Funkcje

Definicja.
Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy takie przyporządkowanie, które *każdemu* elementowi ze zbioru X przypisuje *dokładnie jeden* element ze zbioru Y (zapis: $f: X \to Y$).

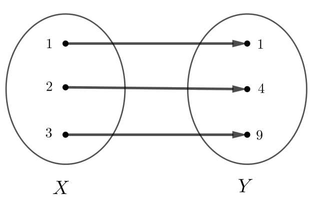
Definicja.
Zbiór X z powyższej definicji nazywamy **dziedziną** funkcji f i oznaczamy symbolem D_f. Elementy tej dziedziny nazywamy **argumentami** funkcji. Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji. Zbiór tych elementów ze zbioru Y, które zostały przypisane elementom ze zbioru X nazywamy **zbiorem wartości** funkcji f i oznaczamy ZW_f (lub D^{-1}).

Uwaga.
Wielu autorów błędnie utożsamia przeciwdziedzinę ze zbiorem wartości traktując je jako ten sam zbiór.

Definicja.
Wykresem funkcji f nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych $(x, f(x))$, gdzie $x \in D_f$, a $f(x)$ jest wartością funkcji f dla argumentu x.

Sposoby opisywania funkcji

1) **Graf**



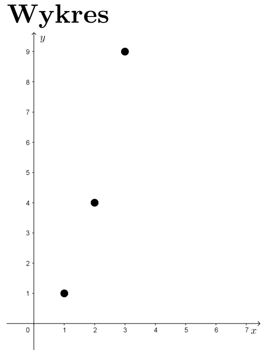
2) **Opis słowny**
„Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ przyporządkowuje jej kwadrat."

3) **Tabelka**

x	1	2	3
$f(x)$	1	4	9

4) **Zbiór par uporządkowanych**
$\{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

5) **Wykres**



6) **Wzór**

- $f(x) = x^2, \quad x \in \{1, 2, 3\}$
- $y = x^2, \quad x \in \{1, 2, 3\}$
- $f : x \mapsto x^2, \quad x \in \{1, 2, 3\}$

Uwaga.
Zgodnie z definicją funkcji, jej dziedzina powinna zostać podana wraz z jej określeniem. Często jednak przy podawaniu funkcji za pomocą wzoru nie podaje się dziedziny. Wtedy przez dziedzinę tej funkcji rozumie się zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wyrażenia występujące we wzorze mają w ogóle sens. Taką dziedzinę nazywamy **dziedziną naturalną** funkcji.

Definicja.
Najmniejszą (największą) wartością funkcji liczbowej nazywamy najmniejszą (największą) z liczb należących do zbioru wartości funkcji, o ile taka wartość istnieje.

Definicja.
Miejscem zerowym funkcji liczbowej nazywamy ten argument x, dla którego wartość funkcji wynosi 0.

$$x_0 \text{ – miejsce zerowe funkcji } f \Leftrightarrow f(x_0) = 0$$

Definicja.
Funkcje $f : D_f \to Y$ i $g : D_g \to Z$ są równe $\Leftrightarrow$:

1) $D_f = D_g$,

2) $\forall x \in D_f : f(x) = g(x)$.

Definicja.
Funkcja liczbowa $f : X \to Y$ jest **rosnąca** w zbiorze $A \subset X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A : [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$.

Definicja.
Funkcja liczbowa $f : X \to Y$ jest **malejąca** w zbiorze $A \subset X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A : [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)]$.

Definicja.
Funkcja liczbowa $f : X \to Y$ jest **stała** w zbiorze $A \subset X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2)$.

Uwaga.
Zastępując nierówności „$<$”, „$>$” nierównościami „$\leqslant$ ”, „$\geqslant$” mówimy o funkcji słabo rosnącej (lub niemalejącej) oraz słabo malejącej (nierosnącej)[1].

Definicja.
Funkcję rosnącą/malejącą/słabo rosnącą/słabo malejącą nazywamy funkcją **monotoniczną**.

Definicja.
Funkcja liczbowa $f : X \to Y$ jest **różnowartościowa** (jest iniekcją) $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$.

[1] W literaturze występują różne nazewnictwa, trzeba więc uważać.

Uwaga.
Dzięki kontrapozycji powyższy warunek możemy zamienić na: $\forall x_1, x_2 \in X : [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$.

Definicja.
Jeśli funkcja $f : X \to Y$ jest taka, że $ZW_f = Y$, to nazywamy ją **funkcją na** (lub suriekcją[2]).

Definicja.
Jeśli funkcja $f : X \to Y$ jest iniekcją i suriekcją, to nazywamy ją **bijekcją** (funkcją wzajemnie jednoznaczną).

Definicja.
Funkcja liczbowa f jest **parzysta** $\Leftrightarrow \forall x \in D_f : [-x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)]$.

Definicja.
Funkcja liczbowa f jest **nieparzysta** $\Leftrightarrow \forall x \in D_f : [-x \in D_f \wedge -f(-x) = f(x)]$.

Uwaga.

- Funkcja może nie być ani parzysta, ani nieparzysta.
- Funkcja może być zarówno parzysta, jak i nieparzysta.

(ĆW) Podać przykłady

Definicja.
Funkcję f nazywamy **okresową** $\Leftrightarrow \exists T \neq 0\ \forall x \in D_f : [x+T, x-T \in D_f \wedge f(x+T) = f(x)]$[3]. Liczbę T nazywamy **okresem** funkcji. Jeśli istnieje najmniejszy okres dodatni, to nazywamy go okresem **podstawowym** (lub zasadniczym) i oznaczamy T_0.

Uwaga.
Funkcja okresowa może nie mieć okresu podstawowego np.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Funkcję tę nazywamy funkcją Dirichleta.

[2] Słowo to można pisać przez *j*, tzn. *surjekcja*. Podobnie przy poprzedniej definicji można pisać *injekcja* zamiast *iniekcja*.

[3] W różnych podręcznikach i źródłach definicja ta przybiera różne formy. Może więc się zdarzyć, że zgodnie z jedną definicją dana funkcja jest okresowa, a według innej już nie. Dodatkowo, w większości podręczników brakuje warunku $x - T \in D_f$, który jest jednak istotny, ponieważ można zdefiniować funkcję, która wyraźnie nie powinna być zaliczana do funkcji okresowych, a wszystkie warunku poza tym spełnia.