Twierdzenia i dowody - teoria

W tym temacie spróbujemy przybliżyć sobie główne pojęcia i idee, którymi posługują się zawodowi matematycy – czyli osoby, które są matematykami nie tylko z wykształcenia, ale i z zawodu. Ich pracą jest rozwijanie matematyki, czyli wymyślanie i dowodzenie nowych twierdzeń.

Definicja 1.
Pojęcie pierwotne to takie pojęcie matematyczne, którego nie definiujemy, polegamy na przeświadczeniu, że jego znaczenie jest oczywiste i powszechnie znane. Łatwo sobie je wyobrazić, ale trudno je jednoznacznie zdefiniować. Takimi pojęciami są np. punkt, prosta, płaszczyzna, zbiór, należenie, leżenie na prostej.

Definicja 2.
Definicja to zdanie, za pomocą którego ustalamy nazwę nowego pojęcia, używając przy tym pojęć wcześniej już znanych. Każde pojęcie matematyczne, które nie jest pojęciem pierwotnym musi zostać zdefiniowane.

Definicja 3.
Aksjomatem nazywamy zdanie, które przyjmujemy za prawdziwe bez jakiegokolwiek dowodu. Przykładem aksjomatu w geometrii jest jeden z pięciu aksjomatów Euklidesa, który mówi, że wszystkie kąty proste są sobie równe. Aksjomatem w teorii zbiorów jest fakt, że istnieje zbiór pusty.

Definicja 4.
Twierdzeniem nazywamy zdanie wyrażające własności różnych pojęć i obiektów (np. figur, liczb, działań itd.). Twierdzenia mogą być prawdziwe lub fałszywe. Aby jakiekolwiek twierdzenie uznać za prawdziwe, należy przeprowadzić jego dowód zgodnie z prawami logiki, wykorzystując wprowadzone definicje, aksjomaty i inne wcześniej udowodnione twierdzenia.

Uwaga 5.
Wśród twierdzeń możemy wyróżnić kilka innych nazw:

- **lemat** – twierdzenie pomocnicze, którego głównym zastosowaniem jest użycie go do znacznie ważniejszego i trudniejszego twierdzenia,
- **obserwacja, własność, propozycja** – krótkie, zazwyczaj proste do udowodnienia twierdzenie,
- **wniosek** – twierdzenie będące natychmiastową konsekwencją innego twierdzenia lub jego dowodu, najczęściej po wstawieniu szczególnego przypadku danych.

Definicja 6.
Hipoteza to zdanie wyrażające własności różnych pojęć i obiektów, które nie zostało udowodnione (czyli nie wiadomo, czy jest prawdziwe, czy fałszywe), choć przypuszcza się, że jest prawdziwe. Najsłynniejszą hipotezą jest Hipoteza Riemanna.

Definicja 7.
Wprowadzamy następujące nazwy:

- Zdanie $p \Rightarrow q$ nazywamy twierdzeniem **prostym.**
- Zdanie $q \Rightarrow p$ nazywamy twierdzeniem **odwrotnym.**
- Zdanie $\neg p \Rightarrow \neg q$ nazywamy twierdzeniem **przeciwnym.**
- Zdanie $\neg q \Rightarrow \neg p$ nazywamy twierdzeniem **przeciwstawnym** (lub kontrapozycją).

Zastanówmy się teraz, jak zbudowane są twierdzenia. Rozważmy następujący przykład:

Jeśli liczba naturalna dzieli się przez 14, to liczba ta dzieli się przez 7.

W każdym twierdzeniu wyróżniamy założenie i tezę. W powyższym przypadku założeniem jest *liczba naturalna dzieli się przez 14*, zaś tezą *liczba ta dzieli się przez 7.* Każde twierdzenie możemy zapisać w formie implikacji $p \Rightarrow q$. Czasami twierdzenie jest sformułowane w taki sposób, że nie widać od razu postaci implikacji, np. powyższe twierdzenie możemy zapisać krócej:

Liczba podzielna przez 14 jest też podzielna przez 7.

Dowodzenie twierdzeń jest jedną z najważniejszych umiejętności matematycznych. Uczy ono logicznego myślenia, wyciągania wniosków, dedukcyjnego myślenia i precyzyjnego wyrażania swoich myśli. Nie jest to jednak zadanie proste. Matematycy zajmują się tym zawodowo, czyli tworzą nowe teorie i dowodzą w nich twierdzenia. Niektóre z nich są tak skomplikowane, że rozumie je kilkanaście osób na świecie. Andrew Wiles dowodził Wielkie Twierdzenie Fermata w odosobnieniu przez 7 lat. Zapisanie pełnego dowodu zajęło mu około 400 stron A4. Najdłuższym znanym obecnie dowodem jest dowód twierdzenia dotyczącego klasyfikacji skończonych grup prostych, który zajmuje około 15 000 stron. Angielska nazwa tego twierdzenia to: Enormous Theorem. Raz udowodnione twierdzenie pozostaje prawdziwe na zawsze. Jest to ogromna przewaga matematyki nad innymi dziedzinami nauki, które są doświadczalne, jak np. chemia, biologia, fizyka. Twierdzenia matematyczne udowodnione w starożytności są tak samo prawdziwe teraz jak i wtedy. Obserwacje i wnioski fizyczne, chemiczne zmieniają się cały czas wraz z rozwojem cywilizacji. Nie oznacza to oczywiście, że w matematyce nie ma co robić – rozrasta się ona bardzo szybko i abstrakcyjne jeszcze kilkadziesiąt (kilkaset) lat temu teorie znajdują szerokie zastosowanie w każdej dziedzinie życia: branża IT, bankowość, budownictwo, medycyna, fizyka, transport, biologia, sztuczna inteligencja, gastronomia i wiele innych, z których nawet nie zdajemy sobie sprawy.

Możemy wyróżnić cztery główne sposoby dowodzenia:

- **wprost** – rozpoczynamy od założeń lub wcześniej udowodnionych twierdzeń, a następnie przeprowadzając logiczne rozumowanie dochodzimy do tezy,
- **nie wprost** – polega on na zaprzeczeniu tezy dowodzonego twierdzenia i wykazaniu, że przyjęcie takiego zaprzeczenia prowadzi do sprzeczności. Zatem dane twierdzenie należy uznać za prawdziwe. Klasycznym i najbardziej znanym przykładem takiego dowodu jest dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$, który pokażemy poniżej.
- **przez kontrapozycję** – stosujemy prawo kontrapozycji, czyli zamiast dowodzić implikacji $p \Rightarrow q$ dowodzimy implikację $\neq q \Rightarrow \neg p$,
- **przez indukcję** – stosujemy zasadę indukcji matematycznej. Tą metodą dowodzimy twierdzeń dotyczących liczb naturalnych.

W dowodzie korzystamy z założeń dowodzonego twierdzenia, z definicji oraz z wcześniej udowodnionych twierdzeń.

Twierdzenie 8.
Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Dowód.

$\square$