Zadania dodatkowe

Termin: wrzesień

Zadanie 1. Podać przykład figury (wystarczy rysunek), która składa się z dwóch prostokątów (ale nie jest kwadratem), ma środek symetrii oraz 4 osie symetrii.

Zadanie 2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, takie że liczba $7p^2 + 8$ jest pierwsza.

Zadanie 3. Rozważmy liczbę $1000(5\sqrt{2} - 7)^2$. Ile wynosi jej przybliżenie, gdy użyjemy standardowego przybliżenia $\sqrt{2} \approx 1,41$ wstawiając je bezpośrednio do powyższej postaci? A ile będzie wynosić to przybliżenie, gdy użyjemy kalkulatora naukowego (czyli znacznie dokładniejszego przybliżenia)? Ile będzie wynosić przybliżenie, gdy najpierw podniesiemy nawias do kwadratu ze wzoru skróconego mnożenia i wtedy wstawimy przybliżenie $1,41$? O czym świadczą otrzymane wyniki?

Zadanie 4. Czy istnieje czworościan, którego siatka jest trójkątem prostokątnym?

Zadanie 5. Rozważmy nierówności $x^2 + 1 \geqslant g(x) \geqslant -x^2 - 1$. Podaj przykład funkcji g spełniającej powyższe nierówności dla każdego x, aby:

a) g była stała,
b) g była liniowa ale nie stała,
c) istniały x_1, x_2 realizujące równość, tzn. aby wykres g był styczny do wykresu funkcji danej wzorem $y = x^2 + 1$ oraz do wykresu funkcji danej wzorem $y = -x^2 - 1$.

Termin: październik

Zadanie 6. Wykaż, że w dowolnym trójkącie środek ciężkości, ortocentrum oraz środek okręgu opisanego leżą na jednej prostej.
Wskazówka: Umieść trójkąt w układzie współrzędnych tak, by wierzchołki były na osiach Ox i Oy.

Zadanie 7. Rozważmy następujący ciąg równości:

$$\frac{23}{24} = \frac{2323}{2424} = \frac{232323}{242424} = \dots,$$

gdzie każdy kolejny ułamek powstaje przez dopisanie do licznika liczby 23, a do mianownika liczby 24. Wykazać, że możemy dowolnie długo go przedłużać i równości nadal będą zachodzić.

Zadanie 8. Niech w, k, s oznacza kolejno liczbę wierzchołków, krawędzi, ścian w wielościanie wypukłym. Czy istnieje taki wielościan, dla którego zachodzi $w \cdot k \cdot s = 2023^{2023}$?

Zadanie 9. Czy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ istnieje n kolejnych liczb naturalnych, z których wszystkie są złożone?

Zadanie 10. Rozwiąż równanie:

$$4^{\frac{1}{x}} = 6^{\frac{1}{x}} + 9^{\frac{1}{x}}$$

Termin: listopad

Zadanie 11. Rozwiąż równanie:

$$\varphi^{\ln x} + x^{\ln \varphi} = 3 + \sqrt{5}.$$

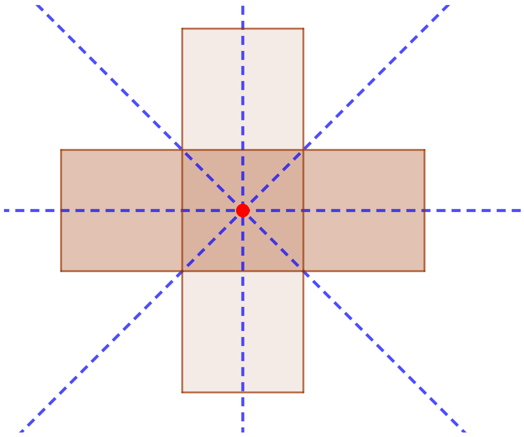
Zadanie 12. Niech $x > 0$. Oblicz $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\dots}}}}}$

Zadanie 13. Jedna z najbardziej znanych hipotez to Hipoteza Goldbacha. Mówi ona o tym, że każdą liczbę parzystą większą od 2 można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych. Wykaż, że jeśli ta hipoteza jest prawdziwa, to każdą liczbę nieparzystą większą niż 7 można przedstawić w postaci sumy trzech liczb pierwszych. Czy można uznać za prawdziwe zdanie: *„Każda liczba nieparzysta większa od 7 jest sumą trzech liczb pierwszych”?*

Zadanie 14. Czy istnieje liczba naturalna n, której iloczyn cyfr wynosi 0, a iloczyn cyfr liczby $n+1$ wynosi 1000?

Zadanie 15. Czy istnieje liczba naturalna n, której iloczyn cyfr wynosi 1000, a iloczyn cyfr liczby $n+1$ wynosi 0?

Rozwiązanie 1.



Rozwiązanie 2.

- Jeśli $p = 3$, to $7p^2 + 8 = 7 \cdot 9 + 8 = 71 \in \mathbb{P}$.
- Jeśli $p = 3k+1$, $k \in \mathbb{N}$, to $7p^2 + 8 = 7(3k+1)^2 + 8 = 7(9k^2 + 6k + 1) + 8 = 63k^2 + 42k + 15 = 3(21k^2 + 14k + 5) = 3q$ oraz $q \in \mathbb{N} \wedge n > 1$, a więc liczba ta dzieli się przez 3, więc nie jest pierwsza.
- Jeśli $p = 3k+2$, $k \in \mathbb{N}$, to $7p^2 + 8 = 7(3k+2)^2 + 8 = 7(9k^2 + 12k + 4) + 8 = 63k^2 + 84k + 36 = 3(21k^2 + 28k + 12) = 3q$ oraz $q \in \mathbb{N} \wedge n > 1$, a więc liczba ta dzieli się przez 3, więc nie jest pierwsza.

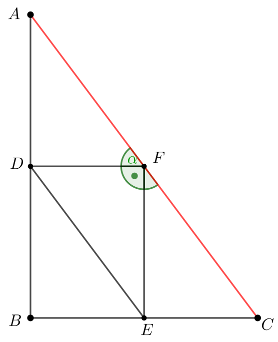
Zatem $p = 3$.

Rozwiązanie 3.

- $1000(5\sqrt{2} - 7)^2 \approx 1000(5 \cdot 1,41 - 7)^2 = 1000(7,05 - 7)^2 = 1000 \cdot 0,05^2 = \mathbf{2,5}$
- $1000(5\sqrt{2} - 7)^2 = 1000(50 - 70\sqrt{2} + 49) = 1000(99 - 70\sqrt{2}) \approx 1000(99 - 70 \cdot 1,41) = 1000(99 - 98,7) = 1000 \cdot 0,3 = \mathbf{300}$
- $1000(5\sqrt{2} - 7)^2 \approx 1000(5 \cdot 1,4142135623731 - 7)^2 = 1000(7,0710678118655 - 7)^2 = 1000 \cdot 0,0710678118655^2 \approx 1000 \cdot 0,0050506338833501 = \mathbf{5,0506338833501}$

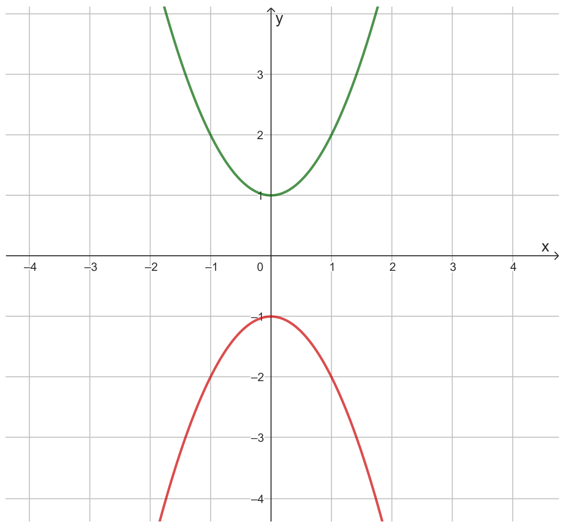
Otrzymane rozbieżności świadczą o tym, że po pierwsze różnica w przybliżeniu nawet na częściach tysięcznych może bardzo znacznie wpłynąć na wynik końcowy – dlatego m.in należy przybliżać do podanej liczby miejsc po przecinku dopiero końcowy wynik, a nie wyniki pośrednie. Po drugie, dwa pierwsze rachunku świadczą o tym, że znaczenia ma nie tylko dokładność przybliżenia, ale też to, do jakiej postaci końcowej wstawiamy przybliżenie. Z tego m.in. powodu należy usuwać niewymierność z mianownika, ponieważ przybliżanie niewymierności w mianowniku generuje większy błąd niż przybliżanie w liczniku.

Rozwiązanie 4. Nie istnieje taki czworościan. Narysujmy dowolny trójkąt prostokątny i załóżmy, że jest on naszą hipotetyczną siatką. Połączmy środki jego boków (łączymy środki, aby po sklejeniu odpowiednie krawędzie się skleiły).



Niech $|\sphericalangle AFD| = \alpha$. Wtedy $|\sphericalangle CFE| = 90^\circ - \alpha$. Ponieważ $(90^\circ - \alpha) + \alpha = 90^\circ$, to czerwone krawędzie złączą się dopiero, gdy będą płasko leżeć na podstawie, a więc po ich zagięciu nie otrzymamy ostrosłupa, a jedynie płaski trójkąt.

Rozwiązanie 5. Funkcje ograniczające szukaną funkcję g są funkcjami kwadratowymi o następujących wykresach.



Dzięki rysunkowi[1] łatwo podać przykłady:

a) $g(x) = 0$
b) $g(x) = x$

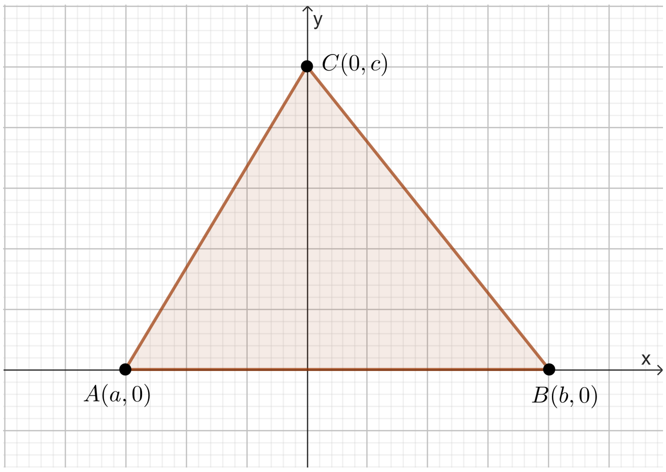
Jeśli chodzi o ostatni podpunkt, to szukamy prostej, która jest styczna do obu wykresów, tzn. ma z każdym z nich dokładnie jeden punkt wspólny. W tym celu rozwiążmy układy równań:

$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = ax + b \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x^2 - 1 \\ y = ax + b \end{cases}$

$x^2 + 1 = ax + b$ $-x^2 - 1 = ax + b$
$x^2 - ax + 1 - b = 0$ $x^2 + ax + b - 1 = 0$
Są to równania kwadratowe, więc musi zachodzić warunek $\Delta = 0$, aby był dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem. Zatem:
$\Delta_1 = a^2 - 4(1 - b) = 0$ oraz $\Delta_2 = a^2 - 4(b - 1) = 0$. Stąd $a^2 = 4(1 - b) \wedge a^2 = 4(b - 1)$. Przyrównując prawe strony otrzymujemy $1 - b = b - 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \vee a = -1$. Ostatecznie uzyskujemy dwie funkcje: $g(x) = x + 1$ lub $g(x) = -x + 1$.

[1] Łatwo też w razie potrzeby uzasadnić poprawność nierówności dzięki nietrudnemu rachunkowi.

Rozwiązanie 6. Wykorzystamy geometrię analityczną. W tym celu umieśćmy trójkąt w układzie współrzędnych tak, by dwa wierzchołki były na osi Ox i jeden na osi Oy – tak jak na rysunku. Wtedy $A(a,0), B(b,0), C(0,c)$.



- Punkt K przecięcia środkowych, czyli środek ciężkości ma współrzędne $K\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right) = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$.
- Punkt L przecięcia wysokości, czyli ortocentrum:
  Wysokość h_C zawiera się w prostej $x=0$. Wyznaczymy równanie prostej zawierającej h_B. Jest ona prostopadła do pr. BC, której współczynnik kierunkowy wynosu $a_{BC} = \frac{c}{-a} = -\frac{c}{a}$. Zatem współczynnik kierunkowy prostej zawierającej h_B wynosi $\frac{a}{c}$. Prosta ta przechodzi przez punkt B, więc
  $$0 = \frac{a}{c}\cdot b + b_h$$
  $$b_h = -\frac{ab}{c},$$
  a więc h_B zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{a}{c}x - \frac{ab}{c}$. By znaleźć punkt przecięcia wystarczy rozwiązać układ równań:
  $$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{a}{c}x - \frac{ab}{c} \end{cases}$$
  z którego otrzymujemy $L\left(0, -\frac{ab}{c}\right)$.
- Punkt M przecięcia symetralnych boków, czyli środek okręgu opisanego na trójkącie:
  Środek odcinka AB ma współrzędne $S_{AB} = \left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$, więc równanie symetralnej boku AB ma postać $x = \frac{a+b}{2}$. Środkiem boku AC jest punkt $S_{AC} = \left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$. Symetralna boku AC ma współczynnik kierunkowy równy $\frac{a}{c}$ (taki sam jak h_B) i przechodzi przez punkt S_{AC}, więc
  $$\frac{c}{2} = \frac{a}{c}\cdot\frac{a}{2} + b_s$$
  $$b_s = \frac{c}{2} - \frac{a^2}{2c} = \frac{c^2-a^2}{2c},$$
  a więc równanie tej symetralnej to: $y = \frac{a}{c}x + \frac{c^2-a^2}{2c}$. By znaleźć punkt przecięcia wystarczy rozwiązać układ równań:
  $$\begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a}{c}x + \frac{c^2-a^2}{2c} \end{cases}$$

z którego po nietrudnych rachunkach otrzymujemy $M\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{ab+c^2}{2c}\right)$.

Aby wykazać, że punkty K, L, M leżą na jednej prostej można napisać równanie prostej KL oraz sprawdzić, że punkt M na niej leży. Prościej jednak będzie wyliczyć współczynniki kierunkowe a_{LK} raz a_{LM}:

$$a_{LK} = \frac{\frac{a+b}{3} - 0}{\frac{c}{3} + \frac{ab}{c}} = \frac{a+b}{3} \cdot \frac{3c}{c^2+3ab} = \frac{(a+b)c}{c^2+3ab}$$

$$a_{LM} = \frac{\frac{a+b}{2} - 0}{\frac{ab+c^2}{2c} + \frac{ab}{c}} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2c}{ab+c^2+2ab} = \frac{(a+b)c}{c^2+3ab},$$

a więc punkty te leżą na jednej prostej. Prosta ta ma swoją nazwę – jest to **prosta Eulera.**

Rozwiązanie 7. Ułamek w dowolnym miejscu tego ciągu możemy zapisać w postaci:

$$\frac{23 + 23 \cdot 10^2 + 23 \cdot 10^4 + \ldots + \cdot 23 \cdot 10^{2k}}{24 + 24 \cdot 10^2 + 24 \cdot 10^4 + \ldots + \cdot 24 \cdot 10^{2k}},$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.
Z licznika możemy wyjąć przed nawias 23, a z mianownika 24 otrzymując:

$$\frac{23(1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2k})}{24(1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2k})} = \frac{23\cancel{(1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2k})}}{24\cancel{(1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2k})}} = \frac{23}{24},$$

co pokazuje, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ (czyli dla dowolnej długości ułamka) wynik zawsze wynosi $\frac{23}{24}$.

Rozwiązanie 8. Dla każdego wielościanu wypukłego zachodzi wzór Eulera: $w - k + s = 2$. Iloczyn $w \cdot k \cdot s = 2023^{2023}$ oznacza, że wszystkie liczby w, k, s są nieparzyste, bo prawa strona jest nieparzysta. Ponieważ różnica liczb nieparzystych jest parzysta, a suma liczby parzystej i nieparzystej jest nieparzysta otrzymujemy po lewej stronie tożsamości Eulera liczbę nieparzystą. Sprzeczność. A zatem taki wielościan nie istnieje.

Rozwiązanie 9. Tak. Są to: $(n+1)!+2, (n+1)!+3, (n+1)!+4, \ldots + (n+1)! + (n+1)$. Wszystkie są złożone, ponieważ pierwsza dzieli się przez 2, druga przez 3, trzecia przez 4 itd., a ostatnia przez $n+1$.

Rozwiązanie 10. Dziedziną równanie jest $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$4^{\frac{1}{x}} = 6^{\frac{1}{x}} + 9^{\frac{1}{x}} \quad | : 4^{\frac{1}{x}}$$

$$1 = \left(\frac{6}{4}\right)^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^2$$

Podstawimy $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = t,\ t > 0$.

$$1 = t + t^2$$

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$\Delta = 5, : \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

Zatem $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Wiedząc, że $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ możemy zapisać $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{\varphi}$. Obustronnie logarytmując otrzymujemy:

$$\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\varphi}\right)$$

$$\frac{1}{x} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\varphi}\right) = \log_{\frac{3}{2}} \varphi^{-1} = -\log_{\frac{3}{2}} \varphi$$

$$x = -\log_{\varphi}\left(\frac{3}{2}\right) = -\log_{\varphi}\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \log_{\varphi}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$\mathbb{P}$iotr $\mathbb{B}$ury