Zadania dodatkowe

Termin: wrzesień

Zadanie 1. Niech $x = 10^{10}$ oraz $y = x^x$. Ile cyfr ma liczba y^y?

Zadanie 2. Jaki jest następny wyraz ciągu: $1, 2, 4, 7, 8, 11, 14, 16, 17, 19, 22, 26, 28, 29, 41, 44$?
Wskazówka: W opowiadaniu „Srebrny płomień” o Sherlocku Holmesie jest następujący dialog:
— Jest jeszcze coś, na co chciałby pan zwrócić moją uwagę?
— Na dziwny przypadek psa nocną porą.
— Pies w nocy milczał.
— To jest właśnie dziwny przypadek – zauważył Sherlock Holmes.

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne dodatnie, które można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb złożonych.

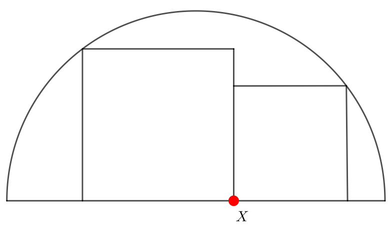
Zadanie 4. Niech a, b, c, d, x będą takimi liczbami całkowitymi, że $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) - 4 = 0$ oraz a, b, c, d są parami różne. Wykaż, że $x = \frac{1}{4}(a+b+c+d)$.

Zadanie 5. Czy istnieją takie liczby niewymierne a, b, że a^b jest liczbą wymierną?

Termin: październik

Zadanie 6. Pociąg Pendolino jedzie na pewnej trasie ze średnią prędkością o 25% większą niż Intercity. O ile procent krócej trwa podróż tym pociągiem?

Zadanie 7. Rozważmy dwa kwadraty „wpisane” w półokrąg. W którym miejscu podstawy półokręgu powinien być punkt X, aby suma pól kwadratów była największa?



Zadanie 8. Rozwiąż równanie $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$.

Zadanie 9. Niech $a = \sqrt[4]{2}$. Która liczba jest większa:

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}} \qquad \text{czy} \qquad 10^{10^{10}}?$$

Zadanie 10. Rozważmy zbiór $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$. Ile jest podzbiorów zbioru A, których suma elementów wynosi 2 045 247?

Termin: listopad

Zadanie 11. Niech dany będzie 100-kąt foremny. Numerujemy jego boki kolejnymi dodatnimi liczbami naturalnymi. Pod jakim kątem przecinają się proste zawierające boki o numerach 88 i 99?

Zadanie 12. Rozważmy turniej siatkarski, w którym bierze udział 25 drużyn. Każda drużyna rozegrała z każdą dokładnie jeden mecz i nie było remisów. Niech w_i oznacza liczbę wygranych drużyny i, zaś p_i liczbę porażek drużyny i dla $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$. Wykazać równość:

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + \ldots + w_{25}^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \ldots + p_{25}^2,$$

którą krócej możemy zapisać:

$$\sum_{i=1}^{25} w_i^2 = \sum_{i=1}^{25} p_i^2.$$

Zadanie 13. Oblicz długość boku n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1.

Zadanie 14. Udowodnij, że jeśli $a > 0$ i $b > a + c$, to funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe.

Zadanie 15. Niech dany będzie wielomian $W(x) = x^5 + x^2 + 1$. Liczby x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 są jego różnymi pierwiastkami (miejscami zerowymi). Oblicz wartość wyrażenia

$$(x_1^2 - 2)(x_2^2 - 2)(x_3^2 - 2)(x_4^2 - 2)(x_5^2 - 2).$$

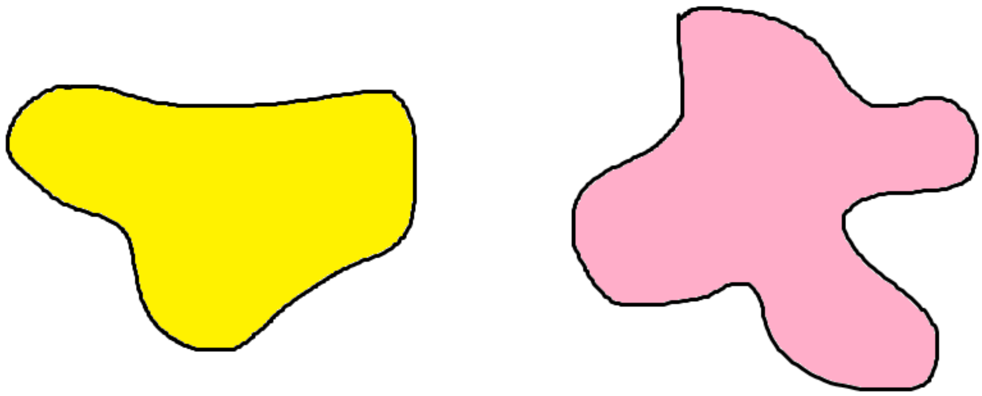
Termin: grudzień

Zadanie 16. Określić wraz z uzasadnieniem, które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe.
1) $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R} :\ y > x + 1$
2) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} :\ y > x + 1$
3) $\exists x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} :\ y > x + 1$
4) $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R} :\ y > x + 1$
5) $\forall y \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} :\ y > x + 1$
6) $\forall y \in \mathbb{R}\, \exists x \in \mathbb{R} :\ y > x + 1$
7) $\exists y \in \mathbb{R}\, \exists x \in \mathbb{R} :\ y > x + 1$
8) $\exists y \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} :\ y > x + 1$

Zadanie 17. Pewien uczeń Sobieskiego jechał do szkoły na hulajnodze elektrycznej z prędkością 10 km/h. Z jaką prędkością powinien wracać ze szkoły, aby średnia prędkość na całej trasie (do szkoły i ze szkoły) była równa 20 km/h?

Zadanie 18. Oblicz $\log\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$.

Zadanie 19. Wykaż, że istnieje prosta, która dzieli dokładnie na pół (pod względem powierzchni) zarówno figurę żółtą jak i różową.



Zadanie 20. Z punktu $A(2022, 2022)$ rysujemy łamaną poprzez poprowadzenie odcinka długości 1 w jednym z dowolnych czterech kierunków (prawo, lewo, góra, dół). Kontynuujemy rysowanie poprzez dorysowanie kolejnych odcinków w jednym z czterech kierunków z punktu, w którym kończy się poprzedni odcinek. Ile jest dróg długości n, które kończą się na prostej o równaniu $y = 2022$?

Termin: styczeń

Zadanie 21. Pewien szachista S aby pojechać na turniej musi rozegrać trzy partie jedna po drugiej i wygrać dwie partie z rzędu. Jako przeciwników ma graczy A i B. Pierwszy z nich należy do klasy mistrzowskiej, a drugi jest początkującym amatorem. W jakiej kolejności powinien z nimi grać: $A-B-A$, czy $B-A-B$?

Zadanie 22. Wiemy, że $a+b+c<0$ oraz równanie $ax^2+bx+c=0$ jest sprzeczne. Jaki znak ma c?

Zadanie 23. O godzinie 12:00 wskazówki zegara pokrywają się. O której godzinie pokryją się ponownie?

Zadanie 24. Wykaż, że ze środkowych w dowolnym trójkącie również można zbudować trójkąt.

Zadanie 25. Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in A$. Rozwiąż równanie $\operatorname{sgn}(|f(x) - g(x)|) = 1$.

Termin: luty

Zadanie 26. Rozważmy liczbę $99!^{99!}$.

- Ile zer ma na końcu ta liczba?
- Załóżmy, że jedna cyfra ma szerokość 2 mm i poruszamy się od końca tej liczby z prędkością światła w kierunku poprzednich cyfr. Po jakim czasie napotkamy pierwszą niezerową cyfrę?
- Jaka będzie ta pierwsza niezerowa cyfra bezpośrednio poprzedzająca ciąg zer?

Zadanie 27. Udowodnij, że liczba $\sqrt{10} - \sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{3}$ jest niewymierna.

Zadanie 28. Czy istnieje na płaszczyźnie 2023 punkty, z których każde trzy to wierzchołki trójkąta rozwartokątnego?

Zadanie 29. Dla jakich n prawdziwa jest równość:

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \ldots + (-1)^n = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \cdot \ldots \cdot (-1)^n \text{ ?}$$

Zadanie 30. Oblicz sumę cyfr liczby $10^{2022} - 10^{2021} + 10^{2020} - 10^{2019} + \ldots + 10^2 - 10^1$.

Termin: marzec

Zadanie 31. Niech $n \in \mathbb{N}_+$. Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n, \\ \vdots \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = n. \end{cases}$

Zadanie 32. Prawdziwa jest równość: $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$ dla parami różnych x, y, z. Oblicz $(xyz)^{2023}$.

Zadanie 33. Prawdziwa jest równość: $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$ dla dodatnich x, y, z. Wykaż, że $x = y = z$.

Zadanie 34. Niech danych będzie nieskończenie wiele worków: jeden z numerem 1, jeden z numerem 2, jeden z numerem 3 itd. W worku z numerem 1 jest nieskończenie wiele kul z numerem 1, w worku z numerem 2 jest nieskończenie wiele kul z numerem 2 itd. Do dużego pudła wrzucamy dowolną skończoną liczbę kul z tych worków. Następnie wyjmujemy jedną kulę z pudełka i w jej miejsce wrzucamy dowolną skończoną liczbę kul o numerach mniejszych (jeśli wyciągniemy kulę z numerem 1, to nie dorzucamy nic, bo nie ma kul z mniejszym numerem). Jeśli zabraknie kul i opróżnimy pudełko – przegrywamy. W przeciwnym wypadku - czyli gdy kul nigdy nie zabraknie – wygrywamy. Jaki może być wynik tej gry (zawsze wygrana, zawsze przegrana, to zależy od wyboru kul)?
Przykład: Jeśli wyciągniemy kulę z numerem 500, to w jej miejsce możemy wrzucić 10 milionów kul z numerem 499, 20 miliardów kul z numerem 450, 25 kul z numerem 100 oraz 987654321123456789 kul z numerem 498 itd.

Zadanie 35. Niech $X = \{1, 2, 3\}$. $Y = \{4, 5, 6\}$. Ile jest:
a) funkcji ze zbioru X w zbiór Y?
b) funkcji **rosnących** ze zbioru X w zbiór Y?
c) funkcji **malejących** ze zbioru X w zbiór Y?
d) funkcji **stałych** ze zbioru X w zbiór Y?
e) funkcji **różnowartościowych (iniekcji)** ze zbioru X w zbiór Y?
f) funkcji **na (suriekcji)** ze zbioru X w zbiór Y?

Termin: kwiecień

Zadanie 36. Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 23 \\ a + 2b + 4c = 22 \end{cases}$.

Zadanie 37. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie są długości 1. Przecinamy ten ostrosłup płaszczyzną, która przecina wszystkie krawędzie boczne. W efekcie otrzymany przekrój jest czworokątem $ABCD$, który nie jest trapezem. Punkt przecięcia prostych AB i CD oznaczmy M. Podaj wszystkie wartości jakie może przyjąć odległość punktu M od płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

Zadanie 38. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zbiór rozwiązań równania $f(x) = 0$ to $\mathbb{Q}$. Znajdź największy możliwy zbiór rozwiązań równania: $f([x]) + f(\{x\}) = 0$.

Zadanie 39. Ojciec i syn mają razem 147 lat. Ojciec ma dwa razy tyle lat, ile syn miał wtedy, kiedy ojciec miał tyle ile syn ma teraz. Ile lat ma ojciec, a ile syn?

Zadanie 40. Niech $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Znajdź wszystkie funkcje $f : X \to X$ spełniające warunek $\forall x, y \in X : xf(y) = yf(x)$.

Rozwiązanie 1. Liczymy po kolei

$$y = \left(10^{10}\right)^{10^{10}} = 10^{10 \cdot 10^{10}} = 10^{10^{11}}$$

. Tak więc:

$$y^y = \left(10^{10^{11}}\right)^{10^{10^{11}}} = 10^{10^{11} \cdot 10^{10^{11}}} = 10^{10^{11+10^{11}}}.$$

A zatem liczba y^y ma $10^{11+10^{11}} + 1$ cyfr (bo liczba 10^k ma $k + 1$ cyfr).

Rozwiązanie 2. Wskazówka podpowiada nam, że warto zająć się czymś, czego nie ma, czego brakuje. W powyższym ciągu „brakuje” następujących liczb: 3,5,6,9,10,12,13,15,18,20,21,23,24,25,27, 30, 31, 32,33,34,35,36,37,38,39,40,42,43. Co je łączy? Wszystkie te liczby są powiązane z trójką i piątką: są ich wielokrotnościami lub zawierają te cyfry. Tak więc następną liczbą będzie 46.

Rozwiązanie 3. Zauważmy, że każdą liczbę n można zapisać w postaci $n = \dfrac{n^3}{n^2}$. Zarówno licznik jak i mianownik są liczbami złożonymi, więc w podany sposób można przedstawić każdą liczbę naturalną dodatnią.

Rozwiązanie 4. Po przeniesieniu 4 na prawą stronę mamy iloczyn czterech liczb całkowitych równy 4. Co więcej liczby te są różne, bo a, b, c, d były różne. Liczba 4 ma łącznie 4 różne dzielniki całkowite, więc powyższy iloczyn składa się z liczb: $-2, -1, 1, 2$. Bez straty ogólności zachodzi więc:

$$\begin{cases} x - a = -2, \\ x - b = -1, \\ x - c = 1, \\ x - d = 2. \end{cases}$$

Dodając stronami otrzymujemy $4x - (a + b + c + d) = 0$ skąd $x = \dfrac{a + b + c + d}{4}$.

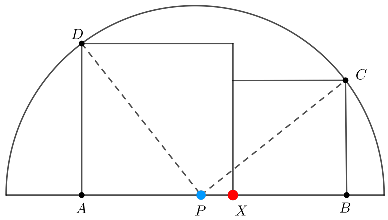
Rozwiązanie 5. Rozważmy liczbę $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ciężko stwierdzić, czy ta liczba jest wymierna, czy nie, ale w tej chwili nie ma to znaczenia. Są jednak dwie możliwości:

- jeśli jest ona wymierna, to znaleźliśmy takie liczby a i b, bo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
- jeśli natomiast jest ona niewymierna, to podnosząc ją do potęgi $\sqrt{2}$ otrzymamy liczbę wymierną, bowiem $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}^2 = 2$.

To oznacza, że takie liczby istnieją, choć z powyższego rozumowanie nie jesteśmy w stanie wskazać, która para jest dobra.
Jest to przykład dowodu niekonstruktywnego, czyli takiego, w którym dowodzimy, że coś istnieje (np. liczba, zbiór, funkcja), jednocześnie nie podając jak ten obiekt wygląda. Co ciekawe, dopiero w roku 1930 wykazano, że liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie 6. Wprowadźmy oznaczenia:
v_1 – prędkość Intercity, $v_2 = 1,25v_1$ – prędkość Pendolino, $s_1 = s_2 = s$. Wtedy:
$t_1 = \frac{s}{v_1}$, $t_2 = \frac{s}{1,25v_1}$. Zatem
$\dfrac{\frac{s}{v_1} - \frac{s}{1,25v_1}}{\frac{s}{v_1}} \cdot 100\% = \dfrac{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{1,25v_1}}{\frac{1}{v_1}} \cdot 100\% = \dfrac{1 - \frac{4}{5}}{1} \cdot 100\% = \dfrac{1}{5} \cdot 100\% = 20\%,$
gdzie w pierwszym kroku podzieliliśmy licznik i mianownik przez s, a w drugim pomnożyliśmy przez v_1.

Rozwiązanie 7. Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku, przy czym P jest tak wybrany na AB, że $|AP| = |BC|$ oraz $|PB| = |AD|$. Z twierdzenia Pitagorasa: $|PC| = |PD|$. Tak więc punkt P leży na średnicy półokręgu i jest równo odległy od dwóch punktów na półokręgu. Musi być zatem środkiem tego półokręgu.
Z jednej strony $|PC| = \sqrt{a^2 + b^2}$, gdzie a, b to odpowiednio boki kwadratów, a z drugiej $|PC| = r = const$. Tak więc niezależnie od długości boków dwóch kwadratów liczba $\sqrt{a^2 + b^2}$ jest stała, a zatem suma pól kwadratów, czyli $a^2 + b^2$ jest stała. Punkt X można więc umieścić gdziekolwiek – szukane pole będzie zawsze wynosić tyle samo.



Rozwiązanie 8. Zauważmy najpierw oczywistą nierówność: $-40x \leqslant -40[x]$.
$(2x-3)(2x-17) = 4x^2 - 40x + 51 \leqslant 4x^2 - 40[x] + 51 = 0$.
Nierówność $(2x-3)(2x-17) \leqslant 0$ jest spełniona przez $x \in \left(\frac{3}{2}, \frac{17}{2}\right)$, a więc $[x] \in \left(\left[\frac{3}{2}\right], \left[\frac{7}{12}\right]\right) = [1, 8]$. To oznacza, że x jest liczbą dodatnią i możemy go wyznaczyć z wyjściowego równania: $x = \frac{1}{2}\sqrt{40[x] - 51}$.
Rozważmy po kolei przypadki:

- $[x] = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{40 - 51}$ Sprzeczność,
- $[x] = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{29}$,
- $[x] = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{69}$,
- $[x] = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{109}$,
- $[x] = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{149}$,
- $[x] = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{189}$,
- $[x] = 7 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{229}$,
- $[x] = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{269}$,

Sprawdzając teraz, czy część całkowita otrzymanych *iksów* jest równa odpowiednim liczbom całkowitym (np. czy $\left[\frac{1}{2}\sqrt{109}\right] = 4$) otrzymujemy równość tylko w czterech przypadkach, dla: $x \in \left\{\frac{1}{2}\sqrt{29}, \frac{1}{2}\sqrt{189}, \frac{1}{2}\sqrt{229}, \frac{1}{2}\sqrt{269}\right\}$

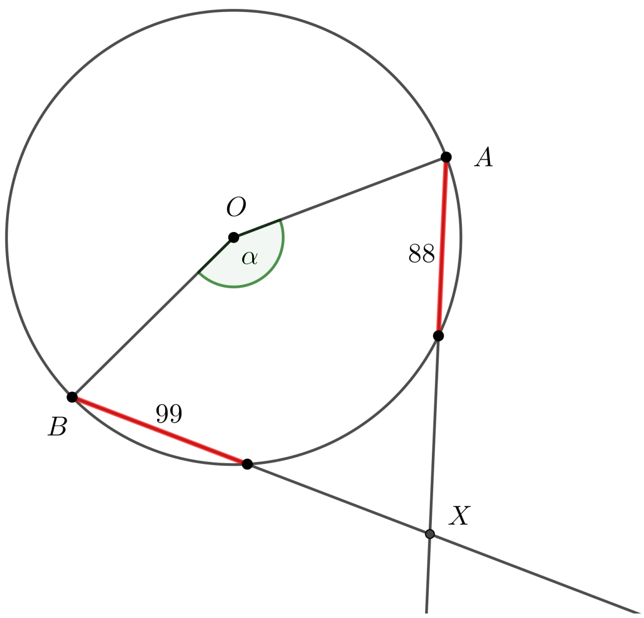
Rozwiązanie 9. Zauważmy, że $a^{16} = 16$, a zatem

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}} = a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}} = a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}} = \cdots = a^{a^{16}} = a^{16} = 16,$$

a więc liczba $10^{10^{10}}$ jest znacznie większa.

Rozwiązanie 10. Suma wszystkich elementów zbioru A wynosi $\frac{1+2022}{2} \cdot 2022 = 2023 \cdot 1011 =$2 045 253. Suma elementów podzbioru zbioru A będzie równa 2 045 247 $\Leftrightarrow$ suma elementów dopełnienia tego zbioru będzie równa 6. Ale takimi podzbiorami są jedynie $\{6\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}$. Takich zbiorów jest 4, a więc szukanych w zadaniu zbiorów też jest 4.

Rozwiązanie 11. Narysujmy promienie do końców obu boków i wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



Stukąt można podzielić promieniami na 100 trójkątów równoramiennych, gdzie każdy ma między ramionami kąt $\frac{360^\circ}{100}$. Zaznaczony na rysunku kąt α jest wyznaczony przez 12 takich trójkątów – ma zatem miarę $12 \cdot \frac{360^\circ}{100} = 43,2^\circ$. W każdym takim trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę $\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{100}\right) : 2 = 88,2^\circ$. Jest to więc miara kąta OAX oraz OBX. Zatem z sumy kątów w czworokącie $|\sphericalangle AXB| = 360^\circ - 43,2^\circ - 2 \cdot 88,2^\circ = 140,4^\circ$. Tak więc proste przecinają się pod kątem $140,4^\circ$ (lub $39,6^\circ$ gdy chcemy mieć kąt ostry).

Rozwiązanie 12. Zauważmy, że $\sum_{i=1}^{25} w_i = \sum_{i=1}^{25} p_i$, bo każdemu zwycięstwu odpowiada dokładnie jedna porażka. Rozpiszmy:

$$\sum_{i=1}^{25} w_i^2 - \sum_{i=1}^{25} p_i^2 = \sum_{i=1}^{25} (w_i^2 - p_i^2) = \sum_{i=1}^{25} (w_i - p_i)(w_i + p_i) = \ldots.$$

Wiemy ponadto, że dla każdego i zachodzi $w_i + p_i = n - 1$ (bo to liczba gier każdego gracza). Tak więc:

$$\ldots = \sum_{i=1}^{25} (w_i - p_i)(n-1) = (n-1) \sum_{i=1}^{25} (w_i - p_i) = (n-1) \left(\sum_{i=1}^{25} w_i - \sum_{i=1}^{25} p_i \right) = (n-1) \cdot 0 = 0.$$

Przenosząc na drugą stronę otrzymujemy tezę.

Rozwiązanie 13. Z twierdzenia cosinusów

$$x^2 = 1 + 1 - 2\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right).$$

Zatem

$$x = \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\left(2 \cdot \frac{180^\circ}{n}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{180^\circ}{n}} = 2\left|\sin\frac{180^\circ}{n}\right| = 2\sin\frac{180^\circ}{n},$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ oraz faktu, że kąt $\frac{180^\circ}{n}$ należy do pierwszej ćwiartki.

Rozwiązanie 14. Rozważmy dwa przypadki:

- Jeśli $c < 0$, to $-c > 0$. Wtedy $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + 4a \cdot (-c) > 0$, a więc są dwa rozwiązania.
- Jeśli $c \geqslant 0$. Wtedy $a + c > 0$ oraz $\Delta = b^2 - 4ac > (a+c)^2 - 4ac = a^2 - 2ac + b^2 = (a-c)^2 \geqslant 0$, a więc $\Delta > 0$.

Rozwiązanie 15. Skoro wielomian ma 5 pierwiastków i jest stopnia 5, to możemy go zapisać w postaci $x^5 + x^2 + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$. Podstawiając $x = \sqrt{2}$ oraz $x = -\sqrt{2}$ otrzymujemy:

$$3 + 4\sqrt{2} = (\sqrt{2} - x_1)(\sqrt{2} - x_2)(\sqrt{2} - x_3)(\sqrt{2} - x_4)(\sqrt{2} - x_5)$$

oraz

$$3 - 4\sqrt{2} = (-\sqrt{2} - x_1)(-\sqrt{2} - x_2)(-\sqrt{2} - x_3)(-\sqrt{2} - x_4)(-\sqrt{2} - x_5).$$

Wyciągając znaki „$-$” przed nawiasy z drugiego wyrażenia, a następnie mnożąc powyższe dwie równości stronami otrzymujemy:

$$(3+4\sqrt{2})(3-4\sqrt{2}) = -(\sqrt{2}-x_1)(\sqrt{2}-x_2)(\sqrt{2}-x_3)(\sqrt{2}-x_4)(\sqrt{2}-x_5)(\sqrt{2}+x_1)(\sqrt{2}+x_2)(\sqrt{2}+x_3)(\sqrt{2}+x_4)(\sqrt{2}+x_5).$$

Stosując wzory skróconego mnożenia po obu stronach otrzymujemy

$$9 - 32 = -(2 - x_1^2)(2 - x_2^2)(2 - x_3^2)(2 - x_4^2)(2 - x_5^2).$$

Wyciągając ponownie minusy przed nawiasy po prawej otrzymujemy, że szukana wartość to -23.

Rozwiązanie 16. 1) fałsz np. dla $x = 1, y = 2$.
2) prawda, ponieważ dla dowolnego x możemy przyjąć $y \coloneqq x + 2$
3) prawda np. dla $x = 2, y = 5$
4) fałsz, ponieważ gdyby taki x istniał, to wzięlibyśmy $y \coloneqq x$ i byłoby $x > x + 1$ – sprzeczność.
5) fałsz np. dla $x = 6, y = 5$
6) prawda, ponieważ dla dowolnego y możemy przyjąć $x \coloneqq y - 3$
7) prawda, np. dla $x = 3, y = 5$
8) fałsz, ponieważ gdyby taki y istniał, to wzięlibyśmy $x \coloneqq y$ i byłoby $y > y + 1$ – sprzeczność.

Rozwiązanie 17. Wprowadźmy oznaczenia:
$v_1 = 10\frac{m}{s}$ – prędkość do szkoły, v_2 – prędkość ze szkoły, $s_1 = s_2 = s$. Wtedy:

$$v_{\text{śr}} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{10} + \frac{s}{v_2}} = 20$$

Skracając s otrzymujemy:

$$\frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{v_2}} = 20.$$

$$2 = 20\left(\frac{1}{10} + \frac{20}{v_2}\right)$$

$$2 = 2 + \frac{20}{v_2}$$

$$0 = \frac{1}{v_2},$$

a zatem prędkość powrotna musiałaby być nieskończenie duża. Tak więc szukana prędkość nie istnieje.

Rozwiązanie 18. Niech $\log\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right) = x$. Z definicji:

$$10^x = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} \quad |^2$$

$$10^{2x} = 3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} + 3 - \sqrt{5}$$

$$10^{2x} = 6 + 2\sqrt{9-5}$$

$$10^{2x} = 6 + 4$$

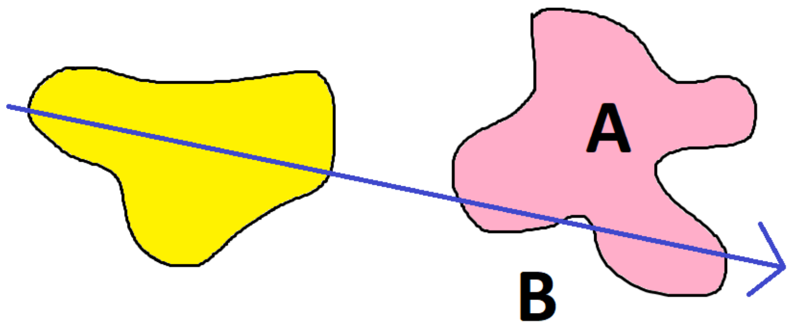
$$10^{2x} = 10$$

z różnowartościowości:

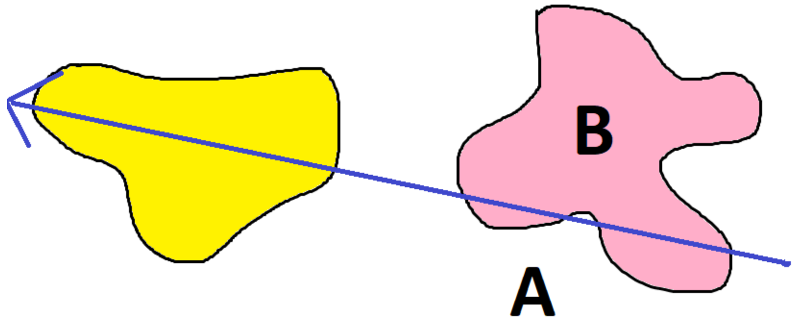
$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie 19. Narysujmy dowolną prostą, która dzieli żółtą figurę na dwie części o tym samym polu oraz wybierzmy jej zwrot (zaznaczony strzałką). Narysowana prosta podzieliła różową figurę na dwie części: A po lewej i B po prawej. Oczywiście jedna z części A lub B może być pusta.



Bez straty ogólności pole(A)¿pole(B). Zmieniamy następnie nachylenie prostej (obracając ją o kąt np. zgodnie z ruchem wskazówek zegara) i ponownie otrzymujemy podział różowej figury na dwie części i tak samo oznaczamy je A i B. W pewnym momencie otrzymamy obrót o 180°. Prosta ta pokryje się z naszą wyjściową prostą, tylko będzie mieć zwrot w drugą stronę.



Strzałka wskazuje kierunek przeciwny, więc części A i B zamieniły się miejscami. Na początku pole(A)¿pole(B), a więc teraz pole(B)¿pole(A). Pole zmienia się wraz z obrotem w sposób ciągły, a więc skoro najpierw różnica pól była dodatnia, a potem ujemna, to gdzieś pomiędzy musi istnieć obrót o taki kąt, że pola są równe[1]

Zadanie to jest dwuwymiarową wersją twierdzenia o kanapce z szynką i serem (które jest w trójwymiarze), mówiącego, że dowolną kanapkę z szynką i serem można przeciąć jednym cięciem tak, aby w każdej z dwóch części było dokładnie tyle samo sera, szynki i chleba.

Rozwiązanie 20. Wprowadźmy oznaczenia:

- ruch w lewo: 01
- ruch w prawo 10
- ruch w górę: 11
- ruch w dół: 00

Wykonamy n ruchów, więc utworzymy ciąg długości $2n$ składający się z cyfr 0 i 1. Skoro zaczynamy „na wysokości" 2022 i na niej chcemy skończyć, to interesują nas takie drogi, w których jest tyle samo ruchów w górę co w dół. Szukamy więc ciągów, w których jest tyle samo jedynek co zer, czyli po n. Wystarczy więc wybrać, na których z $2n$ miejsc ma stanąć n jedynek. Można to zrobić na $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$ możliwości.

Rozwiązanie 21. Niech p_A oznacza prawdopodobieństwo zwycięstwa z bokserem A, zaś p_B prawdopodobieństwo zwycięstwa z bokserem B. Oczywiście $p_A < p_B$. Prawdopodobieństwa porażki wynoszą wtedy odpowiednio $1 - p_A$ oraz $1 - p_B$. W obu kolejnościach walk są trzy przypadki wygranej dwóch partii z rzędu: wygrana wszystkich trzech partii, wygrana pierwszej i drugiej partii, wygrana drugiej i trzeciej partii.

Wybór $A - B - A$

- trzy wygrane – prawdopodobieństwo: $p_A \cdot p_B \cdot p_A$
- wygranie pierwszych dwóch – prawdopodobieństwo: $p_A \cdot p_B \cdot (1 - p_A)$
- wygranie ostatnich dwóch – prawdopodobieństwo: $(1 - p_A) \cdot p_B \cdot p_A$

Sumując te trzy opcje otrzymujemy, że prawdopodobieństwo wygrania dwóch partii z rzędu wynosi $p_A \cdot p_B \cdot (2 - p_A)$.

Wybór $B - A - B$

- trzy wygrane – prawdopodobieństwo: $p_B \cdot p_A \cdot p_B$
- wygranie pierwszych dwóch – prawdopodobieństwo: $p_B \cdot p_A \cdot (1 - p_B)$
- wygranie ostatnich dwóch – prawdopodobieństwo: $(1 - p_B) \cdot p_A \cdot p_B$

Sumując te trzy opcje otrzymujemy, że prawdopodobieństwo wygrania dwóch partii z rzędu wynosi $p_A \cdot p_B \cdot (2 - p_B)$.

Porównując te dwa prawdopodobieństwa, większe jest w przypadku pierwszym, czyli kolejności $A - B - A$. Szachista S powinien więc rozegrać dwie partie z graczem z klasy mistrzowskiej i tylko jedną z amatorem.

Rozwiązanie 22. Niech $f(x) := ax^2 + bx + c$. Wiemy, że $a + b + c = f(1) < 0$.

- Jeśli $a \neq 0$, to wykresem f jest parabola. Funkcja ta nie ma miejsc zerowych, więc cały jej wykres znajduje się pod osią Ox, co oznacza, że $\forall x : \ f(x) < 0$. W szczególności $f(0) = c < 0$.

[1] Formalnie korzysta się tutaj z własności Darboux, która mówi, że jeśli funkcja jest ciągła oraz przyjmuje dla jakiegoś argumentu wartość dodatnią i dla jakiegoś ujemną, to między tymi argumentami jest taki, dla którego wartość funkcji jest równa 0. Tutaj naszą funkcją jest różnica pole(A)−pole(B).

- Jeśli $a = 0$, to f jest funkcją liniową stałą i $f(1) < 0$, zatem cały jej wykres (linia prosta) jest pod osią Ox, w szczególności $f(0) = c < 0$.

Rozwiązanie 23. Oczywistym jest, że wskazówki spotkają się zaraz po godzinie pierwszej. Oznaczmy przez x liczbę minut, które upłyną od godziny $1:00$ do momentu spotkania wskazówek.
Tarcza zegara jest podzielona na 60 minut, tak więc wskazówka minutowa w ciągu jednej minuty wykona obrót o $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$. Wskazówka godzinowa obróci się w tym czasie o $\frac{1}{12} \cdot \frac{360^\circ}{60} = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$. Po pokonaniu pełnego obrotu przez wskazówkę minutową, musi ona przebyć jeszcze pewną drogę do spotkania ze wskazówką godzinową. O godzinie $1:00$ kąt pomiędzy wskazówkami wynosi 30°. Możemy ułożyć więc równanie:

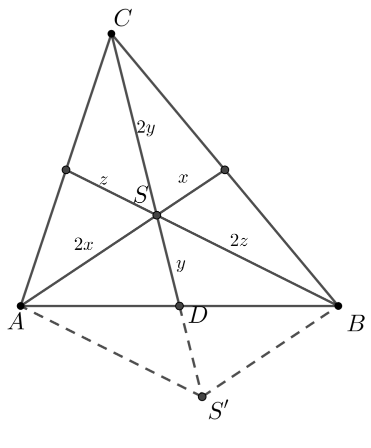
$$x \cdot 6^\circ - \left(\frac{1}{2}\right)^\circ x = 30^\circ.$$

$$5,5^\circ x = 30^\circ$$

$$x = \frac{300}{55} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$$

Wskazówki pokryją się ponownie po 1 h i $5\frac{5}{11}$ min, czyli około godziny $1:05:27$.

Rozwiązanie 24. Rozważmy trójkąt ABC ze środkowymi długości $3x, 3y, 3z$. Środkowe przecinają się w stosunku $2:1$ licząc od wierzchołka. Niech S' będzie obrazem punktu S w symetrii środkowej względem środka boku AB (zob. rysunek). Czworokąt $AS'BS$ jest równoległobokiem, ponieważ przekątne połowią się. Zatem $|AS'| = 2z$ oraz $|SS'| = 2x$. Trójkąt SAS' ma boki długości $2x, 2y, 2x$. Skalując ten trójkąt do trójkąta podobnego w skali $k = \frac{3}{2}$ otrzymujemy trójkąt o bokach $3x, 3y, 3z$, a więc zbudowany ze środkowych trójkąta ABC.



Rozwiązanie 25. Funkcja signum przyjmuje wartość 1 dla argumentów dodatnich. Wyrażenie $|f(x) - g(x)|$ jest zawsze nieujemne, a równe 0 jest tylko w przypadku równości $f(x) = g(x)$. Równanie **nie jest** więc spełnione przez każdą liczbę x, taką że $f(x) = g(x)$, czyli gdy $x \in A$. Spełnione jest więc dla $x \in \mathbb{R} \setminus A$.

Rozwiązanie 26. W pierwszym kroku rozłożymy liczbę 99! na czynniki. W tym celu rozważymy kolejne potęgi liczb pierwszych występujących w rozkładzie:

Potęga	**Liczby**	**Ile?**
2^6	64	1
2^5	$32, 96$	2
2^4	$16, 48, 80$	3
2^3	$8, 24, 40, 56, 72, 88$	6
2^2	$4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92$	12
2^1	$2 \cdot 1, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, \ldots, 2 \cdot 49$	25

Łącznie: $6 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 12 + 25 = 95$

Potęga	Liczby	Ile?
3^4	81	1
3^3	$27, 54$	2
3^2	$9, 18, 36, 45, 63, 72, 90, 99$	8
3^1	$3 \cdot 1, 3 \cdot 4, , 3 \cdot 5, \ldots, 3 \cdot 32$	$32 - 10 = 22$

Łącznie: $4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 8 + 22 = 48$

Potęga	Liczby	Ile?
5^2	$25, 50, 75$	3
5^1	$5, 10, 15, 20, \ldots, 95$ (bez $25, 50, 75$)	$19 - 3 = 16$

Łącznie: $2 \cdot 3 + 16 = 22$

Potęga	Liczby	Ile?
7^2	$25, 50, 75$	2
7^1	$7, 14, 21, 28, 35, 42, 56, 63, 70, 77, 84, 91$	12

Łącznie: $2 \cdot 2 + 12 = 16$

Pozostałe liczby pierwsze występują pojedynczo i są to:
$11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$. Możemy zatem napisać: $99! = 2^{95} \cdot 3^{48} \cdot 5^{22} \cdot 7^{16} \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 89 \cdot 97 = \ldots$.
Interesują nas zera na końcu więc łączymy piątki i dwójki:
$\ldots = 2^{73} \cdot 3^{48} \cdot 7^{16} \cdot 10^{22} \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 89 \cdot 97$.
Otrzymujemy więc:

$$\left(2^{73} \cdot 3^{48} \cdot 7^{16} \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 10^{22}\right)^{2^{73} \cdot 3^{48} \cdot 7^{16} \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 10^{22}} =$$

$$= \left(2^{73} \cdot 3^{48} \cdot 7^{16} \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 97\right)^{2^{73} \cdot 3^{48} \cdot 7^{16} \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 10^{22}} \cdot 10^{22 \cdot 2^{73} \cdot 3^{48} \cdot 7^{16} \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 10^{22}}.$$

Tak więc liczba ma na końcu $22 \cdot 2^{73} \cdot 3^{48} \cdot 7^{16} \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 10^{22}$ zer.

Ustalmy teraz długość tych zer:
1 cyfra – 2 mm $= 0,2$ cm $= 0,002$ m $= 0,000002$ km
$22 \cdot 2^{73} \cdot 3^{48} \cdot 7^{16} \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 10^{22}$ cyfr – x

Zatem:

$$x = 22 \cdot 2^{73} \cdot 3^{48} \cdot 7^{16} \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 10^{22} \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 2^{91} \cdot 3^{48} \cdot 5^{22} \cdot 7^{16} \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 89 \cdot 97 \text{ [km]}.$$

Przyjmijmy prędkość światła $c \approx 300000$ km/s. Podróż będzie trwała:

$$t = \frac{2^{91} \cdot 3^{48} \cdot 5^{22} \cdot 7^{16} \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 89 \cdot 97}{3 \cdot 10^5} \text{ [s]} = \frac{2^{91} \cdot 3^{48} \cdot 5^{22} \cdot 7^{16} \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 89 \cdot 97}{3 \cdot 10^5 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365} \text{ [lat]},$$

co ostatecznie po skróceniu daje

$$2^{79} \cdot 3^{44} \cdot 5^{14} \cdot 7^{16} \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \text{ [lat]}.$$

Dla porównania wiek Wszechświata to niecałe $14 \cdot 10^9$ lat.

Wyznaczymy teraz ostatnią niezerową cyfrę tej liczby, czyli ostatnią cyfrę liczby:

$$\left(2^{73} \cdot 3^{48} \cdot 7^{16} \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 97\right)^{2^{73} \cdot 3^{48} \cdot 7^{16} \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 10^{22}}.$$

- Kolejne potęgi liczby 2 kończą się na: $2, 4, 8, 6$ – u nas wykładnik to 73, więc ostatnią cyfrą liczby 3^{48} jest **2**.
- Kolejne potęgi liczby 3 kończą się na: $3, 9, 7, 1$ – u nas wykładnik to 48, więc ostatnią cyfrą liczby 3^{48} jest **1**.
- Kolejne potęgi liczby 7 kończą się na: $7, 9, 3, 1$ – u nas wykładnik to 16, więc ostatnią cyfrą liczby 3^{48} jest **1**.
- Wśród pozostałych pojedynczo występujących liczb pierwszych: sześć kończy się cyfrą 1 – to po wymnożeniu daje ostatnią cyfrę **1** pięć kończy się cyfrą 3 – to po wymnożeniu daje ostatnią cyfrę **9**, pięć kończy się cyfrą 7 – to po wymnożeniu daje ostatnią cyfrę **7**, pięć kończy się cyfrą 9 – to po wymnożeniu daje ostatnią cyfrę **9** (bo na przemian $9, 1$).

Po wymnożeniu wszystkiego otrzymujemy: $2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 9 = 1134$.
Szukaną cyfrą jest więc 4.

Rozwiązanie 27. Zauważmy, że $\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{3} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{3} = \sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})-(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = (\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-1) =: a$.
Rozważmy teraz liczbę $\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}$, którą podobnie przekształcamy do $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+1) =: b$. Zatem $a\cdot b = 2\cdot 1 = 2 \in \mathbb{Q}$ oraz $a+b = 2\sqrt{10}+2\sqrt{3}$. Aby uzasadnić, że $a+b\notin\mathbb{Q}$ podnieśmy ją do kwadratu: $(a+b)^2 = 40+12+8\sqrt{30}$. Ta liczba jest niewątpliwie niewymierna, a jak kwadrat jest niewymierny, to ta liczba tym bardziej. Z faktu, że suma dwóch liczb jest niewymierna wynika, że któraś z liczb a, b musi być niewymierna. Ale skoro iloczyn jest wymierny, to obie muszą być niewymierne (bo iloczyn wymiernej i niewymiernej byłby niewymierny[2]). Skoro więc obie są niewymierne, to w szczególności a, której niewymierność mieliśmy wykazać.

Rozwiązanie 28. Takie punkty istnieją. Rozważmy okrąg o średnicy AB. Dowolne trzy punkty leżące na półokręgu bez końców o średnicy AB wyznaczają kąt wpisany oparty na łuku dłuższym niż połowa okręgu, a zatem kąt ten jest rozwarty. Tak więc punkty te są wierzchołkami trójkąta rozwartokątnego. Podsumowując - wystarczy wybrać 2023 punkty z półokręgu bez końców.

Rozwiązanie 29. Wiemy, że $(-1)^k = 1$ dla k parzystych oraz $(-1)^k = -1$ dla k nieparzystych. Po lewej stronie mamy więc sumę naprzemienną liczb 1 oraz -1, czyli dla n parzystego wynosi ona 0, a dla n nieparzystego wynosi -1. Po prawej stronie jest analogiczny iloczyn naprzemienny. Iloczyn czterech kolejnych czynników wynosi zawsze 1. Rozpatrzmy więc 4 przypadki:

- $n = 4m,\ m\in\mathbb{N}$. Wtedy $P = 1, L = 0$ sprzeczność,
- $n = 4m+1,\ m\in\mathbb{N}$. Wtedy $P = -1, L = -1$ ok,
- $n = 4m+2,\ m\in\mathbb{N}$. Wtedy $P = -1, L = 0$ sprzeczność,
- $n = 4m+3,\ m\in\mathbb{N}$. Wtedy $P = 1, L = -1$ sprzeczność.

Zatem $n = 4m+1,\ m\in\mathbb{N}$.

Rozwiązanie 30. Grupując wyrazy otrzymujemy: $(10^{2022}-10^{2021})+(10^{2020}-10^{2019})+\ldots+(10^2-10^1)$, a stąd następnie: $10^{2021}(10-1)+10^{2019}(10-1)+\ldots+10^1(10-1) = 9\cdot10^{2021}+9\cdot10^{2019}+\ldots+9\cdot10$. Liczba składa się więc z 2022 cyfr – na przemian występujących 9 i 0, jest zatem 1011 zer i 1011 dziewiątek. Suma cyfr wynosi $9\cdot 1011 = 9099$.

Rozwiązanie 31.

Rozwiązanie 32. Z pierwszej równości otrzymujemy $x-y = \frac{1}{z}-\frac{1}{y} = \frac{y-z}{yz}$, z drugiej $y-z = \frac{1}{x}-\frac{1}{z} = \frac{z-x}{zx}$, a z równości wyrażeń (1) i (3): $z-x = \frac{1}{y}-\frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}$.
Lewe i prawe strony są różne od 0, więc mnożymy te równości stronami:

$$(x-y)(y-z)(z-x) = \frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{(xyz)^2} \quad |:(x-y)(y-z)(z-x)\ (\neq 0)$$
$$1 = \frac{1}{(xyz)^2}$$
$$(xyz)^2 = 1$$
$$xyz = 1 \vee xyz = -1$$

Zatem $(xyz)^{2023}\in\{-1,1\}$.

Rozwiązanie 33. Pomnóżmy pierwszą równość przez yz, druga przez xz, a równość z wyrażeń (3) i (1) przez xy:

$$xyz+z = y^2z+y$$
$$xyz+x = z^2x+z$$
$$xyz+y = x^2y+x.$$

Dodając stronami:

$$3xyz+x+y+z = y^2z+z^2x+x^2y+x+y+z \quad |-(x+y+z) \quad |:xyz\ (\neq 0)$$
$$3 = \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}.$$

Z nierówności między średnimi (A-G):

$$\frac{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{x}{z}} = 1$$

[2] Oczywiście z małym wyjątkiem, gdyby ta wymierna była równa 0, ale wyraźnie nie jest.

a więc

$$\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\geqslant 3.$$

Równość w powyższej nierówności zachodzi tylko gdy wszystkie liczby są równe, czyli $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{x}{z}$. Stąd $x^2=yz, y^2=xz, z^2=xy$. Dzieląc pierwsze dwie równości przez siebie otrzymujemy $\frac{x^2}{y^2}=\frac{y}{x}$, a stąd $x^3=y^3\Rightarrow x=y$. Następnie z pierwszej równości mamy $1=\frac{z}{y}$, skąd $y=z$, a więc $x=y=z$.

Rozwiązanie 34. W tej grze zawsze się przegrywa. Udowodniono to po raz pierwszy w roku 1979 i powtórzymy to rozumowanie.
Załóżmy, że największą liczbą w pudle jest 1. To oznacza, że wszystkie mają taki numer, więc je po kolei usuwamy.
Gdyby największy numer miała kula z napisem 2, to zauważamy, że wyrzucając jedynki nic nie dorzucamy. W pewnym momencie trzeba więc wyrzucić dwójkę i dorzucić same jedynki. Liczba jedynek wzrosła, ale dwójek zmalała. W pewnym momencie znów trzeba będzie wyrzucić dwójkę (bo gdybyśmy wyrzucali same jedynki, to w końcu się skończą) i ich liczba zmaleje. W końcu wyrzucimy więc wszystkie dwójki i zostaną same jedynki. A tu już wiemy, że przegrywamy.
Gdyby największym numerem była liczba 3, to podobnie jak powyżej, kiedyś musimy taką kulę wyrzucić (bo wyrzucając jedynki nic nie dokładamy, a wyrzucając dwójki dokładamy tylko jedynki, a liczba dwójek maleje, więc kiedyś się skończą). Liczba trójek zmaleje. W końcu wyrzucimy więc wszystkie trójki i zostaną same dwójki i jedynki –¿ przegrywamy.
Analogicznie rozumując z liczbami: $4, 5, 6, \ldots$ widzimy, że niezależnie od tego jaki numer ma największa kula i ile kul dorzucamy, zawsze wyrzucimy wszystkie kule i przegramy.
Aby to rozumowanie w pełni sformalizować i uściślić należy użyć zasady indukcji matematycznej:

Dowód.

- Krok 1: $n=1$. Prawda, udowodniliśmy wyżej – jeśli największy numer to 1, wyrzucamy po kolei kule jedna po drugiej, nic nie dorzucając.
- Załóżmy, że dla największego numeru n przegrywamy. Pokażemy, że wynika z tego przegrana dla numeru $n+1$.
  Niech więc największym numerem na kuli będzie $n+1$. Nie możemy w nieskończoność wyrzucać kul o numerach n lub mniejszych. W pewnym momencie wyrzucimy kulę z numerem $n+1$. Ale wtedy liczba takich kul zmaleje o 1. Ponownie, nie można wyrzucać ciągle kul o numerach n lub mniejszych, więc ponownie liczba kul z numerem $n+1$ spanie, aż w końcu największy numer to będzie n. Ale z założenia indukcyjnego wiemy, że wtedy przegrywamy.
  Na mocy indukcji przegrywamy dla dowolnej maksymalnej liczby na kulach.

□

Rozwiązanie 35.

a) $\underline{3}\ \underline{3}\ \underline{3}$ $3\cdot 3\cdot 3=27$ (bo każdemu argumentowi możemy przyporządkować dowolną wartość)
b) $\underline{1}\ \underline{1}\ \underline{1}$ $1\cdot 1\cdot 1=1$ (bo elementy ze zbioru wartości można tylko na 1 sposób ustawić w kolejności rosnącej)
c) $\underline{1}\ \underline{1}\ \underline{1}$ $1\cdot 1\cdot 1=1$ (bo elementy ze zbioru wartości można tylko na 1 sposób ustawić w kolejności malejącej)
d) $\underline{3}\ \underline{1}\ \underline{1}$ $3\cdot 1\cdot 1=3$ (bo pierwszy element możemy przyporządkować dowolnie, a każdy kolejny musi być taki sam)
e) $\underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$ $3\cdot 2\cdot 1=6$ (bo każdemu argumentowi przyporządkowujemy inną wartość)
f) $\underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$ $3\cdot 2\cdot 1=6$ (bo wszystkie wartości z Y muszą być użyte, więc każdej jest przyporządkowywany różny element z X)