

Zadania dodatkowe

Termin: wrzesień

Zadanie 1. Mamy dany trójkąt równoboczny o boku 100. Z jednego z jego wierzchołków zakreślamy okrąg, który dzieli trójkąt na dwie części o równych polach. Oblicz promień tego okręgu.

Zadanie 2. Która liczba jest większa: 50^{99} , czy $99!$?

Zadanie 3. Udowodnić następujące twierdzenie:

Trójkąt jest równoboczny, wtedy i tylko wtedy gdy ma wszystkie kąty równe.

Zadanie 4. Udowodnić, że ułamek postaci $\frac{\text{l. nieparzysta}}{\text{l. parzysta}}$ nie może być liczbą całkowitą.

Zadanie 5. Wyobraźmy sobie sześcian. Chcemy go pociąć na 27 małych jednakowych kostek, czyli na małe sześcianiki o trzykrotnie krótszej krawędzi. Łatwo widać, że da się to zrobić sześcioma cięciami: cztery z nich prowadzimy z góry do dołu (równolegle do ścian bocznych) oraz dwa równolegle do podstaw. Powstaje pytanie: czy da się to zrobić mniejszą liczbą cięć (np. inaczej układając odcięte już części i przecinając je razem)? Okazuje się że 6 cięć to minimalna liczba i nie da się tego zrobić przy mniejszej liczbie cięć. Uzasadnić ten fakt, tzn. że 6 to najmniejsza możliwa liczba cięć.

Rozwiązanie 1. Przez P_1 oznaczmy pole wycinka koła, a przez P_2 pozostałą część trójkąta. Wtedy (Z równości odpowiednich pól):

$$\begin{aligned}\frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 &= \frac{100^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \\ \frac{1}{3} \pi r^2 &= 2500 \sqrt{3} \\ r^2 &= \frac{7500 \sqrt{3}}{\pi}\end{aligned}$$

A zatem

$$r = \sqrt{\frac{7500 \sqrt{3}}{\pi}} = 50 \sqrt{\frac{3 \sqrt{3}}{\pi}} = \frac{50 \sqrt[6]{27 \pi^3}}{\pi}$$

Rozwiązanie 2. Rozpiszmy wyrażenie $\frac{50^{99}}{99!}$.

$$\frac{50^{99}}{99!} = \frac{\overbrace{50 \cdot \dots \cdot 50}^{49} \cdot 50 \cdot \overbrace{50 \cdot \dots \cdot 50}^{49}}{99 \cdot \dots \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot \dots \cdot 1}$$

W liczniku i mianowniku mamy po 99 składników – będziemy je odpowiednio grupować. Dwie pięćdziesiątki z licznika¹ grupujemy z dwiema liczbami z mianownika symetrycznie położonymi względem liczby 50. Na przykład najpierw grupujemy 50 i 50 z 51 i 49. Następnie 50 i 50 z 52 i 48. Łatwo zauważyć, że $\frac{50 \cdot 50}{51 \cdot 49} > 1$, ponieważ w mianowniku jest wzór skróconego mnożenia $(50 + 1)(50 - 1) = (50^2 - 1)$.

W każdym parowaniu licznik będzie większy od mianownika, więc ułamek będzie większy od 1. Środkowe wyróżnione liczby 50 skracają się, a każdy otrzymany ułamek jest większy od 1, a zatem wyjściowy ułamek też jest większy od 1, czyli $\frac{50^{99}}{99!} > 1$, a stąd już $50^{99} > 99!$.

Co ciekawe, można udowodnić², że prawdziwa jest ogólniejsza nierówność:

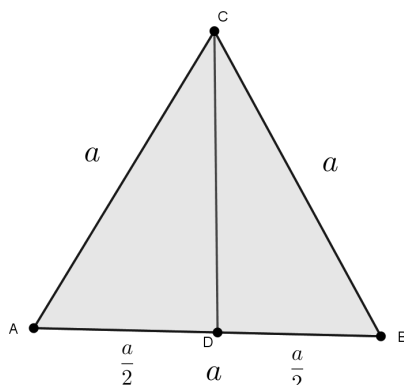
Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!.$$

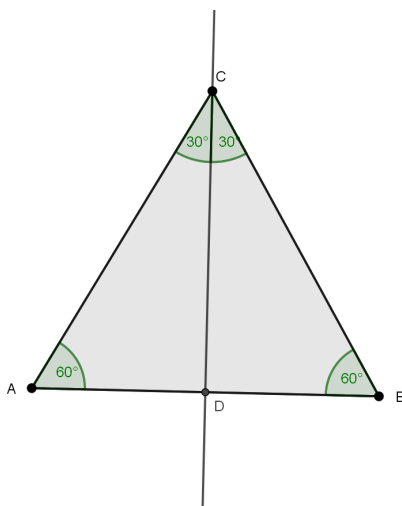
Podstawiając w powyższym twierdzeniu $n = 99$ od razu otrzymujemy wynik.

¹Aby grupowanie było najbardziej oczywiste i widoczne, będziemy brać jedną pięćdziesiątkę z lewej strony i jedną z prawej strony wyróżnionej osobno liczby 50.

²proste ćwiczenie z indukcji

Rozwiązanie 3. (\Rightarrow) 

Prowadzimy środkową z wierzchołka C . Dwa boczne trójkąty są przystające z cechy bbb , bo $|AC| = |BC| = a$, CD to wspólny bok, zaś $|AD| = |BD|$. Zatem $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle B|$. Analogicznie pokazujemy równość $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle C|$, a zatem wszystkie kąty są sobie równe.

 (\Leftarrow) 

Prowadzimy dwusieczną z wierzchołka C . Dwa boczne trójkąty są przystające z cechy kbk , bo mają wspólny bok CD i kąty przy nim 90° oraz 30° . Zatem $|AC| = |BC|$. Analogicznie pokazujemy równość $|AB| = |BC|$, a zatem wszystkie boki są sobie równe.

Rozwiązanie 4. Załóżmy odwrotnie, że ułamek ten jest liczbą całkowitą, tzn. $\frac{\text{l. nieparzysta}}{\text{l. parzysta}} = k$, dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Mnożąc obustronnie przez mianownik otrzymujemy $(\text{l. nieparzysta}) = (\text{l. parzysta}) \cdot k$. Prawa strona równości jest parzysta, a lewa nieparzysta. Sprzeczność, a zatem ułamek nie może być liczbą całkowitą.

Rozwiązanie 5. Pomalujmy ten sześcián farbą. Po rozcięciu go na mniejsze sześciániki będzie jeden ze środka, który nie będzie pokolorowany na żadnej ze ścian. A to oznacza, że dużą kostkę trzeba było przeciąć minimum 6 razy, by odsłonić każdą ze ścian środkowego sześciánu.

Zadanie 6. Czy istnieje liczba naturalna mniejsza od iloczynu swoich cyfr?

Rozwiązanie 6. Rozważmy liczbę n , która ma $k+1$ cyfr. Oznaczmy pierwszą jej cyfrę przez a . Iloczyn cyfr liczby n jest mniejszy bądź równy $a \cdot \underbrace{9 \cdot \dots \cdot 9}_k = a \cdot 9^k$. Z drugiej strony, liczba n jest większa bądź równa $a \cdot 10^k$. Tak więc taka liczba nie istnieje.

Zadanie 7. Dany jest zbiór $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $n \geq 5$. Udowodnić, że elementy powyższego zbioru można tak pokolorować na dwa kolory: czerwony i zielony, że suma liczb czerwonych jest równa iloczynowi liczb zielonych.

Rozwiązanie 7. Jeśli n jest nieparzyste, tzn. $n = 2k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}, k \geq 2$, to na zielono malujemy liczby $1, k, 2k$, a na czerwono pozostałe. Suma czerwonych wynosi wtedy:

$$1 + 2 + \dots + (2k + 1) - (1 + k + 2k) = \frac{(2k + 1)(2k + 2)}{2} - 3k - 1 = 2k^2 + 2k + k + 1 - 3k - 1 = 2k^2.$$

Tyle samo wynosi iloczyn liczb zielonych. Po drodze skorzystaliśmy ze wzoru na sumę kolejnych n liczb naturalnych tzn. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

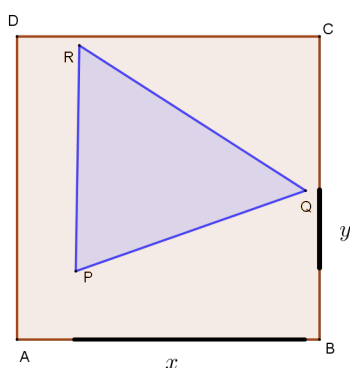
Jeśli natomiast n jest liczbą parzystą, czyli $n = 2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}, k \geq 3$, to na zielono malujemy liczby $1, k - 1, 2k$, a na czerwono pozostałe. Suma czerwonych wynosi wtedy:

$$1 + 2 + \dots + 2k - (1 + k - 1 + 2k) = \frac{2k(2k + 1)}{2} - 3k = 2k^2 + 2k - 3k = 2k^2 - k = 2k(k - 1). \text{ Tyle samo}$$

wynosi iloczyn liczb zielonych. A zatem takie kolorowanie istnieje.

Zadanie 8. W kwadracie o boku 1 zawarty jest trójkąt. Wykaż, że pole tego trójkąta jest nie większe niż sinus dowolnego jego kąta.

Rozwiązanie 8. Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



Niech x i y to będą długości rzutów prostokątnych boku PQ odpowiednio na boki AB oraz BC . Wtedy oczywiście $x, y \leq 1$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $|PQ|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2$. Stad $|PQ| \leq \sqrt{2}$. W analogiczny sposób pokazujemy $|QR| \leq \sqrt{2}$ oraz $|RP| \leq \sqrt{2}$.

Ze wzoru na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2}|PQ| \cdot |PR| \cdot \sin(\angle QPR) \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\angle QPR) = \sin(\angle QPR)$. A zatem $P \leq \sin(\angle QPR)$. Analogicznie postępujemy dla pozostałych dwóch kątów trójkąta.

Zadanie 9. Rozwiąż równanie: $x^{19} + x^{95} = 2x^{19+95}$.

Rozwiązanie 9. Mamy równanie $x^{19} + x^{95} = 2x^{114}$. Zróbmy proste podstawienie $a := x^{19}$. Wtedy uzyskujemy $a + a^5 = 2a^6$, co jest równoważne $2a^2 - a^5 - a = 0$. Widać, że jeśli a jest ujemne, to lewa strona jest dodatnia. Zatem nie ma rozwiązań ujemnych. Zajmiemy się przekształcaniem lewej strony. Wyciągamy a przed nawias: $a(2a^5 - a^4 - 1) = a(a^5 + a^5 - a^4 - 1) = a(a^5 - 1 + a^5 - a^4) = a[(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) + a^4(a - 1)] = a(a - 1)(2a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$.

Stąd $a = 0 \vee a = 1 \vee 2a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0$. Widzimy, że z ostatniego równania nie otrzymamy żadnego nieujemnego rozwiązania. Wracając do postawienia otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 0$.

Uwaga: My sprytnie pogrupowaliśmy, ponieważ wymagało to jedynie znajomości wzorów skróconego mnożenia. Wyrażenie z zadania można oczywiście równie dobrze rozłożyć inną metodą, np. zgadując pierwiastek i stosując schemat Hornera.

Zadanie 10. Rozważmy liczbę $2021!$. Obliczamy sumę jej cyfr, a następnie sumę cyfr otrzymanej liczby i tak dalej, aż pozostanie nam liczba jednocyfrowa. Jaką liczbę otrzymamy na końcu?

Rozwiązanie 10. Cecha podzielności przez 9 mówi nam, że liczba jest podzielna przez 9 dokładnie wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9. Liczba $2021!$ to iloczyn liczb od 1 do 2021, a więc jest podzielna przez 9 (bo w rozkładzie występuje 9). Tak więc w każdym kroku otrzymana suma jest również podzielna przez 9. Czyli ostatnia otrzymana liczba jest podzielna przez 9. Mogłaby to więc być liczba 0 lub 9. Ale nie ma możliwości otrzymać 0 jako sumy cyfr innej liczby, więc jest to 9.

Termin: listopad

Zadanie 11. Ile wynosi suma cyfr liczby $10^{2021} - 2021$?

Rozwiązanie 11. Liczba 10^{2021} składa się z jedynek oraz 2021 zer. Odejmując 2021 otrzymujemy liczbę postaci $999 \dots 997979$, gdzie na początku jest 2017 dziewiątek. Suma cyfr wynosi więc $2017 \cdot 9 + 7 + 9 + 7 + 9 = 18185$.

Zadanie 12. Na płaszczyźnie danych jest 25 różnych punktów. Przez D oznaczmy najdłuższą z odległości między dowolnymi dwoma punktami, a przez d najmniejszą z tych odległości. Uzasadnij, że $D > 2d$.

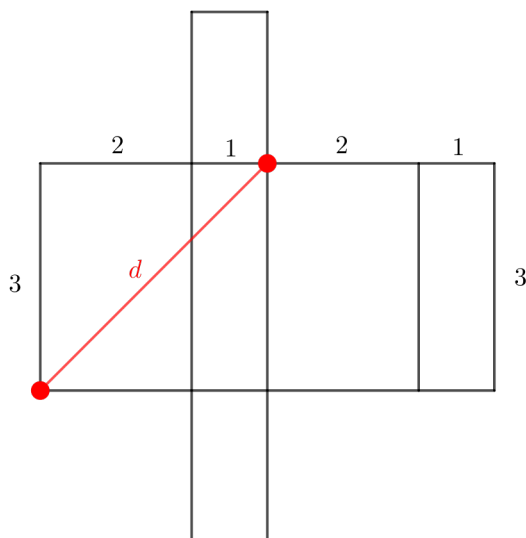
Rozwiązanie 12. Rozważmy dowolny z danych punktów. Narysujmy duży okrąg o środku w tym punkcie i promieniu $D + \frac{d}{2}$ oraz małe okręgi o promieniach $\frac{d}{2}$ i środkach w każdym z 25 punktów. Ponieważ D to największa z odległości między dwoma dowolnymi punktami, to duży okrąg zawiera w sobie wszystkie małe okręgi. Ponadto małe okręgi mają ze sobą parami co najwyżej jeden punkt wspólny ze względu na określenie d . Stąd wniosek, że pole dużego koła jest większe od sumy pól małych kół, czyli

$$\pi \left(D + \frac{d}{2} \right)^2 > 25\pi \left(\frac{d}{2} \right)^2.$$

Po podzieleniu przez π i spierwiastkowaniu otrzymujemy $D + \frac{d}{2} > \frac{5d}{2}$, skąd $D > 2d$.

Zadanie 13. Prostopadłościan ma krawędzie długości 1, 2, 3. Wyznacz najkrótszą drogę łączącą dwa jego przeciwległe wierzchołki, która biegnie po jego powierzchni.

Rozwiązanie 13. Rozłóżmy prostopadłościan na siatkę względem krawędzi długości 3. Otrzymamy następujący rysunek.

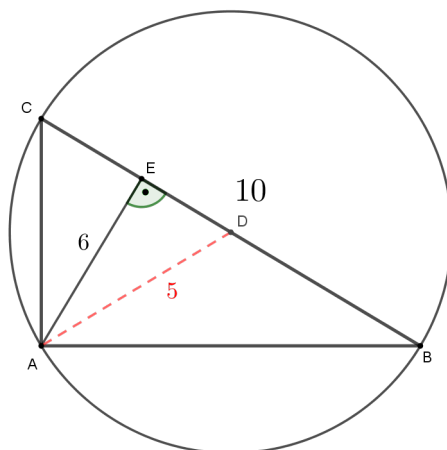


Najkrótszą drogę między przeciwległymi wierzchołkami wyznacza przekątna prostokąta. Jest ona równa $\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$. Podobnie rozkładamy siatki względem krawędzi długości 2 oraz 1. Otrzymujemy wtedy przekątne długości $\sqrt{20}$ oraz $\sqrt{26}$. Najkrótszą z nich jest $\sqrt{18}$, więc to jest najkrótsza droga między szukanymi wierzchołkami.

Analogiczne rozumowanie na dowolnych liczbach a, b, c daje nam ogólny wzór na długość najkrótszej drogi: $d_{min} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}$, gdy c jest najdłuższą krawędzią.

Zadanie 14. Rozważmy trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej 10 i wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego równej 6. Ile wynosi pole takiego trójkąta?

Rozwiązanie 14. Jeśli opisałibyśmy na tym trójkącie okrąg, to jego środek leżałby na środku przeciwprostokątnej. Zatem promień okręgu wynosiłby 5. Odcinek między środkiem okręgu a wierzchołkiem kąta prostego miałby więc długość 5. Najkrótszym odcinkiem łączącym wierzchołek kąta prostego z przeciwprostokątną jest wysokość trójkąta, która wynosi 6. Otrzymujemy sprzeczność, bo odcinek ten ma długość większą niż odcinek AD , który wynosi 5. Taki trójkąt w ogóle więc nie istnieje.



Zadanie 15. Trójkąt równoboczny, kwadrat oraz sześciokąt foremny mają takie samo pole. Która z tych figur ma największy obwód?

Rozwiązanie 15. Oznaczmy wspólne pole przez P , bok trójkąta przez a , bok kwadratu przez b , a bok sześciokąta przez c . Pole trójkąta to $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, skąd $4P = a^2\sqrt{3}$. Po podzieleniu przez $\sqrt{3}$, usunięciu niewymierności z mianownika oraz spierwiastkowaniu mamy $a = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}\sqrt{P}$. Obwód trójkąta jest równy $6\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}\sqrt{P}$.

Pole kwadratu to $P = b^2$, skąd $b = \sqrt{P}$. Obwód kwadratu wynosi $4\sqrt{P}$.

Sześciokąt składa się z sześciu trójkątów równobocznych, więc jego pole jest równe $P = 6 \cdot \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$. Po skróceniu, podzieleniu przez $\sqrt{3}$, usunięciu niewymierności i spierwiastkowaniu mamy $c = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}\sqrt{P}$.

Obwód sześciokąta jest równy $2\sqrt{2\sqrt{3}}\sqrt{P}$.

Wystarczy zatem porównać liczby:

$$6\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}, \quad 4, \quad 2\sqrt{2\sqrt{3}}.$$

Po obliczeniu przybliżeń pierwsza z nich jest największa, a zatem największy obwód ma trójkąt.

Termin: grudzień

Zadanie 16. Na okręgu leży jeden punkt czerwony oraz 2021 niebieskich. Czy więcej jest wielokątów o wyłącznie niebieskich wierzchołkach, czy tych, które mają jeden wierzchołek czerwony, a resztę niebieskie?

Zadanie 17. Kwadrat o boku a podzielono liniami równoległymi do jego boków na dokładnie n^2 identycznych kwadratów, każdy o boku $\frac{a}{n}$. W każdy z tych kwadratów wpisujemy koło. Oblicz pole tej części kwadratu, które nie jest pokryte kołami. Co można o tym polu powiedzieć?

Zadanie 18. Liczbę naturalną nazywamy *wzrastającą*, gdy jej cyfry tworzą ciąg rosnący. Na przykład liczbami wzrastającymi są: 15, 369, 34579. Liczby jednocyfrowe również są wzrastające. Ile jest wszystkich liczb wzrastających?

Zadanie 19. Pewien matematyk w pewnym krakowskim liceum wymarzył sobie, aby uczniowie w jego klasie usiedli w ławkach w porządku alfabetycznym. Uczniowie jednak tego nie wiedzieli i po wejściu do sali wybrali miejsca na chybił trafił. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna osoba usiądzie na niewłaściwym miejscu? Zakładamy, że w klasie jest tyle miejsc co uczniów oraz że każdy uczeń mógł wybrać każde miejsce z takim samym prawdopodobieństwem.

Zadanie 20. Wielokrotnie spotykamy się na lekcjach z trójkątem egipskim, który jest trójkątem prostokątnym i ma boki długości 3, 4, 5. Jakiej miary są jego kąty?

Piotr Bury