Część I: Funkcje cyklometryczne

Definicja 1. Funkcję $g: Y \to X$ nazywamy **odwrotną** do funkcji $f: X \to Y$ jeśli

$$(g \circ f)(x) = x \text{ dla } x \in X,$$
$$(f \circ g)(y) = y \text{ dla } y \in Y.$$

Funkcję odwrotną oznaczamy symbolem f^{-1}.

Twierdzenie 2. Funkcja $f: X \to Y$ posiada funkcję odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy jest iniekcją (jest różnowartościowa) oraz suriekcją (każda wartość ze zbioru Y jest przyjmowana)[1].

Twierdzenie 3. Wykresy funkcji i funkcji do niej odwrotnej są do siebie symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$.

Funkcje cyklometryczne to, najprościej mówiąc, funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych. Jak pamiętamy z lekcji matematyki, funkcje trygonometryczne (sinus, cosinus, tangens, cotangens) nie są funkcjami różnowartościowymi. Nie możemy więc w ogólności ich odwrócić. Każda z nich jest jednak różnowartościowa na odpowiednich kawałkach, a więc na tych kawałkach można je odwrócić.
Zobaczmy jak to wygląda w przypadku funkcji sinus.
Jest ona iniekcją w przedziale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Wtedy zbiór wartości to przedział $[-1, 1]$. Tak więc funkcja odwrotna prowadzi z przedziału $[-1, 1]$ w przedział $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Oznaczamy są symbolem $\arcsin$.
Analogicznie definiujemy pozostałe funkcje.

Definicja 4 (Funkcje cyklometryczne)**.**

- $\arcsin = \left(\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1} : [-1, 1] \ni x \mapsto \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **(arcus sinus)**
- $\arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1, 1] \ni x \mapsto \arccos x \in [0, \pi]$ **(arcus cosinus)**
- $\mathrm{arc\,tg} = \left(\mathrm{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \mathrm{arc\,tg}\, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ **(arcus tangens)**
- $\mathrm{arc\,ctg} = \left(\mathrm{ctg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \mathrm{arc\,ctg}\, x \in (0, \pi)$ **(arcus cotangens)**

Wniosek 5.

- $\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y \wedge y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $\arccos x = y \Leftrightarrow x = \cos y \wedge y \in [0, \pi]$
- $\mathrm{arc\,tg}\, x = y \Leftrightarrow x = \mathrm{tg}\, y \wedge y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- $\mathrm{arc\,ctg}\, x = y \Leftrightarrow x = \mathrm{ctg}\, y \wedge y \in (0, \pi)$.

[1] Jeśli zbiór Y nie jest w zadaniu podany, to przyjmujemy, że jest nim ZW_f. Wtedy w oczywisty sposób funkcja jest suriekcją.