Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Przykład (reguła mnożenia)**.**
Pewna restauracja oferuje 3 rodzaje zup i 5 drugich dań. Na ile sposobów możemy zjeść różny obiad (zupa + drugie danie)?

$\underline{3}$	$\underline{5}$
wybór zupy	wybór II dania

$$3 \cdot 5 = 15$$

Przykład (reguła dodawania)**.**
Ile jest liczb dwucyfrowych z cyfrą jedności podzielną przez 5?

$\underline{9}$	$\underline{1}$		$\underline{9}$	$\underline{1}$
cyfry od 1 do 9	cyfra jedności 0	$\vee$	cyfry od 1 do 9	cyfra jedności 5

$$9 + 9 = 18$$

(rozłączne przypadki możemy zliczać osobno)

Definicja.
Silnią liczby naturalnej $n \geqslant 1$ nazywamy iloczyn n kolejnych liczb naturalnych od 1 do n i oznaczamy symbolem $n!$. Ponadto definiujemy $0! := 1$.

Uwaga.
Liczba wszystkich ustawień (**permutacji**) liczb $1, 2, 3, \ldots, n$ w ciąg wynosi $n!$.

Definicja.
Niech $n, k \in \mathbb{N}$ oraz $k \leqslant n$. **Symbolem Newtona** nazywamy liczbę określoną wzorem:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Uwaga.
Liczba wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego (**kombinacji**) jest równa $\binom{n}{k}$.

Twierdzenie (własności symbolu Newtona)**.**
Jeśli $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, to:

1) $\binom{n}{0} = 1$

2) $\binom{n}{1} = n$

3) $\binom{n}{n} = 1$

4) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

5) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

6) $\binom{n}{k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$

Dowód.
4) $L = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$P = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = L$$

1),2),3),5),6) – ćwiczenie □

Definicja.
Doświadczeniem losowym nazywamy pewien powtarzalny eksperyment, którego konkretnego wyniku nie jesteśmy w stanie przewidzieć, ale znamy listę możliwych wyników (np. rzut kostką). Wyniki te nazywamy **zdarzeniami elementarnymi**, a zbiór wszystkich tych zdarzeń **przestrzenią zdarzeń elementarnych** i oznaczamy ją Ω.

Przykład.
Do tego samego doświadczenia możemy budować różne modele (wybierać inne przestrzenie Ω).
Rozważmy rzut dwiema monetami

- <u>Model 1</u> (rozróżniamy monety, np. lewa i prawa). Wtedy:

  $$\Omega = \{(O, O); (O, R); (R, O); (R, R)\},$$

  gdzie O – wypadł orzeł, R – wypadła reszka.

- <u>Model 2</u> (nie rozróżniamy monet). Wtedy:

  $$\Omega = \{\text{„brak orłów”}; \text{„1 orzeł”}; \text{„2 orły”}\}.$$

W modelu 1 wszystkie zdarzenia elementarne są tak samo prawdopodobne. W modelu 2 zdarzenie „1 orzeł” jest bardziej prawdopodobne niż „brak orłów”. Z przyczyn praktycznych lepiej rozważać więc takie modele, gdzie wszystkie zdarzenia są równoprawdopodobne.

Definicja.
Niech $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – przestrzeń zdarzeń elementarnych, $A, B \subset \Omega$ – zdarzenia. Wtedy:

- $\varnothing$ – zdarzenie niemożliwe,
- Ω – zdarzenie pewne,
- $A \cup B$ – suma zdarzeń A i B,
- $A \cap B$ – iloczyn zdarzeń A i B,
- $A \setminus B$ – różnica zdarzeń A i B,
- jeśli A i B są rozłączne ($A \cap B = \varnothing$), to zdarzenia A i B nazywamy **wykluczającymi się**,
- $A' = \Omega \setminus A$ – zdarzenie przeciwne do A,
- jeśli $a_1 \in A$, to powiemy, że zdarzenie elementarne a_1 sprzyja zdarzeniu A.

Definicja (aksjomatyczna, Kołmogorow 1933).
Prawdopodobieństwem określonym na skończonej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω nazywamy dowolną funkcję P, taką że:

1) $\forall A \subset \Omega : \ P(A) \geqslant 0$,

2) $P(\Omega) = 1$,

3) $\forall A, B \subset \Omega : \ [A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)]$.

Twierdzenie (własności prawdopodobieństwa).
Niech P to prawdopodobieństwo określone na Ω; $A, B, C \subset \Omega$. Wtedy:

1) $P(\varnothing) = 0$,

2) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$,

3) $P(A) \leqslant 1$,

4) $P(A') = 1 - P(A)$,

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

6) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$,

7) Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ wykluczają się parami, to $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Twierdzenie (o prawdopodobieństwie klasycznym).
Z: Ω – skończona przestrzeń zdarzeń elementarnych; każde zdarzenie elementarne jest równoprawdopodobne; $A \subset \Omega$ – zdarzenie
T: $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$, gdzie:
$P(A)$ – prawdopodobieństwo zdarzenia A,
$\#A$ – liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A,
$\#\Omega$ – liczba wszystkich zdarzeń elementarnych.

Definicja.
Prawdopodobieństwem **warunkowym** zajścia zdarzenia A pod warukiem zajścia zdarzenia B nazywamy liczbę:

$$P(A|B) \coloneqq \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

gdzie $P(B) > 0$.

Twierdzenie (o prawdopodobieństwie całkowitym).
Z: $A, B_1, B_2, \ldots, B_n \subset \Omega$ – zdarzenia, takie że:

- $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ($B_1, \ldots, B_n$ parami wykluczają się),
- $P(B_i) > 0$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (wszystkie B_i mogą zajść),
- $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ ($B_1, \ldots, B_n$ dają w sumie całą przestrzeń).

T: $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$

Dowód.

Zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są rozłączne i wypełniają całą przestrzeń Ω. Każde z nich ma szansę zajść (nie są puste). Zauważmy, że:

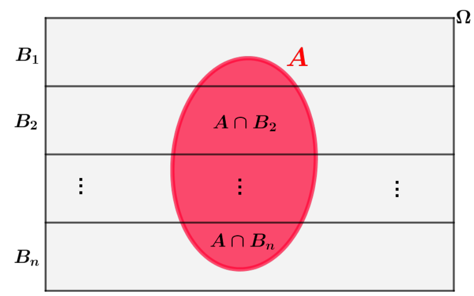
$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n),$$

gdzie każde dwa ze zdarzeń $A \cap B_i$ wykluczają się.
Zatem ze wzoru (7):

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n).$$

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego:
$P(A \cap B_i) = P(A|B_n) \cdot P(B_n)$, czyli

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$



□

Twierdzenie (wzór Bayesa)**.**
Z: $A, B_1, B_2, \ldots, B_n \subset \Omega$ – zdarzenia, takie że:

- $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,,
- $P(B_i) > 0$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
- $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$.

T: $P(B_i|A) = \dfrac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}$, gdzie $P(A)$ oblicza się ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

Definicja.
Dwa zdarzenia $A, B \subset \Omega$ są **niezależne** $\Leftrightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.

Twierdzenie.
Jeśli $A, B \subset \Omega$ są niezależne, to A', B' też.

Definicja.
Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ są **niezależne** $\Leftrightarrow$ dla dowolnego $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ prawdopodobieństwo ich iloczynu jest równe iloczynowi ich prawdopodobieństw.

Definicja.
Schematem Bernoulliego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń tego samego doświadczenia losowego, które może zakończyć się jednym z dwóch możliwych wyników zwanych sukcesem lub porażką.

Twierdzenie (schemat Bernoulliego)**.**
W schemacie Bernoulliego prawdopodobieństwo zdarzenia A (k sukcesów w n próbach) jest równe:

$$P(A) = P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

gdzie p to prawdopodobieństwo sukcesu.

Definicja.
Zmienną losową nazywamy dowolną funkcję, która wszystkim zdarzeniom elementarnym ze skończonej przestrzeni Ω przyporządkowuje pewne liczby rzeczywiste. Każdą tak przyporządkowaną liczbę nazywamy wartością zmiennej losowej.

Uwaga.
Prawdopodobieństwo zdarzenia, że zmienna losowa X przyjmuje wartość a określamy następująco:
$P(X = a) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = a\})$

Definicja.
Rozkładem zmiennej losowej X nazywamy zbiór par mających postać (x_i, p_i), gdzie $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ oraz x_i jest wartością zmiennej losowej X, a p_i prawdopodobieństwem z jakim wartość x_i jest przyjmowana.

Definicja.
Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X o rozkładzie $\{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_n, p_n)\}$ nazywamy liczbę $\mathbb{E}X \coloneqq x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$.

Definicja.
Grę nazywamy **sprawiedliwą**, jeśli wartość oczekiwana wygranej jest równa 0.

STATYSTYKA

Definicja.
Niech liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą wartościami pewnej cechy mierzalnej. **Średnią arytmetyczną** z próby liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\bar{x} \coloneqq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Definicja.
Niech liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą wartościami pewnej cechy mierzalnej, a liczby dodatnie $w_1, w_2, \dots, w_n$ będą wagami odpowiadającymi tym wartościom cechy. **Średnią ważoną** liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ z wagami odpowiednio $w_1, w_2, \dots, w_n$ nazywamy liczbę:

$$\overline{x_w} \coloneqq \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \ldots + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}.$$

Definicja.
Modą (dominantą) zbioru danych statystycznych nazywamy tę wartość cechy statystycznej, która w zbiorze tym występuje najczęściej (ozn. M_o).

Definicja.
Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będzie słabo rosnącym (niemalejącym) ciągiem wartości badanej cechy mierzalnej. **Medianą** nazywamy liczbę:

$$M_e \coloneqq \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzysta} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, & \text{gdy } n \text{ jest parzysta} \end{cases}$$

Definicja.
Niech liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą wartościami pewnej cechy mierzalnej, a $\bar{x}$ jej średnią arytmetyczną. **Wariancją** z próby nazywamy liczbę

$$D^2(x) = \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Odchyleniem standardowym nazywamy liczbę $\sigma = \sqrt{D^2(x)}$.

Definicja.
Różnicę pomiędzy największą i najmniejszą wartością pewnej cechy mierzalnej nazywamy **rozstępem**.

Definicja.
Centyl to wielkość statystyczna opisującą położenie konkretnego wyniku liczbowego względem pozostałych danych. Jeśli konkretny wynik ma centyl c, to znaczy, że $c\%$ wszystkich danych ma wartość mniejszą bądź równą od niego.