
Zadania dodatkowe

Termin: wrzesień

Zadanie 1. Podać przykład figury (wystarczy rysunek), która składa się z dwóch prostokątów (ale nie jest kwadratem), ma środek symetrii oraz 4 osie symetrii.

Zadanie 2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , takie że liczba $7p^2 + 8$ jest pierwsza.

Zadanie 3. Rozważmy liczbę $1000(5\sqrt{2} - 7)^2$. Ile wynosi jej przybliżenie, gdy użyjemy standardowego przybliżenia $\sqrt{2} \approx 1,41$ wstawiając je bezpośrednio do powyższej postaci? A ile będzie wynosić to przybliżenie, gdy użyjemy kalkulatora naukowego (czyli znacznie dokładniejszego przybliżenia)? Ile będzie wynosić przybliżenie, gdy najpierw podniesiemy nawias do kwadratu ze wzoru skróconego mnożenia i wtedy wstawimy przybliżenie 1,41? O czym świadczą otrzymane wyniki?

Zadanie 4. Czy istnieje czworoscian, którego siatka jest trójkątem prostokątnym?

Zadanie 5. Rozważmy nierówności $x^2 + 1 \geq g(x) \geq -x^2 - 1$. Podaj przykład funkcji g spełniające powyższe nierówności dla każdego x , aby:

- a) g była stała,
 - b) g była liniowa ale nie stała,
 - c) istniały x_1, x_2 realizujące równość, tzn. aby wykres g był styczny do wykresu funkcji danej wzorem $y = x^2 + 1$ oraz do wykresu funkcji danej wzorem $y = -x^2 - 1$.
-

Termin: październik

Zadanie 6. Wykaż, że w dowolnym trójkącie środek ciężkości, ortocentrum oraz środek okręgu opisanego leżą na jednej prostej.

Wskazówka: Umieść trójkąt w układzie współrzędnych tak, by wierzchołki były na osiach Ox i Oy .

Zadanie 7. Rozważmy następujący ciąg równości:

$$\frac{23}{24} = \frac{2323}{2424} = \frac{232323}{242424} = \dots,$$

gdzie każdy kolejny ułamek powstaje przez dopisanie do licznika liczby 23, a do mianownika liczby 24. Wykazać, że możemy dowolnie długo go przedłużać i równości nadal będą zachodzić.

Zadanie 8. Niech w, k, s oznacza kolejno liczbę wierzchołków, krawędzi, ścian w wielościanie wypukłym. Czy istnieje taki wielościan, dla którego zachodzi $w \cdot k \cdot s = 2023^{2023}$?

Zadanie 9. Czy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ istnieje n kolejnych liczb naturalnych, z których wszystkie są złożone?

Zadanie 10. Rozwiąż równanie:

$$4^{\frac{1}{x}} = 6^{\frac{1}{x}} + 9^{\frac{1}{x}}$$

Termin: listopad

Zadanie 11. Rozwiąż równanie:

$$\varphi^{\ln x} + x^{\ln \varphi} = 3 + \sqrt{5}.$$

Zadanie 12. Niech $x > 0$. Oblicz $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots}}}}}$

Zadanie 13. Jedną z najbardziej znanych hipotez to Hipoteza Goldbacha. Mówi ona o tym, że każdą liczbę parzystą większą od 2 można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych. Wykaż, że jeśli ta hipoteza jest prawdziwa, to każdą liczbę nieparzystą większą niż 7 można przedstawić w postaci sumy trzech liczb pierwszych. Czy można uznać za prawdziwe zdanie: „Każda liczba nieparzysta większa od 7 jest sumą trzech liczb pierwszych”?

Zadanie 14. Czy istnieje liczba naturalna n , której iloczyn cyfr wynosi 0, a iloczyn cyfr liczby $n + 1$ wynosi 1000?

Zadanie 15. Czy istnieje liczba naturalna n , której iloczyn cyfr wynosi 1000, a iloczyn cyfr liczby $n + 1$ wynosi 0?

Termin: grudzień

Zadanie 16. Weźmy dowolną liczbę naturalną n i policzmy sumę kwadratów jej cyfr. Z otrzymanym wynikiem postępujemy analogicznie. Proces wykonujemy do momentu, aż otrzymamy liczbę 1. Jeśli tak się stanie, to liczbę n nazywamy liczbą wesołą. W przeciwnym wypadku nazywamy ją smutną. Określić, które liczby od 0 do 10 są wesołe, a które smutne. Jak na bycie wesołą/smutną wpływa przestawienie cyfr w liczbie, a jak dodanie dowolnej liczby zer w dowolnym miejscu?

Przykład: Niech $n = 133$. Wtedy $1^2 + 3^2 + 3^2 = 19$, $1^2 + 9^2 = 82$, $8^2 + 2^2 = 68$, $6^2 + 8^2 = 100$, $1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$, a więc liczba 133 jest wesoła.

Zadanie 17. Oprócz znanych ze szkoły średnich istnieje też średnia logarytmiczna zdefiniowana następująco:

$$S_L := L(a, b) := \frac{b - a}{\ln b - \ln a},$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a \neq b$.

- a) Wykaż, że średnia logarytmiczna jest przemienna tzn. $L(a, b) = L(b, a)$
- b) Oblicz średnią logarytmiczną dla liczb e i e^2 ; 2 i 1 oraz dnia i miesiąca swoich urodzin.
- c) Średnia ta „wpasowuje się” w ciąg nierówności między średnimi: $S_K \geq S_A \geq S_G \geq S_H$. Na podstawie obliczonych wyżej przykładów, wywnioskuj, między którymi średnimi znajduje się średnia logarytmiczna.

Zadanie 18. Rozwiąż równanie $|x + y^2| + |x - y^2| + |y + x^2| + |y - x^2| = 2023$ w zbiorze liczb całkowitych.

Zadanie 19. Czy da się zapisać liczbę 1 jako sumę odwrotności pewnej liczby **parami różnych** liczb pierwszych, tzn. czy istnieją liczby pierwsze p_1, p_2, \dots, p_n , że $1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}$?

Zadanie 20. Rozwiąż równanie: $2023^{|x|} = \sin x^{2023}$.

Termin: styczeń

Zadanie 21. Wykaż, że dla $x, y, z > 0$ zachodzi nierówność:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Wskazówka: twierdzenie o odcinkach stycznych w trójkącie o bokach x, y, z .

Zadanie 22. Oblicz $xyzt$ jeśli
$$\begin{cases} 2020^x = 2021 \\ 2021^y = 2022 \\ 2022^z = 2023 \\ 2023^t = 2024 \end{cases}.$$

Zadanie 23. Zachodzą następujące prawa dla kwantyfikatorów:

$$\begin{aligned} \exists x \in X : [\varphi(x) \vee \psi(x)] &\Leftrightarrow [\exists x \in X : \varphi(x)] \vee [\exists x \in X : \psi(x)] \\ \exists x \in X : [\varphi(x) \wedge \psi(x)] &\Rightarrow [\exists x \in X : \varphi(x)] \wedge [\exists x \in X : \psi(x)] \\ \forall x \in X : [\varphi(x) \wedge \psi(x)] &\Leftrightarrow [\forall x \in X : \varphi(x)] \wedge [\forall x \in X : \psi(x)] \\ [\forall x \in X : \varphi(x)] \vee [\forall x \in X : \psi(x)] &\Rightarrow \forall x \in X : [\varphi(x) \vee \psi(x)], \end{aligned}$$

gdzie $\varphi(x), \psi(x)$ to dowolne formy zdaniowe.

Warto zwrócić uwagę, że w dwóch przypadkach zachodzą tylko implikacje, a nie równoważności. Proszę podać przykłady pokazujące, że nie działają implikacje w drugą stronę, tzn. prawa strona jest prawdziwa, a lewa nie.

Zadanie 24. Dany jest trójkąt o bokach długości 6, 8, 10. Wykaż, że jeśli odległości dowolnego punktu z wnętrza trójkąta od wierzchołków są liczbami wymiernymi, to odległości tego punktu od boków trójkąta również są liczbami wymiernymi.

Zadanie 25. Odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania:

- Czy istnieją na płaszczyźnie dwa takie zbory, że niezależnie od ich położenia na tejże płaszczyźnie ich część wspólna będzie zawsze jednoelementowa?
- Czy istnieją na płaszczyźnie dwa takie zbory, że niezależnie od ich położenia na tejże płaszczyźnie ich część wspólna będzie zawsze dwuelementowa?
- Czy istnieją na płaszczyźnie dwa takie zbory, że niezależnie od ich położenia na tejże płaszczyźnie ich część wspólna będzie zawsze 2024-elementowa?

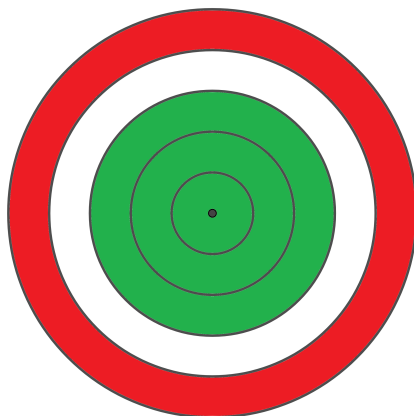
Termin: luty

Zadanie 26. Rozwiąż równanie:

$$\frac{[x]}{x} + \frac{x}{[x]} = 2 + \frac{1}{x},$$

gdzie $[x]$ oznacza cechę z x , czyli największą liczbę całkowitą mniejszą bądź równą x .

Zadanie 27. Rozważmy 5 współśrodkowych okręgów o promieniach odpowiednio: $r, 2r, 3r, 4r, 5r$ oraz zacieniowane przez nie obszary: zielony i czerwony. Które z pól jest większe: czerwone, czy zielone?



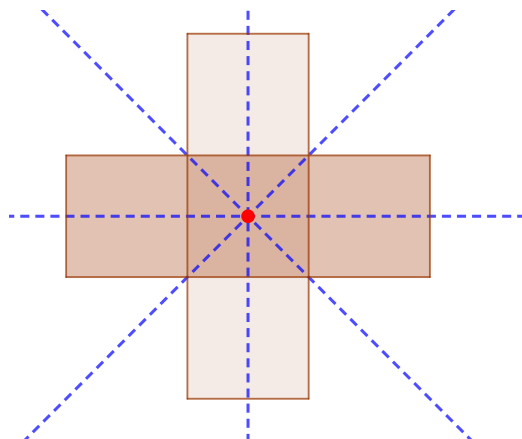
Zadanie 28. a) Rozwiąż w liczbach **naturalnych** równanie: $n + n + n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$.

b) Rozwiąż w liczbach **naturalnych dodatnich** równanie $\underbrace{n + n + \dots + n}_n = \underbrace{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}_n$

Zadanie 29. Rozważmy trójkąt prostokątny o bokach długości 6,8,10. Wykaż, że jeśli odległości punktu M – należącego do wnętrza trójkąta, od wszystkich wierzchołków trójkąta są liczbami wymiernymi, to również odległości tego punktu od boków trójkąta są liczbami wymiernymi.

Zadanie 30. Wyznacz wszystkie wielomiany $W(x)$ spełniające warunek $W(W(x)) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie 1.



Rozwiązanie 2.

- Jeśli $p = 3$, to $7p^2 + 8 = 7 \cdot 9 + 8 = 71 \in \mathbb{P}$.
- Jeśli $p = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, to $7p^2 + 8 = 7(3k + 1)^2 + 8 = 7(9k^2 + 6k + 1) + 8 = 63k^2 + 42k + 15 = 3(21k^2 + 14k + 5) = 3q$ oraz $q \in \mathbb{N} \wedge n > 1$, a więc liczba ta dzieli się przez 3, więc nie jest pierwsza.
- Jeśli $p = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, to $7p^2 + 8 = 7(3k + 2)^2 + 8 = 7(9k^2 + 12k + 4) + 8 = 63k^2 + 84k + 36 = 3(21k^2 + 28k + 12) = 3q$ oraz $q \in \mathbb{N} \wedge q > 1$, a więc liczba ta dzieli się przez 3, więc nie jest pierwsza.

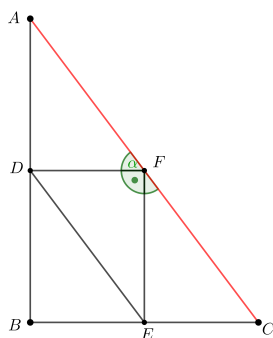
Zatem $p = 3$.

Rozwiązanie 3.

- $1000(5\sqrt{2} - 7)^2 \approx 1000(5 \cdot 1,41 - 7)^2 = 1000(7,05 - 7)^2 = 1000 \cdot 0,05^2 = \mathbf{2,5}$
- $1000(5\sqrt{2} - 7)^2 = 1000(50 - 70\sqrt{2} + 49) = 1000(99 - 70\sqrt{2}) \approx 1000(99 - 70 \cdot 1,41) = 1000(99 - 98,7) = 1000 \cdot 0,3 = \mathbf{300}$
- $1000(5\sqrt{2} - 7)^2 \approx 1000(5 \cdot 1,4142135623731 - 7)^2 = 1000(7,0710678118655 - 7)^2 = 1000 \cdot 0,0710678118655^2 \approx 1000 \cdot 0,0050506338833501 = \mathbf{5,0506338833501}$

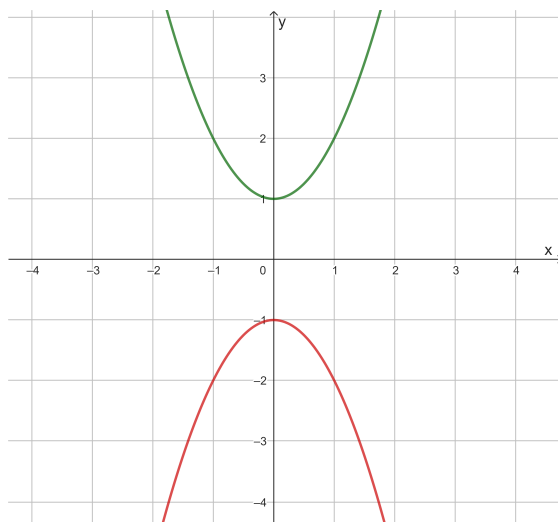
Otrzymane rozbieżności świadczą o tym, że po pierwsze różnica w przybliżeniu nawet na częściach tysięcznych może bardzo znacznie wpłynąć na wynik końcowy – dlatego m.in. należy przybliżać do podanej liczby miejsc po przecinku dopiero końcowy wynik, a nie wyniki pośrednie. Po drugie, dwa pierwsze rachunki świadczą o tym, że znaczenia ma nie tylko dokładność przybliżenia, ale też to, do jakiej postaci końcowej wstawiamy przybliżenie. Z tego m.in. powodu należy usuwać niewymierność z mianownika, ponieważ przybliżanie niewymierności w mianowniku generuje większy błąd niż przybliżanie w liczniku.

Rozwiązanie 4. Nie istnieje taki czworoscian. Narysujmy dowolny trójkąt prostokątny i załóżmy, że jest on naszą hipotetyczną siatką. Połączmy środki jego boków (łączmy środki, aby po sklejeniu odpowiednie krawędzie się skleily).



Niech $|\angle AFD| = \alpha$. Wtedy $|\angle CFE| = 90^\circ - \alpha$. Ponieważ $(90^\circ - \alpha) + \alpha = 90^\circ$, to czerwone krawędzie złączą się dopiero, gdy będą płasko leżeć na podstawie, a więc po ich zagięciu nie otrzymamy ostrosłupa, a jedynie płaski trójkąt.

Rozwiązanie 5. Funkcje ograniczające szukaną funkcję g są funkcjami kwadratowymi o następujących wykresach.



Dzięki rysunkowi¹ łatwo podać przykłady:

- a) $g(x) = 0$
- b) $g(x) = x$

Jeśli chodzi o ostatni podpunkt, to szukamy prostej, która jest styczna do obu wykresów, tzn. ma z każdym z nich dokładnie jeden punkt wspólny. W tym celu rozwiążmy układy równań:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = ax + b \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x^2 - 1 \\ y = ax + b \end{cases}$$

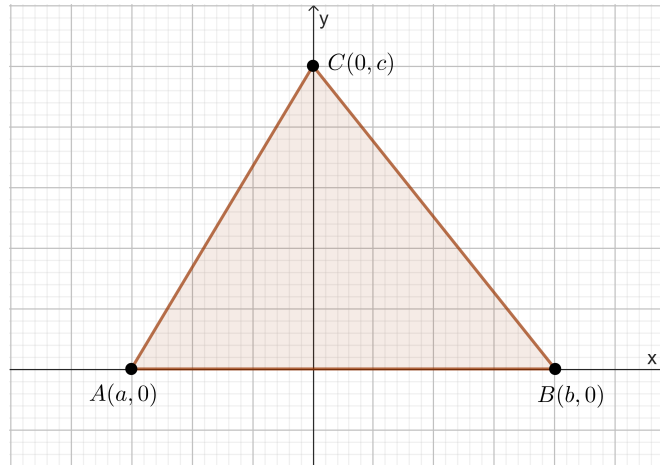
$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= ax + b & -x^2 - 1 &= ax + b \\ x^2 - ax + 1 - b &= 0 & x^2 + ax + b - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Są to równania kwadratowe, więc musi zachodzić warunek $\Delta = 0$, aby był dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem. Zatem:

$\Delta_1 = a^2 - 4(1 - b) = 0$ oraz $\Delta_2 = a^2 - 4(b - 1) = 0$. Stąd $a^2 = 4(1 - b) \wedge a^2 = 4(b - 1)$. Przyrównując prawe strony otrzymujemy $1 - b = b - 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \vee a = -1$. Ostatecznie uzyskujemy dwie funkcje: $g(x) = x + 1$ lub $g(x) = -x + 1$.

Rozwiązanie 6. Wykorzystamy geometrię analityczną. W tym celu umieścimy trójkąt w układzie współrzędnych tak, by dwa wierzchołki były na osi Ox i jeden na osi Oy – tak jak na rysunku. Wtedy $A(a, 0), B(b, 0), C(0, c)$.

¹Łatwo też w razie potrzeby uzasadnić poprawność nierówności dzięki nietrudnemu rachunkowi.



- Punkt K przecięcia środkowych, czyli środek ciężkości ma współrzędne

$$K\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right).$$

- Punkt L przecięcia wysokości, czyli ortocentrum:

Wysokość h_C zawiera się w prostej $x = 0$. Wyznamy równanie prostej zawierającej h_B . Jest ona prostopadła do pr. BC , której współczynnik kierunkowy wynosi $a_{BC} = \frac{c}{-a} = -\frac{c}{a}$. Zatem współczynnik kierunkowy prostej zawierającej h_B wynosi $\frac{a}{c}$. Prosta ta przechodzi przez punkt B , więc

$$0 = \frac{a}{c} \cdot b + b_h$$

$$b_h = -\frac{ab}{c},$$

a więc h_B zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{a}{c}x - \frac{ab}{c}$. By znaleźć punkt przecięcia wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{a}{c}x - \frac{ab}{c} \end{cases}$$

z którego otrzymujemy $L\left(0, -\frac{ab}{c}\right)$.

- Punkt M przecięcia symetralnych boków, czyli środek okręgu opisanego na trójkącie:

Środek odcinka AB ma współrzędne $S_{AB} = \left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$, więc równanie symetralnej boku AB

ma postać $x = \frac{a+b}{2}$. Środkiem boku AC jest punkt $S_{AC} = \left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$. Symetralna boku AC ma współczynnik kierunkowy równy $\frac{a}{c}$ (taki sam jak h_B) i przechodzi przez punkt S_{AC} , więc

$$\frac{c}{2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{2} + b_s$$

$$b_s = \frac{c}{2} - \frac{a^2}{2c} = \frac{c^2 - a^2}{2c},$$

a więc równanie tej symetralnej to: $y = \frac{a}{c}x + \frac{c^2 - a^2}{2c}$. By znaleźć punkt przecięcia wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a}{c}x + \frac{c^2 - a^2}{2c} \end{cases}$$

z którego po nietrudnych rachunkach otrzymujemy $M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right)$.

Aby wykazać, że punkty K, L, M leżą na jednej prostej można napisać równanie prostej KL oraz sprawdzić, że punkt M na niej leży. Prościej jednak będzie wyliczyć współczynniki kierunkowe a_{LK} raz a_{LM} :

$$a_{LK} = \frac{\frac{a+b}{3} - 0}{\frac{c}{3} + \frac{ab}{c}} = \frac{a+b}{3} \cdot \frac{3c}{c^2 + 3ab} = \frac{(a+b)c}{c^2 + 3ab}$$

$$a_{LM} = \frac{\frac{a+b}{2} - 0}{\frac{ab+c^2}{2c} + \frac{ab}{c}} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2c}{ab + c^2 + 2ab} = \frac{(a+b)c}{c^2 + 3ab},$$

a więc punkty te leżą na jednej prostej. Prosta ta ma swoją nazwę – jest to **prosta Eulera**.

Rozwiązanie 7. Ułamek w dowolnym miejscu tego ciągu możemy zapisać w postaci:

$$\frac{23 + 23 \cdot 10^2 + 23 \cdot 10^4 + \dots + 23 \cdot 10^{2k}}{24 + 24 \cdot 10^2 + 24 \cdot 10^4 + \dots + 24 \cdot 10^{2k}},$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

Z licznika możemy wyjąć przed nawias 23, a z mianownika 24 otrzymując:

$$\frac{23(1 + 10^2 + 10^4 + \dots + 10^{2k})}{24(1 + 10^2 + 10^4 + \dots + 10^{2k})} = \frac{23(1 + 10^2 + 10^4 + \dots + 10^{2k})}{24(1 + 10^2 + 10^4 + \dots + 10^{2k})} = \frac{23}{24},$$

co pokazuje, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ (czyli dla dowolnej długości ułamka) wynik zawsze wynosi $\frac{23}{24}$.

Rozwiązanie 8. Dla każdego wielościanu wypukłego zachodzi wzór Eulera: $w - k + s = 2$. Iloczyn $w \cdot k \cdot s = 2023^{2023}$ oznacza, że wszystkie liczby w, k, s są nieparzyste, bo prawa strona jest nieparzysta. Ponieważ różnica liczb nieparzystych jest parzysta, a suma liczby parzystej i nieparzystej jest nieparzysta otrzymujemy po lewej stronie tożsamości Eulera liczbę nieparzystą. Sprzeczność. A zatem taki wielościan nie istnieje.

Rozwiązanie 9. Tak. Są to: $(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, (n+1)! + 4, \dots, (n+1)! + (n+1)$. Wszystkie są złożone, ponieważ pierwsza dzieli się przez 2, druga przez 3, trzecia przez 4 itd., a ostatnia przez $n+1$.

Rozwiązanie 10. Dziedzina równania jest $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$4^{\frac{1}{x}} = 6^{\frac{1}{x}} + 9^{\frac{1}{x}} \quad | : 4^{\frac{1}{x}}$$

$$1 = \left(\frac{6}{4}\right)^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^2$$

Podstawimy $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = t, t > 0$.

$$1 = t + t^2$$

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$\Delta = 5, \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad t_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$$

Zatem $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Wiedząc, że $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ możemy zapisać $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\varphi}$. Obustronnie logarytmując otrzymujemy:

$$\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\varphi}\right)$$

$$\frac{1}{x} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\varphi}\right) = \log_{\frac{3}{2}} \varphi^{-1} = -\log_{\frac{3}{2}} \varphi$$

$$x = -\log_{\varphi} \left(\frac{3}{2}\right) = -\log_{\varphi} \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \log_{\varphi} \left(\frac{2}{3}\right)$$

Rozwiązanie 11. Skorzystamy najpierw z własności logarytmów: $e^{\ln x} = x$.

$$\varphi^{\ln x} + (e^{\ln x})^{\ln \varphi} = 3 + \sqrt{5}$$

$$\varphi^{\ln x} + (e^{\ln \varphi})^{\ln x} = 2 + 1 + \sqrt{5}$$

$$\varphi^{\ln x} + \varphi^{\ln x} = 2 + 2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$2\varphi^{\ln x} = 2 + 2\varphi \quad | : 2$$

$$\varphi^{\ln x} = 1 + \varphi \mid \ln()$$

$$\ln \varphi^{\ln x} = \ln (1 + \varphi)$$

$$\ln x \cdot \ln \varphi = \ln (1 + \varphi).$$

Wiemy, że złota liczba jest rozwiązaniem równania $x^2 - x - 1 = 0$, a więc $\varphi + 1 = \varphi^2$.

$$\ln x \cdot \ln \varphi = \ln \varphi^2$$

$$\ln x \cdot \ln \varphi = 2 \ln \varphi \quad | : \ln \varphi$$

$$\ln x = 2$$

$$x = e^2$$

Możemy również inaczej przekształcać nasze równanie. Zamiast zamieniać drugi składnik, by wyglądał jak pierwszy, możemy analogicznie zamienić pierwszy i otrzymać

$$2(e^{\ln x})^{\ln \varphi} = 2 + 2\varphi$$

$$(e^{\ln x})^{\ln \varphi} = 1 + \varphi$$

$$x^{\ln \varphi} = 1 + \varphi \quad |()^{\frac{1}{\ln \varphi}}$$

$$x = (1 + \varphi)^{\frac{1}{\ln \varphi}}$$

$$x = \ln \sqrt{1 + \varphi}.$$

Choć wyniki wydają się zupełnie inne, to po łatwych przekształceniach uzyskujemy, że $\sqrt[10]{1+\varphi} = e^2$.

Rozwiązanie 12. Najprościej rozwiązać to następująco. Niech $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}} =: S$. Podnosząc do kwadratu otrzymujemy:

$$x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\dots}}}}} = S^2,$$

czyli $xS = S^2$. Stąd (wyciągając przed nawias) $S = 0$ lub $S = x$. Pierwsza opcja jest oczywiście sprzeczna, więc $S = x$.

Aby to rozumowanie było w pełni poprawne, należy najpierw udowodnić, że wynikiem tego „nieskończonego” pierwiastka jest liczba rzeczywista. Tylko wtedy możemy cały pierwiastek oznaczyć jako liczbę S . Mogłoby się bowiem zdarzyć, że wynik rozbiega w plus (lub minus) nieskończoność albo w ogóle przy obliczaniu coraz dokładniejszego wyniku (braniu coraz większej liczby pierwiastków) wyniki nie zbliżają się do żadnej granicy (nawet niewłaściwej)².

Wykażemy to za pomocą indukcji matematycznej. W tym celu niech $x_n := \sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}$, gdzie w tym wyrażeniu występuje dokładnie n liter x . Pokażemy, że ciąg (x_n) ma granicę. Rozważmy najpierw sytuację, gdy $x > 1$:

²Najbardziej znanym przykładem jest chyba rozumowanie, które przez analogiczne myślenie (czyli oznaczenie przez x pewnego wyrażenia, które nie jest liczbą rzeczywistą) „dowodzi”, że $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$, czyli, że suma liczb naturalnych wynosi $-\frac{1}{12}$.

I. (ograniczoność)

1. Dla $n = 1$ mamy $0 \leq \sqrt{x} \leq x$.

2. $Z_{ind} : 0 \leq x_n \leq x, \quad T_{ind} : 0 \leq x_{n+1} \leq x$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_n \leq x \\ 0 &\leq \sqrt{x \sqrt{x \dots \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}}} \leq x \quad | \cdot x \\ 0 &\leq x \sqrt{x \sqrt{x \dots \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}}} \leq x^2 \quad | \sqrt{} \\ 0 &\leq \sqrt{x \sqrt{x \dots \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}}} \leq |x| (= x \text{ bo } x > 0) \\ 0 &\leq x_{n+1} \leq x \end{aligned}$$

Na mocy indukcji matematycznej ciąg (x_n) jest ograniczony (z góry przez x).

II. (monotoniczność)

1. Dla $n = 1$ mamy $x_1 = \sqrt{x}, x_2 = \sqrt{x \sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned} x_1 &\stackrel{?}{<} x_2 \\ \sqrt{x} &\stackrel{?}{<} \sqrt{x \sqrt{x}} \quad |^2 \\ x &\stackrel{?}{<} x \sqrt{x} \quad | : x \\ 1 &\stackrel{?}{<} \sqrt{x} \quad |^2 \\ 1 &\stackrel{?}{<} x \end{aligned}$$

TAK

2. $Z_{ind} : x_n < x_{n+1}, \quad T_{ind} : x_{n+1} < x_{n+2}$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że $x_n < x_{n+1}$, czyli:

$$\sqrt{x \sqrt{x \dots \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}}} < \sqrt{x \sqrt{x \dots \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}}}$$

przy czym po lewej jest n pierwiastków, a po prawej jest ich $n + 1$.

Mnożąc obie strony nierówności przez x , a następnie pierwiastkując otrzymujemy analogiczne pierwiastki, ale po lewej stronie jest ich $n + 1$, a po prawej $n + 2$, czyli:

$$x_{n+1} < x_{n+2},$$

co na mocy indukcji matematycznej dowodzi, że ciąg (x_n) jest rosnący.

Rozważany ciąg (x_n) jest monotoniczny (rosnący) oraz ograniczony, a więc jest zbieżny.

W analogiczny sposób wykazujemy, ograniczoność i monotoniczność dla $x \in (0, 1)$. Dla $x = 1$ ciąg jest stale równy 1, więc jego granica to 1.

To pozwala oznaczyć granicę tego ciągu, czyli szukany „nieskończony” pierwiastek przez S .

Rozwiązanie 13. Rozważmy liczbę nieparzystą x większą od 7, czyli $x = 2n + 1 > 7$:

$$2n + 1 > 7 \quad | - 3$$

$$2n - 2 > 4$$

$$2(n - 1) > 4$$

Liczba po lewej jest parzysta i większa od 4 (a więc też od 2). Korzystając z Hipotezy Goldbacha jest ona sumą dwóch liczb pierwszych, tzn.

$$2(n - 1) = p_1 + p_2$$

$$2n - 2 = p_1 + p_2 \quad | + 3$$

$$2n + 1 = p_1 + p_2 + 3,$$

a więc przedstawiliśmy liczbę x jako sumę trzech liczb pierwszych.

Zdania: „*Każda liczba nieparzysta większa od 7 jest sumą trzech liczb pierwszych*” nie możemy uznać za prawdziwe, ponieważ dowód tego faktu korzysta z własności, której do tej pory nikt nie potwierdził. Jeśli jednak okaże się, że hipoteza Goldbacha jest prawdziwa, to automatycznie prawdziwe będzie również powyższe zdanie. Gdyby jednak Hipoteza Goldbacha była fałszywa to **NIE** oznacza to, że powyższe zdanie jest fałszywe. Być może da się je udowodnić innymi metodami, nie wykorzystującymi Hipotezy Goldbacha.

Rozwiązanie 14. Aby iloczyn cyfr pewnej liczby wynosił 0, to jedna z cyfr musi być równa 0. W tym przypadku zero musi być ostatnią cyfrą, aby liczba o 1 większa miała iloczyn cyfr różny od 0 (dokładniej = 1000). Rozłóżmy liczbę 1000 na czynniki:

$$1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5.$$

Mamy trzy przypadki spełniające warunki zadania:

- liczba n to dowolna permutacja cyfr: 2, 2, 2, 5, 5, 5 i dowolnej liczby cyfr 1 oraz 0 na końcu,
- liczba n to dowolna permutacja cyfr: 2, 4, 5, 5, 5 i dowolnej liczby cyfr 1 oraz 0 na końcu,
- liczba n to dowolna permutacja cyfr: 5, 5, 5, 8 i dowolnej liczby cyfr 1 oraz 0 na końcu.

Wtedy liczba $n + 1$ ma ostatnią cyfrę równą 1, więc iloczyn jej wszystkich cyfr to 1000. Szukanych liczb jest więc nieskończenie wiele, a przykładową może być: $n = 112225550$.

Rozwiązanie 15. Taka liczba nie istnieje. Aby w liczbie $n + 1$ iloczyn cyfr wynosił 0, to jedna z cyfr musi być 0. Musi to być ostatnia cyfra, ponieważ gdyby to była któraś z pozostałych, to wtedy iloczyn cyfr liczby n również wynosiłby zero (a ma wynosić 1000). To oznacza, że ostatnią cyfrą liczby n jest 9, a więc iloczyn cyfr liczby n dzieli się przez 9. Sprzeczność, bo $9 \nmid 1000$.

Rozwiązanie 16.

- 0, smutna bo zapętla się: $0^2 = 0$,
- 1, wesół bo $1^1 = 1$,
- 2, smutna bo zapętla się: $2^2 = 4$, $4^2 = 16$, $1^2 + 6^2 = 37$, $3^2 + 7^2 = 58$, $5^2 + 8^2 = 89$, $8^2 + 9^2 = 145$, $1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$, $4^2 + 2^2 = 20$, $2^2 + 0^2 = 4, \dots$,
- 3, smutna, bo $3^2 = 9$, $9^2 = 81$, $8^2 + 1^2 = 65$, $6^2 + 5^2 = 61$, $6^2 + 1^2 = 37, \dots$, bo wyżej po 37 się zapętla
- 4, smutna, bo $4^2 = 16, \dots$ pętla jak wyżej,
- 5, smutna, bo $5^2 = 25$, $2^2 + 5^2 = 29$, $2^2 + 9^2 = 85$, $8^2 + 5^2 = 89, \dots$ pętla jak wyżej,
- 6, smutna, bo $6^2 = 36$, $3^2 + 6^2 = 45$, $4^2 + 5^2 = 41$, $4^2 + 1^2 = 17$, $1^2 + 7^2 = 50$, $5^2 + 0^2 = 25, \dots$ pętla jak wyżej,
- 7, wesół, bo $7^2 = 49$, $4^2 + 9^2 = 97$, $9^2 + 7^2 = 130$, $1^2 + 3^2 + 0^2 = 10$, $1^2 + 0^2 = 1$,
- 8, smutna, bo $8^2 = 64$, $6^2 + 4^2 = 52$, $5^2 + 2^2 = 29$, $2^2 + 9^2 = 85$, $8^2 + 5^2 = 89, \dots$ pętla jak wyżej,
- 9, smutna, bo $9^2 = 81$, $8^2 + 1^2 = 65, \dots$ pętla jak wyżej,
- 10, wesół, bo $1^2 + 0^2 = 1$

Przestawienie cyfr liczby nie wpływa na bycie liczbą wesółą/smutną, ponieważ dodawanie jest przemienne. Dodanie dowolnej liczby zer również nie wpływa na wynik, ponieważ $0^2 = 0$, więc suma się nie zmienia.

W przedziale od 0 do 1000 są dokładnie 143 liczby wesółe.

Rozwiązanie 17. a) $L(a, b) = \frac{b - a}{\ln b - \ln a} = \frac{-(a - b)}{-(\ln a - \ln b)} = \frac{a - b}{\ln a - \ln b} = L(b, a)$

$$\text{b) } L(e^2, e) = \frac{e^2 - e}{\ln e^2 - \ln e} = \frac{e^2 - e}{2 - 1} = e^2 - e = e(e - 1) \approx 4,67$$

$$L(2, 1) = \frac{2 - 1}{\ln 2 - \ln 1} = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e \approx 1,44$$

c) Obliczmy:

$$S_K(2, 1) = \sqrt{\frac{2^2 + 1^2}{2}} = \sqrt{2,5} \approx 1,58$$

$$S_A(2, 1) = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$S_G(2, 1) = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2} \approx 1,41$$

$$S_H(2,1) = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{1}}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \approx 1,33$$

a zatem $S_K \geq S_A \geq S_L \geq S_G \geq S_H$

Rozwiązanie 18.

- jeśli x, y są parzyste, to lewa strona jest parzysta (suma i różnica liczb parzystych jest parzysta), a prawa nieparzysta. Sprzeczność.
- jeśli x, y są nieparzyste, to lewa strona jest parzysta (suma i różnica liczb nieparzystych jest parzysta), a prawa nieparzysta. Sprzeczność.
- jeśli x, y są różnej parzystości, to w modułach są liczby nieparzyste (suma/różnica liczby parzystej i nieparzystej jest nieparzysta). Suma czterech liczb parzystych jest parzysta, a po prawej jest liczba nieparzysta. Sprzeczność.

Zatem równanie nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych.

Rozwiązanie 19. Załóżmy nie wprost, że takie przedstawienie istnieje, tzn.

$$1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n},$$

gdzie p_1, p_2, \dots, p_n to parami różne liczby pierwsze. Rozważmy liczbę:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{n-1} - p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{n-1} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_{n-1}} \right),$$

którą przekształcamy dalej:

$$\dots = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{n-1} \left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \dots - \frac{1}{p_{n-1}} \right) = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{n-1}}{p_n}.$$

Lewa strona jest liczbą całkowitą, a prawa nie. Sprzeczność, a zatem takie przedstawienie nie istnieje.

Rozwiązanie 20. Niech $f(x) := 2023^{|x|}$ oraz $g(x) := \sin x^{2023}$. Wtedy $ZW_f = [1, +\infty)$ bo po podstawieniu mamy funkcję $y = 2023^t$, dla $t \geq 0$ oraz $ZW_g = [-1, 1]$, bo po podstawieniu mamy funkcję $y = \sin u$, dla $u \in \mathbb{R}$. Równanie może mieć rozwiązanie tylko, gdy zbiory wartości się przecinają, czyli dla $y = 1$. Ale $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$, zaś $g(0) = 0 \neq 1$. Równanie jest zatem sprzeczne.