

Część III: Rachunek całkowy

Definicja 1.

Niech f będzie funkcją określoną na przedziale $[a, b]$. **Funkcją pierwotną** funkcji f nazywamy funkcję F określoną na $[a, b]$, która spełnia warunek $\forall x \in [a, b] : F'(x) = f(x)$.¹

Twierdzenie 2.

Jeśli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$, to ma funkcję pierwotną w $[a, b]$.²

Uwaga 3.

Jeśli funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f oraz C jest dowolną liczbą rzeczywistą, to również funkcja G określona wzorem $G(x) := F(x) + C$ jest pierwotną funkcji f .

Przykład 4.

Funkcją pierwotną do funkcji $f(x) = 2x$ jest np. $g(x) = x^2$ (bo pochodna z x^2 to $2x$). Ale dobrym przykładem będzie też $h(x) = x^2 + 4$, czy $k(x) = x^2 - 2024$.

Definicja 5.

Niech f będzie funkcją określoną na przedziale $[a, b]$. **Całką nieoznaczoną** funkcji f nazywamy zbiór wszystkich jej funkcji pierwotnych³. Zapisujemy to następująco⁴

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

gdzie F jest pewną pierwotną funkcji f , zaś C dowolną liczbą rzeczywistą.

Twierdzenie 6 (liniowość całki).

Jeśli funkcje f i g są całkowne na przedziale $[a, b]$ oraz $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (\text{addytywność})$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (\text{jednorodność})$$

Twierdzenie 7 (wzory na całki z funkcji elementarnych).⁵

- | | |
|--|--|
| 1. $\int 0 dx = C$ | 9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$ |
| 2. $\int 1 dx = x + C$ | 10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$ |
| 3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ dla $\alpha \neq -1$ | 11. $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C$ |
| 4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ | 12. $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$ |
| 5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ | 13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$ |
| 6. $\int e^x dx = e^x + C$ | 14. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \operatorname{arc} \sin x + C$ |
| 7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | |
| 8. $\int \cos x dx = \sin x + C$ | |

¹Zauważmy, że użycie pochodnej wymusza, by funkcja F była różniczkowalna (czyli też ciągła). Nie oznacza to oczywiście, że f musi być ciągła, bo istnieją funkcje różniczkowalne, których pochodne nie są ciągłe.

²Zwróćmy uwagę, że twierdzenie jest w formie implikacji. To oznacza, że nic nie mówi ono o funkcjach nieciągłych. Można wskazać przykład funkcji nieciągłej, która ma funkcję pierwotną.

³Jeszcze bardziej formalnie całkę nieoznaczoną definiuje się jako klasę abstrakcji pewnej relacji równoważności. Dla zainteresowanych: Na zbiorze wszystkich funkcji pierwotnych dla funkcji ciągłych definiujemy relację $F \sim G \Leftrightarrow F - G$ jest stała.

⁴Symbol całki pochodzi od wydłużonej litery s i zawdzięczamy go Leibnizowi, który zaadaptował go od łacińskiego słowa *summa*. Symbol ten został przez niego użyty po raz pierwszy 29 października 1675 roku w manuskrypcie *Analyseos tetragonisticae pars secunda*.

⁵Większość podstawowych wzorów na całki otrzymujemy dzięki znajomości pochodnych konkretnych funkcji. W ogólności znajdowanie całek, nawet pozornie prostych, jest znacznie trudniejszym zadaniem niż szukanie pochodnych.

Twierdzenie 8 (całkowanie przez części).

Jeśli funkcje f i g mają ciągłe pochodne w przedziale $[a, b]$, to

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

Przykład 9.

Obliczymy całkę $\int x \sin x dx$. W celu uproszczenia zapisu wprowadźmy podstawienie⁶

$$\begin{bmatrix} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{bmatrix}.$$

Mamy zatem $\int x \sin x dx = -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C$.

Twierdzenie 10 (całkowanie przez podstawienie).

Jeśli funkcja g ma ciągłą pochodną oraz funkcja f jest ciągła na przedziale $[c, d] = g([a, b])$, to

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt = F(g(x)) + C,$$

gdzie $t = g(x)$.

Przykład 11.

Obliczymy całkę $\int \cos 3x dx$. Tak jak wcześniej, stosowanie wprost bardzo formalnego zapisu i oznaczeń z twierdzenia byłoby bardzo kłopotliwe. Dlatego również tutaj posłużymy się skróconym rozumowaniem.

Podstawiamy nową zmienną $t = 3x$. Wtedy różniczkując obie strony⁷ mamy $dt = 3dx$, skąd zaś $dx = \frac{dt}{3}$.

Podstawiając otrzymane wyniki do całki otrzymujemy

$$\int \cos 3x dx = \int \cos t \frac{dt}{3} = \int \frac{1}{3} \cos t dt = \frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \sin 3x + C$$

Definicja 12.

Niech $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Wprowadzamy następujące definicje:

- **Podziałem przedziału** $[a, b]$ nazywamy układ punktów (t_0, t_1, \dots, t_k) , gdzie $k \geq 1$, taki że $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$. Układ ten oznaczamy literą P .
- **Średnicą podziału** $P = (t_0, t_1, \dots, t_k)$ przedziału $[a, b]$ nazywamy liczbę $\delta(P) := \max\{t_j - t_{j-1} : j \in \{1, 2, \dots, k\}\}$.
- **Ciąg podziałów** $(P_n)_{n=1}^\infty$ nazywamy normalnym, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(P_n) = 0$.
- **Układem punktów pośrednich** dla danego podziału (t_0, t_1, \dots, t_k) nazywamy $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, taki że $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ dla $j \in \{1, \dots, k\}$.

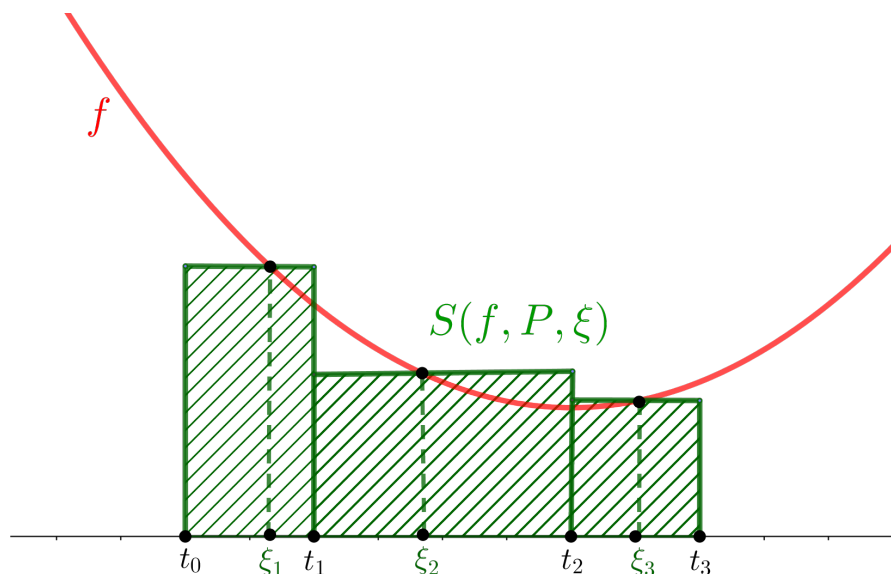
Definicja 13.

Niech dana będzie funkcja f określona na przedziale $[a, b]$. Ustalmy podział $P = (t_0, t_1, \dots, t_k)$ oraz układ punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ dla podziału P . Wtedy **sumą (całkową) Riemanna** funkcji f na przedziale $[a, b]$ dla podziału P i układu punktów pośrednich ξ nazywamy liczbę

$$S(f, P, \xi) := \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot (t_j - t_{j-1}).$$

⁶Zauważmy, że u odpowiada $f(x)$, zaś v' odpowiada $g'(x)$. Zatem pierwszy wiersz odpowiada wyrażeniom pod całką. W drugim wierszu odpowiednio obliczamy pochodną oraz całkę z funkcji z wiersza pierwszego. A zatem u' odpowiada $f'(x)$, a v odpowiada $g(x)$. Dzięki temu drugi wiersz to wyrażenia pod całką po prawej stronie wzoru, a przekątna to wyrażenie przed całką. Ten zapis pozwala mnemotechnicznie zapamiętać liczenie całek tą metodą bez konieczności zapamiętywania skomplikowanego wzoru.

⁷I dopisując tak zwaną różniczkę funkcji.



Definicja 14.

Funkcję f nazywamy **całkowalną w sensie Riemanna** na przedziale $[a, b]$ jeśli istnieje liczba $I \in \mathbb{R}$, taka że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz związanego z nim ciągu układów punktów pośrednich $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n, \xi_n) = I.$$

Liczbę I nazywamy całką Riemanna funkcji f na $[a, b]$ i oznaczamy $\int_a^b f(x) dx$.

Wniosek 15 (Interpretacja geometryczna całki Riemanna).

Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz w tym przedziale przyjmuje wartości nieujemne, to pole P obszaru ograniczonego osią Ox , wykresem funkcji f oraz prostymi $x = a$ oraz $x = b$ wyraża się wzorem $P = \int_a^b f(x) dx$.

Uwaga 16.

Przyjmujemy

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{oraz} \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Twierdzenie 17 (wzór Newtona-Leibniza/Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego).

Jeśli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$ oraz F jest dowolną funkcją pierwotną f , to zachodzi wzór

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Twierdzenie 18 (liniowość całki Riemanna).

Jeśli funkcje f i g są całkowalne w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$ oraz $k \in \mathbb{R}$, to

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (\text{addytywność})$$

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (\text{jednorodność})$$

Twierdzenie 19 (całkowanie przez części).

Jeśli funkcje f i g mają ciągłe pochodne w przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Twierdzenie 20 (całkowanie przez podstawienie).

Jeśli funkcja $g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ ma ciągłą pochodną oraz funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, to

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t) dt.$$

Przykład 21.

Chcemy wyliczyć $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$. Rozwiążemy to zadanie na dwa sposoby⁸.

Sposób I

Korzystając z przykładu (11) wiemy, że pierwotną funkcji $\cos 3x$ jest $\frac{1}{3} \sin 3x$. Używając wzoru Newtona-Leibniza otrzymujemy

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx = \left[\frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} \sin \left(3 \cdot \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{3} \sin 0 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Sposób II

Podstawiamy $t = 3x$. Ponieważ zmienna x przebiega zbiór $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, to zmienna t będzie od 0 do $3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

Ponadto $dt = 3dx$, a więc $dx = \frac{dt}{3}$. Z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie mamy zatem

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Zauważmy, że funkcja $f(x) = \cos 3x$ w przedziale $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ jest nieujemna. Zatem otrzymana całka to pole powierzchni pomiędzy wykresem funkcji f , a osią Ox w danym przedziale.

Twierdzenie 22 (addytywność względem przedziałów całkowania).

Jeśli funkcja f jest całkowana w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$ oraz $c \in (a, b)$, to

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

⁸Różniące się de facto tylko sposobem zapisu. Cała treść merytoryczna jest taka sama. W pierwszym sposobie korzystamy z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie dla całek nieoznaczonych, a w drugim bezpośrednio z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie dla całek Riemanna.