Zadania dodatkowe

Termin: wrzesień

Zadanie 1. Mamy dany trójkąt równoboczny o boku 100. Z jednego z jego wierzchołków zakreślamy okrąg, który dzieli trójkąt na dwie części o równych polach. Oblicz promień tego okręgu.

Zadanie 2. Która liczba jest większa: 50^{99}, czy 99! ?

Zadanie 3. Udowodnić następujące twierdzenie:
Trójkąt jest równoboczny, wtedy i tylko wtedy gdy ma wszystkie kąty równe.

Zadanie 4. Udowodnić, że ułamek postaci $\dfrac{\text{l. nieparzysta}}{\text{l. parzysta}}$ nie może być liczbą całkowitą.

Zadanie 5. Wyobraźmy sobie sześcian. Chcemy go go pociąć na 27 małych jednakowych kostek, czyli na małe sześcianiki o trzykrotne krótszej krawędzi. Łatwo widać, że da się to zrobić sześcioma cięciami: cztery z nich prowadzimy z góry do dołu (równolegle do ścian bocznych) oraz dwa równolegle do podstaw. Powstaje pytanie: czy da się to zrobić mniejszą liczbą cięć (np. inaczej układając odcięte już części i przecinając je razem)? Okazuje się że 6 cięć to minimalna liczba i nie da się tego zrobić przy mniejszej liczbie cięć. Uzasadnić ten fakt, tzn, że 6 to najmniejsza możliwa liczba cięć.

Rozwiązanie 1. Przez P_1 oznaczmy pole wycinka koła, a przez P_2 pozostałą część trójkąta. Wtedy (Z równości odpowiednich pól):

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{100^2\sqrt{3}}{4} - \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$
$$\frac{1}{3}\pi r^2 = 2500\sqrt{3}$$
$$r^2 = \frac{7500\sqrt{3}}{\pi}$$

A zatem

$$r = \sqrt{\frac{7500\sqrt{3}}{\pi}} = 50\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}} = \frac{50\sqrt[6]{27\pi^3}}{\pi}$$

Rozwiązanie 2. Rozpiszmy wyrażenie $\dfrac{50^{99}}{99!}$.

$$\frac{50^{99}}{99!} = \frac{\overbrace{50 \cdot \ldots \cdot 50}^{49} \cdot 50 \cdot \overbrace{50 \cdot \ldots \cdot 50}^{49}}{99 \cdot \ldots 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot \ldots 1}$$

W liczniku i mianowniku mamy po 99 składników – będziemy je odpowiednio grupować. Dwie pięćdziesiątki z licznika[1] grupujemy z dwiema liczbami z mianownika symetrycznie położonymi względem liczby 50. Na przykład najpierw grupujemy 50 i 50 z 51 i 49. Następnie 50 i 50 z 52 i 48. Łatwo zauważyć, że $\dfrac{50 \cdot 50}{51 \cdot 49} > 1$, ponieważ w mianowniku jest wzór skróconego mnożenia $(50+1)(50-1) = (50^2 - 1)$. W każdym parowaniu licznik będzie większy od mianownika, więc ułamek będzie większy od 1. Środkowe wyróżnione liczby 50 skracają się, a każdy otrzymany ułamek jest większy od 1, a zatem wyjściowy ułamek też jest większy od 1, czyli $\dfrac{50^{99}}{99!} > 1$, a stąd już $50^{99} > 99!$.
Co ciekawe, można udowodnić[2], że prawdziwa jest ogólniejsza nierówność:
Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi

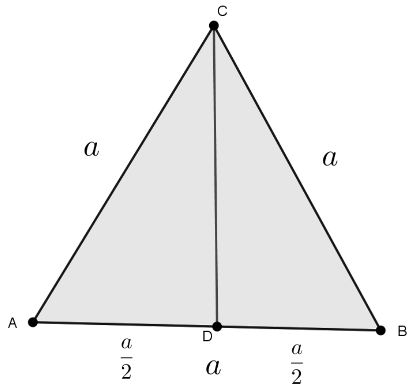
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!.$$

Podstawiając w powyższym twierdzeniu $n = 99$ od razu otrzymujemy wynik.

[1] Aby grupowanie było najbardziej oczywiste i widoczne, będziemy brać jedną pięćdziesiątkę z lewej strony i jedną z prawej strony wyróżnionej osobno liczby 50.

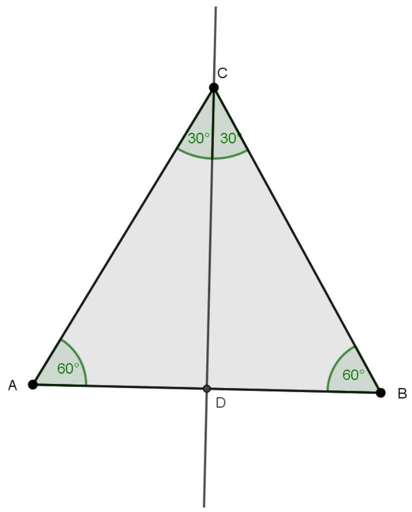
[2] proste ćwiczenie z indukcji

Rozwiązanie 3.
(⇒)



Prowadzimy środkową z wierzchołka C. Dwa boczne trójkąty są przystające z cechy *bbb*, bo $|AC| = |BC| = a$, CD to wspólny bok, zaś $|AD| = |BD|$. Zatem $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle B|$. Analogicznie pokazujemy równość $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle C|$, a zatem wszystkie kąty są sobie równe.

(⇐)



Prowadzimy dwusieczną z wierzchołka C. Dwa boczne trójkąty są przystające z cechy *kbk*, bo mają wspólny bok CD i kąty przy nim $90°$ oraz $30°$. Zatem $|AC| = |BC|$. Analogicznie pokazujemy równość $|AB| = |BC|$, a zatem wszystkie boki są sobie równe.

Rozwiązanie 4. Załóżmy odwrotnie, że ułamek ten jest liczbą całkowitą, tzn. $\frac{\text{l. nieparzysta}}{\text{l. parzysta}} = k$, dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Mnożąc obustronnie przez mianownik otrzymujemy (l. nieparzysta) = (l. parzysta) $\cdot\, k$. Prawa strona równości jest parzysta, a lewa nieparzysta. Sprzeczność, a zatem ułamek nie może być liczbą całkowitą.

Rozwiązanie 5. Pomalujmy ten sześcian farbą. Po rozcięciu go na mniejsze sześcianiki będzie jeden ze środka, który nie będzie pokolorowany na żadnej ze ścian. A to oznacza, że dużą kostkę trzeba było przeciąć minimum 6 razy, by odsłonić każdą ze ścian środkowego sześcianu.

Termin: październik

Zadanie 6. Czy istnieje liczba naturalna mniejsza od iloczynu swoich cyfr?

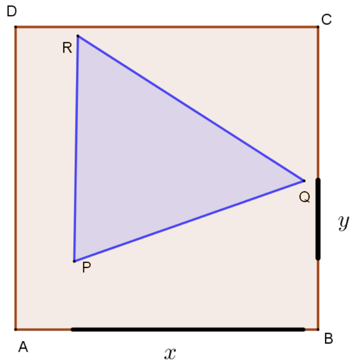
Rozwiązanie 6. Rozważmy liczbę n, która ma $k+1$ cyfr. Oznaczmy pierwszą jej cyfrę przez a. Iloczyn cyfr liczby n jest mniejszy bądź równy $a \cdot \underbrace{9 \cdot \ldots \cdot 9}_{k} = a \cdot 9^k$. Z drugiej strony, liczba n jest większa bądź równa $a \cdot 10^k$. Tak więc taka liczba nie istnieje.

Zadanie 7. Dany jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $n \geqslant 5$. Udowodnić, że elementy powyższego zbioru można tak pokolorować na dwa kolory: czerwony i zielony, że suma liczb czerwonych jest równa iloczynowi liczb zielonych.

Rozwiązanie 7. Jeśli n jest nieparzyste, tzn. $n = 2k+1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 2$, to na zielono malujemy liczby $1, k, 2k$, a na czerwono pozostałe. Suma czerwonych wynosi wtedy:
$1 + 2 + \ldots + (2k+1) - (1 + k + 2k) = \dfrac{(2k+1)(2k+2)}{2} - 3k - 1 = 2k^2 + 2k + k + 1 - 3k - 1 = 2k^2$.
Tyle samo wynosi iloczyn liczb zielonych. Po drodze skorzystaliśmy ze wzoru na sumę kolejnych n liczb naturalnych tzn. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Jeśli natomiast n jest liczbą parzystą, czyli $n = 2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 3$, to na zielono malujemy liczby $1, k-1, 2k$, a na czerwono pozostałe. suma czerwonych wynosi wtedy:
$1 + 2 + \ldots + 2k - (1 + k - 1 + 2k) = \dfrac{2k(2k+1)}{2} - 3k = 2k^2 + 2k - 3k = 2k^2 - k = 2k(k-1)$. Tyle samo wynosi iloczyn liczb zielonych. A zatem takie kolorowanie istnieje.

Zadanie 8. W kwadracie o boku 1 zawarty jest trójkąt. Wykaż, że pole tego trójkąta jest nie większe niż sinus dowolnego jego kąta.

Rozwiązanie 8. Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



Niech x i y to będą długości rzutów prostokątnych boku PQ odpowiednio na boki AB oraz BC. Wtedy oczywiście $x, y \leqslant 1$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $|PQ|^2 = x^2 + y^2 \leqslant 1 + 1 = 2$. Stad $|PQ| \leqslant \sqrt{2}$. W analogiczny sposób pokazujemy $|QR| \leqslant \sqrt{2}$ oraz $|RP| \leqslant \sqrt{2}$.
Ze wzoru na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2}|PQ| \cdot |PR| \cdot \sin(\sphericalangle QPR) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\sphericalangle QPR) = \sin(\sphericalangle QPR)$. A zatem $P \leqslant \sin(\sphericalangle QPR)$ Analogicznie postępujemy dla pozostałych dwóch kątów trójkąta.

Zadanie 9. Rozwiąż równanie: $x^{19} + x^{95} = 2x^{19+95}$.

Rozwiązanie 9. Mamy równanie $x^{19} + x^{95} = 2x^{114}$. Zróbmy proste podstawienie $a := x^{19}$. Wtedy uzyskujemy $a + a^5 = 2a^6$, co jest równoważne $2a^2 - a^5 - a = 0$. Widać, że jeśli a jest ujemne, to lewa strona jest dodatnia. Zatem nie ma rozwiązań ujemnych. Zajmiemy się przekształceniem lewej strony. Wyciągamy a przed nawias: $a(2a^5 - a^4 - 1) = a(a^5 + a^5 - a^4 - 1) = a(a^5 - 1 + a^5 - a^4) = a\left[(a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) + a^4(a-1)\right] = a(a-1)(2a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$.
Stąd $a = 0 \vee a = 1 \vee 2a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0$. Widzimy, że z ostatniego równania nie otrzymamy żadnego nieujemnego rozwiązania. Wracając do postawienia otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 0$.
Uwaga: My sprytnie pogrupowaliśmy, ponieważ wymagało to jedynie znajomości wzorów skróconego mnożenia. Wyrażenie z zadania można oczywiście równie dobrze rozłożyć inną metodą, np. zgadując pierwiastek i stosując schemat Hornera.

Zadanie 10. Rozważmy liczbę 2021!. Obliczamy sumę jej cyfr, a następnie sumę cyfr otrzymanej liczby i tak dalej, aż pozostanie nam liczba jednocyfrowa. Jaką liczbę otrzymamy na końcu?

Rozwiązanie 10. Cecha podzielności przez 9 mówi nam, że liczba jest podzielna przez 9 dokładnie wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9. Liczba 2021! to iloczyn liczb od 1 do 2021, a więc jest podzielna przez 9 (bo w rozkładzie występuje 9). Tak więc w każdym kroku otrzymana suma jest również podzielna przez 9. Czyli ostatnia otrzymana liczba jest podzielna przez 9. Mogłaby to więc być liczba 0 lub 9. Ale nie ma możliwości otrzymać 0 jako sumy cyfr innej liczby, więc jest to 9.

Termin: listopad

Zadanie 11. Ile wynosi suma cyfr liczby $10^{2021} - 2021$?

Zadanie 12. Na płaszczyźnie danych jest 25 różnych punktów. Przez D oznaczmy najdłuższą z odległości między dowolnymi dwoma punktami, a przez d najmniejszą z tych odległości. Uzasadnij, że $D > 2d$.

Zadanie 13. Prostopadłościan ma krawędzie długości $1, 2, 3$. Wyznacz najkrótszą drogę łączącą dwa jego przeciwległe wierzchołki, która biegnie po jego powierzchni.

Zadanie 14. Rozważmy trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej 10 i wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego równej 6. Ile wynosi pole takiego trójkąta?

Zadanie 15. Trójkąt równoboczny, kwadrat oraz sześciokąt foremny mają takie samo pole. Która z tych figur ma największy obwód?

$\mathbb{P}$iotr $\mathbb{B}$ury