Błędy kardynalne

W tabeli poniżej zamieszczona została lista prawie 30 błędów zwanych kardynalnymi – bardzo poważnymi błędami merytorycznymi, które pojawiają się u uczniów podczas prac pisemnych. Ich pojawienie się wskazuje na brak rozumienia przez ucznia narzędzi, które stosuje i brak absolutnych podstaw dotyczących omawianego zagadnienia. Błędy te często wynikają z uczenia się matematyki na pamięć – bez jakiegokolwiek bycia świadomym tego co się robi. Oprócz wskazania konkretnego błędu umieszczona została również wersja poprawna wraz z wyjaśnieniem. Lista takich błędów nie jest oczywiście zamknięta.

Lp.	**Błąd**	**Poprawna wersja/wyjaśnienie**
1	Stosowanie wzoru $\sqrt{x \pm y} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ (w szczególności $\sqrt{x^2+y^2} = x+y$)	Nie ma wzoru na pierwiastek sumy (różnicy). Kontrprzykład: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, $\sqrt{9}+\sqrt{16} = 3+4 = 7$. W szczególności $\sqrt{3^2+4^2} \neq 3+4$.
2	Stosowanie wzoru $(a+b)^2 = a^2+b^2$ i jemu podobnych tj. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3$, $(a-b)^2 = a^2-b^2$, $(a \pm b)^n = a^n \pm b^n$	Zgodnie z prawidłowymi wzorami skróconego mnożenia np. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Kontrprzykład: $(1+1)^2 = 2^2 = 4$, $1^2+1^2 = 1+1 = 2$. $(\star)$
3	Rozbijanie równania typu $\|x\| = a$ na dwa przypadki: $x = a \vee x = -a$ w sytuacji, gdy $a < 0$.	Wartość bezwzględna jest z definicji nieujemna. Podane równanie jest zatem sprzeczne.
4	Stosowanie wzoru $\sqrt{x^2} = x$, gdy x nie musi być dodatni	Poprawny wzór to $\sqrt{x^2} = \|x\|$. Kontrprzykład: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, a nie -3, co wynikałoby z niepoprawnego wzoru.
5	Stosowanie wzorów dotyczących tylko konkretnych figur w przypadku dowolnych figur (w szczególności wzorów dla trójkąta równobocznego do dowolnego trójkąta np. $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, r = \frac{1}{3}h, R = \frac{2}{3}h$)	Wzory podane obok są prawdziwe ale **tylko** dla trójkąta równobocznego. Ich stosowanie w dowolnym przypadku to tak jak liczenie pola trapezu przy użyciu wzoru na pole koła, bo to i to przecież pole. Każdy wzór ma zastosowanie tylko w określonych sytuacjach i nie wolno stosować nigdzie indziej.
6	Odpowiedzi pozbawione jakiegokolwiek logicznego sensu i niezgodne z kontekstem praktycznym, typu: podskoczył na 40 metrów, szedł z prędkością 100 km/h, babcia jest młodsza od wnuczki, ojciec ma 750 lat, rodzina składa się z $10\frac{2}{17}$ dziecka, syn ma 435 cm wzrostu, zjadł 2000 pierogów na obiad, temperatura wody w akwarium wynosi $-10°$C, itd.	Podane zdania są absurdalne i w oczywisty sposób odpowiedzi są błędne. Uczeń musi zdawać sobie sprawę z tego co liczy, a nie tylko wykonać ciąg obliczeń z których zupełnie nic nie rozumie.
7	Stosowaniu wzoru $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta$ i analogicznych dla pozostałych funkcji trygonometrycznych	Poprawny wzór to: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$. Kontrprzykład: $\sin(45°+45°) = \sin 90° = 1$, natomiast $\sin 45° + \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.
8	Zapisywanie i obliczanie pierwiastka stopnia parzystego z liczby ujemnej np. $\sqrt{-4}$	W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki z ujemnych liczb nie istnieją, więc zapis nie ma żadnego sensu.$(\star)$
9	Pierwiastkowanie stronami równania (nierówności) typu $x^2 - 5x = 4$ (czyli, gdy nie jest to przejście równoważne	Równanie (nierówność) można spierwiastkować stronami, tylko gdy obie strony są nieujemne.
10	Prawdopodobieństwo ujemne lub większe od 1	Szansa jakiegokolwiek zdarzenia (czyli prawdopodobieństwo) wynosi zawsze od 0% do 100% (liczbowo jest w przedziale $[0,1]$). Jeśli zdarzenie jest niemożliwe, to jest to 0%, jeśli na pewno się zdarzy, to 100%, czyli 1.
10	Wartość funkcji sinus lub cosinus większa od 1 lub mniejsza od -1	Funkcje te przyjmują zawsze wartości jedynie z przedziału $[-1,1]$, nigdy innych. Wynika to wprost z definicji, a widać dobrze na odpowiednich wykresach.$(\star)$

12	Podnoszenie stronami do kwadratu równania (nierówności) typu $x^2-5x=4$ by otrzymać równanie (nierówność) równoważne	Podnoszenie równania (nierówności) do kwadratu jest dozwolone, tylko gdy obie strony są nieujemne. W pozostałych sytuacjach otrzymujemy prawie zawsze równanie (nierówność) nierównoważne wyjściowemu. Kontrprzykład: równanie $x=4$ ma jedno rozwiązanie. Po podniesieniu go do kwadratu mamy równanie $x^2=16$, które ma dwa rozwiązania (4 oraz -4), a więc otrzymane nowe równanie nie jest równoważne wyjściowemu. **Uwaga:** Wyjątek stanowią sytuacje, gdy nie potrzebujemy równania równoważnego, np. stosując metodę analizy starożytnych lub wyciągamy jedynie pewne wnioski.
13	Metoda prób i błędów stosowana aż do momentu, gdy trafimy w dobry wynik	Jeśli nie rozważymy **wszystkich** możliwych przypadków (czyli najczęściej nieskończenie wielu), to metoda taka jest niepoprawna. Przykład: Rozwiązać równanie $x^3=x$. Ktoś może stwierdzić, że $x=1$ jest dobry, bo rzeczywiście $1^3=1$, więc rozwiązał zadanie. Ale przecież są też inne liczby jak chociażby 0 oraz -1, które też spełniają to równanie. Podsumowując, w takiej metodzie nie mamy nigdy pewności, czy nie przegapiliśmy jakiegoś rozwiązania.
14	Rozwiązanie zadania na konkretnych danych liczbowych (np. gdy trójkąt ma boki w stosunku $3:4:5$, przyjęcie, że długości tych boków to $3,4,5$)	Takie założenie sprawia że rozwiązujemy tylko jeden szczególny przypadek (z nieskończenie wielu). Trójkąt o bokach np. $6,8,10$ też ma boki w stosunku $3:4:5$. Aby rozważyć wszystkie przypadki należy boki oznaczyć np. $3x,4x,5x$.
15	Dowód przez założenie tezy, czyli skorzystanie z tezy w trakcie dowodzenia	Teza to ten element twierdzenia, do którego musimy dojść poprzez logiczne wnioskowanie i myślenie przyczynowo-skutkowe. W tym wnioskowaniu można używać założeń, definicji, aksjomatów oraz twierdzeń wcześniej udowodnionych. Nie można więc do uzasadnienia pewnego faktu skorzystać z tego właśnie faktu. Jeśli założymy z góry prawdziwość tego, co mamy pokazać, to w oczywisty sposób z rozumowania wyjdzie, że to prawda – stwierdziliśmy to na samym początku.
16	Uważanie, że liczba π (oraz inne typu $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$) jest wymierna	Liczba π to najbardziej znany przykład liczby niewymiernej, czyli takiej, której nie można zapisać w postaci ułamka zwykłego.
17	Ujemna długość, pole, objętość, wiek, liczba elementów itd.	Te wielkości z definicji muszą być nieujemne.
18	Przybliżenie wyniku i używanie do dalszych obliczeń wartości przybliżonych zamiast dokładnych	O ile dla fizyka, inżyniera wynik przybliżony jest lepszy, to dla matematyka poprawnym wynikiem jest dokładna wartość. Jeśli autor zadania prosi nas o przybliżenie, to należy to robić na samym końcu w wyniku najbardziej uproszczonym, ponieważ czym wcześniej wstawimy przybliżenie, tym większy generuje ono błąd. Co więcej, po przekształceniach nasza liczba, którą przybliżamy może się całkowicie skrócić, więc otrzymamy wynik dokładny bez konieczności przybliżeń, tak więc wynik uzyskany w wyniku przybliżeń na pewno nie będzie poprawny.
19	Niepoprawne skracanie ułamków np. $\frac{2x+1}{2}=x+1$.	$\frac{2x+1}{2}=\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2}=x+\frac{1}{2}$. Reguły jeszcze z wczesnej podstawówki mówią nam, jak należy skracać ułamki. Możemy to robić, gdy między liczbami występuje mnożenie, a nie np. dodawanie, czy odejmowanie. Należy więc najpierw wyciągnąć przed nawias czynnik, który chcemy skrócić.
20	Zapisywanie i obliczanie logarytmu z liczby ujemnej np. $\log_2(-8)$	Podobnie jak pierwiastki, tak samo logarytmy z liczb ujemnych nie istnieją w zbiorze liczb rzeczywistych.($\star$)

21	Błędne rozumienie definicji funkcji rosnące/malejącej (w szczególności uważanie, że funkcja dana wzorem $y = \frac{1}{x}$ jest malejąca)	Funkcja ta nie jest malejąca, ponieważ nie spełnia definicji funkcji malejącej. Dla $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ mamy $f(x_1) < f(x_2)$. Prawdą jest jednak, że funkcja ta maleje **w każdym z przedziałów:** $(-\infty, 0), (0, +\infty)$. Nie maleje jednak w sumie tych przedziałów, czyli w zbiorze $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
22	Uważanie, że 1 jest liczbą pierwszą	Zgodnie z definicją, liczby pierwsze to takie liczby naturalne **większe od** 1, które mają dokładnie dwa dzielniki naturalne (jeden oraz samą siebie). Tak więc liczba 1 nie jest liczbą pierwszą. Nie jest też liczbą złożoną.
23	Stosowanie następujących wzorów na pochodne: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x)$ oraz $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$	Wzory na pochodne iloczynu i ilorazu istnieją, ale mają następującą postać: $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ oraz $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.
24	Reszta z dzielenia jest ujemna lub jest niecałkowita	Zgodnie z definicją, reszta z dzielenia jest całkowitą liczbą nieujemną. Ponadto jest zawsze mniejsza od wartości bezwzględnej dzielnika.
25	Dzielenie przez wyrażenie z niewiadomą, gdy nie wiemy, czy nie jest równe 0 (czyli jest to dzielenie przez 0) np. w równaniu $x(x-2) = 2x$.	Nie możemy dzielić dowolnej liczby niezerowej a przez 0, ponieważ wykonując działanie odwrotne nie istnieje taka liczba, która pomnożona przez 0 daje a. Działanie $0 : 0$ również jest niewykonalne, ponieważ cokolwiek wpisalibyśmy jako wynik, to wykonując działanie odwrotne otrzymalibyśmy prawdę, więc wynik działania byłby niejednoznaczny. W naszym przykładzie po podzieleniu otrzymalibyśmy $x - 2 = 2$, czyli $x = 4$. Ale przecież jeszcze liczba 0 spełnia nasze równanie. Poprawnym będzie przeniesienie wszystkiego na jedną stronę i i wyjęcie wspólnego czynnika przed nawias.
26	Stosowanie wzoru $(a^x)' = xa^{x-1}$ przy obliczaniu pochodnych	Funkcja z której liczymy pochodną jest wykładnicza, a nie potęgowa (podstawa jest stała, a nie wykładnik). Prawidłowy wzór to $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
27	Przyjmowanie podanych symboli jako oznaczone i równe: $\infty - \infty = 0$ oraz $0 \cdot \infty = 0$	Oba te symbole są nieoznaczone, co oznacza, że z takiej postaci nie możemy stwierdzić do czego dążą odpowiednie wyrażenia. Dla przykładu w pierwszym przypadku rozważmy ciągi o wzorach $a_n = n + 1$, $b_n = n$. Oba dążą do nieskończoności, a ich różnica do 1. Jednak dla ciągów $a_n = 2n$, $b_n = n$ również dążących do nieskończoności ich różnica dąży również do nieskończoności. W ogólności możemy tak dobrać ciągu by otrzymać każdą możliwą wartość granicy.
28	Badanie monotoniczności ciągów przez policzenie kilku początkowych wyrazów	Z definicji ciąg jest np. rosnący gdy spełnia odpowiedni warunek dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$, a więc uzasadnienie musi odnosić się do tych wszystkich n, a nie tylko kilku. Badając kilka wyrazów nie mamy pojęcia jak zachowuje się ciąg w dalszej części np. ciąg o wzorze $a_n = n^2 - 1000n + 1$ jest malejący dla wyrazów od 1 do 500, ale potem zaczyna rosnąć, więc nie jest monotoniczny.

($\star$) Zarówno pierwiastki, jak i logarytmy z liczb ujemnych w matematyce tak naprawdę istnieją. Ale nie w zbiorze liczb rzeczywistych. Są one definiowane i możliwe do obliczenia dopiero w szerszym zbiorze jakim są liczby zespolone. W zbiorze liczb zespolonych również sinus i cosinus nie są ograniczone przez -1 oraz 1, a mogą przyjmować dowolne wartości, np. 5. Również wzór $(a+b)^n = a^n + b^n$ jest w pewnych zbiorach prawdziwy, np. w pierścieniach o charakterystyce n, gdy n jest liczbą pierwszą.