



II LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE
IM. KRÓLA JANA III SOBIESKIEGO
W KRAKOWIE

Piotr Bury

Elementy algebry z teorią liczb

Skrypt do zajęć
w roku szkolnym 2025/26
(Ostatnia aktualizacja: 01.09.2025)

KRAKÓW 2025

*Matematykiem jest ten, dla kogo wzór: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ jest tak oczywisty,
jak dla innych dwa razy dwa równa się cztery.*

William Thomson

Spis treści

Wstęp	4
1 Teoria	7
1.1 Liczby zespolone	7
1.2 Teoria grup	15
1.3 Relacje	18
1.4 Kongruencja (przystawanie modulo)	21
1.5 Macierze	24
2 Zadania	27
2.1 Liczby zespolone	27
2.2 Teoria grup	29
2.3 Relacje	31
2.4 Kongruencja (przystawanie modulo)	34
2.5 Macierze	35
3 Odpowiedzi	37
3.1 Liczby zespolone	37
3.2 Teoria grup	41
3.3 Relacje	43
3.4 Kongruencja (przystawanie modulo)	47
3.5 Macierze	49
4 Dodatek	51
4.1 Hipoteza Riemanna	51
4.2 Dlaczego i nie równa się $\sqrt{-1}$	52
4.3 Wzory Vite'a	53
4.4 Wzory Eulera i jedynka trygonometryczna	54
4.5 Najpiękniejszy wzór matematyki	56
4.6 Cechy podzielności przez 7	56
4.7 Układy równań liniowych 3×3	57
Bibliografia	59

Wstęp

W pierwszym roku mojej pracy w liceum, a dokładniej w drugim półroczu roku szkolnego 2019/20 miałem okazję prowadzić obowiązkowe uzupełnienie *Elementy algebry z teorią liczb*. Przedmiot ten miał dość nietypowy syllabus – liczby zespolone, teorię grup, teorię relacji oraz nierówności między średnimi. Tematy te nie dotyczą w ogóle teorii liczb, a są związane zarówno z algebra liniową, jak i abstrakcyjną. Znajdziemy tam również elementy teorii mnogości i analizy. W następnym roku szkolnym również powierzono mi prowadzenie tego przedmiotu, lecz nie tylko dla zwykłych klas z rozszerzoną matematyką, ale także dla klasy zaawansowanej *M+*. Wymagania przedmiotowe były podobne – różnicą był ostatni dział. Zamiast nierówności omawiana była relacja przystawania modulo, która jest częścią teorii liczb. Taka różnorodność zagadnień sprawia, że nie ma niestety żadnego podręcznika, czy zbioru zadań, który obejmowałby wszystkie wspomniane wyżej zagadnienia. Zarówno dla osób prowadzących zajęcia, jak i uczniów jest to spore utrudnienie – odpowiednich zadań trzeba szukać po wielu książkach lub wymyślać samemu. Opisana sytuacja była dla mnie głównym motywem, by taki skrypt powstał. Po zakończeniu roku szkolnego 2019/20 postanowilem zebrać i przejrzeć swoje notatki, które wykorzystywałem podczas prowadzenia zajęć. Odpowiednio je posegregowałem, zredagowałem i w taki właśnie sposób powstała pierwsza wersja tego skryptu zawierająca zarówno pełną teorię z wprowadzanych przez mnie zagadnień, jak i dość dokładnie wybrany zestaw zadań. Drugi rok prowadzenia tego przedmiotu pozwolił wyłapać drobne literówki, ujednolicić oznaczenia i wprowadzić zmiany, których konieczność dostrzegło się dopiero przy ponownym omawianiu tych samych zagadnień. Po wielu przemyśleniach postanowilem też usunąć tematy związane z nierównościami między średnimi i tożsamościami¹, a w zamian umieściłem typowy dział algebry liniowej – macierze. Jest to zagadnienie, z którym praktycznie każdy spotka się już na pierwszym roku studiów, a więc poznanie tychże pojęć wcześniej na pewno będzie przydatne. W kolejnych latach niezmiennie miałem okazję prowadzić (i nadal prowadzę) zajęcia z tego przedmiotu, dzięki czemu w skrypcie dokonywane są ba bieżąco poprawki i modyfikacje – chociażby w doborze zadań. W formie prowadzenia zajęć zmieniło się to, że dla uczniów po szkole podstawowej (a nie gimnazjum) przedmiot ten realizowany jest z innej puli godzin, przez co nie ustala się z niego oceny końcowej, która miałaby wpływ na średnią ocen, czy promocję do następnej klasy.

Skrypt jest napisany w taki sposób, by widoczna była przejrzysta struktura: najpierw przedstawiona jest teoria z wszystkich działów wraz z przykładami (podręcznik), a następnie znajdują się zadania, również podzielone na odpowiednie działy (zbior zadań). Całość dopełniają odpowiedzi do wszystkich zadań, dzięki czemu zarówno nauczyciel prowadzący lekcję, jak i uczeń, może sprawdzić, czy otrzymał poprawny wynik. Na samym końcu umieściłem *Dodatek*, w którym znajdują się zagadnienia uzupełniające. Są to takie zagad-

¹ Tematy te są omawiane na lekcjach matematyki.

nienia, które uważam za wyjątkowo ciekawe, a które nie są objęte programem tego przedmiotu. Można je wykorzystać do pracy z uczniem zdolnym, wyróżniającym się na tle klasy, chcącym poznać coś więcej niż wiedza przekazywana na lekcji oraz w formie ciekawostki.

Dość długo zastanawiałem się, czy jest jakiś wspólny czynnik łączący tak różnorodne tematy. Ku mojej radości, taki element udało się znaleźć. Omawiane tutaj teorie (liczby zespolone, grupy, relacje, kongruencja, macierze) są pewnym uogólnieniem tego, co uczniowie poznają w na lekcjach matematyki. I tak po kolei:

- Liczby zespolone są rozszerzeniem maksymalnego zbioru liczbowego jaki uczniowie znają tzn. zbioru liczb rzeczywistych \mathbb{R} . Na początku edukacji poznaje się zbiór liczb naturalnych, następnie „wiekszy” zbiór liczb całkowitych, potem zbiór liczb wymiernych i na końcu rzeczywistych. Wydaje się, że to już koniec, bo każdy punkt na prostej możemy utożsamiać z liczbą rzeczywistą i na odwrót. Okazuje się jednak, że jest zbiór jeszcze „szerszy” i co więcej jest on w pewnym sensie idealny – każdy wielomian stopnia niezerowego ma pierwiastek² (!), co w oczywisty sposób nie zachodzi w \mathbb{R} .
- Grupy i działania w nich są uogólnieniem naturalnego działania dodawania i mnożenia w zbiorach takich jak np. \mathbb{Z} , czy \mathbb{R} i zachodzących tam własności. Rozważając własności tych działań takie jak chociażby łączność, przemienność zastanawiamy się, jakie inne działania mają podobne własności. Okazuje się więc, że poznane już w szkole podstawowej mnożenie i dodawanie to nie jedyne naturalne działania. Są one jedynie przykładami znacznie szerszej, abstrakcyjnej teorii.
- Teoria relacji jest zaś w pewien sposób uogólnieniem pojęć związanych z funkcjami. Definicja funkcji, jaką poznajemy na lekcjach matematyki, jest co prawda intuicyjna i łatwa, ale nie jest niestety ścisła i formalna, więc w matematyce wyższej potrzebna jest inna. Tam właśnie wykorzystuje się teorię relacji. Funkcja znana z lekcji matematyki to przyporządkowanie mające specjalne własności. W szczególności możemy różnym argumentom przypisywać tę samą wartość³, ale nie możemy jednemu elementowi przypisać dwóch różnych wartości. W przypadku relacji odrzucamy to ograniczenie, a więc intuicyjnie relacja to po prostu dowolne przyporządkowanie pomiędzy elementami pewnych zbiorów.
- Relacja przystawania modulo (inaczej kongruencja) to narzędzie, które znaczco ułatwia pewne rzeczy związane z podzielnością liczb całkowitych. Dzięki niej badanie ogromnych liczb staje się prostsze, bo pozwala zajmować się jedynie ich resztami z dzielenia przez daną liczbę. Odpowiednie działania (jak np. mnożenie, dodawanie) wykonuje się na stosunkowo małym zbiorze reszt, a wnioski z nich wyciągane dotyczą liczb tak dużych, że niemożliwym byłoby nawet ich zapisanie.
- Macierze to naturalne uogólnienie wektorów. Wiele intuicji się przenosi, tzn. będziemy takie macierze dodawać, mnożyć przez liczbę, czy też mnożyć przez siebie. Jak pamiętamy z lekcji matematyki, wektor w układzie współrzędnych był reprezentowany przez parę liczb np. $[2, 1]$. Macierz to taki „wielowskaźnikowy” wektor – składa się nie tylko z jedno wiersza, ale z kilku. Sam wektor $[2, 1]$ jest również macierzą – ma jeden wiersz i dwie kolumny.

Jak w każdej publikacji, również i w tej, na pewno nie udało się uniknąć błędów: literówek, błędów redakcyjnych, czy też typograficznych. Dołożyłem wszelkich starań, by było ich jak najmniej, wielokrotnie

²Mówimy wtedy o **algebraicznej domkniętości** takiego zbioru.

³Wtedy po prostu funkcja nie jest różnicowalna.

sprawdzając napisany tekst. W przypadku zauważenia jakiegokolwiek błędu proszę o bezpośredni kontakt. Skrypt będzie na bieżąco poprawiany i aktualizowany.

Wszelkie prawa zastrzeżone. Dozwolone kopiowanie całości w ramach użytku wewnętrznego w II Liceum Ogólnokształcącym im. Króla Jana III Sobieskiego w Krakowie. Wykorzystanie fragmentów, ich kopiowanie i modyfikowanie oraz rozpowszechnianie fragmentów lub całości wyłącznie za zgodą autora. Dozwolone jest również kopiowanie i rozpowszechnianie fragmentów lub całości pomiędzy uczestnikami tego kursu lub jego absolwentami.

Tekst został złożony w całości przy użyciu środowiska \LaTeX w edytorze Texmaker. Wszystkie obrazki zawarte w skrypcie zostały wykonane przeze mnie osobiście w programie GeoGebra.