Rodzaje dowodów

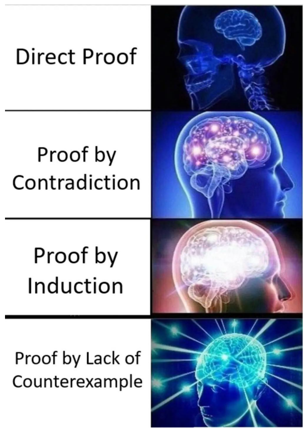
Przypomnijmy, że wyróżniamy 4 główne metody dowodzenia prawdziwości twierdzeń:

a) **wprost** – rozpoczynamy od założeń lub wcześniej udowodnionych twierdzeń, a następnie przeprowadzając logiczne rozumowanie dochodzimy do tezy,

b) **nie wprost** – polega on na zaprzeczeniu tezy dowodzonego twierdzenia i wykazaniu, że przyjęcie takiego zaprzeczenia prowadzi do sprzeczności. Zatem dane twierdzenie należy uznać za prawdziwe,

c) **przez kontrapozycję**[1] – stosujemy prawo kontrapozycji, czyli zamiast dowodzić implikacji $p \Rightarrow q$ dowodzimy implikację $\neg q \Rightarrow \neg p$,

d) **przez indukcję** – stosujemy zasadę indukcji matematycznej. Tą metodą dowodzimy twierdzeń dotyczących liczb naturalnych.



[1]Warto zwrócić uwagę, że dowód przez kontrapozycję jest tak naprawdę dowodem nie wprost, w którym sprzeczność uzyskuje się bezpośrednio z założeniem.

Aby udowodnić, że twierdzenie jest fałszywe, wystarczy wskazać jeden kontrprzykład, czyli przykład, który spełnia założenia twierdzenia, ale nie spełnia jego tezy.

Poniżej znajdują się 4 zadania na dowodzenie. W każdym przypadku zapisz założenie i tezę, a następnie rozwiąż zadanie wskazaną metodą.

Zadanie 1 (Wprost)**.**
Udowodnij, że sześcian dowolnej liczby całkowitej dającej resztę 3 z dzielenia przez 8 daje resztę 3 z dzielenia przez 4.

Zadanie 2 (Nie Wprost)**.**
Udowodnij, że liczba $\log_2 7$ jest niewymierna.

Zadanie 3 (Przez Kontrapozycję)**.**
Niech $n \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że jeśli n^2 jest nieparzyste, to n też.

Zadanie 4 (Przez Indukcję)**.**
Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ zachodzi nierówność: $2^{n-1} < n!$.

Zadanie domowe

Zadanie 5 (Wprost)**.**
Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb nieparzystych daje resztę 3 z dzielenia przez 6.

Zadanie 6 (Nie Wprost)**.**
Udowodnij, że liczba $\log_3 13$ jest niewymierna.[2]

Zadanie 7 (Przez Kontrapozycję)**.**
Niech $n \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że dla n^2 jest parzyste, to n też.

Zadanie 8 (Przez Indukcję)**.**
Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 10$ zachodzi nierówność: $2^n > n^3$.

Zadanie 2025.
Używając dowodzenia wprost i nie odwołując się do monotoniczności funkcji $t \mapsto t^3$ (czyli nie podnosząc po prostu obustronnie do potęgi trzeciej), uzasadnij, że jeśli $x \leqslant y$, to $x^3 \leqslant y^3$.

ℙiotr 𝔹ury

[2]Zastanowić się, jak zmieni się rozumowanie, gdy podstawa logarytmu będzie ułamkiem.