie 9. Czy dla dowolnego $n\in\mathbb{N}_+$ istnieje n kolejnych liczb naturalnych, z których wszystkie są złożone?

Zadanie 10. Rozwiąż równanie:

$$4^{\frac{1}{x}} = 6^{\frac{1}{x}} + 9^{\frac{1}{x}}$$

Termin: listopad

Zadanie 11. Rozwiąż równanie:

$$\varphi^{\ln x} + x^{\ln\varphi} = 3+\sqrt{5}.$$

Zadanie 12. Niech $x>0$. Oblicz $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\dots}}}}}$

Zadanie 13. Jedna z najbardziej znanych hipotez to Hipoteza Goldbacha. Mówi ona o tym, że każdą liczbę parzystą większą od 2 można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych. Wykaż, że jeśli ta hipoteza jest prawdziwa, to każdą liczbę nieparzystą większą niż 7 można przedstawić w postaci sumy trzech liczb pierwszych. Czy można uznać za prawdziwe zdanie: *„Każda liczba nieparzysta większa od 7 jest sumą trzech liczb pierwszych”?*

Zadanie 14. Czy istnieje liczba naturalna n, której iloczyn cyfr wynosi 0, a iloczyn cyfr liczby $n+1$ wynosi 1000?

Zadanie 15. Czy istnieje liczba naturalna n, której iloczyn cyfr wynosi 1000, a iloczyn cyfr liczby $n+1$ wynosi 0?

Termin: grudzień

Zadanie 16. Weźmy dowolną liczbę naturalną n i policzmy sumę kwadratów jej cyfr. Z otrzymanym wynikiem postępujemy analogicznie. Proces wykonujemy do momentu, aż otrzymamy liczbę 1. Jeśli tak się stanie, to liczbę n nazywamy liczbą wesołą. W przeciwnym wypadku nazywamy ją smutną. Określić, które liczby od 0 do 10 są wesołe, a które smutne. Jak na bycie wesołą/smutną wpływa przestawienie cyfr w liczbie, a jak dodanie dowolnej liczby zer w dowolnym miejscu?
Przykład: Niech $n = 133$. *Wtedy* $1^2 + 3^2 + 3^2 = 19$, $1^2 + 9^2 = 82$, $8^2 + 2^2 = 68$, $6^2 + 8^2 = 100$, $1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$, *a więc liczba 133 jest wesoła.*

Zadanie 17. Oprócz znanych ze szkoły średnich istnieje też średnia logarytmiczna zdefiniowana następująco:

$$S_L := L(a,b) := \frac{b-a}{\ln b - \ln a},$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a \neq b$.

a) Wykaż, że średnia logarytmiczna jest przemienna tzn. $L(a,b) = L(b,a)$
b) Oblicz średnią logarytmiczną dla liczb e i e^2; 2 i 1 oraz dnia i miesiąca swoich urodzin.
c) Średnia ta „wpasowuje się" w ciąg nierówności między średnimi: $S_K \geqslant S_A \geqslant S_G \geqslant S_H$. Na podstawie obliczonych wyżej przykładów, wywnioskuj, między którymi średnimi znajduje się średnia logarytmiczna.

Zadanie 18. Rozwiąż równanie $|x+y^2|+|x-y^2|+|y+x^2|+|y-x^2| = 2023$ w zbiorze liczb całkowitych.

Zadanie 19. Czy da się zapisać liczbę 1 jako sumę odwrotności pewnej liczby **parami różnych** liczb pierwszych, tzn. czy istnieją liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_n$, że $1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}$?

Zadanie 20. Rozwiąż równanie: $2023^{|x|} = \sin x^{2023}$.

Termin: styczeń

Zadanie 21. Wykaż, że dla $x, y, z > 0$ zachodzi nierówność:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Wskazówka: twierdzenie o odcinkach stycznych w trójkącie, gdzie odcinki styczne oznaczamy x, y, z.

Zadanie 22. Oblicz $xyzt$ jeśli $\begin{cases} 2020^x = 2021 \\ 2021^y = 2022 \\ 2022^z = 2023 \\ 2023^t = 2024 \end{cases}$.

Zadanie 23. Zachodzą następujące prawa dla kwantyfikatorów:

$$\exists x \in X : \ [\varphi(x) \vee \psi(x)] \Leftrightarrow [\exists x \in X : \ \varphi(x)] \vee [\exists x \in X : \ \psi(x)]$$
$$\exists x \in X : \ [\varphi(x) \wedge \psi(x)] \Rightarrow [\exists x \in X : \ \varphi(x)] \wedge [\exists x \in X : \ \psi(x)]$$
$$\forall x \in X : \ [\varphi(x) \wedge \psi(x)] \Leftrightarrow [\forall x \in X : \ \varphi(x)] \wedge [\forall x \in X : \ \psi(x)]$$
$$[\forall x \in X : \ \varphi(x)] \vee [\forall x \in X : \ \psi(x)] \Rightarrow \forall x \in X : \ [\varphi(x) \vee \psi(x)],$$

gdzie $\varphi(x), \psi(x)$ to dowolne formy zdaniowe.
Warto zwrócić uwagę, że w dwóch przypadkach zachodzą tylko implikacje, a nie równoważności. Proszę podać przykłady pokazujące, że nie działają implikacje w drugą stronę, tzn. prawa strona jest prawdziwa, a lewa nie.

Zadanie 24. Dany jest trójkąt o bokach długości $6, 8, 10$. Wykaż, że jeśli odległości dowolnego punktu z wnętrza trójkąta od wierzchołków są liczbami wymiernymi, to odległości tego punktu od boków trójkąta również są liczbami wymiernymi.

Zadanie 25. Odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania:

a) Czy istnieją na płaszczyźnie dwa takie zbory, że niezależnie od ich położenia na tejże płaszczyźnie ich część wspólna będzie zawsze jednoelementowa?

b) Czy istnieją na płaszczyźnie dwa takie zbory, że niezależnie od ich położenia na tejże płaszczyźnie ich część wspólna będzie zawsze dwuelementowa?

c) Czy istnieją na płaszczyźnie dwa takie zbory, że niezależnie od ich położenia na tejże płaszczyźnie ich część wspólna będzie zawsze 2024-elementowa?

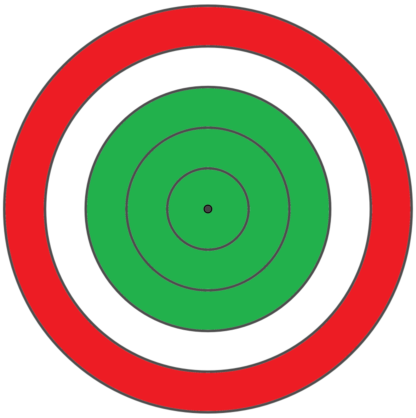
Termin: luty

Zadanie 26. Rozwiąż równanie:

$$\frac{[x]}{x} + \frac{x}{[x]} = 2 + \frac{1}{x},$$

gdzie $[x]$ oznacza cechę z x, czyli największą liczbę całkowitą mniejszą bądź równą x.

Zadanie 27. Rozważmy 5 współśrodkowych okręgów o promieniach odpowiednio: $r, 2r, 3r, 4r, 5r$ oraz zacieniowane przez nie obszary: zielony i czerwony. Które z pól jest większe: czerwone, czy zielone?



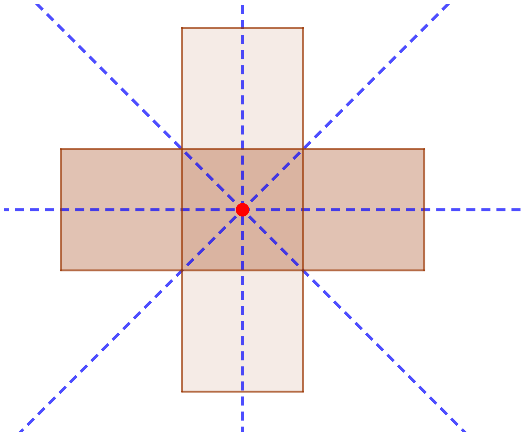
Zadanie 28. a) Rozwiąż w liczbach **naturalnych** równanie: $n + n + n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$.

b) Rozwiąż w liczbach **naturalnych dodatnich** równanie $\underbrace{n + n + \ldots + n}_{n} = \underbrace{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}_{n}$

Zadanie 29. Rozważmy trójkąt prostokątny o bokach długości 6,8,10. Wykaż, że jeśli odległości punktu M – należącego do wnętrza trójkąta, od wszystkich wierzchołków trójkąta są liczbami wymiernymi, to również odległości tego punktu od boków trójkąta są liczbami wymiernymi.

Zadanie 30. Wyznacz wszystkie wielomiany $W(x)$ spełniające warunek $W\left(W(x)\right) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie 1.



Rozwiązanie 2.

- Jeśli $p = 3$, to $7p^2 + 8 = 7 \cdot 9 + 8 = 71 \in \mathbb{P}$.
- Jeśli $p = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, to $7p^2 + 8 = 7(3k + 1)^2 + 8 = 7(9k^2 + 6k + 1) + 8 = 63k^2 + 42k + 15 = 3(21k^2 + 14k + 5) = 3q$ oraz $q \in \mathbb{N} \wedge n > 1$, a więc liczba ta dzieli się przez 3, więc nie jest pierwsza.
- Jeśli $p = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, to $7p^2 + 8 = 7(3k + 2)^2 + 8 = 7(9k^2 + 12k + 4) + 8 = 63k^2 + 84k + 36 = 3(21k^2 + 28k + 12) = 3q$ oraz $q \in \mathbb{N} \wedge q > 1$, a więc liczba ta dzieli się przez 3, więc nie jest pierwsza.

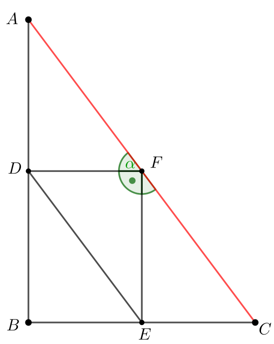
Zatem $p = 3$.

Rozwiązanie 3.

- $1000(5\sqrt{2} - 7)^2 \approx 1000(5 \cdot 1,41 - 7)^2 = 1000(7,05 - 7)^2 = 1000 \cdot 0,05^2 = \mathbf{2,5}$
- $1000(5\sqrt{2} - 7)^2 = 1000(50 - 70\sqrt{2} + 49) = 1000(99 - 70\sqrt{2}) \approx 1000(99 - 70 \cdot 1,41) = 1000(99 - 98,7) = 1000 \cdot 0,3 = \mathbf{300}$
- $1000(5\sqrt{2} - 7)^2 \approx 1000(5 \cdot 1,4142135623731 - 7)^2 = 1000(7,0710678118655 - 7)^2 = 1000 \cdot 0,0710678118655^2 \approx 1000 \cdot 0,0050506338833501 = \mathbf{5,0506338833501}$

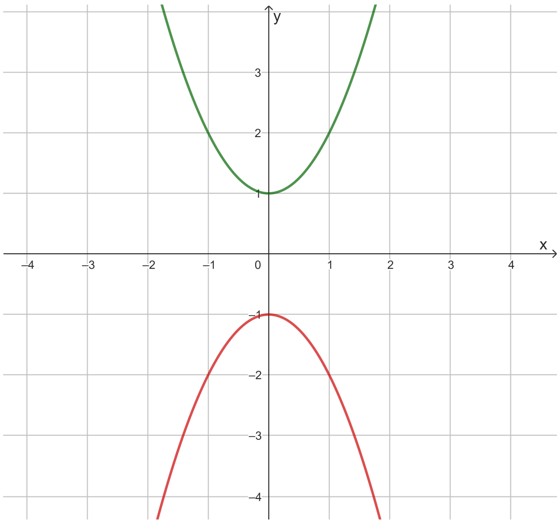
Otrzymane rozbieżności świadczą o tym, że po pierwsze różnica w przybliżeniu nawet na częściach tysięcznych może bardzo znacznie wpłynąć na wynik końcowy – dlatego m.in należy przybliżać do podanej liczby miejsc po przecinku dopiero końcowy wynik, a nie wyniki pośrednie. Po drugie, dwa pierwsze rachunku świadczą o tym, że znaczenia ma nie tylko dokładność przybliżenia, ale też to, do jakiej postaci końcowej wstawiamy przybliżenie. Z tego m.in. powodu należy usuwać niewymierność z mianownika, ponieważ przybliżanie niewymierności w mianowniku generuje większy błąd niż przybliżanie w liczniku.

Rozwiązanie 4. Nie istnieje taki czworościan. Narysujmy dowolny trójkąt prostokątny i załóżmy, że jest on naszą hipotetyczną siatką. Połączmy środki jego boków (łączymy środki, aby po sklejeniu odpowiednie krawędzie się skleiły).



Niech $|\sphericalangle AFD| = \alpha$. Wtedy $|\sphericalangle CFE| = 90^\circ - \alpha$. Ponieważ $(90^\circ - \alpha) + \alpha = 90^\circ$, to czerwone krawędzie złączą się dopiero, gdy będą płasko leżeć na podstawie, a więc po ich zagięciu nie otrzymamy ostrosłupa, a jedynie płaski trójkąt.

Rozwiązanie 5. Funkcje ograniczające szukaną funkcję g są funkcjami kwadratowymi o następujących wykresach.



Dzięki rysunkowi[1] łatwo podać przykłady:

a) $g(x) = 0$
b) $g(x) = x$

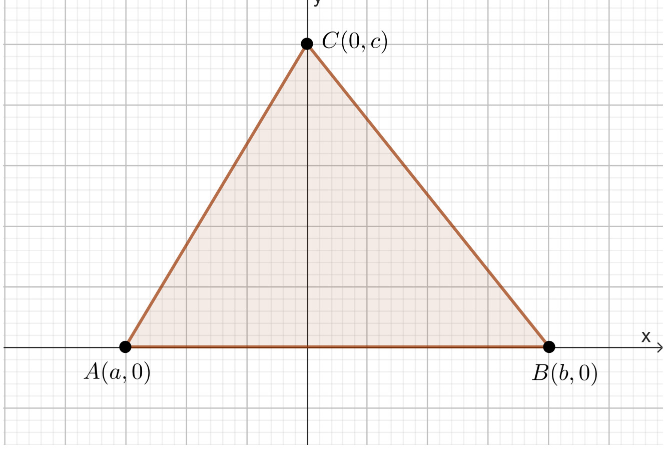
Jeśli chodzi o ostatni podpunkt, to szukamy prostej, która jest styczna do obu wykresów, tzn. ma z każdym z nich dokładnie jeden punkt wspólny. W tym celu rozwiążmy układy równań:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = ax + b \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x^2 - 1 \\ y = ax + b \end{cases}$$

$x^2 + 1 = ax + b$ $\qquad$ $-x^2 - 1 = ax + b$
$x^2 - ax + 1 - b = 0$ $\qquad$ $x^2 + ax + b - 1 = 0$

Są to równania kwadratowe, więc musi zachodzić warunek $\Delta = 0$, aby był dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem. Zatem:
$\Delta_1 = a^2 - 4(1 - b) = 0$ oraz $\Delta_2 = a^2 - 4(b - 1) = 0$. Stąd $a^2 = 4(1 - b) \wedge a^2 = 4(b - 1)$. Przyrównując prawe strony otrzymujemy $1 - b = b - 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \vee a = -1$. Ostatecznie uzyskujemy dwie funkcje: $g(x) = x + 1$ lub $g(x) = -x + 1$.

Rozwiązanie 6. Wykorzystamy geometrię analityczną. W tym celu umieśćmy trójkąt w układzie współrzędnych tak, by dwa wierzchołki były na osi Ox i jeden na osi Oy – tak jak na rysunku. Wtedy $A(a, 0), B(b, 0), C(0, c)$.



[1]Łatwo też w razie potrzeby uzasadnić poprawność nierówności dzięki nietrudnemu rachunkowi.

- Punkt K przecięcia środkowych, czyli środek ciężkości ma współrzędne
$K\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right) = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$.
- Punkt L przecięcia wysokości, czyli ortocentrum:
Wysokość h_C zawiera się w prostej $x=0$. Wyznaczymy równanie prostej zawierającej h_B. Jest ona prostopadła do pr. BC, której współczynnik kierunkowy wynosu $a_{BC} = \frac{c}{-a} = -\frac{c}{a}$. Zatem współczynnik kierunkowy prostej zawierającej h_B wynosi $\dfrac{a}{c}$. Prosta ta przechodzi przez punkt B, więc
$$0 = \frac{a}{c}\cdot b + b_h$$
$$b_h = -\frac{ab}{c},$$
a więc h_B zawiera się w prostej o równaniu $y = \dfrac{a}{c}x - \dfrac{ab}{c}$. By znaleźć punkt przecięcia wystarczy rozwiązać układ równań:
$\begin{cases} x=0 \\ y = \dfrac{a}{c}x - \dfrac{ab}{c} \end{cases}$
z którego otrzymujemy $L\left(0, -\dfrac{ab}{c}\right)$.
- Punkt M przecięcia symetralnych boków, czyli środek okręgu opisanego na trójkącie:
Środek odcinka AB ma współrzędne $S_{AB} = \left(\dfrac{a+b}{2}, 0\right)$, więc równanie symetralnej boku AB ma postać $x = \dfrac{a+b}{2}$. Środkiem boku AC jest punkt $S_{AC} = \left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$. Symetralna boku AC ma współczynnik kierunkowy równy $\dfrac{a}{c}$ (taki sam jak h_B) i przechodzi przez punkt S_{AC}, więc
$$\frac{c}{2} = \frac{a}{c}\cdot\frac{a}{2} + b_s$$
$$b_s = \frac{c}{2} - \frac{a^2}{2c} = \frac{c^2-a^2}{2c},$$
a więc równanie tej symetralnej to: $y = \dfrac{a}{c}x + \dfrac{c^2-a^2}{2c}$. By znaleźć punkt przecięcia wystarczy rozwiązać układ równań:
$\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a}{c}x + \dfrac{c^2-a^2}{2c} \end{cases}$
z którego po nietrudnych rachunkach otrzymujemy $M\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{ab+c^2}{2c}\right)$.

Aby wykazać, że punkty K, L, M leżą na jednej prostej można napisać równanie prostej KL oraz sprawdzić, że punkt M na niej leży. Prościej jednak będzie wyliczyć współczynniki kierunkowe a_{LK} raz a_{LM}:
$$a_{LK} = \frac{\frac{a+b}{3} - 0}{\frac{c}{3} + \frac{ab}{c}} = \frac{a+b}{3}\cdot\frac{3c}{c^2+3ab} = \frac{(a+b)c}{c^2+3ab}$$
$$a_{LM} = \frac{\frac{a+b}{2} - 0}{\frac{ab+c^2}{2c} + \frac{ab}{c}} = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{2c}{ab+c^2+2ab} = \frac{(a+b)c}{c^2+3ab},$$
a więc punkty te leżą na jednej prostej. Prosta ta ma swoją nazwę – jest to **prosta Eulera.**

Rozwiązanie 7. Ułamek w dowolnym miejscu tego ciągu możemy zapisać w postaci:
$$\frac{23 + 23\cdot 10^2 + 23\cdot 10^4 + \ldots + \cdot 23\cdot 10^{2k}}{24 + 24\cdot 10^2 + 24\cdot 10^4 + \ldots + \cdot 24\cdot 10^{2k}},$$
dla pewnego $k\in\mathbb{N}$.
Z licznika możemy wyjąć przed nawias 23, a z mianownika 24 otrzymując:
$$\frac{23(1+10^2+10^4+\ldots+10^{2k})}{24(1+10^2+10^4+\ldots+10^{2k})} = \frac{23\cancel{(1+10^2+10^4+\ldots+10^{2k})}}{24\cancel{(1+10^2+10^4+\ldots+10^{2k})}} = \frac{23}{24},$$

co pokazuje, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ (czyli dla dowolnej długości ułamka) wynik zawsze wynosi $\frac{23}{24}$.

Rozwiązanie 8. Dla każdego wielościanu wypukłego zachodzi wzór Eulera: $w - k + s = 2$. Iloczyn $w \cdot k \cdot s = 2023^{2023}$ oznacza, że wszystkie liczby w, k, s są nieparzyste, bo prawa strona jest nieparzysta. Ponieważ różnica liczb nieparzystych jest parzysta, a suma liczby parzystej i nieparzystej jest nieparzysta otrzymujemy po lewej stronie tożsamości Eulera liczbę nieparzystą. Sprzeczność. A zatem taki wielościan nie istnieje.

Rozwiązanie 9. Tak. Są to: $(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, (n+1)! + 4, \ldots + (n+1)! + (n+1)$. Wszystkie są złożone, ponieważ pierwsza dzieli się przez 2, druga przez 3, trzecia przez 4 itd., a ostatnia przez $n+1$.

Rozwiązanie 10. Dziedziną równanie jest $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$4^{\frac{1}{x}} = 6^{\frac{1}{x}} + 9^{\frac{1}{x}} \quad | : 4^{\frac{1}{x}}$$
$$1 = \left(\frac{6}{4}\right)^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$$
$$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^{2}$$

Podstawimy $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = t,\ t > 0$.

$$1 = t + t^2$$
$$t^2 + t - 1 = 0$$
$$\Delta = 5,\ \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$
$$t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

Zatem $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Wiedząc, że $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ możemy zapisać $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{\varphi}$. Obustronnie logarytmując otrzymujemy:

$$\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\varphi}\right)$$
$$\frac{1}{x} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\varphi}\right) = \log_{\frac{3}{2}} \varphi^{-1} = -\log_{\frac{3}{2}} \varphi$$
$$x = -\log_{\varphi} \left(\frac{3}{2}\right) = -\log_{\varphi} \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \log_{\varphi} \left(\frac{2}{3}\right)$$

Rozwiązanie 11. Skorzystamy najpierw z własności logarytmów: $e^{\ln x} = x$.

$$\varphi^{\ln x} + \left(e^{\ln x}\right)^{\ln \varphi} = 3 + \sqrt{5}$$
$$\varphi^{\ln x} + \left(e^{\ln \varphi}\right)^{\ln x} = 2 + 1 + \sqrt{5}$$
$$\varphi^{\ln x} + \varphi^{\ln x} = 2 + 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$2\varphi^{\ln x} = 2 + 2\varphi \quad | : 2$$
$$\varphi^{\ln x} = 1 + \varphi \quad | \ln()$$
$$\ln \varphi^{\ln x} = \ln(1+\varphi)$$
$$\ln x \cdot \ln \varphi = \ln(1+\varphi).$$

Wiemy, że złota liczba jest rozwiązaniem równania $x^2 - x - 1 = 0$, a więc $\varphi + 1 = \varphi^2$.

$$\ln x \cdot \ln \varphi = \ln \varphi^2$$
$$\ln x \cdot \ln \varphi = 2 \ln \varphi \quad | : \ln \varphi$$
$$\ln x = 2$$

$$x = e^2$$

Możemy również inaczej przekształcać nasze równanie. Zamiast zamieniać drugi składnik, by wyglądał jak pierwszy, możemy analogicznie zamienić pierwszy i otrzymać

$$2\left(e^{\ln x}\right)^{\ln\varphi} = 2 + 2\varphi$$

$$\left(e^{\ln x}\right)^{\ln\varphi} = 1 + \varphi$$

$$x^{\ln\varphi} = 1 + \varphi \quad |()^{\frac{1}{\ln\varphi}}$$

$$x = (1+\varphi)^{\frac{1}{\ln\varphi}}$$

$$x = \sqrt[\ln\varphi]{1+\varphi}.$$

Choć wyniki wydają się zupełnie inne, to po łatwych przekształceniach uzyskujemy, że $\sqrt[\ln\varphi]{1+\varphi} = e^2$.

Rozwiązanie 12. Najprościej rozwiązać to następująco. Niech $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}} =: S$. Podnosząc do kwadratu otrzymujemy:

$$x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}} = S^2,$$

czyli $xS = S^2$. Stąd (wyciągając przed nawias) $S = 0$ lub $S = x$. Pierwsza opcja jest oczywiście sprzeczna, więc $S = x$.
Aby to rozumowanie było w pełni poprawne, należy najpierw udowodnić, że wynikiem tego „nieskończonego" pierwiastka jest liczba rzeczywista. Tylko wtedy możemy cały pierwiastek oznaczyć jako liczbę S. Mogłoby się bowiem zdarzyć, że wynik rozbiega w plus (lub minus) nieskończoność albo w ogóle przy obliczaniu coraz dokładniejszego wyniku (braniu coraz większej liczby pierwiastków) wyniki nie zbliżają się do żadnej granicy (nawet niewłaściwej)[2].

Wykażemy to za pomocą indukcji matematycznej. W tym celu niech $x_n := \sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}$, gdzie w tym wyrażeniu występuje dokładnie n liter x. Pokażemy, że ciąg (x_n) ma granicę.
Rozważmy najpierw sytuację, gdy $x > 1$:

I. (ograniczoność)
   1. Dla $n = 1$ mamy $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant x$.
   2. $Z_{ind} : 0 \leqslant x_n \leqslant x, \qquad T_{ind} : 0 \leqslant x_{n+1} \leqslant x$
   Z założenia indukcyjnego wiemy, że

$$0 \leqslant x_n \leqslant x$$

$$0 \leqslant \sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}} \leqslant x \quad | \cdot x$$

$$0 \leqslant x\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}} \leqslant x^2 \quad |\sqrt{}$$

$$0 \leqslant \sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}} \leqslant |x| (= x \text{ bo } x > 0)$$

$$0 \leqslant x_{n+1} \leqslant x$$

   Na mocy indukcji matematycznej ciąg (x_n) jest ograniczony (z góry przez x).

[2] Najbardziej znanym przykładem jest chyba rozumowanie, które przez analogiczne myślenie (czyli oznaczenie przez x pewnego wyrażenia, które nie jest liczbą rzeczywistą) „dowodzi", że $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -\frac{1}{12}$, czyli, że suma liczb naturalnych wynosi $-\frac{1}{12}$.

II. (monotoniczność)

1. Dla $n = 1$ mamy $x_1 = \sqrt{x}, x_2 = \sqrt{x\sqrt{x}}$.

$$x_1 \overset{?}{<} x_2$$

$$\sqrt{x} \overset{?}{<} \sqrt{x\sqrt{x}} \quad |^2$$

$$x \overset{?}{<} x\sqrt{x} \quad | : x$$

$$1 \overset{?}{<} \sqrt{x} \quad |^2$$

$$1 \overset{?}{<} x$$

$$TAK$$

2. $Z_{ind} : x_n < x_{n+1}, \qquad T_{ind} : x_{n+1} < x_{n+2}$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że $x_n < x_{n+1}$, czyli:

$$\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}} < \sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}},$$

przy czym po lewej jest n pierwiastków, a po prawej jest ich $n + 1$.

Mnożąc obie strony nierówności przez x, a następnie pierwiastkując otrzymujemy analogiczne pierwiastki, ale po lewej stronie jest ich $n + 1$, a po prawej $n + 2$, czyli:

$$x_{n+1} < x_{n+2},$$

co na mocy indukcji matematycznej dowodzi, że ciąg (x_n) jest rosnący.

Rozważany ciąg (x_n) jest monotoniczny (rosnący) oraz ograniczony, a więc jest zbieżny.
W analogiczny sposób wykazujemy, ograniczoność i monotoniczność dla $x \in (0, 1)$. Dla $x = 1$ ciąg jest stale równy 1, więc jego granica to 1.
To pozwala oznaczyć granicę tego ciągu, czyli szukany „nieskończony" pierwiastek przez S.

Rozwiązanie 13. Rozważmy liczbę nieparzystą x większą od 7, czyli $x = 2n + 1 > 7$:

$$2n + 1 > 7 \quad | - 3$$

$$2n - 2 > 4$$

$$2(n - 1) > 4$$

Liczba po lewej jest parzysta i większa od 4 (a więc też od 2). Korzystając z Hipotezy Goldbacha jest ona sumą dwóch liczb pierwszych, tzn.

$$2(n - 1) = p_1 + p_2$$

$$2n - 2 = p_1 + p_2 \quad | + 3$$

$$2n + 1 = p_1 + p_2 + 3,$$

a więc przedstawiliśmy liczbę x jako sumę trzech liczb pierwszych.
Zdania: *„Każda liczba nieparzysta większa od 7 jest sumą trzech liczb pierwszych"* nie możemy uznać za prawdziwe, ponieważ dowód tego faktu korzysta z własności, której do tej pory nikt nie potwierdził. Jeśli jednak okaże się, że hipoteza Goldbacha jest prawdziwa, to automatycznie prawdziwe będzie również powyższe zdanie. Gdyby jednak Hipoteza Goldbacha była fałszywa to **NIE** oznacza to, że powyższe zdanie jest fałszywe. Być może da się je udowodnić innymi metodami, nie wykorzystującymi Hipotezy Goldbacha.

Rozwiązanie 14. Aby iloczyn cyfr pewnej liczby wynosił 0, to jedna z cyfr musi być równa 0. W tym przypadku zero musi być ostatnią cyfrą, aby liczba o 1 większa miała iloczyn cyfr różny od 0 (dokładniej = 1000). Rozłóżmy liczbę 1000 na czynniki:

$$1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5.$$

Mamy trzy przypadki spełniające warunki zadania:

- liczba n to dowolna permutacja cyfr: $2, 2, 2, 5, 5, 5$ i dowolnej liczby cyfr 1 oraz 0 na końcu,
- liczba n to dowolna permutacja cyfr: $2, 4, 5, 5, 5$ i dowolnej liczby cyfr 1 oraz 0 na końcu,
- liczba n to dowolna permutacja cyfr: $5, 5, 5, 8$ i dowolnej liczby cyfr 1 oraz 0 na końcu.

Wtedy liczba $n+1$ ma ostatnią cyfrę równą 1, więc iloczyn jej wszystkich cyfr to 1000. Szukanych liczb jest więc nieskończenie wiele, a przykładową może być: $n = 112225550$.

Rozwiązanie 15. Taka liczba nie istnieje. Aby w liczbie $n+1$ iloczyn cyfr wynosił 0, to jedna z cyfr musi być 0. Musi to być ostatnia cyfra, ponieważ gdyby to była któraś z pozostałych, to wtedy iloczyn cyfr liczby n również wynosiłby zero (a ma wynosić 1000). To oznacza, że ostatnią cyfrą liczby n jest 9, a więc iloczyn cyfr liczby n dzieli się przez 9. Sprzeczność, bo $9 \nmid 1000$.

Rozwiązanie 16.

- 0, smutna bo zapętla się: $0^2 = 0$,
- 1, wesoła bo $1^1 = 1$,
- 2, smutna bo zapętla się: $2^2 = 4$, $4^2 = 16$, $1^2+6^2 = 37$, $3^2+7^2 = 58$, $5^2+8^2 = 89$, $8^2+9^2 = 145$, $1^2+4^2+5^2 = 42$, $4^2+2^2 = 20$, $2^2+0^2 = 4, \ldots$,
- 3, smutna, bo $3^2 = 9$, $9^2 = 81$, $8^2+1^2 = 65$, $6^2+5^2 = 61$, $6^2+1^2 = 37, \ldots$,bo wyżej po 37 się zapętla
- 4, smutna, bo $4^2 = 16, \ldots$ pętla jak wyżej,
- 5, smutna, bo $5^2 = 25$, $2^2+5^2 = 29$, $2^2+9^2 = 85$, $8^2+5^2 = 89, \ldots$ pętla jak wyżej,
- 6, smutna, bo $6^2 = 36$, $3^2+6^2 = 45$, $4^2+5^2 = 41$, $4^2+1^2 = 17$, $1^2+7^2 = 50$, $5^2+0^2 = 25, \ldots$ pętla jak wyżej,
- 7, wesoła, bo $7^2 = 49$, $4^2+9^2 = 97$, $9^2+7^2 = 130$, $1^2+3^2+0^2 = 10$, $1^2+0^2 = 1$,
- 8, smutna, bo $8^2 = 64$, $6^2+4^2 = 52$, $5^2+2^2 = 29$, $2^2+9^2 = 85$, $8^2+5^2 = 89, \ldots$ pętla jak wyżej,
- 9, smutna, bo $9^2 = 81$, $8^2+1^2 = 65, \ldots$ pętla jak wyżej,
- 10, wesoła, bo $1^2+0^2 = 1$

Przestawienie cyfr liczby nie wpływa na bycie liczbą wesołą/smutną, ponieważ dodawanie jest przemienne. Dodanie dowolnej liczby zer również nie wpływa na wynik, ponieważ $0^2 = 0$, więc suma się nie zmienia.
W przedziale od 0 do 1000 są dokładnie 143 liczby wesołe.

Rozwiązanie 17. a) $L(a,b) = \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a} = \dfrac{-(a-b)}{-(\ln a - \ln b)} = \dfrac{a-b}{\ln a - \ln b} = L(b,a)$

b) $L(e^2, e) = \dfrac{e^2-e}{\ln e^2 - \ln e} = \dfrac{e^2-e}{2-1} = e^2 - e = e(e-1) \approx 4,67$

$L(2,1) = \dfrac{2-1}{\ln 2 - \ln 1} = \dfrac{1}{\ln 2} = \log_2 e \approx 1,44$

c) Obliczmy:

$$S_K(2,1) = \sqrt{\frac{2^2+1^2}{2}} = \sqrt{2,5} \approx 1,58$$
$$S_A(2,1) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$
$$S_G(2,1) = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2} \approx 1,41$$
$$S_H(2,1) = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{1}}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \approx 1,33$$

a zatem $S_K \geqslant S_A \geqslant S_L \geqslant S_G \geqslant S_H$

Rozwiązanie 18.

- jeśli x, y są parzyste, to lewa strona jest parzysta (suma i różnica liczb parzystych jest parzysta), a prawa nieparzysta. Sprzeczność.
- jeśli x, y są nieparzyste, to lewa strona jest parzysta (suma i różnica liczb nieparzystych jest parzysta),a prawa nieparzysta. Sprzeczność.
- jeśli x, y są różnej parzystości, to w modułach są liczby nieparzyste (suma/różnica liczby parzystej i nieparzystej jest nieparzysta). Suma czterech liczb parzystych jest parzysta, a po prawej jest liczba nieparzysta. Sprzeczność.

Zatem równanie nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych.

Rozwiązanie 19. Załóżmy nie wprost, że takie przedstawienie istnieje, tzn.

$$1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots \frac{1}{p_n},$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ to parami różne liczby pierwsze. Rozważmy liczbę:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots \frac{1}{p_{n-1}}\right),$$

którą przekształcamy dalej:

$$\ldots = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}\left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \ldots - \frac{1}{p_{n-1}}\right) = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}}{p_n}.$$

Lewa strona jest liczbą całkowitą, a prawa nie. Sprzeczność, a zatem takie przedstawienie nie istnieje.

Rozwiązanie 20. Niech $f(x) := 2023^{|x|}$ oraz $g(x) := \sin x^{2023}$. Wtedy $ZW_f = [1, +\infty)$ bo po podstawieniu mamy funkcję $y = 2023^t$, dla $t \geqslant 0$ oraz $ZW_g = [-1, 1]$, bo po podstawieniu mamy funkcję $y = \sin u$, dla $u \in \mathbb{R}$. Równanie może mieć rozwiązanie tylko, gdy zbiory wartości się przecinają, czyli dla $y = 1$. Ale $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$, zaś $g(0) = 0 \neq 1$. Równanie jest zatem sprzeczne.

Rozwiązanie 21. To bardzo znana nierówność i ma nawet swoją nazwę: nierówność Nesbitta. Jest to szczególny przypadek ogólniejszej nierówności zwanej nierównością Shapiro. Na angielskiej Wikipedii jest rozpisane 9 różnych dowodów, ja pokażę jeden z nich.
Zgodnie z podaną przeze mnie wskazówką, jeśli w trójkąt o bokach a, b, c, wpiszemy okrąg i zastosujemy twierdzenie o odcinkach stycznych, to możemy zapisać: $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$. Dodając po kolei dwie z tych równości i odejmując trzecią otrzymamy: $a + b - c = 2z$, $a + c - b = 2y$, $b + c - a = 2x$. Po podstawieniu[3] tych zależności do wyjściowej nierówności otrzymujemy:

$$\frac{\frac{b+c-a}{2}}{a} + \frac{\frac{a+c-b}{2}}{b} + \frac{\frac{a+b-c}{2}}{c} \overset{?}{\geqslant} \frac{3}{2} \quad | \cdot 2$$

$$\frac{b+c-a}{a} + \frac{a+c-b}{b} + \frac{a+b-c}{c} \overset{?}{\geqslant} 3$$

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} - 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 \overset{?}{\geqslant} 3$$

$$\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \overset{?}{\geqslant} 6$$

Ta nierówność jest prawdziwa, bo każdy z nawiasów jest $\geqslant 2$ z twierdzenia o sumie liczby i jej odwrotności.

Rozwiązanie 22. Obkładając równania kolejno logarytmami o podstawach: 2020, 2021,2022, 2023 otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = \log_{2020} 2021 \\ y = \log_{2021} 2022 \\ z = \log_{2022} 2023 \\ t = \log_{2023} 2024 \end{cases}.$$

Zatem

$$xyzt = \log_{2020} 2021 \cdot \ldots \cdot \log_{2023} 2024 = \log_{2020} 2021 \cdot \frac{\log_{2020} 2022}{\log_{2020} 2021} \cdot \frac{\log_{2020} 2023}{\log_{2020} 2022} \cdot \frac{\log_{2020} 2024}{\log_{2020} 2023} = \log_{2020} 2024.$$

Rozwiązanie 23. Dla prawa drugiego np. $\exists x \in \mathbb{R}: \ x > 0 \wedge \exists x \in \mathbb{R}: \ x < 0$, ale nie jest prawdą, że $\exists x \in \mathbb{R}: \ (x > 0 \wedge x < 0)$.
Dla prawa czwartego np. $\forall x \in \mathbb{R}: (x \geqslant 0 \vee x < 0)$, ale nie jest prawdą, że $\forall x \in \mathbb{R}: x \geqslant 0 \vee \forall x \in \mathbb{R}: x < 0$.

Rozwiązanie 24. Prawie identyczne zadanie (inne długości boków) pojawiło się na II etapie Olimpiady Matematycznej w roku 2016, jako zadanie pierwsze, czyli najprostsze. W 100% poprawnie zrobiło je 465 osób na 617 osób.
Umieśćmy trójkąt w układzie współrzędnych tak, wierzchołek kąta prostego był w punkcie $A(0,0)$, a przyprostokątne pokryły się z osiami układu, tj. $B(8,0), C(0,6)$. Niech $P(x,y)$ należy do wnętrza trójkąta. Z twierdzenia Pitagorasa: $|PA| = \sqrt{x^2 + y^2}$ oraz $|PB| = \sqrt{(8-x)^2 + y^2}$ oraz $|PC| = \sqrt{(6-y)^2 + x^2}$. Kwadrat liczby wymiernej, oraz różnica liczb wymiernych jest wymierna, a zatem liczby:

$$(x^2 + y^2) - \left((8-x)^2 + y^2\right) = 16x - 64$$

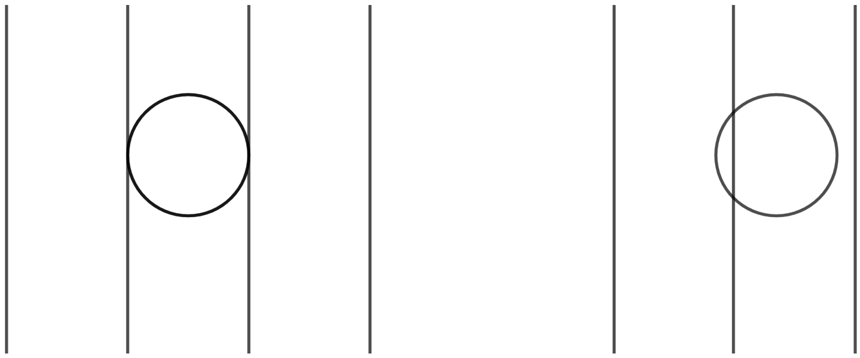
oraz

$$(x^2 + y^2) - \left((6-y)^2 + y^2\right) = 12y - 36$$

[3]To podstawienie również nie jest przypadkowe. Stosuje się je bardzo często i nosi nazwę: **podstawienie Raviego.**

również są wymierne. Stąd wiemy, że $x, y \in \mathbb{Q}$. Wykazaliśmy zatem, że odległości od boków AB i AC są wymierne. Aby obliczyć odległość od boku BC skorzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej.
Prosta BC ma równanie: $k: \ y = -\frac{3}{4}x + 6$, czyli $3x + 4y - 24 = 0$.
Szukana odległość to: $d(P, k) = \dfrac{|3x + 4y - 24|}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{|3x + 4y - 24|}{5}$. Licznik i mianownik to liczby wymierne, więc odległość ob boku też.

Rozwiązanie 25. Jeśli sprytnie pomyślimy, to zadanie jest trywialne. Wystarczy za jeden zbiór wziąć całą płaszczyznę, a za drugi odpowiednio: punkt, dwa punkty, 2024 punkty. Wtedy warunki są spełnione.
Spróbujmy więc zastanowić się nad przykładem, gdzie żaden ze zbiorów nie jest całą płaszczyzną.
Rozważmy najpierw przykład b). Jako pierwszy zbiór bierzemy okrąg o **średnicy** 1, a jako drugi: zbiór prostych równoległych, takich, że dwie kolejne są od siebie odległe o 1. Wtedy albo okrąg jest styczny zewnętrznie do dwóch prostych albo przecina jedną prostą w dwóch punktach (patrz rysunek).



Podobnie jest w podpunkcie c). Wystarczy również wziąć okrąg i zbiór prostych, przy czym teraz średnica okręgu to 1012.
Zaskakujący jest podpunkt a), ponieważ... wiadomo, że takie zbiory istnieją (W. Sierpiński), ale do tej pory nikomu nie udało się wskazać konkretnego przykładu (!)

Piotr Bury