

Rodzaje dowodów

Przypomnijmy, że wyróżniamy 4 główne metody dowodzenia prawdziwości twierdzeń:

- wprost** – rozpoczynamy od założeń lub wcześniej udowodnionych twierdzeń, a następnie przeprowadzając logiczne rozumowanie dochodzimy do tezy,
- nie wprost** – polega on na zaprzeczeniu tezy dowodzonego twierdzenia i wykazaniu, że przyjęcie takiego zaprzeczenia prowadzi do sprzeczności. Zatem dane twierdzenie należy uznać za prawdziwe,
- przez kontrapozycję**^a – stosujemy prawo kontrapozycji, czyli zamiast dowodzić implikacji $p \Rightarrow q$ dowodzimy implikację $\neg q \Rightarrow \neg p$,
- przez indukcję** – stosujemy zasadę indukcji matematycznej. Tą metodą dowodzimy twierdzeń dotyczących liczb naturalnych.

Direct Proof



Proof by Contradiction



Proof by Induction



Proof by Lack of Counterexample



^aWarto zwrócić uwagę, że dowód przez kontrapozycję jest tak naprawdę dowodem nie wprost, w którym sprzeczność uzyskuje się bezpośrednio z założeniem.

Aby udowodnić, że twierdzenie jest fałszywe, wystarczy wskazać jeden kontrprzykład, czyli przykład, który spełnia założenia twierdzenia, ale nie spełnia jego tezy.

Poniżej znajdują się 4 zadania na dowodzenie. W każdym przypadku zapisz założenie i tezę, na następnie rozwiąż zadanie wskazaną metodą.

Zadanie 1 (Wprost).

Udowodnij, że sześcián dowolnej liczby całkowitej dającej resztę 3 z dzielenia przez 8 daje resztę 3 z dzielenia przez 4.

Zadanie 2 (Nie Wprost).

Udowodnij, że liczba $\log_2 7$ jest niewymierna.

Zadanie 3 (Przez Kontrapozycję).

Udowodnij, że dla $x > 0$ zachodzi nierówność: $x + \frac{4}{x^2} \geq 3$.

Zadanie 4 (Przez Indukcję).

Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ zachodzi nierówność: $2^{n-1} < n!$.

Zadanie domowe

Zadanie 5 (Wprost).

Udowodnij, że suma sześciánów trzech kolejnych liczb nieparzystych daje resztę 3 z dzielenia przez 6.

Zadanie 6 (Nie Wprost).

Udowodnij, że liczba $\log_3 13$ jest niewymierna.¹

Zadanie 7 (Przez Kontrapozycję).

Udowodnij, że dla $x < 0$ zachodzi nierówność: $x + \frac{9}{x} \leq 6$.

Zadanie 8 (Przez Indukcję).

Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$ zachodzi nierówność: $2^n > n^3$.

Zadanie 2025.

Używając dowodzenia wprost i nie odwołując się do monotoniczności funkcji $t \mapsto t^3$ (czyli nie podnosząc po prostu obustronnie do potęgi trzeciej), uzasadnij, że jeśli $x \leq y$, to $x^3 \leq y^3$.

¹Zastanów się, jak zmieni się rozumowanie, gdy podstawa logarytmu będzie ułamkiem.