Zadania uzupełniające - rachunek różniczkowy

Zadanie 1. Zbadaj przebieg zmienności funkcji i naszkicuj jej wykres

a) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 4$

b) $f(x) = x - 2 + \dfrac{x-2}{x-5} + \dfrac{x-2}{(x-5)^2} + \ldots$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$

Zadanie 2. Zbadaj liczbę rozwiązań równania $\dfrac{2x^2}{(2-x)^2} = 1 - m$ w zależności od wartości parametru m.
I sposób (uproszczony przebieg zmienności)– **zadanie domowe**
II sposób (równanie kwadratowe z parametrem)

Zadanie 3. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = x + \dfrac{4}{x-2}$, a następnie korzystając z otrzymanego wykresu zbadaj liczbę rozwiązań równania $\left|x + \dfrac{4}{x-2}\right| = m$ w zależności od wartości parametru m. Narysuj wykres funkcji $y = g(m)$, która każdej wartości m przypisuje liczbę rozwiązań powyższego równania.

Zadanie 4 (matura maj 2018)**.** Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

a) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.

b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a) = \dfrac{4a^2 - 8a + 8}{a}$

c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

Zadanie 5 (matura 1974, Bydgoszcz, klasy mat-fiz)**.** Przekątna prostopadłościanu o podstawie kwadratu ma długość d. Wyznaczyć długość krawędzi tego prostopadłościanu tak, aby jego objętość była największa.

Zadanie 6 (Egzamin wstępny na Politechnikę Łódzką/studia dla pracujących)**.** W półkole o promieniu r wpisano trapez, którego jedna podstawa jest średnicą półkola Przy jakiej wysokości trapezu ma on największe pole?

Zadanie 7 (baaaardzo ciężkie rachunki)**.** Z helikoptera znajdującego się na wysokości 60 m nad powierzchnia morza wysłano promień światła do nurka znajdującego się na głębokości 40 m pod powierzchnią wody. Odległość w poziomie między helikopterem i nurkiem jest równa 110 m. Przyjmujemy, że prędkość światła w powietrzu to 300 000 km/s, a – w wodzie to 225 000 km/s. Wiedząc, że światło „wybiera" taką drogę, na przebycie której potrzeba najmniej czasu, znaleźć punkt, w którym promień wszedł do wody, tzn. znaleźć odległość tego punktu od punktu na powierzchni wody, nad którym znajduje się helikopter.

Zadanie 8. Słup ma wysokość 12 m. W odległości 8 m od słupa stoi dziecko wzrostu 100 cm. Znaleźć wysokość x, na której należy umieścić lampę, by odległość $d(x)$ lampy od końca cienia dziecka była najmniejsza.

Zadanie 9 (matura maj 2020)**.** Należy zaprojektować wymiary prostokątnego ekranu smartfona, tak aby odległości tego ekranu od krótszych brzegów smartfona były równe $0,5$ cm każda, a odległości tego ekranu od dłuższych brzegów smartfona były równe $0,3$ cm każda (zobacz rysunek – ekran zaznaczono kolorem szarym). Sam ekran ma mieć powierzchnię $60\ \text{cm}^2$. Wyznacz takie wymiary ekranu smartfona, przy których powierzchnia ekranu wraz z obramowaniem jest najmniejsza.