Olimpijskie Warsztaty Matematyczne

Spotkanie 13 - **Teoria grafów**

II LO Kraków, 16.05.2025r.

Dominik Bysiewicz & Jakub Byszewski

TEORIA

- **Grafem** nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie V (ang. vertices) to niepusty skończony zbiór elementów nazywanych wierzchołkami, a E (ang. edges) to zbiór nieuporządkowanych par wierzchołków zwanych krawędziami.

- Krawędzie $\{u, v\} \in E(G)$ skrótowo zapisujemy jako $uv \in E(G)$. Rozważamy podstawową wersję grafów, czyli pomiędzy dwoma wierzchołkami istnieje najwyżej jedna krawędź oraz nie istnieją krawędzie $\{u, u\}$ (nazywane **pętlami**). Ponadto, krawędzie grafu będziemy dzielić na dwie grupy:
  a) skierowane – czyli para uporządkowana wierzchołków (u, v), rozróżniamy zwrot strzałki;
  b) nieskierowane – czyli "zwykłe" krawędzie, bez strzałek (lub uważane jako podwójne strzałki w obu kierunkach).

  Graf nazywamy **skierowanym**, jeśli posiada krawędzie skierowane. Grafem **wielokrotnym** (inaczej **multigrafem**) nazywamy graf o wielokrotnych krawędziach pomiędzy tymi samymi wierzchołkami.

- Wierzchołki u, v są **połączone** (inaczej, jeden jest sąsiadem drugiego), jeśli $uv \in E(G)$. Krawędzie są **incydentne**, jeśli mają wspólny koniec.

- **Grafem pustym** nazywamy graf bez krawędzi (graf, którego wierzchołki są niezależne). **Zbiorem niezależnym** nazywamy dowolny zbiór wierzchołków, z których żadne dwa nie są połączone.
  Grafem pełnym nazywamy graf, którego każde dwa wierzchołki są połączone (taki graf oznaczamy przez K_n, gdzie n to liczba wierzchołków - przykładowo K_3 to trójkąt, a K_4 to kwadrat z przekątnymi). Graf pełny inaczej nazywany jest **kliką**.

- **Podgrafem indukowanym** przez zbiór $U \subset V(G)$ nazywamy graf o wierzchołkach z U i krawędziach ze zbioru $\{uv \in E(G) | u, v \in V(G)\} \subset E(G)$.
  Intuicyjnie – aby uzyskać podgraf indukowany usuwamy wszystkie wierzchołki nieleżące w U oraz wszystkie krawędzie o końcach w usuniętych wierzchołkach. Przykładowo, jeśli $G = K_4$ (czyli kwadrat z przekątnymi), to jedynymi podgrafami indukowanymi są trójkąt, odcinek i pojedynczy punkt (oraz oczywiście graf G).

- **Dopełnieniem** grafu G nazywamy graf o tych samych wierzchołkach $V(G)$, przy czym w grafie dopełnionym wierzchołki są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy nie są połączone w G. Dopełnienie grafu oznaczamy przez $\bar{G}$.

- **Stopniem** wierzchołka nazywamy liczbę krawędzi o końcu w tym wierzchołku (uwaga, w przypadku grafu wielokrotnego ta liczba nie musi być równa liczbie sąsiadów). Stopień wierzchołka v w grafie G oznaczamy przez $d_G(v)$ lub, jeśli wiadomo o jakim grafie mowa, przez $d(v)$ (ang. degree).

- **Spacerem** nazywamy dowolny ciąg $v_0, \ldots, v_n$ wierzchołków, gdzie każde dwa kolejne są połączone. (Intuicyjnie, chodzimy sobie po krawędziach grafu zaczynając od v_0 do v_n, przy czym możemy wielokrotnie przechodzić przez te same wierzchołki, a nawet krawędzie).

Droga to spacer, który nie powtarza krawędzi.
Ścieżka to spacer, który nie powtarza wierzchołków (ani krawędzi) - jedno z najważniejszych pojęć.
Cykl to ścieżka zamknięta - czyli droga, w której nie ma powtórzeń krawędzi, a jedynym powtórzonym wierzchołkiem jest pierwszy i ostatni.
Drogę zamkniętą i **spacer zamknięty** definiujemy analogicznie.

- **Grafem spójnym** nazywamy graf, którego dowolna para wierzchołków jest połączona pewną ścieżką.
  Spójną składową nazywamy każdy maksymalny spójny podgraf grafu.
  (Intuicyjnie, każdy graf jest złożony z wysp, na których istnieje sieć autostrad, ale pomiędzy wyspami nie ma żadnych mostów. Wtedy każda wyspa jest spójną składową, a graf jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy ma tylko jedną wyspę).

- Graf nazywamy **dwudzielnym**, jeśli można jego wierzchołki tak podzielić na dwie grupy A i B, że jedyne krawędzie w grafie G istnieją pomiędzy grupami (czyli A i B to zbiory niezależne).
  Graf **pełny dwudzielny** (oznaczamy $K_{a,b}$), to graf dwudzielny o zbiorach A i B wielkości odpowiednio a i b i wszystkimi możliwymi krawędziami (czyli $|V| = n = a+b$ i $|E| = a \cdot b$).

- Graf spójny nazywamy **drzewem**, jeśli nie posiada żadnego cyklu.
  Graf nazywamy **lasem**, jeżeli jest zbiorem drzew (nie posiada cyklu), czyli każda spójna składowa G jest drzewem.
  Liściem nazywamy wierzchołek drzewa o stopniu 1.

PODSUMOWANIE OZNACZEŃ

$V(G)$, $E(G)$ – zbiór wierzchołków i krawędzi grafu G
$G[U]$ – graf indukowany przez $U \subset V(G)$
$\bar{G}$ - dopełnienie grafu G
K_n – klika na n wierzchołkach
C_n – cykl długości n (jako podgraf indukowany, czyli bez przekątnych)
$d_G(v)$ – stopień wierzchołka v w grafie G
$\delta(G)$ – stopień minimalny grafu G (najmniejszy stopień ze wszystkich jego wierzchołków)
$\Delta(G)$ – stopień maksymalny grafu G (największy stopień ze wszystkich jego wierzchłków)
$\overline{d}(G)$ – średni stopień grafu G (średnia arytmetyczna stopni)

ZADANIA

1. Udowodnij, że każdy graf ma parzystą liczbę wierzchołków nieparzystego stopnia.

2. Udowodnij, że każdy spacer od u do v zawiera ścieżkę od u do v.

3. Udowodnij, że jeżeli w grafie występuje spacer zamknięty nieparzystej długości, to występuje w nim również cykl nieparzystej długości.

4. Opisać wszystkie grafy G, dla których $\Delta(G) \leq 2$.

5. Udowodnij, że każde drzewo posiada co najmniej $\Delta(G)$ liści.

6. Udowodnij, że każdy graf o stopniu minimalnym $\delta(G) = \delta$ zawiera ścieżkę zawierającą $\delta + 1$ wierzchołków.

7. Znajdź wszystkie grafy G, które są cyklami lub ścieżkami, oraz których dopełnienie jest ścieżką lub cyklem.

8. Udowodnij, że drzewo bez wierzchołków stopnia 2 posiada więcej liści, niż innych wierzchołków.
9. Udowodnij, że graf niezawierający trójkątów ma conajmniej $2\delta(G)$ wierzchołków.
10. Dany jest graf na n wierzchołkach. Udowodnij, że można tak pokolorować każdy jego wierzchołek na czerwono lub niebiesko, że przynajmniej połowa krawędzi ma końce różnego koloru.
11. Udowodnij, że graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy gdy każdy jego indukowany cykl jest parzystej długości.
12. Udowodnij, że dopełnienie niespójnego grafu G jest spójne.
13. Dany jest graf spójny. Niech k będzie długością najdłuższej ścieżki w grafie. Pokazać, że dowolne dwie ścieżki długości k mają wspólny wierzchołek.
14. W pewnej grupie każdy ma dokładnie k znajomych oraz każde dwie osoby, które się nie znają, mają dokładnie jednego wspólnego znajomego. Wykaż, że liczba osób w tej grupie nie przekracza $k^2 + 1$.
15. Koło gospodyń wiejskich liczy 100 członkiń. Każda gospodyni spotkała się na herbatce z dokładnie 56 innymi gospodyniami. Zarząd koła składa się z 50 gospodyń najbardziej zaangażowanych w działalność koła. Każde dwie z nich spotkały się już na herbatce. Udowodnij, że członkinie koła można tak podzielić na dwie grupy, że wewnątrz grup każde dwie spotkały się na herbatce.
16. Mysz przegryza się przez kostkę sera $3 \times 3 \times 3$ jedząc kolejne kostki $1 \times 1 \times 1$ sąsiadujące ze sobą ścianami. Czy zaczynając w rogu może zjeść cały ser i skończyć w samym środku? (zignoruj grawitację).
17. Krzysztof wziął udział w turnieju szachoboksu, rozgrywanym systemem każdy z każdym (bez remisów). Po zawodach okazało się, że dla każdego innego uczestnika X, da się wybrać pewną grupę zawodników i ustawić ich w kolejkę, na której przedzie będzie stał X, z tyłu będzie stał Krzysztof, zaś każdy wygrał z osobą, która przed nim stoi (kolejka ta może zawierać tylko dwie osoby). Wykazać, że można ułożyć wszystkich zawodników w kolejkę o podobnej własności – każdy pokonał osobę przed nim, zaś na końcu stoi Krzysztof.
18. 20 drużyn piłkarskich bierze udział w turnieju. Pierwszego dnia każda z drużyn rozegrała jeden mecz. Drugiego dnia każda z drużyn rozegrała kolejny mecz. Pokazać, że można wybrać dziesięć drużyn, z których żadne dwie nie rozegrały ze sobą meczu w ciągu pierwszych dwóch dni.
19. W pewnym państwie jest sto miast, z których niektóre połączone są drogami w taki sposób, że z dowolnego miasta można dojechać do dowolnego innego. Pokazać, że można wybrać pewien podzbiór dróg w taki sposób, że z każdego miasta wychodzi nieparzysta liczba wybranych dróg.
20. Dla jakich liczb naturalnych n następujące zdanie jest prawdą: można tak pokolorować wierzchołki i krawędzie grafu K_n używając n kolorów, aby: każde dwa wierzchołki miały różne kolory, każde dwie krawędzie o wspólnym wierzchołku miały różne kolory oraz każdy wierzchołek miał inny kolor niż każda wychodząca z niego krawędź.
21. Dziewięcioro matematyków spotkało się na konferencji. Dla dowolnych trojga spośród nich, pewnych dwóch mówi w tym samym języku, ale każdy z tych matematyków zna co najwyżej trzy języki. Pokazać, że pewnych troje spośród z nich mówi w tym samym języku.

22. Dana jest liczba naturalna n. W pewnej klasie uczniowie zapisali się na kółka przedmiotowe organizowane z $2n+1$ przedmiotów. Na każde kółko zapisało się $2n$ uczniów i każdy uczeń zapisał się na co najmniej dwa kółka, ale żadnych dwóch uczniów nie zapisało się do dwóch tych samych kółek. Dla jakich n mamy pewność, że można niektórym uczniom dać kapelusz w taki sposób, by w każdym kółku dokładnie połowa uczniów miała kapelusz.