



Olimpijskie Warsztaty Matematyczne

Spotkanie 10 - **Niezmienniki**

II LO Kraków, 28.03.2025r.

Dominik Bysiewicz & Jakub Byszewski

Teoria

Pewne wartości występujące w zadaniu, które się nie zmieniają (**niezmienniki**) lub ich zmianę potrafimy prosto opisać (**pólniezmienniki**) są zazwyczaj pomocne w dowodzeniu: "czy dana sytuacja może mieć miejsce?" lub "czy gracz ma strategię wygrywającą?".

Przykłady:

- Podzielności przez 2, 3 lub 4.
- Suma liczb (lub ich odwrotności) się zwiększa lub zmniejsza.

ZADANIA

1. Czy da się podzielić zbiór $S = \{1, 2, \dots, 2025\}$ na rozłączne podzbiory tak, żeby w każdym z nich największa liczba była równa sumie pozostałych?
2. Dana jest szachownica 8×8 . W jednym ruchu wybieramy kwadrat 2×2 i zmieniamy kolor wszystkich pól wewnątrz niego. Udowodnij, że nie można skończyć z dokładnie 1 polem białym.
3. Na tablicy napisano liczby od 1 do 100. W jednym ruchu wybieramy dwie liczby a i b i zastępujemy je liczbą $a + b - 1$. Jakie liczby możemy uzyskać po wykonaniu 99 ruchów?
4. Co jeśli a, b zamienimy na $ab + a + b$?
5. Do pewnego pokoju w ciągu każdej minuty wchodzi dwie osoby lub wychodzi jedna. Sprawdź, czy jeśli na początku pokój był pusty, to po 3^{3^3} minutach może zawierać dokładnie $3^3 + 1$ osób?
6. Sto krów jest ulokowanych w czterech zagrodach, odpowiednio 10, 20, 30 i 40 w każdej. Co godzinę farmer wybiera zagrodę, wyprowadza z niej 3 krowy i wprowadza po jednej do każdej z pozostałych zagród. Czy może się zdarzyć, że zagrody mają tyle samo krów?
7. W każde pole prostokątnej tablicy wpisano dodatnią liczbę całkowitą. W jednym ruchu wybieramy wiersz podwajając wartości w nim wpisane lub wybieramy kolumnę zmniejszając jej wartości o 1. Czy można uzyskać tablicę złożoną z samych zer?
8. Na tablicy napisano liczby od 1000 do 2999. Ruch polega na wybraniu liczb a i b z tablicy, zmazaniu ich i napisaniu liczby $\frac{1}{2} \min(a, b)$. Na koniec na tablicy została jedna liczba. Udowodnij, że jest ona mniejsza od 1.
9. Na tablicy napisano liczby naturalne a_1, \dots, a_n . W jednym ruchu wybieramy dwie liczby a, b tak, że żadna nie dzieli drugiej i zastępujemy je $NWD(a, b)$ oraz $NWW(a, b)$. Udowodnij, że nie możemy tak robić w nieskończoność.

10. W Texasie istnieje n rancho sąsiadujących ze sobą. Każde z nich wspiera Demokratów lub Republikan. Danego dnia jeśli istnieje rancho, które ma więcej sąsiadów przeciwnych (do niego) niż zgodnych, zostaje przekonane do zmiany strony konfliktu (jedno rancho na raz). Udowodnij, że w pewnym momencie żadna zmiana nie będzie już możliwa.
11. Siedem pól tablicy 8×8 jest czarnych. W danej chwili możemy wybrać białe pole sąsiadujące z przynajmniej dwoma czarnymi i przemalować je na czarno. Czy istnieje początkowe ustawienie czarnych pól umożliwiające pokolorowanie całej planszy?
12. Na tablicy zapisano kolejno liczby $1, \dots, n$. Ruch polega na zamianie miejscami dowolnych dwóch liczb. Udowodnij, że nie można wykonać nieparzystej liczby ruchów końcowo wracając do wyjściowego ustawienia.