Piotr Bury 2022/23

## Zadania dodatkowe

## Termin: wrzesień

**Zadanie 1.** Niech  $x = 10^{10}$  oraz  $y = x^x$ . Ile cyfr ma liczba  $y^y$ ?

**Zadanie 2.** Jaki jest następny wyraz ciągu: 1, 2, 4, 7, 8, 11, 14, 16, 17, 19, 22, 26, 28, 29, 41, 44? Wskazówka: W opowiadaniu "Srebrny płomień" o Sherlocku Holmesie jest następujący dialog:

- Jest jeszcze coś, na co chciałby pan zwrócić moją uwage?
- Na dziwny przypadek psa nocną porą.
- Pies w nocy milczał.
- To jest właśnie dziwny przypadek zauważył Sherlock Holmes.

**Zadanie 3.** Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne dodatnie, które można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb złożonych.

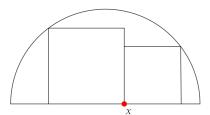
**Zadanie 4.** Niech a, b, c, d, x będą takimi liczbami całkowitymi, że (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) - 4 = 0 oraz a, b, c, d są parami różne. Wykaż, że  $x = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$ .

**Zadanie 5.** Czy istnieją takie liczby niewymierne a, b, że  $a^b$  jest liczbą wymierną?

## Termin: październik

**Zadanie 6.** Pociąg Pendolino jedzie na pewnej trasie ze średnią prędkością o 25% większą niż Intercity. O ile procent krócej trwa podróż tym pociągiem?

**Zadanie 7.** Rozważmy dwa kwadraty "wpisane" w półokrąg. W którym miejscu podstawy półokręgu powinien być punkt B, aby suma pól kwadratów była największa?



**Zadanie 8.** Rozwiąż równanie  $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$ .

**Zadanie 9.** Niech  $a = \sqrt[4]{2}$ . Która liczba jest większa:



**Zadanie 10.** Rozważmy zbiór  $A=\{1,2,3,\ldots,2022\}$ . Ile jest podzbiorów zbioru A, których suma elementów wynosi 2 045 253?

Rozwiązanie 1. Liczymy po kolei

$$y = (10^{10})^{10^{10}} = 10^{10 \cdot 10^{10}} = 10^{10^{11}}$$

. Tak więc:

$$y^y = \left(10^{10^{11}}\right)^{10^{10^{11}}} = 10^{10^{11} \cdot 10^{10^{11}}} = 10^{10^{11+10^{11}}}.$$

A zatem liczba  $y^y$  ma  $10^{11+10^{11}} + 1$  cyfr (bo liczba  $10^k$  ma k+1 cyfr).

Rozwiązanie 2. Wskazówka podpowiada nam, że warto zająć się czymś, czego nie ma, czego brakuje. W powyższym ciągu "brakuje" następujących liczb: 3,5,6,9,10,12,13,15,18,20,21,23,24,25,27, 30, 31, 32,33,34,35,36,37,38,39,40,42,43. Co je łączy? Wszystkie te liczby są powiązane z trójką i piątką: są ich wielokrotnościami lub zawierają te cyfry. Tak więc następną liczbą będzie 46.

Rozwiązanie 3. Zauważmy, że każdą liczbę n można zapisać w postaci  $n=\frac{n^3}{n^2}$ . Zarówno licznik jak i mianownik są liczbami złożonymi, więc w podany sposób można przedstawić każdą liczbę naturalną dodatnią.

**Rozwiązanie 4.** Po przeniesieniu 4 na prawą stronę mamy iloczyn czterech liczb całkowitych równy 4. Co więcej liczby te są różne, bo a, b, c, d były różne. Liczba 4 ma łącznie 4 różne dzielniki całkowite, więc powyższy iloczyn składa się z liczb: -2, -1, 1, 2. Bez straty ogólności zachodzi więc:

$$\begin{cases} x - a = -2, \\ x - b = -1, \\ x - c = 1, \\ x - d = 2. \end{cases}$$

Dodając stronami otrzymujemy 4x-(a+b+c+d)=0 skąd  $x=\frac{a+b+c+d}{4}.$ 

**Rozwiązanie 5.** Rozważmy liczbę  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ . Ciężko stwierdzić, czy ta liczba jest wymierna, czy nie, ale w tej chwili nie ma to znaczenia. Są jednak dwie możliwości:

- jeśli jest ona wymierna, to znaleźliśmy takie liczby a i b, bo  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ,
- $\bullet\,$ jeśli natomiast jest ona niewymierna, to podnosząc ją do potęgi $\sqrt{2}$ otrzymamy liczbę wymierną,

bowiem 
$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

To oznacza, że takie liczby istnieją, choć z powyższego rozumowanie nie jesteśmy w stanie wskazać, która para jest dobra.

Jest to przykład dowodu niekonstruktywnego, czyli takiego, w którym dowodzimy, że coś istnieje (np. liczba, zbiór, funkcja), jednocześnie nie podając jak ten obiekt wygląda. Co ciekawe, dopiero w roku 1930 wykazano, że liczba  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  jest niewymierna.