Zadania dodatkowe

Termin: wrzesień

Zadanie 1. Rozwiąż podane równanie: $4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}$.
Wskazówka: można użyć sprytnego podstawienia... trygonometrycznego.

Zadanie 2. Pewna funkcja kwadratowa ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2, a jej najmniejsza wartość jest równa sumie współczynników. Oblicz sumę $x_1 + x_2$.

Zadanie 3. Rozważmy szachownicę o wymiarach 2025×2025. W każde jej pole wpisujemy dodatnią liczbę naturalną. Następnie obliczamy kolejno sumy liczb znajdujących się w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie. Rozstrzygnij, czy obliczone 4050 sum może być kolejnymi liczbami naturalnymi.

Zadanie 4. Do pewnego turnieju przystąpiło 32 zespoły, wśród nich drużyny A i B. W turnieju drużyny łączone są w pary, rozgrywają mecz i przegrany odpada. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drużyny A i B zagrają ze sobą?

Zadanie 5. Rozważmy poniższy algorytm:

I. Wybieramy liczbę trzycyfrową, która ma różne cyfry setek i jedności.
II. Zapisujemy liczbę trzycyfrową, która powstaje przez zamianę miejscami cyfr setek i jedności w liczbie z kroku I.
III. Od większej z liczb odejmujemy mniejszą.
IV. Rozważamy liczbę postaci $\left\lfloor \frac{\pi^2}{4} \cdot \left\lceil \frac{1}{2} t \right\rceil \right\rfloor$, gdzie t jest liczbą z kroku III.
V. Do liczby z kroku IV dodajemy liczbę, która powstaje przez zamianę miejscami cyfry setek i jedności w liczbie z kroku III.

Udowodnić, że otrzymana liczba jest większa od różnicy iloczynu cyfr oraz sumy cyfr liczby wyjściowej.

Uwaga: Gdy w pewnym momencie otrzymamy liczbę dwucyfrową to traktujemy ją jako trzycyfrową dopisując na początku 0.

Termin: październik

Zadanie 6. Ile jest liczb naturalnych większych od 1000, w których wszystkie cyfry są większe od 1 oraz iloraz pierwszej i ostatniej cyfry jest równy sumie pozostałych cyfr?

Zadanie 7. Wyznacz wszystkie niepuste podzbiory zbioru liczb rzeczywistych dodatnich takie, że dla każdej liczby x należącej do tego podzbioru, potęga liczby x o dowolnym wykładniku dodatnim również należy do tego podzbioru.

Zadanie 8. Rozważmy wycinek koła o promieniu R, w który wpisujemy mniejszy okrąg o promieniu r. Cięciwa, która łączy końce promieni stycznych do mniejszego okręgu ma długość $2x$. Wykaż, że zachodzi wzór $\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{1}{x}$.

Zadanie 9. Wprowadźmy nowe pojęcie. Niech dany będzie zbiór X, którego elementami są zbiory. **Selektorem** zbioru X nazywamy taki zbiór składający się z pewnych elementów zbiorów należących do zbioru X, który ma z każdym z tych zbiorów dokładnie jeden element wspólny. Wyznasz selektory następujących zbiorów: $A = \varnothing, B = \{\{1, 10\}, \{100, 1000\}\}, C = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}, D = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. Co można powiedzieć o selektorze zbioru X, gdy należy do niego zbiór pusty?

Zadanie 10. Wyznacz wszystkie trójki liczb naturalnych dodatnich a, b, c takie, że $(2a + b)(2b + a) = 133\ldots36$, gdzie po prawej stronie jest dokładnie c trójek pomiędzy jedynką i szóstką.
Wskazówka: Spróbuj znaleźć najpierw jakąkolwiek taką trójkę liczb.

Termin: listopad

Zadanie 11. Zapisz następujące wyrażenia algebraiczne:

a) kwadrat sumy odwrotności liczb x i y
b) kwadrat odwrotności sumy liczb x i y
c) sumę odwrotności kwadratów liczb x i y
d) sumę kwadratów odwrotności liczb x i y
e) odwrotność kwadratu sumy liczb x i y
f) odwrotność sumy kwadratów liczb x i y

Zadanie 12. Prawdziwa jest następująca równość:

$$\frac{25^3 + 12^3}{25^3 + 13^3} = \frac{25 + 12}{25 + 13}.$$

Odkryj zasadę, według której została ona utworzona, która to zasada uzasadni jej prawdziwość. Następnie mając już tę regułę podaj inny analogiczny przykład.

Zadanie 13. Rozwiąż równanie $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_6 x = \log_2 x \cdot \log_4 x + \log_2 x \cdot \log_6 x + \log_4 x \cdot \log_6 x$.

Zadanie 14. Starożytni Babilończycy znali sprytną metodę mnożenia dwóch liczb. Najpierw liczyli ich sumę oraz różnicę. W kolejnym kroku brali kwadraty otrzymanych liczb i je odejmowali. Wynik dzieli przez 4. Wykonaj obliczenia dla liczb 43 oraz 57. Uzasadnij, dlaczego ta metoda zawsze działa.

Zadanie 15. Relacja należenia $\in$ nie jest przechodnia tzn. nie zawsze prawdą jest „jeśli $A \in B$ oraz $B \in C$, to $A \in C$”. Podaj odpowiedni kontrprzykład.

Termin: grudzień

Zadanie 16. Dana jest liczba 2025^{2025}. Wykaż, że można ją pomnożyć przez taką liczbą naturalną, aby wynik zawierał wszystkie 10 cyfr w kolejności 1234567890.

Zadanie 17. Dany jest kwadrat o boku 2. Umieszczamy w nim koło styczne do dwóch boków i przekątnej. Oblicz promień tego koła.

Zadanie 18. Równość z twierdzenia Pitagorasa tj. $a^2 + b^2 = c^2$ jest spełniona np. przez trójkę $(3, 4, 5)$ oraz przez każdą jej wielokrotność tj. $(3k, 4k, 5k)$, ale w oczywisty sposób też przez wiele innych np. $(5, 12, 13)$. Udowodnić, że jeśli dołożymy dodatkowy warunek: $b - a = c - b$, to trójki $(3k, 4k, 5k)$ są jedynymi naturalnymi dodatnimi rozwiązaniami.

Zadanie 19. Niech $A, B \subset \Omega -$ zdarzenia, $P(B \cup A) = 0,65, P(A \setminus B) = 0,3$ oraz $P(A \cap B), P(A), P(B)$ są odpowiednio pierwszym, trzecim i czwartym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz $P(A' \cup B)$.

Zadanie 20. Oblicz sumę $\sum_{n=1}^{2025} n \cdot n!$, tzn. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + 2025 \cdot 2025!$.

Wskazówka:

Termin: styczeń

Zadanie 21. Niech $n \in \mathbb{N}_+$. Wykaż, że $4^n > \binom{2n}{n}$.

Zadanie 22. Dwóch uczniów II LO postanowiło zagrać w Sylwestra w następującą grę. Pierwsza z nich zaznacza na płaszczyźnie dowolny punkt, a następnie druga z nich zaznacza innym kolorem 2026 innych punktów. W kolejnym kroku pierwsza osoba zaznacza znów tylko jeden wolny punkt, po czym druga osoba zaznacza następne 2026 punktów. Pierwsza osoba wygrywa, jeśli uda jej się zaznaczyć trzy punkty tworzące trójkąt równoboczny. Czy ma ona strategię wygrywającą, czy osoba druga zawsze może grać tak, by osoba pierwsza nie wygrała?

Zadanie 23. Liczba 9999 ma zaskakującą własność. Suma jej cyfr to oczywiście 36, ale jeśli pomnożymy ją przez liczbę $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 10000\}$, to otrzymany wynik nadal będzie miał sumę cyfr równą 36 (Sprawdź dla kilka przykładowych liczb, np. roku urodzenia, roku, w którym czytasz to zadanie, Chrztu Polski, czy przez liczbę minut w ciągu doby). Co więcej suma cyfr będzie nadal 36, jeśli rozważmy następne wielokrotności: od $9999 \cdot 10002$, do $9999 \cdot 20000$. Wyjątkiem jest liczba 10 001. Wykaż powyższe obserwacje. Sprawdź co się dzieje dla liczb $9999 \cdot 10001$, $9999 \cdot 20001$ oraz $9999 \cdot 20002$.

Zadanie 24. Niecha dane będą liczby $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$. Wykaż, że jeśli $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, to ułamek $\frac{a+c}{b+d}$ jest pomiędzy ułamkami $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{c}{d}$.

Zadanie 25. Dane są liczby $x, y, z, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ spełniające warunki:

$$x + y + z = m \quad \wedge \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{m}.$$

Wykaż, że chociaż jedna z liczb x, y, z jest równa m.

Termin: luty

Zadanie 26. Wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 2026 dla dziesięciu różnych liczb całkowitych. Czy wielomian ten ma pierwiastek całkowity?

Zadanie 27. Rozważmy wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$ w przedziale $[1, +\infty)$ (jest to fragment hiperboli). Następnie obracajmy go wokół osi Ox. W ten sposób powstała pewnego rodzaju butelka/róg. Czy da się ją pomalować na zewnątrz w skończonym czasie (czyli, czy pole powierzchni jest skończone) oraz czy da się ją wypełnić w skończonym czasie (czyli, czy jej objętość jest skończona)?

Zadanie 28. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{x+1}} = 2 \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}} + \sqrt{\dfrac{y+2}{x+1}} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Zadanie 29. Zaopatrzenie do schroniska w górach dowozi się konno z miejscowości A przez przełęcz B. Konie pod górę idą z prędkością $3,5$ km/h, a w dół z prędkością $4\frac{2}{3}$ km/h. W drodze powrotnej prędkości są identyczne, ponieważ konie zabierają ze sobą wszelkiego rodzaju śmieci. Droga ze schroniska do miejscowości A zajmuje o 5 minut więcej niż z A do schroniska. Stosunek odległości z A do B do odległości z B do schroniska wynosi $4 : 3$. Oblicz odległość z miasta A do schroniska.

Zadanie 30. Przy okrągłym stole siedzi 15 pracowników. Każdy z nich ma dwóch wrogów, którzy siedzą bezpośrednio po lewej i prawej. Szef chce wybrać zespół złożony siedmiu osób, w którym nie ma wrogów. Na ile sposobów może to zrobić?

Rozwiązanie 1. Dziedziną równania jest zbiór $D = [-1, 1]$. Podniesienie do kwadratu prowadzi do równania wielomianowego stopnia szóstego, więc zastosujemy inną metodę. Zróbmy nietypowe podstawienie $\cos\alpha = x$ dla $\alpha \in [0, \pi]$. Otrzymujemy wtedy:

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

Po lewej stronie dostrzegamy wzór na $\cos 3\alpha$, a po prawej jedynkę trygonometryczną pod pierwiastkiem. Zatem:

$$\cos 3\alpha = |\sin\alpha|.$$

W rozpatrywanym przedziale sinus jest nieujemny więc:

$$\cos 3\alpha = \sin\alpha.$$

Dalej to standardowe rozwiązanie równania trygonometrycznego:

$$\cos 3\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\begin{aligned} 3\alpha &= \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad 3\alpha = -\frac{\pi}{2} + \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 4\alpha &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \alpha &= \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad \vee \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Uwzględniając przedział $[0, \pi]$ otrzymujemy $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

Wracając do podstawienia:

$$x = \cos\frac{\pi}{8} \quad \vee \quad x = \cos\frac{5\pi}{8} \quad \vee \quad x = \cos\frac{3\pi}{4}.$$

Wyniki te możemy uprościć stosując wzór na cosinus podwojonego kąta[1] i wzór redukcyjny otrzymując ostatecznie:

$$x \in \left\{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Rozwiązanie 2. Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$ oraz $a \neq 0$. Najmniejsza wartość jest przyjmowana w wierzchołku i wynosi $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$. Otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \frac{-\Delta}{4a} &= a + b + c \\ \frac{-b^2 + 4ac}{4a} &= a + b + c \\ \frac{-b^2}{4a} + c &= a + b + c \\ \frac{-b^2}{4a} &= a + b \quad | \cdot 4a \\ -b^2 &= 4a^2 + 4ab \\ 4a^2 + 4ab + b^2 &= 0 \\ (2a + b)^2 &= 0 \\ 2a + b &= 0 \\ 2a &= -b \end{aligned}$$

Zatem ze wzorów Viete'a $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{2a}{a} = 2$.

Rozwiązanie 3. Zliczone 4050 sum dodane do siebie tworzy liczbę parzystą, ponieważ każde pole szachownicy zostało zliczone dwukrotnie – raz jako kolumna a raz jako wiersz (czyli ta suma to dwukrotność sumy wszystkich liczb na tablicy). Jednak wśród 4050 kolejnych liczb naturalnych dokładnie połowa (czyli 2025) liczb jest nieparzysta, a suma nieparzystej liczby liczb nieparzystych jest nieparzysta. Dodanie pozostałych liczb parzystych zachowuje nieparzystą sumę. Ta sprzeczność oznacza, że obliczone 4050 sum nie może być kolejnymi liczbami naturalnymi.

[1] A dokładniej we wzorze $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ podstawiamy z jedynki trygonometrycznej za sinusa, a następnie wyznaczamy $\cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}}$ i podstawiamy za α odpowiednio $\cos\frac{\pi}{8}$ oraz $\cos\frac{5\pi}{8}$.

Rozwiązanie 4. Aby wyłonić zwycięzcę należy rozegrać 31 meczów. Wynika to z faktu, że w każdym meczu odpada jedna drużyna, więc zaczynając od 32 drużyn, jedna pozostanie po dokładnie 31 meczach. Wszystkich możliwych różnych meczy (sparowań) jest $\binom{32}{2} = \frac{32 \cdot 31}{2} = 512$, bo wybieramy dwa zespoły do gry z puli 32 drużyn. Aby drużyny się spotkały, musi to nastąpić w jednym z 31 meczów, a więc szukane prawdopodobieństwo to $\dfrac{31}{16 \cdot 31} = \dfrac{1}{16} = 6,25\%$.

Rozwiązanie 5. Zauważamy, że jedyna sytuacja wspomniana w UWADZE zachodzi dla liczby 99. (gdy cyfra setek i jedności różni się o więcej niż 1 to różnica jest większa niż 100. Gdy cyfra setek i jedności różni się o 1 to różnica wynosi dokładnie 99, bo cyfra dziesiątek pozostaje bez zmian).
Niech naszą liczbą będzie $100x + 10y + z$. Wtedy liczbą po zamianie cyfr będzie $100z + 10y + x$. Bez straty ogólności $x > z$. Odejmując mniejszą od większej otrzymamy $99x - 99z = 99(x - z) = 100(x - z) - (x - z) =$:A. Zauważmy, że powstała liczba ma cyfrę dziesiątek równą 9. Zatem liczba czytana od tyłu też. Cyfrą setek odwróconej liczby jest $10 - (x - z)$ (bo jest to cyfra jedności liczby A). Cyfrą jedności odwróconej liczby jest cyfra $(x - z) - 1$ (odejmujemy jedynkę, bo liczba A jest postaci $100(x - z)-$B, gdzie B:= $(x - z) \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$. Zatem liczba setek zmniejsza się o 1).
Zauważmy, że $\left\lfloor \frac{\pi^2}{4} \cdot \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil \right\rfloor$ jest większe od t bo:
Gdy otrzymamy t parzyste to funkcja sufit nic nie zmienia, a dla nieparzystej dostajemy liczbę jeszcze większą. Liczba $\frac{\pi^2}{8}$ wynosi w przybliżeniu $1,2337 > 1$. Najmniejszą różnicę między t, a $\frac{\pi^2}{4} \cdot \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil$ otrzymujemy dla najmniejszej możliwej wartości t czyli 99 (bo różnica ta wynosi ok. $1,2337t - t = 0,2337t$). Dla 99 wynosi więc ona co najmniej $0,2337 \cdot 99 = 23,1363$. Biorąc więc ostatecznie podłogę, otrzymujemy i tak liczbę co najmniej o 23 większą od liczby z kroku III.
Zauważmy też, że iloczyn cyfr wyjściowej liczby jest mniejszy od $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$. Gdy od niego odejmiemy sumę cyfr liczby wyjściowej (minimalnie 1 od liczby 100) to otrzymamy liczbę na pewno mniejszą od 648.
W ostatnim kroku dodajemy do siebie dwie liczby. Jeśli pokażemy, że mniejsza suma jest większa od 647 to tym bardziej szukana suma. Rozważmy zatem liczbę z kroku III zamiast liczby z kroku IV.
Otrzymujemy zatem: $100(x-z)-(x-z)+100(10-(x-z))+90+(x-z)-1 = 100(x-z)-(x-z)+1000-100(x-z)+89+(x-z) = 1089$.
Otrzymana suma jest mniejsza od potrzebnej nam sumy, a i tak jest większa od maksymalnej wartości różnicy iloczynu cyfr oraz sumy cyfr liczby wyjściowej.

Ciekawostka: Zadanie to wymyśliłem specjalnie na potrzeby zajęć z Dydaktyki Matematyki podczas moich studiów na WMiI UJ. Wtedy każdy uczestnik zajęć musiał dać do rozwiązania każdemu innemu uczestnikowi dwa ciekawe według siebie zadania, których rozwiązania później oceniał. Poza tymi zajęciami zadanie to nie było nigdzie pokazywane, ani publikowane.

Rozwiązanie 6. Rozważane liczby są minimum czterocyfrowe. To oznacza, że z wyjątkiem pierwszej i ostatniej cyfry są jeszcze co najmniej dwie inne. Ich suma jest większa bądź równa 4 (bo każda cyfra > 1). Zatem jeśli pierwszą cyfrę oznaczymy x a ostatnią y, to $\frac{x}{y} \geqslant 4$. Rozważmy przypadki:

- jeśli $y = 0$ lub $y = 1$, to sprzeczność, ponieważ cyfry mają być > 1,
- jeśli $y = 2$, to $x = 8$ oraz suma pozostałych (co najmniej dwóch) cyfr wynosi 4. Muszą to być więc cyfry 2 i 2. Otrzymujemy więc liczbę 8222
- jeśli $y \geqslant 3$, to $x \geqslant 12$. Sprzeczność, bo $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Zatem jest jedna liczba spełniającą warunki zadania i jest nią 8222.

Rozwiązanie 7. Jest 7 takich zbiorów: $Z_1 = \{1\}$, $Z_2 = (0, 1)$, $Z_3 = (0, 1]$, $Z_4 = (1, +\infty)$, $Z_5 = [1, +\infty)$, $Z_6 = \mathbb{R}_+$, $Z_7 = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Rozwiązanie 8. Trójkąty ODE oraz OCB są podobne z cechy KKK (kąt prosty oraz α). Ponadto $|OD| = R - r$. Zatem z podobieństwa:

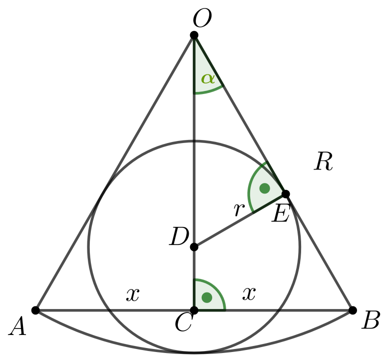
$$\frac{r}{R - r} = \frac{x}{R},$$

skąd

$$rR = Rx - rx.$$

Dzieląc przez rRx otrzymujemy

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}.$$



Rozwiązanie 9. Selektorem zbioru A jest zbiór pusty $\varnothing$.
Zbiór B ma następujące selektory: $\{1, 100\}, \{1, 1000\}, \{10, 100\}, \{10, 1000\}$
Zbiór C nie posiada żadnego selektora. Zbiory jednoelementowe złożone odpowiednio z 1,2 lub 3 nie spełniają warunku, ponieważ wtedy selektor nie miałby elementu wspólnego z każdym ze zbiorów z C. Jeśli dołożymy do jednego elementu jakikolwiek drugi, to wtedy z pewnym zbiorem z C będą dwa elementy wspólne.
Selektorem D jest $\{1, 2, 3\}$.
Jeśli do zbioru X należy zbiór pusty, to wtedy X nie posiada selektora, ponieważ zbiór pusty nie ma żadnych elementów, a więc nie będzie spełniony warunek, że wybraliśmy jeden element z każdego zbioru.

Rozwiązanie 10. Ponieważ $(2a + b) + (2b + a) = 3a + 3b = 3(a + b)$, więc albo obie te liczby są podzielne przez 3 albo jedna daje resztę 1, a druga resztę 2 z dzielenia przez 3. W pierwszym przypadku ich iloczyn, czyli $(2a + b) \cdot (2b + a)$ jest podzielny przez 3, a w drugim iloczyn daje resztę $1 \cdot 2 = 2$ z dzielenia przez 3.
Liczba $13 \dots 36$ ma sumę cyfr równą $3c + 6 + 1 = 3(c + 2) + 1$, a więc z dzielenia przez 3 zostaje reszta 1. Otrzymana sprzeczność oznacza, że nie ma takich trójek a, b, c.

Rozwiązanie 11.

a) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2$

b) $\left(\frac{1}{x+y}\right)^2$

c) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$

d) $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2$

e) $\frac{1}{(x+y)^2}$

f) $\frac{1}{x^2+y^2}$

Rozwiązanie 12.
Reguła 1:
Po lewej stronie mamy sumy sześcianów, a po prawej fragmenty tych wzorów.
$L = \dfrac{a^3 + b^3}{a^3 + (b+1)^3} = \dfrac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{(a+b+1)(a^2 - a(b+1) + (b+1)^2)}$.
$P = \dfrac{a+b}{a+b+1}$,
a więc chcemy, aby $\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^2 - a(b+1) + (b+1)^2} = 1$. Otrzymujemy kolejno:
$a^2 - ab + b^2 = a^2 - ab - a + b^2 + 2b + 1$, skąd $a = 2b + 1$.
Wystarczy zatem wybrać takie dwie liczby, że jedna jest dwukrotnością drugiej powiększoną o 1. W powyższym przykładzie użyto $b = 12$, więc $a = 25$.
Przykład: Weźmy $b = 2$. Wtedy:

$$\frac{5^3 + 2^3}{5^3 + 3^3} = \frac{(5+2)(25 - 10 + 4)}{(5+3)(25 - 15 + 9)} = \frac{(5+2) \cdot 19}{(5+3) \cdot 19} = \frac{5+2}{5+3}.$$

Reguła 2 (ogólniejsza):
Po lewej stronie mamy sumy sześcianów, a po prawej fragmenty tych wzorów.

$L = \dfrac{a^3+b^3}{a^3+c^3} = \dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+c)(a^2-ac+c^2)}$.
$P = \dfrac{a+b}{a+c}$,
a więc chcemy, aby $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2-ac+c^2} = 1$. Otrzymujemy kolejno:
$a^2-ab+b^2 = a^2-ac+c^2$, skąd $b^2-c^2 = ab-ac$. Następnie $(b-c)(b+c) = a(b-c)$, a przy oczywistym[2] założeniu $b \neq c$ otrzymujemy $a = b+c$.
Wystarczy zatem wybrać dowolne dwie różne liczby b, c. W powyższym przykładzie użyto $b = 12, c = 13$, więc $a = 25$.
Przykład: Weźmy $b = 4, c = 2$. Wtedy:

$$\frac{6^3+4^3}{6^3+2^3} = \frac{(6+4)(36-24+16)}{(6+2)(36-12+4)} = \frac{(6+4)\cdot 28}{(6+2)\cdot 28} = \frac{6+4}{6+2}.$$

Rozwiązanie 13. $D = (0, +\infty)$
Sposób I:

- jeśli $x = 1$, to $L = P = 0$, więc otrzymujemy tożsamość. Stąd $x = 1$ jest rozwiązaniem.
- jeśli $x \neq 1$, to dzielimy obustronnie przez $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_6 x$ i otrzymujemy

$$1 = \frac{1}{\log_6 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_2 x}.$$

$$1 = \log_x 6 + \log_x 4 + \log_x 2$$

$$1 = \log_x (6 \cdot 4 \cdot 2)$$

$$1 = \log_x 48$$

$$x^1 = 48$$

$$x = 48$$

Zatem ostatecznie $x \in \{1, 48\}$.
Sposób II:
Zamieniamy logarytmy na takie o podstawie 2.

$$\log_2 x \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 6} = \log_2 x \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 x \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 6} x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 6}.$$

$$\frac{\log_2^3 x}{\log_2 4 \cdot \log_2 6} = \frac{\log_2^2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2^2 x}{\log_2 6} + \frac{\log_2^2 x}{\log_2 4 \cdot \log_2 6}.$$

$$\frac{\log_2^3 x}{2 \cdot \log_2 6} = \frac{\log_2^2 x}{2} + \frac{\log_2^2 x}{\log_2 6} + \frac{\log_2^2 x}{2 \cdot \log_2 6} \quad | \cdot 2\log_2 6$$

$$\log_2^3 x = \log_2^2 x \cdot \log_2 6 + 2\log_2^2 x + \log_2^2 x$$

Przenosząc wszystko na lewą stronę i wyciągając przed nawias $\log_2^2 x$ mamy:

$$\log_2^2 x \left[\log_2 x - \log_2 6 - 3\right]$$

$$\log_2^2 x = 0 \quad \vee \quad \log_2 x - \log_2 6 - 3 = 0$$

$$\log_2 x = 0 \quad \vee \quad \log_2 x - \log_2 6 - \log_2 8 = 0$$

$$x = 1 \quad \vee \quad \log_2 x = \log_2 6 + \log_2 8$$

$$x = 1 \quad \vee \quad \log_2 x = \log_2 48$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 48,$$

gdzie w ostatnim kroku korzystamy z różnowartościowości funkcji $x \mapsto \log_2 x$.
Ostatecznie $x \in \{1, 48\}$.

[2] Jeśli $b = c$, to licznik i mianownik są równe w obu ułamkach, więc obie strony wynoszą po prostu 1.

Rozwiązanie 14. Niech $a = 43$ oraz $b = 57$. Wtedy $a + b = 100, a - b = 14$. Kwadraty wynoszą odpowiednio $(a+b)^2 = 10000, (a-b)^2 = 196$, zaś różnica kwadratów: $10000 - 196 = 9804$. Dzieląc przez 4 otrzymujemy 2451, co jest iloczynem $43 \cdot 57 = 2451$.

Uzasadnienie jest następujące. Wyrażenie, które liczyli Babilończycy to: $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$. Rozpisując je otrzymujemy

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} = \frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{4} = \frac{4ab}{4} = ab.$$

W tamtych czasach algebra jeszcze (długo) nie istniała, więc Babilończycy nie mogli w taki sposób przekonać się o prawdziwości tej metody. Dla nich ważne było, że działała, więc ją stosowali.

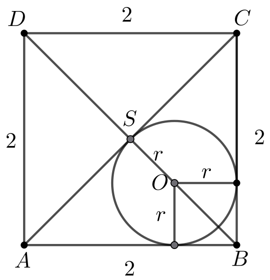
Rozwiązanie 15. Na przykład:

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{\{1, 2\}, 3\}, \quad C = \{\{\{1, 2\}, 3\}, 4\}.$$

W oczywisty sposób $A \in B, B \in C$, ale $A \notin C$.

Rozwiązanie 16. Rozważmy tak dużą potęgę liczby 10, aby $10^n > 2025^{2025}$, a następnie spójrzmy na liczby postaci $1234567890 \cdot 10^n + k$, gdzie $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2025^{2025}\}$. Każda z nich zaczyna się od cyfr 1234567890, więc jeden warunek jest spełniony. Ponadto jest to 2025^{2025} kolejnych liczb naturalnych, a więc wśród nich jest dokładnie jedna podzielna przez 2025^{2025}, czyli istnieje wielokrotność początkowej liczby spełniającą warunki zadania (choć nie wskazaliśmy jej dokładnie)[3].

Rozwiązanie 17. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku



Środek O znajduje się na przekątnej BD ponieważ leży on na dwusiecznej kąta ABC. Mamy $|AC| = |BC| = 2\sqrt{2}, |BS| = \sqrt{2}, |BO| = r\sqrt{2}$ Stąd $|BS| = r + r\sqrt{2} = r(1+\sqrt{2})$, a następnie $\sqrt{2} = r(1+\sqrt{2})$. Wyznaczając r:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot(1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{\sqrt{2}-2}{-1} = 2-\sqrt{2}.$$

A jeśli znamy wzór na promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, to od razu otrzymujemy

$$r = \frac{2+2-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}.$$

Rozwiązanie 18. Niech $b - a = c - b =: m$. (Zauważmy, że $m \geqslant 0$, ponieważ c jest największe). Wtedy $b = a + m$ oraz $c = b + m = a + 2m$. Równość z tw. Pitagorasa przybiera postać:

$$a^2 + (a+m)^2 = (a+2m)^2$$

$$a^2 + a^2 + 2am + m^2 = a^2 + 4am + 4m^2$$

$$a^2 - 2am - 3m^2 = 0$$

Jest to równanie zmiennej a z parametrem m.

$$\Delta = 4m^2 + 12m^2 = 16m^2,\ \sqrt{\Delta} = 4m,\ a_1 = \frac{2m-4m}{2} = -m,\ a_2 = \frac{2m+4m}{2} = 3m$$

Pierwszy nie daje trójki dodatniej, zaś drugi daje trójki postaci $(3m, 4m, 5m)$.

[3] Taki dowód nazywa się niekonstruktywnym.

Rozwiązanie 19. Skoro $P(A\cap B), P(A), P(B)$ są wyrazami ciągu, to są postaci $P(A\cap B)=a_1, P(A)=a_1+2r, P(B)=a_1+3r$.
Ze wzoru $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ otrzymujemy $0,65=a_1+2r+a_1+3r-a_1$, skąd po redukcji $0,65=a_1+5r$ $(\star)$.
Ponadto $P(B\setminus A)=P(B\setminus(A\cap B))=P(B)-P(A\cap B)$, gdzie ostatnia równość jest prawdziwa ponieważ $A\cap B\subset B$. Zatem $0,3=a_1+3r-a_1$, skąd $r=0,1$.
Podstawiając pod $(\star)$ otrzymujemy $0,65=a_1+5\cdot 0,1 \Rightarrow a_1=0,15$.
Mamy ostatecznie $P(A\cap B)=0,15, P(A)=0,35, P(B)=0,45$.
$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)=0,65+0,45-P(B\setminus(A\cap B))=1,1-(P(B)-P(A\cap B))=1,1-(0,45-0,15)=1,1-0,3=0,8.$

Rozwiązanie 20. Wskazówka to oczywiście nawiązanie do sumy teleskopowej.
Zauważmy, że dla dowolnego $k\in\mathbb{N}$ zachodzi $(k+1)!-k!=(k+1)\cdot k-k!=k!(k+1-1)=k!\cdot k$, a składniki w sumie są dokładnie takiej postaci. Zatem $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+2025\cdot 2025! = 2!-1!+3!-2!+4!-3!+\ldots+2026!-2025!$. Redukują się wszystkie składniki poza dwoma i zostaje $-1!+2026!=2026!-1$.

Rozwiązanie 21. I sposób (sprytny):
Skorzystamy ze wzoru dwumianowego Newtona:

$$4^n=2^{2n}=(1+1)^{2n}=\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}+\ldots+\binom{2n}{2n}>\binom{2n}{n},$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z faktu, że suma $2n+1$ składników jest większa od jednego z tych składników, o ile składników jest więcej niż 1 (a tak jest, bo $n>0$).

II sposób (typowy – indukcyjny):
Przedstawimy tylko szkic.
Krok I – trywialny, bo $L=4^1=4>2=\binom{2}{1}=2=P$.
Krok II – rozpisując prawą stronę tezy indukcyjnej mamy $\binom{2k+1}{k+1}=\dfrac{(2k)!\cdot(2k+1)}{(k+1)!\cdot k!}<\dfrac{(2k)!4}{k!\cdot k!}<4\cdot 4^k$ iotrzymujemy lewą stronę tezy indukcyjnej.

Rozwiązanie 22. Gracz pierwszy ma strategię wygrywającą, niezależnie od podstępowania gracza drugiego. (Rozwiązanie będzie w wolnej chwili)

Rozwiązanie 23. Sprawdźmy dla kilku liczb:

- dla 2026: $2026\cdot 9999=20257974$ i suma cyfr to 36,
- dla 966: $966\cdot 9999=9659034$ i suma cyfr to 36,
- dla liczby minut w dobie (1440): $1440\cdot 9999=14398560$ i suma cyfr to 36.

Prawdziwa jest następująca równość: $9999(n+1)=10000n+(9999-n)$.
Jeśli teraz rozważymy dowolną liczbę $n\in\{0,1,2,\ldots,9999\}$, która ma cyfry kolejno[4] a,b,c,d i popatrzymy na prawą stronę powyższej równości, to otrzymamy z pierwszego składnika liczbę postaci $abcd0000$, a z drugiego liczbę o cyfrach $9-a, 9-b, 9-c, 9-d$. Suma cyfra całej liczby (czyli też tej po lewej stronie tzn. postaci $9999\cdot(n+1)$) wynosi $a+b+c+d+(9-a)+(9-b)+(9-c)+(9-d)=36$.

- dla 10 001: $10001\cdot 9999=99999999$ i suma cyfr to 72,
- dla 20 001: $20001\cdot 9999=199989999$ i suma cyfr to 72,
- dla 20 002: $20002\cdot 9999=199999998$ i suma cyfr to 72.

Do wykazania drugiej części zauważmy, że każda wielokrotność 9999 z zakresu $k\in\{10002,10003,10004,\ldots,20000\}$ może zostać zapisana w postaci

$$9999k=9999(10001+m)=99999999+9999m,$$

gdzie m jest liczbą z zakresu $\{1,2,3,\ldots,9999\}$.
Z poprzedniej części wiemy, że suma cyfra liczby $9999m$ wynosi 36. Rozważmy teraz liczbę 100000000, czyli o 1 większą niż 99999999. Składa się ona z jedynki i samych zera, a więc suma cyfr wynosi 1. dodając liczbę $9999m$ o cyfrach kolejno a,b,c,d,e,f,g,h otrzymujemy liczbę postaci $1abcdefgh$, której suma cyfr wynosi 37. Odejmując „pożyczone” 1 otrzymujemy liczbę o sumie cyfr 36. Jedynym wyjątkiem, gdy po dodaniu liczby $9999m$ do 99999999 nie zwiększy się nam liczba cyfr (czyli nie przekroczymy progu 100000000) jest sytuacja, gdy $9999m$ składa się z samych zero (czyli jest równa 0), a to ma miejsce, gdy

[4] Jeśli są to liczby mniej niż czterocyfrowe, to przyjmujemy odpowiednio, że początkowe cyfry wynoszą 0.

$m = 0$, czyi gdy mamy następującą wielokrotność: $9999 \cdot 10001$, którą to wyrzuciliśmy z początkowych rozważań, bo suma cyfr wynosi wtedy 72.

Rozwiązanie 24. Nierówność $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ mnożymy przez mianowniki i dodajemy obustronnie ab:

$$ad + ab < bc + ab$$

i wyciągamy przed nawias wspólne czynniki po obu stronach:

$$a(d + b) < b(c + a)$$

a następnie dzielimy nierówność obustronnie przez $b \cdot (b + d) > 0$ otrzymując

$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d}.$$

Drugą nierówność wykazuje się analogicznie: mnożymy pierwszą nierówność przez mianowniki i dodajemy do obu stron wyrażenie cd:

$$ad + cd < bc + cd$$

i wyciągamy przed nawias wspólne czynniki otrzymując:

$$d(a + c) < c(b + d)$$

a następnie dzielimy nierówność obustronnie przez $d \cdot (b + d) > 0$ i mamy

$$\frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}.$$

Rozwiązanie 25. Rozważmy wielomian[5] $W(t) = (t - x)(t - y)(t - z)$, tzn. taki, którego pierwiastkami są liczby x, y, z. Jeśli pokażę, że $W(m) = 0$, to będzie to równoważne tezie (bo wtedy m będzie pierwiastkiem, a nasz wielomian ma tylko 3 pierwiastki: x, y, z, a więc m będzie równe którejś z tych trzech liczb).

Wymnażając wielomian (każdy nawias przez każdy) otrzymujemy

$$W(t) = t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + yz + xz)t - xyz.$$

Przekształcając warunek $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{m}$ przez sprowadzenie do wspólnego mianownika przyjmuje on postać $\dfrac{xy + yz + xz}{xyz} = \dfrac{1}{m}$, skąd $xy+yz+xz = \dfrac{xyz}{m}$. Podstawiając to wyrażenie (oraz warunek pierwszy) do postaci wielomianu $W(t)$ otrzymujemy:

$$W(t) = t^3 - mt^2 + \frac{xyz}{m}t - xyz.$$

Ale podstawiając m za t mamy $W(m) = m^3 - m^3 + \dfrac{xyz}{m} \cdot m - xyz = 0$, a więc m jest pierwiastkiem, czyli jest równe jednej z liczb x, y, z.

$\mathbb{P}$iotr $\mathbb{B}$ury

[5]Za zmienną przyjąłem t, a nie x, ponieważ x w tym zadaniu oznacz a co innego, więc prowadziłoby to do kolizji oznaczeń.