Stereometria

1. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól obu podstaw. Wykaż, że tangens kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany jest równy $\cancel{3}$. $\frac{3}{2}$

2. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 12, a jego wysokość jest równa 24. Wykaż, że pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną zawierającą krawędź boczną i krótszą podstawę jest równe $36\sqrt{51}$.

3. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 10cm i podstawie o długości 16cm. Wszystkie krawędzie boczne są równe 10cm. Wykaż, że objętość tego ostrosłupa jest równa $V = \frac{80\sqrt{11}}{3}\,\mathrm{cm}^2$.

4. Przekątna prostopadłościanu tworzy ze ścianami o wspólnym wierzchołku kąty α, β, γ. Wykaż, że $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

5. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym o krawędzi długości a poprowadzono płaszczyznę przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej. Kąt nachylenia płaszczyzny jest równy α, $\alpha \in (0°, 90°)$. Udowodnij, że objętość tego graniastosłupa jest równa $V = \frac{3a^3\mathrm{tg}\alpha}{4}$.

6. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól obu podstaw. Uzasadnij, że cosinus kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy jest równy $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu jest równa 120 . Uzasadnij, że pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest największe, gdy prostopadłościan jest sześcianem o krawędzi długości 10.

8. Podstawa ABC i ściana boczna BCD trójkątnego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi o boku a. Krawędź DA jest nachylona do podstawy ostrosłupa pod kątem α. Wykaż, że objętość tego ostrosłupa wynosi $V = \frac{a^3\mathrm{tg}\alpha}{12}$.

9. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, w którym r jest długością promienia okręgu wpisanego oraz R jest długością promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Wszystkie ściany boczne nachylone są do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem α. Wykaż, że objętość tego ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3}r^2\mathrm{tg}\alpha(2R + r)$.