Część III: Rachunek całkowy

Definicja 1.
Niech f będzie funkcją określoną na przedziale $[a, b]$. **Funkcją pierwotną** funkcji f nazywamy funkcję F określoną na $[a, b]$, która spełnia warunek $\forall x \in [a, b] : F'(x) = f(x)$.[1]

Twierdzenie 2.
Jeśli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$, to ma funkcję pierwotną w $[a, b]$.[2]

Uwaga 3.
Jeśli funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f oraz C jest dowolną liczbą rzeczywistą, to również funkcja G określona wzorem $G(x) := F(x) + C$ jest pierwotną funkcji f.

Przykład 4. Funkcją pierwotną do funkcji $f(x) = 2x$ jest np. $g(x) = x^2$ (bo pochodna z x^2 to $2x$). Ale dobrym przykładem będzie też $h(x) = x^2 + 4$, czy $k(x) = x^2 - 2022$.

Definicja 5.
Niech f będzie funkcją określoną na przedziale $[a, b]$. **Całką nieoznaczoną** funkcji f nazywamy zbiór wszystkich jej funkcji pierwotnych[3]. Zapisujemy to następująco[4]

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

gdzie F jest pewną pierwotną funkcji f, zaś C dowolną liczbą rzeczywistą.

Twierdzenie 6 (liniowość całki)**.**
Jeśli funkcje f i g są całkowalne na przedziale $[a, b]$ oraz $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \qquad \textbf{(addytywność)}$$

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx \qquad \textbf{(jednorodność)}$$

Większość podstawowych wzorów na całki otrzymujemy dzięki znajomości pochodnych konkretnych funkcji. W ogólności znajdywanie całek, nawet pozornie prostych, jest znacznie trudniejszym zadaniem niż szukanie pochodnych.

Twierdzenie 7 (wzory na całki z funkcji elementarnych)**.**

1. $\int 0\,dx = C$
2. $\int 1\,dx = x + C$
3. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ dla $\alpha \neq -1$
4. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x\,dx = e^x + C$
7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$
11. $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$
12. $\int \frac{1}{x^2 + 1}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \arcsin x + C$

[1] Zauważmy, że użycie pochodnej wymusza, by funkcja F była różniczkowalna (czyli też ciągła). Nie oznacza to oczywiście, że f musi być ciągła, bo istnieją funkcje różniczkowalne, których pochodne nie są ciągłe.

[2] Zwróćmy uwagę, że twierdzenie jest w formie implikacji. To oznacza, że nic nie mówi ono o funkcjach nieciągłych. Można wskazać przykład funkcji nieciągłej, która ma funkcję pierwotną.

[3] Jeszcze bardziej formalnie całkę nieoznaczoną definiuje się jako klasę abstrakcji pewnej relacji równoważności. Dla zainteresowanych: Na zbiorze wszystkich funkcji pierwotnych dla funkcji ciągłych definiujemy relację $F \sim G \Leftrightarrow F - G$ jest stała.

[4] Symbol całki pochodzi od wydłużonej litery s i zawdzięczamy go Leibnizowi, który zaadaptował go od łacińskiego słowa *summa*. Symbol ten został przez niego użyty po raz pierwszy 29 października 1675 roku w manuskrypcie *Analyseos tetragonisticae pars secunda*.

Twierdzenie 8 (całkowanie przez części)**.**
Jeśli funkcje f i g mają ciągłe pochodne w przedziale $[a, b]$, to

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx.$$

Przykład 9. Obliczymy całkę $\int x \sin x\, dx$. W celu uproszczenia zapisu wprowadźmy podstawienie[5]

$$\begin{bmatrix} u = x & v' = \sin x \\ \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{bmatrix}.$$

Mamy zatem $\int x \sin x\, dx = -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x)\, dx = -x \cos x + \sin x + C$.

Twierdzenie 10 (całkowanie przez podstawienie)**.**
Jeśli funkcja g ma ciągłą pochodną oraz funkcja f jest ciągła na przedziale $[c, d] = g\,[a, b]$, to

$$\int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt = F\left(g(x)\right) + C,$$

gdzie $t = g(x)$.

Przykład 11. Obliczymy całkę $\int \cos 3x\, dx$. Tak jak wcześniej, stosowanie wprost bardzo formalnego zapisu i oznaczeń z twierdzenia byłoby bardzo kłopotliwe. Dlatego również tutaj posłużymy się skróconym rozumowaniem.
Podstawiamy nową zmienną $t = 3x$. Wtedy różniczkując obie strony[6] mamy $dt = 3dx$, skąd zaś $dx = \dfrac{dt}{3}$.
Podstawiając otrzymane wyniki do całki otrzymujemy

$$\int \cos 3x\, dx = \int \cos t\, \frac{dt}{3} = \int \frac{1}{3} \cos t\ dt = \frac{1}{3} \int \cos t\ dt = \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \sin 3x + C$$

Definicja 12.
Niech $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Wprowadzamy następujące definicje:

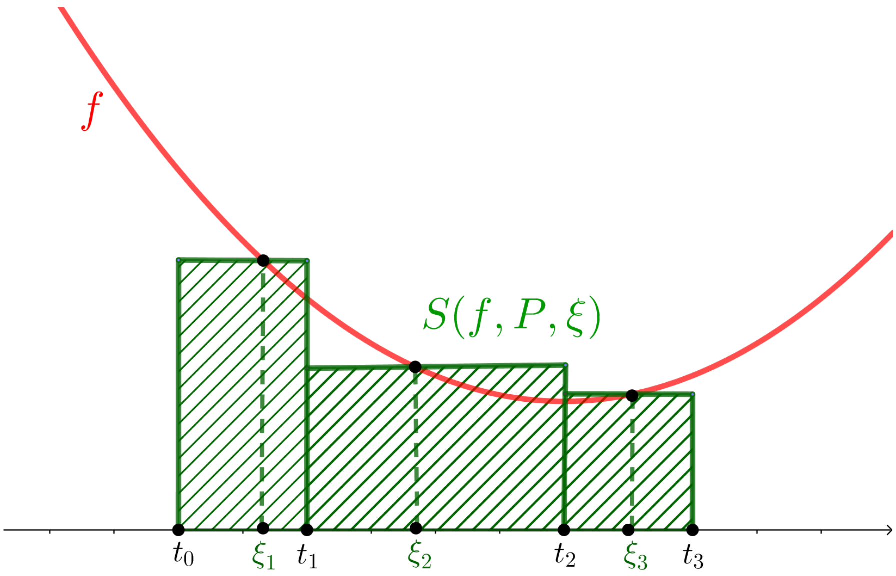
- **Podziałem przedziału** $[a, b]$ nazywamy układ punktów $(t_0, t_1, \ldots, t_k)$, gdzie $k \geqslant 1$, taki że $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$. Układ ten oznaczamy literą P.
- **Średnicą podziału** $P = (t_0, t_1, \ldots, t_k)$ przedziału $[a, b]$ nazywamy liczbę $\delta(P) := \max\{t_j - t_{j-1} : j \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$.
- **Ciąg podziałów** $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywamy normalnym, gdy $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(P_n) = 0$.
- **Układem punktów pośrednich** dla danego podziału $(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ nazywamy $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, taki że $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ dla $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Definicja 13.
Niech dana będzie funkcja f określona na przedziale $[a, b]$. Ustalmy podział $P = (t_0, t_1, \ldots, t_k)$ oraz układ punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ dla podziału P. Wtedy **sumą (całkową) Riemanna** funkcji f na przedziale $[a, b]$ dla podziału P i układu punktów pośrednich ξ nazywamy liczbę

$$S(f, P, \xi) := \sum_{j=1}^{k} f\left(\xi_j\right) \cdot \left(t_j - t_{j-1}\right).$$

[5] Zauważmy, że u odpowiada $f(x)$, zaś v' odpowiada $g'(x)$. Zatem pierwszy wiersz odpowiada wyrażeniom pod całką. W drugim wierszu odpowiednio obliczamy pochodną oraz całkę z funkcji z wiersza pierwszego. A zatem u' odpowiada $f'(x)$, a v odpowiada $g(x)$. Dzięki temu drugi wiersz to wyrażenia pod całką po prawej stronie wzoru, a przekątna to wyrażenie przed całką. Ten zapis pozwala mnemotechnicznie zapamiętać liczenie całek tą metodę, bez konieczności zapamiętywania skomplikowanego wzoru.

[6] I dopisując tak zwaną różniczkę funkcji.



Definicja 14.
Funkcję f nazywamy **całkowalną w sensie Riemanna** na przedziale $[a, b]$ jeśli istnieje liczba $I \in \mathbb{R}$, taka że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz związanego z nim ciągu układów punktów pośrednich $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P_n, \xi_n) = I.$$

Liczbę I nazywamy całką Riemanna funkcji f na $[a, b]$ i oznaczamy $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Wniosek 15 (Interpretacja geometryczna całki Riemanna)**.**
Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz w tym przedziale przyjmuje wartości nieujemne, to pole P obszaru ograniczonego osią Ox, wykresem funkcji f oraz prostymi $x = a$ oraz $x = b$ wyraża się wzorem $P = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Uwaga 16.
Przyjmujemy

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

Twierdzenie 17 (wzór Newtona-Leibniza/Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego)**.**
Jeśli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$ oraz F jest dowolną funkcją pierwotną f, to zachodzi wzór

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Twierdzenie 18 (liniowość całki Riemanna)**.**
Jeśli funkcje f i g są całkowalne w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$ oraz $k \in \mathbb{R}$, to

$$\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx \qquad \textbf{(addytywność)}$$

$$\int\limits_a^b k \cdot f(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad \textbf{(jednorodność)}$$

Twierdzenie 19 (całkowanie przez części).
Jeśli funkcje f i g mają ciągłe pochodne w przedziale $[a,b]$, to

$$\int\limits_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Twierdzenie 20 (całkowanie przez podstawienie).
Jeśli funkcja $g:\ [\alpha,\beta]\to[a,b]$ ma ciągłą pochodną oraz funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ oraz $g(\alpha)=a,\ g(\beta)=b$, to

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f((g(t))\cdot g'(t)\,dt.$$

Przykład 21.

Chcemy wyliczyć $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\,dx$. Rozwiążemy to zadanie na dwa sposoby[7].

Sposób I

Korzystając z przykładu (11) wiemy, że pierwotną funkcji $\cos 3x$ jest $\frac{1}{3}\sin 3x$. Używając wzoru Newtona-Leibniza otrzymujemy

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\,dx = \left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{3}\sin 0 = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Sposób II

Podstawiamy $t=3x$. Ponieważ zmienna x przebiega zbiór $[0,\frac{\pi}{6}]$, to zmienna t będzie od 0 do $3\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$. Ponadto $dt=3dx$, a więc $dx=\frac{dt}{3}$. Z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie mamy zatem

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Zauważmy, że funkcja $f(x)=\cos 3x$ w przedziale $[0,\frac{\pi}{6}]$ jest nieujemna. Zatem otrzymana całka to pole powierzchni pomiędzy wykresem funkcji f, a osią Ox w danym przedziale.

Twierdzenie 22 (addytywność względem przedziałów całkowania).
Jeśli funkcja f jest całkowana w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ oraz $c\in(a,b)$, to

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

[7]Różniące się de facto tylko sposobem zapisu. Cała treść merytoryczna jest taka sama. W pierwszym sposobie korzystamy z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie dla całek nieoznaczonych, a w drugim bezpośrednio z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie dla całek Riemanna.