Zadanie 1. (0–3)

Dane są liczby $a = \log_2 3$ oraz $b = \log_3 7$.

Wyraź $\log_4 49$ za pomocą liczb a oraz b.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$.

Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (-3, -3)$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0–4)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 7, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 8.

Wyznacz wszystkie wartości n, dla których spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{S - S_n}{S_n}\right| < 0{,}001$$

gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0–5)

Dane jest równanie

$$(x-6) \cdot [(m-2)x^2 - 4(m+3)x + m + 1] = 0$$

z niewiadomą x i parametrem $m \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku.

Zapisz obliczenia.

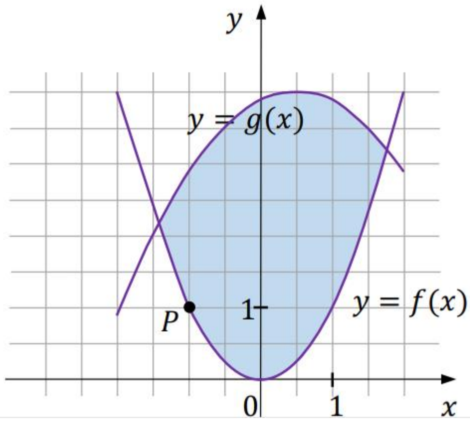
Zadanie 5. (0–3)

Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.

Zadanie 6.

Na obrzeżach miasta znajduje się jezioro, na którym postanowiono stworzyć tor regatowy. Na podstawie dostępnych map wymodelowano w pewnej skali kształt linii brzegowej jeziora w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) za pomocą fragmentów wykresów funkcji f oraz g (zobacz rysunek). Funkcje f oraz g są określone wzorami $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$.

Początek toru postanowiono zlokalizować na brzegu jeziora w miejscu, któremu odpowiada w układzie współrzędnych punkt $P = (-1, 1)$.



Zadanie 6.1. (0–2)

Niech R będzie punktem leżącym na wykresie funkcji g.

Wykaż, że odległość punktu R od punktu P wyraża się wzorem

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

gdzie x jest pierwszą współrzędną punktu R.

Zadanie 6.2. (0–6)

Koniec toru regatowego należy umieścić na linii brzegowej.

Oblicz współrzędne punktu K, w którym należy zlokalizować koniec toru, aby długość toru (tj. odległość końca K toru od początku P) była możliwie największa. Oblicz długość najdłuższego toru.

Zapisz obliczenia.

Wskazówka.
Przy rozwiązywaniu zadania możesz skorzystać z tego, że odległość dowolnego punktu R leżącego na wykresie funkcji g od punktu P wyraża się wzorem

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

gdzie x jest pierwszą współrzędną punktu R.

Zadanie 7. (0–4)

Rozwiąż równanie

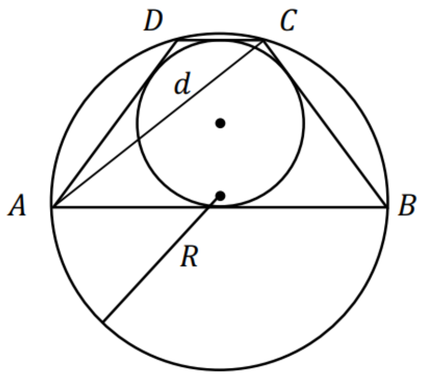
$$\sin(3x) = 2\sin x$$

w zbiorze $[0, \pi]$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–4)

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o obwodzie l i podstawach AB oraz CD takich, że $|AB| > |CD|$. Trapez jest opisany na okręgu i wpisany w okrąg, a przekątna AC trapezu ma długość d (zobacz rysunek).



Wykaż, że promień R okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ jest równy $\dfrac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}$.

Zadanie 9. (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $A = (9, 12)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC. Prosta k o równaniu $y = \frac{1}{2}x$ zawiera dwusieczną kąta ABC tego trójkąta. Okrąg $\mathcal{O}$ o równaniu $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 16$ jest wpisany w ten trójkąt.

Oblicz współrzędne punktu styczności prostej przechodzącej przez wierzchołki B i C tego trójkąta z okręgiem $\mathcal{O}$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–6)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i polu powierzchni bocznej równym P. Kąt między wysokościami sąsiednich ścian bocznych poprowadzonych z wierzchołka S ma miarę 2α.

Objętość tego ostrosłupa jest równa $\sqrt{k \cdot P^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos(2\alpha)}$, gdzie k jest stałym współczynnikiem liczbowym.

Oblicz współczynnik k.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–4)

Egzamin składa się z 15 zadań zamkniętych. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których tylko jedna okazuje się poprawna. Zdający zalicza egzamin, jeśli udzieli poprawnych odpowiedzi w co najmniej 11 zadaniach. Pewien student przystąpił nieprzygotowany do egzaminu i w każdym zadaniu wybierał losowo odpowiedź. Przyjmij, że w każdym zadaniu wybór każdej z odpowiedzi przez studenta jest równo prawdopodobny.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że ten student zaliczył egzamin.

Zapisz obliczenia.

Odpowiedzi:

$\log_4 49 = a \cdot b.$

$y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}.$

$n > 9.$

$m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty).$

-

$K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (j).

$0, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi.$

-

$(8, 0).$

$k = \frac{\sqrt{2}}{36}.$

$\frac{123841}{4^{15}}$