Rachunek Różniczkowy

1. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^4}{x^2+1}$ poprowadzono styczne w punktach, w których rzędna (y) jest równa 1. Uzasadnij, że obwód trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności oraz punkt wspólny tych stycznych, jest równy $2 + 2\sqrt{10}$.

2. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = 16x^2 + \frac{1}{x}$. Uzasadnij, że prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i styczna do wykresu funkcji f określona jest równaniem $y = 12x$.

3. Liczby x_1 i x_2 są różnymi pierwiastkami równania z parametrem m $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}m^2\right)x^2 + mx + m = 0$. Uzasadnij, że funkcja $f(m) = x_1 + x_2$ nie ma ekstremów lokalnych.

4. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6m^2x^2, x \in R$, gdzie m jest parametrem. Uzasadnij, że funkcja ma trzy ekstrema lokalne dla $m \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

5. Uzasadnij, że funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$, $x \in R\backslash\{-2, 2\}$ jest malejąca w każdym z przedziałów $(0, 2)$; $(2, \infty)$.

6. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x-3}$, $x \in R\backslash\{3\}$. Uzasadnij, że w przedziale $< 0, 2 >$ największa wartość funkcji wynosi -1, a najmniejsza -2.

7. Na krzywej o równaniu $xy = 4$ obrano punkty $A = (1, 4)$, $B = (2, 2)$ i C, przy czym obydwie współrzędne punktu C są ujemne. Wykaż, że pole ΔABC jest najmniejsze, gdy $C = (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

8. Dany jest wielomian $W(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + b$, o którym wiadomo, że reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $(x - 2)$ jest równa -2, zaś współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu w punkcie o odciętej 1 jest równy -1. Uzasadnij, że funkcja $y = W(x)$ jest rosnąca w przedziale $< 2; \infty)$.

9. Uzasadnij, że największa wartość funkcji $f(x) = x + \frac{1}{x}$ w przedziale $< -10; -1 >$ jest równa -2.