# Zadania dodatkowe

## Termin: wrzesień

**Zadanie 1.** Za pomocą cyfr $2, 0, 2, 4$ w podanej kolejności połączonych znakami i symbolami matematycznymi utworzyć liczby od 1 do 20 (chętni mogą ciągnąć tę listę dalej... np. do 50).
Na przykład: $0 = 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 4$, $\quad 5 = 2^{0 \cdot 2} + 4$, $\quad 31 = -2^0 + \log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}} 4$.

**Zadanie 2.** Rozważmy bardo cienką powierzchnię np. chusteczkę[1] o grubości $0,1$ mm. Składamy ją na pół (ma grubość $0,2$ mm), znowu na pół (ma grubość $0,4$ mm), i tak składamy ją na pół łącznie 40 razy. Jakiej wysokości (grubości) będzie ten stosik?

**Zadanie 3.** Rozważmy nieskończoną sumę $\frac{C_1}{\pi} + \frac{C_2}{\pi^2} + \frac{C_3}{\pi^3} + \frac{C_4}{\pi^4} + \ldots$, gdzie $C_n$ oznacza $n$-tą cyfrę po przecinku[2] liczby $\pi$. Wykaż, że suma ta jest skończona (tzn. jest równa pewnej liczbie rzeczywistej).

**Zadanie 4.** Oblicz najmniejszą wartość wyrażenia: $x^{2024} + \frac{2024}{x}$ dla $x \in \mathbb{R}_+$.

**Zadanie 5.** Niech dane będzie równanie $x^3 + 2ax + b = 0$ ($a, b$ – dane). Wykaż, że jeśli $x_0$ spełnia to równanie, to $x_0 b \leqslant a^2$.

## Termin: październik

**Zadanie 6.** Udowodnij, że istnieje tylko jeden zbiór pusty.

**Zadanie 7.** Rozważmy listę, która zawiera 2024 ponumerowane kolejno zdania. Zdanie $n$-te ma postać:

*„Dokładnie $n$ zdań na tej liście jest fałszywych."*

Ile zdań jest prawdziwych i które?

**Zadanie 8.** Niech dany będzie zbiór $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$. Które liczby ze zbioru $A$ spełniają implikację:

Jeżeli $n$ jest parzysta, to $n$ jest podzielna przez 4.

**Zadanie 9.** Znajdź wszystkie liczby **niewymierne** $a$, dla których $a^2 - 44a$ oraz $a^3 - 2015a$ są **wymierne**.

**Zadanie 10.** Dane są liczby rzeczywiste $a, b, c, d$ spełniające warunki: $a + b + c + d > 0$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd > 0$, $abc + abd + acd + bcd > 0$, $abcd > 0$. Wykaż, że każda z liczb $a, b, c, d$ jest dodatnia.

## Termin: listopad

**Zadanie 11.** Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = z^7 \\ y^4 + z^4 = x^7 \\ x^4 + z^4 = y^7 \end{cases}$$

**Zadanie 12.** Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$ jest nieparzysta.

**Zadanie 13.** Rozważmy kwadrat o boku 2, który dzielimy na cztery przystające kwadraty o boku 1. W każdy z tych małych kwadratów wpisujemy koło. Oblicz promień koła, którego środek jest środkiem dużego kwadratu i które jest styczne zewnętrznie do czterech małych kół.

[1] Jeśli ktoś uważa, że chusteczka jest za mała, by złożyć ją aż 40 razy, może wyobrazić sobie ogromną płachtę rozłożoną na bardzo dużym polu.

[2] Mowa oczywiście o standardowym rozwinięciu w systemie dziesiętnym tzn. $\pi = 3,1415926\ldots$.

**Zadanie 14.** Rozważmy analogiczną sytuację w 3D, tzn. sześcian o krawędzi 2, który dzielimy na osiem przystających sześcianów o krawędzi 1. W każdy z tych małych sześcianów wpisujemy kulę. Oblicz promień kuli, której środek jest środkiem dużego sześcianu i która jest styczna zewnętrznie do małych kul.

**Zadanie 15.** Rozważmy analogiczną sytuację w dowolnym $n$-tym wymiarze, tzn. hipersześcian o krawędzi 2, który dzielimy na $2^n$ przystających sześcianów o krawędzi 1. W każdy z nich wpisujemy hiperkulę. Oblicz promień hiperkuli, której środek jest środkiem dużego hipersześcianu i która jest styczna zewnętrznie do małych hiperkul.

---

**Termin: grudzień**

---

**Zadanie 16.** Żona zawarła z mężem kontrakt, że jeśli danego dnia obiad gotuje ona, to następnego dnia za przygotowanie obiadu odpowiedzialny jest mąż. Jeśli zaś w jakimś dniu obiad gotował mąż, to o wyborze następnego dnia decyduje rzut monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A_n$ – w $n$-tym dniu kontraktu obiad gotuje mąż. Czy istnieje granica $\lim_{n\to\infty} A_n$ ? Jeśli tak, to ją obliczyć.
Uwaga: Można przyjąć, że $P(A_1) = \frac{1}{2}$.

**Zadanie 17.** Rozważmy następującą sytuację z sądu. Podczas rozprawy prokurator mówi: „Jeśli oskarżony zabił swoją żonę, to z pewnością miał wspólnika”. Obrońca zakrzyknął: „To kłamstwo!”.
Dlaczego słowa obrońcy są niekorzystne dla oskarżonego?

**Zadanie 18.** Oblicz $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$.

**Zadanie 19.** Rozważmy dowolny wielokąt wypukły, w który można wpisać okrąg. Na każdym boku wielokąta wpisujemy liczbę 0 lub 1, w taki sposób, że na dwóch sąsiednich bokach (tzn. z wspólnym wierzchołkiem) nie znajdują się te same liczby. Udowodnij, że suma długości boków z liczbami 0 jest równa sumie długości boków z liczbą 1.

**Zadanie 20.** Rozważmy dowolny wielościan wypukły, w który można wpisać kulę. Na każdej ścianie wielościanu wpisujemy liczbę 0 lub 1, w taki sposób, że na dwóch sąsiednich ścianach (tzn. ze wspólną krawędzią) nie znajdują się te same liczby. Udowodnij, że suma pól ścian z liczbami 0 jest równa sumie pól ścian z liczbą 1.

---

**Termin: styczeń**

---

**Zadanie 21.** Rozwiąż układ równań w liczbach dodatnich

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$$

**Zadanie 22.** Która z liczb jest większa: $2^\pi$, czy $\pi^2$?
*Wskazówka:* $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$.

**Zadanie 23.** Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek: $x + f(x) = f\left(f(x)\right)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wykaż, że jest ona różnowartościowa.

**Zadanie 24.** Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów spełniających warunek $xy < 10$.

**Zadanie 25.** Rozwiąż równanie $\log(2x-1)^2 = 2\log x^2$

**Termin: luty**

**Zadanie 26.** Dany jest układ równań z niewiadomymi $x, y$ i parametrem $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y = 2m - 1 \\ x^2 + y^2 = m^2 + 2m - 3 \end{cases}$$

Wyznacz najmniejszą możliwą wartość $xy$.

**Zadanie 27.** Podać przykład liczby naturalnej dodatniej, której połowa jest kwadratem pewnej liczby naturalnej, jedna trzecia jest sześcianem pewnej liczby naturalnej oraz jedna piąta jest piątą potęgą pewnej liczby naturalnej.

**Zadanie 28.** Rozwiąż równanie: $\mathrm{tg}^2(x + y) + \mathrm{ctg}^2(x + y) = 1 - 2x - x^2$.

**Zadanie 29.** Zapis liczby $x$ w postaci

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

gdzie $a_0 \geqslant 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ nazywamy ułamkiem łańcuchowym i w skrócie zapisujemy go w postaci: $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

- Zamień ułamek łańcuchowy $[0, 1, 2, 3, 4, 5]$ na zwykły,
- Zamień ułamek zwykły $\frac{7}{11}$ na łańcuchowy.

*Wskazówka: zamianę* $\frac{11}{8}$ *zaczniemy następująco* $\frac{11}{8} = 1 + \frac{3}{8} = 1 + \cfrac{1}{\frac{8}{3}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{2}{3}} = \ldots$

**Zadanie 30.** Rozważmy następujący ciąg: $1, 2, 3, 4, 5$. Jaki powinien być kolejny, szósty wyraz tego ciągu? Choć mogłoby się wydawać, że jedyną logiczną odpowiedzą jest 6, to można znaleźć regułę, która będzie prawidłowa dla pierwszych pięciu wyrazów, a szósty możemy dobrać dowolnie. Dzieje się tak za sprawą wzoru interpolacyjnego Lagrange'a. Wzór ten mówi, że wielomian

$$W(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

spełnia $W(x_i) = y_i$ dla $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Po rozpisaniu tego wzoru tj.

$$W(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} y_1 + \ldots + \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})} y_n,$$

gdzie w $n$-tym składniku w liczniku i mianowniku brakuje nawiasu z $x_n$, widać że dla $x = x_i$ wszystkie wyrazy wynoszą 0 poza wyrazem $i$-tym, ze względu na czynnik $x - x_i$. Ten $i$-ty wyraz się upraszcza ze względu na taki sam licznik i mianownik – tak więc po skróceniu pozostaje $y_i$.
Powiedzmy teraz, że chcielibyśmy aby wyraz szósty wynosił 19. Wystarczy przyjąć $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6$ oraz $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 3, y_4 = 4, y_5 = 5, y_6 = 19$.
Sprawdzić, że rzeczywiście otrzymamy $W(1) = 1, W(2) = 2, W(3) = 3, W(4) = 4, W(5) = 5$ (wystarczy dla dwóch z nich) oraz $W(6) = 19$. Podać postać wielomianu po wymnożeniu w postaci ogólnej.

**Rozwiązanie 1.**

$1 = (2+0+2) : 4$
$2 = -2+0+2+\sqrt{4}$
$3 = -2^0+2+\sqrt{4}$
$4 = 2+0+\log_2 4$
$5 = 2^0+2+\sqrt{4}$
$6 = 2+0^2+4$
$7 = -2^0+2\cdot 4$
$8 = 2+0+2+4$
$9 = 2^0+2\cdot 4$
$10 = 2+0+2\cdot 4$
$11 = 2+0!+2\cdot 4$
$12 = (2^0+2)\cdot 4$
$13 = -2-0!+2^4$
$14 = -2+0+\log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} 4$
$15 = -2^0+2^4$
$16 = \left(2^{0+2}\right)^{\sqrt{4}}$
$17 = 2^0+2^4$
$18 = 2+0+2^4$
$19 = -(2+0!+2)+4!$
$20 = -2+0-2+4!$
$21 = -2^0-2+4!$
$22 = 2\cdot 0-2+4!$
$23 = 2^0-2+4!$
$24 = 2\cdot 0\cdot 2+4!$
$25 = -2^0+2+4!$
$26 = 2\cdot 0+2+4!$
$27 = 2^0+2+4!$
$28 = 2+0+2+4!$
$29 = 2+0!+2+4!$
$30 = -2+0+\log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}} 4$
$31 = -2^0+\log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}} 4$
$32 = (2+0)\cdot 2^4$

**Rozwiązanie 2.** Początkowa grubość to $0,2$ mm. Każde złożenie na pół podwaja grubość stosiku. Czynność tę wykonujemy 40 razy, więc końcowa wysokość to $0,1\cdot 2^{40}$ mm $= 109\,951\,162777,6$ mm $\approx 110$ tys. km (!). Jest to prawie trzykrotnie więcej niż obwód Ziemi.
Osoby znające ciągi odnajdą w tym zadaniu ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 0,1$ i ilorazie $q = 2$.

**Rozwiązanie 3.** Skoro $C_n$, to $n$-ta cyfra, to maksymalnie wynosi ona 9. Zachodzi więc poniższe oszacowanie:
$$\frac{C_1}{\pi}+\frac{C_2}{\pi^2}+\frac{C_3}{\pi^3}+\frac{C_4}{\pi^4}+\ldots < \frac{9}{\pi}+\frac{9}{\pi^2}+\frac{9}{\pi^3}+\frac{9}{\pi^4}+\ldots.$$
Ale tę sumę umiemy policzyć – jest to suma szeregu geometrycznego $\left(a_1 = \frac{9}{\pi},\ q = \frac{1}{\pi}\right)$. Wynosi zatem

$S = \dfrac{\frac{9}{\pi}}{1-\frac{1}{\pi}} = \dfrac{9}{\pi-1}(\approx 4,2)$. Szukana suma jest mniejsza niż $S$, a więc skończona.

**Rozwiązanie 4.**
**Sposób I**
Pod koniec klasy 3 poznaje się rachunek różniczkowy (pochodne) i wtedy można to zadanie rozwiązać „schematycznie" jako jedno z wielu zadań typu: „Oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji $f$ w podanym przedziale".
Szkic: Szukamy za pomocą pochodnych ekstremów lokalnych wewnątrz przedziału, liczymy granice na krańcach przedziału, podajemy wartość największą i najmniejszą (jeśli istnieją).

**Sposób II**

Zauważmy, że $x^{2024}+\frac{2024}{x} = x^{2024}+\overbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x}}^{2024}$, a więc z nierówności między średnimi $(A-G)$:
$$\frac{x^{2024}+\frac{2024}{x}}{2025} \geqslant \sqrt[2025]{x^{2024}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{2024}} = 1,$$
czyli omawiane wyrażenie jest $\geqslant 2025$. Równość zachodzi, gdy wszystkie składniki są równe tzn. $x^{2024} = \frac{1}{x}$, czyli gdy $x = 1$. Wtedy wartość wyrażenia wynosi $1^{2024}+\dfrac{2024}{1} = 2025$.

**Rozwiązanie 5.**
**Sposób I - pomysłowy**
Skoro $x_0$ spełnia równanie, to: $x_0^3+2ax_0+b = 0$, co możemy „sprytnie" zapisać $x_0x_0^2+2ax_0+b = 0\,(\star)$.

- Jeśli $x_0 = 0$, to $b = 0$, a więc nierówność $x_0b \leqslant a^2$ jest prawdziwa.
- Jeśli $x_0 \neq 0$, to równanie $(\star)$ oznacza, że liczba $x_0$ jest pierwiastkiem równania kwadratowego $x_0x^2+2ax+b = 0$, w szczególności $\Delta \geqslant 0$. A więc $4a^2-4x_0b \geqslant 0$, co po przekształceniu daje $x_0b \leqslant a^2$.

  Zadanie to pochodzi z 17. Olimpiady Matematycznej, z pierwszego etapu.

**Sposób II**
Skoro $x_0$ spełnia równanie, to: $x_0^3+2ax_0+b = 0$, skąd $b = -x_0^3-2ax_0$.
Przekształcając równoważnie tezę mamy:
$$x_0b \leqslant a^2$$

$$-x_0^4 - 2ax_0 \leqslant a^2$$
$$x_0^4 + 2ax_0^2 + a^2 \geqslant 0$$
$$(a + x_0^2)^2 \geqslant 0$$
co jest prawdą, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

**Sposób III - dorabianie wzoru skróconego mnożenia**

Jeśli $x_0 = 0$, to $b = 0$, a więc nierówność $x_0 b \leqslant a^2$ jest prawdziwa. Załóżmy zatem, że $x_0 \neq 0$. Wtedy
$0 = x_0^3 + 2ax_0 + b = x_0\left(x_0^2 + 2a + \frac{b}{x_0}\right) = x_0\left(x_0^2 + 2 \cdot x_0 \cdot \frac{a}{x_0} + \frac{a^2}{x_0^2} - \frac{a^2}{x_0^2} + \frac{b}{x_0}\right) = x_0\left(\left(x + \frac{a}{x_0}\right)^2 - \frac{a^2 - bx_0}{x_0^2}\right)$,
a zatem $\left(x + \dfrac{a}{x_0}\right)^2 = \frac{a^2 - bx_0}{x_0^2}$ ,czyli $a^2 - bx_0 \geqslant 0$, skąd $x_0 b \leqslant a^2$.

**Rozwiązanie 6.** Załóżmy nie wprost, że istnieją dwa różne zbiory puste: $\varnothing_1, \varnothing_2$. Wiemy, że zbiór pusty zawiera się w każdym zbiorze, więc w szczególności $\varnothing_1 \subset \varnothing_2$ oraz $\varnothing_2 \subset \varnothing_1$. Ale jeśli $A \subset B$ oraz $B \subset A$ to oznacza, że $A = B$, więc $\varnothing_1 = \varnothing_2$. Istnieje zatem tylko jeden zbiór pusty.

**Rozwiązanie 7.** Na liście nie może być więcej niż jedno zdanie prawdziwe, bo wtedy koniunkcja dwóch różnych zdań byłaby fałszywa. Gdyby wszystkie 2024 zdania były fałszywe, to w szczególności ostatnie zdanie też, czyli nieprawdą jest, że 2024 zdania są fałszywe. Sprzeczność. Liczba zdań prawdziwych jest więc $\geqslant 1$ oraz $\leqslant 1$. Jest zatem dokładnie jedno zdanie prawdziwe, czyli 2023 fałszywe. Prawdziwe jest więc zdanie o numerze 2023.

**Rozwiązanie 8.** Implikacja jest fałszywa tylko w przypadku, gdy z prawdy wynika fałsz. Zatem liczby $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$ spełniają implikację, bo poprzednik jest fałszywy. Ponadto spełniają ją też liczby $0, 4, 8, 12, 16, 20$ – dla nich poprzednik i następnik są prawdziwe. Implikacja nie jest spełniona tylko dla liczb: $2, 6, 10, 14, 18$, bo są to liczby parzyste, ale niepodzielne przez 4.

**Rozwiązanie 9.** Chcemy, aby $a^2 - 44a$ oraz $a^3 - 2015a$ były wymierne.
Rozpiszmy $a(a^2 - 44a) = a^3 - 44a^2 = a^3 - 2015a + 2015a - 44(a^2 - 44a + 44a) = (a^3 - 2015a) - 44(a^2 - 44a) + 2015a - 1936a = (a^3 - 2015a) - 44(a^2 - 44a) + 79a$. Stąd $a(a^2 - 44a) = (a^3 - 2015a) - 44(a^2 - 44a) + 79a$, czyli $a(a^2 - 44a) - 79a = (a^3 - 2015a) - 44(a^2 - 44a)$ i dalej $a[(a^2 - 44a) - 79] = (a^3 - 2015a) - 44(a^2 - 44a)$. Prawa strona jest wymierna, ponieważ różnica i iloczyn liczb wymiernych jest wymierny. Zatem lewa też. Ale lewa to iloczyn liczby niewymiernej oraz wymiernej. Taki iloczyn jest wymierny tylko gdy liczba wymierna jest równa 0, tj. $a^2 - 44a = 79$. Rozwiązaniami tego równania są: $a_1 = 22 + \sqrt{563} \vee a_2 = 22 - \sqrt{563}$. Obie te liczby spełniają warunki zadania, bo $a^2 - 44a = 79 \in \mathbb{Q}$ oraz $a^3 - 2015a = a(a^2 - 44a + 44a - 2015) = a(79 + 44a - 2015) = a(44a - 1936) = 44a(a - 44) = 44(a^3 - 44a) = 44 \cdot 79 \in \mathbb{Q}$.

**Rozwiązanie 10.** Warunki w zadaniu kojarzą nam się z wzorami Viete'a stopnia 4. Rozważmy wielomian o pierwiastkach $a, b, c, d$, tj. $W(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$, który po wymnożeniu przyjmuje postać ogólną $W(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Ze wzorów Viete'a (i założeń):

- $-a_3 = a + b + c + d > 0 \Rightarrow a_3 < 0$
- $a_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd > 0 \Rightarrow a_2 > 0$
- $-a_1 = abc + abd + acd + bcd > 0 \Rightarrow a_1 < 0$
- $a_0 = abcd > 0 \Rightarrow a_0 > 0$

Zatem dla $x \leqslant 0$ jest $W(x) > 0$,a wiec wielomian $W(x)$ ma tylko dodatnie pierwiastki. Stąd $a, b, c, d > 0$.

**Rozwiązanie 11.** Lewe strony są nieujemne, więc prawe też. Stąd $x, y, z \geqslant 0$. Możemy bez straty ogólności założyć, że $x \leqslant y \leqslant z$. Wtedy prawe strony są uporządkowane słabo rosnąco, a lewe słabo malejąco. Tak więc wszystkie liczby muszą być równe: $x = y = z$. Zatem $2x^4 = x^7$, skąd $x^4(x^3 - 2) = 0$, czyli $x = 0 \vee x = \sqrt[3]{2}$.

**Rozwiązanie 12.** Rozwińmy przy pomocy dwumianu Newtona wyrażenia $(2 + \sqrt{3})^n$ oraz $(2 - \sqrt{3})^n$:

$$(2 + \sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot \sqrt{3}^k = \binom{n}{0} 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} \cdot \sqrt{3} + \binom{n}{2} 2^{n-2} \sqrt{3}^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot \sqrt{3}^n =: a + b\sqrt{3}$$

$$(2 - \sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot (-\sqrt{3})^k = \binom{n}{0} 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} \cdot (-\sqrt{3}) + \binom{n}{2} 2^{n-2} \cdot (-\sqrt{3})^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot (-\sqrt{3})^n =$$

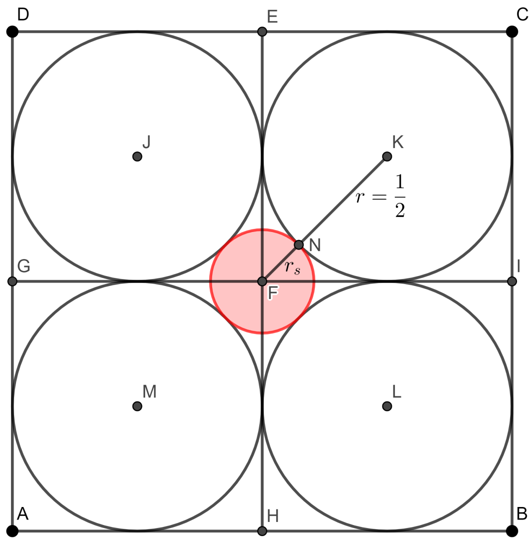
$$= \binom{n}{0} 2^n - \binom{n}{1} 2^{n-1} \cdot \sqrt{3} + \binom{n}{2} 2^{n-2} \cdot \sqrt{3}^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot (-1)^n \sqrt{3}^n =$$

$$= a - b\sqrt{3},$$

gdzie $a, b \in \mathbb{N}$.
Zatem $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n = 2a$, czyli jest to liczba parzysta. Ponadto $(2-\sqrt{3})^n \in (0,1)$. Otrzymujemy więc

$$\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor = \lfloor (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n \rfloor = \lfloor 2a - (2-\sqrt{3})^n \rfloor = 2a - 1 \in 2\mathbb{N}+1.$$

**Rozwiązanie 13.**




Niech $r_s$ to długość szukanego promienia, zaś $N$ to punkt styczności okręgów. Przekątna kwadratu $FICE$ ma długość $\sqrt{2}$. Zatem $\sqrt{2} = 1 + 2r_s$, skąd $r_s = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

**Rozwiązanie 14.** Analogicznie do zadania poprzedniego średnica każdej „małej” kuli wynosi 1, zaś przekątna „małego” sześcianu $\sqrt{3}$. Zatem $\sqrt{3} = 1 + 2r_2$, skąd $r_s = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

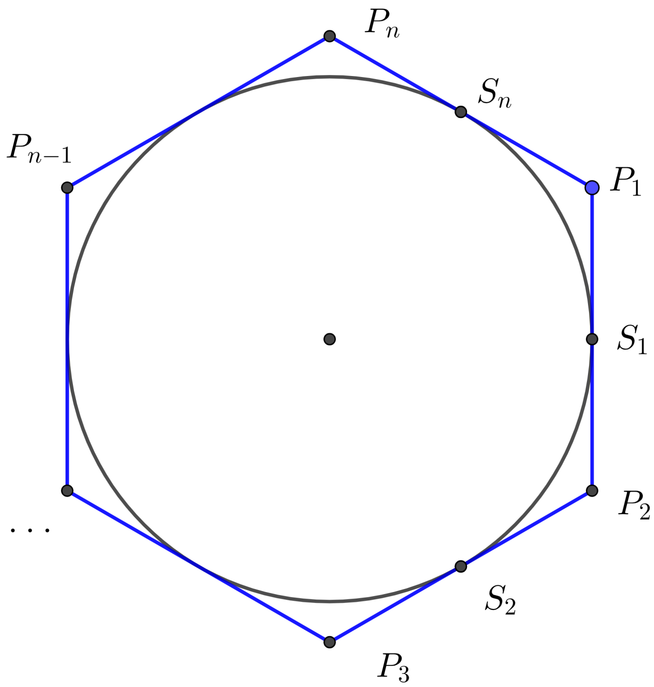
**Rozwiązanie 15.** Analogicznie do zadań poprzednich średnica każdej „małej” kuli wynosi 1, zaś przekątna „małego” hipersześcianu $\sqrt{n}$. Zatem $\sqrt{n} = 1 + 2r_2$, skąd $r_s = \dfrac{\sqrt{n}-1}{2}$.
Można dokonać bardzo ciekawych obserwacji: dla $n = 5$ mamy $r_s = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,62 > \frac{1}{2}$, co oznacza, że „mała” kula jest większa od każdej z „dużych” kul (!). Dla $n = 10$ jest $r_s = \dfrac{\sqrt{10}-1}{2} \approx 1,08 > 1$, co oznacza, że „mała” kula wychodzi poza hipersześcian (!).

**Rozwiązanie 16.** Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy:
$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)\cdot P(A_n) + P(A_{n+1}|A_n')\cdot P(A_n') = \frac{1}{2}\cdot P(A_n) + 1\cdot(1-P(A_n)) = 1 - \frac{1}{2}P(A_n)$, co możemy „sprytnie” przekształcić do postaci $P(A_{n+1}) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(P(A_n) - \frac{2}{3}\right)$. Oznaczmy $a_n := P(A_n) - \frac{2}{3}$. Wtedy równość przyjmuje postać $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$. A to oznacza, że ciąg $(a_n)$ jest geometryczny o ilorazie $q = -\frac{1}{2}$. Wiemy, że jeśli $|q| < 1$ to ciąg geometryczny o ilorazie $q$ jest zbieżny do 0. Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(P(A_n) - \dfrac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = \dfrac{2}{3}$.

**Rozwiązanie 17.** Zdanie prokuratora jest implikacją. Jego zaprzeczeniem będzie więc:
„Oskarżony zabił swoją żonę i nie miał wspólnika”.

**Rozwiązanie 18.** Liczba $x := \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$ jest dodatnia. Policzmy jej kwadrat.
$(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}})^2 = 4 + \sqrt{7} - 2\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}} + 4 - \sqrt{7} = 8 - 2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})} = 8 - 2\sqrt{16-7} = 8 - 2\cdot 3 = 2$. Zatem $x = \sqrt{2}$. A to oznacza, że wynikiem jest 0.

**Rozwiązanie 19.** Wierzchołki wielokąta oznaczmy przez $P_1, P_2, \ldots, P_n$ zaś odpowiednie punty styczności okręgu z bokami wielokąta przez $S_1, S_2, \ldots, S_n$.




Z twierdzenia o odcinkach stycznych mamy $|P_2S_1| = |P_2S_2|, |P_3S_2| = |P_3S_3|, \ldots, |P_1S_n| = |P_1S_1|$. Wskazane pary odcinków są równe, więc każdy wierzchołek „dokłada" taki sam kawałek z liczbą 0 i 1, a zatem suma długości odcinków z liczbą 1 jest taka sama jak suma długości odcinków z długością 0.
*Uwaga: Można zauważyć, że da się to zrobić tylko dla wielokąta o parzystej liczbie boków, ponieważ cyfry 0,1 muszą być pisane na przemian.*

**Rozwiązanie 20.** Oznaczmy punkty styczności sfery ze ścianami $F_1, F_2, \ldots, F_n$ wielościanu przez $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Rozważmy ściany $F_i, F_j$, które mają wspólną krawędź $PQ$. Trójkąty $PQF_i$ oraz $PQF_j$ są przystające. Analogicznie przystające są trójkąty wyznaczone przez ustaloną krawędź. Mają one zatem równe pola, a ponadto jeden jest powiązany z liczbą 1, a drugi z liczbą 0. Suma pól ścian z liczbą 1 jest więc równa sumie pól ścian z liczbą 0.

**Rozwiązanie 21.** Pierwiastkując drugie równanie otrzymujemy $x = y^{\frac{x+y}{3}}$ ($\star$). Wstawiając do pierwszego równania jest

$$\left(y^{\frac{x+y}{3}}\right)^{x+y} = y^{12}$$

$$y^{\frac{(x+y)^2}{3}} = y^{12}.$$

Stąd $y = 1$ lub $\dfrac{(x+y)^2}{3} = 12$
Jeśli $y = 1$, to z drugiego równania: $x^3 = 1$, czyli $x = 1$.
Jeśli zachodzi druga opcja to $(x+y)^2 = 36$, czyli $x + y = 6 \vee x + y = -6$. Ponieważ $x, y > 0$, to jest $x + y = 6$. Wstawiając do ($\star$) mamy $x = y^2$, skąd $x = (6-x)^2$. Otrzymujemy równanie kwadratowe $x^2 - 13x + 36 = 0$, którego rozwiązaniami są $x_1 = 4, x_2 = 9$. Jeśli $x = 4$, to $y = 2$, a jeśli $x = 9$, to $y = -3$ – sprzeczność.
Ostatecznie rozwiązaniami układu są dwie pary: $(1, 1), (4, 2)$.

**Rozwiązanie 22.** Dziedziną funkcji $f$ jest przedział $(0, +\infty)$ Obliczmy pochodną tej funkcji:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 (= \ln e) \Leftrightarrow x > e,$$

a zatem $f$ jest malejąca w $[e, +\infty)$. Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{4} \ln 4 < \frac{1}{\pi} \ln \pi,$$

co jest równoważne

$$\frac{\ln 2}{2} < \frac{\ln \pi}{\pi},$$

a następnie mnożąc przez mianowniki

$$\pi \ln 2 < 2 \ln \pi$$

$$\ln 2^{\pi} < \ln \pi^2$$

z monotoniczności logarytmu $(a > 1)$

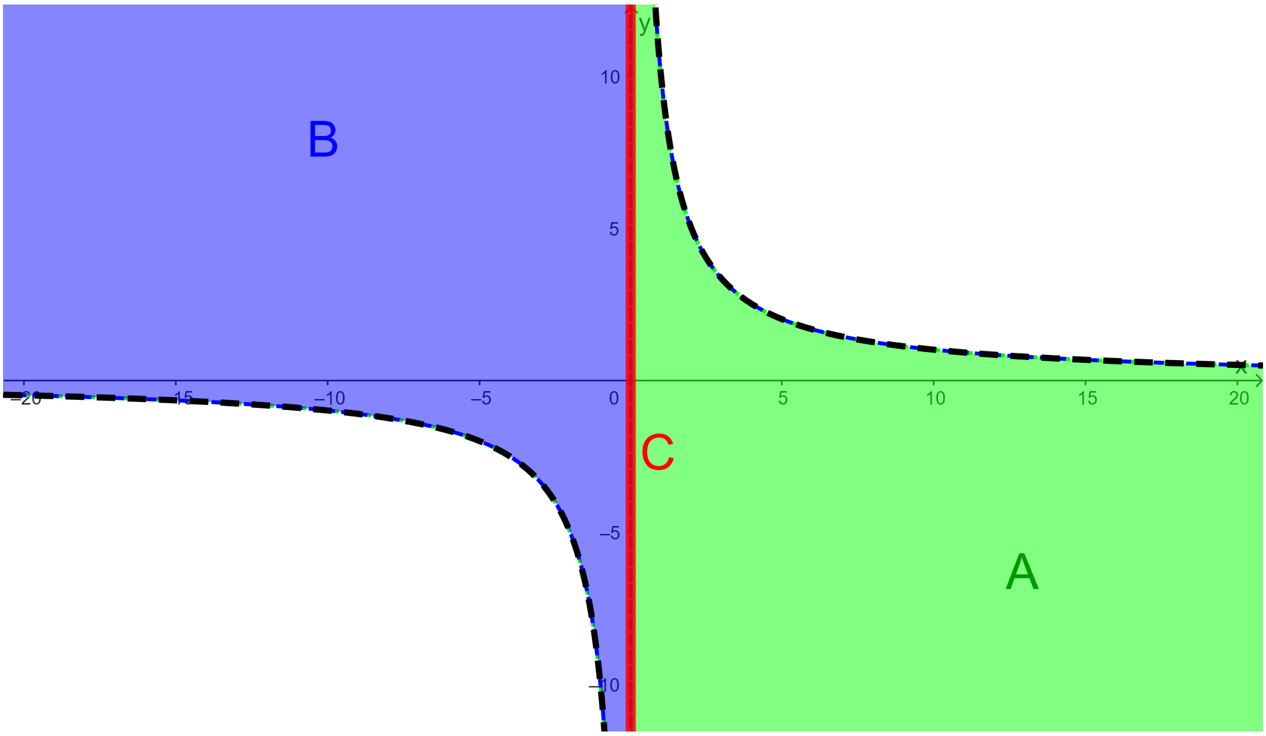
$$2^{\pi} < \pi^2.$$

**Rozwiązanie 23.** Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, takie że $f(x_1) = f(x_2)$. Wtedy $x_1 + f(x_1) = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2 + f(x_2)$. Stąd $x_1 + f(x_1) = x_2 + f(x_2)$, ale $f(x_1) = f(x_2)$ z założenia, więc $x_1 = x_2$ co oznacza różnowartościowość funkcji $f$.

**Rozwiązanie 24.**

- Jeśli $x > 0$, to otrzymujemy równoważnie $y < \frac{10}{x}$ – jest to obszar $A$
- Jeśli $x < 0$, to otrzymujemy równoważnie $y > \frac{10}{x}$ – jest to obszar $B$
- Jeśli $x = 0$, to otrzymujemy równoważnie $0 < 10$, czyli nierówność tożsamościową – jest to obszar $C$

Szukanym obszarem jest więc suma obszarów $A, B, C$




**Rozwiązanie 25.** Założenia: $\begin{cases} (2x-1)^2 > 0 \\ x^2 > 0, \end{cases} \quad \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$

$$\log(2x-1)^2 = 2\log x^2$$

$$\log(2x-1)^2 = \log x^4$$

z różowartościowości

$$(2x-1)^2 = x^4 \quad |\sqrt{}$$

$$|2x-1| = |x^2|$$

$$2x - 1 = x^2 \quad \vee \quad 2x - 1 = -x^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = 1 \vee x = -1 + \sqrt{2} \vee x = -1 - \sqrt{2}$$

$$x \in \{-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, 1\}$$

Uwaga: Należy pamiętać, że gdybyśmy chcieli „wyjąć” potęgę 2 z lewej strony do przodu to należałoby dać moduł ($\log(2x-1)^2 = 2\log|2x-1|$), ponieważ w przeciwnym przypadku zmieniłaby się dziedzina równania, więc przejścia nie byłyby równoważne.

---

$\mathbb{P}$iotr $\mathbb{B}$ury