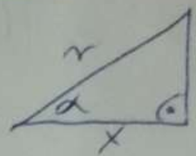
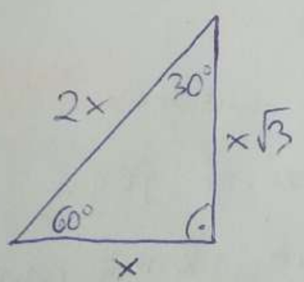
Def. Trygonometria

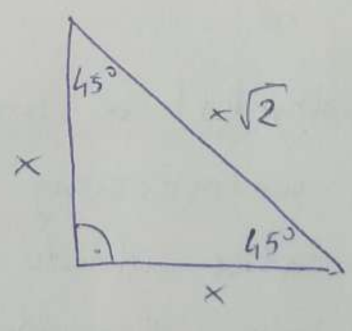
Niech α będzie kątem ostrym w trójkącie prostokątnym.
Wtedy:



- **Sinusem** kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do przeciwprostokątnej, czyli $\sin\alpha = \frac{y}{r}$.
- **Cosinusem** kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do przeciwprostokątnej, czyli $\cos\alpha = \frac{x}{r}$
- **Tangensem** kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do przyprostokątnej przyległej do kąta α, czyli $tg\alpha = \frac{y}{x}$.
- **Cotangensem** kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do przyprostokątnej przeciwległej do kąta α, czyli $ctg\alpha = \frac{x}{y}$

Wartości dla kątów $30°$, $45°$, $60°$





α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Twierdzenie (własności)

Niech α będzie kątem ostrym. Wtedy:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (jedynka trygonometryczna)

2) $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3) $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

D:

1) $L = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2+x^2}{r^2} \underset{\text{tw. Pitagorasa}}{=} \frac{r^2}{r^2} = 1 = P$

2)-4) ćw.

Twierdzenie (wzory redukcyjne)

Jeśli α jest kątem ostrym to:

1) $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$

2) $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$

3) $tg\alpha = ctg(90^\circ - \alpha)$

4) $ctg\alpha = tg(90^\circ - \alpha)$

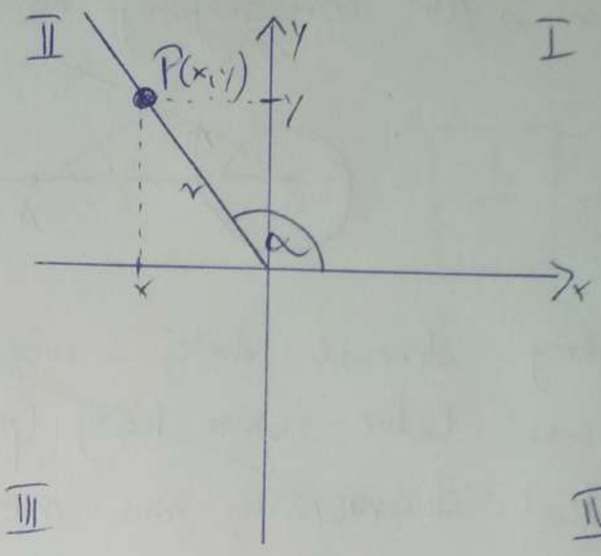
Załóżmy, że mamy dowolny kąt α umieszczony w układzie współrzędnych, przy czym umieszczony jest on tak, że jego wierzchołek jest w początku układu współrzędnych, ramię początkowe znajduje się na dodatniej półosi Ox, a ramię końcowe w pierwszej, drugiej, trzeciej lub czwartej ćwiartce układu współrzędnych.
Wybierzmy punkt $P(x,y)$ na końcowym ramieniu kąta (różny od $(0,0)$).

Def.

Przy powyższych założeniach

- $\sin\alpha = \frac{y}{r}$
- $\cos\alpha = \frac{x}{r}$
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$
- $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$

gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2}$



Znaki wartości funkcji trygonometrycznych zależą od tego, w której ćwiartce znajduje się kąt. Nauczenie się tych znaków ułatwia wierszyk:

W pierwszej wszystkie są dodatnie,
W drugiej tylko sinus,
W trzeciej tangens i cotangens,
W czwartej zaś cosinus

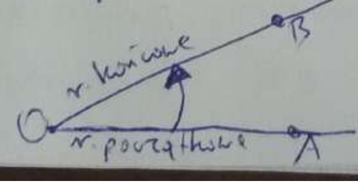
Twierdzenie

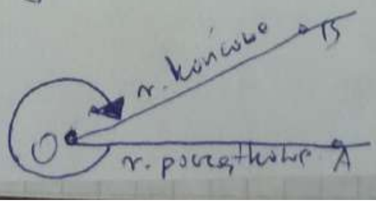
Zachodzą poprzednie 4 własności oraz:

- $\sin\alpha \in [-1, 1]$
- $\cos\alpha \in [-1, 1]$

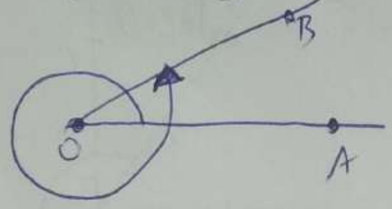
Def.

Kątem skierowanym nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku. Pierwszą półprostą nazywamy ramieniem początkowym, a drugą ramieniem końcowym.





Rozpatrzmy teraz kąt z „ruchomym" ramieniem końcowym. Załóżmy, że końcowe ramię kąta obróciło się o 360°, a następnie jeszcze o 45°. Otrzymujemy kąt o mierze $360^\circ + 45^\circ$



Gdybyśmy obracali dalej o wielokrotność 360°, to będziemy dostawać takie same kąty (przystające). Tak więc przyjmujemy, że kąt skierowany ma nieskończenie wiele miar, a tę z przedziału $[0^\circ; 360^\circ)$ nazywamy miarą główną.

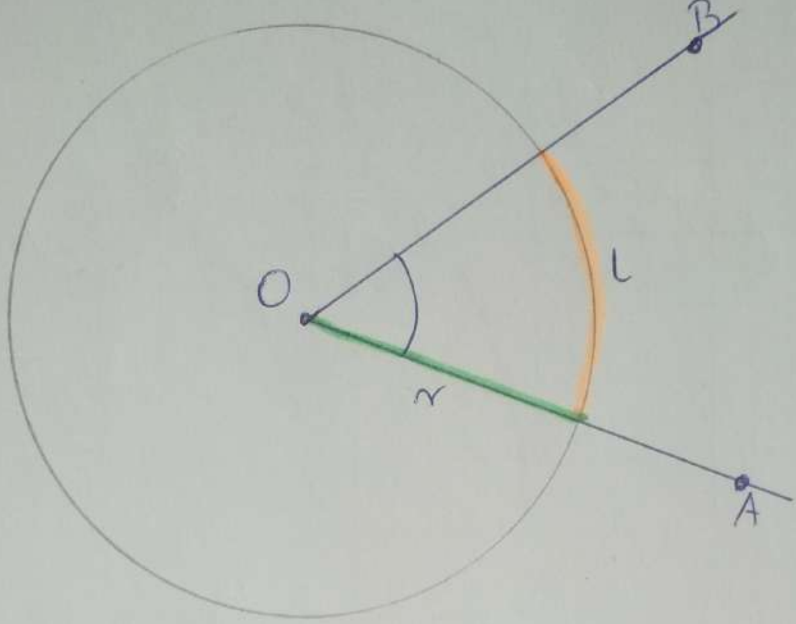
Wzory redukcyjne (schemat)

1. Zakładamy, że α jest kątem ostrym.
2. Sprawdzamy, w której ćwiartce jest kąt
3. Ustalamy znak danej funkcji trygonometrycznej (wierszyk)
4. Jeśli przed $+\alpha$ (lub $-\alpha$) jest nieparzysta wielokrotność 90°, to funkcję zmieniamy na kofunkcję; jeśli parzysta, to funkcja pozostaje bez zmian.

Przykład

- $\sin 240^\circ = \sin(\overset{2\cdot 90^\circ}{180^\circ} + \overset{\alpha}{60^\circ}) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo III ćw, sinus ujemny
- $\sin 240^\circ = \sin(\overset{3\cdot 90^\circ}{270^\circ} - \overset{\alpha}{30^\circ}) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo III ćw, sinus ujemny

Do tej pory mierzyliśmy kąty za pomocą stopni. Okazuje się, że można inaczej.



$$\boxed{\frac{L}{r}}$$

Def.

Stosunek długości łuku będącego częścią wspólną okręgu i kąta, do promienia nazywamy <u>miarą łukową</u> kąta

Def.

Kąt, którego miara łukowa wynosi 1 nazywamy radianem

Miara łukowa kąta $360°$ to: $\frac{L}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

$180°$ to: $\frac{L}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi$

Pozostałe kąty wyznaczamy z proporcji

Ćw.

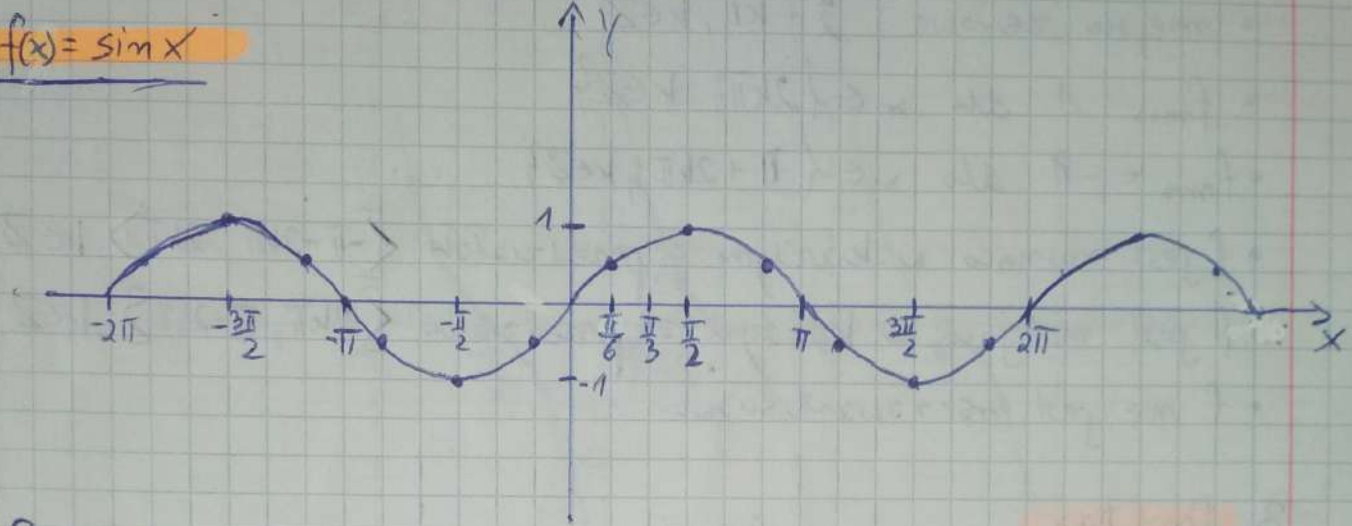
- wyznaczyć miarę łukową kątów $30°, 45°, 60°, 90°$.
- wyznaczyć miarę stopniową (w przybliżeniu) kąta o mierze 1 [rad]

Uwaga.

Dzięki wprowadzeniu miary łukowej, każda liczba rzeczywista jest miarą pewnego kąta oraz każdy kąt wyraża się liczbą rzeczywistą. Możemy zatem uogólnić definicję funkcji trygonometrycznych na liczby rzeczywiste.

Wykresy funkcji trygonometrycznych

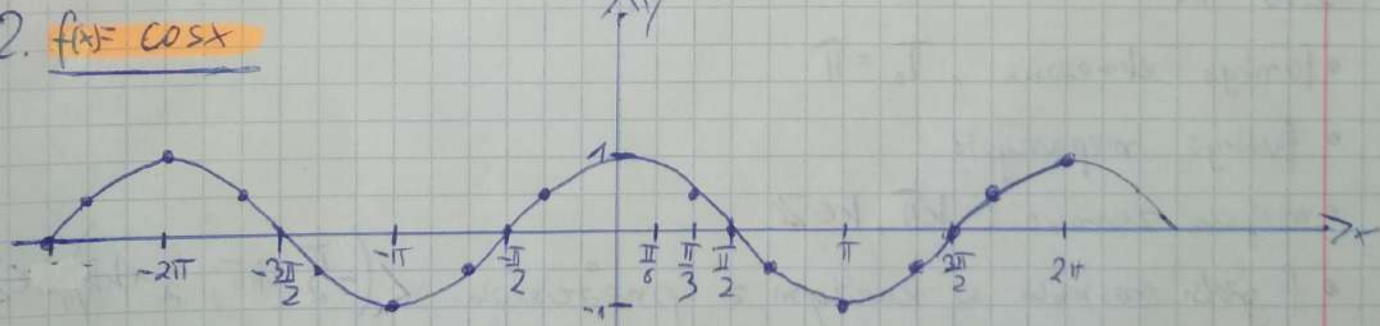
1. $f(x) = \sin x$



Własności:

- $D = \mathbb{R}$
- $ZW = [-1, 1]$
- funkcja okresowa, $T_0 = 2\pi$
- funkcja nieparzysta
- miejsca zerowe: $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $f_{max} = 1$ dla $x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$
- $f_{min} = -1$ dla $x \in \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$
- f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$
- f jest malejąca w każdym z przedziałów: $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$
- f nie jest różnowartościowa.

2. $f(x) = \cos x$

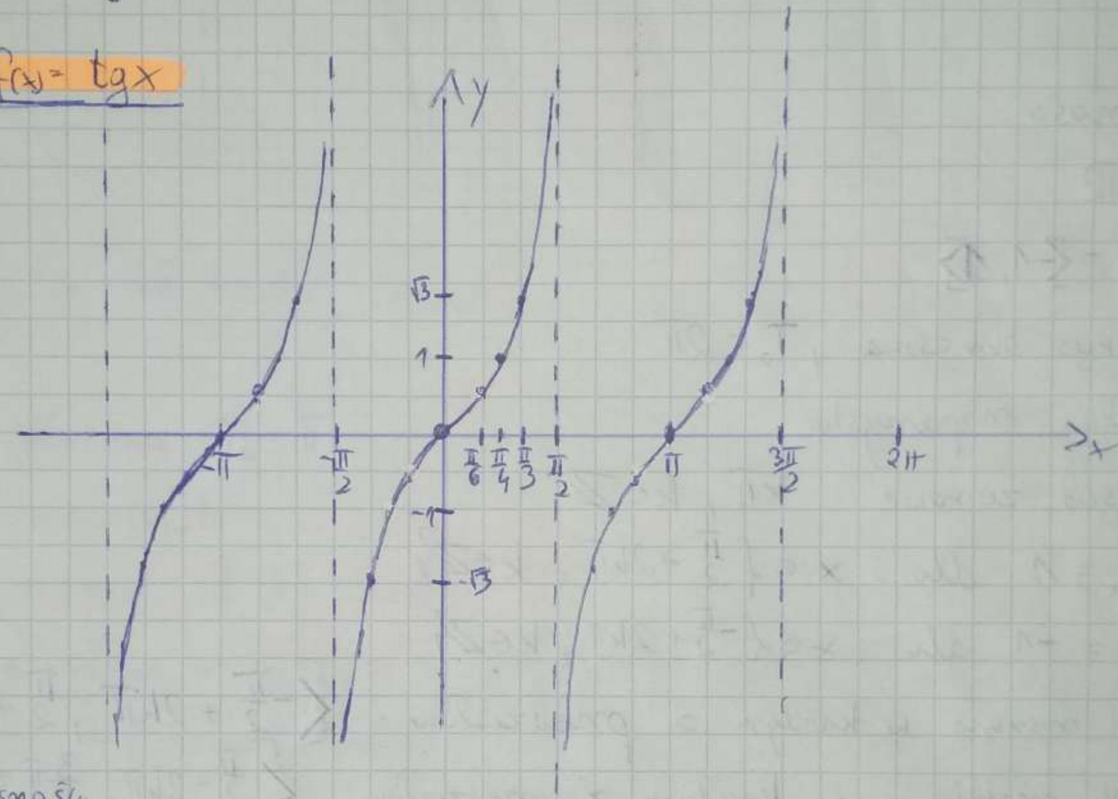


Własności

- $D = \mathbb{R}$
- $ZW = [-1, 1]$
- funkcja okresowa, $T_0 = 2\pi$

- funkcja parzysta
- miejsca zerowe: $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $f_{max} = 1$ dla $x \in \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
- $f_{min} = -1$ dla $x \in \{\pi + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
- f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$
- f jest malejąca w każdym z przedziałów: $[2k\pi, \pi + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$.
- f nie jest różnowartościowa.

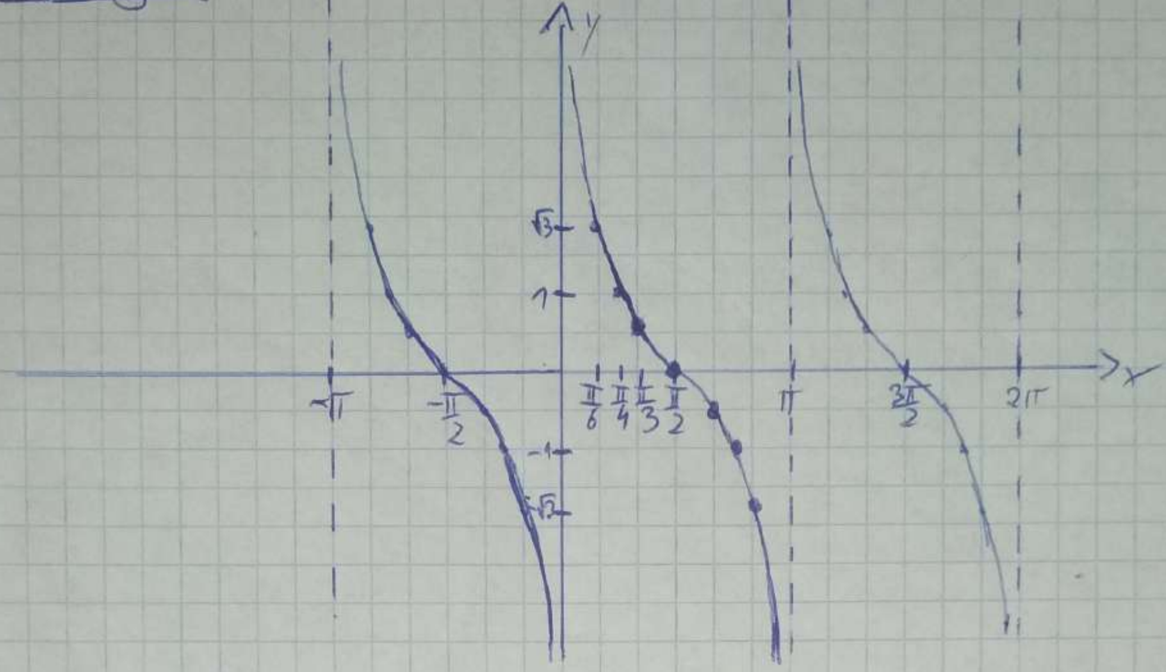
3. $f(x) = tgx$



Własności

- $D = \mathbb{R} \setminus \{x:\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $ZW = \mathbb{R}$
- funkcja okresowa, $T_0 = \pi$
- funkcja nieparzysta
- miejsca zerowe: $k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
- f nie jest różnowartościowa

4. $f(x) = \text{ctg}\, x$



Własności

- $D = \mathbb{R} \setminus \{x : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $ZW = \mathbb{R}$
- funkcja okresowa, $T_0 = \pi$
- funkcja nieparzysta
- miejsca zerowe: $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- f jest malejąca w każdym z przedziałów: $(k\pi, \pi + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
- f nie jest różnowartościowa.