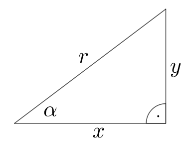
Trygonometria 1

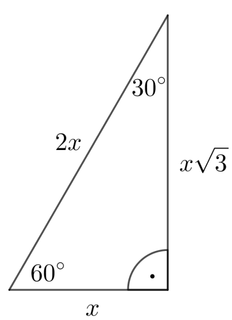
Definicja.

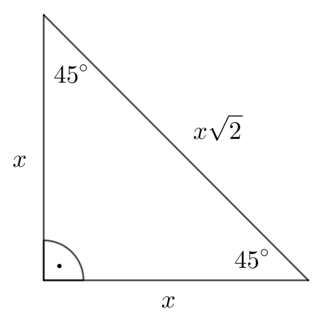
Niech α będzie kątem ostrym w trójkącie prostokątnym.
Wtedy:



- **Sinusem** kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do przeciwprostokątnej, czyli $\sin\alpha := \frac{y}{r}$.
- **Cosinusem** kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do przeciwprostokątnej, czyli $\cos\alpha := \frac{x}{r}$.
- **Tangensem** kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do przyprostokątnej przyległej do kąta α, czyli $\operatorname{tg}\alpha := \frac{y}{x}$.
- **Cotangensem**[1] kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do przyprostokątnej przeciwległej do kąta α, czyli $\operatorname{ctg}\alpha := \frac{x}{y}$.

Wartości dla kątów $30°, 45°, 60°$





$\boldsymbol{\alpha}$	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
$\boldsymbol{\sin\alpha}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\boldsymbol{\cos\alpha}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\boldsymbol{\operatorname{ctg}\alpha}$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	

[1] Nazwy funkcji trygonometrycznych pochodzą z łaciny: sinus oznacza zatokę, zagłębienie, zakrzywienie; cosinus pochodzi od complementi sinus, czyli sinus dopełnienia. Tangens oznacza styczną, zaś cotangens pochodzi od complementi tangens, czyli tangens dopełnienia. Na przełomie XVIII i XIX wieku Jan Śniadecki próbował wprowadzić całkowicie polskie odpowiedniki nazw funkcji trygonometrycznych: *wstawa* na sinus; *dostawa* na cosinus; *styczna* na tangens oraz *dostyczna* na cotangens. Nazwy jednak nie przyjęły się na stałe.

Twierdzenie (własności)**.**
Niech α będzie kątem ostrym. Wtedy:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, (jedynka trygonometryczna)

2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,

4) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

Dowód.
1) $L = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2+x^2}{r^2} \overset{\text{tw.}}{\underset{\text{Pitag.}}{=}} \frac{r^2}{r^2} = 1 = P$
2)-4) – Ćwiczenie □

Twierdzenie (wzory redukcyjne)**.**
Niech α będzie kątem ostrym. Wtedy:

1) $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$

2) $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

3) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90° - \alpha)$

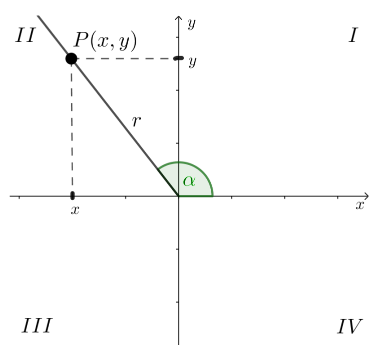
4) $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$.

Załóżmy, że mamy dowolny kąt α umieszczony w układzie współrzędnych, przy czym umieszczony jest on tak, że jego wierzchołek jest w początku układu współrzędnych, ramię początkowe znajduje się na dodatniej półosi Ox, a ramię końcowe w pierwszej, drugiej, trzeciej lub czwartej ćwiartce układu współrzędnych. Wybierzmy punkt $P(x, y)$ na końcowym ramieniu kąta (różny od $(0, 0)$).

Definicja.
Przy powyższych założeniach:

- $\sin\alpha \coloneqq \frac{y}{r}$,
- $\cos\alpha \coloneqq \frac{x}{r}$,
- $\operatorname{tg}\alpha \coloneqq \frac{y}{x}$, $x \neq 0$,
- $\operatorname{ctg}\alpha \coloneqq \frac{x}{y}$, $y \neq 0$,

  gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



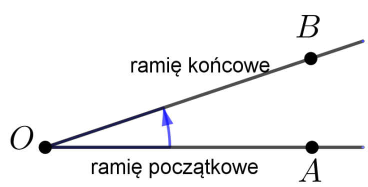
Znaki wartości funkcji trygonometrycznych zależą od tego, w której ćwiartce znajduje się kąt. Nauczenie się ich ułatwia wierszyk:

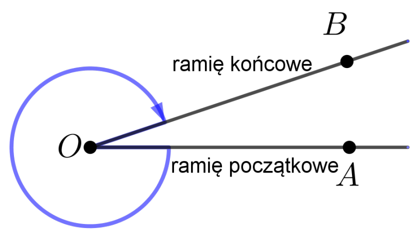
W pierwszej wszystkie są dodatnie,
W drugiej tylko sinus,
W trzeciej tangens i cotangens,
W czwartej zaś cosinus.

Twierdzenie.
Zachodzą poprzednie 4 własności oraz:

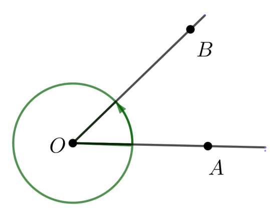
- $\sin\alpha \in [-1, 1]$,
- $\cos\alpha \in [-1, 1]$.

Definicja.
Kątem skierowanym nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku. Pierwszą półprostą nazywamy ramieniem początkowym, a drugą ramieniem końcowym.





Rozpatrzmy teraz kąt z „ruchomym” ramieniem końcowym. Załóżmy, że końcowe ramię kąta obróciło się o 360°, a następnie jeszcze o 45°. Otrzymujemy kąt o mierze $360^\circ + 45^\circ = 405^\circ$.



Gdybyśmy obracali dalej o wielokrotności 360°, to będziemy dostawać takie same kąty (przystające). Tak więc przyjmujemy, że kąt skierowany ma nieskończenie wiele miar, a tę z przedziału $[0^\circ, 360^\circ)$ nazywamy **miarą główną**.

Wzory redukcyjne (schemat)

1) Zakładamy, że α jest kątem ostrym.

2) Sprawdzamy w której ćwiartce jest kąt[2].

3) Ustalamy znak danej funkcji trygonometrycznej (wierszyk).

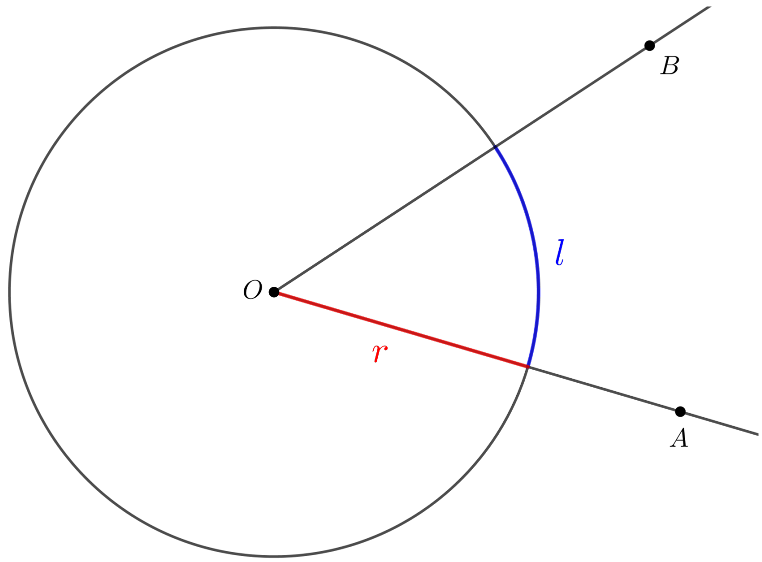
4) Jeśli przed $+\alpha$ (lub $-\alpha$) jest nieparzysta wielokrotność 90°, to funkcję zmieniamy na *kofunkcję*; jeśli jest parzysta, to funkcja pozostaje bez zmian.

Przykład.

- $\sin 240^\circ = \sin(\overset{2\cdot 90^\circ}{180^\circ} + \overset{\alpha}{60^\circ}) \overset{III\ \text{ćw}}{=} -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin 240^\circ = \sin(\overset{3\cdot 90^\circ}{270^\circ} - \overset{\alpha}{30^\circ}) \overset{III\ \text{ćw}}{=} -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

[2] Mamy na myśli oczywiście końcowe ramię kąta.

Do tej pory mierzyliśmy kąty przy pomocą stopni. Okazuje się, że można inaczej.



Definicja.
Stosunek długości łuku będącego częścią wspólną okręgu i kąta, do promienia $\left(\text{czyli } \frac{l}{r}\right)$ nazywamy **miarą łukową** kąta.

Definicja.
Kąt, którego miara łukowa wynosi 1 nazywamy **radianem**[3].

Miara łukowa kąta 360° to: $\frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$, zaś kąta 180° to: $\frac{l}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi$.
Pozostałe kąty wyznaczamy z proporcji.

Ćwiczenie.

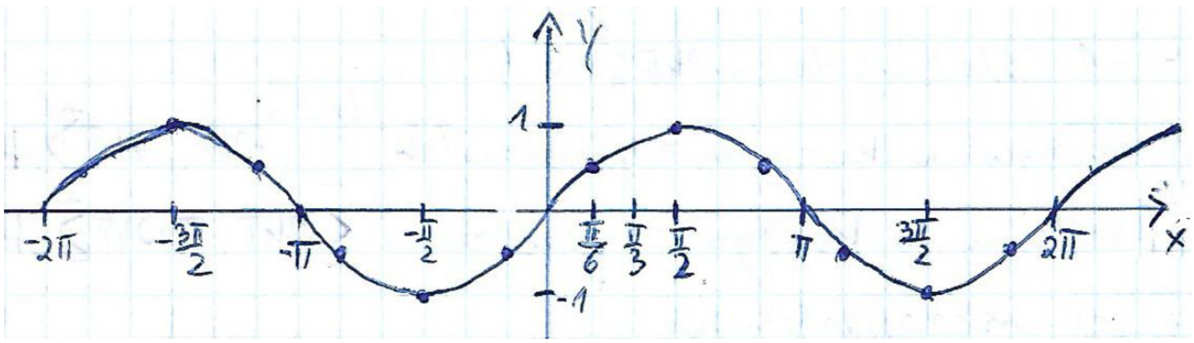
- wyznaczyć miarę łukową kątów: $30°, 45°, 90°$,
- wyznaczyć miarę stopniową (w przybliżeniu) kąta o mierze 1 [rad].

Uwaga.
Dzięki wprowadzeniu miary łukowej, każda liczba rzeczywista jest miarą pewnego kąta oraz każdy kąt wyraża się liczbą rzeczywistą. Możemy zatem uogólnić definicję funkcji trygonometrycznych na liczby rzeczywiste.

[3] Jednostkę *radian* zazwyczaj się pomija.

Wykresy funkcji trygonometrycznych

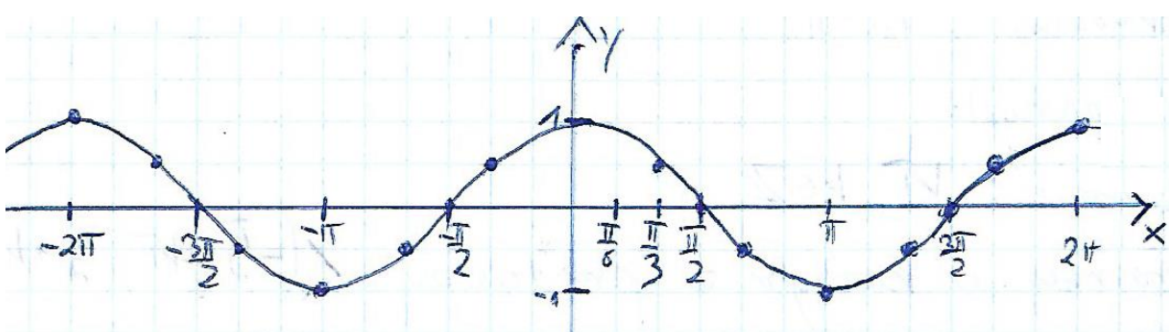
1) $f(x) = \sin x$



Własności:

- $D = \mathbb{R}$
- $ZW = [-1, 1]$
- funkcja okresowa, $T_0 = 2\pi$
- funkcja nieparzysta
- miejsca zerowe: $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $f_{\max} = 1$ dla $x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$
- $f_{\min} = -1$ dla $x \in \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$
- f jest rosnąca w każdym z przedziałów $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$
- f jest malejąca w każdym z przedziałów $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$
- f nie jest różnowartościowa

2) $f(x) = \cos x$

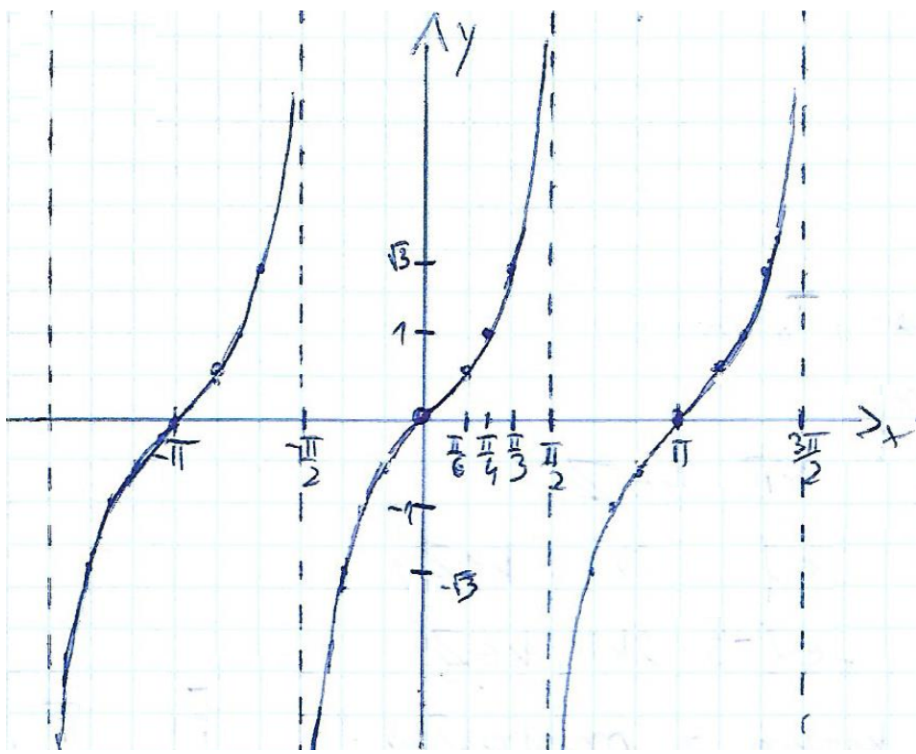


Własności:

- $D = \mathbb{R}$
- $ZW = [-1, 1]$

- funkcja okresowa, $T_0 = 2\pi$
- funkcja parzysta
- miejsca zerowe: $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $f_{\max} = 1$ dla $x \in \{2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$
- $f_{\min} = -1$ dla $x \in \{\pi + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$
- f jest rosnąca w każdym z przedziałów $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]\,, k \in \mathbb{Z}$
- f jest malejąca w każdym z przedziałów $[2k\pi, \pi + 2k\pi]\,, k \in \mathbb{Z}$
- f nie jest różnowartościowa

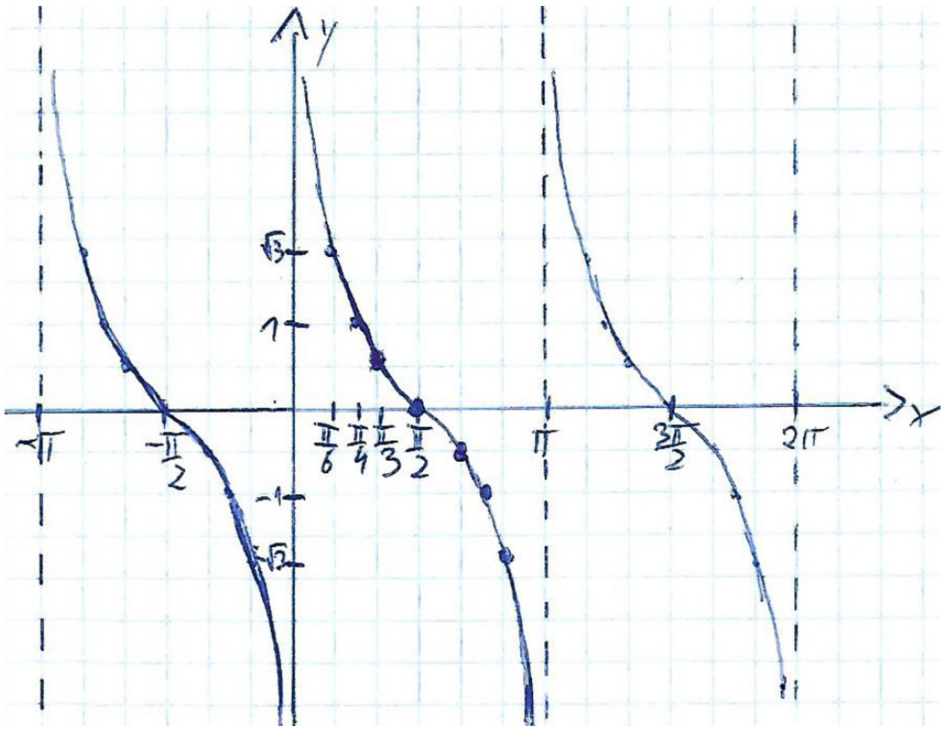
3) $f(x) = \operatorname{tg} x$



Własności:

- $D = \mathbb{R} \setminus \left\{x :\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $ZW = \mathbb{R}$
- funkcja okresowa, $T_0 = \pi$
- funkcja nieparzysta
- miejsca zerowe: $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- f jest rosnąca w każdym z przedziałów $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
- f nie jest różnowartościowa

4) $f(x) = \operatorname{ctg} x$



Własności:

- $D = \mathbb{R} \setminus \{x:\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- $ZW = \mathbb{R}$
- funkcja okresowa, $T_0 = \pi$
- funkcja nieparzysta
- miejsca zerowe: $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- f jest malejąca w każdym z przedziałów $(k\pi, \pi + k\pi)\,, k \in \mathbb{Z}$
- f nie jest różnowartościowa