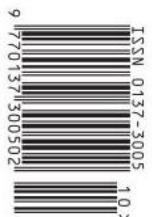


UNIWERSYTET
WARSZAWSKI



Nakład: 2800 egz.



lrb6510^,ls 7=3,14592,

SPIS TREŚCI NUMERU 10 (593)

Kody polaryzujące <i>Artur Jeż</i>	str. 1
Twierdzenie Ramanujana–Nagella i trójkąt Pascala <i>Bartłomiej Pawlik, Witold Tomaszewski</i>	str. 4
 Zadania	str. 7
O metamateriałach, czyli czy możemy zmierzyć „ujemną” przenikalność magnetyczną? <i>Paweł Perkowski</i>	str. 8
 Sierpień o naukach różnych <i>Magdalena Fikus</i>	str. 11
Uran, Neptun i Wulkan – trzy planety, z których jedna nigdy nie istniała, cz. II <i>Mateusz Dembny, Grzegorz Łukaszewicz, Igor Palusiński</i>	str. 12
Dyskretny wzór Itô <i>Michał Miśkiewicz</i>	str. 16
Recenzja książki <i>Czy Wszechświat myśli? I inne ważne pytania nauki</i>	str. 18
Prosto z nieba: Kontrolowane zderzenia w kosmosie	str. 19
Niebo w październiku	str. 20
Wielki powrót muzyki sfer <i>Marcin Braun</i>	str. 21
Klub 44	str. 22
Aktualności	
Migawki z nieradioaktywnych podróży	str. 24
 Wektory – część 2 <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

W następnym
numerze:

*The Happy
End Problem*



Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, prof. UWr, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, prof. UWr., dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje collegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nacz., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nacz., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sek. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem LATEX wykonała Redakcja.

Druk: Poligrafia NOT poligrafianot.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpres.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Kody polaryzujące

Artur JEŻ*

* Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Wrocławski

Zmienna losowa to funkcja, która przypisuje zdarzeniom elementarnym liczby. Przykładowo moglibyśmy liczyć, ile razy wypadł orzeł przy rzucie monetą. Jeżeli rzucimy monetą raz, to zmienna losowa zdefiniowana będzie tak: $A(O) = 1$, $A(R) = 0$. Entropia w tym przypadku wynosi 1 (wynik opisuje 1 bit). Jeżeli rzucimy monetą dwa razy z rzędu, to zmienna losowa będzie następująca: $A(OR) = 2$, $A(OR) = A(RO) = 1$, $A(RR) = 0$. Prawdopodobieństwa kolejnych wyników wynoszą $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, więc entropia jest równa 1,5: można powiedzieć, że wystarczy jeden bit, by opisać, że wynik jest równy 1, w przeciwnym razie potrzebujemy drugiego bitu, aby opisać, czy jest to 0, czy 2.

Podkreślimy, że entropia i kodowanie nie zależą od konkretnych wartości, jakie może przyjąć zmienna losowa, a jedynie od prawdopodobieństw ich przyjęcia. Wiemy, jakie wartości może przyjąć zmienna, i opisujemy jedynie, która z możliwości zaszała. Przykładowo, entropia zmiennej przyjmującej wartości 0, 1 z prawdopodobieństwem $p, 1 - p$ jest taka sama jak zmiennej przyjmującej wartości π, e z tymi prawdopodobieństwami.

Na przykład, dla $n = 4$ i $m = 2$ naszą oryginalną wiadomość $\vec{C} = (0, 1)$ kodujemy w wektorze:

$$\vec{X} = (0, 1, 0, 1)$$

z użyciem pewnej funkcji c (opiszemy ją za chwilę). Ten wektor wysyłamy bit po bicie, ale ze względu na błędy transmisji bit 2 dochodzi zmieniony: wektorem błędu jest więc

$$\vec{Z} = (0, 1, 0, 0),$$

a odbiorca otrzymuje:

$$\vec{Y} = \vec{X} \oplus \vec{Z} = (0, 0, 0, 1).$$

Model pesymistyczny bywa nazywany modelem Hamminga, a probabilistyczny modelem Shannona.

Z artykułu *O sztuce zadawania pytań* Δ_{22}^{12} dowiedzieliśmy się między innymi, jak można mierzyć „ilość informacji”: taką miarą jest *entropia*, która intuicyjnie mówi nam, ile średnio bitów potrzeba, aby opisać wynik zmiennej losowej. Matematycznie, entropia zmiennej losowej A zadana jest jako $H(A) = \sum_a p_a \log_2 \frac{1}{p_a}$, gdzie p_a jest prawdopodobieństwem, że $A = a$, a $\log_2 \frac{1}{p_a}$ to intuicyjnie liczba bitów, którymi opisujemy to zdarzenie (liczba ta nie musi być oczywiście całkowita). Sama zaś entropia to wartość oczekiwana tejże liczby bitów; dlatego w dalszej części będę czasem pisał o bitach informacji zamiast o entropii. Ze wspomnianego artykułu dowiedzieliśmy się też, że wartość zmiennej losowej A można zakodować, używając średnio niewiele więcej niż $H(A)$ bitów. Dla uproszczenia notacji oznaczmy przez $H(p)$ entropię zmiennej losowej przyjmującej dwie wartości: 0, 1, z prawdopodobieństwami $p, 1 - p$. Proste rachunki pokazują, że $H(p)$ rośnie na przedziale $[0, \frac{1}{2}]$ i maleje na $[\frac{1}{2}, 1]$, a największą osiąganą wartością jest $H(\frac{1}{2}) = 1$.

W tym artykule spróbujemy znaleźć rozwiązanie problemu błędów transmisji, pokażemy, co zrobić w przypadku, gdy między zapisem a odczytem mogą pojawiać się błędy. Niech \mathbb{Z}_2 będzie zbiorem $\{0, 1\}$ z dodawaniem modulo 2, które oznaczmy symbolem \oplus . Nadawany komunikat oznaczmy przez $X \in \mathbb{Z}_2$, a „szum” potraktujmy jako zmienną losową o wartościach w \mathbb{Z}_2 , przy czym $\mathbb{P}(Z = 1) = p < 1/2$ to prawdopodobieństwo błędu. Odbiorca odczytuje $Y = X \oplus Z$. Ile bitów informacji można w tej sytuacji przesyłać?

Skoro Y ma dwie wartości, to $H(Y) \leq 1$. Ale $H(Z)$ informacji pochodzi z szumu, i wydaje się rozsądne stwierdzenie, że możemy przekazać najwyżej $H(Y) - H(Z) \leq 1 - H(p)$ bitów informacji. Powyższy model to uproszczenie pojęcia *kanału informacyjnego*, które wprowadził Claude Shannon; model ten jest, obok entropii, klasycznym pojęciem i narzędziem teorii informacji. Shannon sformalizował i udowodnił również powyższy argument o niemożności przesłania więcej niż $1 - H(p)$ bitów informacji.

Powyższe rozważania są trudno zrozumiałe w przypadku pojedynczego bitu: jak mamy przesyłać $1 - H(p)$ bitu? Naturalniej jest rozważać transmisję *wielu* bitów: wysyłając n bitów, chcemy – pomimo szumu – przesyłać $n(1 - H(p))$ bitów informacji. Ustalmy n i niech $m \approx H(p)n$ będzie liczbą bitów informacji pochodzących z szumu. Wysyłając n bitów, chcemy zatem przekazać $n - m$ bitów informacji. Formalnie: wiadomość $\vec{C} = (C_1, \dots, C_{n-m}) \in \mathbb{Z}_2^{n-m}$ kodujemy (czyli ustalamy pewną funkcję różnowartościową $c : \mathbb{Z}_2^{n-m} \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$) za pomocą wektora $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, który przesyłamy bit po bicie. Wektorem błędów jest $\vec{Z} = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, gdzie $\mathbb{P}(Z_i = 1) = p < 1/2$ dla $1 \leq i \leq n$, czyli dla każdego bitu prawdopodobieństwo błędu wynosi p . Zakładamy, że zmienne Z_1, \dots, Z_n są niezależne. Odbiorca odczytuje $\vec{Y} = \vec{X} \oplus \vec{Z}$ i chce odtworzyć \vec{C} przynajmniej z dużym prawdopodobieństwem (względem rozkładu \vec{Z}). O podobnym problemie pisalem już w artykule *Kody korekcyjne* Δ_{21}^3 . Kodowanie c jest również kodem korekcyjnym, ale obecnie rozważamy inny model pojawiania się i poprawiania błędów. Poprzednio rozważaliśmy model pesymistyczny: błędy pojawiają się złośliwie i chcemy zawsze móc je poprawić, o ile nie jest ich za wiele; obecnie rozważamy model probabilistyczny: błędy pojawiają się losowo, ale chcemy z dużym prawdopodobieństwem bezbłędnie przekazać informację.

Konstrukcja

Podejdzmy do problemu od strony szumu: skoro wiemy, że wektor błędów spełnia $H(\vec{Z}) \approx m$, to jak wspomnieliśmy na wstępie, możemy zakodować go, używając średnio m bitów. Pomysł polega na rozdzieleniu wysyłanych n bitów na dwa zbiory: m bitów przeznaczamy na zakodowanie \vec{Z} , a pozostałych $n - m$ bitów użyjemy do przekazania oryginalnej wiadomości. Pomysł ten może się w pierwszej chwili wydawać naiwny i niemożliwy do zrealizowania... a jednak,

Formalnie równość $\text{Dec}(P(\vec{Z})) = \vec{Z}$ zachodzi z prawdopodobieństwem, względem rozkładu \vec{Z} , dającym do 1 przy $n \rightarrow \infty$. Dla uproszczenia będziemy jednak pisać równość.

Łatwo udowodnić, że wektor $(W_1, \dots, W_m) = P(X_1, \dots, X_n)$ jest postaci $W_i = c_{i,1}X_1 \oplus \dots \oplus c_{i,n}X_n$ dla pewnych $c_{i,j} \in \mathbb{Z}_2$. Wtedy warunek $P(X_1, \dots, X_n) = (0, \dots, 0)$ przekłada się na układ m równań liniowych o n niewiadomych (z konstrukcji będzie wynikało, że równania te są niezależne). Można dowolnie ustalić $n - m$ niewiadomych (na 2^{n-m} sposobów) i jednoznacznie rozwiązać powstały układ, co daje 2^{n-m} wektorów w \mathcal{C}_n .

Korzystamy z notacji dla wektorów $\vec{A}_{\leq i} = (A_1, \dots, A_i)$, analogicznie definiujemy $\vec{A}_{\geq i}, \vec{A}_{< i}, \vec{A}_{> i}$.

Diagram przedstawia konstrukcję P'_4 : $P'_4(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$ skonstruowane jest z $P'_2(Z_1, Z_2)$ oraz $P'_2(Z_3, Z_4)$. One z kolei skonstruowane są z $P'_1(Z_1), \dots, P'_1(Z_4)$. W nawiasie podane są entropie warunkowe, które wyjaśnimy później.

Dla tak zdefiniowanej macierzy P mamy: $\mathcal{C}_n = \{(0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$, bo są to wszystkie wektory, które po zastosowaniu P przechodzą na $(0, 0)$. Jeżeli teraz określmy bijekcję c w następujący sposób:

$c(0, 0) = (0, 0, 0, 0)$, $c(0, 1) = (0, 1, 0, 1)$,
 $c(1, 0) = (1, 0, 1, 0)$, $c(1, 1) = (1, 1, 1, 1)$,

to wspomniana przykładowa wiadomość $\vec{C} = (0, 1)$ rzeczywiście zostanie zakodowana w $\vec{X} = (0, 1, 0, 1)$.

Kontynuując poprzedni przykład, jeżeli wektorem błędu będzie $\vec{Z} = (0, 1, 0, 0)$, to stosując P na wektorze $\vec{Y} = \vec{X} \oplus \vec{Z}$, otrzymamy $P(\vec{Z})$:

$$P(\vec{Y}) = P(0, 0, 0, 1) = (1, 0) = P(\vec{Z}).$$

jak pokażemy, jest to możliwe! W tym celu zastosujemy kompresję, która zawsze, a nie średnio, używa m bitów. Niech zatem P będzie oznaczeniem na funkcję kompresji $(P : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^m)$. Wprawdzie różne ciągi błędów mogą być teraz „zakodowane” w ten sam sposób, jednak dla pewnej funkcji dekompresującej Dec zachodzić będzie z dużym prawdopodobieństwem $\text{Dec}(P(\vec{Z})) = \vec{Z}$. Ponadto P będzie przekształceniem liniowym, czyli $P(\vec{A} \oplus \vec{B}) = P(\vec{A}) \oplus P(\vec{B})$ oraz suriekcją (tzn. $P(\mathbb{Z}_2^n) = \mathbb{Z}_2^m$).

Załóżmy na razie, że rzeczywiście uda nam się taką funkcję P skonstruować. Niech $\mathcal{C}_n = \{\vec{X} \in \mathbb{Z}_2^n : P(\vec{X}) = \vec{0}\}$. Zbiór \mathcal{C}_n ma 2^{n-m} elementów: można bowiem pokazać, że warunek z definicji \mathcal{C}_n odpowiada układowi równań liniowych, który ma 2^{n-m} rozwiązań (patrz margines). Ustalamy dowolną bijekcję między \mathbb{Z}_2^{n-m} a \mathcal{C}_n , która pozwoli nam zakodować wiadomość \vec{C} jako wektor \vec{X} z \mathcal{C}_n . Korzystając z liniowości P , możemy teraz z \vec{Y} odzyskać $P(\vec{Z})$:

$$P(\vec{Y}) = P(\vec{X} \oplus \vec{Z}) = P(\vec{X}) \oplus P(\vec{Z}) = P(\vec{Z}).$$

Po zdekodowaniu (z dużym prawdopodobieństwem) dostaniemy \vec{Z} , który po dodaniu do \vec{Y} da szukany \vec{X} :

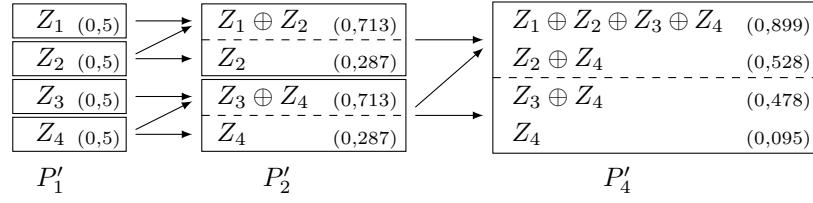
$$\vec{Y} \oplus \text{Dec}(P(\vec{Y})) = (\vec{X} \oplus \vec{Z}) \oplus \text{Dec}(P(\vec{Z})) = (\vec{X} \oplus \vec{Z}) \oplus \vec{Z} = \vec{X}.$$

Użycie zbioru $\{\vec{X} : P(\vec{X}) = \vec{0}\}$ (dla odpowiednio dobranego P) do kodowania wiadomości jest standardowym podejściem w teorii kodów korekcyjnych, również kolejne kroki są standardowe: P nazywana jest macierzą parzystości, a $P(\vec{Z})$ to tak zwany syndrom. Trudność jest w konstrukcji odpowiedniego P .

Wróćmy więc do pytania, jak skonstruować P . Ograniczymy się do przypadku, gdy $n = 2^k$. Aby osiągnąć nasz cel, skonstruujemy najpierw odwracalną funkcję liniową $P'_n : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ i za P weźmiemy odpowiednio wybrane m z n współrzędnych P'_n . Konstrukcja P'_{2^k} jest rekurencyjna: definiujemy P'_1 jako identyczność, a dla $k \geq 1$

$$P'_{2^k}(\vec{Z}) = (P'_{2^{k-1}}(\vec{Z}_{\leq 2^{k-1}}) \oplus P'_{2^{k-1}}(\vec{Z}_{> 2^{k-1}}), P'_{2^{k-1}}(\vec{Z}_{> 2^{k-1}})).$$

Mamy więc $P'_2(Z_1, Z_2) = (Z_1 \oplus Z_2, Z_2)$, a konstrukcja P'_4 wygląda następująco:



Latwo sprawdzić, że P' jest odwracalne. Co ciekawe, konstrukcja P' nie zależy od parametru p , ale P zależy: wybieramy $m \approx nH(p)$ współrzędnych z P' . Przykładowo dla $n = 4$ i $m = 2$, jeśli do P weźmiemy pierwsze dwie współrzędne P' , otrzymamy

$$P(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = (Z_1 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_4, Z_2 \oplus Z_4).$$

Do pytania, które współrzędne należy wybrać, powrócimy za chwilę.

Analiza

Aby zrozumieć tę konstrukcję, użyjemy *entropii warunkowej*: $H(A|B = b)$ to entropia A , jeśli wiemy, że $B = b$, zaś $H(A|B) = \sum_b p_b \cdot H(A|B = b)$ to średnia liczb $H(A|B = b)$ ważona prawdopodobieństwami p_b .

Prześledźmy działanie P'_4 . Weźmy $p = 0,11$, co daje $H(p) \approx 0,5$. Przyjmujemy więc $m = \frac{n}{2}$, czyli do P wybieramy połowę zmiennych z P' . Niech $W^{(j)} = (W_1^{(j)}, \dots, W_4^{(j)})$ dla $j = 1, 2, 4$ będą kolejnymi wektorami uzyskanymi w konstrukcji P'_4 , tzn.: $W^{(1)} = (P'_1(Z_1), \dots, P'_1(Z_4))$, $W^{(2)} = (P'_2(Z_1, Z_2), P'_2(Z_3, Z_4))$, $W^{(4)} = P'_4(Z_1, \dots, Z_4)$. Przeanalizujemy $H(W_i^{(j)}|W_{<i}^{(j)})$, czyli entropię warunkową, która mówi nam, ile bitów informacji niesie $W_i^{(j)}$, jeżeli poznaliśmy już wartości na poprzednich współrzędnych (wartości te podane są w nawiasach na diagramie).

Będziemy używać następujących właściwości entropii:

1. $H(A|B) \leq H(A)$: dodatkowa informacja nie może zaszkodzić; równość zachodzi dla A, B niezależnych.
2. $H(A, B) \leq H(A) + H(B)$ i równość zachodzi, gdy A, B są niezależne.
3. $H(A_1, \dots, A_n) = H(A_1) + H(A_2|A_1) + \dots + H(A_n|A_{<n})$: informacja całości to suma przyrostów informacji.
4. $H(A) \geq H(f(A))$ dla dowolnej funkcji f i równość zachodzi dla funkcji odwracalnych: przekształcanie może jedynie „stracić” informację.

Jeśli $A \in \mathbb{Z}_2$ oraz $p_0 = \mathbb{P}(A = 0)$ i $p_1 = \mathbb{P}(A = 1) = 1 - p_0$, to $\max(p_0, p_1) \geq 1 - H(A)$: lewa strona jest liniowo malejąca dla $p_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ i liniowo rosnąca dla $p_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$. Jednocześnie prawa strona jest wypukła i dla $p_0 = 0$, $p_0 = \frac{1}{2}$ oraz $p_0 = 1$ mamy równość.

Te bardziej prawdopodobne wartości musimy wcześniej obliczyć, dokonując obliczeń dla wszystkich możliwych wektorów wejściowych dla P' .

Erdal Arıkan, *Channel polarization: a method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels*. IEEE Transactions of Information Theory 55(7): 3051–3073 (2009).

Prezentację oparłem głównie na notatkach z wykładu Madhura Tulsianiego. Pełen dowód znajduje się w dostępnej w sieci książce: Venkatesan Guruswami, Atri Rudra, Madhu Sudan, *Essential Coding Theory*.

$n = 1$: P'_1 to identyczność, więc $W_1^{(1)}, \dots, W_4^{(1)}$ to Z_1, \dots, Z_4 i są one niezależne, czyli $H(W_i^{(1)}|W_{<i}^{(1)}) = H(W_i^{(1)}) = H(p) \approx 0,5$.

$n = 2$: $P'_2(Z_1, Z_2) = (Z_1 \oplus Z_2, Z_2)$. Wtedy Ogólnie $p < 2p(1-p) < 1-p$ i z własności entropii mamy $H(W_1^{(2)}) = H(2p(1-p)) > H(p) = H(Z_1)$. Jednocześnie

$$H(Z_1 \oplus Z_2) + H(Z_2|Z_1 \oplus Z_2) = H(Z_1 \oplus Z_2, Z_2) = H(P'_2(Z_1, Z_2)) = H(Z_1, Z_2) = H(Z_1) + H(Z_2) \approx 1,$$

ponieważ P'_2 jest odwracalne, a Z_1, Z_2 niezależne. Czyli $H(Z_2|Z_1 \oplus Z_2) \approx 1 - 0,713 = 0,287$. Analogiczne obliczenia przeprowadzamy dla $Z_3 \oplus Z_4$ i Z_4 .

$n = 4$: Dla $W_1^{(4)} = Z_1 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_4$ i $W_2^{(4)} = Z_2 \oplus Z_4$ możemy użyć tej samej obserwacji: $W_1^{(4)} = (Z_1 \oplus Z_3) \oplus (Z_2 \oplus Z_4)$ i zmienne $(Z_1 \oplus Z_3), (Z_2 \oplus Z_4)$ spełniają $\mathbb{P}(Z_1 \oplus Z_3 = 1) = \mathbb{P}(Z_2 \oplus Z_4 = 1) \approx 0,2$, co daje $\mathbb{P}(W_1^{(4)} = 1) \approx 2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,32$ i entropię $H(W_1^{(4)}) \approx 0,899$. Z równości $H(W_1^{(4)}) + H(W_2^{(4)}|W_1^{(4)}) = 2 \cdot H(0,2)$ wyliczamy $H(W_2^{(4)}|W_1^{(4)}) \approx 0,528$. Rachunki dla $H(W_3^{(4)}|W_{<3}^{(4)})$ są dużo bardziej skomplikowane, a ich wynik przedstawiony jest na diagramie.

Zauważmy, że P' polaryzuje entropię warunkową: pewne m współrzędnych ma entropię większą niż 0,5, a pozostałe $n - m$ mniejszą. W ogólności, dla dużych n pewne $n - m$ współrzędnych ma entropię bliską 0, a pozostałe m współrzędnych entropię prawie 1. Te właśnie współrzędne wybierzymy do funkcji P .

Czytelnik Uważny spostrzegł zapewne, że w przykładzie wybraliśmy m pierwszych współrzędnych. Był to jednak jedynie szczęśliwy zbieg okoliczności. W ogólności właściwe współrzędne rozłożone są dość chaotycznie i jest to istotna wada z punktu widzenia efektywnej implementacji tej konstrukcji. Dla ilustracji zauważmy, że zamiast $W_1^{(4)}, W_2^{(4)}$ moglibyśmy wybrać $W_1^{(4)}, W_3^{(4)}$ i obliczone entropie byłyby takie same (co łatwo wyjaśnić symetrią między zmiennymi Z_2 i Z_3).

Istnienie funkcji dekompresującej Dec można pokazać, korzystając z polaryzacji. Dla uproszczenia notacji przyjmijmy, że do P wybraliśmy m pierwszych współrzędnych P' . Zauważmy najpierw, że potrafimy z dużym prawdopodobieństwem z $\vec{W}_{i \leq m}^{(n)}$ obliczyć całe $\vec{W}^{(n)}$. Pierwsze m wartości po prostu znamy, a dla $j = m+1, \dots, n$, skoro $H(W_j^{(n)}|\vec{W}_{i < j}^{(n)}) \approx 0$, to wartość zmiennej $W_j^{(n)}$ jest prawie pewna dla znanych $\vec{W}_{i < j}^{(n)}$: łatwe rachunki (patrz margines) pokazują, że bardziej prawdopodobna z wartości $W_j^{(n)}$ ma prawdopodobieństwo przynajmniej $1 - H(W_j^{(n)}|\vec{W}_{i < j}^{(n)}) \approx 1$ i to ją wybieramy na $W_j^{(n)}$. Można pokazać, że sumaryczne prawdopodobieństwo błędu jest małe; dowód jest prosty, ale wymaga dokładnej formalizacji własności polaryzacji. Gdy już mamy całe $\vec{W}^{(n)} = P'(\vec{Z})$, pozostaje zastosować funkcję odwrotną do P' i otrzymamy \vec{Z} .

Dowód własności polaryzacji, a nawet dokładne sformułowanie tej własności, są trudne i – niestety – wykraczają poza rama tego artykułu.

Konstrukcja kodów polaryzujących, autorstwa Erdala Arıkan, była przełomem w teorii informacji: wszystkie poprzednie konstrukcje tego typu miały gorsze własności teoretyczne i zwykle były losowe, co utrudniało wydajną implementację. Kody polaryzujące są pierwszymi kodami, które nie tylko mają optymalne gwarancje teoretyczne, ale też nadają się do praktycznej implementacji, choć to drugie jest wyzwaniem. Zostały wprowadzone do standardu 5G NR (New Radio), a prace nad ich praktycznymi modyfikacjami i implementacjami trwają. Co ciekawe, kody korekcyjne i kodowanie entropijne były dwoma oddzielnymi, klasycznymi działami teorii informacji. Dopiero po kilkudziesięciu latach pokazano głęboki związek między nimi.

Twierdzenie Ramanujana–Nagella i trójkąt Pascala

* Wydział Matematyki Stosowanej,
Politechnika Śląska

Opisywane zagadnienie figuruje jako
Question 464 w słynnym dziele
Collected papers of Srinivasa Ramanujan
z 1927 roku.



Rozwiążanie zadania F 1081.

Tworzeniu lodu towarzyszy wydzielanie ciepła topnienia powodujące ogrzewanie wody i lodu. Masa lodu będzie rosła, dopóki mieszanina wody i lodu nie osiągnie temperatury topnienia $T_m = 273,15 \text{ K}$ (0°C). Gdyby ciepło właściwe lodu i wody były jednakowe, to mielibyśmy:

$$Lm_l = mc_w(T_m - T_0), \text{ czyli} \\ m_l = mc_w(T_m - T_0)/L \approx 0,063 \text{ kg.}$$

Ciepło właściwe lodu jest jednak mniejsze niż wody. Przeanalizujmy teraz skrajną sytuację – w temperaturze początkowej T_0 od razu powstaje „cały lód”, tzn. powstaje go tyle, że uwolnione ciepło topnienia ogrzewa lód i pozostającą wodę do temperatury dokładnie równej T_m . Mielibyśmy warunek:

$$Lm_l = ((m - m_l)c_w + m_l c_l)(T_m - T_0), \\ \text{czyli:}$$

$$m_l = \frac{mc_w(T_m - T_0)}{L + (c_w - c_l)(T_m - T_0)},$$

co daje $m_l \approx 0,059 \text{ kg}$. Rzeczywista masa lodu znajduje się więc pomiędzy $0,059 \text{ kg}$ i $0,063 \text{ kg}$. Dokładna analiza musi uwzględnić to, że kolejne porcje lodu powstają w coraz wyższej temperaturze. Utworzeniu porcji m_l lodu towarzyszy wzrost temperatury mieszaniny o dT , co prowadzi do równania:

$$Ldm_l = (m - m_l)c_w dT + m_l c_l dT = \\ = (mc_w + (c_l - c_w)m_l)dT,$$

a więc

$$(*) \quad \frac{dm_l}{dT} = \frac{mc_w + (c_l - c_w)m_l}{L},$$

przy czym w chwili początkowej mamy $m_l = 0$ i $T = T_0$. Rozwiązaniem równania $(*)$, co łatwo sprawdzić, jest:

$$m_l(T) = \frac{c_w m}{c_w - c_l} \cdot \left(1 - \exp \left(\frac{(c_l - c_w)(T - T_0)}{L} \right) \right),$$

a proces zakończy się, gdy $T = T_m$. Dla $T = T_m$ po podstawieniu pozostałych danych liczbowych otrzymujemy $m_l \approx 0,061 \text{ kg}$. Gęstość lodu jest o około 8% mniejsza niż wody, co oznacza, że końcowa objętość mieszaniny będzie o około $5,6 \text{ cm}^3$ większa od początkowej objętości przechłodzonej cieczy.

Podane w treści zadania ciepła właściwe odpowiadają zakresowi temperatur od -10° do 0° dla lodu i od -10° do 100° dla wody w stanie ciekłym – w tych zakresach temperatur zmiany obu wielkości nie przekraczają $0,1 \text{ J}/(\text{g}\cdot\text{K})$.

Bartłomiej PAWLICK*, Witold TOMASZEWSKI*

Historia pewnego twierdzenia. Spuściznę Srinivasy Ramanujana są nie tylko głębokie teoriologiczne twierdzenia, ale również liczne hipotezy stanowiące wyzwania dla kolejnych pokoleń matematyków. Jedno z wielu pytań postawionych przez genialnego hinduskiego samouka, datowane na 1913 rok, dotyczyło wyrażenia $2^s - 7$. Ramanujan zauważył, że jest ono kwadratem liczby całkowitej dla s równego 3, 4, 5, 7 i 15, i chciał wiedzieć, czy istnieją inne całkowite wartości s o tej własności.

W 1959 roku norweski matematyk Thoralf Skolem i jego dwóch amerykańskich kolegów, Sarvadaman Chowla i D.J. Lewis, na łamach *Proceedings of the AMS* wykazali, że nie ma więcej rozwiązań. Rok później Trygve Nagell, krajan Skolema, przedstawił swoje rozwiązanie problemu Ramanujana. Jak się okazało, kolejny dowód jest zarówno prostszy, jak i... starszy! Nagell opublikował rozwiązanie już w 1948 roku w pracy napisanej po norwesku, co skutecznie utrudniło wynikowi przebiecie się do świadomości ogółu matematycznej społeczności.

Jeden z autorów niniejszego artykułu zauważył pewną własność trójkąta Pascala, wynikającą z twierdzenia Ramanujana–Nagella. Zanim jednak ją zaprezentujemy, przyjrzymy się pokrótkiem pierwszym dowodom tego twierdzenia i omówimy jego dalsze losy. Zaczniemy od przedstawienia pewnych podstawowych faktów z zakresu algebry abstrakcyjnej.

Słów kilka o pierścieniach. Na potrzeby tego artykułu pierścień wystarczy rozumieć jako zbiór, do którego należą suma, różnica i iloczyn każdej pary jego elementów – reprezentatywnym przykładem jest pierścień liczb całkowitych. Jak wiemy, każdą liczbę całkowitą różną od 0, 1 i -1 można jednoznacznie rozłożyć na iloczyn liczb pierwszych (jeżeli rozważana liczba jest ujemna, to na czynniki pierwsze rozkładamy jej moduł i wynik mnożymy przez -1). W terminologii algebraicznej oznacza to, że pierścień liczb całkowitych ma własność jednoznaczności rozkładu. Idąc dalej tym tropem, liczby pierwsze nazywamy elementami nieroziądalnymi pierścienia liczb całkowitych. Już w XIX wieku zauważono, że nie we wszystkich pierścieniach rozkład na elementy nieroziądalne jest jednoznaczny. Warto tu wspomnieć, że żyjący kilkadziesiąt lat wcześniej wybitny matematyk Leonhard Euler chyba o tym nie wiedział, w efekcie popełniając swój słynny błąd w dowodzie szczególnego przypadku Wielkiego Twierdzenia Fermata (wtedy jeszcze hipotezy) dla $n = 3$. Używając współczesnej terminologii, można napisać, iż Euler nieopatrznie założył, że pierścień liczb postaci $\alpha + \beta \cdot i\sqrt{3}$ (α i β są liczbami całkowitymi, $i^2 = -1$) ma własność jednoznaczności rozkładu. Nie jest to prawda – przykładowo

$$4 = 2 \cdot 2 = (1 + i\sqrt{3}) \cdot (1 - i\sqrt{3}).$$

Dodajmy, że rozumowanie Eulera można łatwo naprawić, korzystając z metod opisanych w jego pracach, więc często przyznaje się mu autorstwo poprawnego dowodu.

Dwa dowody. Rozwiązania Skolema i Nagella zaczynają się bardzo podobnie. Rozważamy równanie $x^2 + 7 = 2^s$. Jeśli s jest liczbą parzystą, to po przekształceniu otrzymujemy $(2^{s/2} - x)(2^{s/2} + x) = 7$. To daje nam dwie możliwości:

$$\begin{cases} 2^{s/2} - x = 1 \\ 2^{s/2} + x = 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2^{s/2} - x = 7 \\ 2^{s/2} + x = 1 \end{cases},$$

z których wynika, że $s = 4$ oraz $x = \pm 3$. (Potencjalnie wszystkie liczby pojawiające się po prawej stronie powyższych układów równań mogłyby być ujemne, ale po ich zsumowaniu doszlibyśmy do sprzeczności).

Załóżmy teraz, że liczba s jest nieparzysta. Równanie $x^2 = 2^s - 7$ przekształcamy do postaci

$$\frac{x^2 + 7}{4} = 2^t \text{ dla } t = s - 2,$$

Równość $\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1-i\sqrt{7}}{2} = 2$ pokazuje nieco zaskakujący fakt, że liczba 2 w rozważanym pierścieniu nie jest nieroziądalna!

a następnie obie strony tego równania rozkładamy na iloczyny:

$$\frac{x+i\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{x-i\sqrt{7}}{2} = \left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^t \cdot \left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^t.$$

Wszystkie otrzymane ułamki należą do pierścienia liczb postaci $\alpha + \beta \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ (gdzie α, β są liczbami całkowitymi). Jak się okazuje, ten pierścień ma własność jednoznaczności rozkładu, a wśród elementów nieroziądalnych są $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ oraz $\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$. Z faktów tych wynika, że zachodzi jedna z czterech możliwości opisanych skrótnie poniższymi równaniami:

$$(1a) \quad \frac{x \pm i\sqrt{7}}{2} = \left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^t \quad (1b) \quad \frac{x \pm i\sqrt{7}}{2} = -\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^t.$$

Możemy ograniczyć się do analizy (1a), gdyż rozwiązania (1b) uzyskujemy z rozwiązań (1a) poprzez zmianę znaku przy x . Od tego miejsca dowody idą innymi drogami.

Chowla, Lewis i Skolem obliczają kolejne potęgi liczby $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ iauważają, że jeśli potęga ma postać $\frac{x \pm i\sqrt{7}}{2}$, to $x = 1, -3, -5, 11$ lub -181 , co odpowiada rozwiązaniom wskazanym przez Ramanujana. Przykładowo

$$\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^{13} = \frac{-181 - i\sqrt{7}}{2}$$

i liczba 181 spełnia równanie $181^2 = 2^{15} - 7$. Uzasadnienie, że nie ma więcej rozwiązań, opiera się na opracowanej przez Skolema metodzie korzystającej z własności liczb p -adycznych.

Nagell natomiast analizuje równanie (1a) oraz wynikające z niego dla $t > 1$

$$(2) \quad \left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^t - \left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^t = \pm i\sqrt{7}.$$

Dalej argumentuje, że prawa strona powyższej równości musi być równa $-i\sqrt{7}$. (Należy w tym celu rozpatrzyć ją modulo $\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^2$, nie będziemy tu jednak wchodzić w szczegóły tego odrobinę bardziej wyszukanego argumentu). Ze wzoru dwumianowego Newtona wynika, że

$$(a+b)^t - (a-b)^t = 2 \cdot \left(\binom{t}{1} a^{t-1} b + \binom{t}{3} a^{t-3} b^3 + \dots + \binom{t}{t} b^t \right).$$

Stosując tę zależność w równaniu (2), otrzymujemy

$$2 \cdot \frac{\binom{t}{1}(i\sqrt{7}) + \binom{t}{3}(i\sqrt{7})^3 + \dots + \binom{t}{t}(i\sqrt{7})^t}{2^t} = -i\sqrt{7},$$

a stąd

$$\binom{t}{1} + \binom{t}{3}(i\sqrt{7})^2 + \dots + \binom{t}{t}(i\sqrt{7})^{t-1} = -2^{t-1}.$$

Pamiętając, że $i^2 = -1$ oraz że wszystkie wykładniki po lewej stronie są parzyste, otrzymujemy równanie:

$$(*) \quad \binom{t}{1} - \binom{t}{3}7 + \binom{t}{5}7^2 + \dots \pm \binom{t}{t}7^{\frac{t-1}{2}} = -2^{t-1},$$

z którego w szczególności wynika

$$t \equiv -2^{t-1} \pmod{7}.$$

Podstawmy $t = 42k + r$ dla r spełniającego $0 \leq r < 42$. Wówczas $t \equiv r \pmod{7}$.

Ponadto na mocy małego twierdzenia Fermata: $2^{7-1} \equiv 1 \pmod{7}$, więc

$2^t \equiv 2^r \pmod{7}$. Otrzymujemy zatem $r \equiv -2^{r-1} \pmod{7}$.

Łatwo można sprawdzić, że jedyne rozwiązania tej kongruencji to $r = 3, 5, 13$.

Nagell pokazuje, że w każdym z tych przypadków, aby spełnione było równanie (*), musi zachodzić $t = r$, co odpowiada rozwiązaniami $s = 5, 7, 15$.

Osobno należy rozpatrzyć łatwy przypadek $t = 1$, dla którego równanie (2) nie jest spełnione. Ten przypadek daje rozwiązanie $s = 3$.

A po dowodach... Od tamtej pory rozważane twierdzenie doczekało się kilkunastu kolejnych uzasadnień i wielu uogólnień. W tej historii znajduje



Rozwiążanie zadania M 1759.

Zauważmy, że z warunków zadania dla dowolnego $0 < k < b$ zachodzi:

$$b+k \mid (a+k) - (b+k) = a-b.$$

Ustalmy liczbę całkowitą $0 < k < b$.

Ponieważ $\frac{b+k}{b-k} - \frac{k}{b-k} > 1$, to istnieje liczba całkowita $n \in \left(\frac{k}{b-k}, \frac{b+k}{b-k}\right)$. Wtedy liczba $m = n(b-k) - k$ spełnia nierówności $0 < m < b$.

Na mocy uwagi poczynionej na początku $b+m \mid a-b$, jednakże $b+m = (n+1)(b-k)$, skąd dla dowolnego $0 < k < b$ mamy $b-k \mid b+m \mid a-b$, więc

$$b-k \mid (a-b) + (b-k) = a-k.$$



Rozwiążanie zadania M 1760.

Udowodnimy, że dla dowolnej pary (x, y) zapisanej na tablicy liczba $2x - y$ jest podzielna przez 7. Dla ułatwienia zapisu podzielność tę oznaczmy jako $T(x, y)$.

Rzeczywiście, zachodzi $T(1, 2)$, gdyż $2 \cdot 1 - 2 = 0$. Zauważmy, że

$$2 \cdot (-a) - (-b) = -(2a-b)$$

$$2 \cdot (-b) - (a+b) = 3(2a-b) - 7a,$$

zatem z $T(a, b)$ wynika $T(-a, -b)$ oraz $T(-b, a+b)$. Ponadto

$$2(a+c) - (b+d) = (2a-b) + (2c-d)$$

i dlatego z $T(a, b)$ i $T(c, d)$ wynika

$T(a+c, b+d)$. Dowodzi to, że zachodzi $T(x, y)$ dla każdej pary (x, y) , którą można napisać na tablicy.

Ponieważ liczba $2 \cdot 2022 - 2023 = 2021$ nie jest podzielna przez 7, ta para nie może pojawić się na tablicy.

Więcej o dowodach i uogólnieniach można przeczytać w przeglądowej pracy *On the Ramanujan–Nagell Equation and its Generalisations* autorstwa Edwarda L. Cohena.

się również akcent polski: w 1956 roku Jerzy Browkin i Andrzej Schinzel rozwiązali równanie diofantyczne $2^x - 1 = y(y+1)/2$, a kilka lat później wykazali równoważność swojego rozwiązania z twierdzeniem Ramanujana–Nagella.

Najpopularniejsze zastosowanie rozważanego twierdzenia dotyczy teorii kodów korekcyjnych. Otrzymane rozwiązania pozwalają na konstruowanie zbioru C , złożonego z ciągów binarnych długości n o następującej własności:

każdy ciąg binarny długości n różni się o co najwyżej dwa znaki od dokładnie jednego ciągu $c \in C$.

Powyższa własność pozwala na poprawianie błędu w każdym otrzymanym ciągu, a jeżeli w trakcie transmisji, po wysłaniu pewnego ciągu $c \in C$, popełniono co najwyżej dwa błędy, to poprawiony ciąg będzie zgodny z tym, który został wysłany. Dodajmy, że jeżeli x, s spełniają równanie $x^2 = 2^s - 7$, to ciągi, o których tu mowa, mają długość $n = \frac{x-1}{2}$, a zbiór C ma 2^{s-3} elementów.

A co to wszystko ma wspólnego z trójkątem Pascala? Przyjmijmy konwencję indeksowania wierszy trójkąta Pascala od 0, a nie od 1. Jak wiemy, suma wszystkich liczb w n -tym wierszu trójkąta Pascala jest n -tą potęgą liczby 2, co można wyrazić równaniem

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n.$$

A czy w wierszach trójkąta Pascala istnieją jakieś sumy częściowe, które również są pewnymi potęgami liczby 2? Ujmując to bardziej formalnie: interesuje nas opisanie zbioru wszystkich trójków (n, s, k) liczb naturalnych takich, że $s \leq n$ oraz

$$(3) \quad \sum_{i=0}^s \binom{n}{i} = 2^k.$$

Oczywiście dla każdego n do rozważanego zbioru należą trójki $(n, 0, 0)$ oraz (n, n, n) . Dodatkowo możemy do niego dołożyć nieskończonie wiele trójków postaci $(2^k - 1, 1, k)$, ponieważ

$$\sum_{i=0}^1 \binom{2^k - 1}{i} = \binom{2^k - 1}{0} + \binom{2^k - 1}{1} = 1 + 2^k - 1 = 2^k.$$

Ostatni typowy podzbiór rozwiązań stanowią pary $(2s+1, s+1, 2s)$, co wynika z następującego wnioskowania. Jak wcześniej wspomnieliśmy, suma wszystkich elementów w wierszu jest potągą liczby 2. Wiemy również, że elementy w każdym wierszu ułożone są symetrycznie – fakt ten można uzasadnić wzorem $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Zatem dla $n = 2s+1$ wiersz zawiera dokładnie $2s+2$ elementów, a suma elementów w tym wierszu wynosi 2^{2s+1} . Rozpatrywana suma połowy z nich jest połową sumy wszystkich elementów, więc wynosi 2^{2s} .

Reasumując, jak dotąd ustaliliśmy, że rozwiązaniami równania (3) są trójki

- $(n, 0, 0)$ – przypadek trywialny, pierwszy element w każdym wierszu trójkąta Pascala to 2^0 ;
- $(2^k - 1, 1, k)$ – suma dwóch początkowych elementów w wierszu trójkąta Pascala w nieskończonie wielu przypadkach jest potągą liczby 2;
- $(2s+1, s+1, 2s)$ – suma połowy wszystkich elementów w wierszach zawierających parzystą liczbę elementów jest potągą liczby 2;
- (n, n, n) – suma wszystkich elementów w każdym wierszu jest potągą liczby 2.

Wszystkie powyższe rozwiązania będziemy nazywać rozwiązaniami *standardowymi*. Czy istnieją jakieś inne rozwiązania?

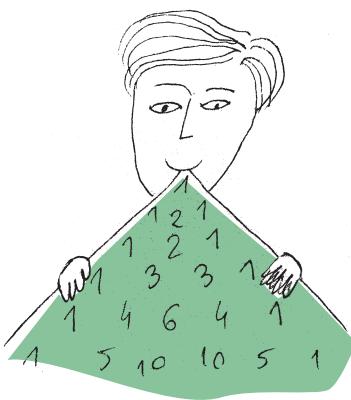
Jak się okazuje, twierdzenie Ramanujana–Nagella rozstrzyga powyższe pytanie dla $s = 2$. Zauważmy, że w tym przypadku interesuje nas równanie

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 2^k,$$

które można łatwo przekształcić do postaci

$$(2n+1)^2 = 2^{k+3} - 7.$$

Z twierdzenia Ramanujana–Nagella wynika, że prawa strona otrzymanego



Oczywiście moglibyśmy przyjąć, że $\binom{n}{k} = 0$ dla $n < k$, ale nie chcemy sztucznie rozszerzać zbioru rozwiązań standardowych o kolejne trywialne przypadki.

Warto dodać, że ciąg sum pierwszych trzech elementów kolejnych wierszy w trójkącie Pascala nosi umowną nazwę *the lazy caterer's sequence* i jest znany jako rozwiązanie następującego zadania kombinatorycznego: Jaka jest największa liczba obszarów, na jaką można podzielić płaszczyznę przy użyciu n prostych?

równania jest kwadratem liczby całkowitej w pięciu przypadkach: dla k równego 0, 1, 2, 4 i 12. Szukane wartości n to, odpowiednio, 0, 1, 2, 5 i 90 – po odrzuceniu dwóch pierwszych rozwiązań otrzymujemy indeksy wszystkich wierszy trójkąta Pascala, w których sumy pierwszych trzech elementów są potęgami liczby 2. Zauważmy, że ostatnie otrzymane rozwiązanie – (90, 2, 12) – odpowiadające równaniu

$$\binom{90}{0} + \binom{90}{1} + \binom{90}{2} = 1 + 90 + 4005 = 4096 = 2^{12}$$

nie należy do zbioru rozwiązań standardowych! Istnieje jeszcze jedno rozwiązanie niestandardowe – (23, 3, 11):

$$\binom{23}{0} + \binom{23}{1} + \binom{23}{2} + \binom{23}{3} = 1 + 23 + 253 + 1771 = 2048 = 2^{11},$$

znanie wszystkim, którzy spotkali się z konstrukcją kodu Golaya. Czy istnieją inne wiersze trójkąta Pascala, w których suma pierwszych czterech elementów jest potęgą liczby 2? I ogólniej, czy poza dwoma wskazanymi istnieją inne rozwiązania niestandardowe równania (3)? Kto wie, może odpowiedzi kryją się w innych hipotezach Srinivasy Ramanujana...



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1759. Liczby całkowite dodatnie a i b są takie, że $a + k$ jest podzielne przez $b + k$ dla wszystkich liczb całkowitych $0 < k < b$. Udowodnić, że $a - k$ jest podzielne przez $b - k$ dla dowolnej liczby całkowitej $0 < k < b$.

Rozwiązanie na str. 5

M 1760. Na tablicy napisano parę liczb (1, 2). Gdy para liczb całkowitych (a, b) jest zapisana na tablicy, to możemy jeszcze dopisać parę $(-a, -b)$, a także $(-b, a + b)$. Ponadto, jeśli na tablicy zapisane są pary (a, b) i (c, d) , to możemy zapisać również parę $(a + c, b + d)$. Czy para (2022, 2023) może kiedyś pojawić się na tablicy?

Rozwiązanie na str. 5

M 1761. Czy istnieje prostokąt, który można podzielić na 442 prostokąty, a wszystkie one są podobne do wyjściowego, jednak żadne dwa nie są przystające?

Rozwiązanie na str. 10

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1081. Woda pozbawiona zanieczyszczeń i pozostawiona bez wstrząsów mechanicznych może zostać ochłodzona do temperatury $T_H \approx 225$ K (-48°C) i pozostać w stanie ciekłym (tzw. stan przechłodzenia). W temperaturze $T \leq T_H$ w ciekłej wodzie powstają i szybko rosną kryształki lodu. Podobne zjawisko zachodzi, gdy przechłodzoną wodę w temperaturze $T > T_H$ wstrząśnijemy, np. wyjmując z zamrażalnika. Jaka masa, m_l , lodu powstanie w butelce zawierającej $m = 0,5$ kg wody przechłodzonej w zamrażalniku?

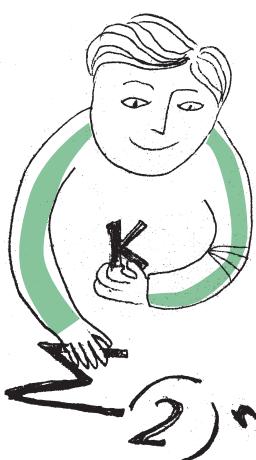
Temperatura w zamrażalniku: $T_0 = 263,15$ K (-10°C). Dane dla wody: temperatura topnienia $T_m = 273,15$ K, ciepło topnienia $L = 333,6$ J/g, ciepło właściwe przechłodzonej wody $c_w = 4,2$ J/(g·K), ciepło właściwe lodu $c_l = 2,1$ J/(g·K). Tworzenie i wzrost kryształów lodu są na tyle szybkie, że można pominąć wymianę ciepła z otoczeniem (przez ścianki butelki).

Rozwiązanie na str. 4

F 1082. Po długiej nieobecności wracamy do domu i stwierdzamy, że w naszym pokoju o objętości $V = 60$ m³ temperatura spadła do wartości $t_p = 0^\circ\text{C}$, takiej jak na zewnątrz. Włączamy grzejnik, i po pewnym czasie temperatura osiąga wartość $t_k = 22^\circ\text{C}$. Ogrzewanie następuje powoli i przez cały czas ciśnienie wewnętrz pokoju wynosi $p = 10^5$ Pa i jest równe ciśnieniu atmosferycznemu na zewnątrz domu. a) O ile zmieniła się energia wewnętrzna powietrza w pokoju podczas ogrzewania? b) O ile zmieniła się liczba moli powietrza w pokoju? c) Ile ciepła dostarczył grzejnik? W podanym zakresie temperatur powietrze zachowuje się jak gaz idealny (mieszanina gazów o cząsteczkach dwuatomowych: O₂ i N₂). Stała gazowa $R = 8,31$ J/(mol·K), temperatura $0^\circ\text{C} = 273,15$ K.

Pomijamy straty ciepła poprzez ściany i okna pokoju.

Rozwiązanie na str. 16

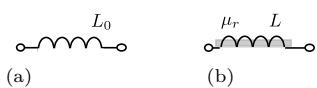


O metamateriałach, czyli czy możemy zmierzyć „ujemną” przenikalność magnetyczną?

Paweł PERKOWSKI*

* Wydział Nowych Technologii i Chemii, Wojskowa Akademia Techniczna

Teoretyczne podstawy metamaterialów stworzył w latach 60. XX wieku rosyjski fizyk Wiktor Wiesielago. Będąc jeszcze w szkole średniej interesował się on radiotechniką, odbiornikami radiowymi i był krótkofalowcem. Wiedział, że w obwodach LC dla pewnej szczególnej pulsacji (ω_{LC}) mamy do czynienia z rezonansem prądów (równolegle połączenie cewki o indukcyjności L i kondensatora o pojemności C) albo z rezonansem napięć (szeregowego połączenia cewki i kondensatora). Charakter obwodu dla pulsacji przekraczających pulsację rezonansową zmienia się z pojemnościowego na indukcyjny i vice-versa. Jak napisano w części pierwszej (Δ_{23}^6), pojawienie się rezonansu w szeregowym obwodzie LC skutkuje wyznaczeniem ujemnej przenikalności elektrycznej materiału wypełniającego kondensator. Zobaczmy, czy podobny efekt występuje przy wyznaczaniu „ujemnej” przenikalności magnetycznej ośrodka. Określenie „ujemnej” zostało umieszczone w cudzysłowie – dlaczego, okaże się później...



Rys. 1. Cewka próżniowa/powietrzna (a). Cewka wypełniona ośrodkiem magnetycznym (b) o względnej przenikalności magnetycznej μ_r

Materiał magnetyczny charakteryzuje się swoją względną przenikalnością magnetyczną μ_r . Ośrodki amagnetyczne (np. próżnia) mają tę wielkość równą dokładnie jeden. Materiały diamagnetyczne mają przenikalność magnetyczną niewiele mniejszą od jedności, a materiały paramagnetyczne – niewiele większą od jedności. Tylko materiały ferromagnetyczne charakteryzuje duża względna przenikalność magnetyczna. Względna przenikalność magnetyczna jest liczbą bezwymiarową, natomiast przenikalność magnetyczna $\mu = \mu_r \mu_0$ ma taką samą jednostkę co przenikalność magnetyczna próżni μ_0 . Gdy cewka nie ma w sobie żadnego materiału (cewka powietrzna), to jej indukcyjność obliczymy ze wzoru: $L_0 = \mu_0 n^2 S l$, gdzie μ_0 to przenikalność magnetyczna próżni/powietrza, n to liczba zwojów cewki, S to pole przekroju poprzecznego cewki, a l to długość cewki. Gdy umieścimy w cewce materiał posiadający względna przenikalność magnetyczną równą μ_r , wówczas jej indukcyjność wyjściowa L_0 zostanie wymnożona przez μ_r : $L = \mu_r L_0 = \mu_r \mu_0 n^2 S l$.

Aby wyznaczyć przenikalność magnetyczną danego materiału, należy zmierzyć indukcyjność cewki pustej L_0 , a następnie indukcyjność cewki L z ośrodkiem (rys. 1) i te wielkości podzielić: $\mu_r = \frac{L}{L_0}$.

W artykule w Δ_{23}^6 omówiono, jak analizator impedancji dokonuje pomiaru impedancji (oporu zespolonego) różnych elementów pasywnych. Możemy zadeklarować w analizatorze impedancji, że mierzmy elementy pasywne w obwodzie zastępczym szeregowym albo równoległy. Do pomiarów opisanych w poprzednim artykule był zastosowany szeregowy układ zastępczy. Tym razem przeanalizujemy równoległy obwód zastępczy. Mierząc napięcie $U(t)$ o pulsacji ω przykładane do elementu (układu) oraz prąd $i(t)$ wywołany tym napięciem, następnie dzieląc te dwie wielkości, otrzymamy impedancję:

$$Z = \frac{U(t)}{i(t)} = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j(\omega t - \varphi)}} = \frac{U_0}{i_0} e^{j\varphi} = |Z| e^{j\varphi},$$

gdzie, jak widzimy, impedancja $Z = |Z| e^{j\varphi}$ wprowadza przesunięcie fazowe prądu względem napięcia. Jeśli φ jest dodatnie, to oznacza to, że prąd spóźnia się w stosunku do napięcia o kąt φ i jednocześnie napięcie wyprzedza prąd o kąt φ . Gdy wartość φ jest ujemna, oznacza to, że prąd wyprzedza napięcie o $-\varphi$ (jest to wartość dodatnia).

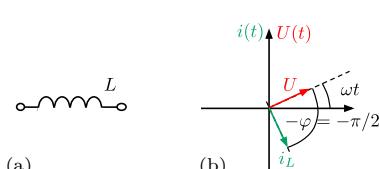
Idealna cewka

Impedancja idealnej cewki to $Z_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$. Cewka ta wprowadza przesunięcie fazowe między prądem a napięciem. W przypadku gdy mamy do czynienia z idealną cewką (rys. 2), wówczas prąd płynący przez element jest opóźniony w fazie w stosunku do napięcia pomiarowego. Kąt tego przesunięcia fazowego wynosi według definicji $\varphi = \pi/2$. Jednocześnie napięcie wyprzedza prąd o kąt $\pi/2$.

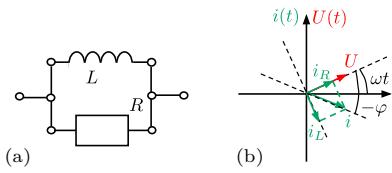
Obraz komplikuje się, gdy zamiast cewki (nawet idealnej) musimy uwzględnić obecność innych elementów pasywnych: rezystancji R czy pojemności C .

Cewka i rezistor

Załóżmy, że komórka pomiarowa daje się zamodelować jako połączenie równolegle indukcyjności L oraz rezystancji R (rys. 3). Wówczas admitancja Y



Rys. 2. Cewka o indukcyjności L (a). Wykres wskazowy (b) pokazujący, że wskaz napięcia zewnętrznego U oraz wskaz i_L prądu płynącego przez cewkę obracają się z tą samą prędkością kątową (pulsacją ω), a wskaz prądu jest przesunięty (obrócony) o $\pi/2$ do tyłu względem wskazu napięcia



Rys. 3. Cewka o indukcyjności L połączona równolegle z rezystancją R (a). Wykres wskazowy (b) pokazujący, że wskaz napięcia zewnętrznego U , wskaz prądu i_L płynącego przez cewkę, wskaz prądu i_R płynącego przez rezistor oraz wskaz prądu wypadkowego i obracają się z tą samą prędkością kątową (pulsacją ω) i wskaz prądu wypadkowego jest przesunięty o $-\varphi$ względem wskazu napięcia. Kąt $-\varphi$ może się zmieniać jako funkcja pulsacji od $-\pi/2$ do zera

(czyli odwrotność impedancji) takiego połączenia będzie wyglądała tak (ma ona część rzeczywistą i część urojoną):

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = G - \frac{j}{\omega L} = G + \frac{1}{\omega L}e^{-j\frac{\pi}{2}} = G + B_L e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Wielkość $G = 1/R$ nazywamy konduktancją rezystora, a wielkość $B = 1/\omega L$ nazywamy susceptancją cewki.

$$i(t) = U(t)Y = GU_0e^{j\omega t} + \frac{1}{\omega L}e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} = i_R e^{j\omega t} + i_L e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}.$$

Jak zapisać formułę na prąd $i(t)$ w funkcji kąta przesunięcia φ ? Jej postać będzie następująca:

$$\begin{aligned} i(t) &= U(t)Y = U_0e^{j\omega t} \left(G + \frac{1}{\omega L}e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) = \\ &= U_0 \sqrt{G^2 + \frac{1}{L^2\omega^2}} e^{j\omega t} \left(\frac{G}{\sqrt{G^2 + \frac{1}{L^2\omega^2}}} - j \frac{1}{\sqrt{G^2 + \frac{1}{L^2\omega^2}}} \right) = \\ &= i_0 e^{j\omega t} (\cos \varphi - j \sin \varphi) = i_0 e^{\omega t - \varphi}. \end{aligned}$$

Wypadkowy prąd będzie cofnięty w fazie o kąt φ względem wymuszenia napięciowego taki, że $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega L G} = \frac{1}{\omega L} R = \frac{\omega_{RL}}{\omega}$, gdzie $\omega_{RL} = \frac{R}{L}$ jest zwana pulsacją relaksacyjną obwodu RL a $i_0 = U_0 \sqrt{G^2 + \frac{1}{L^2\omega^2}}$. Zarówno amplituda prądu, jak i kąt przesunięcia fazowego zależą od pulsacji napięcia pomiarowego. Analizator impedancji, mierząc równolegle połączenie rezystancji R (konduktancji G) oraz indukcyjności L , zauważmy, że moduł prądu i_0 zależy od pulsacji ω oraz że dla niskich pulsacji ($\omega < \omega_{RL}$) przez gałąź z cewką prąd płynie praktycznie w całości, w efekcie czego prąd jest przesunięty w fazie ($-\varphi = -\pi/2$). Dla wysokich częstotliwości ($\omega > \omega_{RL}$) susceptancja cewki (B_L) jest prawie zerowa, więc układ zachowuje się tak, jakby prawie cały prąd płynął przez gałąź z rezystorem. Wówczas przesunięcie fazowe prądu względem napięcia nie występuje ($\varphi = 0$). Gdy zadeklarujemy analizatorowi impedancji, że nasz układ składa się z równoległego połączenia rezystancji R i cewki L , to analizator impedancji te dwie wielkości wyznaczy. Widzimy, że w zależności od pulsacji analizowany element zachowuje się jak zwykły rezistor (dla wysokich częstotliwości) lub jak zwykła cewka (dla niskich częstotliwości).

Kondensator i cewka

Załóżmy, że cewka pomiarowa daje się zamodelować jako połączenie równoległe pojemności C oraz indukcyjności L (rys. 4). Wówczas admitancja takiego połączenia będzie wyglądała tak:

$$Y = \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{-\frac{j}{\omega C}} = \frac{-j}{\omega L} + j\omega C = \frac{1}{\omega L}e^{-j\frac{\pi}{2}} + \omega C e^{j\frac{\pi}{2}} = B_L e^{-j\frac{\pi}{2}} + B_C e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

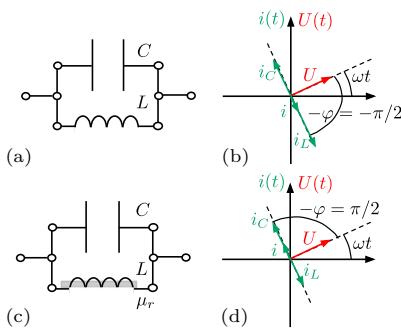
Wielkość $B_C = \omega C$ nazywamy susceptancją kondensatora. Zauważmy, że z powodu braku oporu czynnego R w obwodzie w admitancji Y nie występuje konduktancja G . Admitancja będzie po przyłożeniu napięcia zewnętrznego generowała w badanym elemencie prąd według formuły:

$$i(t) = U(t)Y = U_0 B_L e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} + U_0 B_C e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} = i_L e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} + i_C e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}.$$

Latwo zauważyc, że istnieje taka pulsacja ω_{LC} , przy której admitancja połączenia kondensatora i cewki jest zerowa. Obliczymy tę pulsację. Przyrównanie modułu admitancji do zera $Y = \frac{1}{\omega_{LC}L} + \omega_{LC}C = 0$ daje nam wartość pulsacji: $\omega_{LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Pulsację, dla której admitancja układu jest zerowa, nazywamy pulsacją rezonansową lub pulsacją rezonansu prądów. Wzór na admitancję możemy przekształcić do następującej postaci:

$$\begin{aligned} Y &= B_L e^{-j\frac{\pi}{2}} + B_C e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega L}e^{-j\frac{\pi}{2}} + \omega C e^{j\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-j\frac{\pi}{2}} + \omega \sqrt{LC} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{j\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{C}{L}} \left(\frac{\omega_{LC}}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} + \frac{\omega}{\omega_{LC}} e^{j\frac{\pi}{2}} \right). \end{aligned}$$

Widzimy, że dla pulsacji wyższej ($\omega > \omega_{LC}$) susceptancja kondensatora jest



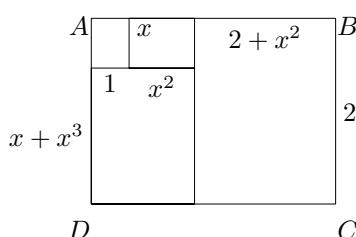
Rys. 5. Dla pustej cewki połączonej z kondensatorem (a) układ zachowuje się (dla danej pulsacji) jak cewka o zwiększonej lekko indukcyjności. Wskaz prądu w galędzi z cewką i_L jest dłuższy niż wskaz prądu w galędzi z kondensatorem i_C (b). Przesunięcie fazowe prądu wypadkowego jest równe $-\pi/2$ – czyli typowe dla indukcyjności. Dla cewki wypełnionej materiałem badanym połączonej z kondensatorem (c) układ zachowuje się jak pojemność. Wskaz prądu w galędzi z kondensatorem i_C jest dłuższy niż wskaz prądu w galędzi z cewką i_L (d), ponieważ skrócił się wskaz i_L . Przesunięcie fazowe prądu wypadkowego jest równe $\pi/2$ – czyli typowe dla pojemności. W pomiarze oznacza to, że efektywnie obliczamy ujemną indukcyjność cewki wypełnionej materiałem badanym, a przez to i wyznaczamy ujemną przenikalność magnetyczną μ_r materiału w cewce



Rozwiążanie zadania M 1761.

Odpowiedź: Tak, istnieje.

Najpierw pokażmy, że istnieje prostokąt, który można podzielić na 4 podobne prostokąty o różnych rozmiarach. W tym celu wystarczy w konfiguracji przedstawionej na poniższym rysunku tak dobrą x , aby prostokąt $ABCD$ był podobny do prostokątów, na które został podzielony (które są wzajemnie podobne na mocy konstrukcji).



Szukana wartość x musi spełniać następującą zależność:

$$1 + x^2 + 2 + x^2 = x(2x + x^3)$$

a stąd $x = \sqrt[3]{3}$.

Wobec tego rozważmy prostokąt przedstawiony na rysunku wyżej dla $x = \sqrt[3]{3}$. Spośród czterech prostokątów z podziału wybierzmy ten o najmniejszym polu i podzielimy go w taki sam sposób. Powtarzając opisany podział, wielokrotnie otrzymujemy prostokąty coraz mniejszych rozmiarów. Po 147 podziałach otrzymamy 442 prostokąty spełniające warunki zadania.

większa niż susceptancja cewki ($B_C > B_L$). To oznacza, że nasz element bierny (składający się z kondensatora i cewki) ma dla takich częstotliwości charakter pojemnościowy – prąd w układzie płynie przez gałąź z kondensatorem (prąd jest przesunięty w fazie względem napięcia o $\pi/2$). Natomiast dla pulsacji niższej ($\omega < \omega_{LC}$) susceptancja kondensatora jest mniejsza od susceptancji cewki ($B_C < B_L$). A to oznacza, że element bierny (składający się z kondensatora i cewki – połączonych równolegle) ma dla takich częstotliwości charakter indukcyjny – prąd w układzie płynie przez gałąź z cewką (prąd jest przesunięty w fazie w stosunku do napięcia o $-\pi/2$).

Procedura pomiaru właściwości magnetycznych ośrodka

Załóżmy teraz, że mamy pustą cewkę o indukcyjności $L = 1$ H. Do niej równolegle jest podłączony kondensator o pojemności $C = 1$ nF (rys. 5). Traktujemy tu ten kondensator jako element pasożytniczy. Pulsacja rezonansowa takiego połączenia wynosi:

$$\omega_{LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1\text{H} \cdot 1 \cdot 10^{-9}\text{F}}} = 31,6 \text{ krad/s.}$$

Jeżeli w tym układzie zmierzymy indukcyjność pustej cewki pomiarowej przy pulsacji $\omega = 10$ krad/s (jest spełniony warunek $\omega < \omega_{LC}$ i połączenie LC ma charakter indukcyjny), to zmierzona wartość indukcyjności będzie wynosiła $L_0 = 1,11$ H (indeks 0 świadczy o tym, że jest to wynik dla cewki pustej).

Otrzymana wartość będzie trochę zawyżona w stosunku do faktycznej indukcyjności cewki ($L = 1$ H). Następnie cewkę pomiarową napełniamy materiałem o względnej przenikalności magnetycznej $\mu_r = 100$ – stałej w szerokim zakresie częstotliwości. Nominalnie indukcyjność cewki wzrasta więc do wartości $L' = 100$ H. Dla takiej cewki i kondensatora (pasożytniczego) pulsacja rezonansowa ulega 10-krotnemu obniżeniu i wyniesie: $\omega_{L'C} = 3,16$ krad/s.

Jeżeli teraz zmierzymy indukcyjność napełnionej cewki pomiarowej przy pulsacji $\omega = 10$ krad/s (jest spełniony warunek $\omega > \omega_{L'C}$ i połączenie ma charakter pojemnościowy), to wyniesie ona $L_{100} = -11,1$ H. Jest ona ujemna, ponieważ widzimy cewkę i sądzimy, że się zachowuje jak cewka, a tymczasem dla takiej pulsacji układ mierzony (cewka i kondensator pasożytniczy równolegle połączone) ma w sumie charakter pojemnościowy. Kiedy obliczymy względną przenikalność magnetyczną materiału, którym wypełniliśmy cewkę, dostaniemy $\mu_r = \frac{L_{100}}{L_0} = -10$. W takim przypadku układ znajdujący się blisko rezonansu daje nam odpowiedź elektryczną, która przez analizator impedancji może być zinterpretowana jako efekt ujemnej przenikalności magnetycznej materiału, którym wypełniamy cewkę.

Podsumowanie

Widzimy, że pomiar dał nam „ujemną” przenikalność magnetyczną ośrodka, który badaliśmy. Otrzymaliśmy wynik dziwny. Ale nie jest on dziwniejszy od wyniku przedstawionego w części pierwszej (Δ_{23}^6), gdzie pomiar dał nam „ujemną” wartość przenikalności ośrodka wypełniającego kondensator. Odpowiedź na pytanie, co doprowadziło do takiego wyniku, jest dokładnie taka sama jak w części pierwszej: sprawił to rezonans w układzie. Czyli pojawienie się pojemności w układzie pomiarowym zmieniło postrzeganie tego ośrodka, którym wypełniliśmy cewkę pomiarową. Zamiast ujemnego przesunięcia fazowego prądu w stosunku do napięcia otrzymaliśmy dodatnie przesunięcie fazowe, czyli układ zmienił swój charakter z indukcyjnego na pojemnościowy.

Przykład przedstawiony w pierwszej i drugiej części tego artykułu dotyczy elementów dyskretnych (cewki i kondensatora). A czy jesteśmy w stanie stworzyć materiał, który w swojej strukturze będzie miał wbudowane cewki i kondensatory tak, aby lekko strojąc pulsację fali elektromagnetycznej w pobliżu rezonansu w strukturze LC móc wykorzystać rezonansowe właściwości takiego nowego materiału? Takie pytanie zadał sobie Wiktor Wiesielago i doprowadziło ono do wymyślenia ośrodka, który (wszystko na to wskazuje) nie istnieje w przyrodzie, a który nazwano metamateriałem (choć moglibyśmy go nazywać materiałem rezonansowym). O takich ośrodkach i ich unikalnych właściwościach opowiemy w części trzeciej.



Sierpień o naukach różnych

Wakacje. Mój miesiąc szczególnych lektur, książek zgłoszonych do nagrody **Złotej Róży**. Nagrodę ustanowiły Festiwal Nauki w Warszawie i Instytut Książki. Jest to jedyna nagroda w Polsce za literaturę polskojęzyczną popularyzującą naukę, rozpatrywane są książki z zakresu nauk przyrodniczych i ścisłych – humanistyka ma liczne nagrody z dziedzin ściśle humanistycznych. Przyznawana jest corocznie od 2007 roku decyzją czteroosobowego jury, w którego pracach mam przyjemność i zaszczyt uczestniczyć. Szczególny: festiwalnauki.edu.pl/nagroda-zlota-roza. Na tej stronie także laudacje z ostatnich trzech lat.

Członkowie jury reprezentują obie instytucje i, jak łatwo się domyślić, miewają różnorodne gusty i potrzeby, a jednak każdego roku jesteśmy zgodni w naszym wyborze. Cieszymy się, że liczba polskich książek popularyzujących naukę wzrasta i że dotyczą one różnorodnych dziedzin. W mojej pamięci zachowały się wszystkie, ale niektóre lubię bardziej... Już po werdykcie w roku 2019 czytelnicy oraz różne gremia konkursowe zauważali skromną książkę Urszuli Zajączkowskiej pt. *Patyki, badyle* (wyd. Marginesy, 2019). Autorka jest badaczką przyrody, a także poetką. Efektem współpracy dziennikarki z uczyonym jest rewelacyjny wywiad Karoliny Głowackiej z Jean-Pierre'm Lasotą zatytułowany *Czy Wielki Wybuch był głośny?* (wyd. Prószyński i S-ka, 2017; nagrodzona w 2017 r.). Erudycyjny i jednocześnie, co trudne, frapujący i pełen zagadek jest tekst Marcina Ryszkiewicza *Homo sapiens. Meandry ewolucji* (wyd. CiS, 2013; nagroda w 2013 r.). I nagrodzona w 2008 roku rewelacja: 3 wielkie, zachwycające albumy mądrych tekstów i znakomitych fotografii Marka Ostrowskiego pt. *Tryptyk Warszawski*, w którego skład wchodzą *Spojrzenie Warsa, Oblicze Sawy i Pokolenie Varsovia.pl* (wyd. SAMPER, 2008). Mam uczucie, że wyliczając moje typy, krzywdzę pozostałych autorów, dlatego zachęcam do wizyty na wyżej cytowanej stronie internetowej oraz poszukanie nagrodzonych pozycji na półkach i portalach... Ale skoro mowa o subiektywnych odczuciach, to pozwól sobie na wyrażenie swojej opinii odnośnie prac zgłoszonych w bieżącym roku: pisząc te słowa, nie wiem jeszcze, co postanowi jury konkursu, Państwo możecie to sprawdzić w Internecie.

Po raz pierwszy zauważałam serię książek z wydawnictwa „Paśny Buriat”. Nic dziwnego – nie ma ich w księgarniach, można je znaleźć tu: pasnyburiat.pl. Jak piszą o sobie twórcy wydawnictwa, zostało ono wymyślone w 2017 roku na ganku domu Piotra Malczewskiego w Budzie Ruskiej nad Czarną Hańczą i formalnie powołane do życia w 2018 roku w Kielcach przez Piotra Brysacza, dziennikarza i wydawcę, dyrektora artystycznego Festiwalu Literackiego „Patrząc na Wschód”, oraz Małej Witecką-Brysacz, absolwentkę ASP w Krakowie. Dochód ze sprzedaży przeznaczony jest na kolejne edycje Festiwalu Literackiego. (Ahoj, z naszego do Waszego, Koledzy!).

Są to czarujące literackie impresje, ale też przewodniki po (głównie) wschodnich rejonach Polski. Jeszcze niezdeptanych, mających własną historię. Warto je przeczytać, nim tam pojedziemy, ponieważ po tej lekturze pojedziemy na pewno. Z kilku nadesłanych, choć trudno takiej eliminacji dokonać, wybieram Tomasza i Grzegorza Kłosowskich pt. *Biebrza. Opowieści o rzece*, 2023. Autorzy obserwują przyrodę z uwagą i miłością. (Swojej znajomej prawniczce wydzierałam tę książkę siłą – była mi potrzebna do recenzji). Szkoda, że – jak sądzę – wydawnictwa nie stać na zamieszczenie fotografii na należnym im poziomie technicznym.

Myśląc o konkursie do nagrody „Złotej Róży”, próbuję zdefiniować pojęcie „książka popularyzująca naukę”. Mam z tym kłopot i zachęcam Czytelnika do takiej refleksji. Wiem jednak, że w tym roku nie mogłam się oderwać od pozycji takich, jak *Na północ* A. Wajraka, *Naprawić przeszłość* M. Napiórkowskiego, *Odważ się robić wielkie rzeczy* A. Chmielewskiego i E. Zambrzyckiej-Kościelnickiej, *Ostatniej minuty* T. Ulanowskiego, a także *Kopernik. Rewolucje* W. Orlińskiego. Jaki będzie werdykt jury w tym roku – tego jeszcze nie wiem... Ale publikacje te zapewne będą czytane w jesieni, właśnie wtedy, kiedy znowu zabieramy się do pracy i... myślenia.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Uran, Neptun i Wulkan – trzy planety, z których jedna nigdy nie istniała, cz. II

Mateusz DEMBNY*, Grzegorz ŁUKASZEWICZ*, Igor PALUSIŃSKI**

* Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

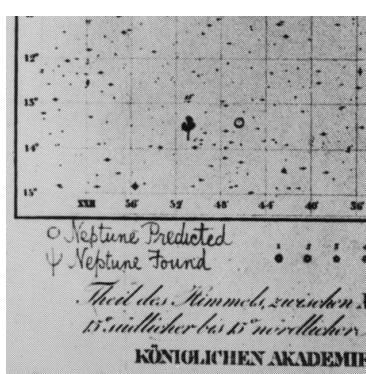
** Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Urbain Jean Joseph Le Verrier
(1811–1877)



Historyczny teleskop – refraktor, którym Galle oraz jego asystent zaobserwowali Neptuna



Fragment mapy gwiazdnej Hora XXI (gwiazdozbior Zegara), która posłużyła do odkrycia planety

W poprzedniej części opowiedzieliśmy o odkryciu Urania oraz o reperkusjach tego odkrycia. Szybko okazało się bowiem, że trajektoria ruchu Urana jest zaburzona – wymykała się modelom uwzględniającym oddziaływanie grawitacyjne znanych planet (sformułowanym przez Laplace'a). Ostatecznie problem rozwiązał francuski astronom Urbain Jean Joseph Le Verrier, który wykazał, że zaburzenia te wynikają z obecności nieznanego ciała niebieskiego – planety znajdującej się na zewnątrz orbity Urana. Le Verrier, na podstawie dostępnych danych o położeniu Urana, wyznaczył przewidywaną pozycję obiektu zaburzającego z dokładnością do 1 stopnia długości ekliptycznej.

Le Verrier – bez opuszczania swojej pracowni, a nawet bez obserwacji nieba – znalazł nieznaną planetę [Neptuna] jedynie na podstawie wyliczeń matematycznych, tak jakby dotknął jej koniuszkiem swojego pióra! (Camille Flammarion, 1914)

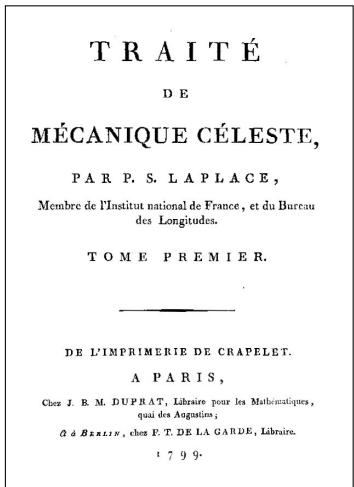
Powyzszy cytat oddaje wielkość tego sukcesu; był to przede wszystkim tryumf ówczesnej nauki, ale także potwierdzenie zasadności przyjętych teorii fizycznych. Warto podkreślić, że rezultat ten był uzyskany jedynie na podstawie wyliczeń matematycznych; tak jak skomentował to francuski astronom Camille Flammarion – bez bezpośrednich, siłowych poszukiwań teleskopem.

W tej części opowiemy dokładniej o odkryciu Neptuna i barwnych kontrowersjach z nim związanych. Przybliżymy też metody matematyczne i fizyczne, które służą opisowi tego zagadnienia.

Historyczna obserwacja Neptuna. Po oszacowaniu pozycji planety przez Le Verriera (wrzesień 1846 r.) astronomom pozostało jedynie skierowanie aparatury we wskazany przez niego obszar i zaobserwowanie jej. Jednak Le Verrierowi nie udało się od razu uzyskać dostępu do dostatecznie zaawansowanego teleskopu. Obserwatorium Paryskie dysponowało niedostatecznie silnym urządzeniem – refraktorem o średnicy około 23 cm. Wiedząc to, Le Verrier napisał do astronomów z innych krajów, aby to oni wykonali obserwacje. Jednym z nich był Johann Gottfried Galle, niemiecki astronom pracujący dla Obserwatorium Berlińskiego. Po otrzymaniu listu (23 września 1846 r.) Galle wystąpił o dostęp do teleskopu, żeby wraz ze swoim asystentem – Heinrichem Louisem d'Arrestem – jeszcze tego samego dnia rozpocząć poszukiwania [Lequeux]. Wkrótce udało się namierzyć obiekt, który nie znajdował się na ówcześnie najlepszej mapie gwiazdnej Hora XXI (autorstwa Carla Bremikera). Obiekt ten wyróżniał się niewielką tarczą. Można sobie tylko wyobrazić, jak wielką falę ekscytacji odczuli obaj astronomowie, gdy upewnili się, że nie popełnili błędu w odczytaniu mapy. Z niecierpliwością wyczekiwali następnej nocy, licząc na to, że warunki atmosferyczne pozwolą na obserwacje, tak aby móc jak najszybciej potwierdzić odkrycie. Szczęście dopisało naszym bohaterom – już następnej nocy stwierdzili, że obiekt porusza się na tle gwiazd [Krajnović]. W konsekwencji Galle wraz z dyrektorem obserwatorium Johannem Franzem Enckem wysłali list z gratulacjami dla francuskiego badacza oraz z danymi zebranymi z obserwacji obiektu. Encke zaznaczył w nim, że do odkrycia istotnie przyczyniła się wspomniana wyżej mapa gwiazd Hora XXI, opisująca dokładnie ten obszar, w którym ówcześnie znajdował się Neptun. Mapa ta zawierała wszystkie gwiazdy aż do 10 w skali magnitudo, podczas gdy Neptun ma 9 w skali magnitudo. Skala magnitudo określa jasność ciał niebieskich; przypisuje tym większą wartość, im słabiej świeci dany obiekt. Zatem, gdyby nie to, że obserwatorium posiadało tę mapę, dokonanie wnioskowania o istnieniu planety zajęłoby znacznie więcej czasu – nie byłaby to kwestia jednego dnia. Wyniki Le Verriera skonfrontowane zostały z rzeczywistą obserwacją. W położeniu (długość ekliptyczna) Francuz pomylił się o 54 minuty i 7 sekund, a w prędkości wędrowki obiektu po sferze niebieskiej o zaledwie 4,9 sekundy na dzień [Lequeux].



Johann Gottfried Galle (1812–1910)



Dzieło Laplace'a dotyczące astrodynamiki, ale również teorii perturbacji. Le Verrier podpierał się nim w swojej pracy

n	Ciało	R_n^{TB}	R_n^{obs}
$-\infty$	Merkury	0,4	0,39
0	Wenus	0,7	0,72
1	Ziemia	1,0	1,00
2	Mars	1,6	1,52
3	(Ceres)	2,8	2,77
4	Jowisz	5,2	5,20
5	Saturn	10,0	9,54
6	Uran	19,6	19,18
7	Neptun	38,8	30,06
8	Pluton	77,2	39,44

Porównanie obserwowanej odległości od Słońca R_n^{obs} z odlegością przewidywaną przez prawo Titiusa–Bodego R_n^{TB} dla ciał niebieskich odpowiadających $n = -\infty, 0, 1, \dots, 8$ (obie wielkości są wyrażone w AU)

Le Verrier natychmiast stał się sławny w całym astronomicznym świecie, otrzymał wiele listów z gratulacjami oraz cały szereg awansów i tytułów, m.in. order Legii Honorowej, uzyskując stopień oficera oraz stanowisko dyrektora oddziału zajmującego się astrodynamiką na Uniwersytecie Paryskim. Sam król Francji Ludwik Filip I uczynił go nauczycielem swojego wnuka. Ponadto wręczony został mu medal Copleya przez londyńskie Towarzystwo Królewskie – takie samo odznaczenie otrzymał William Herschel za odkrycie Urana. Doczekał się także własnego popiersia, które zostało umieszczone na uczelni w jego rodzinnym mieście Saint-Lô [Lequeux].

Tutaj wstrzymamy wątek historyczny i przejdziemy do analizy metod fizycznych i matematycznych. Pokażemy podstawy analizy perturbacji na przykładzie oddziaływania Urana i Neptuna.

Praca Le Verriera. Problem, którego rozwiązań podjął się Le Verrier, był niezwykle złożony – należało znaleźć planetę jedynie na podstawie wpływu, jaki wywierała na orbitę Uranu (tzw. perturbacji orbity). Takie zagadnienie w matematyce nosi nazwę *odwrotnego*; obserwując skutek obecności nieznanego obiektu, chcemy wskazać jego przewidywaną pozycję na sferze niebieskiej. Zasadniczą trudnością okazuje się liczba niewiadomych. Nie znamy odległości, masy planety, nie znamy jej pozycji w Układzie Słonecznym oraz dokładnych parametrów orbity. Le Verrier musiał więc dokonać pewnych uproszczeń oraz oszacowań, bez których najzwyczajniej nie dałoby się rozwiązać tego problemu.

W pierwszej kolejności rozważał odległość nieznanego obiektu od Słońca. Na podstawie wzorów Laplace'a, opisujących zaburzenia orbity w zależności od odległości ciał, wywnioskował, że szukana planeta leży poza orbitą Uranu oraz że prawdopodobnie nie może być bliżej niż dwukrotność odległości Uran–Słońce; perturbacje byłyby wówczas o wiele bardziej ewidentne. Pokazał również, że najpewniej nie krąży dalej niż wspomniana dwukrotność – ze względu na to, że musiałaby znaczco wzrosnąć jego masa.

Rozważania te można zestawić z prawem grawitacji Newtona, które wyjaśni, skąd wynikają te wnioski. Znacznosć perturbacji w sposób oczywisty zależy od siły, którą oba obiekty ze sobą oddziałują; jeżeli by zbliżyć Uran i Neptuna, siła wzrośnie, a zaburzenia się zwiększą. Gdyby je oddalić i chcieć zachować podobny wpływ, należałoby zwiększyć masę Neptuna, a ponieważ siła ta maleje z kwadratem odległości, wzrost masy byłby znaczący. Powyższa analiza daje jednak tylko pewne oszacowanie oparte na domyslach i zdrowym rozsądku; nie dało się bezpośrednio podać tej odległości. Le Verrier sugerował się także prawem Titiusa–Bodego, które opisuje odległości (w jednostkach astronomicznych, AU) od Słońca do planet Układu Słonecznego na zasadzie kolejnych wyrazów ciągu:

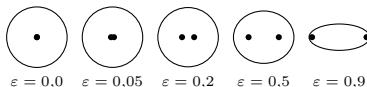
$$R_n = \frac{4 + 3 \cdot 2^n}{10} \quad \text{dla } n = -\infty, 0, 1, \dots, 8.$$

Należy dodać, że jest to prawo stworzone w pełni empirycznie – nie ma podstaw fizycznych dla jego poprawności. Prawo to daje jednak zaskakująco dokładne rezultaty dla wszystkich planet oprócz Neptuna (dla $n = 3$ mamy planetoidę Ceres).

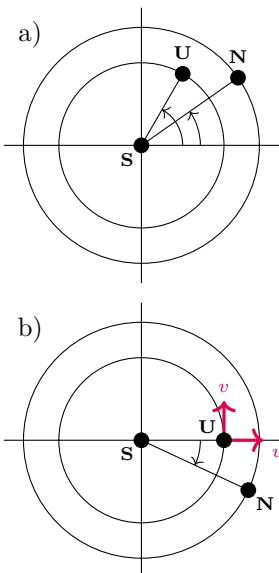
Następnie Le Verrier przyjął, że orbita poszukiwanego obiektu nachylona jest pod podobnym kątem względem płaszczyzny ekiptyki, jak w przypadku Jowisza, Saturna i Urana [Lequeux].

Kolejny problem dotyczył samego Uranu – w tym czasie astronomowie nie dysponowali modelem trajektorii jego ruchu; nie mogli wskazać takiej orbity, która by w pełni zgadzała się z obserwacjami. A bez dokładnych parametrów orbity Uranu ciężko jest przewidzieć zachowanie kolejnej planety. Le Verrier musiał więc dołożyć kolejne niewiadome do swoich rozważań [Lequeux].

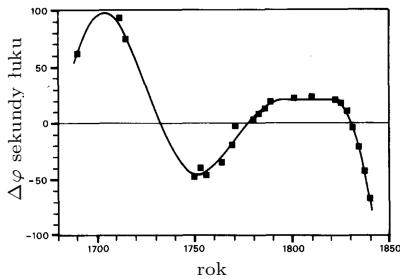
Uproszczony model analizy perturbacji. Przejdziemy teraz do omówienia rozwiązania tego problemu, ale w uproszczonym modelu zaczerpniętym z [Lai, Lam, Young], ponadto będziemy rozważać go *w prost* – mając dane na temat Neptuna, obliczymy zaburzenia orbity Uranu, zrozumiemy, na czym polega



Porównanie kształtu elips dla różnych wartości mimośrodu $\varepsilon \in (0, 1)$ (okrąg odpowiada wartości $\varepsilon = 0$)



Rysunek a) pokazuje ruch Urana i Neptuna wokół Słońca, natomiast rysunek b) – stan rzeczy po przejściu do układu odniesienia obracającego się jednostajnie wraz z Uranem



Porównanie krzywej otrzymanej w [Lai, Lam, Young] z danymi obserwacyjnymi z czasów Le Verriera. Dobór parametrów:

$$\begin{aligned}\gamma &= 4,32 \cdot 10^{-3} \\ \beta_1 &= -8,79 \cdot 10^{-5} \\ \beta_2 &= -2,2 \cdot 10^{-4} \\ \beta_3 &= 4,079 \cdot 10^{-3} \\ \beta_4 &= 3,724 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

istota analizy perturbacji. Nie będzie to odtworzenie pracy Le Verriera, która w istocie jest niezwykle skomplikowana, lecz znaczne jej uproszczenie.

Pozbędziemy się kątów, pod jakimi Uran i Neptun są nachylone względem ekliptyki, czyli względem płaszczyzny ruchu Ziemi. Przyjmiemy, że są równe zeru, co oznacza, że planety te poruszają się w tej samej płaszczyźnie. Podobnie założymy, że ekscentryczności orbit (mimośrodu elips) są równe zeru (przy założeniu braku oddziaływanego Uran–Neptun), a zatem trajektorie to okręgi. W rzeczywistości mimośrodu te wynoszą około 0,05 dla Urania oraz około 0,009 dla Neptuna. Tak jak zasugerowaliśmy wyżej, na razie będziemy pomijać oddziaływanie Uran–Neptun.

Dla Urania ($i = 1$) oraz Neptuna ($i = 2$) oznaczmy długość półosi wielkiej R_i (mierzoną w AU), okres obiegu T_i (w latach) oraz prędkość kątową $\Omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$ (w radianach na rok). Przejdziemy teraz do układu odniesienia związanego z niezaburzoną orbitą Urania – w nim Neptun porusza się z prędkością kątową $-\Omega$, gdzie $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ (minus oznacza, że ruch odbywa się zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara). Koniunkcja tych dwóch planet powtarza się z okresem $\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}$, czyli raz na około 171 lat. Przyjmiemy, że chwila $\tau = 0$ odpowiada ostatniej koniunkcji (dla Le Verriera: rok 1822). Rozważmy teraz zaburzenie orbity Urania spowodowane oddziaływaniem z Neptunem. Przyjmiemy, że funkcja $u(\tau)$ opisuje zaburzenie radialne, czyli zmianę odległości od Słońca, a funkcja $v(\tau)/R_1$ zaburzenie kąta (czyli tak zwanej długości ekliptycznej); w ten sposób $(u(\tau), v(\tau))$ to w przybliżeniu wektor zaburzenia z diagramu b). Warto mieć na uwadze, że w czasach Le Verriera to właśnie wielkość $\Delta\phi = v(\tau)/R_1$ podlegała bezpośrednim obserwacjom. Następnie wykorzystując prawo grawitacji Newtona $|\vec{F}| = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$ i pomijając członki wyższego rzędu, otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \ddot{u} - 2\Omega_1 \dot{v} - 3\Omega_1^2 u = a_r, \\ \ddot{v} + 2\Omega_1 \dot{u} = a_\phi, \end{cases}$$

gdzie a_r i a_ϕ to odpowiednio radialna i styczna składowa przyspieszenia spowodowanego siłą zaburzającą.

Nie będziemy wchodzić w szczegóły dalszych rozważań, nie będziemy też oczywiście rozwiązywać powyższych równań. Odnotujmy jedynie ciekawą własność: ponieważ siły zaburzające zależą jedynie od wzajemnego położenia planet (opisanego przez kąt $\Omega\tau$), a to zmienia się z okresem około 171 lat, więc również siły zaburzające są okresowe. Poddaje się je więc analizie częstotliwościowej za pomocą szeregow Fouriera, czyli przedstawia w postaci szeregow trygonometrycznych:

$$F_r = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\Omega\tau), \quad F_\phi = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega\tau),$$

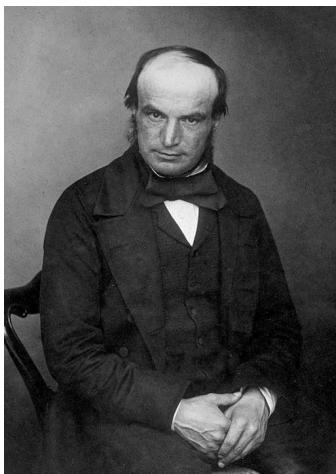
z odpowiednio dobranymi współczynnikami a_n, b_n . Jeśli szukane wielkości u oraz $\Delta\phi = v_1/r$ przedstawimy w podobnej postaci, to przybliżonym wynikiem takiej analizy jest wzór:

$$\Delta\phi(\tau) = -\gamma \sin(2\Omega\tau) + \beta_1 \Omega\tau + \beta_2 + \beta_3 \sin(\Omega_1\tau) + \beta_4 \cos(\Omega_1\tau),$$

gdzie $\gamma, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ są pewnymi współczynnikami. Jak widać na rysunku obok, nasza analiza doprowadziła nas do rezultatu, który bardzo dobrze wpisuje się w ówczesne dane obserwacyjne (więcej w [Lai, Lam, Young]).

Przed Le Verrierem stało jednak o wiele bardziej skomplikowane zadanie, gdyż musiał przejść przez te kroki w drugą stronę. Pierwszy krok, ale też ogólną metodę można zobrazować, korzystając z naszego wzoru na $\Delta\phi$. Le Verrier na podstawie danych, którymi dysponował, prowadził predykcyjne krzywe, dokonując analiz częstotliwościowych, tak aby znaleźć siły oddziałujące na Uraną – na tym polegała idea jego wywodu.

Kontrowersje związane z odkryciem Neptuna. Okazuje się, że Le Verrier nie był jedynym naukowcem, który podjął się wskazania nowej planety. John Couch Adams, astronom angielski, mniej niż dwa tygodnie po obserwacyjnym potwierdzeniu odkrycia Le Verriera (5 października 1846), opublikował pracę, w której dokonał podobnych oszacowań – z dokładnością



John Couch Adams (1819–1892)



George Biddell Airy (1801–1892)



Sir John Herschel (1792–1871)

Bibliografia

- [Lequeux] James Lequeux, *Le Verrier – Magnificent and Detestable Astronomer*, Springer, 2013.
[Krajnović] Davor Krajnović, *The contrivance of Neptune*, 2016
arxiv.org/abs/1610.06424.
[Kollerstrom] Nicholas Kollerstrom, *An hiatus in history: The British claim for Neptune's co-prediction, 1845–1846: part 1*, Science History Publications Ltd, 2006.
[Lai, Lam, Young] H.M Lai, C. C. Lam, K. Young, *Perturbation of Uranus by Neptune: A modern perspective*, American Association of Physics Teachers, 1990.

do 5 stopni. Co więcej, Angliści twierdzili, z Georgem Biddlem Airym na czele (dyrektorem obserwatorium w Greenwich, Astronolem Królewskim), że Adams dokonał wyliczeń nawet wcześniej niż Le Verrier (we wrześniu 1845), jednak wstrzymał się z ich publikacją. O to, kto tak naprawdę pierwszy ukończył pracę, powstał spór.

Przekaz historyczny związany z kularami tego odkrycia (ze strony Anglików) opiera się głównie na kolekcji dokumentów zgromadzonych przez Airyego – są to w dużej mierze korespondencje prywatne, listy, ale także pamiętniki i notesy. Co ciekawe, wiele z tych dokumentów było niedostępnych dla badaczy przez około 30 lat – w roku 1967 ogłoszono, że brakuje ich części. Odnalazły się dopiero w 1999 roku w Chile. Znalazły się tam za sprawą Olina Eggena, który prowadził badania historyczne. Rzuciły one nowe światło na całą sytuację i pozwoliły współczesnym badaczom na głębsze zbadanie tej historii.

Według zeznań Airyego, po ukończeniu swojej pracy we wrześniu 1845 roku Adams miał dwukrotnie podjąć próbę przekazania mu swoich rezultatów w Greenwich. Obie okazały się nieskuteczne – Adamsowi nie udało się zastać Airyego, dwukrotnie więc zostawił mu notatkę zawierającą jego rezultat. Notatki te zostały upublicznie w roku 1846 – po odkryciu Neptuna, jednak nie zawierały daty. Później data się na nich pojawiła, dopisana innym charakterem pisma [Kollerstrom]. Współczesne badania dowodzą, że Adams istotnie podejmował próby oszacowania pozycji nieznanej planety, ale były one na tyle niedokładne (ok. 20 stopni błędu), że nie pozwalały na tak błyskawiczne rozstrzygnięcie, jak u Le Verriera. Ponadto nie wiadomo, kiedy tak naprawdę Adams uzyskał swój rezultat (brak wiarygodnych źródeł). W lipcu 1846 roku Airy zlecił Jamesowi Challisowi, angielskiemu astronomowi, dyrektorowi obserwatorium w Cambridge, aby dokonał pobrania danych z obszaru wskazanego przez Adamsa. Zgodnie ze źródłami historycznymi Airy w liście do Challisa (9 lipca 1846 r.) nie wyrażał nadzieję na sukces w tym przedsięwzięciu. Pisząc list, użył sformułowania, które później wykreślił, aby nie brzmieć zbyt wątpiąco [Kollerstrom]:

"(...) there is a possible shadow of reason for suspecting the existence of a new planet."

Kluczowym elementem tej historii jest pytanie: dlaczego Adams nie chciał opublikować swoich rezultatów od razu? Dlaczego zwlekał tak długo? Le Verrier publikował wszystkie swoje próby rozwiązania problemu, podczas gdy Adams milczał. Współcześnie, na podstawie dostępnych dokumentów, uznaje się za zasadne twierdzenie, że udział Adamsa w tym odkryciu *nie może* być przyrównany do dokonań Le Verriera, którego opublikowane obliczenia zostały potwierdzone obserwacyjnie.

Ocean, Neptun, a może Le Verrier? Pozostaje jeszcze kwestia nazwy planety. Le Verrier dostał prerogatywę zaproponowania jej nazwy. Propozycja miała być następnie wspólnie zatwierdzona lub odrzucona. Anglicy (Adams, Challis, Airy) byli za nazwą *Ocean* – w mitologii greckiej – syn Uraną. Le Verrier początkowo był za nazwą *Neptun*, który z kolei w mitologii rzymskiej był synem Saturna. Nie był on jednak pewien i pozostawił zadanie wyboru nazwy François Arago – dyrektorowi Obserwatorium Paryskiego. Ten zaproponował nazwę *Le Verrier*, która oczywiście spodobała się odkrywcy. Le Verrier, próbując podtrzymać propozycję, poddał pomysł, aby podobnie nazwać planetę Uran – zmienić nazwę na *Herschel*. John Herschel – syn Williama Herschela, odkrywcy Urana – nie chciał jednak, żeby Uran zmienił nazwę na *Herschel*, podobnie nie chciał, aby teraźniejszy Neptun nazwany został *Le Verrierem*. Ostatecznie Bureau des Longitudes pod napiorem głosów sprzeciwu – głównie Anglików – wobec nazwy *Le Verrier*, podjęło decyzję o nazwaniu ósmej planety w Układzie Słonecznym *Neptunem* [Lequeux].

Na tym zakończymy drugą część historii o trzech planetach. W trzeciej części opowiem o hipotetycznej planecie *Wulkan*, której istnienie miało wyjaśniać anomalie związane z orbitą Merkurego. Znaczący udział w pracy nad tym zagadnieniem miał nie kto inny, jak główny bohater naszego tryptyku – Le Verrier.

Dyskretny wzór Itô

Michał MIŚKIEWICZ*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Dla każdego $N \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$f(T) - f(0) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f(\frac{n+1}{N}T) - f(\frac{n}{N}T)}{T/N} \cdot \frac{T}{N},$$

bedącą szczególnym przypadkiem (*). Dla odpowiednio regularnych funkcji f tezę podstawowego twierdzenia analizy otrzymujemy teraz w granicy $N \rightarrow \infty$.

Użyta we wzorze obok całka $\int \dots dW_t$ to całka Itô. Tak jak poprzednio, znajomość tego pojęcia, jak również procesu Wienera, nie ma decydującego znaczenia dla lektury dalszej części tekstu.



Rozwiążanie zadania F 1082.

Powietrze spełnia równania dwuatomowego gazu doskonałego. Dla n moli takiego gazu wypełniającego objętość V pod ciśnieniem p , w temperaturze bezwzględnej T spełnione są zależności:

$$\begin{aligned} pV &= nRT, \\ U &= C_V nT, \end{aligned}$$

przy czym dla gazu dwuatomowego molowe ciepło właściwe $C_V = 5R/2$ (ciepło właściwe w stałej objętości).
a) Jeżeli podczas ogrzewania ciśnienie gazu p było stałe (oczywiście także objętość pokoju V nie zmieniała się), to stała pozostawała również energia wewnętrzna U gazu zawartego w pokoju.
b) Zmieniała się za to liczba moli gazu:

$$n(T) = \frac{pV}{RT}.$$

Liczba moli zmalała więc od $n_p = 2,643 \cdot 10^3$ do $n_k = 2,463 \cdot 10^3$.

c) Grzanie następowało pod stałym ciśnieniem p . Molowe ciepło właściwe gazu doskonalego pod stałym ciśnieniem $C_p = C_V + R$. Zwiększenie temperatury gazu w pokoju od T do $T + dT$ wymagało więc dostarczenia ciepła:

$$dQ = n(T)C_p dT = \frac{7}{2}R \frac{pV}{RT} dT.$$

Podczas ogrzewania od $T_0 = 273,15$ K do $T_k = 293,15$ K grzejnik dostarczył ciepło:

$$Q = \frac{7pV}{2} \ln \left(\frac{T_k}{T_p} \right).$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $Q = 1,484 \cdot 10^3$ kJ.

Założona równość ciśnień w pokoju i na zewnątrz odpowiada sytuacji typowej – okna i drzwi nie są na tyle szczelne, żeby mogła wystąpić różnica ciśnień z atmosferą na zewnątrz.

Wśród twierdzeń analizy matematycznej jest jedno szczególnie ważne, czasem zwane *podstawowym*. Opiera się ono na tożsamości

(*) $a_N - a_0 = (a_N - a_{N-1}) + \dots + (a_2 - a_1) + (a_1 - a_0)$,
czyli obserwacji, że całkowity przyrost (tutaj: ciągu) jest sumą lokalnych przyrostów. Twierdzenie to stwierdza równość

$$f(T) - f(0) = \int_0^T f'(t) dt \quad \text{dla „dobrych” funkcji } f,$$

ale jeśli Czytelnik nie zna pojęć pochodnej f' oraz całki $\int \dots dt$, to nic nie szkodzi. Intuicyjnie, pierwsze odpowiada lokalnym przyrostom (tutaj: funkcji), a drugie – sumowaniu wielu składników. Twierdzenie to można zresztą wywnioskować z równości (*) (zgodnie z uwagą na marginesie).

W analizie *stochastycznej*, a więc dziale analizy zajmującym się procesami losowymi, znane jest podobne twierdzenie pod nazwą wzoru Itô. Wzór ten określa zmienność funkcji $f(W_t)$, w której liniowo rosnący argument $0 \leq t \leq T$ zastąpiono losowym procesem, konkretnie procesem Wienera W_t . Proces ten jest też znany – zwyczajna w naukach stosowanych – jako ruch Browna; służy on do opisu chaotycznego ruchu drobnych pyłków zawieszonych w cieczy, jak również zmian cen akcji na giełdzie (zob. $\Delta_{83}^4, \Delta_{83}^5$). O dziwo, wzór Itô fundamentalnie różni się od poprzedniego wzoru:

$$f(W_T) - f(W_0) = \int_0^T f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T f''(W_t) dt,$$

a więc oprócz „sumy lokalnych przyrostów” (czyli pierwszej z całek) zawiera też poprawkę drugiego rzędu.

Jak to możliwe, że całkowity przyrost okazał się różny od całki, która miała wyrażać sumę lokalnych przyrostów? Czy da się to naprawić? A może z tego dziwnego fenomenu wynika coś pozytywnego? Na te pytania postaram się odpowiedzieć, siegając po model najprostszy z możliwych – dyskretny.

Krótko o pochodnych dyskretnych. Słowo *dyskretny* oznacza w tym kontekście, że zamiast funkcji określonych dla wszystkich liczb rzeczywistych będziemy tu rozważali funkcję f określoną jedynie w całkowitych wielokrotnościach pewnej ustalonej liczby $h > 0$, a więc $0, h, -h, 2h, -2h$ etc. O różnicy między światem ciągłym a światem dyskretnym warto przeczytać więcej w artykule *Punkt, odcinek, trójkąt... z Δ_{76}^9* .

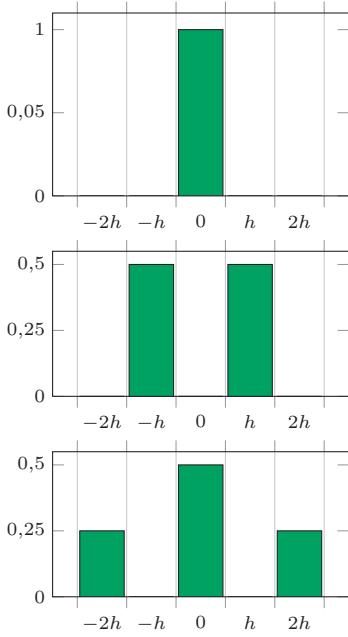
Klasyczna definicja pochodnej oparta jest na badaniu ilorazu różnicowego $\frac{f(x+d)-f(x)}{d}$ dla małych $d \neq 0$. U nas jednak d nie może być dowolnie małe. Najbliższy zeru jest wybór $d = \pm h$, co daje dwóch potencjalnych kandydatów na dyskretną pochodną: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ oraz $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$. Nie widać jednak, dlaczego któryś z kierunków prawo-lewo miałby być wyróżniony, dlatego przyjmiemy symetryczną uśrednioną definicję:

$$Df(x) := \frac{1}{2} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \right) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

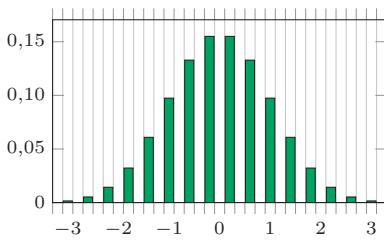
Drugą pochodną natomiast wprowadza się jako pochodną pochodnej. W naszym przypadku będzie więc naturalne rozważenie ilorazu różnicowego ilorazów różnicowych:

$$D^2 f(x) := \frac{1}{h} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \right) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

O błędzeniu losowym – dyskretnym krennym W_t . Funkcję f zastosujemy do procesu losowego zwanego *błędzeniem losowym*. Nazwa ta dobrze oddaje, o co chodzi: startujemy z punktu 0 i wielokrotnie rzucamy monetą, zależnie od wyniku poruszając się w lewo lub w prawo. Przyjmiemy, że kolejne kroki mają długość h każdy – dzięki czemu zawsze trafiamy w punkt określoności f – i że następują one w odstępach czasowych h^2 . Pozycję w chwili t oznaczymy przez S_t ; rozkład prawdopodobieństwa S_t dla $t = 0, h^2, 2h^2$ ilustrują wykresy



Powyżej rozkład prawdopodobieństwa S_t dla $t = 0, h^2, 2h^2$. A poniżej rozkład S_1 dla $h = \frac{1}{5}$ (czyli po 25 krokach), zaskakująco podobny do wykresu $y = e^{-x^2}$.



Warto się dowiedzieć, czym są martyngaly i jak pozytyczna może być wiedza, że dany proces jest martyngałem:

Paweł Hitczenko, *Martyngaly*, Δ_{88}^6 .

Rafał Szteencel, *Martyngaly*, Δ_{07}^5 .

Rafał Szteencel, *Kontra d'Alemberta na twierdzenie Dooba*, Δ_{07}^6 .

Uwaga o niezależności $\mathbb{E} S_T^2$ od wyboru h (a dokładniej od N) sugeruje, że przy $N \rightarrow \infty$ można oczekiwać zbieżności S_T . I słusznie, ta zmienna losowa zbiega do W_T , czyli do położenia procesu Wienera po czasie T . Wybór średniej kwadratowej (zamiast np. $\mathbb{E}|S_T|^3$) ma tu znaczenie jedynie dla prostoty rozumowania.

obok. Wybór odstępu czasowego h^2 zamiast, powiedzmy, h wydaje się dziwny, ale są ku niemu dobre powody, do których jeszcze dojdziemy.

Zgodnie z obietnicą, zbadamy teraz zmienność $f(S_t)$. W przypływie naiwności moglibyśmy oczekiwać, że przyrost $f(S_{t+h^2}) - f(S_t)$ jest równy wielkości $(S_{t+h^2} - S_t) \cdot Df(S_t)$; sumując po różnych t , otrzymalibyśmy wtedy równość podobną do tej z dowodu podstawowego twierdzenia analizy. Jak jednak łatwo zauważać, iloraz różnicowy $\frac{f(S_{t+h^2}) - f(S_t)}{S_{t+h^2} - S_t}$ jest równy któremuś z ilorazów $I_{\pm} = \frac{f(S_t \pm h) - f(S_t)}{\pm h}$, jednak któremu – to jest losowe. Jako że $Df(S_t)$ jest średnia $\frac{I_+ + I_-}{2}$, to różnica między $\frac{f(S_{t+h^2}) - f(S_t)}{S_{t+h^2} - S_t}$ a $Df(S_t)$ wynosi $\pm \frac{I_+ - I_-}{2}$, gdzie znak jest dobrany w zgodzie z $S_{t+h^2} - S_t$. Tym samym przekonaliśmy się, że zachodzi równość

$$(\star\star) \quad f(S_{t+h^2}) - f(S_t) = (S_{t+h^2} - S_t) \cdot Df(S_t) + \frac{1}{2}(S_{t+h^2} - S_t)^2 \cdot D^2 f(S_t).$$

I w ten sposób otrzymaliśmy poprawkę drugiego rzędu, analogiczną do tej we wzorze Itô. Podobieństwo widać najlepiej, gdy przyjmiemy $T = Nh^2$ (dla pewnego naturalnego N) i w duchu (*) zsumujemy otrzymaną równość $(\star\star)$ dla wszystkich $0 \leq t < T$ będących wielokrotnościami h^2 :

$$f(S_T) - f(S_0) = \sum_{n=0}^{N-1} (S_{(n+1)h^2} - S_{nh^2}) \cdot Df(S_{nh^2}) + \frac{h^2}{2} \sum_{n=0}^{N-1} D^2 f(S_{nh^2}).$$

Warto przy tym wspomnieć, że S_T stanowi przybliżenie procesu Wienera W_T , co oznacza, że w granicy $h \rightarrow 0$ rzeczywiście otrzymujemy – choć wyłącznie formalnie – wzór Itô.

Do czego ta poprawka się przydaje? Dyskretny wzór Itô w postaci podanej wyżej ma jedną kluczową cechę, która czyni go pożytecznym: pierwsza z sum po prawej stronie jest *martyngalem*. Żeby tę zaletę zrozumieć i należycie docenić, rzeczywiście należałoby posiadać pewną wiedzę o martyngałach, dlatego polecam Czytelnikowi siegnąć po archiwalne numery *Delty* (szczególny na marginesie).

Jednak nawet bez tej wiedzy można znaleźć łatwe i interesujące zastosowanie. Ustalmy horyzont czasowy $T = Nh^2$ oraz funkcję f . Powiedzmy, że interesuje nas wartość oczekiwana $\mathbb{E} f(S_T)$, czyli średnia z możliwych wartości $f(S_T)$ (ważona prawdopodobieństwem otrzymania danej wartości). Zgodnie z dyskretnym wzorem Itô, dla jej znalezienia wystarczy obliczyć średnią obu sum po prawej stronie wzoru; uzasadnimy, że pierwsza z nich ma średnią równą zeru.

Zwróćmy uwagę na n -ty składnik: $(S_{(n+1)h^2} - S_{nh^2}) \cdot Df(S_{nh^2})$. Jeśli ustalimy wartość S_{nh^2} , to ustali się również $Df(S_{nh^2})$, ale różnica $S_{(n+1)h^2} - S_{nh^2}$ nadal pozostaje losowa – przyjmuje wartości $+h$ i $-h$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. To oznacza, że również badany składnik przyjmuje dwie przeciwnie wartości z równym prawdopodobieństwem, a więc ma zerową średnią. Ponieważ nie zależy to od ustalonej wartości S_{nh^2} , więc zerową średnią otrzymamy również, biorąc pod uwagę losowość S_{nh^2} . Skoro tak jest dla każdego n , to samo możemy powiedzieć o całej sumie. W konsekwencji:

$$\mathbb{E} f(S_T) = f(0) + \frac{h^2}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E} D^2 f(S_{nh^2}).$$

Dla przykładu rozważmy teraz funkcję $f(x) = x^2$. Łatwo się przekonać, że $D^2 f(x) = 2$ dla każdego x , a zatem każda ze średnich $\mathbb{E} D^2 f(S_{nh^2})$ też wynosi 2. Biorąc pod uwagę równość $h^2 = \frac{T}{N}$, uzyskujemy stąd $\mathbb{E} S_T^2 = T$, co samo w sobie jest interesującym wynikiem.

Ten przykład pokazuje nam jeszcze jedną rzecz. Gdybyśmy za odstęp między dwoma krokami przyjęli h zamiast h^2 , to powyższy rachunek w miejsce T dałby $T \cdot h$. Okazuje się więc, że „nierówne” skalowanie w przestrzeni i czasie – w równaniach różniczkowych znane jako *skalowanie paraboliczne* – jest jedynym wyborem, jeśli chcemy, by wybór parametru h nie miał przełożenia na średnią kwadratową odległość po czasie T .

A czy niechcianej poprawki da się pozbyć? Da się! Żeby to zobaczyć, zauważmy najpierw, że dla prawdziwości wzoru $(\star\star)$ wystarczy, aby

S_t, S_{t+h^2} były liczbami różniącymi się o $\pm h$. Skoro tak, to prawdziwy jest również analogiczny wzór, w którym S_t i S_{t+h^2} zamienimy miejscami. Te dwa wzory – równość (**) i jej odwróconą wersję – możemy odjąć stronami i podzielić przez 2, otrzymując

$$f(S_{t+h^2}) - f(S_t) = (S_{t+h^2} - S_t) \cdot \frac{Df(S_t) + Df(S_{t+h^2})}{2} + \frac{h^2}{4}(D^2 f(S_t) - D^2 f(S_{t+h^2})).$$

Jeśli teraz zsumujemy po $0 \leq t < T$ jak poprzednio, to feralna poprawka przyjmuje postać $\frac{h^2}{4}(D^2 f(S_0) - D^2 f(S_T))$. Co prawda nie znika zupełnie, ale jest dużo mniejsza niż poprzednio, bo zamiast N wyrazów są tylko 2. To oznacza, że w granicy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy (znów: formalnie) wzór Itô, ale tym razem bez żadnej poprawki.

Czytelnik znający całkę Riemanna $\int_0^T g(t) dt$ wie, że jest ona pozbawiona haczyka, o którym tu mowa. Całkę tę przybliżamy, dzieląc $[0, T]$ na drobne przedziały $[t_k, t_{k+1}]$ i sumując $a_k \cdot (t_{k+1} - t_k)$, przy czym za a_k możemy przyjąć wartość g w dowolnym punkcie z $[t_k, t_{k+1}]$, lub też średnią tych wartości.

Gdzie tkwi haczyk? Otóż brzemienna w skutkach okazała się niewinna zamiana $Df(S_t)$ na $\frac{Df(S_t) + Df(S_{t+h^2})}{2}$. Zmienność S_t (i podobnie zmienność W_t) jest na tyle duża, że powstała różnica nie znika przy przejściu do granicy $h \rightarrow 0$. Otrzymany przez nas wzór zapisuje się zazwyczaj jako

$$f(W_T) - f(W_0) = \int_0^T f'(W_t) \circ dW_t,$$

przez użycie symbolu \circ sygnalizując, że mamy tu do czynienia z tak zwaną całką Stratonowicza, a nie całką Itô.

Skoro dla procesów stochastycznych mamy dwa różne pojęcia całki, to które wybrać? To pytanie pozostawiam już Czytelnikowi, bo za każdą z możliwości przemawiają pewne zalety, które tutaj zostały ledwo zarysowane.

Recenzja książki *Czy Wszechświat myśli? I inne ważne pytania nauki*



Dla kogo tę książkę przeznaczono? Dla fizyków chyba nie, za bardzo prześlizguje się po tematach, choć z pewnością może służyć za lekką lekturę wakacyjną. Dla kompletnych laików tym bardziej nie, gdyż z nadmierną dezynwolturą skacze z wątku na wątek, co osobie bez chociaż zgrubnego pojęcia o przedstawianych zagadnieniach raczej uniemożliwi połapanie się w nich. Dla amatorów, którzy może nie nabyli biegłości w całkach i różniczkach, ale za to nieobce im są nazwiska Feynmana, Gödla czy Hoyle'a – tak, ci powinni poczuć się nią usatysfakcjonowani.

Czy Wszechświat myśli? rozpoczyna się od cytatu z Carla Sagana*, mnie na zakończenie recenzji również przychodzi na myśl passus tego autora: *Zakładając, że będę czytał jedną książkę tygodniowo, w ciągu swojego życia przeczytam ich kilka tysięcy,*

Czy Wszechświat myśli? bardziej niż książką o tym, co wiemy, jest książką o tym, czego nie wiemy, i być może dowiedzieć się nie jesteśmy w stanie. Sabine Hossenfelder w przystępny sposób pokazuje czytelnikowi dzisiejsze granice poznania oraz jasno określa, w którym momencie kończy się nauka, a zaczyna naukowy bełkot. Jednocześnie czyni to ze swadą i nie wdając się zbytnio w szczegóły, dzięki czemu odbiorcy nie dopada senność. Gdyby Jeremy Clarkson pisał o fizyce, z pewnością robiłby to właśnie tak.

Autorka nie uznaje żadnych świętości („naukowości”?) i nawet częściej niż bioenergoterapeutów czy wróżki punktuje uczonych, którzy zbyt daleko odpłynęli w regiony niemożliwej do zweryfikowania spekulacji (np. głosicieli koncepcji wieloświata). Podczas lektury miałem nieodparte skojarzenie z telewizyjnymi *Pogromcami mitów*: w każdym rozdziale pisarka bierze na warsztat jakiś „mit”, tj. pytanie (np. czy nasze zmarłe babcie wciąż żyją dzięki kwantom), po czym określa, czy w ogóle da się na nie odpowiedzieć, wykorzystując metody naukowe, a jeśli tak – to jak ta odpowiedź brzmi.

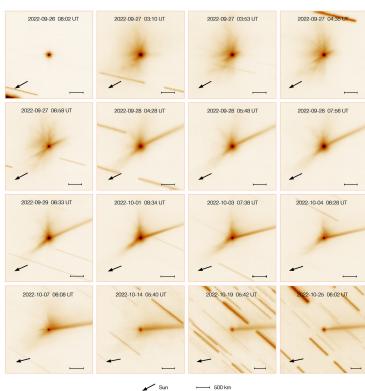
co stanowi jedynie promil zbiorów dobrej biblioteki. Sztuka polega na tym, by wiedzieć, które przeczytać. Książka Sabiny Hossenfelder raczej nie należy do pozycji „obowiązkowych” i nie sądzę, by za kilkadziesiąt lat dorobiła się takiego statusu, jak twórczość popularnonaukowa Sagana, Hawkinga czy Goulda. Niemniej istnieje bardzo dobry powód, aby ją przeczytać: dzięki niej macie szansę dowiedzieć się, ile jest „cukru w cukrze” w przebijających się do masowych mediów popularnonaukowych stwierdzeniach. I że czasem są one jedynie ubranym w naukowy język wyznaniem wiary.

Mateusz RAJKOWSKI

* „Mojm zdaniem dalece bardziej rozsądne jest pojmowanie wszechświata takim, jaki jest w rzeczywistości, niż pozostawanie przy urojeniach, choćby przynosili one satysfakcję i uspokojenie.” Carl Sagan, *Świat nawiedzany przez demony: nauka jako światło w mroku*, Poznań 1999, s. 26.

Prosto z nieba: Kontrolowane zderzenia w kosmosie

Double Asteroid Redirection Test (DART) – bezzałogowa misja sondy kosmicznej. Zadaniem DART była zaplanowana kolizja z księżycem planetoidy Didymos, Dimorphosem. Średnica Dimorphosa to jedynie 160 m. Asteroida ta nie zagroża Ziemi, a celowe rozbicie sondy i próby zmiany jej kursu miały jedynie na celu przetestowanie strategii do zastosowania w razie sytuacji kryzysowej. Sonda DART została wyniesiona na orbitę 24 listopada 2021 roku i zderzyła się z Dimorphosem 26 września 2022 roku o godzinie 23:14 UTC.



Seria zdjęć wykonanych za pomocą instrumentu MUSE na VLT ESO. Zdjęcia te pokazują ewolucję chmury gazu wyrzuconej podczas zderzenia DART z Dimorphosem. Pierwsze zdjęcie zostało wykonane 26 września 2022 roku, tuż przed uderzeniem, a ostatnie prawie miesiąc później, 25 października. Strzałka w każdym panelu oznacza kierunek położenia Słońca. Poziomy pasek odpowiada 500 kilometrom.

MUSE – instrument Multi Unit Spectroscopic Explorer zamontowany na jednym z teleskopów VLT w Europejskim Obserwatorium Południowym.

FORS2-FOcal Reducer/low dispersion Spectrograph 2 – także jeden z instrumentów należących do VLT Europejskiego Obserwatorium Południowego.

Zapewne wielu z Czytelników *Delta* widziało film z 2021 roku „Nie patrz w góre”. W filmie tym dwójka astronomów, grana przez Leonardo DiCaprio i Jennifer Lawrence, za pomocą mediów próbuje ostrzec ludzkość przed zmierzającą w stronę Ziemi zabójczą asteroidą. Okazuje się, że uderzenie asteroidy w Ziemię jest jedną z niewielu katastrof naturalnych, którym teoretycznie (zakładając, że wypatrzymy taki obiekt odpowiednio wcześnie) możemy zapobiec poprzez niewielką zmianę trajektorii jej lotu (o czym pisałam także w Δ_{22}^{12} w dziale „Prosto z nieba”: *I Ty możesz odkryć asteroidę! Nie patrz w góre – użyj Zooniverse*). Właśnie w celu sprawdzenia, czy zmiana trajektorii lotu asteroidy w wyniku kontrolowanego zderzenia z wysłaną z Ziemi sondą jest możliwa, zaprojektowano i wysłano na niechybną śmierć misję DART.

Kontrolowane zderzenie nastąpiło 27 września 2022 roku. Ważąca 545 kg sonda DART zderzyła się z planetoidą Dimorphos w odległości około 11 mln km od Ziemi. Odległość ta umożliwiła szczegółowe obserwacje zdarzenia za pomocą całego wachlarza teleskopów naziemnych i satelitarnych. I tak zderzenie zaobserwował niezawodny Kosmiczny Teleskop Hubble'a (HST). Poklatkowy film z tego zdarzenia można obejrzeć na stronach NASA (go.nasa.gov/3EOvIdP). Skutki tego zdarzenia zaobserwowały również wszystkie cztery 8,2-metrowe teleskopy Very Large Telescope (VLT, Bardzo Duży Teleskop) w Chile. Obserwacje zostały poddane wnikliwej analizie, a ich wyniki opublikowano niedawno na łamach czasopism „Astronomy & Astrophysics” i „Astrophysical Journal Letters”.

Precyzyjne obserwacje orbity Dimorphosa wokół asteroidy Didymos przed i po kontrolowanej kolizji z DART pozwoliły na pomiar odchylenia, jakie spowodowało zderzenie. Analizy uzyskanych pomiarów dokonał zespół astronomów, kierowany przez badaczy misji DART w Laboratorium Fizyki Stosowanej Uniwersytetu Johns Hopkinsa. Badano dane pochodzące z obserwatoriów na całym świecie i na ich podstawie ustalono, że DART skrócił okres orbitalny Dimorphosa wokół Didymosa o 33 minuty (od początkowej wartości wynoszącej 11 godzin i 55 minut). Warto podkreślić, że próg powodzenia misji DART wynosił 73 sekundy.

Naukowcy badali również chmurę materiału wyrzuconego po uderzeniu sondy DART. Dokładna jej analiza może rzucić światło na to, jak uformował się Układ Słoneczny, gdyż asteroidy są jednymi z najbardziej podstawowych reliktów materiału, z którego powstały wszystkie planety i księżyce Układu Słonecznego. Kontrolowane zderzenie DART z Dimorphosem obserwowane przez wiele teleskopów równocześnie pozwoliło na prawie laboratoryjną analizę chemiczną, którą przeprowadził zespół pod kierownictwem astronomki Cyrielle Opitom z Uniwersytetu w Edynburgu. Badacze przez miesiąc śledzili ewolucję chmury odłamków za pomocą instrumentu MUSE. Zauważono, że wyrzucona chmura była bardziej niebieska niż sama asteroida przed uderzeniem, co wskazuje, że chmura mogła być zbudowana z bardzo drobnych cząstek. W ciągu godzin i dni, które nastąpiły po uderzeniu, rozwinęły się inne struktury: grudki, spirale i długie ogony wypchnięte przez promieniowanie słoneczne. Spirale i ogony były bardziej czerwone niż początkowy obłok, a więc mogły być zbudowane z większych cząstek. Dzięki MUSE możliwa była analiza spektrum widma pochodzącego z obłoku. Nie znaleziono w nim śladów tlenu i wody – ten kontrolowany eksperyment wykazał, że asteroidy nie zawierają znaczących ilości lodu.

Drugi zespół, kierowany przez astronoma Stefano Bagnulo z Armagh Observatory and Planetarium w Wielkiej Brytanii, badał, jak uderzenie DART zmieniło powierzchnię asteroidy. W tym celu użyto instrumentu FORS2 w VLT. Badano polaryzację światła słonecznego rozpraszanego na powierzchni Dimorphosa. Okazało się, że poziom polaryzacji nagle spadł po uderzeniu DART, a jednocześnie wzrosła ogólna jasność układu. Jednym z możliwych wyjaśnień jest to, że uderzenie odsłoniło pierwotny materiał z wnętrza asteroidy, który nigdy nie był wystawiony na działanie wiatru i promieniowania

Oparte na artykułach: C. Opitom et al., "Morphology and spectral properties of the DART impact ejecta with VLT/MUSE" *Astronomy & Astrophysics*, 2023, 671, L11 i S. Bagnulo et al., "Optical spectropolarimetry of binary asteroid Didymos-Dimorphos before and after the DART impact", *Astrophysical Journal Letters*, 2023, 945 L38.

słonecznego. Innym wyjaśnieniem jest to, że uderzenie zniszczyło cząstki znajdujące się na powierzchni Dimorphosa, wyrzucając tym samym znacznie mniejsze ich odłamki do chmury gazu. Mniejsze cząstki znacznie efektywniej odbijają światło, lecz także w mniejszym stopniu je polaryzują.

Katarzyna MAŁEK

Departament Badań Podstawowych (BP4), Zakład Astrofizyki, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Niebo w październiku

Cały miesiąc Słońce spędza w gwiazdozbiorze Panny, szybko obniżając swoją wysokość nad horyzontem. Pod koniec października w środkowej Polsce przecina ono południk lokalny na wysokości mniejszej od 25° , przebywając na nieboskłonie wyraźnie krócej niż 10 godzin. W nocy z 28 na 29 października nastąpi zmiana czasu na zimowy, a zatem konieczne będzie przedstawienie zegarów z godziny 3 na 2.

Ze Słońcem (i Księżykiem) związane są dwa główne wydarzenia astronomiczne października: 14 dnia miesiąca Księżyk przejdzie przez nową, a jego półcień przetnie powierzchnię naszej planety od południowo-zachodniej części Stanów Zjednoczonych po Brazylię. Niestety dojdzie tylko do zaćmienia obrączkowego, które potrwa nawet ponad 5 minut w Nikaragui, Kostaryce i Panamie, a Księżyk przesłoni maksymalnie 95% średnicy tarczy Słońca.

Dwa tygodnie później natomiast nastąpi pełnia Srebrnego Globu, podczas której zahaczy on o cień Ziemi. Tym razem całe zjawisko da się obserwować z Europy (a także z większości Afryki i Azji oraz z Arktyki). Niestety podczas fazy maksymalnej zaćmienia w cień Ziemi wejdzie niewiele ponad 12% księżycowej tarczy. W Polsce zjawisko zacznie się około godziny 20:01 wejściem Księżyca w półcień Ziemi, zaćmienie częściowe zacznie się o godzinie 21:34, faza maksymalna – o 22:14, koniec fazy częściowej – o 22:52 i koniec fazy półcieniowej – o godzinie 0:26. W fazie maksymalnej Księżyk zajmie pozycję na wysokości przekraczającej 40° nad południowo-wschodnią częścią widnokregu. W odległości 6° na wschód od niego towarzystwa dotrzyma mu bardzo jasna planeta Jowisz na kilka dni przed opozycją. Kolejne 10° dalej prawie w tym samym kierunku przez lornetkę da się dostrzec również bliską opozycji planetę Uran. Około 8° nad Srebrnym Globem pokażą się zaś jasne gwiazdy konstelacji Barana.

Księżyk spotka się z parą planet Jowisz–Uran również na początku miesiąca. W nocy z 1 na 2 października jego tarcza w fazie ponad 90% minie Jowisza w odległości mniejszej od 3° , kolejnej nocy natomiast wjejdzie w podobnej odległości na wschód od Urana, ale w fazie zmniejszonej do 85% (do rana Księżyk zbliży się na mniej niż 2° do Plejad w Byku). Obie planety dążą do listopadowych opozycji i można je obserwować przez całą najciemniejszą część nocy. Obie planety górują około godziny 2 na wysokość ponad 50° . Do końca października Jowisz zwiększy swoją jasność do $-2,9^m$ i średnicę kątową swojej tarczy do $50''$.

Planeta Uran kreśli swoją pętlę przy granicy Barana z Bykiem i świeci z jasnością obserwowaną $+5,6^m$.

Kolejne dwie noce naturalny satelita Ziemi spędzi w gwiazdozbiorze Byka, zmniejszając fazę najpierw do 75%, a następnie do 65%. 3 października wieczorem Księżyk utworzy trójkąt prawie równoramienny z Plejadami i Aldebaranem, najjaśniejszą gwiazdą konstelacji. Dobę później zaś jego tarcza zbliży się na około $1,5^\circ$ do El Nath, drugiej co do jasności gwiazdy konstelacji. Księżyk zakryje tę gwiazdę, ale zjawisko da się dostrzec tylko z południowej części Oceanu Indyjskiego.

6 października Księżyk przejdzie przez ostatnią kwadrę, a 7 dnia miesiąca nad ranem zbliży się na 4° do Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt, zmniejszając przy tym fazę do 45%. W październiku eklipytyka tworzy bardzo duży kąt z porannym widnokregiem, stąd Księżyk pozostałe dobrze widoczny aż do samego nowiu. 8 i 9 dzień miesiąca Srebrny Glob ma zarezerwowane na odwiedziny gwiazdozbioru Raka. Nad ranem jego sierp zwęzi się, odpowiednio, do 35% i 26%, a tarcza pokaże się najpierw 6° na północny zachód, a potem 7° na wschód od gromady otwartej M44.

Poranki 10, 11 i 12 października Srebrny Glob spędzi w gwiazdozbiorze Lwa. Pierwszej z wymienionych nocy Księżyk w fazie 18% pokaże się 5° nad Regulusem i 7° nad Wenus. Drugiej nocy jego tarcza pokaże się 8° na wschód od Wenus, kolejnej natomiast jego sierp zwęzi się do zaledwie 6%, a najbliższą jasną gwiazdą okaże się Denebola, druga co do jasności gwiazda Lwa, odległa od Księżyca o 10° . Przy odpowiednio przejrzystym niebie bardzo cienki sierp Księżyca, w fazie jedynie 2%, da się dostrzec również 13 października, gdy do jego nowiu zabraknie mniej więcej 1,5 doby. O świcie jego tarcza zajmie pozycję na wysokości około 5° , ale do jej odnalezienia niezbędna może okazać się lornetka.

Planeta Wenus w październiku pokona prawie 28° w Lwie i 24 października osiągnie swoją maksymalną elongację zachodnią 46° . 9 października Wenus przejdzie nieco ponad 2° na południe od Regulusa, a do końca miesiąca jej jasność spadnie do $-4,3^m$, tarcza zmniejszy średnicę kątową do $22''$ i zwiększy fazę do 54%.

W pierwszym tygodniu miesiąca o świcie można próbować odnaleźć planetę Merkury. Jej spotkanie ze Słońcem przypada 20 października – i do tego czasu jej tarcza się zmniejsza, ale jednocześnie rośnie faza, stąd jasność planety wynosi $-1,2^m$. 1 października

o godzinie 6 Merkury wznosi się na wysokość 6° , ale w ciągu kilku dni zniknie za linią widnokręgu. Do odszukania Merkurego na niebie można wykorzystać wspomnianą już Denebolę. Planeta początkowo znajduje się mniej niż 10° na południe od niej, potem dystans między tymi ciałami niebieskimi stopniowo rośnie do 15° , a Merkury przesuwa się na pozycję dokładnie pod gwiazdą.

Po nowiu Księżyca przeniesie się na niebo wieczorne, ale jednocześnie przemieści się pod ekiptykę, stąd do przypadającej 21 października I kwadry jego położenie na niebie nie przekroczy 10° . Do tego czasu warto wspomnieć o anonsowanym w sierpniu zakryciu Antaresa przez Księżyca w fazie 15%, co ma się zdarzyć 18 października. Pas zakrycia przebiegnie przez zachodnią Azję, południową Europę i północną Afrykę, przy czym w Europie i Afryce zjawisko zajdzie w dzień, szczęście do możliwości jego obserwowania wieczorem i w nocy mają mieszkańcy obszaru od Półwyspu Arabskiego do pogranicza rosyjsko-ukraińskiego. W Polsce zakrycie zacznie się około godziny 15:20, w momencie górowania Księżyca, a gwiazda zniknie za jego ciemnym brzegiem. Odkrycie nastąpi jakieś 70 minut później. Odnalezienie Księżyca nie powinno

sprawić kłopotu. Gorzej z Antaresem, którego da się dostrzec dopiero przez teleskop. Niestety jest to jedyne widoczne z Polski zakrycie tej gwiazdy w trwającym do 2028 roku sezonie jej zakryć przez Księżyca.

24 dnia miesiąca tarcza Srebrnego Globu w fazie zwiększonej do 78% pokaże się 5° od Saturna, a kolejnej nocy – w podobnej odległości do Neptuna, ale w fazie przekraczającej 86%. Saturn wciąż widoczny jest dobrze, jednak przesunie się wyraźnie na zachód i zacznie znikać za widnokręgiem przed godziną 2. Do końca miesiąca planeta osłabnie do $+0,7^m$, a jej tarcza zmniejszy średnicę do $18''$. Neptun wciąż świeci z jasnością $+7,8^m$ i do końca miesiąca oddali się od gwiazdy 20 Psc na odległość $75'$. Po drodze 18 października planeta przejdzie nieco ponad $6'$ na północ od gwiazdy 7. wielkości HIP117112.

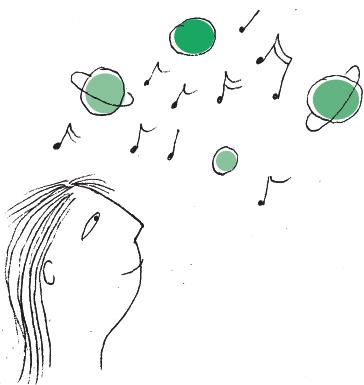
28 października przypada opisywana już pełnia i częściowe zaćmienie Księżyca. Kolejnej nocy Srebrny Glob zajmie pozycję około 9° od Jowisza i 3° od Urana. Ostatnie dwie noce miesiąca Księżyca spędzi w Byku, najpierw zbliży się na mniej niż 3° do Plejad, a potem na podobną odległość do El Nath.

Ariel MAJCHER

Wielki powrót muzyki sfer

Starożytni Grecy już od czasów Pitagorasa sądzili, że ciała niebieskie krążące – w ich mniemaniu – wokół Ziemi rozbrzmiewają piękną muzyką. Skąd taki pogląd? Doprowadziło do niego odkrycie, że dźwięki współbrzmią pięknie, czyli tworzą konsonans, gdy ich częstotliwości mają się do siebie jak niewielkie liczby całkowite. Na przykład dźwięk o oktawę wyższy od danego ma częstotliwość 2 razy większą. Skokiem o oktawę zaczyna się m.in. piosenka „Somewhere over the rainbow”. Gdy zaś dźwięki różnią się o kwintę, to stosunek ich częstotliwości wynosi 3 : 2. Kwintę znajdziemy m.in. w piosence „Wyszły w pole kurki trzy”, pomiędzy drugim a trzecim dźwiękiem.

Niestety, późniejszy rozwój astronomii nie potwierdził poglądu o muzyce sfer, i to nie tylko dlatego, że w kosmicznej próżni nie rozchodzi się dźwięk, a dźwięków o częstotliwości kilku nanoherców nie słyszmy nawet w powietrzu. Okazało się po prostu, że stosunki okresów obiegu planet wokół Ziemi, a więc także stosunki ich częstotliwości, nie wyrażają się prostymi stosunkami liczbowymi. Odkrycie Kopernika, dzięki któremu mówimy dziś o okresie obiegu planet wokół Słońca, a nie Ziemi, nic w tej sprawie nie zmieniło.



Dziś jednak wiemy, że muzyczne stosunki okresów zdarzają się w naszym Układzie Słonecznym. Z taką sytuacją mamy do czynienia dla niektórych planet karłowatych i planetoid położonych dalej od Słońca niż Neptun. Okazuje się, że stosunkiem okresów Neptuna i Plutona jest kwinta. Tę własność ma nie tylko Pluton – oprócz niego istnieją także mniejsze ciała niebieskie zwane plutinami (albo bardziej po polsku plutonkami), okrążające Słońce 2 razy na każde 3 okrążenia naszej gwiazdy przez Neptuna. Z kolei planetoidy zwane tutinami (czyt. tutinami, od ang. *two*) obiegają Słońce raz na dwa obiegi Neptuna, co odpowiada – jak już możecie sami stwierdzić – częstotliwości o oktawę niższą.

Dzieje się tak, gdyż dzięki swojej wielkiej masie Neptun stabilizuje orbity planetek krążących wokół Słońca w rezonansie (a może lepiej byłoby powiedzieć – w konsonansie?) z jego obiegiem. Grecy mieli jednak intuicję!

Marcin BRAUN

Klub 44 M

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m i!} = 44$$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2023

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
857 ($WT = 1,39$) i 858 ($WT = 3,60$)
z numeru 3/2023

Norbert Porwol	Essen	45,16
Paweł Najman	Kraków	43,16
Radosław Kujawa	Wrocław	41,33
Marcin Kasperski	Warszawa	40,29
Michał Adamaszek	Kopenhaga	39,80
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,27
Janusz Fiett	Warszawa	36,16
Szymon Tur		35,35
Piotr Kumor	Olsztyn	35,26
Paweł Kubit	Kraków	34,44
Marek Spychała	Warszawa	31,52

Do matematycznego Klubu 44 dołącza z dalekiej Nadrenii pan Norbert Porwol. Witamy!

Im większa stała C , tym lepsze rozwiązanie.

863. Niech p będzie liczbą pierwszą spełniającą podany warunek. Gdyby była to liczba postaci $4x + 1$, mielibyśmy $p + 4x^2 = (2x + 1)^2$, wbrew żądaniu, by wartością wyrażenia $p + 4k^2$ ($0 < k < p$) były liczby pierwsze. Zatem $p = 4x - 1$ dla pewnego całkowitego $x \geq 1$. Możemy również napisać $p = 4y - 9$, gdzie oczywiście $y = x + 2$.

Weźmy najpierw pod uwagę przypadek, gdy któraś z liczb x, y ma dzielnik nieparzysty $d > 1$. Gdyby był to dzielnik liczby x , wówczas, biorąc $k = \frac{1}{2}(d-1)$ (i zauważając, że skoro $d \leq x$, to $0 < k < p = 4x-1$), otrzymalibyśmy

$$p + 4k^2 = 4x - 1 + (d-1)^2 = 4x + d^2 - 2d;$$

to liczba złożona, bo dzieli się przez d (i jest większa niż d).

W takim razie jedynie y może mieć dzielnik nieparzysty $d > 1$. Jeśli $d = 3$, wówczas liczba pierwsza $p = 4y - 9$ dzieli się przez 3, czyli równa się 3. Sprawdzamy, że $p = 3$ spełnia wymagany warunek.

Dalej przyjmijmy, że $d > 3$. Bierzemy $k = \frac{1}{2}(d-3)$ (gdzie znów $d \leq y$, więc $0 < k < p = 4y-9$) i dostajemy

$$p + 4k^2 = 4y - 9 + (d-3)^2 = 4y + d^2 - 6d;$$

jak poprzednio, to liczba złożona, bo dzieli się przez d (i jest większa niż d , skoro $y \geq d \geq 5$).

Pozostała możliwość, że żadna z liczb x, y nie ma dzielnika nieparzystego $d > 1$, czyli że obie są potęgami dwójki. Przy tym różnią się o 2, więc muszą to być liczby $x = 2$, $y = 4$. Wyznaczają liczbę pierwszą $p = 7$. Sprawdzamy, że i ona spełnia wymagany warunek.

Stąd odpowiedź: szukane liczby p to 3 i 7, i tylko one.

864. Przyjmijmy, że $x_1 \leq \dots \leq x_m < 0 \leq x_{m+1} \leq \dots \leq x_n$. Suma wszystkich x_i jest zerowa, wobec czego

$$(*) \quad \sum_{i=1}^m |x_i| = \sum_{i=m+1}^n |x_i| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Weźmy pod uwagę sumę liczb nieujemnych, którą oznaczymy S , oraz sumę niektórych jej składników,

Zadania z matematyki nr 867, 868

Redaguje Marcin E. KUCZMA

867. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geq 3$, dla których istnieje n -elementowy zbiór różnych liczb całkowitych M o następującej własności: w każdym trójelementowym podzbiorze zbioru M są dwie liczby, których suma jest potągą liczby 2 o wykładniku całkowitym nieujemnym.

868. Ciąg nieskończony a_1, a_2, \dots jest dany wzorami: $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Wykazać istnienie i znaleźć wartość granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{2n})$.

Zadanie 868 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązań zadań z numeru 6/2023

Przypominamy treść zadań:

863. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze $p > 2$ takie, że każda z liczb $p + 4k^2$, gdzie $k = 1, 2, \dots, p-1$, także jest liczbą pierwszą.

864. Znaleźć liczbę $C > 0$ o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ oraz dla każdego układu liczb rzeczywistych x_1, \dots, x_n spełniającego warunki $x_1 \leq \dots \leq x_n$ oraz $x_1 + \dots + x_n = 0$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n ix_i \geq Cn \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

oznaczoną S' :

$$S = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j), \quad S' = \sum_{1 \leq j \leq m < k \leq n} (x_k - x_j)$$

(m, n to stałe; sumowanie po wszystkich wskazanych parach j, k). Jasne, że $S \geq S'$. Przekształcamy te wyrażenia:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} x_k - \sum_{j=1}^n \sum_{k=j+1}^n x_j = \\ &= \sum_{k=1}^n (k-1)x_k - \sum_{j=1}^n (n-j)x_j = \sum_{i=1}^n (2i-n-1)x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n 2ix_i - (n+1) \sum_{i=1}^n x_i = 2 \sum_{i=1}^n ix_i \end{aligned}$$

(skorzystaliśmy z założenia $\sum x_i = 0$); i druga suma:

$$\begin{aligned} S' &= m \sum_{k=m+1}^n x_k - (n-m) \sum_{j=1}^m x_j = \\ &= m \sum_{k=m+1}^n |x_k| + (n-m) \sum_{j=1}^m |x_j| = \\ &= m \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x_i| + (n-m) \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x_i| = \frac{1}{2} \cdot n \sum_{i=1}^n |x_i| \end{aligned}$$

(użyliśmy równości (*)). Nierówność $S \geq S'$, przepisana teraz jako

$$\sum_{i=1}^n ix_i \geq \frac{1}{4} \cdot n \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

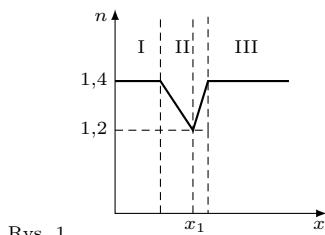
pokazuje, że $C = \frac{1}{4}$ jest stałą uniwersalną, o jaką chodzi. Zwiększyć jej nie można, o czym świadczy przykład: $n = 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ (w którym $S = S'$).

[Michał Adamaszek, autor zadania, zaproponował powyższe rozwiązanie. Zadanie daje się zrobić kilkoma sposobami, ale to autorskie rozumowanie wydaje się najzręczniejsze.]

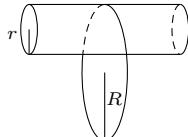
Klub 44 F



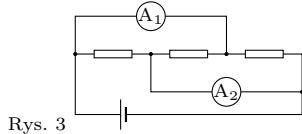
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2023



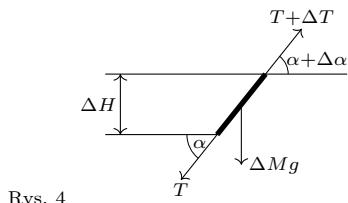
Rys. 1



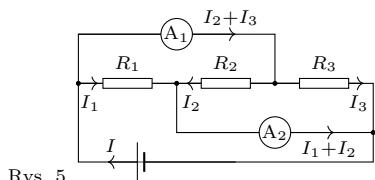
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Zadania z fizyki nr 764, 765

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

764. Na rysunku 1 pokazana jest zależność współczynnika n załamania ośrodków I, II i III od współrzędnej x . Wąska wiązka światła monochromatycznego pada na granicę rozdziału ośrodków I i II. Dla jakich kątów padania światło przejdzie do ośrodka III?

765. Na nieruchomy poziomy walec o promieniu r nałożona jest cienka obręcz o promieniu R (rys. 2). Znaleźć okres małych drgań obręczy w płaszczyźnie pionowej. Nie ma poślizgu między obręczą i walem.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2023

Przypominamy treść zadań:

760. Cienki, giętki sznurek o długości $l = 1\text{ m}$ i masie $M = 1\text{ kg}$ przyczepiony jest dwoma końcami do sufitu. Odległość od sufitu do środka sznurka $H = 0,1\text{ m}$. Znaleźć naprężenie sznurka w najniższym punkcie oraz w odległości $H/2$ od sufitu.

761. W obwodzie przedstawionym na rysunku 3 wskazania amperomierzy A_1 i A_2 wynoszą, odpowiednio, $0,3\text{ A}$ i $0,2\text{ A}$. Po zamianie dwóch oporników miejscami wskazania te nie zmieniły się. Jakie jest natężenie prądu płynącego przez baterię? Oporы wewnętrzne amperomierzy i baterii są zaniedbywalne.

760. Rozważmy mały element sznurka o masie ΔM , który znajduje się na wysokości h , licząc od najniższego punktu (rys. 4). Ponieważ jego długość jest bardzo mała, przyrost kąta nachylenia sznurka $\Delta\alpha$ jest również mały. Warunek równowagi wybranego elementu w kierunku poziomym ma postać:

$$(T + \Delta T) \cos(\alpha + \Delta\alpha) = T \cos\alpha.$$

W przybliżeniu małych kątów

$$(1) \quad \Delta T \cos\alpha = T \Delta\alpha \sin\alpha.$$

Warunek równowagi w kierunku pionowym wyraża równanie

$$(T + \Delta T) \sin(\alpha + \Delta\alpha) = T \sin\alpha + \Delta M g,$$

gdzie $\Delta M = M \Delta H / l \sin\alpha$, stąd

$$(2) \quad T \Delta\alpha \cos\alpha + \Delta T \sin\alpha = \Delta M g.$$

Z (1) i (2) otrzymujemy $\Delta T = Mg\Delta H / l$. Wynika stąd, że naprężenie sznurka zmienia się z wysokością h , zgodnie z wzorem $T = T_0 + Mgh/l$, gdzie T_0 jest szukanym naprężeniem w najniższym punkcie.

W punkcie zawieszenia sznurka $T_H = T_0 + MgH/l$. Składowa pozioma siły T_H wynosi T_0 , a pionowa jest równa połowie ciężaru sznurka, zatem

$$T_H^2 = T_0^2 + M^2 g^2 H^2 / l^2 + 2MgHT_0 / l = T_0^2 + M^2 g^2 / 4.$$

Naprężenie sznurka w najniższym punkcie wynosi:

$$T_0 = \frac{Mgl}{8H} \left(1 - \frac{4H^2}{l^2} \right) = 12N.$$

W odległości $H/2$ od sufitu: $T_{H/2} = T_0 + \frac{MgH}{2l} = 12,5N$.

761. Z II prawa Kirchhoffa dla oczek zawierających amperomierz i dwa oporniki (rys. 5) wynika, że napięcia na wszystkich opornikach są takie same. Warunki zadania spełnia zamiana środkowego opornika z jednym ze skrajnych, prowadząca do równości:

- a) $R_1 = R_2$, b) $R_2 = R_3$.

Zamiana skrajnych oporników (czyli równość $R_1 = R_3$) jest niemożliwa, bo w takim przypadku wskazania obu amperomierzy byłyby takie same).

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązań tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Migawki z nieradioaktywnych podróży

Najwyższy szczyt Bretanii, Roc'h Ruz, wznosi się na niezbyt imponującą wysokość 385 metrów nad poziomem morza. Trudno nawet powiedzieć, że wieńczy on jakąś górę, bo okoliczny krajobraz składa się przeważnie z łagodnych wzgórz, co sprawia, że tutejsze szlaki są popularne wśród rodzin z dziećmi. W panoramie szczytowej uwagę zwracają duże betonowe budynki nad jeziorem Saint-Michel. To pozostałości dawnej elektrowni jądrowej w Brennilis.

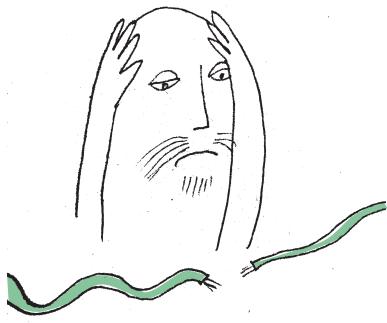
Zakład powstał w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku i wykorzystywał reaktor grafitowo-gazowy. Grafit był moderatorem, czyli substancją spowalniającą wytwarzane w reakcjach rozszczepienia neutrony, tak by mogły one inicjować kolejne reakcje. Gaz, w tym przypadku był to dwutlenek węgla, chłodził reaktor. Taka konstrukcja była typowa dla wczesnego etapu rozwoju energetyki jądrowej. Obecnie w obiektach komercyjnych stosuje się głównie reaktory chłodzone wodą.

Elektrownia w Brennilis była przede wszystkim instalacją doświadczalną i została zbudowana w celu przetestowania różnych aspektów technologicznych związanych z energetyką jądrową. Jej moc (70 MW) stanowiła zaledwie kilka procent mocy, jaką oferują współczesne konstrukcje.

Obiekt był aż dwukrotnie celem ataków terrorystycznych Bretońskiego Frontu Wyzwolenia – organizacji, która w połowie dwudziestego wieku domagała się większej autonomii dla regionu – kiedy to przeprowadzano zamachy bombowe. W późniejszym okresie działalności twórcy BFW zrezygnowali z terroryzmu i promowali ideę Europy wielu regionów.

Pierwszy zamach przeprowadzono 15 sierpnia 1975 roku. Dwa wybuchy nieznacznie uszkodziły turbinę i zniszczyły kable telefoniczne. Drugi, w 1979 roku, wydarzył się na zewnątrz budynków reaktora, zniszczone zostały przewody elektryczne łączące elektrownię z siecią, co spowodowało wstrzymanie pracy elektrowni. Jest to jedyny w historii incydent tego rodzaju.

Niezależnie od wątpliwości dotyczących celów zamachowców, którzy mogli nie zdawać sobie sprawy, co mogliby się stać, gdyby udało się spowodować większe zniszczenia obiektu, oba ataki wykazały, że elektrownia jądrowa jest stosunkowo odporna na zagrożenia stwarzane przez zewnętrzne czynniki ludzkie. Znacznie większe wyzwania bezpieczeństwa stwarzało samo sterowanie reaktorem i dlatego w 1985 roku, po dwóch dekadach funkcjonowania zakładu, podjęto decyzję o jego zamknięciu.



Proces zamykania elektrowni jądrowej jest złożony i czasochłonny. Pierwszy etap trwał dziesięć lat i polegał na niedodawaniu nowego paliwa, usunięciu istniejącego oraz opróżnieniu instalacji chłodzących. Przed rozpoczęciem kolejnego przeprowadzono szereg konsultacji społecznych, w szczególności związanych z rekultywacją terenu po elektrowni. Następnie, od 1997 roku, przeprowadzono odkażanie i rozbiorkę budynków – z wyjątkiem samego reaktora, usunięcie odpadów radioaktywnych oraz trwałe zabudowanie betonowym płaszczem ochronnym zbiornika reaktora. Nie obyło się bez trudności, takich jak zalanie budynków w 2000 roku i pożar w kolejnym roku, ale nie spowodowały one istotnych zagrożeń.

Od osiemnastu lat trwa ostatni etap likwidacji elektrowni, polegający na demontażu instalacji mających dawniej bezpośredni kontakt z promieniowaniem jonizującym – zbiornika reaktora, wytwornic pary i budynku pomocniczego. Przez tak długi czas przestały być one w istotny sposób radioaktywne, można więc ich elementy bezpiecznie przenieść do odpowiedniego stanowiska składowania odpadów. Z tego też powodu nie ma już specjalnych ograniczeń dostępu do zakładu, więc ostatniego lata autor tych słów mógł tam swobodnie wjechać. Na terenie elektrowni posadzono zagajnik brzozowy. Do 2040 roku, kiedy to procedura zamknięcia elektrowni ma się całkowicie zakończyć, będzie to już prawdziwy las bez śladów ludzkiej działalności.

Krzysztof TURZYŃSKI



Wektory – część 2

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

W poprzednim kąciku pisałem o podstawach rachunku wektorowego. Tu pójdziemy o krok dalej. Rozważmy niezerowe wektory \vec{u} i \vec{v} na płaszczyźnie. Możemy je tak przesunąć równolegle, by miały wspólny początek: $\vec{u} = \overrightarrow{AU}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AV}$. Niech $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{UAV}| = \alpha$. Dla wektorów \vec{u} i \vec{v} określamy ich *iloczyn skalarny*

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha.$$

Jeśli co najmniej jeden z wektorów \vec{u} , \vec{v} jest zerowy, to kąta α nie da się określić, ale długość wektora zerowego wynosi zero – możemy zatem przyjąć, że wtedy iloczyn skalarny również jest zerowy. Kąt pomiędzy wektorami niezerowymi też nie jest jednoznacznie zdefiniowany, bo zamiast α można wziąć $360^\circ - \alpha$. Cosinusy tych kątów są jednak równe, więc nie psuje to powyższej definicji iloczynu skalarnego.

Niech $\vec{u} = (x_u, y_u)$ i $\vec{v} = (x_v, y_v)$ znowu będą niezerowe. Umieścimy je w układzie współrzędnych w taki sposób, by $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ dla $O = (0, 0)$. Niech φ i ψ będą miarami kątów XOU i XOV , liczymi od osi OX przeciwne do ruchu wskazówek zegara (rysunek). Wtedy $\sin \varphi = \frac{y_u}{|\vec{u}|}$ oraz $\cos \varphi = \frac{x_u}{|\vec{u}|}$, analogicznie dla wektora \vec{v} . Bez utraty ogólności niech $\varphi \geq \psi$. Wówczas

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi - \psi) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) = x_u x_v + y_u y_v.$$

Zauważmy, że powyższy wzór jest prawdziwy również wtedy, gdy co najmniej jeden z wektorów \vec{u} , \vec{v} jest zerowy.

Dla wszystkich wektorów \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} i skalarów a , b zachodzą równości:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}, \quad (a\vec{u}) \circ (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \circ \vec{v}), \quad \vec{u} \circ (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w}, \quad \vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2.$$

(Nietrudne dowody pozostawiam Czytelnikowi.) Pierwsza z nich to przemienność, druga – zgodność z mnożeniem przez skalar, trzecia – rozdzielność względem dodawania. Te równości są bardzo pomocne w przekształceniach wyrażeń algebraicznych zawierających wektory. W szczególności z pierwszej i trzeciej wynika, że jeśli mnożymy skalarnie sumę wektorów przez sumę wektorów, to możemy zrobić tak samo, jak ze zwykłymi sumami algebraicznymi – pomnożyć każdy składnik przez każdy i wszystko dodać. W szczególności dozwolone jest używanie wzorów skróconego mnożenia.

W praktyce olimpijskiej własności iloczynu skalarnego wykorzystuje się najczęściej do dowodzenia prostopadłości. Niezerowe wektory \vec{u} i \vec{v} są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy kąt między nimi ma miarę $\alpha = 90^\circ$ (lub $\alpha = 270^\circ$). Jest to równoważne stwierdzeniu, że $\cos \alpha = 0$, co z kolei jest równoważne temu, że $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$. Krótko mówiąc – prostopadłość prostych AB i CD jest równoważna równości $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{CD} = 0$.

Zadania

1. Na płaszczyźnie leżą cztery różne punkty A , B , C , D . Wykazać, że jeśli $AB \perp CD$ i $AC \perp BD$, to również $BC \perp AD$.
2. Czworokąty $ABCD$ i $APQR$ są kwadratami (kolejność wierzchołków podano przeciwne do ruchu wskazówek zegara). Punkt M jest środkiem odcinka BR . Dowieść, że $AM \perp DP$.
3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = |AC|$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , punkt D jest środkiem odcinka AB , a punkt E jest środkiem ciężkości trójkąta ACD . Udowodnić, że $CD \perp OE$.
4. Boki trójkąta ABC są podstawami trójkątów równoramiennejnych BCD , CAB , ABF , zbudowanych na zewnątrz niego. Przez punkty A , B , C przeprowadzono proste prostopadłe odpowiednio do odcinków EF , FD , DE . Udowodnić, że te proste przecinają się w jednym punkcie.
5. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie cztery niezerowe wektory na płaszczyźnie, że suma każdych dwóch spośród nich jest prostopadła do sumy dwóch pozostałych.
6. W czworościanie $ABCD$ zachodzi równość $|\vec{BAC}| + |\vec{BAD}| = 180^\circ$. Dwusieczna kąta CAD przecina odcinek CD w punkcie K . Wykazać, że kąt BAK jest prosty.



Seria obserwacji wykonanych za pomocą instrumentu MUSE na VLT ESO

Zdjęcia pokazują ewolucję chmury gazu wyrzuconej podczas zderzenia sondy DART z Dimorphos - asteroidą oddaloną od Ziemi o 11 mln kilometrów. Pierwsze zdjęcie zostało wykonane 26 września 2022 roku, na dzień przed kontrolowanym uderzeniem. Ostatnie ze zdjęć znajdujące się na panelu zostało wykonane prawie miesiąc po zderzeniu. Strzałka w każdym panelu oznacza kierunek położenia Słońca. Poziomy pasek odpowiada 500 kilometrom. Więcej na temat zderzenia sondy z asteroidą w stałym dziale **Prosto z Nieba**.