



UNIwersytet Jagielloński w Krakowie  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Instytut Matematyki

Piotr Bury

# Najważniejsze własności liczby $e$ oraz $\pi$ . Od definicji do przestępności.

Praca magisterska napisana pod kierunkiem  
doktora Zdzisława Pogody

KRAKÓW 2019

*Matematykiem jest ten, dla kogo wzór:  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  jest tak oczywisty,  
jak dla innych dwa razy dwa równa się cztery.*

William Thomson

Niniejszą pracę dedykuję osobom, które miały jakikolwiek wpływ na mój rozwój matematyczny, tj. m.in.: mgr Elżbiecie Krawczyk, dr hab. inż. Annie Kumanieckiej, dr hab. Marcie Kosek, dr. Zdzisławowi Pogodzie oraz dr Annie Widur. Niestety, margines jest zbyt mały, by ich wszystkich pomieścić. Chciałbym w szczególności podziękować również dr. Krzysztofowi Ciesielskiemu za to, że przez cały okres studiów, z ogromną cierpliwością, odpowiadał na szereg moich, często bardzo szczegółowych pytań i nigdy nie odmówił pomocy w sprawach związanych z matematyką.

# Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>5</b>
<b>1 Przygotowanie</b>	<b>8</b>
1.1 Oznaczenia . . . . .	8
1.2 Definicje i twierdzenia pomocnicze . . . . .	8
<b>2 Definicja i podstawowe fakty o liczbach <math>e</math> i <math>\pi</math></b>	<b>16</b>
2.1 Liczba $e$ . . . . .	16
2.2 Liczba $\pi$ . . . . .	22
<b>3 Liczby <math>e</math> oraz <math>\pi</math> we wzorach matematycznych</b>	<b>26</b>
3.1 Koło i kula. Archimedes . . . . .	26
3.2 Koło i kula. Wersja współczesna . . . . .	32
3.3 Najpiękniejszy wzór matematyki . . . . .	38
3.4 Problem bazylejski . . . . .	39
3.5 Wzór Wallisa . . . . .	41
3.6 Wzór Stirlinga . . . . .	44
3.7 Całka Gaussa . . . . .	47
<b>4 Niewymierność</b>	<b>52</b>
4.1 Liczba $e$ . . . . .	52
4.2 Liczba $e^2$ . . . . .	54
4.3 Liczba $\pi$ . . . . .	56
4.4 Liczba $\pi^2$ . . . . .	60
<b>5 Przestępność</b>	<b>64</b>
5.1 Liczba $e$ . . . . .	64
5.2 Liczba $\pi$ . . . . .	69

6 Kwadratura koła	77
7 Uwagi końcowe. Czego jeszcze nie wiemy?	80
Bibliografia	82