# Zadania dodatkowe

## Termin: wrzesień

**Zadanie 1.** Niech $x = 10^{10}$ oraz $y = x^x$. Ile cyfr ma liczba $y^y$?

**Zadanie 2.** Jaki jest następny wyraz ciągu: $1, 2, 4, 7, 8, 11, 14, 16, 17, 19, 22, 26, 28, 29, 41, 44$?
*Wskazówka: W opowiadaniu „Srebrny płomień” o Sherlocku Holmesie jest następujący dialog:*
*— Jest jeszcze coś, na co chciałby pan zwrócić moją uwagę?*
*— Na dziwny przypadek psa nocną porą.*
*— Pies w nocy milczał.*
*— To jest właśnie dziwny przypadek – zauważył Sherlock Holmes.*

**Zadanie 3.** Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne dodatnie, które można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb złożonych.

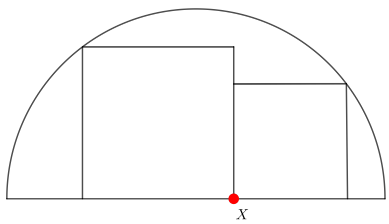
**Zadanie 4.** Niech $a, b, c, d, x$ będą takimi liczbami całkowitymi, że $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) - 4 = 0$ oraz $a, b, c, d$ są parami różne. Wykaż, że $x = \frac{1}{4}(a+b+c+d)$.

**Zadanie 5.** Czy istnieją takie liczby niewymierne $a, b$, że $a^b$ jest liczbą wymierną?

## Termin: październik

**Zadanie 6.** Pociąg Pendolino jedzie na pewnej trasie ze średnią prędkością o 25% większą niż Intercity. O ile procent krócej trwa podróż tym pociągiem?

**Zadanie 7.** Rozważmy dwa kwadraty „wpisane” w półokrąg. W którym miejscu podstawy półokręgu powinien być punkt $X$, aby suma pól kwadratów była największa?




**Zadanie 8.** Rozwiąż równanie $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$.

**Zadanie 9.** Niech $a = \sqrt[4]{2}$. Która liczba jest większa:

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}} \qquad \text{czy} \qquad 10^{10^{10}}?$$

**Zadanie 10.** Rozważmy zbiór $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$. Ile jest podzbiorów zbioru $A$, których suma elementów wynosi 2 045 247?

## Termin: listopad

**Zadanie 11.** Niech dany będzie 100-kąt foremny. Numerujemy jego boki kolejnymi dodatnimi liczbami naturalnymi. Pod jakim kątem przecinają się proste zawierające boki o numerach 88 i 99?

**Zadanie 12.** Rozważmy turniej siatkarski, w którym bierze udział 25 drużyn. Każda drużyna rozegrała z każdą dokładnie jeden mecz i nie było remisów. Niech $w_i$ oznacza liczbę wygranych drużyny $i$, zaś $p_i$ liczbę porażek drużyny $i$ dla $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$. Wykazać równość:

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + \ldots + w_{25}^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \ldots + p_{25}^2,$$

którą krócej możemy zapisać:

$$\sum_{i=1}^{25} w_i^2 = \sum_{i=1}^{25} p_i^2.$$

**Zadanie 13.** Oblicz długość boku $n$-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1.

**Zadanie 14.** Udowodnij, że jeśli $a > 0$ i $b > a + c$, to funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe.

**Zadanie 15.** Niech dany będzie wielomian $W(x) = x^5 + x^2 + 1$. Liczby $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ są jego różnymi pierwiastkami (miejscami zerowymi). Oblicz wartość wyrażenia

$$(x_1^2 - 2)(x_2^2 - 2)(x_3^2 - 2)(x_4^2 - 2)(x_5^2 - 2).$$

---

**Termin: grudzień**

---

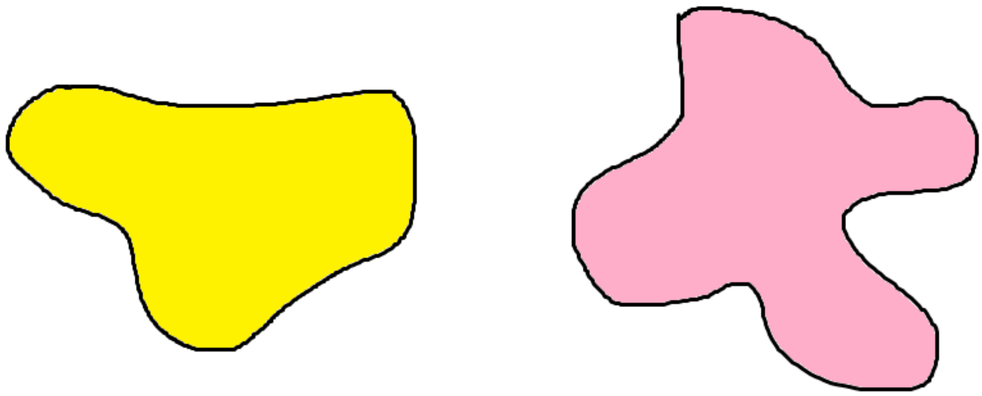
**Zadanie 16.** Określić wraz z uzasadnieniem, które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe.

1) $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}: \ y > x + 1$
2) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}: \ y > x + 1$
3) $\exists x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}: \ y > x + 1$
4) $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}: \ y > x + 1$
5) $\forall y \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}: \ y > x + 1$
6) $\forall y \in \mathbb{R}\, \exists x \in \mathbb{R}: \ y > x + 1$
7) $\exists y \in \mathbb{R}\, \exists x \in \mathbb{R}: \ y > x + 1$
8) $\exists y \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}: \ y > x + 1$

**Zadanie 17.** Pewien uczeń Sobieskiego jechał do szkoły na hulajnodze elektrycznej z prędkością 10 km/h. Z jaką prędkością powinien wracać ze szkoły, aby średnia prędkość na całej trasie (do szkoły i ze szkoły) była równa 20 km/h?

**Zadanie 18.** Oblicz $\log\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$.

**Zadanie 19.** Wykaż, że istnieje prosta, która dzieli dokładnie na pół (pod względem powierzchni) zarówno figurę żółtą jak i różową.



**Zadanie 20.** Z punktu $A(2022, 2022)$ rysujemy łamaną poprzez poprowadzenie odcinka długości 1 w jednym z dowolnych czterech kierunków (prawo, lewo, góra, dół). Kontynuujemy rysowanie poprzez dorysowanie kolejnych odcinków w jednym z czterech kierunków z punktu, w którym kończy się poprzedni odcinek. Ile jest dróg długości $n$, które kończą się na prostej o równaniu $y = 2022$?

## Termin: styczeń

**Zadanie 21.** Pewien szachista $S$ aby pojechać na turniej musi rozegrać trzy partie jedna po drugiej i wygrać dwie partie z rzędu. Jako przeciwników ma graczy $A$ i $B$. Pierwszy z nich należy do klasy mistrzowskiej, a drugi jest początkującym amatorem. W jakiej kolejności powinien z nimi grać: $A-B-A$, czy $B-A-B$?

**Zadanie 22.** Wiemy, że $a+b+c<0$ oraz równanie $ax^2+bx+c=0$ jest sprzeczne. Jaki znak ma $c$?

**Zadanie 23.** O godzinie 12:00 wskazówki zegara pokrywają się. O której godzinie pokryją się ponownie?

**Zadanie 24.** Wykaż, że ze środkowych w dowolnym trójkącie również można zbudować trójkąt.

**Zadanie 25.** Niech $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in A$. Rozwiąż równanie $\operatorname{sgn}(|f(x) - g(x)|) = 1$.

## Termin: luty

**Zadanie 26.** Rozważmy liczbę $99!^{99!}$.

- Ile zer ma na końcu ta liczba?
- Załóżmy, że jedna cyfra ma szerokość 2 mm i poruszamy się od końca tej liczby z prędkością światła w kierunku poprzednich cyfr. Po jakim czasie napotkamy pierwszą niezerową cyfrę?
- Jaka będzie ta pierwsza niezerowa cyfra bezpośrednio poprzedzająca ciąg zer?

**Zadanie 27.** Udowodnij, że liczba $\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{3}$ jest niewymierna.

**Zadanie 28.** Czy istnieje na płaszczyźnie 2023 punkty, z których każde trzy to wierzchołki trójkąta rozwartokątnego?

**Zadanie 29.** Dla jakich $n$ prawdziwa jest równość:

$$(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+\ldots+(-1)^n = (-1)^1\cdot(-1)^2\cdot(-1)^3\cdot(-1)^4\cdot\ldots\cdot(-1)^n \,?$$

**Zadanie 30.** Oblicz sumę cyfr liczby $10^{2022}-10^{2021}+10^{2020}-10^{2019}+\ldots+10^2-10^1$.

---

**Rozwiązanie 1.** Liczymy po kolei

$$y = \left(10^{10}\right)^{10^{10}} = 10^{10\cdot 10^{10}} = 10^{10^{11}}$$

. Tak więc:

$$y^y = \left(10^{10^{11}}\right)^{10^{10^{11}}} = 10^{10^{11}\cdot 10^{10^{11}}} = 10^{10^{11+10^{11}}}.$$

A zatem liczba $y^y$ ma $10^{11+10^{11}}+1$ cyfr (bo liczba $10^k$ ma $k+1$ cyfr).

**Rozwiązanie 2.** Wskazówka podpowiada nam, że warto zająć się czymś, czego nie ma, czego brakuje. W powyższym ciągu „brakuje” następujących liczb: 3,5,6,9,10,12,13,15,18,20,21,23,24,25,27, 30, 31, 32,33,34,35,36,37,38,39,40,42,43. Co je łączy? Wszystkie te liczby są powiązane z trójką i piątką: są ich wielokrotnościami lub zawierają te cyfry. Tak więc następną liczbą będzie 46.

**Rozwiązanie 3.** Zauważmy, że każdą liczbę $n$ można zapisać w postaci $n = \frac{n^3}{n^2}$. Zarówno licznik jak i mianownik są liczbami złożonymi, więc w podany sposób można przedstawić każdą liczbę naturalną dodatnią.

**Rozwiązanie 4.** Po przeniesieniu 4 na prawą stronę mamy iloczyn czterech liczb całkowitych równy 4. Co więcej liczby te są różne, bo $a, b, c, d$ były różne. Liczba 4 ma łącznie 4 różne dzielniki całkowite, więc powyższy iloczyn składa się z liczb: $-2, -1, 1, 2$. Bez straty ogólności zachodzi więc:

$$\begin{cases} x - a = -2, \\ x - b = -1, \\ x - c = 1, \\ x - d = 2. \end{cases}$$

Dodając stronami otrzymujemy $4x - (a + b + c + d) = 0$ skąd $x = \dfrac{a+b+c+d}{4}$.

**Rozwiązanie 5.** Rozważmy liczbę $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ciężko stwierdzić, czy ta liczba jest wymierna, czy nie, ale w tej chwili nie ma to znaczenia. Są jednak dwie możliwości:

- jeśli jest ona wymierna, to znaleźliśmy takie liczby $a$ i $b$, bo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
- jeśli natomiast jest ona niewymierna, to podnosząc ją do potęgi $\sqrt{2}$ otrzymamy liczbę wymierną, bowiem $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}^{2} = 2$.

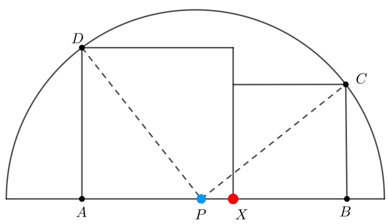
To oznacza, że takie liczby istnieją, choć z powyższego rozumowanie nie jesteśmy w stanie wskazać, która para jest dobra.
Jest to przykład dowodu niekonstruktywnego, czyli takiego, w którym dowodzimy, że coś istnieje (np. liczba, zbiór, funkcja), jednocześnie nie podając jak ten obiekt wygląda. Co ciekawe, dopiero w roku 1930 wykazano, że liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest niewymierna.

**Rozwiązanie 6.** Wprowadźmy oznaczenia:
$v_1$ – prędkość Intercity, $\quad v_2 = 1,25v_1$ – prędkość Pendolino, $\quad s_1 = s_2 = s$. Wtedy:
$t_1 = \frac{s}{v_1}$, $\quad t_2 = \frac{s}{1,25v_1}$. Zatem

$$\frac{\frac{s}{v_1} - \frac{s}{1,25v_1}}{\frac{s}{v_1}} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{1,25v_1}}{\frac{1}{v_1}} \cdot 100\% = \frac{1 - \frac{4}{5}}{1} \cdot 100\% = \frac{1}{5} \cdot 100\% = 20\%,$$

gdzie w pierwszym kroku podzieliliśmy licznik i mianownik przez $s$, a w drugim pomnożyliśmy przez $v_1$.

**Rozwiązanie 7.** Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku, przy czym $P$ jest tak wybrany na $AB$, że $|AP| = |BC|$ oraz $|PB| = |AD|$. Z twierdzenia Pitagorasa: $|PC| = |PD|$. Tak więc punkt $P$ leży na średnicy półokręgu i jest równo odległy od dwóch punktów na półokręgu. Musi być zatem środkiem tego półokręgu.
Z jednej strony $|PC| = \sqrt{a^2 + b^2}$, gdzie $a, b$ to odpowiednio boki kwadratów, a z drugiej $|PC| = r = const$. Tak więc niezależnie od długości boków dwóch kwadratów liczba $\sqrt{a^2 + b^2}$ jest stała, a zatem suma pól kwadratów, czyli $a^2 + b^2$ jest stała. Punkt $X$ można więc umieścić gdziekolwiek – szukane pole będzie zawsze wynosić tyle samo.




**Rozwiązanie 8.** Zauważmy najpierw oczywistą nierówność: $-40x \leqslant -40[x]$.
$(2x - 3)(2x - 17) = 4x^2 - 40x + 51 \leqslant 4x^2 - 40[x] + 51 = 0$.
Nierówność $(2x - 3)(2x - 17) \leqslant 0$ jest spełniona przez $x \in \left(\frac{3}{2}, \frac{17}{2}\right)$, a więc $[x] \in \left(\left[\frac{3}{2}\right], \left[\frac{7}{12}\right]\right) = [1, 8]$. To oznacza, że $x$ jest liczbą dodatnią i możemy go wyznaczyć z wyjściowego równania: $x = \frac{1}{2}\sqrt{40[x] - 51}$.
Rozważmy po kolei przypadki:

- $[x] = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{40 - 51}$ Sprzeczność,
- $[x] = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{29}$,
- $[x] = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{69}$,
- $[x] = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{109}$,

- $[x] = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{149}$,
- $[x] = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{189}$,
- $[x] = 7 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{229}$,
- $[x] = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{269}$,

Sprawdzając teraz, czy część całkowita otrzymanych *iksów* jest równa odpowiednim liczbom całkowitym (np. czy $\left[\frac{1}{2}\sqrt{109}\right] = 4$) otrzymujemy równość tylko w czterech przypadkach, dla: $x \in \left\{\frac{1}{2}\sqrt{29}, \frac{1}{2}\sqrt{189}, \frac{1}{2}\sqrt{229}, \frac{1}{2}\sqrt{269}\right\}$

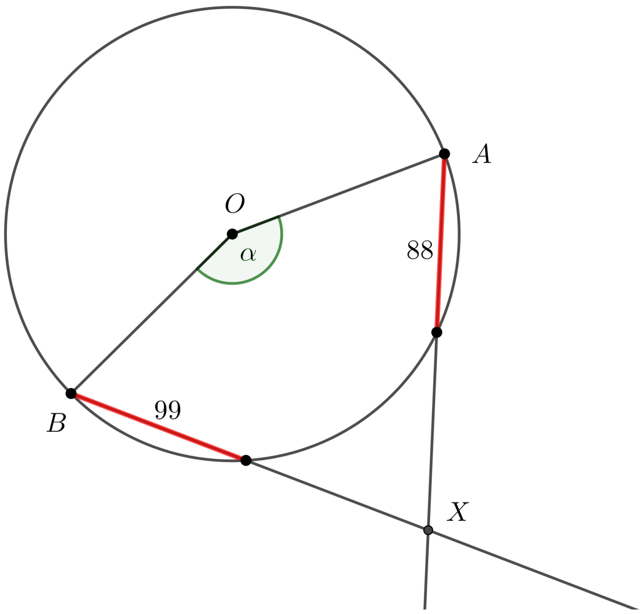
**Rozwiązanie 9.** Zauważmy, że $a^{16} = 16$, a zatem

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}} = a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}} = a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}} = \cdots = a^{a^{16}} = a^{16} = 16,$$

a więc liczba $10^{10^{10}}$ jest znacznie większa.

**Rozwiązanie 10.** Suma wszystkich elementów zbioru $A$ wynosi $\frac{1+2022}{2} \cdot 2022 = 2023 \cdot 1011 =$2 045 253. Suma elementów podzbioru zbioru $A$ będzie równa 2 045 247 $\Leftrightarrow$ suma elementów dopełnienia tego zbioru będzie równa 6. Ale takimi podzbiorami są jedynie $\{6\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}$. Takich zbiorów jest 4, a więc szukanych w zadaniu zbiorów też jest 4.

**Rozwiązanie 11.** Narysujmy promienie do końców obu boków i wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.




Stukąt można podzielić promieniami na 100 trójkątów równoramiennych, gdzie każdy ma między ramionami kąt $\frac{360^\circ}{100}$. Zaznaczony na rysunku kąt $\alpha$ jest wyznaczony przez 12 takich trójkątów – ma zatem miarę $12 \cdot \frac{360^\circ}{100} = 43{,}2^\circ$. W każdym takim trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę $\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{100}\right) : 2 = 88{,}2^\circ$. Jest to więc miara kąta $OAX$ oraz $OBX$. Zatem z sumy kątów w czworokącie $|\sphericalangle AXB| = 360^\circ - 43{,}2^\circ - 2 \cdot 88{,}2^\circ = 140{,}4^\circ$. Tak więc proste przecinają się pod kątem $140{,}4^\circ$ (lub $39{,}6^\circ$ gdy chcemy mieć kąt ostry).

**Rozwiązanie 12.** Zauważmy, że $\sum\limits_{i=1}^{25} w_i = \sum\limits_{i=1}^{25} p_i$, bo każdemu zwycięstwu odpowiada dokładnie jedna porażka. Rozpiszmy:

$$\sum_{i=1}^{25} w_i^2 - \sum_{i=1}^{25} p_i^2 = \sum_{i=1}^{25} (w_i^2 - p_i^2) = \sum_{i=1}^{25} (w_i - p_i)(w_i + p_i) = \ldots.$$

Wiemy ponadto, że dla każdego $i$ zachodzi $w_i + p_i = n - 1$ (bo to liczba gier każdego gracza). Tak więc:

$$\ldots = \sum_{i=1}^{25} (w_i - p_i)(n-1) = (n-1)\sum_{i=1}^{25} (w_i - p_i) = (n-1)\left(\sum_{i=1}^{25} w_i - \sum_{i=1}^{25} p_i\right) = (n-1) \cdot 0 = 0.$$

Przenosząc na drugą stronę otrzymujemy tezę.

**Rozwiązanie 13.** Z twierdzenia cosinusów

$$x^2 = 1 + 1 - 2\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right).$$

Zatem

$$x = \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\left(2 \cdot \frac{180^\circ}{n}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{180^\circ}{n}} = 2\left|\sin\frac{180^\circ}{n}\right| = 2\sin\frac{180^\circ}{n},$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ oraz faktu, że kąt $\frac{180^\circ}{n}$ należy do pierwszej ćwiartki.

**Rozwiązanie 14.** Rozważmy dwa przypadki:

- Jeśli $c < 0$, to $-c > 0$. Wtedy $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + 4a \cdot (-c) > 0$, a więc są dwa rozwiązania.
- Jeśli $c \geqslant 0$. Wtedy $a + c > 0$ oraz $\Delta = b^2 - 4ac > (a+c)^2 - 4ac = a^2 - 2ac + b^2 = (a-c)^2 \geqslant 0$, a więc $\Delta > 0$.

**Rozwiązanie 15.** Skoro wielomian ma 5 pierwiastków i jest stopnia 5, to możemy go zapisać w postaci $x^5 + x^2 + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$. Podstawiając $x = \sqrt{2}$ oraz $x = -\sqrt{2}$ otrzymujemy:

$$3 + 4\sqrt{2} = (\sqrt{2} - x_1)(\sqrt{2} - x_2)(\sqrt{2} - x_3)(\sqrt{2} - x_4)(\sqrt{2} - x_5)$$

oraz

$$3 - 4\sqrt{2} = (-\sqrt{2} - x_1)(-\sqrt{2} - x_2)(-\sqrt{2} - x_3)(-\sqrt{2} - x_4)(-\sqrt{2} - x_5).$$

Wyciągając znaki „–" przed nawiasy z drugiego wyrażenia, a następnie mnożąc powyższe dwie równości stronami otrzymujemy:

$$(3+4\sqrt{2})(3-4\sqrt{2}) = -(\sqrt{2}-x_1)(\sqrt{2}-x_2)(\sqrt{2}-x_3)(\sqrt{2}-x_4)(\sqrt{2}-x_5)(\sqrt{2}+x_1)(\sqrt{2}+x_2)(\sqrt{2}+x_3)(\sqrt{2}+x_4)(\sqrt{2}+x_5).$$

Stosując wzory skróconego mnożenia po obu stronach otrzymujemy

$$9 - 32 = -(2 - x_1^2)(2 - x_2^2)(2 - x_3^2)(2 - x_4^2)(2 - x_5^2).$$

Wyciągając ponownie minusy przed nawiasy po prawej otrzymujemy, że szukana wartość to $-23$.

**Rozwiązanie 16.** 1) fałsz np. dla $x = 1, y = 2$.
2) prawda, ponieważ dla dowolnego $x$ możemy przyjąć $y \coloneqq x + 2$
3) prawda np. dla $x = 2, y = 5$
4) fałsz, ponieważ gdyby taki $x$ istniał, to wzięlibyśmy $y \coloneqq x$ i byłoby $x > x + 1$ – sprzeczność.
5) fałsz np. dla $x = 6, y = 5$
6) prawda, ponieważ dla dowolnego $y$ możemy przyjąć $x \coloneqq y - 3$
7) prawda, np. dla $x = 3, y = 5$
8) fałsz, ponieważ gdyby taki $y$ istniał, to wzięlibyśmy $x \coloneqq y$ i byłoby $y > y + 1$ – sprzeczność.

**Rozwiązanie 17.** Wprowadźmy oznaczenia:
$v_1 = 10\frac{m}{s}$ – prędkość do szkoły, $v_2$ – prędkość ze szkoły, $s_1 = s_2 = s$. Wtedy:

$$v_{\text{śr}} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{10} + \frac{s}{v_2}} = 20$$

Skracając $s$ otrzymujemy:

$$\frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{v_2}} = 20.$$

$$2 = 20\left(\frac{1}{10} + \frac{20}{v_2}\right)$$

$$2 = 2 + \frac{20}{v_2}$$

$$0 = \frac{1}{v_2},$$

a zatem prędkość powrotna musiałaby być nieskończenie duża. Tak więc szukana prędkość nie istnieje.

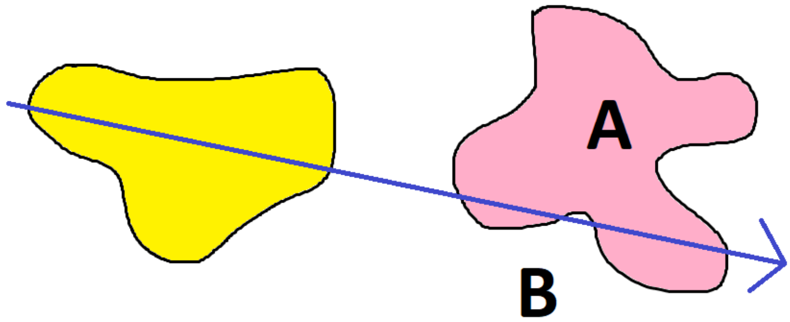
**Rozwiązanie 18.** Niech $\log\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)=x$. Z definicji:

$$10^x = \sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}} \quad |^2$$
$$10^{2x} = 3+\sqrt{5}+2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}+3-\sqrt{5}$$
$$10^{2x} = 6+2\sqrt{9-5}$$
$$10^{2x} = 6+4$$
$$10^{2x} = 10$$

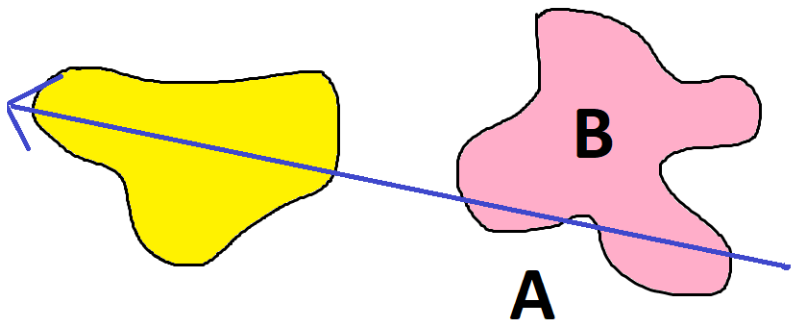
z różnowartościowości:

$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

**Rozwiązanie 19.** Narysujmy dowolną prostą, która dzieli żółtą figurę na dwie części o tym samym polu oraz wybierzmy jej zwrot (zaznaczony strzałką). Narysowana prosta podzieliła różową figurę na dwie części: $A$ po lewej i $B$ po prawej. Oczywiście jedna z części $A$ lub $B$ może być pusta.




Bez straty ogólności pole($A$)¿pole($B$). Zmieniamy następnie nachylenie prostej (obracając ją o kąt np. zgodnie z ruchem wskazówek zegara) i ponownie otrzymujemy podział różowej figury na dwie części i tak samo oznaczamy je $A$ i $B$. W pewnym momencie otrzymamy obrót o $180°$. Prosta ta pokryje się z naszą wyjściową prostą, tylko będzie mieć zwrot w drugą stronę.




Strzałka wskazuje kierunek przeciwny, więc części $A$ i $B$ zamieniły się miejscami. Na początku pole($A$)¿pole($B$), a więc teraz pole($B$)¿pole($A$). Pole zmienia się wraz z obrotem w sposób ciągły, a więc skoro najpierw różnica pól była dodatnia, a potem ujemna, to gdzieś pomiędzy musi istnieć obrót o taki kąt, że pola są równe[1]
Zadanie to jest dwuwymiarową wersją twierdzenia o kanapce z szynką i serem (które jest w trójwymiarze), mówiącego, że dowolną kanapkę z szynką i serem można przeciąć jednym cięciem tak, aby w każdej z dwóch części było dokładnie tyle samo sera, szynki i chleba.

**Rozwiązanie 20.** Wprowadźmy oznaczenia:

- ruch w lewo: 01

[1]Formalnie korzysta się tutaj z własności Darboux, która mówi, że jeśli funkcja jest ciągła oraz przyjmuje dla jakiegoś argumentu wartość dodatnią i dla jakiegoś ujemną, to między tymi argumentami jest taki, dla którego wartość funkcji jest równa 0. Tutaj naszą funkcją jest różnica pole($A$)−pole($B$).

- ruch w prawo 10
- ruch w górę: 11
- ruch w dół: 00

Wykonamy $n$ ruchów, więc utworzymy ciąg długości $2n$ składający się z cyfr 0 i 1. Skoro zaczynamy „na wysokości" 2022 i na niej chcemy skończyć, to interesują nas takie drogi, w których jest tyle samo ruchów w górę co w dół. Szukamy więc ciągów, w których jest tyle samo jedynek co zer, czyli po $n$. Wystarczy więc wybrać, na których z $2n$ miejsc ma stanąć $n$ jedynek. Można to zrobić na $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$ możliwości.

**Rozwiązanie 21.** Niech $p_A$ oznacza prawdopodobieństwo zwycięstwa z bokserem $A$, zaś $p_B$ prawdopodobieństwo zwycięstwa z bokserem $B$. Oczywiście $p_A < p_B$. Prawdopodobieństwa porażki wynoszą wtedy odpowiednio $1 - p_A$ oraz $1 - p_B$. W obu kolejnościach walk są trzy przypadki wygranej dwóch partii z rzędu: wygrana wszystkich trzech partii, wygrana pierwszej i drugiej partii, wygrana drugiej i trzeciej partii.
Wybór $A - B - A$

- trzy wygrane – prawdopodobieństwo: $p_A \cdot p_B \cdot p_A$
- wygranie pierwszych dwóch – prawdopodobieństwo: $p_A \cdot p_B \cdot (1 - p_A)$
- wygranie ostatnich dwóch – prawdopodobieństwo: $(1 - p_A) \cdot p_B \cdot p_A$

Sumując te trzy opcje otrzymujemy, że prawdopodobieństwo wygrania dwóch partii z rzędu wynosi $p_A \cdot p_B \cdot (2 - p_A)$.

Wybór $B - A - B$

- trzy wygrane – prawdopodobieństwo: $p_B \cdot p_A \cdot p_B$
- wygranie pierwszych dwóch – prawdopodobieństwo: $p_B \cdot p_A \cdot (1 - p_B)$
- wygranie ostatnich dwóch – prawdopodobieństwo: $(1 - p_B) \cdot p_A \cdot p_B$

Sumując te trzy opcje otrzymujemy, że prawdopodobieństwo wygrania dwóch partii z rzędu wynosi $p_A \cdot p_B \cdot (2 - p_B)$.
Porównując te dwa prawdopodobieństwa, większe jest w przypadku pierwszym, czyli kolejności $A - B - A$. Szachista $S$ powinien więc rozegrać dwie partie z graczem z klasy mistrzowskiej i tylko jedną z amatorem.

**Rozwiązanie 22.** Niech $f(x) := ax^2 + bx + c$. Wiemy, że $a + b + c = f(1) < 0$.

- Jeśli $a \neq 0$, to wykresem $f$ jest parabola. Funkcja ta nie ma miejsc zerowych, więc cały jej wykres znajduje się pod osią $Ox$, co oznacza, że $\forall x : \ f(x) < 0$. W szczególności $f(0) = c < 0$.
- Jeśli $a = 0$, to $f$ jest funkcją liniową stałą i $f(1) < 0$, zatem cały jej wykres (linia prosta) jest pod osią $Ox$, w szczególności $f(0) = c < 0$.

**Rozwiązanie 23.** Oczywistym jest, że wskazówki spotkają się zaraz po godzinie pierwszej. Oznaczmy przez $x$ liczbę minut, które upłyną od godziny $1:00$ do momentu spotkania wskazówek.
Tarcza zegara jest podzielona na 60 minut, tak więc wskazówka minutowa w ciągu jednej minuty wykona obrót o $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$. Wskazówka godzinowa obróci się w tym czasie o $\frac{1}{12} \cdot \frac{360^\circ}{60} = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$. Po pokonaniu pełnego obrotu przez wskazówkę minutową, musi ona przebyć jeszcze pewną drogę do spotkania ze wskazówką godzinową. O godzinie $1:00$ kąt pomiędzy wskazówkami wynosi $30^\circ$. Możemy ułożyć więc równanie:

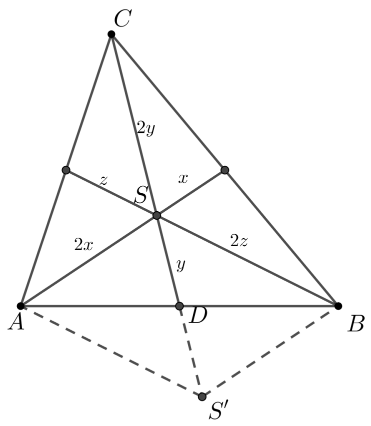
$$x \cdot 6^\circ - \left(\frac{1}{2}\right)^\circ x = 30^\circ.$$

$$5,5^\circ x = 30^\circ$$

$$x = \frac{300}{55} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$$

Wskazówki pokryją się ponownie po 1 h i $5\frac{5}{11}$ min, czyli około godziny $1:05:27$.

**Rozwiązanie 24.** Rozważmy trójkąt $ABC$ ze środkowymi długości $3x, 3y, 3z$. Środkowe przecinają się w stosunku $2:1$ licząc od wierzchołka. Niech $S'$ będzie obrazem punktu $S$ w symetrii środkowej względem środka boku $AB$ (zob. rysunek). Czworokąt $AS'BS$ jest równoległobokiem, ponieważ przekątne połowią się. Zatem $|AS'| = 2z$ oraz $|SS'| = 2x$. Trójkąt $SAS'$ ma boki długości $2x, 2y, 2x$. Skalując ten trójkąt do trójkąta podobnego w skali $k = \frac{3}{2}$ otrzymujemy trójkąt o bokach $3x, 3y, 3z$, a więc zbudowany ze środkowych trójkąta $ABC$.




**Rozwiązanie 25.** Funkcja signum przyjmuje wartość 1, dla argumentów dodatnich. Wyrażenie $|f(x) - g(x)|$ jest zawsze nieujemne, a równe 0 jest tylko w przypadku równości $f(x) = g(x)$. Równanie **nie jest** więc spełnione przez każdą liczbę $x$, taką że $f(x) = g(x)$, czyli gdy $x \in A$. Spełnione jest więc dla $x \in \mathbb{R} \setminus A$.

---

Piotr Bury