Wartość bezwzględna

Twierdzenie (interpretacja geometryczna)

- $|x|$ – odległość liczby x od 0 na osi liczbowej
- $|x-y|$ – odległość między x i y na osi liczbowej
- $|x-y| = |y-x|$

Twierdzenie

Jeśli w jest dowolnym wyrażeniem, zaś a dodatnią liczbą rzeczywistą, to:

- $|w| = a \iff w = a \lor w = -a$
- $|w| < a \iff w < a \land w > -a \iff w \in (-a, a)$
- $|w| \leq a \iff w \leq a \land w \geq -a \iff w \in [-a, a]$
- $|w| > a \iff w > a \lor w < -a \iff w \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$
- $|w| \geq a \iff w \geq a \lor w \leq -a \iff w \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$

Twierdzenie (własności wartości bezwzględnej)

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzą następujące własności:

a) $|x| \geq 0$

b) $|x| = 0 \iff x = 0$

c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

d) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (dla $y \neq 0$)

e) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (nierówność trójkąta)

f) $\sqrt{x^2} = |x|$

g) $x^2 = y^2 \iff |x| = |y| \iff x = y \lor x = -y$

h) $-|x| \leq x \leq |x|$

i) $|x|^2 = x^2$

Twierdzenie

Równanie liniowe $ax + b = 0$ ma:

- jedno rozwiązanie $\iff a \neq 0$
- zero rozwiązań $\iff a = 0 \land b \neq 0$
- nieskończenie wiele rozwiązań $\iff a = 0 \land b = 0$.

Def.

Wyznacznikiem macierzy $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ nazywamy liczbę $ad-bc$, którą oznaczamy $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ lub $\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Def.

Niech dany będzie układ równań

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}, \text{ gdzie } a_1^2+b_1^2>0, \; a_2^2+b_2^2>0$$

Definiujemy

$$W:=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \leftarrow \text{wyznacznik główny}$$

$$W_x:=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad W_y:=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Twierdzenie (Cramera)

Układ równań z powyższej definicji ma:

a) dokładnie jedno rozwiązanie $\Leftrightarrow W\neq 0$.

Jest ono dane wzorami $\begin{cases} x=\frac{W_x}{W} \\ y=\frac{W_y}{W} \end{cases}$ zwanymi wzorami Cramera.

b) nieskończenie wiele rozwiązań $\Leftrightarrow W=W_x=W_y=0$

c) zero rozwiązań $\Leftrightarrow W=0 \wedge (W_x\neq 0 \vee W_y\neq 0)$.

Def.

Wyznacznikiem macierzy $\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$ nazywamy liczbę:

$$aei+dhc+gbf-ceg-fha-ibd.$$

Przykład

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & -3 & 4 & -5 \end{array}\right| = 3-4-10+4-5+6=\underline{\underline{-6}}$$

Twierdzenie (Cramera 3×3)

Dany jest liniowy układ równań 3×3: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$, gdzie W, W_x, W_y, W_z to odpowiednie wyznaczniki układu. Wtedy

- układ ma dokładnie jedno rozwiązanie $\Leftrightarrow W \neq 0$. Wynosi ono: $x = \frac{W_x}{W} \land y = \frac{W_y}{W} \land z = \frac{W_z}{W}$.
- jeśli $W = 0 \land (W_x \neq 0 \lor W_y \neq 0 \lor W_z \neq 0)$, to układ ma zero rozwiązań (jest sprzeczny)
- jeśli $W = W_x = W_y = W_z = 0$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań lub jest sprzeczny.