Część III: Rachunek całkowy

Zadanie 1. Obliczyć całkę

$$\int_0^4 \{x\}\,\mathrm{d}x$$

Zadanie 2. Obliczyć całkę

$$\int_0^4 [x]\,dx$$

Zadanie 3. Obliczyć całkę

$$\int_0^4 |2-x|\,dx$$

Zadanie 4. Obliczyć całki ze wzorów elementarnych

a) $\int (x^5 + 5x^2 - 15x + 2024)\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{2x^2+x-1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \left(5x^7 - 5x^3 - 5x + \frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,\mathrm{d}x$

f) $\int \left(5\sin x + 2024^x - \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$

Zadanie 5. Obliczyć całki przez podstawienie

a) $\int \cos(5x+1)\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{5}{3x+7}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

e) $\int \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x$

f) $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$

g) $\int \frac{x^3}{1+x^8}\,\mathrm{d}x$

h) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x$

i) $\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$

j) $\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$

k) $\int e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$

Zadanie 6. Obliczyć całkę:

$$\int \sin ax\,\mathrm{d}x, \qquad \text{gdzie } a \neq 0$$

Zadanie 7. Obliczyć całki metodą przez części

a) $\int \ln x\,\mathrm{d}x$

b) $\int xe^x\,\mathrm{d}x$

c) $\int x^3 \sin 2x\,\mathrm{d}x$

d) $\int x^4 \cos x\,\mathrm{d}x$

e) $\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

Zadanie 8. Obliczyć całki oznaczone

a) $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x$

b) $\int_{\text{miesiąc ur.}}^{\text{dzień ur.}} (\text{rok ur.}) \cdot (x^3+1)\,\mathrm{d}x$

c) $\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{3x-2}$

d) $\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x$

e) $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$[1]

f) $\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

Zadanie 9. Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi: $x=1, x=e, y=0, y=\ln x$.

Zadanie 10. Obliczyć pole figury ograniczonej wykresami funkcji: $y = \frac{8}{x^2+4}$ oraz $y = \frac{x^2}{4}$.

[1]Zauważmy, że jest to pole jednego „brzuszka” sinusa.

Zadanie 11. Obliczyć pole pomiędzy wykresem funkcji f danej wzorem $f(x) = \sqrt{x}$, a osią Ox dla dowolnego przedziału $[0, a]$.

Zadanie 12. Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi $y = \frac{2}{x}, y = 0, x = 1, x = 36.$ [2]

★ **Zadanie 13.** Wykazać, że funkcja Dirichleta[3] nie jest całkowalna w sensie Riemanna[4].

Zadanie 14 (sofizmat)**.** Niech $x > 2$. Policzmy poniższą całkę przez części

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \ln x} = \begin{bmatrix} u = \dfrac{1}{\ln x} & v' = \dfrac{1}{x} \\ u' = \dfrac{-1}{(\ln x)^2} \cdot \dfrac{1}{x} & v = \ln x \end{bmatrix} = \frac{1}{\ln x} \cdot \ln x + \int \frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = 1 + \int \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \ln x}$$

Otrzymaliśmy zatem:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \ln x} = 1 + \int \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \ln x}$$

Stąd, odejmując stronami powyższą całkę otrzymujemy $0 = 1$.
Wskazać błąd w powyższym rozumowaniu.

[2] Jak obliczyć pole dla ograniczenia na x-ach, gdy $x \geqslant 1$?

[3] W Teorii Miary częściej mówi się o funkcji charakterystycznej zbioru liczb wymiernych. Funkcja charakterystyczna zbioru to taka funkcja, która każdej liczbie z tego zbioru przyporządkowuje wartość 1, a pozostałym 0.

[4] Całka Riemanna to nie jedyna całka rozważana w matematyce. Jej uogólnieniem jest tzw. całka Lebesgue'a. Zbiór funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a jest większy od zbioru funkcji całkowalnych w sensie Riemanna. Oznacza to, że każda funkcja całkowalna w sensie Riemanna jest też całkowalna w sensie Lebesgue'a, ale nie na odwrót. Funkcja Dirichleta jest klasycznym przykładem takiej funkcji - nie jest całkowalna w sensie Riemanna, ale jest całkowalna w sensie Lebesgue'a i całka ta wynosi 0. Całka Lebesgue'a jest tym pojęciem, o którym rozmawiali na krakowskich Plantach Stefan Banach i Otton Nikodym, i którego usłyszenie sprawiło, że przechodzący obok Hugo Steinhaus wtrącił się do rozmowy i w ten sposób został odkryty wielki talent Stefana Banacha. Na pamiątkę tego wydarzenia w 2016 roku – w setną rocznicę tamtego wydarzenia – na Plantach pomiędzy Collegium Novum a Wawelem powstał pomnik – Ławeczkę z siedzącymi na niej postaciami Banacha i Nikodyma.