

Planimetria

1. Wykaż, że trapez nie będący równoległobokiem jest równoramienny wtedy i tylko wtedy, gdy ma równe przekątne.
2. W równobocznym trójkącie ABC wybrano na bokach BC, AC, AB odpowiednio punkty A_1, B_1, C_1 tak, że $BA_1 = CB_1 = AC_1$. Wykaż, że $\Delta A_1B_1C_1$ jest równoboczny.
3. Wykaż, że dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym jest także dwusieczną kąta między środkową i wysokością tego trójkąta poprowadzonymi z wierzchołka kąta prostego.
4. Wykaż, że suma długości środkowych trójkąta jest mniejsza od obwodu i większa od $\frac{3}{4}$ obwodu tego trójkąta.
5. Wykaż, że środki podstaw trapezu i punkt przecięcia się jego przekątnych są punktami współliniowymi.
6. Punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{24}$ dzielą okrąg na 24 równe łuki. Wykaż, że $|\angle A_1BA_{16}| = 105^\circ$, gdzie B jest punktem przecięcia się cięciw A_1A_{10} i A_5A_{16} .
7. Wykaż, że jeżeli każda z dwóch przekątnych czworokąta wypukłego dzieli go na trójkąty o równych polach, to ten czworokąt jest równoległobokiem.
8. Uzasadnij, że pole trapezu równoramiennego, w którym przekątna o długości d tworzy z dłuższą podstawą kąt α , jest równe $P = \frac{1}{2}d^2 \sin 2\alpha$.
9. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = a, |BC| = b$. Wykaż, że odległości wierzchołków B i D od prostej AC są równe $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
10. Wykaż, że środkowe trójkąta dzielą go na sześć trójkątów o równych polach.
11. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość c , zaś kąt wewnętrzny przy podstawie jest równy α . Uzasadnij, że długość środkowej BD tego trójkąta jest równa $x = \frac{c\sqrt{1+8\cos^2\alpha}}{4\cos\alpha}$.
12. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, a kąt α jest kątem wewnętrznym zawartym między bokami o długości b i c , to $\frac{a^2}{2bc} + \cos\alpha \geq 1$.