

UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

9 770137 300005
ISSN 0137-3005
Barcode

Nakład: 2800 egz.



SPIS TREŚCI NUMERU 4 (599) 2024

Polowanie na uroczy wielościan

Paweł Rafał Bieliński

str. 1

Zadania

str. 3

Jajko czy kura? Historia pewnej zagadki

Kacper Dębski

str. 4

Astrofotografia głębokiego nieba.

Część II – techniczna

Ireneusz Nowak

str. 6

Leonardo da Vinci i hydrodynamika

Grzegorz Łukaszewicz

str. 8

O nowościach (?) onkologicznych
Magdalena Fikus

str. 12

Filatelistyczne uroki fizyki w okienku pocztowym

Jan Swadźba

str. 13

Jak wykryć statki kosmiczne Obcych?

Fatemeh Hossein-Nouri

str. 16

Z trzema kropkami trzeba uważać...

Michał Miśkiewicz

str. 18

Klub 44

str. 20

Prosto z nieba: Wielki Pierścień to wielki problem

str. 22

Niebo w kwietniu

str. 23

Aktualności
Poetycka strona fizyki

str. 24

Potęgi dwójki
Bartłomiej Bzdęga

str. 25

W kolejnym numerze gościmy autorów z Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu. Wydział Fizyki oraz Wydział Matematyki i Informatyki UAM obchodziły niedawno jubileusz 30-lecia.



UNIwersytet
IM. ADAMA MICKIEWICZA
w POZNANIU

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej; doc. dr Piotr Chrząstowski-Wachtel; dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący; dr Wojciech Czerwiński; dr hab. Sławomir Dinew, prof. UJ; dr Tomasz Greczyło, prof. UWr; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UWr; dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański; prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący; dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński; dr hab. Krzysztof Pawłowski; dr Milena Ratajczak; dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN; prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje collegium w składzie: Michał Bejger, Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nacz., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nacz., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sek. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: deltam@imuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okiadki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem LATEX wykonała Redakcja.

Druk: Poligrafia NOT poligrafianot.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpres.pl (tylko instytucje)
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
Na stronie Empiku *Delta* można zamówić co miesiąc:
www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuly archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Polowanie na uroczy wielościan

Paweł Rafał BIELIŃSKI*

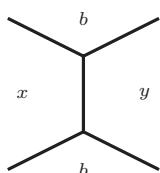
* Nauczyciel, Warszawa

Nasza saga, jak niejedna w matematyce, rozpoczyna się od stosunkowo nietrudnego zadania.

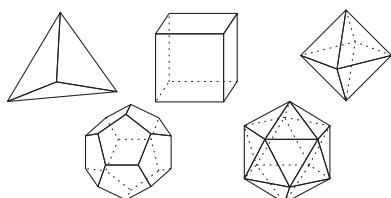
Zadanie. Na ścianach sześcianu napisano liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, każdą na dokładnie jednej ścianie. Następnie w każdy wierzchołek wpisano sumę liczb znajdujących się na ścianach sąsiadujących z tym wierzchołkiem. Czy jest możliwe, że w każdym wierzchołku otrzymano taką samą sumę?

Zadanie to ma co najmniej dwa istotnie różne rozwiązania.

Zastosowana w sposobie 1 technika nazywa się *podwójnym zliczaniem*. Skorzystamy z niej tu jeszcze kilka razy.



Rys. 1



Rys. 2

Dziękuję Antoniemu Deryło za postawienie tego brzemiennego w skutki pytania.

O niezmiennikach pisaliśmy np. w Δ_{19}^8 oraz Δ_{09}^7 .

Zapis $a|b$ oznacza, że liczba a jest dzielnikiem liczby b .

Czytelnik Wnikliwy zauważa, że argument lokalny jest skuteczny w większej ogólności niż zaproponowana w punkcie iii). Myśl tą rozwija zadanie 3b.

Sposób 1 (globalny). Ponieważ każda ściana sąsiaduje z czterema wierzchołkami, więc suma liczb wpisanych w wierzchołki danego sześcianu jest równa $4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 84$. Nie jest ona podzielna przez 8 (a tyle jest wierzchołków), zatem nie jest możliwe, by liczby w wierzchołkach były równe.

Sposób 2 (lokalny). Przypatrzmy się dowolnie wybranej krawędzi. Powiedzmy, że liczby na ścianach z nią sąsiadujących to x i y , a na ścianach, z którymi dzieli ona tylko wierzchołek, to a i b (rys. 1). Najbliższe otoczenie tej krawędzi symbolicznie przedstawia rysunek na marginesie. Sumy wpisane w wierzchołki będące jej końcami to $x + y + a$ oraz $x + y + b$. Żeby więc były równe, potrzeba i wystarczy, aby $a = b$. To jest jednak niemożliwe, bo na ścianach sześcianu napisano parami różne liczby.

Cała historia mogłaby się w tym miejscu zakończyć, gdyby nie to, że akurat w tej chwili postanowiła się zacząć. Po rozwiązaniu warto wszak podjąć refleksję nad pewnymi uogólnieniami obu metod, choćby na pozostałe wielościany foremne. Dla wygody wprowadzimy tu nowe pojęcie: dla wielościanu o S ścianach pięknym numerowaniem tych ścian nazwiemy takie napisanie na nich liczb $1, 2, 3, \dots, S$, że sumy liczb na ścianach sąsiadujących z każdym wierzchołkiem są równe.

Ćwiczenie. Ściany których wielościanów foremnych (rys. 2) można pięknie ponumerować? W których przypadkach można to pytanie rozstrzygnąć argumentem globalnym, a w których lokalnym?

Polowanie czas zacząć. Celne pytanie postawił jeden z uczniów, którzy w czasie zajęć rozwiązały podane zadanie sposobem globalnym; mianowicie: czy gdyby otrzymana suma okazała się podzielna przez liczbę wierzchołków, to świadczyłoby to o wykonalności pięknego numerowania?

Formalnie odpowiedź jest oczywiście negatywna: to, że nie widzimy przeszkód, nie świadczy jeszcze o nieistnieniu takich przeszkód. Przekonał się o tym każdy, kto rozwiązywał choćby najprostsze zadania związane z metodą niezmienników. Wprawny retor rzekłby, że brak dowodu nie dowodzi braku. Z punktu widzenia dydaktyki warto jednak nie tylko się powymądrzać, ale też zilustrować swój argument stosownym przykładem. (Dzięki temu można zresztą powymądrzać się trochę dłużej). Poszukamy więc takiego wielościanu, którego ścian nie można pięknie ponumerować, przy czym faktu tego nie można wykazać argumentem globalnym. Chcielibyśmy jednak, aby wynikał on z argumentu lokalnego – wszak jakoś musimy dowieść niemożliwości owego pięknego numerowania.

Problem. Czy istnieje wielościan o S ścianach i W wierzchołkach spełniający poniższe warunki?

- i) Istnieje liczba n taka, że każda ściana jest n -kątem;
- ii) $W | n \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + S)$;
- iii) w każdym wierzchołku spotykają się dokładnie 3 krawędzie.

Wielościan taki nazwiemy *wielościanem uroczym*.

Przyjrzyjmy się jeszcze powyższej definicji. Warunek i) gwarantuje, że argument globalny da się sformułować bez większych zmian; warunek ii) – że argument ten zawodzi; wreszcie dzięki iii) skuteczny jest argument lokalny, w szczególności dany wielościan istotnie nie dopuszcza pięknego numerowania ścian.

10 - 12 MAJA 2024
WMI UAM POZNAŃ



θβℓicΖε

OGÓLNOPOLSKA
KONFERENCJA
STUDENTÓW
MATEMATYKI

Koło Naukowe Matematyków UAM serdecznie zaprasza na XI edycję Ogólnopolskiej Konferencji Studentów Matematyki θβℓicΖε, która odbywa się będzie 10-12 maja 2024 r. na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. W tym roku z dedykowaną Sesją Informatyczną! Więcej informacji na stronie <http://oblicze.edu.pl/>.

Niestety przykładu wielościanu uroczonego podczas tej lekcji nie znaleziono, mimo że uczniowie, zachęceni obietnicą szóstek, czekoladek i uścisów dloni, wypróbowali szereg rozmaitych pomysłów. Słowem – konieczne okazało się wezwanie artylerii.

Rysopis poszukiwanego. Poszukiwania wielościanu zaczniemy od zdobycia o nim dodatkowych informacji. Na przykład, skoro każda ściana wielościanu uroczonego jest n -kątem (pierwszy warunek), a każda krawędź przylega do dwóch ścian, to $nS = 2K$ (ponownie stosujemy zasadę podwójnego zliczania), gdzie K jest liczbą jego krawędzi. Podobnie z warunku iii) mamy, że $2K = 3W$.

Powszechnie znany jest wzór na kolejne *liczby trójkątne*:

$$1 + 2 + 3 + \dots + S = \frac{1}{2}S(S + 1).$$

Przekształcając równoważnie warunek ii), otrzymujemy kolejno: $W \mid n \cdot \frac{1}{2}S(S + 1)$, $2W \mid nS(S + 1)$, $2W \mid 3W(S + 1)$, $2 \mid 3(S + 1)$, $2 \mid S + 1$. Zatem S jest liczbą nieparzystą. Wiemy zaś, że $nS = 2K$, więc n musi być liczbą parzystą.

Podsumujmy nasze wnioski.

Stwierdzenie. Wielościan o S ścianach n -katnych, K krawędziach i W wierzchołkach jest uroczy wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:

- i') n jest liczbą parzystą;
- ii') S jest liczbą nieparzystą;
- iii) w każdym wierzchołku spotykają się dokładnie 3 krawędzie.

Ponadto zachodzi wówczas równość $nS = 2K = 3W$.

Stwierdzenie to samo w sobie stanowi dramatyczne uproszczenie wcześniejszej definicji wielościanu uroczonego. Bezpośrednie poszukiwania nadal jednak nie przynoszą skutku. Może więc uda się w jakiś sposób wykluczyć istnienie wielościanów uroczych?

Detektyw Euler na pomoc. Spróbujmy zastosować słynny wzór Eulera.

Twierdzenie (wzór Eulera). Jeżeli w dowolnym wypukłym wielościanie oznaczymy przez S liczbę ścian, przez K – liczbę krawędzi, a W – liczbę wierzchołków, to spełniona jest zależność $S + W = K + 2$.

Jest to już kolejna napotkana przez nas zależność wiążąca S, K, W . Podstawiwszy do niej spełnione w uroczym wielościanie równości $K = \frac{1}{2}nS$ oraz $W = \frac{1}{3}nS$, wnioskujemy, że $S + \frac{1}{3}nS = \frac{1}{2}nS + 2$. Stąd, po prostych przekształceniach, otrzymujemy równość $S \cdot (6 - n) = 12$.

Z otrzymanej równości wynika, że S jest dzielnikiem liczby 12. Oczywiście jako liczba ścian pewnego wielościanu $S \geq 4$. Jedynymi możliwymi wartościami S są więc 4, 6, 12 – same liczby parzyste. Nie może być zatem spełniony warunek ii'), a w konsekwencji nie może istnieć wypukły wielościan uroczy.

Powyższe rozważania pokazują, że zależności podobne do wzoru Eulera mogą być bardzo użyteczne. Musimy jednak przenieść poszukiwania na inne obszary.

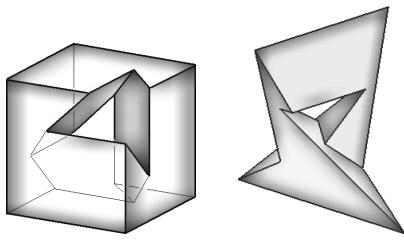
Koło ratunkowe. Szczęśliwie się składa, że odpowiedniki wzoru Eulera istnieją także dla wielościanów niewypukłych. Kluczową charakterystyką wielościanu jest jego *genus*, który można rozumieć – przynajmniej na poziomie intuicyjnym – jako liczbę dziur owego wielościanu.

Twierdzenie (ogólny wzór Eulera). Dla wielościanu genusu g o S ścianach, K krawędziach i W wierzchołkach zachodzi związek $S + W = K + 2(1 - g)$.

Podobnie jak ostatnio, dla uroczego wielościanu genusu g otrzymujemy stąd

$$S(6 - n) = 12(1 - g).$$

Na swój sposób obiecującą wygląda więc przypadek $g = 1$, w którym prawa strona tej równości jest równa 0, zatem musi zachodzić $n = 6$, za to S może być dowolną liczbą. Ta swoboda daje nadzieję na owocne poszukiwania.



Wielościany Szilassiego

Przedstawiony rysunek prawdopodobnie nie jest przekonującym dowodem istnienia wielościanu Szilassiego. Autor zacheć do wykonania modelu – gotowe siatki są dostępne w Internecie. Warto też zajrzeć do wspomnianej pracy, w której przedstawione są szczegółowe obliczenia.

Zadania

1. Rozwiąż zadanie o pięknym numerowaniu ścian sześcianu sposobem innym niż dwa przedstawione na początku artykułu. Dla jakich innych wielościanów można go zastosować?
2. Jak zmodyfikować treść zadania o pięknym numerowaniu ścian sześcianu (inaczej niż zmieniając wielościan), tak aby nadal można je było rozwiązać sposobem lokalnym, ale nie globalnym?
3. Wykaż, że nie jest możliwe piękne ponumerowanie ścian: a. żadnego graniastosłupa; b. żadnego ostrosłupa.

Teraz, po zawężeniu obszaru poszukiwań do wielościanów „z jedną dziurą” i o sześciokątnych ścianach, możemy poprosić o pomoc wyszukiwarkę internetową. Istotnie, z jej pomocą udało się znaleźć nie jeden, ale dwa urocze wielościany! Oba zostały odkryte przez Lajosa Szilassiego i opisane w pracy z 1986 r.

Pierwszy wielościan ma znacznie prostszą strukturę – to zwykły sześciian z chytrze wydrążoną dziurą. Jednak to ten drugi został zapamiętany jako *wielościan Szilassiego*. Ma on szereg innych interesujących własności. Na przykład każda jego ściana sąsiaduje z każdą z pozostałych, co jest najgorszą możliwą sytuacją dla pięknego numerowania ścian. Wśród wielościanów jest to zjawisko niesamowicie rzadkie.

Szereg dalszych i pobocznych rozważań zawarty jest w zamieszczonych poniżej zadaniach i ich rozwiązanach na stronie deltami.edu.pl.

4. Wykaż, że każdy wielościan wypukły ma ścianę, która jest wielokątem o co najwyżej pięciu bokach.
5. Znajdź wielościan, który ma dokładnie 16 ścian, 32 krawędzie i 16 wierzchołków.
6. Wykaż, że nie istnieje uroczy wielościan genu 2 ani 3.
7. Wykaż, że nie istnieje uroczy wielościan genu $2^k + 1$, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną.
8. Ile ścian może mieć uroczy wielościan genu 4?
9. Wykaż, że każdy wielościan uroczy ma co najmniej 7 ścian.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1777. Dana jest nieparzysta funkcja rosnąca f . Udowodnić, że dla dowolnych liczb a, b, c o sumie zerowej zachodzi nierówność

$$f(a)f(b) + f(b)f(c) + f(c)f(a) \leq 0.$$

Rozwiązanie na str. 10

M 1778. Dane są liczby całkowite $0 < a < b < c < d$. Udowodnić, że

$$\text{NWD}(a! + 1, b! + 1, c! + 1, d! + 1) < d^{\frac{d-a}{3}}.$$

Rozwiązanie na str. 9

M 1779. Dany jest wielokąt, którego każde dwa sąsiednie boki są prostopadłe. Dwa z jego wierzchołków nazywamy *wrogimi*, jeśli dwusieczne kątów wielokąta wychodzące z tych wierzchołków są prostopadłe. Wykazać, że dla dowolnego wierzchołka liczba wrogich mu wierzchołków jest parzysta.

Rozwiązanie na str. 20

Przygotował Andrzej MAJHOFER

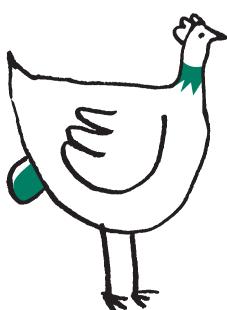
F 1093. Komin ma wysokość $H = 50$ m. Temperatura gazu w kominku $T_K = 350$ K, a temperatura powietrza na zewnątrz $T_0 = 270$ K. Oszacuj prędkość, z jaką ciepły gaz wydostaje się z komina. Przyspieszenie ziemskie $g \approx 10 \text{ m/s}^2$. Dla uproszczenia przyjmujemy, że na zewnątrz i wewnątrz komina mamy powietrze (ten sam gaz).

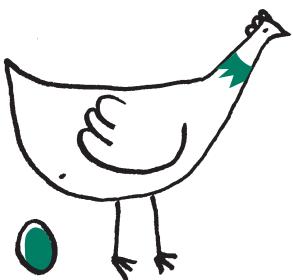
Wskazówka: Spowodowane grawitacją zmiany gęstości powietrza do wysokości 50 m można pominać.

Rozwiązanie na str. 12

F 1094. Zabytkowy zegar szafkowy ma wahadło wykonane z mosiądzu. Chód zegara został dokładnie wyregulowany w temperaturze $t_1 = 25^\circ\text{C}$. Zimą w pomieszczeniu, w którym stoi zegar, panuje temperatura $t_2 = 18^\circ\text{C}$. Czy zimą zegar spieszy się, czy późni? Po jakim czasie odstępstwo wskazań od dokładnego czasu przekroczy 1 minutę? Współczynnik rozszerzalności termicznej mosiądzu $\beta = 19 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Rozwiązanie na str. 19





Jajko czy kura? Historia pewnej zagadki

Kacper DEBSKI

Doktorant na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Chyba każdy z nas nie raz słyszał tę słynną zagadkę. Okazuje się, że to pozornie proste pytanie porusza bardzo ciekawy problem związany z pojęciem przyczyny i skutku, ale także samej natury czasu – jeżeli tylko odpowiednio się temu przyjrzymy.

Od niepamiętnych czasów ludzie zastanawiali się, gdzie tkwi koniec łańcucha przyczynowo-skutkowego łączącego narodziny kury wykluwającej się z jajka z samym procesem powstania jajka, stworzonego w ciele jakiejś innej kury. Ta zagadka, będąca częścią antycznego folkloru [1], choć tylko jako ciekawostka, stała się później zagadnieniem nie raz analizowanym przez poważnych filozofów pokroju Arystotelesa czy Plutarcho. W ich czasach pytanie to stanowiło metaforę dla głębszych rozważań nad naturą rzeczywistości. Arystoteles, na przykład, używał tej zagadki jako ilustracji dla swojej teorii o potencjalności i aktualności, sugerując, że odpowiedź na pytanie o to, co było pierwsze, jajko czy kura, zależy od perspektywy, z jakiej patrzymy na cykl życia.

Nie wszyscy filozofowie pochyliły się nad tym problemem, ale pozwalając sobie na odrobinę fantazji, można spekulować, co różni myśliciele mogliby o tym sądzić. Wielu z nich poruszało podobne kwestie, choć nie zawsze bezpośrednio. Nie każdy filozof jest Arystotelem, gotowym otwarcie dyskutować o jajkach i kurach, prawda?

Immanuel Kant, podchodząc do zagadki z perspektywy swojej filozofii krytycznej, mógłby argumentować, że zarówno jajko, jak i kura są częścią świata zjawiskowego, postrzeganego przez pryzmat naszych wewnętrznych kategorii. Według niego prawdziwa natura tej relacji przyczynowo-skutkowej jest poza zasięgiem ludzkiego poznania.

David Hume, jako empirysta, mógłby podchodzić do zagadki z perspektywy doświadczenia i percepji. Mógłby argumentować, że nasze rozumienie relacji przyczynowo-skutkowej między jajkiem a kurą jest wynikiem naszych nawyków i doświadczeń, a nie odkrycia jakiejś wewnętrznej prawdy o naturze. Według Hume'a nie możemy mieć pewności co do prawdziwej natury tej relacji, ponieważ nasze poznanie jest zawsze ograniczone przez subiektywne doświadczenie. Fryderyk Nietzsche prawdopodobnie skupiłby się na aspekcie woli mocy i przetrwania w kontekście ewolucji. Mógłby argumentować, że zagadka „jajko czy kura?” jest przejawem ludzkiego dążenia do nadawania sensu i porządku w chaotycznym świecie. W jego interpretacji zagadka ta mogłaby symbolizować ciągły rozwój i przewyściżanie starych form przez nowe w nieustannym procesie stawania się i przemiania.

Ludwig Wittgenstein z kolei mógłby podchodzić do zagadki tej jako problemu językowego. W jego filozofii język i sposób, w jaki formułujemy pytania, mają kluczowe znaczenie. Mógłby zasugerować, że pytanie „co było pierwsze: jajko czy kura?” jest błędne lub niejasne z językowego punktu widzenia i że poszukiwanie

odpowiedzi jest bezsensowne bez jasnego zdefiniowania, co rozumiemy przez „jajko” i „kurę”.

Z punktu widzenia współczesnej biologii pytanie o to, co było pierwsze – jajko czy kura, nie jest już tak problematyczne, jak mogłoby się wydawać. Rozwój nauk biologicznych, szczególnie w dziedzinie genetyki i teorii ewolucji, pozwala nam zrozumieć, że przed pojawiением się kur istniały inne gatunki ptaków – ich przodków – które również wylegały się z jajek. Wynika z tego, że pierwsza kura, znana nam dzisiaj, wykluła się z jajka. Jednakże to jajko zostało złożone przez stworzenie, które,ściśle rzecz ujmując, nie było jeszcze kurą, lecz gatunkiem przodka kur. W wyniku stopniowych zmian genetycznych w sekwencji DNA tego przodka doszło do narodzin pierwszej kury w dzisiejszym rozumieniu tego gatunku [2].

Paradoksalnie w tej zagadce najważniejsze nie jest samo rozwiążanie, ale mnogość interpretacji, które można przeanalizować. Wróćmy teraz do mniej spekulatywnej części naszej dyskusji, aby wspomnieć o tym, że postrzeganie przyczynowości jest głęboko zakorzenione w naszym umyśle. Postrzeganie powiązań pomiędzy zdarzeniami jako łańcuchów przyczynowo-skutkowych jest w pewnym sensie równoznaczne z naszym postrzeganiem czasu. To właśnie na tej zasadzie nasi przodkowie wymyślili koncepcję liczenia lat. Obserwując regularne zmiany zachodzące w przyrodzie, byli w stanie wywnioskować, że te zmiany pojawiają się z pewną regularnością. Jednakże idea czasu, którą w ten sposób stworzyli, różni się znacząco od tego, co współcześnie rozumiemy pod tym pojęciem. Cykliczność zmian w świecie przyrody sugerowała im, że czas również może mieć naturę cykliczną, która lepiej obrazuje okrąg niż linia, jaką przyjmujemy we współczesnym myśleniu.

W naszej cywilizacji to dopiero tradycja judeochrześcijańska wprowadziła ideę linearnego postrzegania czasu, jako zjawiska mającego swój początek i koniec. W kontekście cyklicznego postrzegania czasu pytanie o pierwszą przyczynę traci na znaczeniu, podobnie jak pytanie o początek obręczy. Natomiast myślenie w kategoriach czasu jako linii otwiera drogę do zadawania pytań o początek i koniec, chociaż i tutaj można przypuszczać, że linia ta rozciąga się w nieskończoność.

Z punktu widzenia naszych rozważań ciekawą koncepcję prezentował w swojej filozofii przywoływany już wcześniej Fryderyk Nietzsche. Uważał on, że czas ma charakter cykliczny, czyli dokładnie tak, jak uczyli starożytni. Jego koncepcja, znana jako wieczny powrót, zakłada, że wszystkie zdarzenia w naszym Wszechświecie powtarzają się nieskończonie

w identyczny sposób. Ta idea, chociaż filozoficzna, niesie ze sobą głębokie implikacje dotyczące naszego postrzegania rzeczywistości i naszego miejsca w niej. W kontekście zagadki „jajko czy kura?” Nietzscheńska idea cykliczności sugerowałaby, że pytanie o „pierwszość” jest w pewnym sensie bez znaczenia, ponieważ w jego koncepcji wszechświatowej pętli każde zdarzenie, zarówno powstanie jajka, jak i narodziny kury, nieustannie się powtarza.

Co ciekawe, pomysł ten w bardzo podobnej formie pojawił się również jako matematycznie ugruntowana teoria w ramach mechaniki klasycznej. Tak zwana teoria o powracaniu Poincarégo, opracowana przez francuskiego matematyka Henriego Poincarégo, mówi, że w określonych warunkach systemy dynamiczne po wystarczająco długim czasie mogą powrócić do stanu dowolnie podobnego do początkowego. W kontekście naszych rozważań teoria ta wprowadza fascynującą perspektywę na kwestię czasu i przyczynowości, sugerując, że w skali kosmicznej, zarówno przeszłość, jak i przyszłość mogą być ściślej ze sobą powiązane, niż moglibyśmy przypuszczać. W ten sposób zagadnienie „jajko czy kura?” nabiera nowego wymiaru, gdy myślimy o nim w kontekście nieskończonych powtórzeń i powracających cykli czasowych.

Jakby tego było mało, swoje trzy grosze do dyskusji może dodać także mechanika kwantowa. Przez moment wyobraźmy sobie innego słynnego filozofa, Blaise'a Pascala, znanego ze swojego zamiłowania do hazardu. Pascal, który nawet pytanie o istnienie Boga potrafił przedstawić jako zakład bukmacherski, przypuszczalnie podobnie podszedłby do tytułowego pytania. Mógłby powiedzieć, że to tylko kwestia prawdopodobieństwa, że jedna z odpowiedzi jest poprawna, i że zawsze można rzucić monetą, gdy nie wiemy, którą odpowiedź wybrać. W końcu to zawsze jakieś podejście, gdy nie wiemy, co zdecydować. W przypadku zwyczajnej monety oczywiście prawdopodobieństwo wypadnięcia orła albo reszki jest równe i szanse na to są po 50%. W związku z tym hipotetyczny Blaise Pascal z prawdopodobieństwem 50% wybierze odpowiedź, że to jajko było pierwsze, bazując na tej samej logice.

Okazuje się jednak, że kiedy mamy do czynienia z monetą kwantową, cała sprawa staje się jeszcze bardziej skomplikowana. W świecie mechaniki kwantowej, znanym z paradoksu Schrödingera o kocie,

który jest jednocześnie żywy i martwy, moneta może również znajdować się w stanie superpozycji, oznaczającym, że jednocześnie wskazuje orła i reszkę. W takim przypadku nasz kwantowy Blaise Pascal mógłby twierdzić, że pierwsze było tak jajko, jak i kura. Może się to wydawać tylko umysłową ekwilibrystyką, bo przecież w rzeczywistości istniała konkretna odpowiedź, a nasz kwantowy filozof po prostu nie może się zdecydować na żadną z opcji. Jednak prawda jest jeszcze bardziej zaskakująca. Okazuje się, że gdy zaczynamy rozważać związki przyczynowo-skutkowe na pograniczu mechaniki kwantowej i teorii względności, tradycyjna chronologia może przestać mieć znaczenie.

Skąd bierze się zależność zmiany kolejności zdarzeń pod wpływem mechaniki kwantowej i teorii względności? Kluczowe jest połączenie dylatacji czasu z superpozycją kwantową. Dylatacja czasu występuje zarówno w formie kinematycznej, gdy zegary poruszają się z dużą prędkością, jak i grawitacyjnej, gdzie zegary umieszczone są w pobliżu silnych źródeł grawitacji, takich jak czarne dziury. Dylatacja czasu sprawia, że np. zegary umieszczone w silnym polu grawitacyjnym zwalniają zgodnie z zasadami ogólnej teorii względności.

Rozważmy teraz dwa zsynchronizowane zegary, każdy z przymocowanymi fajerwerkami – jeden strzelający żółtą, a drugi niebieską kaskadą iskier. Po umieszczeniu ich w pobliżu czarnej dziury zegar będący bliżej niej zwolni wskutek dylatacji czasu. Jeśli bliżej czarnej dziury jest zegar z niebieskimi fajerwerkami, to dla odległego obserwatora jako pierwszy wystrzeli ten z żółtymi iskrami. Dzieje się tak, ponieważ zegar znajdujący się dalej od czarnej dziury tyka szybciej, co skutkuje szybszą detonacją fajerwerków. Odwracając sytuację, tzn. gdy czarna dziura jest bliżej zegara z żółtymi fajerwerkami, wtedy pierwszy wystrzelą niebieskie iskry. Ten prosty przykład pokazuje, jak teoria względności może wpływać na kolejność zdarzeń. Kiedy włączymy do tego wszystkiego mechanikę kwantową, sytuacja staje się jeszcze bardziej skomplikowana, a zarazem fascynująca. Wystarczy tylko wyobrazić sobie kwantową czarną dziurę, a wszystko stanie się zupełnie jasne! Niech nasza czarna dziura – podobnie jak kot Schrödingera, który jest jednocześnie żywy i martwy, oraz moneta Pascala wskazująca jednocześnie orła i reszkę – będzie teraz jednocześnie po obu stronach zegarów.

Zgodnie z mechanizmem detonacji fajerwerków opisany powyżej oznacza to, że kolejność zdarzeń (wybuchów) również musi znajdować się w superpozycji, mogąc występować w dwóch wariantach jednocześnie. Jest to przykład tzw. nieokreślonego porządku czasowego (ang. *indefinite temporal order*), który rzuca nowe światło na nasze rozumienie przyczynowości i zagadkę „jajko czy kura?” w świecie kwantowym. Fizyka współczesna uczy nas, że istnieją 3 możliwości, że dwa zdarzenia, które zazwyczaj występują jedno po drugim, mogą zamienić się kolejnością, a nawet występować w dwóch alternatywnych kolejnościach jednocześnie. Oznacza to, że w kwantowym rozumieniu przyczynowość nie zawsze musi podążać za linią czasu, otwierając drzwi do nowego sposobu myślenia o zagadkach typu „jajko czy kura?”. W ten sposób starożytna zagadka staje się oknem na głębokie rozważania o naturze rzeczywistości, pokazując, jak pytania, które wydają się proste, mogą prowadzić do złożonych i fascynujących dyskusji.

Literatura

- [1] Roy A. Sorensen, *A Brief History of the Paradox: Philosophy and the Labyrinths of the Mind*, New York: Oxford University Press USA.
- [2] Roy A. Sorensen, *The Egg Came Before the Chicken*, Mind, Volume 101, Issue 403, July 1992, Pages 541–542, <https://doi.org/10.1093/mind/101.403.541>.
- [3] Kacper Dębski, Magdalena Zych, Fabio Costa, Andrzej Dragan, *Indefinite temporal order without gravity*, Phys. Rev. A 108, 062204.

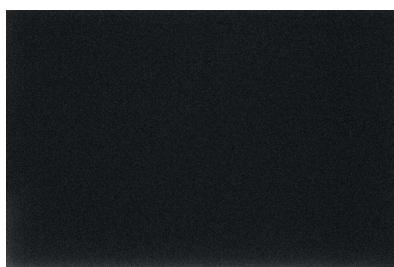
Astrofotografia głębokiego nieba. Część II – techniczna

Autor fascynuje się astronomią od 15 lat. W astrofotografii stawia na proste, dostępne dla amatorów rozwiązania, eksperymentując przy tym i starając się pokazać wybrane obszary nieba w nowy sposób, co zostało dostrzeżone m.in. przez jury międzynarodowego konkursu

AstroCamera, w którym w 2023 roku uzyskał główną nagrodę w kategorii „Obiekty głębokiego nieba”.

O węzyku pisałem w poprzednim artykule. Dla przypomnienia – jest to urządzenie, które pozwala nam na programowanie czasu ekspozycji zdjęć. Zamiast węzyka dobrze sprawdzi się też laptop lub tablet z odpowiednim oprogramowaniem.

Warto zadbać, aby klatki kalibracyjne były wykonane w tym samym ISO co klatki z obrazem nieba.



Przykładowa klatka dark



Przykładowa klatka flat

Im dłuższa ogniskowa obiektywu, tym więcej wyzwań związanych z precyzją pracy montażu paralaktycznego, a wymagania rosną w tempie geometrycznym wraz ze wzrostem jej długości. W praktyce, do 100–135 mm ogniskowej, dobre ustawienie na biegun północny i dobre wyważenie zestawu zainstalowanego na montażu są wystarczające do uzyskania satysfakcjonującego efektu.

Ireneusz NOWAK

W części pierwszej tego artykułu, opublikowanej w Δ_{24}^3 , opisywałem teorię astrofotografii. Teraz pora przejść do praktyki. A ta składa się z kilku podstawowych elementów. Na początek techniczna obróbka zdjęcia.

Zbieranie materiału – akwizycja

Astrofotografia jest dość dziwną dziedziną fotografii, gdyż materiał źródłowy i zdjęcie końcowe na pierwszy rzut oka niewiele mają ze sobą wspólnego. Zdjęcia gwiazd są bardzo jasne i wyraźne – co przekłada się między innymi na to, że jasność gwiazd jest głównym elementem, do którego dobiera się czas ekspozycji. Niestety poziom sygnału związany z „nie-gwiezdnyimi” obiektyami głębokiego nieba jest na tyle szczegółowy i słaby, że detale ledwo rejestrują się w obrazie pojedynczej klatki. Do tego są one często zniekształcone przez szum, jaki generuje matryca, oraz układy elektroniczne aparatu.

Co zatem można zrobić, aby pozbyć się zakłóceń, zwiększyć szczegółowość zdjęcia i uzyskać obraz obiektów głębokiego nieba? Podstawowym sposobem na zwiększenie poziomu sygnału względem szumu w obrazie jest wykonanie **jak największej ilości ekspozycji** tego samego obszaru nieba. Dynamiczne zmiany w obiektach głębokiego nieba są niezwykle rzadkie, więc astrofotografie to często uśredniony wynik dziesiątek, a nawet i setek ekspozycji. Tu nie ma żadnej magii, ustaviamy kadr, programujemy węzyk i wykonujemy wielokrotne ekspozycje. Generalnie – im więcej uzyskamy materiału, tym większa jest szansa na lepszą jakość zdjęcia końcowego.

Ale to nie wszystko. Istnieje pełna gama zakłóceń wpisanych w wykonane przez nas zdjęcia nieba. Możemy je usunąć albo przynajmniej mocno zredukować, wykonując odpowiednie **klatki kalibracyjne**. Można wyróżnić ich trzy rodzaje:

- Klatki kalibracyjne *bias* to seria zdjęć wykonanych przy zakrytym obiektywie i krótkim czasie ekspozycji (1/1000, 1/250) – im więcej ich będzie, tym lepiej. Te klatki rejestrują stan początkowy pikseli z matrycy wzbogacony o szum odczytu.
- Klatki ciemne (tzw. *darki*) to zdjęcia wykonane z zakrytym obiektywem i tym samym czasie naświetlania co późniejsze zdjęcia nieba – znów, im ich jest więcej, tym lepiej – te klatki służą do zebrania informacji, ile sygnału pojawiło się w pikselach bez rejestracji światła wpadającego przez obiektyw. Tak naprawdę darki zawierają w sobie te same informacje co te zapisane w klatkach bias, a ponadto szum termiczny matrycy per piksel. Zarówno biasy, jak i darki powinny być wykonane w tych samych warunkach co ekspozycje nieba, gdyż poziom szumów w elektronice jest zależny od temperatury otoczenia.
- Klatki „płaskiego pola” (ang. *flat frames*), nazywane w dalszej części artykułu *flatami*, to zdjęcia płaskiej, równomiernie oświetlonej powierzchni. Celem tych zdjęć jest zarejestrowanie poziomu tlumienia sygnału, przez nasz tor optyczny, na drodze od obiektywu do sensora. Klatki te rejestrują tzw. winietę obiektywu (czyli pociemnienia brzegowe, patrz rysunek) oraz wszystkie zanieczyszczenia matrycy (tzw. paprochy). W Internecie można spotkać różne sposoby na wykonanie flatów, jednak najlepszym sposobem jest użycie dedykowanego panelu światlnego, tzw. flatownicy, nakładanej na obiektyw. Flaty należy wykonać tuż przed lub tuż po skończeniu ekspozycji nieba. Kalibracja tymi klatkami jest niezbędna w astrofotografii. Im ich więcej – tym lepiej.

Kalibracja materiału i jego złożenie

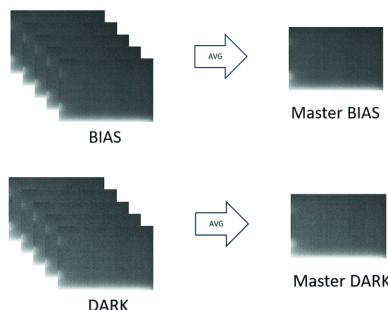
Spędziliśmy całą noc w pięknym, ciemnym miejscu, żaden ze sprzętów nas nie zawiódł, obiektyw nie zaparował, bateria w aparacie wytrzymała, montaż paralaktyczny na statywie utrzymał ustawienie na biegun i bezbłędnie pracował przez całą noc, dzięki czemu mamy w punkt ostre zdjęcia. Zebraliśmy dziesiątki

W astrofotografii znaczące korzyści daje format pliku zapisujący wartość piksela w postaci zmiennoprzecinkowej (IEEE 754), z wykorzystaniem 32 bitów na każdą z trzech składowych koloru (RGB). Taki format pozwala uzyskać bardzo wysoką rozdzielcość informacji w „cieniach” naszego obrazu.

Głównymi algorytmami standaryzującymi w astrofotografii są: skalowanie + przesunięcie zera (ang. *scaling + zero offset*), wyrównanie strumienia (ang. *flux equalization*), normalizacja addytywna (ang. *additive normalization*), normalizacja mnożystkowa (ang. *multiplicative normalization*), skalowanie oraz normalizacja lokalna. Po więcej szczegółów zapraszam na stronę <https://pixinsight.com>.



Uśrednienie polega na obliczeniu średniej arytmetycznej (lub mediany) sygnału każdego piksela ze stosu wcześniejszych przygotowanych klatek.



Normalizacja (standaryzacja) zdjęcia ma na celu przekształcenie go w taki sposób, aby usunąć różnice w sile sygnału i średnich wartościach tła. Poprawnie przeprowadzona standaryzacja jest kluczowym elementem obróbki zdjęcia.

Najlepsza klatka nieba powinna mieć: wysoki stosunek poziomu sygnału do szumu (SNR), wysoki kontrast, niski poziom zniekształcenia gwiazd (odchylenie od kształtu kulistego) i niski poziom rozmycia gwiazd (liczony w szerokości połówkowej, FWHM – *full width at half maximum*).

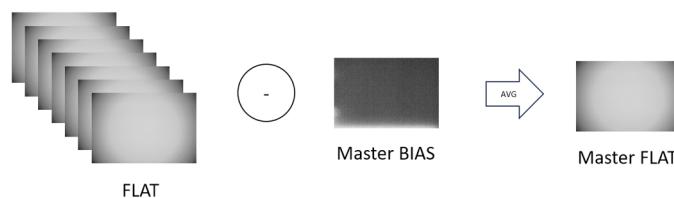
zdjęć interesującego nas obszaru nieba, zebraliśmy odpowiednią ilość klatek ciemnych, biasów, no i nie zapomnieliśmy o flatach. Mamy czas, aby zasiąść do materiału i wydobyć z niego to, co najlepsze.

Tutaj bezwzględnie musimy skorzystać ze specjalnego oprogramowania przeznaczonego do astrofotografii (np. DeepSkyStacker, Siril, Astro Pixel Processor, PixInsight), który ma zaimplementowane odpowiednie algorytmy oraz wsparcie dla specyficznych formatów obrazów. W zależności od użytego oprogramowania do wyboru będziemy mieli bardzo rozbudowane opcje, umożliwiające dokładne sprecyzowanie algorytmów i ich parametrów, albo mocno uproszczone. Niemniej wszystkie programy będą miały jedną wspólną – najczęściej okno interfejsu nakazujące nam podać: listę plików z powtarzonymi zdjęciami nieba (ang. *light frames*), listę plików z flatami, listę plików z darkami oraz listę plików z biasami.

Zasadniczo przetwarzanie obrazu w astrofotografii to czysta statystyka w służbie teorii sygnałów. Niestety nie ma w niej złotego rozwiązania. Nie ma cudownego algorytmu, który zadziała zawsze. W zależności od użytego zestawu fotograficznego, warunków atmosferycznych, a także celu, jaki chcemy osiągnąć – rodzaju obiektu astronomicznego – dany algorytm może się okazać zarówno wyborem idealnym, jak i najgorszym z możliwych. Dlatego też najbardziej rozwinięte oprogramowania dają nam bardzo dużą elastyczność w wyborze ścieżki przetwarzania sygnału i jego parametrów.

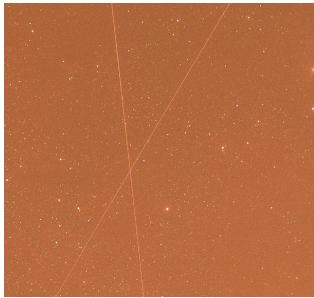
Na początek polecam w oprogramowaniu wybrać tryb „auto”. Następnie uruchamiamy cały proces przetwarzania obrazu i czekamy na wynik. Dość długo czekamy... bo komputer naprawdę ma co liczyć. Całość, w zależności od komputera, może trwać kilkadziesiąt minut lub nawet kilka godzin. A co konkretne się dzieje? Takie typowe, uogólnione przetwarzanie obrazu, zwane technicznie „stackowaniem”, odbywa się mniej więcej według następującego schematu:

1. Wyliczenie tzw. *master bias* – uśrednienie wszystkich klatek bias będących obrazem szumu odczytu.
2. Wyliczenie tzw. *master dark* – uśrednienie wszystkich darków będących obrazem sumy szumu odczytu i szumu termicznego.
3. Odjęcie od każdej z klatek flat klatki master bias. Następnie normalizacja wszystkich wstępnie skalibrowanych klatek flat do tego samego poziomu jasności (z powodu minimalnych różnic w powtarzalności pozycji przyjmowania się mechanicznej przesłony obiektywu flaty mogą się od siebie nieznacznie różnić jasnością) i uśrednienie skalibrowanych flatów. W ten sposób powstaje tzw. *master flat*.



4. Kalibracja klatek nieba. Na początek wybieramy sobie najlepsze (naszym zdaniem) zdjęcie nieba, które udało nam się wykonać. Względem niego będą normalizowane i wyrównywane pozostałe klatki nieba. Następnie od każdej z klatek nieba odejmujemy wyliczoną wcześniej klatkę master dark i dzielimy przez odpowiednio przeskalowaną klatkę master flat.

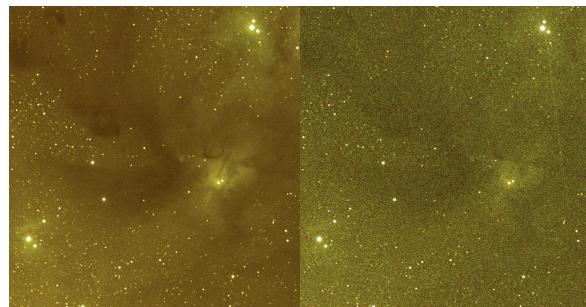




Jednym z najczęstszych zakłóceń w zdjęciach nocnego nieba są ślady pozostawione przez przelatujące satelity, samoloty bądź meteory. Są to zakłócenia, wobec których średnia algebraiczna jest bezsilna. Aby je usunąć stosowane są algorytmy: Percentile Clipping, Sigma Clipping, Median Sigma Clipping, Winsorized Sigma Clipping, Median MAD Clipping, Linear Fit Clipping, Generalized Extreme Studentized Deviate Test.

5. W dalszej kolejności następuje pozycjonowanie wszystkich klatek sygnału w oparciu o układ gwiazd z dokładnością do jednego piksela – uwzględniając przy tym korektę dystorsji zdjęcia. Ciekawostką może być fakt, że możliwe jest także pozycjonowanie klatek z dokładnością mniejszą niż rozmiar jednego piksela. Takie pozycjonowanie stosuje się m.in dla zdjęć z teleskopu Hubble'a, wykorzystując algorytm Drizzle.
6. I wreszcie scalenie materiału, na które składa się normalizacja klatek sygnału (lokalna lub globalna), odrzucenie wcześniej ustalonych wartości skrajnych sygnału (np. tzw. *hot pixels* i *cold pixels*), a w końcu uśrednienie sygnału ze skalibrowanych klatek sygnału i wygenerowanie obrazu wynikowego.

Uzyskany w wyniku tego dość ogólnie opisanego procesu obraz końcowy ma znacznie wytłumione zakłócenia wprowadzone przez nasz zestaw fotograficzny (szum wprowadzony przez elektronikę lub tor optyczny), usuniętą większość zakłóceń o losowym charakterze, poprawioną rozpiętość tonalną oraz zwiększoną stosunek sygnału do szumu (patrz zdjęcie poniżej). Ale to nie koniec! Nasz obraz jest wciąż daleki od ideału i nadal skażony światłem emitowanym lub rozproszonym przez atmosferę. W następnym artykule opiszę, jak sprawić, aby nasze zdjęcie stało się piękne.



Porównanie efektu stackowania 40 klatek (po lewej) w odniesieniu do tego samego fragmentu pojedynczej klatki (po prawej)

Leonardo da Vinci i hydrodynamika

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*

Hydrodynamika to nauka o dynamice płynów. Zachowane pisma Leonarda da Vinci (1452–1519) zawierają kilkaset stron jej poświęconych. Są to części traktatów, rozbudowane schematy pomysłów hydraulicznych i hydrologicznych oraz niezliczone rysunki i notatki.

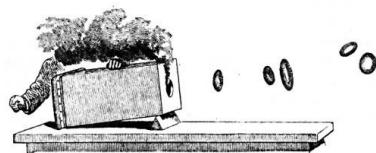
W holistycznej wizji nauki Leonarda dotyczącej form żywych woda jest elementem centralnym, *środowiskiem i nosicielem życia*, zarówno w makrokosmosie – środowisku żyjącej Ziemi, jak i w mikrokosmosie – w ciałach zwierząt i roślin. Bez wody nie ma życia. Woda występuje także w kilku obrazach religijnych tego wszechstronnie utalentowanego badacza – jako nosicielka życia w sensie symbolicznym, jako medium przekazujące sakrament chrztu. Da Vinci dostrzegał niebanalne analogie pomiędzy strukturami układu hydrologicznego Ziemi, układu krwionośnego i komórkami przewodzącymi roślin, wskazując na aspekty funkcyjne i cechy charakterystyczne dynamiki.

Wszystkie żywne struktury posiadają cechy samej wody, takie jak płynność, różnorodność, adaptacyjność i stabilność – zachowanie formy przy jednoczesnym ciągłym strumieniu przepływającej materii. Prowadząc badania hydrodynamiczne, Leonardo chciał zrozumieć naturę i siłę prokreacyjną samego życia. Jego badania nad wirami i strukturami spiralnymi, łączącymi w sobie zmienność i zarazem stabilność, przypowodzą na myśl XIX-wieczne badania lorda Kelvina i Petera Taita nad pierścieniami wirowymi, które w ich wirowej teorii atomu miały stanowić podstawową strukturę materii. Leonardo da Vinci

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Studia wody. Na dwóch rysunkach przedstawiony jest przepływ wody przez płaską przeszkodę



W eksperymencie Taita powstają stabilne struktury pierścieni wirowych.
Peter Tait, *Lectures on Some Recent Advances in Physical Science*, MacMillan & Co., Londyn 1876



Rozwiążanie zadania M 1778.

Oznaczmy

$$n = \text{NWD}(a! + 1, b! + 1, c! + 1, d! + 1).$$

Wtedy $n \mid (b! + 1) - (a! + 1)$, więc

$$n \mid (b! - a!) = a![(a+1) \cdot \dots \cdot b - 1].$$

Jednakże $\text{NWD}(a! + 1, a!) = 1$, stąd

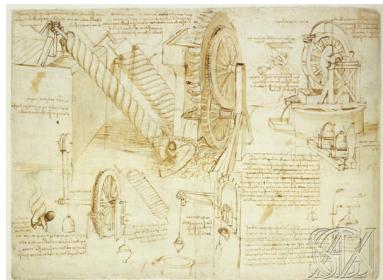
$n \mid (a+1) \cdot \dots \cdot b - 1$. Wobec tego

$$n \leq (a+1) \cdot \dots \cdot b - 1 < b^{b-a} < d^{b-a}.$$

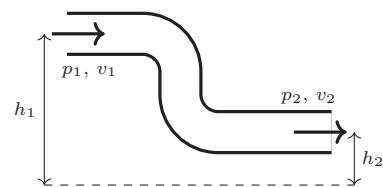
Podobnie $n < d^{c-b}$ oraz $n < d^{d-c}$. Zatem

$$n^3 = n \cdot n \cdot n < d^{b-a} \cdot d^{c-b} \cdot d^{d-c} = d^{a-d},$$

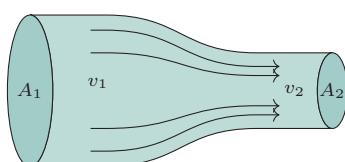
co oczywiście daje tezę zadania.



Urządzenia Leonarda da Vinci służące do podnoszenia wody



Ilustracja prawa Bernoulliego:
 $p_2 - p_1 = \rho g \cdot (h_1 - h_2)$



Ilustracja prawa ciągłości:
 $A_1 v_1 = A_2 v_2$

odkrył ruch wirowy na długo przed Kartezjuszem (XVII wiek), a jego dynamikę, w swoich badaniach nad turbulencją – przed Helmholtzem (ok. 1858 r.).

Pozostając częściowo pod wpływem nauki Arystotelesa, w swoich badaniach hydrodynamicznych prowadzonych w latach 1485–1515 Leonardo wybierał jednocześnie daleko wprzód, o kilkaset lat wyprzedzając obserwacje, eksperymenty i odkrycia późniejszych uczonych, którym je przypisano. Należą do nich: odkrycie *zasady ciągłości* (przed Benedetto Castellim, ok. 1628 r.), *lepkości przepływu* (przed Izaakiem Newtonem, ok. 1687 r.), *uniwersalności przepływu* (przed Danielem Bernoullim, ok. 1738 r.), *dekompozycji turbulencji* (przed Osbornem Reynoldsem, ok. 1895 r.), *kaskady Richardsona* (przed Lewisem Richardsonem, ok. 1922 r.), własności *dynamiki wirów* (przed Hermannem von Helmholtzem, ok. 1858 r.) i metody *wizualizacji przepływu* (przed Osbornem Reynoldsem, ok. 1883 r.).

W artykule *Leonardo da Vinci i topologia* [G. Łukaszewicz, Δ_{22}^4] przedstawiono hydrodynamiczne motywacje Leonarda dla jego badań topologicznych. Pokrewną do hydrodynamiki dziedziną jego działalności była hydrologia – zajmujący się wodą dział geografii. Osiągnięcia genialnego uczonego w tej dziedzinie są tak znaczne, że hydrologi uważają go za jednego z jej ojców założycieli. W tym artykule opowiemy o wybranych kierunkach badań hydrodynamicznych Leonarda da Vinci, w tym o jego nowatorskich eksperymentach i teoriach.

Zasada uniwersalności. Własność uniwersalności procesów ewolucyjnych to podobieństwo pewnych cech dla całej ich klasy. Poszukując praw ogólnych dla ruchu i transformacji płynów, Leonardo założył, że pewne podstawowe własności są wspólne dla nich wszystkich. Aby to potwierdzić, eksperymentował nie tylko z wodą, ale także z krwią, winem, olejem oraz z materiałami sypkimi, piaskiem i ziarnami. Zdał sobie sprawę, że pewne własności przepływu wody, takie jak lepkość czy lokalny ruch wirowy, można wywnioskować i dokładniej zbadać, obserwując ruch materiałów sypkich, prostszych dla obserwacji, bowiem widoczne są wtedy poszczególne cząstki poruszającej się materii. Mamy tu do czynienia z nowoczesnym, współczesnym podejściem do badania złożonych zjawisk przy pomocy prostszych modeli. Tym rodzajem rozumowania Leonardo wyprzedzał znacznie swoje czasy. Jego badania były przy tym głównie jakościowe. Na złożone obliczenia związane z procesami dynamicznymi było jeszcze za wcześnie, wszak równania różniczkowe zaczęły raczkować dopiero w XVII wieku. Pierwszą próbę zastosowania ogólnego newtonowskiego prawa dynamiki do ruchu płynów podjął Daniel Bernoulli w swojej *Hydrodynamice* w 1738 roku. Podał on proste, fundamentalne prawo szeroko używane dziś w najrozmaitszych badaniach przepływowych, od inżynierii po medycynę. W swojej najprostszej postaci prawo to wyraża formuła

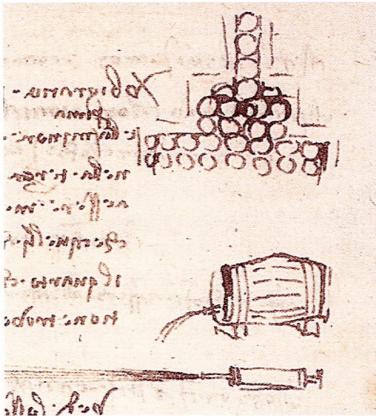
$$h + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho gh = \text{constant},$$

mówiąca, że suma ciśnienia statycznego, dynamicznego i hydrostatycznego jest stała. Jest ona prawdziwa dla dużego spektrum cieczy i przepływów o różnych własnościach. W przypadku bezruchu (prędkość $V = 0$) otrzymujemy znane ze szkoły prawo mówiące, że różnica ciśnienia hydrostatycznego na dole i na górze słupa wody jest równa wysokości słupa wody pomnożonej przez gęstość wody i stałą przyspieszenie ziemskiego: $p_2 - p_1 = \rho g(h_1 - h_2)$.

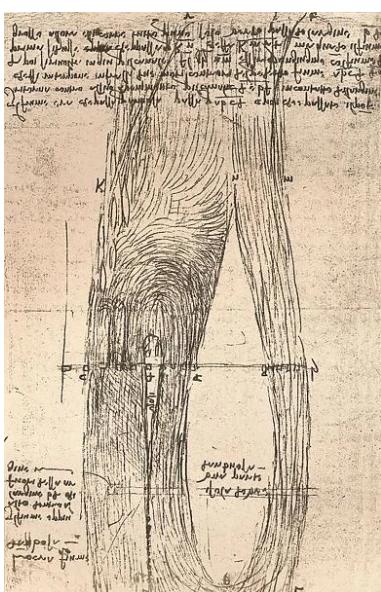
Przedstawiona poniżej zasada ciągłości posiada te same cechy co zasada Bernoulliego – będąc prostym, ilościowym prawem mającym liczne zastosowania, ma fundamentalny charakter uniwersalności.

Zasada ciągłości. Własność ciągłości przepływu wody (lub dowolnej innej cieczy nieściśliwej) mówi, że w danej chwili do dowolnego wyróżnionego obszaru przepływu wpływa ta sama ilość wody, co z niego wypływa. Została ona odkryta przez Leonarda da Vinci, który w końcu XV wieku pracował dla Francesco Sforzy w Mediolanie, także jako nadzorca hydraulycznych projektów inżynierskich.

Problem mierzenia ilości przepływającej wody w licznych rzekach i kanałach nawadniających pola uprawne Niziny Lombardzkiej był ważną kwestią



Równanie ciągłości wyjaśnione na przykładzie grupy maszerujących zmuszonych do przejścia przez dwa wąskie gardła (rysunek u góry)



Rysunek Leonarda da Vinci przedstawiający złożony obraz przepływu w rzece Loarze w Amboise

techniczną i administracyjną. Wtedy, i jeszcze znacznie później, ilość przepływającej wody w kanale szacowano polem jego przekroju, nie biorąc pod uwagę prędkości płynącej wody.

Leonardo powiązał ilość przepływającej wody z przekrojem rzeki i z jej prędkością. W „Kodeksie Atlantyckim” pisze:

Rzeka transportuje na każdym przekroju swojej długości w tym samym czasie taką samą ilość wody.

Jest to właśnie prawo ciągłości, w tym szczególnym przypadku wyrażane wzorem $A_1v_1 = A_2v_2$, w którym A_1 i A_2 to pola przekrojów rzeki w wybranych miejscach, a v_1 i v_2 to prędkości wody na tych przekrojach. Wynika z niego, jak pisze w „Manuskrypcie A”, że:

Rzeka o jednakowej głębokości będzie miała szybszy przepływ na mniejszej szerokości niż na większej tyle razy, ile razy większa szerokość przewyższa mniejszą.

Aby klarownie zilustrować zasadę ciągłości, uczony posłużył się uproszczonym modelem zwartego regimentu wojska maszerującego przez miasto:

Przypuśćmy, że mężczyźni wypełniają te aleje swoimi ciałami i że muszą maszerować w sposób ciągły. Kiedy mężczyźni w najszerszym miejscu robią jeden krok, (...) ci na pośredniej szerokości zrobią dwa, a ci na trzecim miejscu, o szerokości jednej czwartej poprzedniej, zrobią osiem kroków w tym samym czasie. I znajdziesz tę proporcję we wszystkich ruchach, które przechodzą przez miejsca o różnej szerokości.

Podobnie jak w przypadku zasady uniwersalności, Leonardo posłużył się tu prostszym modelem, pozwalającym zarówno intuicyjnie wniknąć w istotę zagadnienia, jak i dostrzec relacje ilościowe. Zasadę ciągłości odkrył ponownie Benedetto Castelli i w 1629 roku opublikował w poświęconej hydraulice książkę pt. *O pomiarze bieżącej wody*.

Tarcie i lepkość. Leonardo da Vinci jako pierwszy systematycznie badał uniwersalne w przyrodzie zjawisko tarcia. Bardzo dokładnie i wszechstronnie analizował jego rolę w konstrukcjach inżynierskich, a także w badaniach ruchu wody.

W hydrodynamice rozróżniamy dwa podstawowe rodzaje tarcia: tarcie wewnętrzne między cząsteczkami poruszającego się płynu, które nazywamy lepkością płynu, oraz tarcie między płynem a ograniczającą je powierzchnią, czyli brzegiem. Leonardo opisywał wpływ obu jego rodzajów na ruch płynu. Lepkość określał jako spójność wody samej w sobie. Rozumiał, że powoduje ona tarcie między cieczą i brzegiem obszaru przepływu oraz między sąsiednimi warstwami wody płynącymi z różnymi prędkościami. Obserwował i opisywał wpływ tych sił, które nazywamy dziś naprężeniami ścinającymi, na ruch wody. W „Manuskrypcie H” pisze, że *dno zapewnia większy opór, dlatego woda porusza się bardziej na powierzchni niż przy dnie*, a w „Manuskrypcie I”, że *rzeki, gdy są proste, płyną z dużo większym impetem w środku swej szerokości niż przy brzegu*.

Zachowanie się płynu przy brzegu obszaru jego przepływu jest niezwykle złożonym zjawiskiem. Mimo rozmaitych prób jego modelowania, podjętych dopiero w XX wieku, problem znalezienia analitycznego opisu tego przepływu pozostaje problemem otwartym. Źródłem trudności jest związek ruchu płynu w warstwie przyściennej z jeszcze bardziej nieuchwytnym analitycznie, choć powszechnie obserwowanym, zjawiskiem turbulencji. Richard Feynman w swoich wykładach z fizyki (1963) napisał: *Turbulencja jest najważniejszym nierozwiązanym problemem fizyki klasycznej* – i takim pozostaje do dziś.

Leonardo opisał i przeanalizował rozmaite aspekty turbulentnego, czyli burzliwego, ruchu wody. Jednym z nich jest obecność wirów zajmujących centralne miejsce w teorii turbulencji.



Rozwiążanie zadania M 1777.

Bez straty ogólności możemy założyć, że $a, b \geq 0$ oraz $c \leq 0$. Ponieważ f jest funkcją nieparzystą, mamy $f(0) = 0$ oraz $f(a+b) = -f(c)$. Dodatkowo z monotoniczności $f(a+b) \geq f(a) \geq 0$ oraz $f(b) \geq 0$ i dlatego $f(a+b)f(b) \geq f(a)f(b)$, czyli $f(a)f(b) + f(b)f(c) \leq 0$. Dodając do tego nierówność $f(c)f(a) \leq 0$ (wynikającą z $f(c) \leq 0$), otrzymamy tezę zadania.



Interakcje pomiędzy wodą, korytem rzeki i przeszkodami



Po lewej: szkice Leonarda da Vinci przedstawiające eksperymentalne zbiorniki do badania fal i prądów w wodzie.

Po prawej: Szkice przedstawiające jego teorie na temat wirów w zastawkach serca

Wiry wodne. Leonardo da Vinci nigdy nie zrealizował swojego śmialego zamieru napisania *Traktatu o wodzie*, w którym zamierzał podać precyzyjny i kompletny opis ruchu wody. Takie przedsięwzięcie jest niemożliwe do zrealizowania nawet dziś. Zafascynowany wodą badacz wykonał setki bardzo wnikliwych ilustracji jej ruchu w różnych sytuacjach. Prace te ze względu na wielką złożoność ruchu wody są dwójakiego rodzaju. Pierwsze wyrażają bezpośrednie obserwacje i grają rolę dzisiejszej fotografii, drugie to schematyczne diagramy, wyrażające bardziej prawa ruchu niż jego dokładny obraz. Co nie jest charakterystyczne dla całej pozostałości twórczości naukowej Leonarda, w badaniach hydrodynamicznych rysunki stanowią często tylko uzupełnienie tekstu. Stwierdzamy tu problem braku właściwego języka opisu wynikający z ogromnej złożoności przedmiotu badań. Podobne zjawisko można też zauważać w *Principiach Newtona*, gdzie np. w części poświęconej badaniu ruchu księżyca Newton napotyka wymykające się opisowi analitycznemu zagadnienie trzech ciał, i z konieczności ucieka się do nieprecyzyjnego opisu słownego.

Jak wspomnieliśmy wyżej, Leonarda szczególnie fascynowały wiry, jako struktury łączące w sobie zmienność i stabilność, cechy charakteryzujące wszystkie formy życia. Zamierzał podać pełną klasyfikację wirów. Pisze o tych zamierzeniach w „Manuskrypcie F”:

O wirach na powierzchni i o tych, które powstają na różnych głębokościach wody; tych, które zajmują całą tę głębię, ruchomych i stabilnych; o długich i okrągłych; tych, które okresowo zmieniają swój ruch, i tych, które się dzielą; tych, które przekształcają się w wiry, z którymi się łączą; i tych, które mieszają się ze spadającą i odbijającą się wodą i wprowadzają ją w ruch obrotowy.

Leonardo opisał, jak powstają wiry w różnych sytuacjach, nazwał ich różne rodzaje i jako pierwszy uczyony badał ich strukturę. Jedną z przyczyn tworzenia się wirów jest napotkanie przez przepływ przeszkody. W „Manuskrypcie A” pisze:

Prąd poruszającej się wody stara się utrzymać swój bieg zgodnie z siłą, która go spowodowała, a kiedy napotka przeciwną przeszkodę, kończy rozpoczęty kurs okreżnymi i wirującymi ruchami.

Opierając się na obserwacjach, zidentyfikował trzy rodzaje wirów: te o poziomej powierzchni, te z wypukłymi środkami i te z obniżonymi środkami. Powiązał też miarę zagłębiania środka wiru z prędkością poruszającej się wody.

W „Manuskrypcie F” pisze:

Wir z głębszym zagłębieniem będzie tym, który powstaje w wodzie o szyszym ruchu; i ten wir będzie miał mniejsze zagłębienie, jeśli jest wytwarzany w głębszej wodzie, która nie ma takiego samego ruchu, ale jest wolniejsza.

Leonardo rozróżniał też wiry wolnoobrotowe, których prędkość kątowa obrotu jest praktycznie stała, od tych, których prędkość kątowa obrotu wzrasta wraz ze zmniejszaniem się odległości od środka wiru. W „Kodeksie Atlantyckim” pisze:

Spiralny lub wirowy ruch każdej cieczy jest tym szybszy, im bliżej środka jej obrotu. Ten fakt, na który zwracamy uwagę, jest wart odnotowania, ponieważ ruch kołowy koła jest tym wolniejszy, im bliżej środka obracającego się obiektu.

Na pełniejszy opis struktury i dynamiki wirów musiano czekać następne 350 lat, kiedy to Herman Helmholtz podjął badania Leonarda i podał matematyczny opis niektórych z nich. W tym krótkim artykule mogliśmy przedstawić tylko niewielki fragment badań Leonarda da Vinci w zakresie hydrodynamiki, gdyż, jak już wspomnieliśmy, jego zachowane pisma zawierają kilkaset stron poświęconych tej dziedzinie.



Rysunek wiru wodnego

Bibliografia

- F. Capra, *Learning from Leonardo. Decoding the Notebooks of a Genius*, San Francisco, CA, 2014.
A. Corsini, *Modeling (understanding and controlling) turbulent flows: the heritage of Leonardo da Vinci in modern computational fluid dynamics*, Conference on Modelling Fluid

- Flow (CMFF'18) The 17th International Conference on Fluid Flow Technologies Budapest, Hungary, September 4-7, 2018.
I. Marusic, S. Broomhall, *Leonardo da Vinci and Fluid Mechanics*, Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 53, 1–25, 2021.
G. Łukaszewicz, *Leonardo da Vinci i topologia (Δ_{22}^4), Hydrodynamika a hydraulika (Δ_{17}^8), Problemy z równaniami hydrodynamiki (Δ_{22}^5), razem z K. Mizerskim*.

życie na żywiole 155



Rozwiązań zadania F 1093.

Na szczyt (u wylotu) komina ciśnienie gazu na zewnątrz i wewnętrz komina jest takie samo. Przy powierzchni ziemi ciśnienie na zewnątrz jest większe od ciśnienia wewnętrz, bo gaz w kominie jest cieplejszy i w związku z tym ma mniejszą gęstość. Wznoszenie się cięglego gazu w kominie spowodowane jest różnicą zewnętrznych ciśnień powietrza na dole komina, $p(0)$, i u jego szczytu, $p(H)$. Zgodnie z prawem Bernoulliego wzduż linii prądu gazu o gęstości ρ poruszającego się z prędkością v w polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g wartość wielkości

$$p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2$$

pozostaje stała – h oznacza wysokość punktu nad wybranym poziomem odniesienia. Po podstawieniu danych dla „początku” ($h = 0$) i „końca” ($h = H$) strumienia gazu w kominie otrzymujemy równanie:

$$p(0) = p(H) + \rho_K v^2 + \rho_K gH,$$

w którym ρ_K oznacza gęstość gazu w kominie, a v jego prędkość u szczytu komina, natomiast $p(0)$ i $p(H)$ oznaczają ciśnienie powietrza na zewnątrz komina, gdzie ma ono gęstość ρ_0 . U wylotu komina ciśnienie wewnętrz jest równe ciśnieniu atmosferycznemu na zewnątrz. Mamy więc: $p(0) - p(H) = \rho_0 gH$ (pomijamy zmiany gęstości gazu z wysokością). Otrzymujemy:

$$\rho_0 gH - \rho_K gH = \frac{1}{2} \rho_K v^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow v^2 = 2gH \left(\frac{\rho_0 - \rho_K}{\rho_K} \right).$$

Gęstość gazu doskonałego o temperaturze T , pod ciśnieniem p jest proporcjonalna do ilorazu p/T , a więc $\rho_0 \propto p(H)/T_0$ oraz $\rho_K \propto p(H)/T_K$ i ostatecznie:

$$v^2 = 2gH \left(\frac{T_K - T_0}{T_0} \right).$$

Po podstawieniu danych liczbowych: $v \approx 17 \text{ m/s}$.

W polu grawitacyjnym ziemi, w temperaturze 300 K gęstość powietrza na wysokości 50 m stanowi 99,4% gęstości przy powierzchni ziemi. Dym w kominie jest skomplikowaną mieszanką gazów i pyłu niespalonych resztek paliwa. Nasz prosty model odpowiada raczej szybom wentylacyjnym niż kominom. Oszacowana wartość prędkości uzmysławia, dlaczego trudno jest gasić pożary wysokich budynków.

To, co napisano w prasie nie-naukowej o próbach leczenia przez „szczepionki mRNA” nowotworów, sprawiających wciąż wiele trudności w leczeniu tradycyjnym litych guzów (trzustka, płuca, czerniak), wymaga jednak ostrożnej oceny. Nie znajduję informacji o badaniach naukowych, które powinny wyprzedzać i towarzyszyć badaniom klinicznym. Lek podawany jest nie według powszechnie uznawanych w takich próbach procedur: terapii nie towarzyszą odpowiednie próbki kontrolne zapewniające obiektywną (zewnętrzną) ocenę wyników. Takie warunki spełniono, nim zaczęto masowo

O nowościach (?) onkologicznych

Nowy typ szczepionek „mRNA” chroniących przed covidem wywołał głosy sceptyków co do tempa ich masowego stosowania. My, popularyzatorzy nauki, nie nadążaliśmy z informowaniem o historii badań naukowych i klinicznych w tym zakresie. Przypominano również, że od lat do terapii nowotworów poszukuje się leków nowej generacji z zastosowaniem mRNA.

I oto w pierwszych dniach lutego pojawiła się elektryzująca świat wiadomość o istotnych sukcesach w tym zakresie pochodząca z firmy Moderna (tak, to oni zrobili szczepionkę, którą wielu z nas przyjęło) i od grupy naukowców kierowanej przez dra Davida Pinato, onkologa klinicznego na Wydziale Chirurgii i Raka w Imperial College w Londynie.

Muszę tu dodać garść informacji z zakresu nauki podstawowej. Uprzedzam, że będzie to najogólniej streszczona wiedza, bez szczegółów o budowie i funkcjach wspominanych tu cząsteczek.

W każdej żywej komórce istnieje kopia „jej” DNA. DNA jest długim łańcuchem połączonych ze sobą 4 różnych cząsteczek podstawowych. Mogą być ich miliony w danym DNA, ich kolejność nie jest przypadkowa: to informacja, swojego rodzaju alfabet genetyczny. Z tej kolejności korzysta komórka, syntetyzując „kopię”, inną łańcuchową cząsteczkę, mRNA (mowa tu o podstawowych odkryciach lat 60. XX wieku). Tę syntezę (transkrypcję) można porównać z zapisywaniem tekstu (DNA) w innym, podobnym języku (RNA). RNA jest zbudowany bardzo podobnie, ale nie identycznie z DNA. Efektem niewielkich różnic chemicznych jest nietrwałość cząsteczek RNA, mogą one być w komórce tylko sekundy lub minuty. DNA jest trwały, póki dana komórka żyje.

Wytwarzony w komórce mRNA jest następnie używany jako przepis na syntezę innych dużych cząsteczek – białek. Białka w komórce odgrywają rolę funkcjonalną, np. powstają z nich struktury komórkowe albo prowadzą określone reakcje chemiczne (jak przekształcenie cukrów lub tłuszczy). Takie funkcje można nazwać ogólnie cechami komórki (organizmu).

Około 25 lat temu nauczono się oznaczać kolejność „liter” w DNA, ta kolejność charakterystyczna dla danego gatunku to genom. Od 2002 roku znamy genom człowieka (3 miliardy podstawowych cząsteczek budulcowych), a różnice między osobnikami wynoszą poniżej 1%. To wystarcza, aby identyfikować jednoznacznie pojedyncze osobniki. W konsekwencji każdemu indywidualnemu genomowi odpowiada specyficzny zestaw cząsteczek mRNA – nazwany transkryptomem. A jeżeli jakaś choroba indywidualna wiąże się z istnieniem osobnej struktury (np. nowotworu), to powstają „małe” transkryptomy, charakterystyczne dla danego nowotworu, a co za tym idzie – także charakterystyczne dla tego nowotworu białka. Nowe dla organizmu białka wywołują reakcję układu immunologicznego.

Można sobie wyobrazić, że przygotowanie „szczepionki” z wybranym mRNA kodowanym tylko w nowotworze wywoła obronną reakcję immunologiczną w stosunku do nowotworu. Proste? Przez wiele lat taki pomysł nie był realizowany, między innymi dlatego, że obcy, „nowotworowy” mRNA wywoływał silne stany zapalne.

Przyjrzało się temu zjawisku dwoje uczonych: Węgierka Katalin Karikó i Amerykanin Drew Weissman (laureaci Nagrody Nobla w medycynie i fizjologii z 2023 roku). Dr Karikó (dziś pracująca w USA) wykazała, że mRNA w organizmie jest nietoksyczny i trwalszy niż w probówce, ponieważ ulega dodatkowym, pozornie drobnym, modyfikacjom chemicznym. Jedną taką modyfikację wprowadzono do szczepionki covidowej, co sprawiło, że stała się ona wysoce bezpieczna i skuteczna. Ocenia się, że do chwili obecnej szczepieniom na covid poddano setki milionów ludzi, nie obserwując poważnych skutków ubocznych.

stosować szczepionki z mRNA w zapobieganiu covidowi. Nowym doniesieniom towarzyszą zapewnienia, że jest jeszcze bardzo daleko do upowszechnienia takiej terapii. Właśnie!

Eksperymentalne terapie medyczne, które mogą dotyczyć milionów chorych, wymagają szczególnie ostrożnej kontroli przed zatwierdzeniem, zwłaszcza stosowania przyjętych od lat i sprawdzonych etapów startowych. Zaniedbania mogą mieć (znamy takie przykłady) tragiczne konsekwencje.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Filatelistyczne uroki fizyki w okienku pocztowym

Jan SWADŽBA



Rys. 1–3

Sądzę, że słowo „okienko” wystarczająco podkreśla ubóstwo filatelistyki (znaczki, kartki pocztowe, datowniki okolicznościowe...) wobec ogromu fizyki. Spośród wielu znaczków związanych z fizyką wybrałem tylko te, które mówią o niej co nieco. „Lektura” tych znaczków (wzory, równania, różne rysunki), jak i dołączonych do nich tekstu jest bardzo skromna. Popatrzmy, bo warto!

Światowy Rok Fizyki 2005 (rys. 1, 2 i 3)! Kto dziś o nim pamięta? Uważam, że filateliści, wystarczy otworzyć klaser i... Wśród wielu znaczków wydanych na tę okoliczność przez różne poczty na przótno szukać znaczka polskiego (nie było go również przy okazji Światowego Roku Matematyki 2000). Logo Roku to tzw. stożek świetlny, zaś wybór roku 2005 przypomina niezwykłe prace Alberta Einsteina sprzed 100 lat.

Tales (rys. 4) jako pierwszy głosił, że wszystko jest z wody, a **Demokryt** (rys. 5), że materia zbudowana jest z atomów (gr. *atom* – niepodzielny), pomijając w ten sposób żywioły. Tales odkrył, że bursztyn (gr. *elektron*) przyciąga lekkie przedmioty. 2400 lat temu **Arystoteles** (rys. 6) wprowadził nazwę fizyka (z gr. *physikē, physis* – natura). Nazwy greckie projektant znaczka ulokował na obrzeżach: fizyka, biologia, psychologia...; w tle widzimy głowę Aleksandra Macedońskiego, ucznia Arystotelesa. **Archimedes** (rys. 7) – twórca nauki o mechanice; projektant dowcipnie połączył prawa o wyporności oraz o równowadze na dźwigni. **Ibn al-Haitham** (rys. 8) – ojciec optyki. Zajmował się m.in. teorią konstrukcji *camera obscura* (z łac. ciemny pokój). 900 lat później **bracia Lumière** udoskonaloną „camerę” zamienili na aparat do zdjęć i projekcji filmów (rys. 9).



Rys. 4–9



Rys. 10



Rys. 11

Na znaczku z rys. 10 widzimy śmigowiec **Leonarda da Vinci. Galileusz** przedstawiony jest na znaczkach 11 i 12. Znaczki wiernie, choć skrótnie, oddają jego osiągnięcia. Na znaczku 12 zamysły Galileusza po odkryciach na nocnym niebie, które uczyony opisał w pracy „*Siderus nuncius*”, czyli „Posłanie z nieba”, umieszczonej na znaczku 11. **Otto von Guericke** (rys. 13) – wynalazca pompy próżniowej (ok. 1650 r.). Na znaczku widzimy tak zwane półkule magdeburzkie, których po opróżnieniu z powietrza 16 koni nie było w stanie rozdzielić. **Izaak Newton** upamiętniony jest na znaczkach 14–17. Pierwsze trzy znaczki zaskakują bogactwem treści (rys. 17 to ćwiczenie domowe; zob. s. 15) oraz... datą urodzin. Newton urodził się jako 7-miesięczny wcześniak, w Święto Bożego Narodzenia w 1642 roku – według kalendarza juliańskiego, zaś według gregoriańskiego w 1643 (Wielka Brytania przyjęła kalendarz gregoriański w 1752 r.). Warto wiedzieć, że pierwszy znaczek na świecie ukazał się w Wielkiej Brytanii w 1841 roku – był na nim tylko portret królowej Wiktorii i nominał.



Rys. 12–17



Rys. 18 i 19

I tak było do roku 1964, w którym obok portretu królowej Elżbiety ulokowano portret Williama Szekspira. Portret Newtona znalazł się na znaczku w serii wydanej w 2010 roku z okazji 350-lecia The Royal Society; są w niej także Ernest Rutherford i Benjamin Franklin.

Na znaczku 18 znajduje się **Anders Celsius** i jego termometr (wynaleziony ok. 1730 r.). Znaczek 19 upamiętnia 250 rocznicę urodzin **Benjamina Franklina**; ilustracja według obrazu Westa Benjamina „Ściągnięcie elektryczności z nieba”



Rys. 20

– dziś widzimy go na 100-dolarowym banknocie! Na znaczku 20 przedstawiono widmo słoneczne, a na nim ciemne linie – linie **Josepha von Fraunhofera**. **Michael Faraday** odkrył indukcję elektromagnetyczną (1831). Był samoukiem – znaczek 21 przypomina, że jego kolejne pomysły i eksperymenty dały ludzkości światło. Próg pomysłowości przekroczył także projektant, lokując to światło w jego głowie. Poczta Nikaragui w serii „Dziesięć formuł matematycznych, które zmieniły oblicze ziemi” wydała znaczek z równaniem **Maxwella**, ujmującym matematycznie zależność między polem elektrycznym i magnetycznym; obok widzimy antenę radiową emitującą fale radiowe (rys. 22). Maxwell skromnie podkreślał, że to „Michael Faraday jest i musi na zawsze pozostać ojcem elektromagnetyzmu”. Dokonania **Alexandra Bella** są uwiecznione na znaczkach 23 i 24. Projektant znaczka 23 pomysłowo połączył stos Volty (źródło prądu) z telefonem (1876). Znaczek 25 upamiętnia pierwsze publiczne wykorzystanie elektryczności do oświetlenia miasta, do którego doszło 14 lipca 1882 roku w Grenoble.



Rys. 21–25



Rys. 26 i 27



Rys. 28

Znaczki 26, 27 i 28 przypominają nie tylko odkrycie fal elektromagnetycznych przez **Heinricha Hertza**, ale i historię nie tak bardzo odległą. Pierwszy wydała Poczta Niemieckiej Republiki Demokratycznej, trzeci Republika Federalna Niemiec, a drugi, po prostu, Niemcy. Znaczek 29 przedstawia laureatów pierwszej Nagrody Nobla (1901), na pierwszym planie znajduje się **Wilhelm Conrad Röntgen**. Na okoliczność 100-lecia odkrycia przez niego „promieni X” (jak sam je nazwał) został wydany znaczek 30.

Guglielmo Marconi, konstruktor radiotelegrafu i noblista (1909), uhonorowany został na znaczkach 31–33. Uzyskał on łączność radiową przez Kanał La Manche (1899), a potem Ocean Atlantycki (1920). Niezależnie od Marconiego nadajnik radiowy zbudował także **Aleksandr Popov** (1895), który ponadto dokonał pierwszej transmisji tekstu za pomocą alfabetu Morse'a (1896) i uzyskał łączność radiową na odległość 5 km (1897). Znaczek 34 został wydany w Związku Radzieckim (1923/24) z napisem w języku esperanto „Inventisto de radio – Popov”, który miał przekonać Włochów, że to Popov wyprzedził Marconiego...



Rys. 29–34



Rys. 35 i 36

Na znaczku 35 znajdują się nobliści z 1903 roku – **Antoine H. Becquerel**, **Pierre Curie** oraz **Maria Skłodowska-Curie**. Przypomnijmy, że Maria Skłodowska-Curie jeszcze raz otrzymała Nagrodę Nobla w 1911 roku. Na pierwszym planie kolejnego „noblowskiego” znaczka (rys. 36) znajduje się **Ernest Rutherford**. W roku 1918 przeprowadził on w swoim laboratorium pierwszą kontrolowaną przez człowieka reakcję jądrową, zilustrowaną na kanadyjskim znaczku 37. Rutherford jest też autorem ciekawego zdania: „Cała nauka dzieli się na fizykę i zbieranie znaczków”.



Rys. 37–41

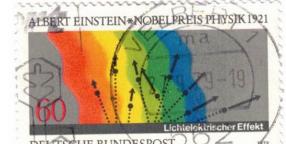
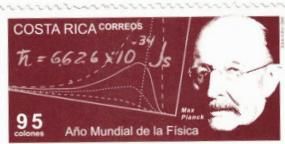
Max Planck, przedstawiony na znaczku 38, szeroko otworzył okno na mikroświat (postulat istnienia kwantów energii elektromagnetycznej, 1900, znaczek 39), zaś **Albert Einstein** (znaczki 40 i 41) na makroświat (teorie

Wskazówka do ćwiczenia domowego ze strony 13: jak odkryte przez Newtona prawo powszechnego ciążenia kształtuje poziom płynu w butelce?

względności: szczególna, 1905, i ogólna, 1915). Na znaczkach z Einsteinem (którego portrety są nieraz zaskakujące) spotykamy również wzór $E = mc^2$. Znaczków tych jest wiele, niestety ubogich w treść w porównaniu ze znaczkami z Galileuszem i Newtonem. Trójkatne znaczki Paragwaju urzekażą bogatą i rzetelną treścią (na przykład na znaczku 11 Ziemia krąży po okręgu, a na 14 już po elipsie). Projektant znaczków Kostaryki przy użyciu wspólnego ząbkowania (rys. 42) symbolicznie podkreślił, że teorie Plancka i Einsteina łączą problemy, które wymagają znajomości każdej z nich. Nagrodę Nobla Planck otrzymał w 1918 roku, zaś Einstein w 1921 (wyszczególnionym przez Komitet Noblowski powodem było odkrycie efektu fotoelektrycznego, znaczek 43).



Rys. 42–45



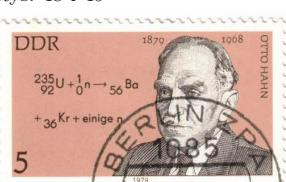
Rys. 46



Rys. 47



Rys. 48 i 49



Rys. 50



Rys. 51



Rys. 52

Na znaczku 44 uwieczniony został **Georges Lemaître**. To on w roku 1927 jako pierwszy stwierdził, że jeśli Wszechświat się rozszerza, to musiał mieć swój początek! To, co widzimy na znaczku – moment Wielkiego Wybuchu, czyli *Big Bangu* – czekało cztery lata na aprobatę Einsteina. W 1931 roku Einstein, zaproszony z Lemaîtrem przez Edwina Hubble'a do jego obserwatorium, przyznał na konferencji prasowej, że Wszechświat istotnie jest dynamiczny, a galaktyki poruszają się w przestrzeni z ogromnymi prędkościami. Po wykładzie Lemaître'a w Pasadenie stwierdził zaś: „Nigdy nie słyszałem piękniejszego i bardziej satysfakcyjnego wyjaśnienia momentu stworzenia” [3]. Znaczek wydany w 1994 roku, w stulecie urodzin księdza Lemaître'a. Wspomnijmy jeszcze, za [3], że fakt, iż Lemaître był księdzem, „nie dodawał wagi jego rachunkom. Przeciwnie, uważano, że (...) jest to [jego wynik] próba wykorzystania fizyki i matematyki do uzasadnienia dogmatu o stworzeniu świata”.

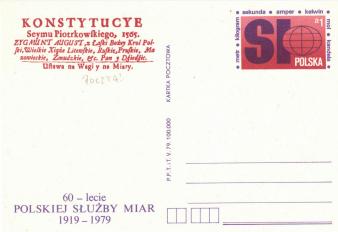
Znaczek 45 przedstawia uhonorowane Nagrodą Nobla (1914) ugięcie promieni rentgenowskich na siatce krystalicznej, przeprowadzone przez **Maxa von Laue** (1912). **Niels Bohr**, noblista z 1922 roku, i jego planetarna budowa atomu (1913) znajdują się na znaczku 46. Znaczek rytował Czesław Ślania, nadworny grawer Królestwa Szwecji. Na znaczku 47 projektant skrótnie przedstawił tzw. „fale materii” (1924), wprowadzone przez **Louisa V. de Broglie'a** (Nagroda Nobla 1929), których istnienie potwierdzono w 1927 roku. **Werner Heisenberg** (noblista z 1932 r.) został na znaczku 48 przedstawiony wraz ze sformułowaną przez siebie zasadą nieoznaczości (1927).

Kolejny noblista (1949) w naszej kolekcji to **Hideki Yukawa** (rys. 49), autor hipotezy „mezonów” (1935). Do ich odkrycia doszło 12 lat później w Boliwii, na wysokości około 5200 m n.p.m. Na znaczku 50 widnieje podobizna **Otto Hahna**, który wraz z asystentem, Fritzem Strassmannem, doprowadził do rozszczepienia jądra atomowego uranu na jądra baru i kryptonu (1938). W roku 1944 otrzymał Nagrodę Nobla (samodzielnie, choć wielu uważa, iż razem z nim powinna ją otrzymać Lise Meitner).

Tekst na marginesie znaczka 51 informuje, że wydano go z okazji 25 rocznicy pierwszej łańcuchowej reakcji jądrowej. Doszło do tego na Uniwersytecie w Chicago, gdzie 2 grudnia 1942 roku zaczął działać zaprojektowany i zbudowany przez **Enrico Fermiego** (Nagroda Nobla 1938) pierwszy na świecie reaktor atomowy (tło znaczka). **Maria Goeppert-Mayer** (rys. 52) urodziła się w Katowicach. Fakt ten upamiętnia tablica na budynku przy ul. Młyńskiej 5 oraz ulica jej imienia w tym mieście. Studia ukończyła we Wrocławiu (Breslau). Po wyjściu za mąż za Amerykanina Josepha Mayera wyjechała w 1930 roku do Stanów Zjednoczonych, gdzie m.in. brała udział w atomowym „Projektie Manhattan”. Otrzymała Nagrodę Nobla w 1963 roku – jest jedną z 11 śląskich noblistów [4]. W Stanach Zjednoczonych mówiono o niej w prasie, radiu, telewizji: „Pierwsza Amerykanka laureatką Nobla z nauk ścisłych”. Znaczek wydała Poczta Stanów Zjednoczonych dopiero w 2013 roku.



Rys. 53



Rys. 54

Na ilustracji 53 widzimy **Mariana Danysza i Jerzego Pniewskiego**, odkrywców tzw. hiperjader. Jerzy Przystawa w [3] pisze: „W 40 rocznicę tego odkrycia Poczta Polska wydała specjalny znaczek i kopertę ze zdjęciami obu profesorów”. Gwoli scisłości, nie był to znaczek, ale kartka pocztowa z wytłoczonym na niej znakiem opłaty 1500 złotych.

Okolicznościowa kartka była też wydana z okazji 60-lecia Polskiej Służby Miar. Na wytłoczonym znaku mamy napis: „metr, kilogram, sekunda, amper, kelwin, mol, kandela”...

Literatura

- [1] George Gamow, *Biografia fizyki*, Państwowe Wydawnictwo Wiedza Powszechna, 1967.
- [2] Piotr Greiner, *Nobliści ze Śląska*, Dom Współpracy Polsko-Niemieckiej, 2005.
- [3] Jerzy Przystawa, *Odkryj smak fizyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2011.
- [4] *Mała encyklopedia przyrodnicza* [red. nacz. Kazimierz Maślankiewicz], Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1962.
- [5] Andrzej K. Wróblewski *História fizyki: od czasów najdawniejszych do współczesności*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2007.

Jak wykryć statki kosmiczne Obcych?

Fatemeh HOSSEIN-NOURI*

Ogólna teoria względności (1916) Alberta Einsteina jest jedną z najbardziej fascynujących teorii w historii nauki. Wyjaśnia nie tylko naturę siły grawitacji jako geometrycznej cechy czasoprzestrzeni, ale także zawiera zdumiewające przewidywania dotyczące egzotycznych obiektów fizycznych i zjawisk, takich jak czarne dziury, a nawet napędy *warp*, znane z dzieł science fiction.

Zgodnie z przewidywaniami ogólnej teorii względności wszelkie łączące się masywne obiekty, takie jak czarne dziury i gwiazdy neutronowe, wytwarzają fale grawitacyjne, jeśli tylko układ ich mas porusza

Podobnie do promieniowania elektromagnetycznego, w którym promieniowanie jest wynikiem przyspieszonego ruchu ładunków elektrycznych, fale grawitacyjne powstają, gdy masy poruszają się z przyspieszeniem. W związku z prawami zachowania masy-energii oraz pędem promieniowanie grawitacyjne jest co najmniej kwadrupolowe (promieniowanie elektromagnetyczne może być dipolowe, ponieważ w tym przypadku mamy jedynie prawa zachowania ładunku elektrycznego).

Wśród pomysłodawców pierwszego detektora fal byli Mikhail Gertshtein, Vladislav Pustovoit, Rainer Weiss – późniejszy autor sukcesu LIGO – oraz Joseph Weber, który jest słynny z powodu innego typu detektorów fal grawitacyjnych, tzw. walców rezonansowych.

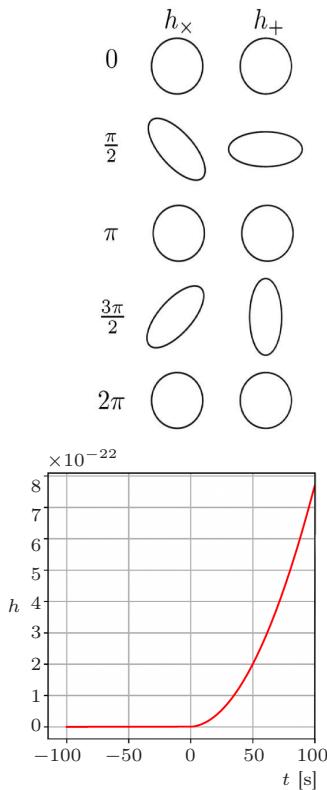
Charakterystyka sygnału została niedawno opisana przez Luke'a Sellersa i współautorów w pracy arXiv:2212.02065; nazywają oni napęd *warp* akronimem RAMAcraft (ang. Rapid And/or Massive Accelerating spacecraft).

W latach 60. powstały pierwsze pomysły zbudowania interferometru laserowego do wykrywania fal grawitacyjnych. Detektor ma dwa, najczęściej prostopadłe, ramiona, każde o długości L rzędu kilku kilometrów. Fotony światła laserowego przemieszczają się wewnątrz ramion detektora i są odbijane przez lustra na ich końcach. Kiedy fala przechodzi przez detektor, odległości w ramionach zmieniają się (bardzo niewiele, około 10^{-18} m, czyli znacznie mniej niż rozmiar protonu), a zmiany te powodują zmiany obrazu interferometrycznego wiązki laserowej, które spotykają się w punkcie centralnym interferometru. Względna zmiana długości ramienia, $h = \Delta L/L$, jest mierzoną amplitudą fali grawitacyjnej. Pierwszy sygnał został wykryty we wrześniu 2015 roku przez LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory). Pochodził on z dwóch łączących się czarnych dziur znajdujących się w odległości 400 Mpc od Ziemi. Od tego czasu detektory LIGO i Virgo wykryły ponad 100 sygnałów z różnych układów podwójnych, zawierających czarne dziury o różnych masach oraz gwiazdy neutronowe. Wykrycie fal grawitacyjnych jest z pewnością wielkim osiągnięciem, ale co ważniejsze, możliwość ich detekcji daje nowe narzędzie do obserwacji Wszechświata.

Układy podwójne nie są oczywiście jedynym źródłem fal grawitacyjnych. Oprócz badania zjawisk naturalnych detektory fal grawitacyjnych mogą pomóc nam w poszukiwaniu pozaziemskiej inteligencji. Zgodnie z teorią względności fale grawitacyjne mogą być generowane przez wspomniane na wstępnie napędy *warp*. Sygnał byłby wynikiem zaawansowanego mechanizmu transportowego i wiązałby się z faktem, że układ mas poruszających się z przyspieszeniem wytwarza fale grawitacyjne: jeśli statek kosmiczny byłby masywny i znajdowałby się wystarczająco blisko nas, moglibyśmy go wykryć, gdy przyspiesza.

*Centrum Fizyki Teoretycznej, Polska Akademia Nauk

się z przyspieszeniem i zmienia swój całkowity moment kwadrupolowy. W teorii Einsteina fale grawitacyjne rozchodzą się z prędkością światła, co zostało potwierdzone obserwacją zjawiska GW170817 z 2017 roku. Kiedy fala grawitacyjna dociera do obiektu, ściska go i rozciąga w określonych kierunkach. Innymi słowy – odległość między punktami zmienia się. Zmiany te są jednak tak niewielkie, że wykrywanie ich było ogromnym wyzwaniem inżynierijnym: technika dokładnych pomiarów musiała znacznie się rozwinąć, aby było można stworzyć urządzenie zdolne do pomiaru tak małych różnic odległości.



Przykładowa zmiana amplitudy fali grawitacyjnej podczas przyspieszonego ruchu statku kosmicznego

Podstawowe równanie dotyczące związku zmiany prędkości v ze stałym przyspieszeniem A w czasie t od 0 do T to oczywiście $v(t) = At + v_0$.

W ogólnej teorii względności, w słabym polu grawitacyjnym, metryka $g_{\mu\nu}$, która opisuje zatrzywanie czasoprzestrzeni, może być zapisana jako metryka przestrzeni płaskiej $\eta_{\mu\nu}$ i metryka opisująca perturbację $h_{\mu\nu}$, czyli $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Układ fizyczny powinien mieć niezerowy moment kwadrupolowy, aby emitować fale grawitacyjne. Jeśli zapiszemy równania teorii dla odległości, wolno poruszającej się materii, otrzymamy wzór na moment

kwadrupolowy: $h_{ij} = \frac{2G}{Rc^4} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}$, gdzie I_{ij} jest kwadrupolowym momentem rozkładu masy. Dla punktowej masy poruszającej się wzdłuż osi z można pokazać, że wszystkie składowe I_{ij} są zerowe z wyjątkiem $I_{zz} = M(t)z^2(t)$. W ogólnym przypadku, w którym masa statku kosmicznego zmienia się, mamy: $h_{zz} = \frac{2G}{Rc^4} (2M\dot{z}^2 + 4\dot{M}z\ddot{z} + 2Mz\ddot{z} + \ddot{M}z^2)$, gdzie kropka oznacza różniczkowanie względem czasu t w układzie detektora. W głównym tekście przyjęliśmy upraszczające założenie, że odrzut i jego masa są zaniedbywane. Po zastosowaniu tego założenia i zasady zachowania masy, pędu i trzeciego prawa Newtona dostaniemy wzór wyróżniony w tekście.

Tłumacz: Michał BEJGER

Podobnie jak fale elektromagnetyczne, fale grawitacyjne mogą być spolaryzowane na dwa sposoby: h_+ i h_\times . Można sobie wyobrazić spolaryzowaną falę h_+ poruszającą się w kierunku prostopadłym do płaszczyzny, w którym znajduje się płaski, kołowy rozkład mas testowych. Fala h_+ naprzemiennie rozciąga i ściska rozkład mas; fala spolaryzowana wyłącznie w polaryzacji h_\times robi to samo, ale pod kątem 45° . Aby wykryć falę, musimy obliczyć składowe h_+ i h_\times w celu określenia, jak silnie czasoprzestrzeń jest zaburzana przez falę grawitacyjną nadchodzącą z określonego kierunku i odległości. Następnie przeszukujemy dane obserwacyjne, używając zbioru „szablonów” (modeli) fal grawitacyjnych, które przewidujemy dla różnych źródeł o określonych parametrach.

Historia wygląda tak samo w przypadku przyspieszającego statku kosmicznego. Wyobraźmy sobie, że porusza się on ze stałym przyspieszeniem wzdłuż osi z , masa statku kosmicznego nie zmienia się znacząco, a fale są emitowane w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku ruchu (np. są spolaryzowane polaryzacją h_+). Przyjmując te założenia i wykonując pewne obliczenia matematyczne w ogólnej teorii względności, a następnie stosując zasady fizyki Newtona, takie jak zachowanie masy i pędu oraz trzecie prawo Newtona, otrzymamy

$$h = \frac{4GM}{Rc^4} v(t)^2,$$

gdzie h jest bezwymiarową wielkością reprezentującą odkształcenie czasoprzestrzeni pod wpływem fali grawitacyjnej (obserwowane wielkości byłyby rzędu 10^{-21} lub mniejsze). Parametr M to masa statku kosmicznego, G to stała grawitacyjna, c to prędkość światła, R to odległość między źródłem a detektorem i wreszcie $v(t)$ to prędkość statku kosmicznego, która zmienia się w czasie: im masywniejsze źródło i im bliżej się znajduje, tym silniejszy sygnał.

Założymy, że obiekt ma prędkość początkową v_0 i podlega stałemu przyspieszeniu A , począwszy od $t = 0$, przez okres T . W wyniku otrzymamy równanie na amplitudę fali h zależną od czasu i przyspieszenia:

$$h = \begin{cases} \frac{4GM}{Rc^4} v_0^2 & t < 0, \\ \frac{4GM}{Rc^4} (At + v_0)^2 & 0 < t < T. \end{cases}$$

Zakładając, że cały czas przyspieszenia jest objęty czasem obserwacji, można wykazać, że sygnały te mogą być wykrywane przez współczesne detektory. Interferometry LIGO lub Virgo mogą wykrywać sygnały w szerokim zakresie częstotliwości od 10 Hz do 10^4 Hz. Założymy, że czas obserwacji to około 5 minut, a czas przyspieszania to 10 sekund, i wybieramy energię kinetyczną statku kosmicznego w zakresie od $10^{-9} M_\odot c^2$ do $0,25 M_\odot c^2$ (czyli od statku kosmicznego o „normalnych rozmiarach” aż po gigantyczny obiekt o masie Słońca osiągający prędkości relatywistyczne).

Przy takich założeniach okazuje się, że np. statek kosmiczny o masie $\sim 10^{-2} M_\odot$ (10 mas Jowisza) zmieniający prędkość o $0,1c$ emitowałby fale grawitacyjne wykrywalne do odległości 10^5 – 10^6 pc od Ziemi, czyli mniej więcej takiej, jaka dzieli nas od galaktyki Andromedy. Na dolnym końcu zakresu widzimy, że masy w skali Merkurego $\sim 10^{-7} M_\odot$ przechodzące tę samą zmianę prędkości są wykrywalne do 1–10 pc, czyli w okolicy gwiezdnego otoczenia Układu Słonecznego (odległość do najbliższej gwiazdy, Proxima Centauri, to 1,3 pc).

Masa statku kosmicznego zwiększa się zgodnie z teorią względności. Na przykład statek o masie spoczynkowej $10^{-3} M_\odot$ będzie miał relatywistyczną masę $M = M_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2} \sim 1,33 \times 10^{-3} M_\odot$, gdy porusza się z prędkością $0,5c$. Energia równoważna tej dodatkowej masy wynosi $0,00033 M_\odot c^2 \sim 6 \times 10^{43}$ J; jest jasne, że Obcy potrzebują zaawansowanych technologicznie silników, aby przyspieszyć swój statek kosmiczny do tej prędkości.

Dotychczas obserwatoria LIGO i Virgo nie wykryły żadnego silnego sygnału tego typu, a zatem można zaryzykować stwierdzenie, że w ciągu ostatnich kilku lat w naszej Galaktyce nie było przyspieszającego statku kosmicznego o masie porównywalnej do masy Jowisza. Jednak rozwijając metodologię, poprawiając czułość detektorów, być może już wkrótce, gdy na odległej planecie Obcy uruchomią silniki swojego statku kosmicznego, będziemy w stanie je usłyszeć.

Z trzema kropkami trzeba uważać...

Michał MIŚKIEWICZ*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Należy domyślać się, że autor miał na myśli sumowanie następujących ciągów:

$$(A) a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}, \quad (B) b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \\ (C) c_n = (-1)^n, \quad (D) d_n = n.$$

Wątpliwości tego typu można uniknąć, zapisując sumę przy użyciu dużej litery sigma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \dots$$

Zadanie 1. Ze wzoru $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \dots + x + 1)$ wyprowadzić jawnego wzór na sumy kolejnych wyrazów (A) i wywnioskować, że zbiegają one do $\frac{2}{3}$.

Zadanie 2. Wykazać zbieżność szeregu (B) do $\ln(2)$. Można przyjąć bez dowodu, że różnica między $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ (sumą odwrotności pierwszych n liczb naturalnych) a $\ln(n)$ jest ciągiem zbieżnym.

(Dowód tego faktu można znaleźć w Δ_{23} , na marginesie artykułu Grzegorza Łukaszewicza).

Godne polecenia są artykuły na angielskojęzycznej Wikipedii poświęcone szeregom (C) (*Grandi's series, Summation of Grandi's series*) oraz (D) ($1 + 2 + 3 + 4 + \dots$). „Uzbieżnianiu” (B) oraz (C) i (D) poświęcone są świetne filmiki autorstwa Mathologera na platformie YouTubie:

Powell's π Paradox: the genius 14th century Indian solution,
Numberphile v. Math: the truth about
 $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$.

Zadanie 3. Sprawdzić, że metodą Cesàro otrzymujemy

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}, \\ 0 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}, \\ 1 + 0 + 0 + \dots \stackrel{C}{=} 1,$$

co ilustruje, że tą metodą można dwa szeregi sumować wyraz po wyrazie.

... zwłaszcza gdy kryje się za nimi konieczność wykonania nieskończenie wielu operacji. Związane z tym pułapki zobaczymy na przykładzie następujących nieskończonych sum, podanych w kolejności od najmniej do najbardziej podejrzanej:

$$(A) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{2}{3}, \quad (B) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2), \\ (C) \quad 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}, \quad (D) \quad 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}.$$

Pierwsza pułapka jest dość powierzchniowa: trzeba się domyślić, jakie są kolejne wyrazy sumy. Trudność tę można ominąć, podając ogólny wzór (jak na marginesie); w przypadku (A) będzie to $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$, dla $n = 0, 1, 2, \dots$

Drugą pułapkę szybko zauważymy, gdy odruchowo chwycimy za kalkulator i zaczniemy dodawać (względnie odejmować) kolejne wyrazy. Otóż wyrazów sumy jest nieskończenie wiele, a zatem przed nami nieskończenie dużo pracy. Odruch może się jednak opłacić – w przypadku (A) po uwzględnieniu pierwszych czterech wyrazów mamy 0,625 i każdy następny wynik też zaczyna się od 0,6. Po dziesięciu wyrazach na wyświetlaczu kalkulatora widzimy 0,666015625 i trzy szóstki już znajdują. Ogólnie $4k$ wyrazów wystarczy, by k pierwszych cyfr po przecinku ustaliło się jako same szóstki. W ten sposób dochodzimy do konkluzji, że suma (A) wynosi 0,(6), czyli właśnie $\frac{2}{3}$.

Szeregi zbieżne i rozbieżne. W ten sam sposób określa się wartość nieskończonych sum (uczenie mówimy: *szeregów*) w wielu innych przypadkach. Otóż patrzymy na tak zwany ciąg *sum częściowych*: $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots$ Jeśli ciąg ten jest zbieżny, to jego granicę przyjmujemy za szukaną wartość; w przeciwnym przypadku szereg (sumę) uznajemy za rozbieżny, nieposiadający dobrze określonej wartości. Według tej procedury w przypadku (B) uzyskujemy ciąg sum częściowych (w obcięciu do trzech cyfr po przecinku):

$$1,000, 0,500, 0,833, 0,583, 0,783, 0,616, 0,759, 0,634, 0,745, 0,645, \dots$$

Co prawda wcale tego nie widać, ale zbiega on do logarytmu naturalnego z 2, czyli w przybliżeniu 0,693 – przyjmijmy to na wiare.

Niestety już dla (C) sumy częściowe wynoszą na przemian 1 i 0, a więc nie tworzą ciągu zbieżnego. Matematykom zeszłych stuleci bardzo zależało, żeby temu i innym szeregom przypisać jednak jakąś wartość, wymyślili więc (nomen omen) szereg alternatywnych metod sumowania. Najprostszą jest sumowalność w sensie Cesàro – naszą dotychczasową procedurę wzbogacamy po prostu o dodatkowy krok, mianowicie ciąg sum częściowych zastępujemy ciągiem ich kolejnych średnich (n -ty wyraz takiego ciągu jest średnią z pierwszych n sum częściowych). Zamiast 1, 0, 1, 0, ... otrzymujemy w ten sposób

$$1,000, 0,500, 0,666, 0,500, 0,600, 0,500, 0,571, 0,500, 0,555, \dots,$$

co nieuchronnie zbiega do $\frac{1}{2}$. Warto odnotować, że metoda ta jest spójna z poprzednią: jeśli ciąg sum częściowych jest zbieżny, to ciąg ich średnich też, i to do tej samej granicy.

Do nadania sensu równości (D) potrzeba jeszcze więcej gimnastyki, gdyż wiąże się to z tak zwanym przedłużeniem analitycznym funkcji dzeta Riemanna.

Metoda ta ma mało wspólnego z sumowaniem kolejnych liczb, więc użycie tu trzech kropek można uznać za nadużycie. Zainteresowany Czytelnik może jednak dowiedzieć się więcej, siegając do odnośników na marginesie (lub do wielu innych dobrych opracowań).

Szczególny wspomnianych tu metod sumowania nie będą dla nas istotne, ważne jest jedynie to, że mają szereg własności wspólnych ze zwyczajnym sumowaniem skończenie wielu liczb. Na przykład, jeśli sumie $a_1 + a_2 + \dots$ jakaś metoda nada wartość A , a sumie $b_1 + b_2 + \dots$ wartość B , to ta sama metoda sumie $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots$ przypisze wartość $A + B$. Metody te pozwalają więc



Rozwiązywanie zadania F 1094.

Okres drgań T wahadła fizycznego o masie m , momencie bezwładności I względem osi obrotu odległej o d od środka masy wahadła wynosi (g oznacza przyspieszenie ziemskie):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}.$$

Zmiana temperatury o $\Delta t = t_2 - t_1$ towarzyszy zmiana odległości atomów materiału wahadła $\alpha = 1 + \beta \Delta t$. W tym samym stosunku zmieni się też odległość osi obrotu od środka masy wahadła, przyjmując wartość $d' = \alpha d$, a moment bezwładności przyjmie wartość $I' = \alpha^2 I$. Masa wahadła oczywiście pozostaje niezmieniona. Tym samym zimą okres wahadła wyniesie:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{mgd'}} = T\sqrt{\alpha}.$$

Dla podanych wartości temperatur zimą $\alpha = 1 - 1,33 \cdot 10^{-4} < 1$, co oznacza, że zegar się spieszycy. Różnica wskazań w stosunku do czasu dokładnego wyniesie więc 1 minutę po około $1,5 \cdot 10^4$ minutach, czyli po około 256,6 godziny, tj. ponad 10 dniach, jeśli założymy, że przez cały ten czas w pomieszczeniu panowała temperatura $t_2 = 18^\circ\text{C}$. Warto zauważycy, że, jak pokazuje nasze rozumowanie, wszystkie zegary z wahadłami wykonanymi z mosiądzu o takim samym składzie będą się jednakowo spieszły.

Sumowanie à la Lebesgue. Zaczniemy od sumowania nieskończoności wielu liczb nieujemnych. Dla większej przejrzystości konstrukcji rozważmy nie tyle sumę ciągu liczb, co sumę wartości funkcji $a: X \rightarrow [0, \infty)$ określonej na pewnym zbiorze X . Jako wartość sumy $\sum a$ przyjmiemy supremum zbioru

$$\left\{ \sum_{y \in Y} a(y) : Y \subseteq X \text{ jest skończonym podzbiorem} \right\}.$$

Jest to najmniejsza liczba nie mniejsza od wszystkich pojawiających się wewnętrz klamerek powyżej. Innymi słowy, rozpatrujemy tylko skończone sumy wartości funkcji a ; jeśli zbiór tych skończonych sum jest ograniczony z góry, to za $\sum a$ przyjmujemy najmniejsze ograniczenie górne; w przeciwnym przypadku przyjmujemy $\sum a = \infty$.

Podstawowa zaleta tej definicji jest oczywista: określona przez nas suma nie zależy od kolejności elementów zbioru X , bo też żadnej kolejności nie wyróżniliśmy. Za zbiór X można przyjąć zbiór liczb naturalnych \mathbb{N} , a funkcje $a: \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ utożsamiać z ciągami (a_n) o wyrazach nieujemnych. W ten sposób otrzymaliśmy pojęcie sumowalności szeregów o wyrazach nieujemnych zupełnie niezależne na kolejność wyrazów.

Zadanie 4. Sprawdzić, że określona właśnie suma $\sum a$ pokrywa się z sumą $\sum a_n$ określoną jako granica ciągu sum częściowych.

Żeby rozszerzyć to pojęcie na szeregi $\sum a$ o dowolnych wyrazach rzeczywistych, sumujemy osobno wyrazy dodatnie i ujemne (przed tymi drugimi dostawiając minus) – jeśli jedne i drugie mają skończoną

„udawać”, że mamy do czynienia ze zwykłą sumą. Ale tutaj czeka na nas ostatnia pułapka...

Twierdzenie Riemanna. Dodawanie jest przemienne: $1 + 2 = 2 + 1$ i ogólnie suma dowolnie wielu liczb nie zależy od kolejności sumowania. I tutaj udawanie się kończy. W sumie (B) ustawiemy wyrazy w innej kolejności:

$$(B') \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots,$$

a więc zawsze po dwa dodatnie i jeden ujemny. Suma pierwszych trzech wyrazów to $\frac{5}{6} \approx 0,833$ i łatwo się przekonać, że kolejne sumy częściowe już nigdy nie spadają poniżej tej wartości, bo każda kolejna trójka daje dodatni wkład. W granicy na pewno otrzymujemy więc inny wynik niż w (B); istotnie, okazuje się, że jest to $\frac{3}{2} \ln(2) \approx 1,039$.

Może być gorzej! Twierdzenie dowiedzione przez Bernharda Riemanna mówi, że odpowiednio dobierając kolejność wyrazów, możemy w granicy otrzymać każdą liczbę rzeczywistą. Co więcej, tak samo jest dla każdego innego szeregu $\sum a_n$ zbieżnego warunkowo, czyli takiego, że szereg wartości bezwzględnych $\sum |a_n|$ sumuje się do nieskończoności (co oznacza, że ciąg sum częściowych jest zbieżny do nieskończoności).

I z tej pułapki jest wyjście. W ramach kursu analizy matematycznej studenci poznają zazwyczaj twierdzenie mówiące, że suma szeregu $\sum a_n$ nie zależy od kolejności sumowania, o ile szereg jest zbieżny bezwzględnie, co znaczy, że szereg $\sum |a_n|$ jest zbieżny. Twierdzenie to często pozostawia wrażenie, że nieskończone sumowanie nie jest przemienne, a jedynie pewne dodatkowe założenia pozwalają tę przemienność wymusić. Ale czy tak musi być? Postaram się przekonać Czytelnika, że nie.

sumę, odpowiednio S_+ i S_- , to za sumę całości przyjmujemy $S_+ - S_-$.

Zadanie 5. Przekonać się, że powyższy warunek sumowalności szeregu $\sum a$ jest równoważny warunkowi $\sum |a| < \infty$, a określona właśnie suma pokrywa się z $\sum a_n$.

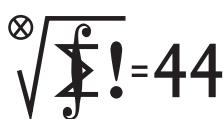
Gdy kotaś z sum S_+, S_- jest nieskończona, szereg uznajemy za niesumowalny (co niestety ogranicza naszą metodę do szeregów bezwzględnie zbieżnych).

Jaki z tego moral? Po pierwsze, możemy odetchnąć z ulgą, że przemienność jest cechą przysługującą sumom tak skończonym, jak i nieskończonym, a fenomen twierdzenia Riemanna można złożyć na karb zbyt tolerancyjnych metod sumowania szeregów.

Po drugie, opisany sposób sumowania nie jest jedynie wymyślona ad hoc sztuczka; wręcz przeciwnie, jest to szczególny przypadek całki Lebesgue'a. Czytelnik znający to pojęcie – na przykład z artykułu w Δ_{22}^4 – wie, że całka Lebesgue'a to sposób „nieskończonego sumowania” naturalnie stwarzyszony z miarą. Przykładem miary na zbiorze liczb naturalnych \mathbb{N} jest miara licząca ℓ , każdemu zbiorowi $A \subseteq \mathbb{N}$ przypisująca jego licznosć. I okazuje się, że suma $\sum a$ jest tożsama z całką Lebesgue'a $\int_{\mathbb{N}} a(n) d\ell(n)$ względem miary liczącej ℓ .

Ostatni moral jest nieco pesymistyczny. Sprowadzając zagadnienie sumowania do problemu mierzenia, wpadamy z deszczu pod rynnę – dziedzina ta jest bowiem bogata w paradoksy, jak choćby twierdzenie Banacha–Tarskiego (zob. O kul rozmnążaniu w Δ_{17}^4). Cóż, trzeba uważać...

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2024

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
865 ($WT = 1,27$) i 866 ($WT = 2,68$)
z numeru 9/2023

Radosław Kujawa	Wrocław	43,57
Paweł Najman	Kraków	43,16
Marek Spychała	Warszawa	41,47
Adam Woryna	Ruda Śl.	40,91
Janusz Fiett	Warszawa	40,89
Jerzy Cisło	Wrocław	38,97
Piotr Kumor	Olsztyn	37,94
Janusz Olszewski	Warszawa	37,56
Paweł Kubit	Kraków	36,11
Piotr Wiśniewski	Warszawa	33,64



Rozwiążanie zadania M 1779.

Polóżmy wielokąt tak, aby wszystkie jego boki były poziome lub pionowe. Wierzchołki wielokąta można podzielić na 4 typy: Γ , \neg , \sqcup , \sqcap . Oznaczmy liczbę wierzchołków każdego z typów przez S_1, S_2, S_3, S_4 .

Bez utraty ogólności rozważmy wierzchołek A typu 2. Wtedy wierzchołki, które są z nim wrogie, są typu 1 lub 4, zatem ich liczba to $S_1 + S_4$. Rozważmy dowolny poziomy bok. Jego lewy koniec może być typu 1 lub 3, natomiast prawy typu 2 lub 4. Każdy wierzchołek jest końcem dokładnie jednego poziomego boku. Ponieważ liczba lewych końców boków poziomych jest równa liczbie wszystkich prawych końców boków poziomych, otrzymujemy równość $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$. Podobne rozumowanie z bokami pionowymi daje równość $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$. Łącząc obydwie równości, dostajemy, że $2S_1 = 2S_4$, czyli $S_1 + S_4 = 2S_4$ jest liczbą parzystą.

872. Oznaczmy $W_j(1) = c_j$. Weźmy dowolną liczbę n postaci $n = kc_1 \dots c_m + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Ustalmy $j \in \{1, \dots, m\}$. Różnica $W_j(n) - W_j(1)$ dzieli się przez $n - 1$, więc i przez c_j . Skoro $c_j = W_j(1)$, znaczy to, że $W_j(n)$ dzieli się przez c_j . Przy tym dla dostatecznie

Zadania z matematyki nr 879, 880

Redaguje Marcin E. KUCZMA

879. Funkcje f i g , o wartościach rzeczywistych, są określone na przedziale $[a, b]$; funkcja g jest rosnąca; $f(a) > 0 > f(b)$. Wiadomo ponadto, że różnica $f - g$ jest funkcją ciągłą. Udowodnić, że w pewnym punkcie przedziału (a, b) funkcja f przyjmuje wartość 0.

880. Rozstrzygnąć, czy zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych \mathbf{Q}_+ daje się przedstawić w postaci sumy dwóch zbiorów rozłącznych A, B tak, by miały miejsce następujące implikacje (dla $x, y \in \mathbf{Q}_+$):

- jeśli $xy = 1$, to $x \in A, y \in A$ lub $x \in B, y \in B$;
- jeśli $|x - y| = 1$, to $x \in A, y \in B$ lub $x \in B, y \in A$.

Zadanie 880 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązań zadań z numeru 12/2023

Przypominamy treść zadań:

871. Dana jest liczba całkowita parzysta $n > 0$.

(a) Dowieść, że w przedziale $[n+1, 2n+1]$ zawiera się n -elementowy zbiór liczb całkowitych M taki, że żaden jego element nie jest dzielnikiem sumy wszystkich liczb zbioru M .

(b) Wyjaśnić, czy zawsze istnieją (w tym przedziale) co najmniej dwa różne zbiory n -elementowe o powyższych własnościach.

872. Wielomiany W_1, \dots, W_m (jednej zmiennej), stopni dodatnich, mają dodatnie współczynniki całkowite. Wykazać, że dla nieskończoności wielu liczb całkowitych $n > 0$ wartości $W_1(n), \dots, W_m(n)$ są jednocześnie liczbami złożonymi.

871. Niech $M^* = \{n+1, n+2, \dots, 2n+1\}$ i niech S będzie sumą elementów zbioru M^* . Niech $M_k = M^* \setminus \{k\}$ (dla $k \in M^*$). Będziemy mówili, że liczba $k \in M^*$ jest ciekawa, gdy suma elementów zbioru M_k (czyli liczba $S - k$) nie dzieli się przez żaden z nich.

(a) Należy wykazać, że co najmniej jedna liczba $k \in M^*$ jest ciekawa.

Przyjmijmy dalsze oznaczenie:

$$N_k = \{i \in M^* : i | S - k\}.$$

Odnotujmy proste własności:

W1. Jeśli $N_k = \emptyset$, to liczba k jest ciekawa.

W2. Jeśli $k | S$, to $k \in N_k$ (więc $N_k \neq \emptyset$).

W3. Jeśli $k | S$ oraz $|N_k| = 1$, to liczba k jest ciekawa.

W4. Zbiory N_k są parami rozłączne.

Własności W1, W2, W3 są oczywiste. Dowód W4: gdyby $i_0 \in N_k \cap N_l$ ($k > l$), to $i_0 | k - l$; a to niemożliwe, bo $i_0 \geq n + 1$, zaś $k - l \leq (2n+1) - (n+1) = n$.

Z własności W4 wynika, że

$$(*) \quad \sum_{k \in M^*} |N_k| \leq |M^*| = n + 1.$$

Suma (*) ma $n + 1$ składników. Jeżeli któryś z nich jest zerem, to jest to już teza (a) (własność W1). Jeżeli nie, to wszystkie są równe 1. Prosty rachunek pokazuje, że $S = cd$, gdzie $c = n + 1$, $d = \frac{3}{2}n + 1$ ($c, d \in M^*$); więc i teraz dostajemy tezę (a), bo (dzięki W3) liczba c jest ciekawa (d zresztą też).

(b) Tu też odpowiedź jest twierdząca: wykażemy, że w zbiorze M^* są co najmniej dwie liczby ciekawe. Jeśli wśród składników sumy (*) są co najmniej dwa zera, to gotowe (W1). Jeśli wszystkie są dodatnie, to są jedynkami i znów (wobec W3) liczby c i d są obie ciekawe.

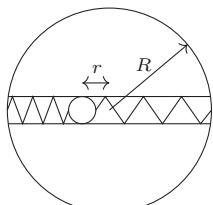
Pozostaje przypadek, gdy wśród składników sumy (*) jest dokładnie jedno zero; niech np. $|N_e| = 0$: liczba e jest więc ciekawa (W1); $e \neq c, d$, bo $N_c, N_d \neq \emptyset$ (W2). Pozostałe składniki sumy (*) to albo same jedynki, albo dwójka i poza nią jedynki. Co najmniej jedna z liczb c, d musi być wśród jedynek – jest więc ciekawa (W3); dowód zakończony.

dużych n wartość $W_j(n)$ przekracza c_j ; jest więc liczbą złożoną. Tak jest dla każdego numeru j , skąd wniosek, że dla dostatecznie dużych n (rozważanej postaci) wszystkie wartości $W_1(n), \dots, W_m(n)$ są liczbami złożonymi.

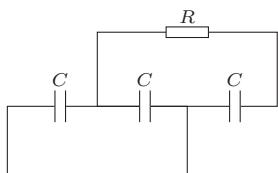
Klub 44 F



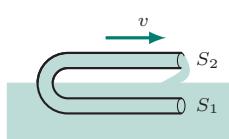
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2024



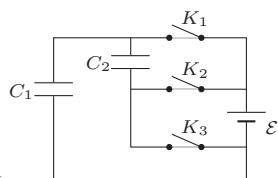
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
762 (WT = 3,01), 763 (WT = 2,46)
z numeru 9/2023

Tomasz Rudny	Poznań	43,41
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2-43,02
Tomasz Witecha	Tarnów	16-40,60
Jacek Konieczny	Poznań	38,28
Konrad Kapcia	Poznań	2-35,60
Ryszard Woźniak	Kraków	32,96
Ryszard Baniewicz	Wrocław	1-32,41
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5-24,61
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3-22,20
Paweł Kubit	Kraków	15,73
Jan Zambrzycki	Białystok	4-13,69

W rozwiązyaniu zadania **762** w numerze styczniozym prawna strona równania wyrażającego zasadę zachowania energii powinna mieć postać: $3\sqrt{p_f^2 c^2 / 9 + m^2 c^4}$.

Zadania z fizyki nr 776, 777

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

776. Na poziomej powierzchni stoi jednorodna, cienka obręcz o masie M i promieniu R . Poziomą średnicę obręczy stanowi lekka, gładka rurka, wewnątrz której umieszczono kulkę o masie m przylegającą do rurki i połączoną z obręczą dwiema sprężynami o współczynnikach sprężystości k (rys. 1). Przytrzymując obręcz, kulkę odchyliono w lewo o x , po czym układ pozostawiono samemu sobie. Znaleźć przyspieszenie środka obręczy w chwili początkowej, zakładając brak poślizgu obręczy.

777. Trzy jednakowe kondensatory o pojemnościach C połączono szeregowo, podłączono do źródła o sile elektromotorycznej \mathcal{E} i po naładowaniu odłączono od baterii. Następnie do układu podłączono jednocześnie dwa oporniki o oporach R (rys. 2). Jaka ilość ciepła wydziela się na każdym oporniku? Jakie natężenia mają prądy płynące przez oporniki w chwili, gdy napięcie na środkowym kondensatorze jest 10 razy mniejsze od siły elektromotorycznej baterii?

Rozwiązań zadań z numeru 12/2023

Przypominamy treść zadań:

768. Otwarta z dwóch stron rurka w kształcie litery U porusza się z prędkością v równolegle do powierzchni cieczy (rys. 3). Przeciążeń zanurzonej w cieczy dolnej części rurki wynosi S_1 , a górnej, znajdującej się nad cieczą, jest równy S_2 . Jaka siła zewnętrzna działa na rurkę w kierunku poziomym? Tarcie i powstawanie fal należy zaniedbać. Gęstość cieczy wynosi ρ .

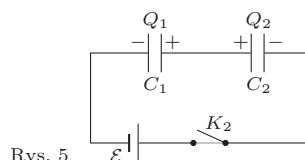
769. W układzie przedstawionym na rysunku 4 na początku wszystkie klucze są otwarte, a kondensatory o pojemnościach C_1 i C_2 nienalożone. Klucze K_1 i K_3 zostały zamknięte i po ustaleniu równowagi otwarte, po czym zamknięty został klucz K_2 . Znaleźć napięcie końcowe na kondensatorze C_1 . Siła elektromotoryczna baterii wynosi \mathcal{E} .

768. W inercjalnym układzie odniesienia związanym z rurką, ciecz w dolnej części rurki porusza się z prędkością v . W czasie Δt do rurki wpływa porcja cieczy o masie $m = \rho S_1 v \Delta t$ i pędzie $p_1 = mv = \rho S_1 v^2 \Delta t$. W tym samym czasie porcja o takiej samej masie wycieka z górnej części rurki z prędkością $u = v S_1 / S_2$, a jej pęd $p_2 = \rho S_2 u^2 \Delta t = \rho v^2 S_1^2 \Delta t / S_2$. Wektor zmiany pędu cieczy w rurce w czasie Δt ma wartość $\Delta p = mv - (-mu) = \rho S_1 (1 + S_1 / S_2) v^2 \Delta t$ i skierowany jest w prawo. Ciecz działa na rurkę w lewo, a szukana siła zewnętrzna działająca na rurkę nie zależy od wyboru inercjalnego układu odniesienia, skierowana jest w prawo i ma wartość

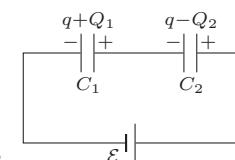
$$F = \Delta p / \Delta t = \rho S_1 (1 + S_1 / S_2) v^2.$$

769. Po zamknięciu kluczy K_1 i K_3 kondensatory są połączone równolegle z baterią, a ładunki na nich to $Q_1 = C_1 \varepsilon$ i $Q_2 = C_2 \varepsilon$. Sytuację przed zamknięciem klucza K_2 przedstawia rysunek 5. Po zamknięciu klucza K_2 do prawej okładki kondensatora C_2 dopływa ładunek q , z lewej okładki kondensatora C_1 odpływa taki sam ładunek. Całkowity ładunek na wewnętrznych okładkach pozostaje niezmieniony (rys. 6). Z drugiego prawa Kirchhoffa mamy: $\varepsilon = (Q_2 - q) / C_2 - (Q_1 + q) / C_1$, stąd $q = C_1 C_2 \varepsilon / (C_1 + C_2)$. Napięcie końcowe na kondensatorze C_1 wynosi:

$$U = (Q_1 + q) / C_1 = \varepsilon (C_1 + 2C_2) / (C_1 + C_2).$$



Rys. 5



Rys. 6

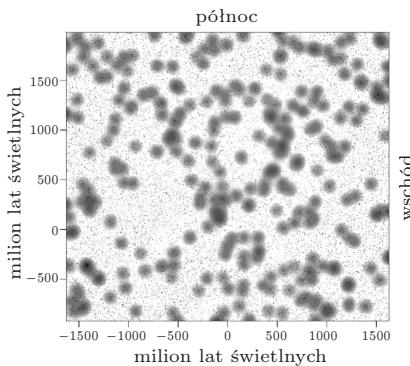
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

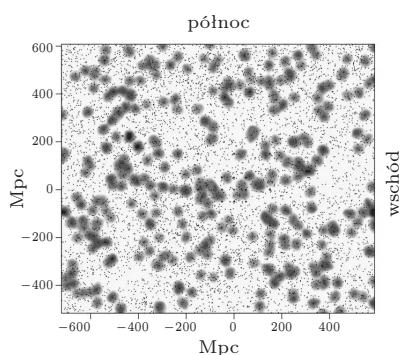
współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązań tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



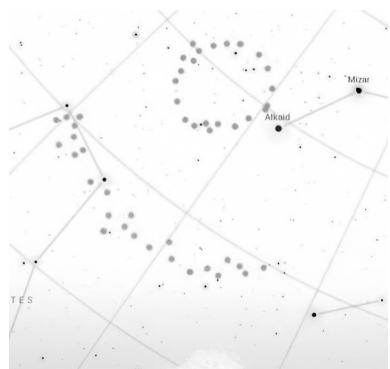
Prosto z nieba: Wielki Pierścień to wielki problem



Rys. 1. Wielki Pierścień. W szarych obszarach absorbowane jest promieniowanie jonów magnezu wskazujące na obecność materii. Pierścień nie jest widoczny gołym okiem na niebie, ale gdyby był, to miałby średnicę około 15 tarzów Księżyca. Źródło: University of Central Lancashire



Rys. 2. Ogromny Łuk odkryty w 2021 roku przez Alexię Lopez. Źródło: Lopez, Alexia M., et al. (2022), MNRAS, 516



Rys. 3. Wizja artystyczna Wielkiego Pierścienia (na górze) i Ogromnego Łuku (na dole), tak jak wyglądałyby na niebie. Źródło: Stellarium i University of Central Lancashire

W styczniu 2024 roku Uniwersytet Środkowego Lancashire opublikował komunikat prasowy o odkryciu przez jedną z doktorantek – Alexię Lopez – nowej ogromnej struktury galaktyk. Ponieważ struktura ta jest duża i ma kształt pierścienia, nazwano ją oczywiście... Wielkim Pierścieniem (ang. *Big Ring*, rys. 1). Wielki Pierścień ma średnicę 1,3 miliarda lat świetlnych i obserwujemy go takim, jaki był około 6 miliardów lat temu. Jest nie tylko duży, ale też jest potencjalnie dużym wyzwaniem (żeby nie powiedzieć problemem) dla standardowego modelu kosmologicznego. Ponieważ według tego modelu... nie powinien istnieć.

Standardowy model kosmologiczny jest naszym najlepszym modelem opisującym Wszechświat i wszystko, co się w nim znajduje od początku jego istnienia aż do współczesności. Opiera się oczywiście na serii założeń. Między innymi na zasadzie kosmologicznej, która mówi, że Wszechświat jest jednorodny i izotropowy w dużych skalach przestrzennych. Innymi słowy – dla każdego obserwatora znajdującego się w dowolnym miejscu Wszechświat wygląda podobnie. A jeszcze innymi słowy, oznacza to, że po uśrednieniu na odpowiednio dużej skali przestrzennej materia jest jednorodnie rozłożona we Wszechświecie. Jak duża jest „odpowiednio duża” skala? To zależy od modelu. W każdym razie założenie to ustawia teoretyczny limit rozmiaru struktur, jakie mogą (wg. tego modelu) istnieć we Wszechświecie. Limit ten nazywamy skalą jednorodności. Dla Wszechświata istniejącego 6 miliardów lat temu (moment, w jakim obserwujemy Wielki Pierścień) według standardowego modelu kosmologicznego wynosi około 1,2 miliarda lat świetlnych. Obserwacje struktur większych niż ten limit stanowią potencjalne wyzwanie dla założeń modelu kosmologicznego.

Wielki Pierścień łamie ten limit, bo jest... większy. Co gorsza, nie jest też pierwszą tego typu strukturą, jaką zaobserwowaliśmy. Już w 1991 roku odkryto grupę kwazarów (mniej więcej w tej samej odległości co Wielki Pierścień) rozciągającą się na długości ponad 2 miliardów lat świetlnych; od 2003 roku wiemy też o istnieniu „Wielkiej ściany” – megastruktury galaktyk o rozmiarze 1,5 miliarda lat świetlnych. W 2021 roku ta sama studentka, Alexia Lopez, odkryła Ogromny Łuk (ang. *Giant Arc*) rozciągający się na aż 3,3 miliarda lat świetlnych (rys. 2). Co ciekawe, ta ostatnia struktura i Wielki Pierścień znajdują się bardzo blisko siebie (tylko $\sim 12^\circ$ na niebie) i istniały w tym samym momencie ewolucji Wszechświata (rys. 3).

Oczywiście mogło się zdarzyć, że te ogromne skupiska materii powstały przez przypadek, ponieważ materia na początku istnienia Wszechświata była rozłożona losowo. Mogły wystąpić w niej duże losowe zagęszczenia lokalne. Możemy obliczyć prawdopodobieństwo powstania takich zagęszczeń. I tak prawdopodobieństwo powstania odpowiednio dużego zagęszczenia materii dla powstania Wielkiego Pierścienia wynosi aż 1:3 milionów (nie uwzględniając pozostałych ogromnych struktur, które zaobserwowaliśmy).

Czy mamy więc niesamowite *szerokość* i te ogromne struktury powstały przez przypadek? A może Wszechświat wcale nie jest jednorodny? Czy nasze założenie zasady kosmologicznej jest zbyt rygorystyczne? Czy nasz najlepszy model Wszechświata jest zły? A może wystarczy tylko trochę zwiększyć skalę jednorodności?

Na razie nie znamy odpowiedzi na żadne z tych pytań. Jednak w świetle kolejnych obserwacji i doniesień o konieczności modyfikacji modelu kosmologicznego jedno wiemy na pewno – żyjemy w fascynujących czasach dla kosmologów.

Artykuł ten pisany był na początku stycznia 2024 roku, nie istnieje jeszcze publikacja naukowa na temat Wielkiego Pierścienia. Artykuł oparty jest na komunikacie prasowym Uniwersytetu Środkowego Lancashire i prezentacji Alexii Lopez z 243 spotkania Amerykańskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Niebo w kwietniu

W czwartym miesiącu roku Słońce nadal szybko wędruje na północ, wyraźnie ograniczając możliwość nocnych obserwacji ciał niebieskich. Przez cały kwiecień dzień w środkowej Polsce wydłuży się o prawie dwie godziny i wyniesie około 15 godzin. W kwietniu Słońce przemieści się od środka gwiazdozbioru Ryb do środka gwiazdozbioru Barana.

Na początku miesiąca noce są ciemne, prawie pozbawione blasku Księżyca. Mimo tego, że 2 kwietnia przejdzie on przez ostatnią kwadrę, to znajdzie się wtedy w gwiazdozbiorze Strzelca i dodatkowo kilka stopni pod ekliptyką (niecałe 3° na południe od jasnej gwiazdy Nunki, σ Sgr). Dlatego Księżyc pojawi się na niebie pod koniec nocy astronomicznej i zanim zdąży się wznieść trochę wyżej, niebo się rozjaśni. Można oczywiście próbować dostrzec go w dzień. Niemalże do nowiu, 8 kwietnia, cienki sierp Księżyca przy czystym niebie rankiem da się odnaleźć kilka-kilkanaście stopni nad południowo-wschodnią częścią nieboskłonu.

Dla mieszkańców większości Ameryki Północnej (poza Alaską) będzie to szczególnyów, ponieważ dojdzie wtedy do całkowitego zaćmienia Słońca. Pas fazy całkowitej przetnie Ziemię mniej więcej od państwa Kiribati na Oceanie Spokojnym poprzez Meksyk, środkowo-wschodnią część USA i Nową Fundlandię w Kanadzie, by opuścić powierzchnię naszej planety gdzieś na północ od archipelagu Azorów na Atlantyku. Najdłużej faza całkowita zaćmienia potrwa w Meksyku, gdzie korona słoneczna pozostanie widoczna przez 4 minuty i 28 sekund. Szczęśliwcy po zachodniej stronie zaćmionego Słońca ujrzą planety Wenus, Mars i Saturn, po wschodniej zaś – Jowisza z Merkurym oraz prawdopodobnie jasną wtedy, wędrującą jakieś 7° na północny zachód od Jowisza komety 12P/Pons-Brooks. W Europie niestety zaćmienie jest niewidoczne.

Przed nowiem na wieczornym niebie nisko nad zachodnim horyzontem można obserwować wspomniane już planetę Jowisz i kometę 12P/Pons-Brooks oraz planetę Uran. Oczywiście najlepiej widoczny jest Jowisz, którego blask przekracza -2^m , a średnica tarczy – $34''$. Największa planeta Układu Słonecznego zbliża się coraz bardziej do Urana. 20 kwietnia dystans między planetami zmniejszy się do $30'$. Uran świeci jednak z jasnością $+5,8^m$ i wtedy zginie już raczej w zorzy wieczornej. Tę planetę można próbować odnaleźć na początku miesiąca. Kometa 12P/Pons-Brooks zacznie miesiąc w odległości niewiele przekraczającej 1° od Hamala, najjaśniejszej gwiazdy Barana, by w drugiej dekadzie kwietnia przejść nieco ponad 3° od Jowisza. Jeśli prognozy się sprawdzą, kometa wyraźnie odetnie się na tle ciemnego nieba. Pozostanie ona jednak widoczna tylko na początku miesiąca. Potem zniknie w blasku Słońca, wschodząc i zachodząc w czasie dnia.

Na pożegnanie ze wszystkimi wspomnianymi ciałami Układu Słonecznego spotka się bardzo wąski sierp Księżyca. Jego tarczą można próbować odnaleźć już 9 kwietnia, jakieś 26 godzin po nowiu, gdy jego tarcza o zmierzchu zajmie pozycję na wysokości zaledwie 2° nad zachodnią częścią nieboskłonu, prezentując fazę niewiele większą od 1%. W jego odszukaniu może przydać się lornetka oraz planeta Jowisz. Księżyc znajdzie się na 5 godzinie, ponad 15° od niej. Dobę później dostrzeżenie tarczy Księżyca nie sprawi kłopotu, gdyż o tej samej porze wznieś się on na wysokość 15° , zwiększając fazę do 5%. Tego wieczora Jowisz pokaże się $3,5^{\circ}$ na lewo od Srebrnego Globu, kometa natomiast w podobnej odległości, ale pod nim.

W kolejnych nocach planety i kometa zbliżą się do horyzontu i wkrótce znikną w blasku Słońca, Księżyca zaś powędruje wysoko, rozświetlając nocne niebo. 11 kwietnia

jego faza zwiększy się do 12% i zajmie on pozycję $2,5^{\circ}$ od Plejad, jasnej gromady otwartej gwiazd w Byku. Tej nocy Srebrny Glob zakryje świecącą z jasnością obserwowaną $+5,5^m$ gwiazdę 36 Tau. Przy czym całe zjawisko da się zaobserwować tylko na północ od linii (mniej więcej) Cieszyn – Chrzanów – Kielce – Łuków. Na południe od niej Księżyc zajdzie przed odkryciem 36 Tau. Gwiazda zniknie za ciemnym brzegiem księżycowej tarczy około godziny 22:45, by pojawić się po jej jasnej stronie 50 minut później. Zjawisko ładnie zaprezentuje się w lornetce lub teleskopie z małym powiększeniem.

Następne dwie noce naturalny satelita Ziemi spędzi na pograniczu gwiazdozbiorów Byka i Woźnicy, odwiedzając drugą co do jasności gwiazdę Byka El Nath. Najpierw księżykowa tarcza w fazie 20% dotrze doń na odległość 6° od strony zachodniej, dobę później faza Księżyca zwiększy się do 30% i pokaże się on w podobnej odległości po stronie wschodniej El Nath. 15 kwietnia Srebrny Glob w I kwadrze zbliży się na 3° do Polluxa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniat.

Miedzy I kwadrą a pełnią warto wspomnieć o spotkaniu, 16 kwietnia, Księżyca w fazie 60% z jasną gromadą otwartą gwiazdą M44 w Raku. Oba ciała niebieskie przedzieli dystans $3,5^{\circ}$. O 2° bliżej znajdzie się gwiazda Asellus Borealis (γ Cnc), stanowiąca północno-wschodni róg trapezu gwiazd otaczającego M44. Dwa dni później Księżyca zwiększy fazę do 78% i pokaże się niecałe 4° od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa.

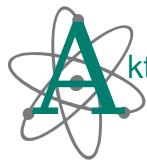
20 dnia miesiąca Srebrny Glob dotrze do gwiazdozbioru Panny, zwiększając fazę do 91%. Tej nocy dojdzie do zakrycia jeszcze jaśniejszej gwiazdy Zavijava (β Vir), lecz przy znacznie mniej sprzyjającej obserwacjom fazie Księżyca. Tym razem przez Polskę przebiegnie południowa granica zjawiska. Na linii przebiegającej mniej więcej od jeziora Gardno poprzez Bytów, Toruń, Stryków koło Łodzi, Chęciny koło Kielc po Jasło dojdzie do zakrycia brzegowego. Na zachód od niej do zakrycia nie dojdzie. Im bliżej granicy, tym zakrycie potrwa krócej. Na przykład w Krośnie od zakrycia do odkrycia minie tylko 9 minut, w Suwałkach – 36 minut. Do zakrycia dojdzie około północy.

W nocy z 22 na 23 kwietnia już prawie pełny Księżyca zbliży się do Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny. Nad ranem dystans między tymi ciałami niebieskimi zmniejszy się do 1° . Kolejnej nocy Srebrny Glob przejdzie przez pełnię w obszarze nieba pozbawionym jasnych gwiazd, w połowie drogi między Spiką a gwiazdą Zuben Elgenubi w Wadze. Pod tą drugą gwiazdą Księżyca pokaże się w nocy z 24 na 25 kwietnia, zbliżając się doń na około 4° .

Do końca miesiąca Księżyca spotka się jeszcze z Antaresem w Skorpionie w nocy z 26 na 27 kwietnia, z tarczą oświetloną wciąż w ponad 90%. Naturalny satelita Ziemi wędzie niewiele przed północą w odległości $1,5^{\circ}$ od najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona, a w trakcie nocy dystans między tymi ciałami niebieskimi zwiększy się o 2° .

W kwietniu wciąż jasna jest długookresowa gwiazda zmienna R Leonis, która w ostatnich dniach marca osiągnęła maksimum swojej jasności i nadal powinna przekraczać granicę widoczności gołym okiem. R Leo znajduje się 5° na zachód od Regulusa, niedaleko gwiazd 18 i 19 Leonis, i góruje po godzinie 21, wznosząc się wtedy na wysokość około 50° , by znikać za horyzontem po godzinie 4. Jest zatem dobrze widoczna przez mniej więcej 5 godzin. Gwiazda wyróżnia się ciemnowiśniową barwą, wyraźnie widoczną nawet w lornetkach czy małych teleskopach. Łatwo ją dzięki temu zidentyfikować.

Ariel MAJCHER



Poetycka strona fizyki

Fizyka jest dla wielu osób niezwykle piękna, ale także chłodna i konkretna. Doświadczenia i rozumowania fizyczne rzadko obdarzane są uwagą poetów. Warto zatem odnotować kilka przypadków przeczyjących tej regule. Twórca „Ballad i romansów” nieczęsto można przyłąpać na wycieczkach w stronę nauk ścisłych. Tym bardziej wyróżnia się w twórczości Adama Mickiewicza niewielki wiersz poświęcony w całości elektromagnetyzmowi. „Toasty” kończą się następującą zwrotnią.

*Tak gdy zrośniętem w okrąg wielki
Przez magnesowaną styczność,
Wówczas z lejdejskiej butelki
Palniem: WIWAT elektryczność!*

W XIX wieku badania nad elektrycznością i magnetyzmem były nowością i nierzadko interesowały osoby niemające na co dzień nic wspólnego z fizyką. Głośne były np. pokazy Benjamina Franklina dla paryskiej socjety. Nie zaskakuje zatem, że Zygmunt Krasiński wykorzystał jakże poręczną metaforę fizyczną, pisząc złowrogą przepowiednie:

*Mord elektrycznym prądem się rozpostrze,
Syn przeciw ojcu pochwyci za ostrze,
Brat przeciw bratu – siostra przeciw siostrze*

Nurt fizyczny i poetycki połączły się w twórczości Jamesa Clerka Maxwella, którego równania zunifikowały także elektryczność i magnetyzm. Maxwell miał w zwyczaju wyjaśniać swoje pomysły także wierszem, w utworach adresowanych do przeciwników jego teorii. Pojęcie pola upowszechniał na przykład następującą strofą:

*Siła to zatem Siła, ale uwaga! – wektor, nie rzecz,
Zadziornym twym strzałom brakuje żądła, Widmo
bezsilne, idźże precz!
Twój rząd, o Siło, dobiegł już końca. Nie masz już
nic. Czymże twe działanie?
Odpychanie zostawia nas tam, gdzie byliśmy – jak
przyciąganie.*

W poezji XX wieku rzadziej spotyka się takie długie i kunsztownie splecone wersy. Absolutny mistrz polskiej mowy, jakim był Julian Tuwim, potrafił obrócić w lirykę absolutnie wszystko. Fizyka jako tło duchowego rozedrgania wypada niezwykle przekonująco w wierszu „Nauka”:

*Wiem o kuli, napełnionej lodem,
O bursztynie, gdy się go pociera...
Wiem, że ciało pogräżone w wodę
Traci tyle, ile... et cetera.*

Rozwój nauki przekładał się zawsze dość szybko na rozwój techniki, a życie stawało się coraz bardziej wygodne dzięki nowym i coraz bardziej skomplikowanym urządzeniom. W połowie XX wieku mogło to nieraz powodować uczucie bezradności. Humorysta amerykański, Ogden Nash, spopularyzowany w Polsce przez Stanisława Barańczaka, wyraził tę bezradność dosadnie w wierszu „Znad taczk”:

*O, po trzykroć nieszczęśliwy domu,
Którego pan nie rozróżnia watów od omów!*

Trzeba być dobrym fizykiem i dobrym poetą, by fizyka nie stanowiła jedynie ozdobnika wśród innych środków literackich, ale była esencją poetyckiego imaginarium. Taką jedność możemy odnaleźć w wierszach Grzegorza Białkowskiego, fizyka częstek

elementarnych, profesora i rektora Uniwersytetu Warszawskiego, który stworzył unikalny język poetycki.

*Zanim się spostrzegłem nastąpiła noc
rzekłem słowo
i
stała się ciemność
nie rozumiem go: jest
międzybytem
jest rozbijaniem namiotu
między mną
a gwiazdami atomów*

Byłoby przesadą twierdzić, że poezja Białkowskiego jest pisana dla fizyków. Trudno jednak oprzeć się wrażeniu, że uderza ona celnie w zasób wiedzy fizycznej, by delikatnie kasać tę emocjonalną stronę fizyków, zazwyczaj dobrze ukrytą między laserami, mikroskopami i wzorami. Po co? Białkowski podsumował to doskonale: „Podobieństwa między poezją i nauką wynikają z rozmaitych przyczyn. Ich wspólną podstawą jest to, że obie służą modelowaniu rzeczywistości. Fizyka modelowaniu rzeczywistości materialnej, zaś poezja modelowaniu rzeczywistości psychologicznej i społecznej”.

*Krzysztof TURZYŃSKI
Wiersze angielskojęzyczne w tłumaczeniu własnym.*



Potęgi dwójki

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Tym razem bez wprowadzenia teoretycznego – zapraszam na porcję zadań o różnej tematyce, związanych z potęgami dwójki.

Zadania

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba naturalna k , że w zapisie dziesiętnym liczb 2^k każda z cyfr: $0, 1, 2, \dots, 9$ występuje taką samą liczbę razy. (LXX OM)
 2. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równość $x + y + z = 0$. Udowodnić, że $x \cdot 2^x + y \cdot 2^y + z \cdot 2^z \geq 0$. (XI Wielkopolska Liga Matematyczna)
 3. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielokąt, którego boki mają długości wyrażające się różnymi potęgami dwójki o wykładnikach całkowitych nieujemnych.
 4. Niech a_n oznacza najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, która ma dokładnie n dzielników. Udowodnić, że w tym ciągu występuje nieskończoność wiele potęg dwójki.
 5. Ustalmy liczbę nieparzystą n . Dla $k = 1, 2, \dots, n$ określmy taką liczbę naturalną a_k , że $2^{a_k-1} \leq \frac{n}{k} < 2^{a_k}$. Udowodnić, że $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_n = n$. (IX WLM)
 6. Wykazać, że dla całkowitych dodatnich n liczba $n!$ nie dzieli się przez 2^n .
 7. Niech $k \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że jeśli iloczyn k kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez 4^k , to dokładnie jeden z czynników dzieli się przez 2^{k+1} . (XI WLM)
 8. Dane są liczby całkowite dodatnie k, m i n , dla których $\text{NWD}(km, n) = 1$. Udowodnić, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b, c , że $a^k + b^m = c^n$.
 9. W pewnym kraju jest $n + 1$ miast, ponumerowanych liczbami od 0 do n . Miasta o numerach a i b mają połączenie drogowe wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b$ jest potiągą dwójki. Udowodnić, że z każdego miasta można dojechać do każdego innego. (XIII WLM)
 10. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n porównać liczby $2^{n!}$ i $(2^n)!$.
 11. W ciągu niemalejącym (a_1, a_2, a_3, \dots) występują wyłącznie liczby całkowite dodatnie. Każda liczba występuje w nim dokładnie tyle razy, ile wynosi największy wykładnik potęgi dwójki dzielący tę liczbę. Początkowe wyrazy wyglądają następująco:
- 2, 4, 4, 6, 8, 8, 10, 12, 12, 14, 16, 16, 16, 16, 18, 20, 20, ...
- Udowodnić, że $a_n > n$ dla wszystkich całkowitych dodatnich n . (XIII WLM)
12. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie, które można przedstawić w postaci $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$ dla pewnych całkowitych dodatnich a i b . (Matematyczny Kalendarz Adwentowy 2021)
 13. Rozważmy wszystkie liczby nieparzyste, które w zapisie dwójkowym mają dokładnie 120 jedynek. Udowodnić, że wśród nich jest nieskończoność kwadratów liczb naturalnych. (MKA 2023)
 14. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Niech r_k oznacza resztę z dzielenia przez n liczby $1 + 2 + \dots + k$. Wyznaczyć wszystkie liczby n , dla których $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$ jest permutacją ciągu $(1, 2, \dots, n-1)$. (LX OM)
 15. Wyznaczyć liczbę sposobów zapisu liczby całkowitej dodatniej n w postaci sumy potęg dwójki o wykładnikach całkowitych nieujemnych, jeśli każdy z wykładników może powtórzyć się co najwyżej trzy razy. (LXVI OM)
 16. Rozważmy bardzo długi rząd wiaderek. W środkowym znajduje się n krówek, pozostałe są puste. Możemy wykonywać operacje dwóch typów: albo z wiaderka liczącego co najmniej 3 krówek przenosimy jedną krówkę do wiaderka bezpośrednio po prawej stronie i dwie krówek do wiaderka bezpośrednio po lewej, albo z wiaderka z co najmniej 2 krówkami przenosimy jedną krówkę do wiaderka bezpośrednio po prawej stronie i jedną zjadamy. Założymy, że po jakimś czasie nie da się już wykonać żadnego ruchu. Wykazać, że liczba pozostałych krówek równa jest liczbie jedynek w zapisie dwójkowym liczby n . (USA MTS 2019, zmodyfikowane)



Istnieją lepsze narzędzia
do przewidywania przyszłości...

Jeśli chcesz je poznać, zapraszamy na

**Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego**

www.mimuw.edu.pl/rekrutacja

M
UNIWERSYTET WARSZAWSKI

