

Zadanie 1. (4 pkt)

Rozwiąż równanie: $2 \cos^2 x - 2 \cos^2 x \sin x = 1 - \sin x$, w przedziale $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 2. (4 pkt)

Dany jest czworokąt $ABCD$. Niech S będzie punktem przecięcia jego przekątnych. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy,

$$\text{gdy } \frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}.$$

Zadanie 3. (4 pkt)

Dane są funkcje $f(x) = \frac{2x+b}{ax+1}$ oraz $g(x) = \frac{ax+c}{ax+1}$, o których wiadomo, że ich wykresy mają punkt wspólny $P(-9, \frac{11}{13})$, a miejscem zerowym funkcji g jest liczba: $-\frac{5}{3}$. Wyznacz wartości parametrów a, b, c .

Zadanie 4. (4 pkt)

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{\cos x + |\sin x|}{\cos x}$ dla $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Podaj zbiór rozwiązań nierówności $0 \leq f(x) < 2$.

Zadanie 5. (4 pkt)

Suma trzech liczb będących kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego jest równa 52. Jeżeli do pierwszej liczby dodamy 2, do drugiej 12, a do trzeciej 6, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz ten ciąg.

Zadanie 7. (4 pkt)

Dany jest wielomian $W(x)$ stopnia $n > 2$, którego suma wszystkich współczynników jest równa 4, a suma współczynników przy potęgach o wykładnikach nieparzystych jest równa sumie współczynników przy potęgach o wykładnikach parzystych. Wykaż, że reszta $R(x)$ z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = (x+1)(x-1)$ jest równa $R(x) = 2x + 2$.

Zadanie 8. (5 pkt)

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \log_2(-x^3 - 5x^2 - 3x + 9) - \log_2\left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right)$.

Zadanie 10. (5 pkt)

Punkty $B = (5,6)$ i $C = (0,6)$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, którego podstawy AB i CD są prostopadłe do prostej k o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków trapezu, wiedząc, że punkt D należy do prostej k .

Zadanie 11. (3 pkt)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 13 \geq 2a + 12b + 6c.$$

Zadanie 12. (4 pkt)

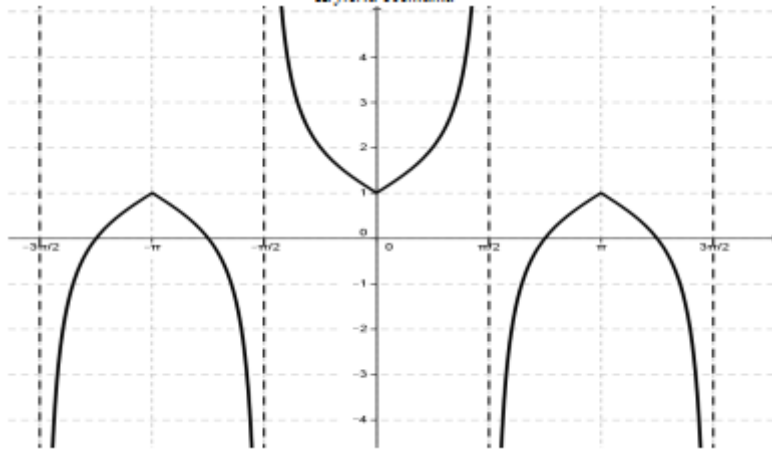
W trapezie opisanym na okręgu boki nierównoległe mają długości 3 i 5, zaś odcinek łączący środki tych boków dzieli trapez na dwie części, których pola są w stosunku 5:11. Oblicz długości podstaw trapezu.

ODP.

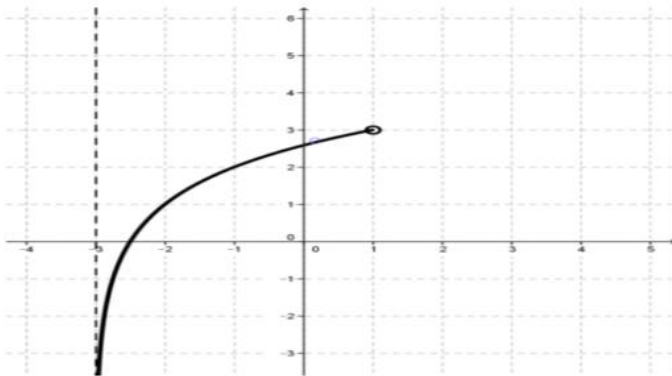
$$x = \frac{\pi}{4} \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} \text{ lub } x = \frac{3\pi}{4} \text{ lub } x = \frac{5\pi}{4} \text{ lub } x = \frac{7\pi}{4}.$$

$$a = 3, c = 5. b = -4.$$

$$x \in \langle -\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi \rangle \cup \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) \cup \langle \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \rangle$$



$$4, 12, 36.$$



$$D = (-2, 2) \quad A = (1, -2) \text{ lub } A = (3, 2)$$

$$: a = 7, b = 1.$$