Twierdzenie

Środkiem odcinka AB, gdzie $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ jest $S\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

Def.

Iloczynem <u>skalarnym</u> dwóch wektorów $\vec{u}=[u_x, u_y]$ i $\vec{v}=[v_x, v_y]$ nazywamy liczbę: $\vec{u}\circ\vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$

Def.

Wyznacznikiem wektorów $\vec{u}=[u_x, u_y]$ i $\vec{v}=[v_x, v_y]$ nazywamy liczbę

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1 .$$

Twierdzenie

Dwa niezerowe wektory $\vec{u}=[u_x, u_y]$ i $\vec{v}=[v_x, v_y]$ tworzą taki kąt α, że:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\circ\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}, \quad \sin\alpha = \frac{|\det(\vec{u}, \vec{v})|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Twierdzenie

Niech $\vec{u}=[u_x, u_y]$, $\vec{v}=[v_x, v_y]$. Wtedy:

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\circ\vec{v} = 0$

b) $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Def.

Równaniem <u>kierunkowym</u> prostej nazywamy równanie $y=ax+b$

Def.

Równaniem <u>ogólnym</u> prostej nazywamy równanie $Ax+By+C$, gdzie $A^2+B^2 \neq 0$.

Twierdzenie

Prosta prostopadła do niezerowego wektora $\vec{u}=[A,B]$ ma równanie $Ax+By+C$, dla pewnego C.

Twierdzenie

Proste o równaniach $y=a_1x+b_1$ oraz $y=a_2x+b_2$ są:

a) równoległe $\Leftrightarrow a_1=a_2$

b) prostopadłe $\Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$

Twierdzenie

Proste o równaniach $A_1x+B_1y+C_1=0$ oraz $A_2x+B_2y+C_2=0$ $(A_1^2+B_1^2\neq 0,\ A_2^2+B_2^2\neq 0)$ są:

a) równoległe $\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0$ (wyznacznik)

b) prostopadłe $\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$ (iloczyn skalarny)

Twierdzenie

Kąt pomiędzy prostych (ostry)

- postać ogólna

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|$$

- postać kierunkowa

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{a_2-a_1}{a_1a_2+1}\right|$$

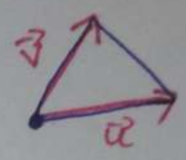
Twierdzenie

Odległość punktu $P(x_0,y_0)$ od prostej $k: Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$ wynosi:

$$d(P,k)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Twierdzenie (pole trójkąta)

Niech $\vec{u}=[u_x,u_y]$, $\vec{v}=[v_x,v_y]$ będą wektorami zaczepionymi w jednym wierzchołku trójkąta, o końcach w pozostałych wierzchołkach (rysunek). Wtedy:



$$\boxed{P_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot|\det(\vec{u},\vec{v})|}$$

Def. (równanie okręgu)

- postać kanoniczna

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \text{ gdzie } S(a,b) \text{ - środek}, \; r>0 \text{ - promień.}$$

- postać ogólna (zredukowana)

$$x^2+y^2-2ax-2ay+c=0, \text{ gdzie } S(a,b) \text{ - środek}, \; r=\sqrt{a^2+b^2-c}>0 \text{ - promień}$$

Twierdzenie (wzajemne położenie dwóch okręgów) (przypomnienie)

Okręgi $o(S_1,r_1)$ i $o(S_2,r_2)$ są:

- rozłączne zewnętrznie $\Leftrightarrow |S_1S_2|>r_1+r_2$
- styczne zewnętrznie $\Leftrightarrow |S_1S_2|=r_1+r_2$
- przecinające się $\Leftrightarrow |r_1-r_2|<|S_1S_2|<r_1+r_2$
- styczne wewnętrznie $\Leftrightarrow 0<|S_1S_2|=|r_1-r_2|$
- rozłączne zewnętrznie $\Leftrightarrow |S_1S_2|<|r_1-r_2|$
- współśrodkowe $\Leftrightarrow |S_1S_2|=0 \Leftrightarrow S_1=S_2$.

Def.

Jednokładnością o środku w punkcie S i skali $k\ (\neq 0)$ nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, które każdemu punktowi A przyporządkowuje punkt A_1, taki, że:

$$\overrightarrow{SA_1}=k\cdot\overrightarrow{SA}$$

(oznaczenie J_S^k)

Twierdzenie.

Obrazem punktu $A(x,y)$ w jednokładności o środku $S(a,b)$ i skali k $(\neq 0)$ jest punkt $A_1(x_1,y_1)$ taki, że:

$$\begin{cases} x_1 = kx + (1-k)a \\ y_1 = ky + (1-k)b \end{cases}$$

Wniosek.

Gdy $S(0,0)$, to $\begin{cases} x_1 = kx \\ y_1 = ky \end{cases}$