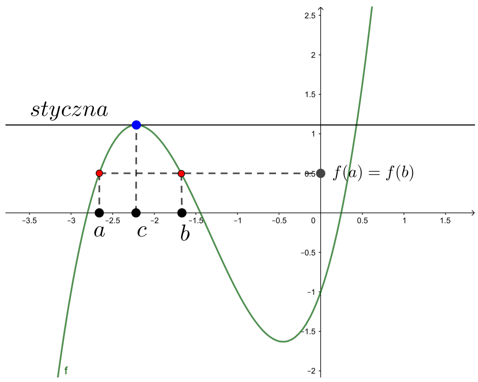
Część II: Rachunek różniczkowy

Twierdzenie 1 (Twierdzenie Darboux)**.** Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ oraz $f(a) \neq f(b)$. Wtedy dla każdej liczby y_0 leżącej pomiędzy $f(a)$ oraz $f(b)$ istnieje liczba $x_0 \in (a, b)$, taka że $f(x_0) = y_0$.

Twierdzenie 2 (Weierstrassa o osiąganiu kresów)**.** Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$. Wtedy funkcja ta w przedziale $[a, b]$ osiąga wartość największą i najmniejszą tzn. $\exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) = \max f(x)$ oraz $f(x_2) = \min f(x)$.

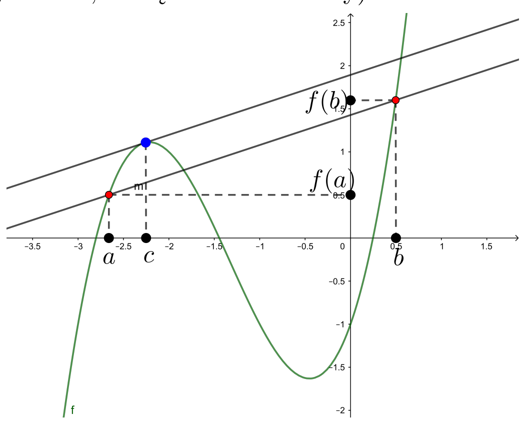
Twierdzenie 3 (Rolle'a)**.** Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalną w przedziale (a, b). Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $c \in (a, b)$, taki że $f'(c) = 0$.

Wniosek 4 (Interpretacja geometryczna tw. Rolle'a)**.** [1] Przy założeniach tw. Rolle'a istnieje punkt o pierwszej współrzędnej z przedziału (a, b), w którym styczna do wykresu funkcji jest równoległa do osi Ox.
(Współczynnik kierunkowy prostej równy 0 oznacza, że jest to funkcja liniowa stała).



Twierdzenie 5 (Lagrange'a o wartości średniej)**.** Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalną w przedziale (a, b). Wtedy istnieje punkt $c \in (a, b)$, taki że $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Wniosek 6 (Interpretacja geometryczna tw. Lagrange'a)**.** [2] Przy założeniach tw. Lagrange'a istnieje punkt o pierwszej współrzędnej z przedziału (a, b), w którym styczna do wykresu funkcji jest równoległa do siecznej przechodzącej przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.
(Sieczna ma współczynnik kierunkowy równy $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, zaś styczna $f'(c)$. Równoległość tych prostych oznacza równość ich współczynników, a więc równość z tezy).



[1] Twierdzenie Rolle'a można interpretować również fizycznie: Po prostym torze porusza się koń, który startuje i kończy bieg w tym samym punkcie ($f(a) = f(b)$). Z lekcji fizyki wiemy, że pochodną drogi po czasie jest prędkość, a więc równość z tezy oznacza, że istnieje taki moment, gdy prędkość konia wynosi 0, co jest zgodne z intuicją, bo koń kończy bieg w punkcie startu, więc w pewnym momencie musiał zawrócić, czyli nastąpił moment zatrzymania.

[2] To twierdzenie również ma interpretację fizyczną: Równość z tezy twierdzenia oznacza, że w pewnym momencie prędkość chwilowa poruszającego się obiektu (czyli $f'(c)$) jest równa prędkości średniej tego obiektu.

Twierdzenie 7 (Reguła de l'Hospitala)**.** Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$ oraz $\forall x \in S(x_0)\ :\ g(x) \neq 0 \wedge g'(x) \neq 0$. Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ **oraz** istnieje granica[3] $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje również granica $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i zachodzi równość: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Uwaga 8. Twierdzenie jest prawdziwe również dla granic jednostronnych oraz granic przy $\pm\infty$.

Przykład 9.
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin x}{x^3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \ldots$

Liczymy więc granicę pochodnych $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+\sin x)'}{(x^3)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos x}{3x^2} = \left[\dfrac{2}{0^+}\right] = +\infty$.

A zatem granica $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin x}{x^3}$ istnieje i wynosi $+\infty$.

[3] właściwa lub niewłaściwa