MATEMATYCZNY KALENDARZ ADWENTOWY 2021

Zgodnie z ideą kalendarza adwentowego postanowiłem, podobnie jak w latach ubiegłych, również i w tym roku przygotować wersję matematyczną. Codziennie, przez 24 dni, począwszy od 1 grudnia, będę zamieszczał jedną ciekawostkę związaną z matematyką. Czasem będą to bardzo krótkie informacje, a czasem dłuższe. Chciałbym w ten sposób choć trochę uzmysłowić Wam, że matematyka nie kończy się w szkole, a w szczególności, że taka prawdziwa, ciekawa matematyka istnieje i jest zupełnie inna niż ta, której uczymy się na lekcjach matematyki. Cała akcja ma charakter popularnonaukowy i popularyzujący tę piękną, abstrakcyjną dziedzinę. Dołożyłem wszelkich starań, aby nie były to nudne informacje przepisane z pierwszej lepszej strony z ciekawostkami. Wręcz przeciwnie, chciałem, aby informacje tu przekazane były naprawdę ciekawostkami, czyli aby były zaskakujące oraz nie rozpowszechnione szeroko w mediach. Wszelkie informacje, które się tu pojawią bazują głównie na mojej własnej wiedzy, którą zdobyłem samodzielnie studiując liczne książki i opracowania. Wybór tylko 24 informacji nie będzie na pewno łatwy, zwłaszcza, że wieloma informacjami podzieliłem się z Wami rok temu. Mam gorącą nadzieję, że chociaż dla części z Was informacje, które będą się pojawiać będą ciekawe i rozwijające.

Dzień 1. W roku 2000 Instytut Matematyczny Claya ogłosił listę siedmiu problemów matematycznych, które były uważane za jedne z najważniejszych nierozwiązanych zagadnień matematycznych. Lista na nosi nazwę **Problemów Milenijnych** i zawiera: P vs. NP, Hipotezę Hodge'a, Hipotezę Poincarego, Hipotezę Riemanna, Teorię Yanga-Millsa, równania Naviera-Stokesa oraz Hipotezę Bircha i Swinnertona-Dyera. Za rozwiązanie każdego z nich z osobna wyznaczono nagrodę miliona dolarów. Do tej pory udało się rozwiązać tylko jeden z tych problemów – Hipotezę Poincarego. Co ciekawe, rozwiązanie zostało opublikowane w Internecie, a jego autor nie przyjął ani nagrody pieniężnej, ani Medalu Fieldsa – najbardziej prestiżowej nagrody matematycznej, która jest odpowiednikiem Nagrody Nobla.

Dzień 2. Długość przekątnej kwadratu o boku 1 to $\sqrt{2}$, przekątnej sześcianu o krawędzi 1 to $\sqrt{3}$. Analogicznie, przekątna jednostkowego sześcianu n-wymiarowego ma długość $\sqrt{n}$. Ze względu, że funkcja *pierwiastek* rośnie nieograniczenie ze wzrostem argumentów, to wraz ze wzrostem wymiaru sześcianu również nieograniczenie rośnie długość jego przekątnej.

Dzień 3. W matematyce mamy mnóstwo wzorów i formuł. Jedne są bardziej skomplikowane, drugie mniej. Czasami trafia się wzór, który jest nadzwyczaj urokliwy. Za najpiękniejszy wzór w matematyce uważa się

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Wzór ten nazywamy obecnie tożsamością Eulera. Dlaczego jest on tak piękny? Otóż łączy on 5 fundamentalnych stałych matematycznych $(e, i, \pi, 0, 1)$. Połączone są one trzema podstawowymi działaniami: dodawaniem, mnożeniem oraz potęgowaniem. Co więcej, każda stała występuje we wzorze dokładnie jeden raz. W tym samym plebiscycie, w którym powyższy wzór wygrał, głosowano również na najbrzydszą formułę. W tej kategorii zwyciężył wzór Ramanujana z 1904 roku przedstawiający liczbę π:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{n!^4 396^{4n}}$$

Dzień 4. Najpiękniejszy wzór w matematyce z dnia wczorajszego przypisuje się szwajcarskiemu matematykowi – Eulerowi, żyjącemu w XVIII wieku. Warte uwagi jest to, że w jego pracach możemy ten wzór znaleźć jedynie w następującej formie $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$. Wystarczyłoby więc wstawić liczbę π zamiast θ. Nie ma jednak żadnych dowodów na to, ze Euler to zrobił. Mógł uznać to za fakt oczywisty.

Dzień 5. Oznaczenie pochodnej kropką pochodzi od Newtona, „primem” od Lagrange'a, zaś $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$ od Leibniza.

Dzień 6. G.H. Hardy wierzył w Boga, ale uważał go raczej za osobistego wroga. Nie pałał do niego sympatią, więc był przekonany, że Bóg również darzył go podobnym stosunkiem. Hardy obawiał się w szczególności morskich podróży, bo Bóg mógłby z łatwością zatopić statek. Dlatego przed wyruszeniem w daleką podróż wysyłał kolegom z uczelni telegram o treści: *Udowodniłem Hipotezę Riemanna. Hardy.* Gdy przybył na ląd, cofał to twierdzenie. Po co tak czynił? Otóż uważał, że Bóg nigdy nie pozwoliłby mu umrzeć, gdyby po jego śmierci to właśnie jemu przypisywano udowodnienie tejże hipotezy.

Dzień 7. Każdy spotkał się jeszcze w szkole podstawowej z pytaniem, ile różnych siatek ma sześcian. Przypomnę, że jest ich 11 (polecam samemu je narysować). Można jednak postawić analogiczne pytanie dla wyższych wymiarów. Ile rożnych siatek trójwymiarowych ma czterowymiarowy sześcian, czyli tesserakt? To już nie jest łatwe pytanie, ale odpowiedź brzmi: 261. Jedną z takich siatek niektórzy mogli widzieć na zastępstwie, gdy opowiadałem właśnie o wyższych wymiarach. A co się dzieje w jeszcze wyższych wymiarach: piątym, szóstym itd.? Tak więc, w piątym wymiarze jest ich 9694, w szóstym 502110, w siódmym 33064966, w ósmym 2642657228. Dopiero w roku 2021 znaleziono liczbę siatek w dziewiątym i dziesiątym wymiarze i wynoszą one odpowiednio: 248639631948 oraz 26941775019280 i są zasługą matematyka Moritza Firschinga.

Dzień 8. Rozważmy dwukrotny rzut monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadnie choć raz orzeł? Oczywiście $\frac{3}{4}$, bo mamy cztery zdarzenia elementarne: OO, OR, RO, RR, z których w trzech jest przynajmniej raz orzeł. Jednak jeden ze sławnych matematyków D'Alembert zaliczył wpadkę i w Encyklopedii francuskiej z roku 1754 (Encyclopédie, Vol. IV, str. 512–513) zamieścił artykuł Croix ou Pile (Orzeł i reszka), w którym twierdził, że jeśli w pierwszym rzucie wypadnie orzeł, to nie ma już po co rzucać drugi raz, więc możliwe sytuacje są 3: O, RO, RR, więc prawdopodobieństwo wynosi $\frac{2}{3}$. Błąd w rozumowaniu polegał na tym, że te trzy zdarzenia nie są równo prawdopodobne.

Dzień 9. Liczbę rozkładającą się na parzystą liczbę czynników pierwszych nazwijmy „typu parzystego", a taką mającą nieparzystą liczbę czynników pierwszych nazwijmy „typu nieparzystego". (Na przykład 12 jest typu nieparzystego, bo $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$). Przyjmijmy również, że 1 jest typu parzystego. Wypisując kilka pierwszych liczb (zaczynając od 1) zauważymy pewną prawidłowość – typ nieparzysty występuje co najmniej tak często, jak parzysty. Zobrazujmy sobie tę sytuację jak wyścig dwóch koni: Parzystego i Nieparzystego. Za każdym razem, gdy następuje liczba typu parzystego, koń Parzysty posuwa się jeden krok do przodu i analogicznie nieparzysta. Po kolei mamy następujące prowadzenie: Parzysty, remis, Nieparzysty, remis, Nieparzysty, remis, Nieparzysty, Nieparzysty, Nieparzysty, remis, ... W roku 1919 postawiono hipotezę, że Parzysty nigdy nie będzie prowadził. W roku 1958 Brian Haselgrove udowodnił, że Parzysty kiedyś będzie prowadził, ale nie wiadomo kiedy. W roku 1980 Minoru Tanaka dowiódł, że Parzysty po raz pierwszy obejmie prowadzenie w kroku 96 150 257.

Dzień 10. W 1897 roku Edwin J. Goodwin – lekarz, który amatorsko zajmował się matematyką – przygotował propozycję ustawy, zatytułowanej *„A Bill for an act introducing a new mathematical truth and offered as a contribution to education to be used only by the State of Indiana free of cost by paying any royalties whatever on the same, provided it is accepted and adopted by the official action of the Legislature of 1897"*. Była to ustawa numer 246 stanowego zgromadzenia ustawodawczego stanu Indiana, która uprawniała stan Indiana do wyłącznego koszystania z nowej prawdy matematycznej bez żadnych kosztów. 5 lutego 1897 roku parlament stanowy Indiany przyjął uchwałę jednomyślnie w pierwszym czytaniu. Ustawa zawierała dowód wykonania kwadratury koła – zadania, którego skądinąd wiadomo, że nie da się wykonać. Pan Goodwin chciał swoje wyniki zabezpieczyć na drodze legislacyjnej. W jego rozumowaniu możemy odnaleźć „nowe" prawdy geometrii, jak chociażby różne (co najmniej 9) wartości liczby π (wszystkie nieprawidłowe). Najbardziej rzucającą się w oczy jest ta, która wynosi $3,2$, gdyż doktor Goodwin pisze: „stosunek średnicy, do obwodu koła wynosi 5/4 do 4. Zupełnym przypadkiem w parlamencie Indiany w czasie głosowania uchwały nr 246 znajdował się profesor Clarence Abiathar Waldo z Departamentu Matematyki Uniwersytetu Purdue. Profesor Waldo zdziwił się, słysząc, że parlament debatuje o matematyce. Udało mu się jednak przekonań kilku parlamentarzystów, że debatują nad kompletnym nonsensem. Gdy uchwała trafiła 13 lutego do drugiego czytania, została odroczona i cały czas zostaje w zawieszeniu.

Dzień 11. Jeśli przeglądamy się w lustrze to kontur (obrys) danego przedmiotu na lustrze jest zawsze dwa razy mniejszy niż rzeczywisty przedmiot. Co więcej, wielkość nie zależy od odległości przedmiotu od lustra(!). Jeśli mamy 180 cm wzrostu, to aby zobaczyć się w całości w lustrze (od stóp do głowy) należy użyć lustra o wysokości 90 cm. Nie ma znaczenia jak daleko staniemy od lustra. Aby czubek głowy był na samej górze należy górną krawędź lustra zawiesić dokładnie w połowie wysokości między czubkiem głowy a oczami.

Dzień 12. Nazwa „Najmocniejsze (najważniejsze, zasadnicze) twierdzenie geometrii" na twierdzenie o odcinkach stycznych narodziła się następująco. Jeden z matematyków prowadził zajęcia olimpijskie dla młodzieży i omawiał tam zadania geometryczne. Wielokrotnie wykorzystywał wspomniane twierdzenie i zażartował w stylu: „tyle razy dziś korzystaliśmy z tego twierdzenia, że moglibyśmy je nazwać najważniejszym twierdzeniem geometrii". Młodzież podchwyciła tę nazwę i rozpowszechniła. Dziś jest szczególnie popularna w Warszawie.

Dzień 13. Jako pierwszy symbolu kropki do oznaczenia mnożenia użył Gottfried Leibniz. Pisał od w liście do Johanna Bernoulliego, że nie lubi używać znaku $\times$, bo często myli mu się z x, który oznaczał niewiadomą.

Dzień 14. W 1972 roku Lorenz wygłosił wykład pt. *Czy trzepot skrzydeł motyla w Brazylii powoduje tornado w Teksasie?*. Dzięki temu wykładowi właśnie zagadnienia tam poruszane zostały nazwane efektem motyla.

Dzień 15. Znane nam dzisiaj dobrze brzmienie V postulatu Euklidesa tj. *Przez dany punkt poza prostą można poprowadzić dokładnie jedną prostą z nią rozłączną.* zostało sformułowane dopiero w roku 1785 przez Johna Playfaira.

Dzień 16. Istnieje wielomian niezerowy, który ma więcej pierwiastków niż wynosi jego stopień. Na przykład $f \in \mathbb{Z}_8[x]$ dany wzorem $f(x) = x^3$. Zbiór $\mathbb{Z}_8$ oznacza, że rozważamy jedynie reszty z dzielenia przez 8, tzn. jakąkolwiek liczbę otrzymamy, to bierzemy jedynie jej resztę z dzielenia, np. liczbę 10 utożsamiamy z liczbą 2, ponieważ reszta z dzielenia 10 przez 8 wynosi 2.

Dzień 17. Liczba 10 000 000 000 000 666 000 000 000 000 01 jest liczbą pierwszą. Nazywana jest liczbą pierwszą Belfegora. W zapisie dziesiętnym obecna jest liczba 666, znana jako liczba Bestii, otoczona z obu stron trzynastoma zerami. Belfegor to imię postaci demonicznej.

Dzień 18. Z matematycznych twierdzeń, często bardzo abstrakcyjnych, można wyciągnąć bardzo ciekawe wnioski zupełnie niezwiązane z matematyką, a dotyczące otaczającego nas życia. Na przykład przytoczmy twierdzenie Borsuka-Ulama o antypodach:
Jeśli $\mathbb{S}^n$ jest n-wymiarową sferą przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{n+1}$, to dla każdej funkcji ciągłej $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ istnieje punkt $x \in \mathbb{S}^n$, taki że $f(x) = f(-x)$.
Jakkolwiek abstrakcyjnie by ono wyglądało, to wynika z niego, że w każdej chwili istnieją na powierzchni Ziemi dwa punkty, położone idealnie po przeciwnych stronach kuli Ziemskiej, w których jest dokładnie taka sama temperatura i ciśnienie. Oczywiście w każdej sekundzie te punkty mogą się zmieniać, jednak zawsze para leży naprzeciwko siebie.

Dzień 19. Istnieją geometrie nieuklidesowe, które odrzucają nie piąty, a czwarty postulat Euklidesa (tzn. ten, który mówi, że wszystkie kąty proste są równe). Przykładem takiej geometrii jest geometria Minkowskiego i jest to geometria szczególnej teorii względności.

Dzień 20. Talię kart można potasować na
80658175170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000 sposobów.

Dzień 21. Przykład ze statystyki, który pokazuje, że posługiwanie się tą dziedziną matematyki nie jest takie proste i trzeba się na niej dobrze znać. Paradoks ten nosi nazwę **paradoksu Simpsona.**
230 osób poddano leczeniu pewnym lekiem A. Istotna poprawa nastąpiła u 65 osób. Innym 160 osobom podano lek B, uzyskując poprawę u 60 pacjentów. Który lek jest lepszy: A, czy B? Skuteczność pierwszego leku to: $60 : 230 \approx 28\%$, drugiego zaś $60 : 160 \approx 38\%$. Tak więc lek B wydaje się znacznie lepszy. I wszystko byłoby dobrze, gdyby nie zainteresowano się skutecznością obu leków oddzielnie dla kobiet i mężczyzn. Oto zestawienie:

Lek A	Leczeni	Poprawa	skuteczność [%]
mężczyzn	210	50	24
kobiet	20	15	75
ogółem	230	65	28

Lek B	Leczeni	Poprawa	skuteczność [%]
mężczyzn	100	20	20 (mniejsza)
kobiet	60	40	67 (mniejsza)
ogółem	160	60	38 (większa)

Widzimy więc, że choć ogólnie lek B wydaje się lepszy, to jednak zarówno dla kobiet, jak i mężczyzn lepszy jest lek A.
Wyjaśnienia tego paradoksu należy szukać w odpowiednim dobraniu danych. W przypadku leku A leczono aż 210 mężczyzn, a tylko 20 kobiet, przez co średnia całości jest znacznie bliższa średniej dla mężczyzn. W przypadku leku B proporcje pomiędzy liczbą kobiet i mężczyzn są lepiej zachowane, przez co średnia ogółu nie przybliża się aż tak wyraźnie do konkretnej grupy.

Dzień 22. Znak błyskawicy ↯, ⚡ (lub ↯) oznacza, że wywnioskowano fałszywe stwierdzenie. Zastępuje słowo „sprzeczność”. Innymi symbolami, które można spotkać w tym kontekście (choć znacznie rzadziej, szczególnie w Polsce) są $\Rightarrow\Leftarrow$,: ※ (który nazywa się Smash product) lub $\perp$.

Dzień 23. Jeżeli szansa na to, że zostaniemy uderzeni przed meteoryt podczas drogi do szkoły wynosi 1 : 10 000, to idąc do szkoły 10 000 razy, szansa na to, że zostaniemy trafieni wynosi aż ok. 63%.

Dzień 24. Mało kto wie, że w Krakowie znajduje się pomnik zbioru pustego. Wśród tych osób są takie, które myślą, że wiedzą gdzie on jest – ale w większości się mylą. Najczęściej wskazywanym miejscem jest charakterystyczny kwadrat z czarnego bruku, z czterema latarniami w rogach przed budynkiem Wydziału Matematyki i Informatyki UJ. To miejsce wskazuje nawet Samorząd Studentów ze wspomnianego wyżej wydziału. Prawda jest jednak trochę inna i zna ją jedynie garstka ludzi. Cała historia dotycząca powstania pomnika jest związana z faktem oddawania do użytku nowo powstałego budynku na Kampusie na Ruczaju. Nie wchodząc jednak w szczegóły, miejscem, w którym „stanął” wspomniany pomnik jest teren z tyłu budynku obok biblioteki – obecnie jest tam fontanna. Zdjęcie poniżej: