Funkcje

1. Wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x) = (k^2 - 1)x^2 - 2kx + 4k + 5$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$ i malejąca w przedziale $(1; \infty)$ dla $k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

2. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1) + 2$. Wykaż, że istnieje taka wartość parametru m, dla którego dana funkcja przyjmowałaby wartości ujemne.

3. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 15$. Wykaż, że $W(2 - \sqrt{5})$ jest liczbą całkowitą.

4. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$. Wykres tej funkcji przesunięto o wektor $\vec{u} = [-5, 2]$, a następnie przekształcono przez powinowactwo prostokątne o osi OX i skali $k = -2$, tzn. wykres funkcji $y = h(x)$ otrzymano z wykresu $y = -2g(x)$. Udowodnij, że funkcja h określa się wzorem $h(x) = \frac{-4x-28}{x+5}$.

5. Uzasadnij, że zbiorem wartości funkcji $f(x) = 5^{\log_5(-x^2+5x+6)}$ jest zbiór $(0;\ 12\frac{1}{4} >$.

6. Punkt $A = (-1, \frac{1}{3})$ należy do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$. Uzasadnij, że równanie $|f(x - 1) - 3| = m$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie dla $m \in (0; 2)$.

7. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x-1} - 2$. Uzasadnij, że najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $f(8 - x) \leq f(2x)$ jest liczba 1.