3.155 Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$) okręgi opisane równaniami: o_1: $(x+5)^2 + (y+m)^2 = 16$ oraz o_2: $(x-2m)^2 + (y+m)^2 = 9$ przecinają się w dwóch punktach?

3.156. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$) okręgi opisane równaniami: o_1: $(x-m)^2 + (y+1)^2 = 1$ oraz o_2: $(x+2)^2 + (y-m+3)^2 = 25$ są rozłączne wewnętrznie?

3.157. Wykaż, że obrazem okręgu o: $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ w przekształceniu P określonym wzorem $P((x, y)) = (1 + 3x, -3y - 2)$, gdzie $x, y \in \mathbf{R}$, jest okrąg. Zbadaj wzajemne położenie okręgu i jego obrazu.

3.158. Wykaż, że obrazem okręgu o: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ w przekształceniu P określonym wzorem $P((x, y)) = \left(\frac{1}{2}y+1,\ 2-\frac{1}{2}x\right)$, gdzie $x, y \in \mathbf{R}$, jest okrąg. Zbadaj wzajemne położenie okręgu i jego obrazu.

3.159 Wyznacz równanie prostej k, względem której okręgi o_1: $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 19 = 0$ oraz o_2: $x^2 + y^2 - 12x + 35 = 0$ są wzajemnie symetryczne.

3.160. Wyznacz równanie okręgu o najmniejszym promieniu, stycznego zewnętrznie do okręgu o: $(x+3)^2 + y^2 = 25$ i jednocześnie stycznego do prostej k: $4x + 3y - 38 = 0$.

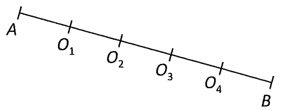
***3.161.** Wyznacz równanie zbioru środków wszystkich okręgów zewnętrznie stycznych do okręgu o: $x^2 + y^2 = 4$ i jednocześnie stycznych do prostej k: $y + 2 = 0$.

Jednokładność. Jednokładność w układzie współrzędnych

3.162. Dany jest odcinek AB. Punkty O_1, O_2, O_3, O_4 dzielą ten odcinek na pięć równych części (patrz rysunek poniżej). Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe?

a) $J_{O_1}^{-4}(A) = B$ b) $J_{O_2}^{-\frac{2}{3}}(B) = A$

c) $J_{O_3}^{\frac{3}{2}}(A) = B$ d) $J_{O_4}^{-0,25}(B) = A$



3.163. Zaznacz na płaszczyźnie dwa różne punkty S oraz X. Następnie wyznacz obraz punktu X w jednokładności o środku w punkcie S i skali k, jeśli:

a) $k = 2$ b) $k = -1$ c) $k = -\frac{1}{3}$

d) $k = \frac{m}{n}$, gdzie m i n oznaczają długości dwóch odcinków oraz $m > n > 0$.

3.164. Na płaszczyźnie zaznacz dowolne dwa różne punkty X oraz X_1. Następnie wyznacz środek S jednokładności J, wiedząc, że $X_1 = J_S^k(X)$, gdzie:
a) $k = -3$ b) $k = -0{,}75$ c) $k = -0{,}5$ d) $k = 2$

3.165. Narysuj dwa okręgi $o_1(A_1;\ 1{,}5\text{ cm})$ i $o_2(A_2;\ 3\text{ cm})$ tak, aby $|A_1A_2| = 6$ cm. Znajdź środek S takiej jednokładności, która przekształca okrąg o_1 na okrąg o_2 (pamiętaj, że istnieją dwa rozwiązania). Wyznacz odległość punktu S od środków okręgów.

3.166. Wyznacz współrzędne punktu A_1, który jest obrazem punktu A w jednokładności J o środku w punkcie $O(0, 0)$ i skali k, jeśli:

a) $A(-2, 4)$, $k = 0{,}5$ b) $A(-9, 12)$, $k = -\frac{1}{3}$

c) $A\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{15}\right)$, $k = 15$ d) $A(\sqrt{2}, 16\sqrt{2})$, $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.167. Wyznacz współrzędne punktu B_1, który jest obrazem punktu B w jednokładności J o środku w punkcie $S(-4, 5)$ i skali k, jeśli:

a) $B(-10, -8)$, $k = \frac{2}{3}$ b) $B(5, 7)$, $k = -2$

c) $B(1, 20)$, $k = 6$ d) $B(-4, 9)$, $k = -\frac{1}{2}$

3.168. Odcinek A_1B_1 jest obrazem odcinka AB w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali k. Wyznacz współrzędne środka E odcinka A_1B_1, jeśli:
a) $A(-20, 6)$, $B(10, 4)$, $k = 3$ b) $A(13, -1)$, $B(5, 7)$, $k = -2$
c) $A(-8, -27)$, $B(-12, -13)$, $k = 0{,}1$ d) $A(27, 108)$, $B(-2, -3)$, $k = -0{,}2$

3.169. Odcinek A_1B_1 jest obrazem odcinka AB w jednokładności J o środku w punkcie $S(-2, -1)$ i skali k. Wyznacz współrzędne końców odcinka A_1B_1, jeśli:
a) $A(10, -6)$, $B(-1, 4)$, $k = -5$ b) $A(0, 6)$, $B(-4, 0)$, $k = 3$
c) $A(-8, 4)$, $B(0, 0)$, $k = 0{,}5$ d) $A(3, 8)$, $B(-5, 13)$, $k = -0{,}3$

3.170. Dane są punkty $A(3, 2)$ i $A_1(-3, 5)$. Wiadomo, że $A_1 = J_S^k(A)$. Wyznacz współrzędne środka S tej jednokładności, jeśli skala k jest równa:

a) -2 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $-\frac{1}{4}$

3.171. Punkty A i A_1 są jednokładne, przy czym środkiem jednokładności jest punkt $O(0, 0)$. Oblicz skalę k tej jednokładności, jeśli:

a) $A(-3, 1)$, $A_1(6, -2)$ b) $A(5, 5)$, $A_1(-1, -1)$
c) $A(-2, 0)$, $A_1(5, 0)$ d) $A(0, 3)$, $A_1(0, -3)$

3.172. Sprawdź, czy odcinki AB i CD są jednokładne, jeśli:

a) $A(2, -3)$, $B(5, 6)$, $C(0, -1)$, $D(1, 2)$ b) $A(-2, -1)$, $B(4, 2)$, $C(2, 1)$, $D(10, 5)$

W przypadku odpowiedzi twierdzącej wyznacz środek S i skalę jednokładności, w której obrazem odcinka AB jest odcinek CD.

3.173. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A(-5, -5)$, $B(2, -3)$, $C(-4, -1)$. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności J o środku $S(2, 0)$ i skali k, gdzie $k < 0$. Wiedząc, że środkowa trójkąta $A_1B_1C_1$ poprowadzona na bok B_1C_1 ma długość 10, oblicz:

a) skalę tej jednokładności
b) współrzędne wierzchołków trójkąta $A_1B_1C_1$
c) pole trójkąta $A_1B_1C_1$.

3.174. Dana jest prosta m o równaniu $y = 2x - 3$ oraz punkt $O(0, 0)$. Wyznacz równanie prostej, która jest obrazem prostej m w jednokładności J_O^k, jeśli:

a) $k = -3$ b) $k = 2$ c) $k = \frac{1}{3}$ d) $k = -\frac{1}{2}$

***3.175.** Prosta k przechodząca przez punkt $P(2, 6)$ ogranicza wraz z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt o polu 25.

a) Wyznacz równanie prostej k.
b) Wyznacz równanie prostej m, która jest obrazem prostej k w jednokładności o środku w punkcie $O(0, 0)$ i skali $s = 1\frac{1}{2}$.
c) Oblicz pole trapezu ograniczonego przez proste k i m oraz osie układu współrzędnych.

3.176. Wyznacz środek S i skalę k jednokładności J, która okrąg o_1: $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 41 = 0$ przekształca na okrąg o_2: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

3.177 Wyznacz środek S i skalę k jednokładności J, która okrąg o_1: $x^2 + y^2 + 12x + 2y + 36 = 0$ przekształca na okrąg o_2: $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 96 = 0$.

3.178. Dana jest funkcja $y = f(x)$. Wykres funkcji g jest obrazem wykresu funkcji f w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali k. Wyznacz wzór funkcji g, jeśli:

a) $f(x) = -2x^2$, $k = -\frac{1}{2}$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, $k = 3$
c) $f(x) = \frac{x-2}{x}$, $k = -1$ d) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $k = \frac{1}{2}$

Naszkicuj wykresy funkcji f i g.

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej

3.179. Wyznacz współrzędne takiego punktu A, że styczna do wykresu funkcji f w punkcie A jest równoległa do prostej k, jeśli:

a) $f(x) = -2x^2 + x + 1$, k: $5x - y - 2 = 0$ b) $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$, k: $x - 5y + 5 = 0$
c) $f(x) = -\frac{3}{x^4}$, k: $12x - y - 8 = 0$ d) $f(x) = \frac{3x^2}{2x-1}$, k: $4x - 3y - 21 = 0$

3.180. Wyznacz współrzędne takiego punktu A, że styczna do wykresu funkcji f w punkcie A jest prostopadła do prostej k, jeśli:

a) $f(x) = 3x^2 + x - 2$, k: $x - 5y - 10 = 0$ b) $f(x) = \frac{3-x}{1-x}$, k: $2x + y - 5 = 0$
c) $f(x) = \frac{-2}{x^5}$, k: $x + 10y = 0$ d) $f(x) = \frac{2x^2+3x}{4x+2}$, k : $2x + 3y - 3 = 0$

3.181. Wykaż, że styczna do paraboli o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2$, poprowadzona w punkcie P o odciętej 2, ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu równym 8.