MATEMATYCZNY KALENDARZ ADWENTOWY 2020

Zgodnie z ideą kalendarza adwentowego, postanowiłem przygotować w tym roku wersję matematyczną. Codziennie, przez 24 dni, począwszy od 1 grudnia, będę zamieszczał jedną ciekawostkę związaną z matematyką. Czasem będą to bardzo krótkie informacje, a czasem dłuższe. Chciałbym w ten sposób choć trochę uzmysłowić wam, że matematyka nie kończy się w szkole, a w szczególności, że taka prawdziwa, ciekawa matematyka istnieje i jest zupełnie inna niż ta, której uczymy się na lekcjach matematyki. Cała akcja ma charakter popularnonaukowy i popularyzujący tę piękną, abstrakcyjną dziedzinę. Dołożyłem wszelkich starań, aby nie były to nudne informacje przepisane z pierwszej lepszej strony z ciekawostkami. Wręcz przeciwnie, chciałem, aby informacje tu przekazane były naprawdę ciekawostkami, czyli aby wiedział o nich mało kto i były zaskakujące. Wszelkie informacje, które się tu pojawią bazują głównie na mojej własnej wiedzy, którą zdobyłem samodzielnie studiując liczne książki i opracowania. Wybór tylko 24 informacji nie będzie na pewno łatwy. Mam gorącą nadzieję, że chociaż dla części z Was informacje, które będą się pojawiać będą ciekawe i rozwijające.

Dzień 1. Niektórzy zapewne stwierdzą, że nie ma nic prostszego niż fakt, że $1+1=2$. Prawda jest bardziej okrutna niż mogłoby się wydawać. W pełni formalny i rygorystyczny matematyczny dowód tego faktu, zajmuje... ok. 360 stron i możemy go znaleźć m.in. w słynnej książce A. Whiteheada i B. Russella – *Principia mathematica.* Książka nie należy do najprostszych – sam autor w latach '60 podczas jednego z wywiadów stwierdził, że było w stanie przeczytać ją jedynie 6 osób (książka powstała w latach 1910 – 1913). Kluczowy fragment dowodu znajduje się na stronie 362 i wygląda następująco:

***54·43.** $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota' x . \beta = \iota' y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota' x \cap \iota' y = \Lambda .$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota' x . \beta = \iota' y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1+1=2$.

Dzień 2. Rozważmy równanie (1) : $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$. Spróbujmy je rozwiązać. Skoro $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$, to podstawiając za cały wykładnik 2 otrzymamy $x^2 = 2$, skąd $x = \sqrt{2}$ ($-\sqrt{2}$ odrzucamy, bo podstawa potęgi musi być większa od 0). Rozwiązaniem równania (1) jest liczba $\sqrt{2}$. Rozważmy teraz równanie (2) : $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 3$. Zastosowanie podobnej taktyki doprowadzi nas do równania $x^3 = 3$, skąd $x = \sqrt[3]{3}$. Czy to jest rozwiązanie równania? Okazuje się że nie (!). Aby było jeszcze ciekawiej, gdy rozważymy ciąg $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ i wstawimy do niego $\sqrt[3]{3}$ to ciąg ten jest zbieżny[1] – ale nie do trzech. Tą liczbą jest $\frac{-3}{\ln 3} W\left(\frac{-\ln 3}{3}\right) \approx 2,478$, gdzie W to tzw. **funkcja W Lamberta.** Podsumowując i uogólniając:

Równanie $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = m$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $e^{-1} \leqslant m \leqslant e$.

Ciąg $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $e^{-e} \leqslant x \leqslant \sqrt[e]{e}$.

[1] To znaczy, że wstawiając coraz więcej kolejnych wyrazów, całość zbliża się do konkretnej liczby, a nie rośnie np. do nieskończoności.

Wracając do naszych przykładów: $\sqrt[3]{3} \approx 1,442 < \sqrt[e]{e} \approx 1,445$, zatem ciąg jest zbieżny. Jednak $3 > e \approx 2,718$, a więc równanie $x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = 3$ nie ma rozwiązania.

Dzień 3. Najdłuższy dowód matematyczny zajął około 15 000 stron. Twierdzenie dotyczy klasyfikacji skończonych grup prostych. Angielska nazwa tego twierdzenia to: **Enormous Theorem**.

Dzień 4. Liczbę atomów we wszechświecie szacuje się na około 10^{78}. Liczba ta składa się z jedynki i siedemdziesięciu ośmiu zer. Zapisanie jej standardową czcionką zajęłoby około 16 cm (Przyjmujemy, że 5 cyfr zajmuje 1 cm). Największą znaną liczbą pierwszą (odkrytą w grudniu 2018 roku) jest $2^{82589933} - 1$, która składa się z 24 862 048 cyfr. Proste obliczenia dają nam wynik, że zapis tej liczby standardową czcionką zająłby ok. 50 km.

Dzień 5. Wyobraźmy sobie, że na jednym z końców długiej, kilometrowej rozciągliwej nici siedzi mrówka. W pewnym momencie zaczyna poruszać się ze stałą prędkością 1 cm/s w kierunku drugiego końca. Po upływie każdej sekundy nić wydłuża się o jeden kilometr - natychmiastowo i jednorodnie na całej długości. Czy mrówka jest w stanie dotrzeć na drugi koniec nici?
Okazuje się, że tak. Dotrze do niego po około $2,065 \cdot 10^{43429}$ sekundach. Jest to ogromna liczba. Wiek Wszechświata określa się na około $4,36 \cdot 10^{17}$ sekund. Co jeszcze ciekawsze, mrówka dotrze do końca nici dla dowolnych wartości początkowych - długości nici, prędkości mrówki oraz szybkości wydłużania się nici.

Dzień 6. Punkt $(0,0)$, czyli początek układu współrzędnych oznaczamy literą O od słowa ***Origin***, które z j. angielskiego określa punkt przecięcia się osi układu współrzędnych.

Dzień 7. Podczas kilku zastępstw w tamtym roku opowiadałem trochę o wyższych wymiarach – w szczególności jak sobie wyobrazić wyżej wymiarowe sześciany i kule. Jeśli ktoś miał więc szczęście (lub pecha) i trochę słuchał, to teraz będzie to dla niego przypomnienie. Wyższe wymiary wyobrażamy sobie przez analogię niższych (tj. od zerowego, do trzeciego). Spróbujcie wysilić szare komórki i zastanowić się samodzielnie, ile wierzchołków ma sześcian w czwartym i piątym wymiarze. Odpowiedź jest w tym przypisie[2]. Podobne gimnastykowanie umysłu można robić podczas wyobrażania sobie n-wymiarowych kul. Można również wyliczyć ich objętość (z dość skomplikowanych wzorów). I tak dla przykładu – objętość czterowymiarowej kuli o promieniu 1 wynosi $\frac{\pi^2}{2}$.

Dzień 8. Prawdą jest, że dla każdego n od 1 do 12055735790331359447442538767 liczba $991n^2 + 1$ nie jest kwadratem liczby naturalnej. Natomiast dla liczby następnej tj. 12055735790331359447442538768 nie jest to prawdą.

Dzień 9. Wzory na pierwiastki równań trzeciego stopnia wymyślili niezależnie Scipione del Ferro oraz Nicolas Tartaglia. Ten drugi nie ujawnił ich światu, ponieważ dzięki temu mógł wygrywać pojedynki matematyczne. Inny matematyk – Cardano – nalegał, by Tartaglia mu je wyjawił. Po jakimś czasie się zgodził, ale pod warunkiem, że ten ich nie wyjawi. Później Cardano odkrył w notatniku del Ferro te wzory, co oznaczało, że to nie Tartaglia wymyślił je jako pierwszy, tylko właśnie del Ferro. Tak więc Cardano uznał, że teraz nie musi już zachowywać tajemnicy od Tartaglii i spokojnie może opublikować omawiane wzory, co też uczynił wydając dzieło *Ars Magna.*

Dzień 10. Jedną z pierwszych osób, która wprowadziła i spopularyzowała *„polskie”* symbole $\mathbb{C}$ na zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{W}$ na zbiór liczb wymiernych i tym podobne była pani Olga Stande z Łodzi – autorka podręczników licealnych z lat ’70. Oprócz spopularyzowania tych symboli w jej podręcznikach pojawiły się również kwantyfikatory „warszawskie” tzn. $\bigvee$ oraz $\bigwedge$. Do stosowania w liceach poprawnych międzynarodowych oznaczeń wróciliśmy stosunkowo niedawno, bo z początkiem roku 2018, z uwagi na *Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 roku w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia*, gdzie na stronie 293 czytamy, że uczeń powinien stosować prawidłowe i powszechnie przyjęte oznaczenia tzn. $\mathbb{Z}$ dla zbioru liczb całkowitych oraz $\mathbb{Q}$ dla zbioru liczb wymiernych.

Dzień 11. Prawdopodobieństwo, że dwie losowo wybrane liczby całkowite są liczbami względnie pierwszymi wynosi $\frac{6}{\pi^2}$.

[2]Sześcian czterowymiarowy, tzw. tesserakt ma 16 wierzchołków, a pięciowymiarowy 32. W ogólności n-wymiarowy sześcian ma 2^n wierzchołków.

Dzień 12. $e^{\pi\sqrt{163}} \approx 262537412640768743,99999999999925$ – stała Ramanujana. Odkryta została przez Hermite'a w roku 1859. Jest ona tak bliska liczbie całkowitej, że w primaaprilisowym numerze *Scientific American* z 1975 roku Martin Gardner obwieścił, że jest to liczba całkowita zgodnie z przypuszczeniami Ramanaujana. Ze względu, że w tamtych czasach kalkulatory nie radziły sobie z taką dokładnością, to łatwo było czytelników nabrać. Co ciekawe, bliskość tej liczby do liczby całkowitej jest nieprzypadkowa. Jest związana z algebraiczną teorią pierścieni i związanymi z nią liczbami Heegnera.

Dzień 13. Twierdzenie, że prosta dzieli płaszczyznę na dwie części zostało udowodnione dopiero w 1882 roku przez Pascha.

Dzień 14. Z twierdzenia Gaussa (***theorema egregium***) wynika, że nie ma mapy, która zachowuje rzeczywiste stosunki długości.

Dzień 15. Kurt Otto Friedrichs udowodnił, że istnieje nieskończenie wiele dowodów twierdzenia Pitagorasa.

Dzień 16. Często możemy usłyszeć, że nie istnieje wzór podający kolejne liczby pierwsze. Jest to pogląd powszechnie rozpowszechniany głównie przez media (ale również przez wielu matematyków (!)). Często słyszymy (lub czytamy), że jeśli rozwiążemy Hipotezę Riemanna (mającą związek z rozmieszczeniem liczb pierwszych), to w końcu poznamy długo szukany wzór, który poda nam po kolei każdą liczbę pierwszą. Opisywany tu pogląd jest niestety bzdurą. Wzory na liczby pierwsze istnieją, i to dokładnie takie o jakich mowa, tzn. dające po kolei każdą liczbę pierwszą. Mają one jedną wadę - są zbyt skomplikowane, więc nie nadają się do praktycznych zastosowań, nawet do obliczeń komputerowych. Dla przykładu jeden z takich wzorów wygląda następująco:

$$p_n = 2 + \sum_{j=2}^{2^n} \left(\left[\frac{n-1}{\sum\limits_{m=2}^{j} \left[\frac{1}{\sum\limits_{k=2}^{m} \left[1 - \frac{m}{k} + \left[\frac{m}{k} \right] \right]} \right]} \right] - \left[\left| \frac{n-1}{\sum\limits_{m=2}^{j} \left[\frac{1}{\sum\limits_{k=2}^{m} \left[1 - \frac{m}{k} + \left[\frac{m}{k} \right] \right]} \right]} - 1 \right| \right] \right)$$

gdzie p_n oznacza $n-$tą liczbę pierwszą.

Dzień 17. Wymiar zbioru pustego to -1.

Dzień 18. Równość $a^0 = 1$ (dla $a \neq 0$) przyjmujemy z definicji. Można ją uzasadnić następująco:

(1) dzięki niej prawo działań na wykładnikach ($a^x : a^y = a^{x-y}$) zachodzi dla dowolnych liczb. Mamy bowiem $a^x : a^x = 1$, a zatem powinno być $a^{x-x} = a^0 = 1$.

(2) gdy z x zbliżamy się do 0, to wartości a^x zbliżają się do 1. Zatem przyjmując $a^0 := 1$ sprawiamy, że funkcja wykładnicza jest ciągła.

Dzień 19. Znak końca dowodu nazywa się potocznie **halmosem** na cześć Paula Halmosa, który jako pierwszy użył go w tekście matematycznym w kontekście końca dowodu. Znakiem tym może być zarówno biały kwadrat $\square$, czarny kwadrat $\blacksquare$, jak i czarny trójkąt $\blacktriangle$ lub $\blacktriangleright$.
Symbol ten zastępuje skróty:
ckd - co kończy dowód,
cnd - czego należało dowieść,
cnu - czego należało udowodnić,
cbdo - co było do okazania,
cnw - co należało wykazać,
cbdu - co było do udowodnienia,
cbdd - co było do dowiedzenia,
QED - quod erat demonstrandum (co było do udowodnienia)
Powyższe skróty mogą być zapisywane zarówno z kropkami po każdej literze, jak i bez.

Dzień 20. Znak nieskończoności to nie jest odwrócona ósemka tylko lemniskata. Znak ten został po raz pierwszy użyty w 1655 r. przez Johna Wallisa.

Dzień 21. Wielościany foremne były znane już w starożytności. Wszyscy wiemy, że jest ich dokładnie 5. Mogłoby wydawać się, że wiemy o nich już wszystko. Rozważmy następujący problem: Chcemy z jednego wierzchołka wielościanu wyjść i poruszając się wyłącznie prosto przed siebie, wrócić z powrotem do tego wierzchołka. Nie możemy jednak po drodze przejść przez żaden inny wierzchołek. Problem już dawno był rozwiązany dla czworościanu, sześcianu, ośmiościanu i dwudziestościanu – tam się tak przejść nie da. Pozostał tylko dwunastościan. I tu odpowiedź jest zaskakująca – taka ścieżka istnieje. Odkrycia dokonano niecałe 3 lata temu – na początku 2018 roku.

Dzień 22. W marcu 2018 w teleturnieju *Milionerzy* padło pytanie za milion złotych:

Ile to jest 1111 razy 1111, jeśli 1 razy 1 to 1, 11 razy 11 to 121?
A. 12 321
B. 1 234 321
C. 111 111 111
D. 123 454 321

Co ciekawe, aby odrzucić trzy nieprawidłowe odpowiedzi wystarczy bardzo grube szacowanie

$$1000 \cdot 1000 < 1111 \cdot 1111 < 10000 \cdot 10000,$$

które odrzuca od razu odpowiedzi A, C i D.

Odrzucić nieprawidłowe odpowiedzi można również stosując modulo.
$1111 \equiv 4 \pmod 9$, a zatem $1111 \cdot 1111 \equiv 16 \equiv 7 \pmod 9$. Widać wyraźnie, że liczby A i C dzielą się przez 9 (z cechy podzielności przez 9).

Dzień 23. Wracając jeszcze raz do Milionerów, w 2008 roku było pytanie:

Pole jakiej figury nie jest nigdy liczba całkowitą?
A. Rombu
B. Trapezu
C. Koła
D. Trójkąta równobocznego

Poprawną odpowiedzią według prowadzącego była odpowiedź C. Jednak to pytanie tak naprawdę nie ma prawidłowej odpowiedzi, ponieważ wystarczy przyjąć promień koła $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Wtedy pole koła wynosi 1.

Dzień 24. Wyobraźmy sobie, że opasano naszą planetę drutem wzdłuż równika. Następnie zwiększono długość drutu o 1 m. Na jaką odległość drut będzie odstawał od powierzchni Ziemi? Wydaje się, że bardzo mało, bo czym jest 1 m w porównaniu do obwodu Ziemi 40 000 000 m. Okazuje się jednak, że różnica promieni (tych okręgów) jest równa $\dfrac{1}{2\pi}$ m, czyli około 16 cm. Co więcej, wynik ten nie zależy od wyjściowego promienia (!)