



# delta

MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34}$  J·s    $\pi=3,141592\dots$

NR 10 (605) 2024

CENA 8 ZŁ VAT 8%  
PL ISSN 0137-3005 / NR IND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

Zdjęcia  
w astronomii  
str. 2





17-65-10-3-1-5-7-3-14-15-2

## SPIS TREŚCI NUMERU 10 (605) 2024

Elegancka konstrukcja pięciokąta foremnego

*Krzysztof R. Apt*

str. 1

Zdjęcia w astronomii

*William J. Pearson*

str. 2

 Zadania

str. 4

Delegacja: Mały krok dla wyborcy, ogromny skok dla demokracji

*Georgios Papasotiropoulos*

str. 5

 Aktualności

Światy równoległe

str. 8

Oscylacje neutrin

*Wiktor Matyszkiewicz*

str. 9

 Odmłodnieć – one to potrafią

*Marta Fikus-Kryńska*

str. 12

Projekt rzeki Arno Leonarda da Vinci i Niccolò Machiavellego

*Stanisław Kordek, Grzegorz Łukaszewicz* str. 13

Twierdzenie Tutte'a i twierdzenie Halla

*Bartłomiej Bzdęga*

str. 16

Turniej Młodych Fizyków

*Leszek Gładczuk*

str. 19

Klub 44

str. 20

 Prosto z nieba: Ciemna materia na Jowiszu?

str. 22

 Niebo w październiku

str. 23

 Skojarzenia – część 2

str. 25

W następnym numerze:



Ille liter  
zmieści się  
na płaszczyźnie?

Miesiącznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej; dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, prof. UW; dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący; dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW; dr hab. Sławomir Dinew, prof. UJ; dr Tomasz Greczyło, prof. UWr; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UWr; prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański; prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący; dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński; dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak; dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN; prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

**Redaguje collegium w składzie:** Michał Bejger, Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nacz., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nacz., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sek. red.

**Adres do korespondencji:**

Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Odkłady i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem LATEX wykonała Redakcja.

Druk: Poligrafia NOT, www.poligrafianot.pl

**Prenumerata:**

Garmond Press: www.garmondpres.pl (tylko instytucje)

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

Na stronie Empiku *Delta* można zamówić co miesiąc:

www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;  
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym  
artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

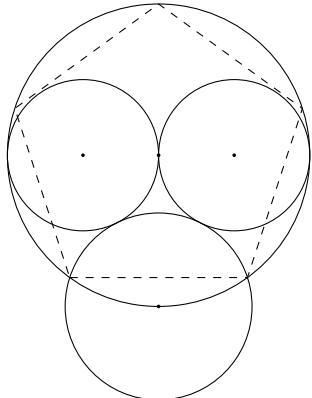
**Wydawca:** Uniwersytet Warszawski

# Elegancka konstrukcja pięciokąta foremnego

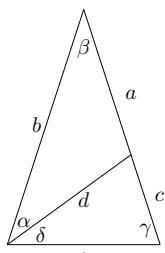
Krzysztof R. Apt\*

\* CWI, Amsterdam i Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, str. 50, 2000.

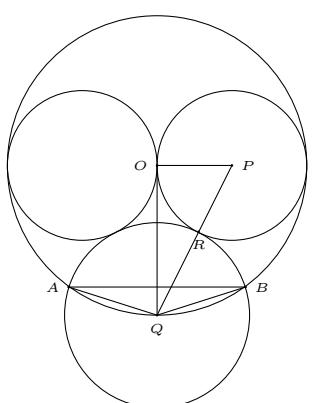


Rys. 1. Konstrukcja pięciokąta foremnego według Y. Hirano. Zaznaczone punkty to środki odpowiednich okręgów



Rys. 2. Złoty trójkąt

Twierdzenie o złotym trójkącie można prościej udowodnić, korzystając z obserwacji, że w pięciokącie foremnym z bokami o długości  $a$  i przekątnymi o długości  $b$  zachodzi  $\frac{b}{a} = \phi$ , która to równość udowodniliśmy w naszym artykule *Elegancki dowód twierdzenia Ptolemeusza w  $\Delta_{24}^8$* .



Rys. 3. Analiza konstrukcji Hirano

Konstrukcja pięciokąta foremnego jest omówiona w *Elementach* Euklidesa i stanowi zwieńczenie szeregu wcześniejszych występujących w tym dziele rezultatów. Robin Hartshorne, autor książki, która jest swego rodzaju przewodnikiem po *Elementach*, napisał: „Jeśli istnieje coś takiego jak piękno w dowodzie matematycznym, to wierzę, że dowód Euklidesa poprawności konstrukcji pięciokąta foremnego tworzy standard pięknego dowodu”.

Celem tej notki jest przedstawienie eleganckiej i szczególnie prostej konstrukcji pięciokąta foremnego, przypisywanej japońskiemu matematykowi z XIX wieku, Yosifusie Hirano (zobacz: A. Bogomolny, <http://www.cut-the-knot.org/>, *Regular pentagon construction by Y. Hirano*, 2014). Konstrukcja ta opiera się na następującym prostym rysunku (rys. 1).

Najpierw rysujemy okrąg. Następnie wewnątrz niego rysujemy dwa okręgi, każdy dwa razy mniejszy, tak aby stykały się one ze sobą i z pierwotnym okręgiem (wtedy środki małych okręgów leżą na średnicy dużego). Na koniec rysujemy czwarty okrąg tak, aby był styczny do mniejszych okręgów, a jego środek znajdował się w punkcie przecięcia pierwotnego okręgu z jego średnicą prostopadłą do średnicy przecinającej środki mniejszych okręgów. Wówczas punkty przecięcia pierwotnego i ostatniego okręgu określają bok pięciokąta foremnego wpisanego w pierwszy okrąg.

Aby udowodnić poprawność tej konstrukcji, rozważamy najpierw trójkąt równoramienny, w którym długość boku  $b$  jest w złotej proporcji  $\phi$  do podstawy  $a$  (rys. 2). Taki trójkąt nazywany jest *złotym trójkątem*. Pokażemy, że jego kąty wynoszą  $36^\circ$ ,  $72^\circ$  i  $72^\circ$ .

W tym celu zaznaczmy odległość  $a$  na jednym z pozostałych boków trójkąta, połączmy uzyskany punkt z przeciwległym wierzchołkiem i nadajmy nowej linii oraz odpowiednim kątom nazwy jak na rysunku. Z założenia  $\frac{b}{a} = \phi$ .

Przypomnijmy, że  $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  jest dodatnim rozwiązaniem równania. Czyli  $\phi$  spełnia równanie  $\phi^2 - \phi = 1$  lub  $\phi = \frac{1}{\phi-1}$ , a więc

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{b}{a}-1} = \frac{a}{b-a} = \frac{a}{c}.$$

Rozważmy teraz pierwotny trójkąt równoramienny i trójkąt utworzony przez boki  $a, d, c$ . Współdzielały one kąt  $\gamma$ , a właśnie pokazaliśmy, że w obu trójkątach boki tworzące  $\gamma$  mają ten sam stosunek (dla pierwotnego trójkąta zachodzi bowiem  $b = a + c$ ). A więc te trójkąty są podobne, stąd  $a = d$  i  $\beta = \delta$ .

Wynika stąd, że trójkąt o bokach  $b, d, a$  jest również równoramienny. Stąd  $\alpha = \beta$ , czyli kąty  $\alpha, \beta$  i  $\delta$  są równe. Ponadto  $\alpha + \delta = \gamma$ , zatem  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\alpha + \beta + 2\delta = 5\beta$ . Ale  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ , więc  $\beta = 36^\circ$  i  $\alpha + \delta = \gamma = 72^\circ$ .

Rozważmy teraz rysunek 3, gdzie  $R$  jest punktem styczności czwartego okręgu z pierwotnym okręgiem.

Założymy, że  $OQ = 1$ . Wówczas  $PO = PR = \frac{1}{2}$ , a więc z twierdzenia Pitagorasa  $PQ = \sqrt{PO^2 + OQ^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Stąd  $QB = QR = PQ - PR = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Oznacza to, że w trójkącie równoramiennym  $OQB$  mamy:

$$\frac{OQ}{QB} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi,$$

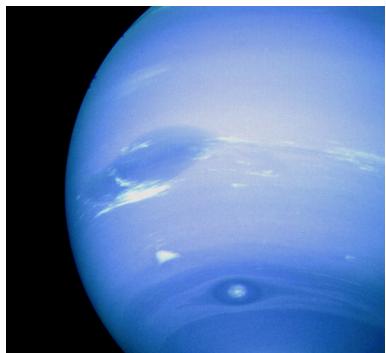
czyli  $OQB$  jest złotym trójkątem. Z powyższej analizy złotego trójkąta mamy  $\angle QOB = 36^\circ$ . Z symetrii  $\angle QOA = 36^\circ$ , więc  $\angle AOB = 72^\circ$ . To pokazuje, że  $AB$  jest bokiem pięciokąta foremnego wpisanego w pierwotny okrąg.

Tekst oparty na załączniku 13 z książki: Krzysztof R. Apt, „A Brief History of Mathematics for Curious Minds”, World Scientific, 2024.

# Zdjęcia w astronomii

William J. PEARSON\*

\* Narodowe Centrum Badań Jądrowych,  
Departament Badań Podstawowych,  
Zakład Astrofizyki



Rys. 1. W rzeczywistości Neptun nie jest ciemnoniebieski. O prawdziwym kolorze Neptuna pisaliśmy w  $\Delta_{24}^8$ . Źródło obrazu: NASA/JPL-Caltech

Astronomia dostarcza nam wiele niesamowitych zdjęć. Od pięknych galaktyk poprzez mgławice, czarne dziury aż po planety Układu Słonecznego. Jednak nie wszystko jest takie, jak się wydaje. Galaktyki, gwiazdy i planety, które widzimy na zdjęciach, są prawdziwe i faktycznie istnieją. Jednak prawie wszystkie kolory prezentowane na zdjęciach są „nieprawdziwe”. Na przykład Neptun nie jest tak naprawdę ciemnoniebieski (jak na zdjęciu obok, rys. 1), ale bardziej zielonkawo-bladoniebieski. Przyczyn, dla których używamy fałszywych kolorów w astronomii, jest kilka, ale główną jest fakt, że obrazy cyfrowe (RGB) są ograniczone do kombinacji trzech kolorów: czerwonego, zielonego i niebieskiego. Natomiast obrazy astronomiczne mogą być wykonywane w dowolnym *kolorze* (a konkretniej, w dowolnym paśmie widma promieniowania elektromagnetycznego). Ponadto kolory w obrazach RGB przyjmują wartości tylko od 0 do 255, podczas gdy w obrazach astronomicznych te wartości mogą być tak naprawdę dowolne.

## Czym jest kolor na zdjęciu astronomicznym?

Promieniowanie emitowane przez obiekty astronomiczne zawiera się nie tylko w granicach pasma optycznego. Na przykład galaktyki emitują promieniowanie w zakresie od wysokoenergetycznych promieni gamma do fal radiowych o niskiej energii. Ludzkie oko jest w stanie dostrzec tylko niewielką część pełnego spektrum elektromagnetycznego, a zatem nie może zobaczyć promieni gamma ani fal radiowych. Na wszelkiego rodzaju ekranach oraz papierze również nie jesteśmy w stanie odtworzyć tych części widma elektromagnetycznego (i tak nie moglibyśmy ich zobaczyć, nawet gdyby było to możliwe). Natomiast nasze teleskopy mogą „zobaczyć” wszystkie te długości fal. Możemy obserwować promienie gamma za pomocą urządzeń takich jak Charenkov Telescope Array lub fale radiowe za pomocą urządzeń takich jak Atacama Large Millimeter/submillimeter Array. Sytuacja staje się jeszcze bardziej skomplikowana, gdy weźmie się pod uwagę, że teleskopy optyczne, np. Teleskop Kosmiczny Hubble'a, nie robią kolorowych zdjęć (jak aparat w telefonie). Zamiast tego wykonują zdjęcia jednokolorowe w określonych pasmach promieniowania elektromagnetycznego: na przykład czerwonym (*r*) lub niebieskim (*u*). Inaczej mówiąc, teleskopy astronomiczne nie wykonują zdjęć wielokolorowych. Aby uzyskać piękne wielokolorowe zdjęcia RGB, które często można zobaczyć w mediach, astronomowie łączą zdjęcia wykonane w różnych pasmach (kolorach).

Dzieje się tak z wielu powodów. Różne pasma promieniowania elektromagnetycznego dostarczają różnych informacji o danym obiekcie astronomicznym. Na przykład pasma optyczne pokazują aktualne rozmieszczenie gwiazd w galaktykach, podczas gdy pasma ultrafioletowe i podczerwone pokazują miejsca, gdzie powstają nowe gwiazdy. Gdyby astronom chciał sprawdzić, gdzie w galaktyce powstają nowe gwiazdy w odniesieniu do tego, gdzie znajdują się obecne gwiazdy, to chciałby zobaczyć dane ultrafioletowe, dane optyczne *r* i dane w podczerwieni na jednym obrazie. Może to zrobić, wybierając jakiś jeden kolor dla każdego z tych różnych pasm. Na przykład danym ultrafioletowym przypisze kolor niebieski na ostatecznym obrazie, danym optycznym w paśmie *r* przypisze kolor zielony, a danym podczerwonym kolor czerwony (przykład różnego przypisania kolorów znajduje się na rys. 2). Wybór ten jest nieco arbitralny, więc inny astronom może ustawić dane optyczne *r* jako niebieskie, podczerwone jako zielone, a ultrafioletowe jako czerwone. Taki obraz nie będzie „piękny”, ale za to będzie niósł wiele informacji interesujących astronoma. To oczywiście tylko przykład. Zazwyczaj w zdjęciach zachowuje się kolejność kolorów: danym o większej długości fali przypisuje się kolor czerwony, danym o pośredniej długości fali zielony, a danym o krótskiej długości fali kolor niebieski.



Rys. 2. Jedna z galaktyk Kwintetu Stefana. Na zdjęciu po lewej stronie promieniowaniu podczerwonym przypisano kolor czerwony, promieniowaniu o pośrednich długościach fali przypisano kolor zielony, a promieniowaniu o krótkich długościach fali przypisano kolor niebieski. Na zdjęciu po prawej stronie przypisano kolory odwrotnie: długim falom kolor niebieski, pośrednim zielony, a krótkim czerwony. Źródło zdjęcia: NASA, ESA, CSA, STScI oraz W. J. Pearson



Rys. 3. Ten obraz Kwintetu Stefana składa się ze zdjęć wykonanych w ośmiu pasmach promieniowania elektromagnetycznego, z których większość znajduje się w podczerwieni i nie jest widoczna dla ludzi. Źródło obrazu: NASA, ESA, CSA oraz STScI

Kolory fioletowy, turkusowy i pomarańczowy są kombinacjami kolorów czerwonego, zielonego i niebieskiego na obrazie RGB.



Rys. 4. Dwie galaktyki Kwintetu Stefana. Na zdjęciach zastosowano skalowanie liniowe (lewy górný róg), logarytmiczne (prawy górný róg), pierwiastkowe (lewy dolny róg) i odwrotności sinusu hiperbolicznego (prawy dolny róg). Źródło obrazu: NASA, ESA, CSA, STScI oraz W. J. Pearson

Trochę inaczej sprawa ma się, gdy zdjęcie astronomiczne tworzy się w celu wyołania zachwytu u szerokiego grona odbiorców niebędących astronomami. W tym przypadku priorytetem jest, aby obraz wyglądał ładnie i niekoniecznie był przydatny naukowo. Osoba odpowiedzialna za stworzenie takiego obrazu wybierze tylko te pasma, w których dany obiekt astronomiczny będzie najbardziej atrakcyjny wizualnie. Na przykład w niektórych długościach fali będą widoczne pewne atrakcyjne detale na powierzchni planety. W takim przypadku pasma, które pokazują te detale, zostaną wykorzystane do utworzenia obrazu. Przypisanie kolorów będzie teraz mniej istotne naukowo, dlatego twórca zdjęcia skupi się na takim doborze kolorów, aby ostateczny obraz wyglądał jak najładniej.

Nie wszystkie pasma wykorzystane do stworzenia końcowego obrazu zawierają się w zakresie widocznym dla ludzkiego oka. W tym wypadku musimy sprawić, aby niewidoczne stało się widoczne. W powyższym przykładzie obszarów formowania się gwiazd wykorzystano niewidzialne (dla człowieka) światło ultrafioletowe i podczerwone. Gdyby astronomowie byli zmuszeni do używania tych samych kolorów, które zostały zaobserwowane, nigdy nie zobaczylibyśmy niewidocznych części widma elektromagnetycznego i przegapilibyśmy ogromną większość informacji dostępnych z kosmosu.

Jeśli astronom chce stworzyć obraz końcowy z więcej niż trzech zdjęć w różnych pasmach (na przykład obraz Kwintetu Stefana wykonany przez Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba, widoczny na rysunku obok, zawiera dane z 8 pasm) musi do podstawowych trzech kolorów: czerwonego, zielonego i niebieskiego, dołożyć dodatkowe kolory: na przykład fioletowy, turkusowy lub pomarańczowy. Alternatywnie może wykorzystać „kolory astronomiczne”, czyli różnicę wartości sygnału pomiędzy dwoma pasmami, takimi jak na przykład  $u - r$ , przypisać do kanału czerwonego, zielonego lub niebieskiego.

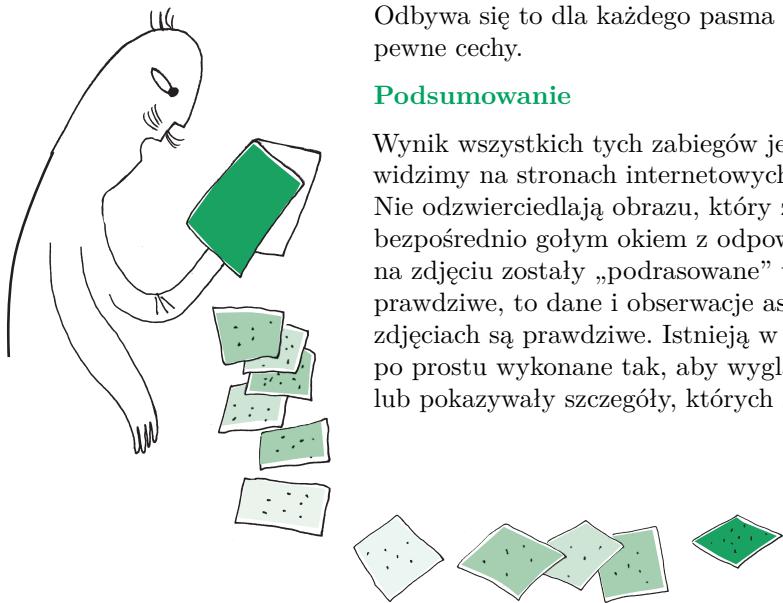
### Jasność i kontrast zdjęć astronomicznych

Astronomowie dokonują również edycji względnej jasności pikseli podczas tworzenia obrazów RGB. Dane astronomiczne są dużo bardziej szczegółowe niż typowe zdjęcie RGB w naszym komputerze. Zmierzone przez teleskop wartości naświetlenia pojedynczego piksela mogą mieć rozdzielcość od 0 do 100 000, a często nawet większą. Wartości pikseli w obrazie RGB mogą mieć tylko wartości czerwone, zielone i niebieskie w zakresie od 0 do 255 (w kodowaniu 8-bitowym). Aby „przetłumaczyć” obraz astronomiczny na obraz RGB, konieczne jest zastosowanie mapowania między danymi astronomicznymi a wartościami 0–255 dostępnymi w obrazach RGB.

Jednym ze sposobów jest liniowe skalowanie obrazów. Zasada takiego skalowania jest prosta. Należy przyporządkować największej wartości w danych astronomicznych (na przykład 100 000) wartość 255, a najmniejszej wartości (na przykład 10) przyporządkować 0 i dopasować liniowo wszystko pomiędzy. Metoda ta zadziała, ale niestety niezbyt dobrze. Trudność jest taka, że w danych astronomicznych zazwyczaj nie ma wielu jasnych pikseli w porównaniu do ilości pikseli o słabym sygnale. W rezultacie końcowy obraz RGB będzie miał jeden jasny punkt otoczony ciemnością. W tej ciemności będą znajdowały się detale, które chcemy zobaczyć.

Jednym z rozwiązań tego problemu jest przycięcie danych. Zamiast przyporządkowywać najjaśniejszej wartości w danych astronomicznych liczbę 255, wybierana jest mniejsza wartość (na przykład 10 000 zamiast 100 000), której ma odpowiadać 255. Każda wartość w danych astronomicznych, która jest wyższa niż to wybrane odcięcie (czyli w tym przykładzie 10 000), jest również ustawiana na 255. Podobnie, zamiast tłumaczyć najslabszą wartość na 0, wybierana jest większa wartość (na przykład 100), której przyporządkowujemy wartość 0, a wszystkim wartościom poniżej tej granicy również przypisujemy wartość 0. Może to pomóc wydobyć miejsca o słabszym sygnale, ale może również „stworzyć” brzydko wyglądające plamy na ostatecznym obrazie, w miejscach, gdzie dane astronomiczne nasyciły przestrzeń kolorów RGB.

Lupton R. et al., 2004, The Publications of the Astronomical Society of the Pacific, Volume 116, Issue 816.



Alternatywnie można zastosować skalowanie nieliniowe – zazwyczaj skalowanie logarytmiczne, pierwiastkowe lub odwrotności sinusa hiperbolicznego (*arsinh*). Tak przeskalowane wartości są następnie odwzorowywane liniowo w zakresie 0–255. Zmniejsza to zakres dynamiki jasnych części danych astronomicznych i zwiększa zakres dynamiki bledszych części danych. W rezultacie słabsze struktury w danych stają się bardziej widoczne.

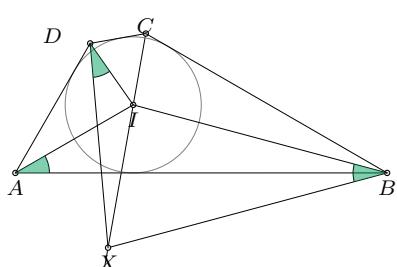
Obie te metody, przycinania danych i stosowania nieliniowego skalowania, są wykorzystywane do tworzenia obrazów astronomicznych. Popularna metoda skalowania Luptona *arsinh* skaluje dane astronomiczne przed ich przycięciem. Odbywa się to dla każdego pasma używanego indywidualnie, aby uwydaczyć pewne cechy.

### Podsumowanie

Wynik wszystkich tych zabiegów jest taki, że obrazy astronomiczne, które widzimy na stronach internetowych lub w telewizji, nie są do końca prawdziwe. Nie odzwierciedlają obrazu, który zobaczylibyśmy, patrząc na dany obiekt bezpośrednio gołym okiem z odpowiedniej odległości, ponieważ kolory i jasności na zdjęciu zostały „podrasowane” w procesie obróbki cyfrowej. To, co jest prawdziwe, to dane i obserwacje astronomiczne. Obiekty widoczne na tych zdjęciach są prawdziwe. Istnieją w przestrzeni kosmicznej. Ich zdjęcia zostały po prostu wykonane tak, aby wyglądały imponująco, podkreślały pewne detale lub pokazywały szczegóły, których inaczej nie bylibyśmy w stanie zobaczyć.

## Zadania

Przygotował Dominik BUREK



**M 1795.** Liczbę całkowitą dodatnią nazywamy *dobrą*, jeśli wśród jej dzielników znajdują się dokładnie dwie liczby pierwsze. Udowodnić, że wśród dowolnych 18 kolejnych liczb całkowitych dodatnich co najmniej jedna z liczb nie jest dobrą.

**M 1796.** Kwadratowa plansza jest podzielona na  $n^2$  prostokątnych pól za pomocą  $n - 1$  prostych poziomych i  $n - 1$  prostych pionowych. Pola pomalowane są w szachownicę. Wiadomo, że na jednej przekątnej wszystkie pola są czarne i kwadratowe. Udowodnić, że całkowita powierzchnia wszystkich czarnych pól jest nie mniejsza niż całkowita powierzchnia wszystkich białych pól.

**M 1797.** Punkt  $I$  jest środkiem okręgu wpisanego w czworokąt wypukły  $ABCD$ . Udowodnić, że na prostej  $CI$  istnieje punkt  $X$  taki, że

$$\angle XBI = \angle XDI = \angle BAI.$$

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1105.** Mgła jest zawiesiną kropelek wody w powietrzu. Oszacuj gęstość mgły  $n$ , to jest liczbę kropelek o średnicy  $d = 20 \mu\text{m}$  w metrze sześciennym powietrza, jeśli skutkiem mgły jest ograniczenie widoczności do  $l = 100 \text{ m}$ . Jaka masa kropelek mgły (wody) zawarta jest w metrze sześciennym powietrza? Gęstość wody  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

**F 1106.** Soczewka skupiąca tworzy rzeczywisty obraz przedmiotu. Poprzeczne rozmiary obrazu są  $p$  razy większe od rozmiarów przedmiotu. Ile wynosi powiększenie podłużne obrazu? Po obu stronach soczewki znajduje się ten sam ośrodek (powietrze).

Rozwiązań na str. 24

# Delegacja: Mały krok dla wyborcy, ogromny<sup>1</sup> skok dla demokracji

Georgios PAPASOTIROPOULOS\*

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

<sup>1</sup>OK, nie zawsze, przyznaję, ale nie mogłem się oprzeć clickbaitowemu tytułu, przepraszam. Pod koniec artykułu stanie się dla Ciebie jasne, kiedy i pod jakimi warunkami skok jest (prawie) gigantyczny, a kiedy nie.

<sup>2</sup>Jeśli jesteś ciekawy, to ja oddałbym swój głos na lemoniadę.

O budżecie obywatelskim pisaliśmy w *Delcie*  $\Delta_{22}^{11}$  i  $\Delta_{24}^2$ .



Co za miła niespodzianka – skarbiec naszej gminy jest pełen pieniędzy. Co zrobimy z tą całą gotówką? Słyszałem kilka pomysłów: a może by tak zbudować kompostowniki społeczne, utworzyć publiczne hotspotty Wi-Fi, rozmieścić interaktywne instalacje artystyczne w całym mieście lub poczęstować wszystkich darmową lemoniadą w upalne letnie dni? Byłoby wspaniale, gdyby to obywatele mieli możliwość podjęcia decyzji<sup>2</sup>.

Każdego roku część funduszy publicznych jest przeznaczana na różne projekty w ramach budżetów partycypacyjnych. Przeanalizujmy etap poprzedzający proces głosowania, aby zrozumieć, w jaki sposób mogła powstać pula propozycji. Jednym ze sposobów jest zasugerowanie przez władze kilku projektów, a innym zachęcenie obywateli do zgłoszania własnych pomysłów. Druga metoda wydaje się lepsza, ale pojawia się kluczowa obawa: jeśli władze zasugerują tylko kilka projektów, każdy mieszkaniec prawdopodobnie znajdzie wystarczająco dużo czasu, aby dokładnie ocenić każdy z nich i wyrazić swoją opinię. Ale czy to samo dotyczy sytuacji, gdy każdy obywatel złoży własną propozycję, a nawet wiele propozycji? Niestety, wśród ogromnej puli projektów jedynym praktycznym rozwiązaniem dla wyborców byłoby przejrzenie tylko części dostępnych opcji, co skutkowałoby tym, że ich preferencje byłyby niekompletne. Tak naprawdę niekompletne preferencje są dość powszechne w naszym codziennym życiu: kto ma czas na oglądanie zwiastunów wszystkich filmów w serwisie streamingowym przed wybraniem jednego z nich? Albo na czytanie recenzji każdej restauracji w nowej okolicy, zanim zdecyduje się na kolację? Albo na zapoznanie się z każdą dostępną dziedziną nauki przed wyborem kierunku studiów? Ogólnie rzecz biorąc, nie jest to tak dużym problemem w przypadku większości codziennych decyzji. Jednak jeśli chodzi o wybory, niepełne preferencje mogą prowadzić do podjęcia decyzji, która znacznie odbiega od optymalnej, czyli takiej, którą podjąłby wyborcy, gdyby mieli pełne preferencje.

Zobaczmy teraz, czy potrafię czytać w myślach... Tak, mam! Liczyłeś na przykład, który wszystko wyjaśni, prawda? Oto on.

## Niekompletne preferencje w praktyce: Pan Wyborca i Pani Wyborczyni.

Rozważmy scenariusz, w którym Pan Wyborca i Pani Wyborczyni muszą wybrać 1 spośród 3 projektów, i założmy, że o każdym z nich jest dość trudno wyrobić sobie opinię. Założymy na przykład, że oboje głosujący wyrażają opinię tylko na temat projektów 1 i 2. Pan Wyborca lubi pierwszy projekt i nie lubi drugiego, podczas gdy Pani Wyborczyni akceptuje drugi i nie lubi pierwszego. Zarówno pierwszy, jak i drugi projekt ma więc dokładnie jednego zwolennika, a zatem każda sprawiedliwa reguła arbitralnie wybierze jeden z nich.

Wyobraźmy sobie teraz, że gdybyśmy w magiczny sposób dali wyborcom wystarczająco dużo czasu na zapoznanie się ze wszystkimi propozycjami, to oboje głosowaliby również za propozycję 3. Czy widzisz problem? Wybrana propozycja ma tylko jednego zwolennika, ale istnieje inna propozycja, która uzyskałaby poparcie wszystkich głosujących, gdyby czas na to pozwolił.

Jasne, zwycięska propozycja z jednym głosem w przypadku, gdy optymalny wynik to dwa, nie jest taka zła; jednak gdybyśmy uogólnili ten przykład na  $n$  wyborców i  $n + 1$  propozycji, to analogicznie moglibyśmy wybrać propozycję z jednym głosem, podczas gdy optymalna miałaby ich  $n$ . Podsumowując, początkowy pomysł umożliwienia wyborcom proponowania projektów wydawał się obiecujący, ale spowodował mnogość propozycji, co doprowadziło do niekompletnych preferencji, a tym samym niekorzystnych wyników. Rozważając scenariusz Pana Wyborcy i Pani Wyborczyni, Profesor Ballot, kolejna znacząca postać w tym głosowaniu, zastanawia się: „Hmm, niekompletne preferencje są problemem, ale czy możemy w ogóle coś z tym zrobić?”.

## Demokracja Płynna

W czasach szkolnych uczyliśmy się o dwóch rodzajach demokracji: bezpośredniej i przedstawicielskiej (pośredniej). Zwykle próba żonglowania dwoma arbuzami w jednej ręce nie kończy się dobrze, ale nie zawsze tak jest. Pamiętam dzień, w którym udało mi się to zrobić (no dobrze, to były dwa małe arbuzy, ale to nieistotne, podobnie jak to zdanie). Pozostańmy przy tych dwóch rodzajach demokracji i zastanówmy się, co by było, gdybyśmy zamiast ustalać jeden sposób uczestnictwa i stosować go dla wszystkich, pozwolili wyborcom wybrać, w jaki sposób chcą się zaangażować. Wyobraźmy sobie taką sytuację: wyborcy mogliby zdecydować się na bezpośrednie zaangażowanie (podobne do demokracji bezpośredniej), gdy czują się dobrze poinformowani lub gdy nie zgadzają się z żadnym dostępnym przedstawicielem. Alternatywnie, mogą powierzyć swój głos pełnomocnikowi (jak w demokracji przedstawicielskiej) w poczuciu zaufania i wspólnych przekonań. Ostatecznie pełnomocnik, który oddaje głos, robi to z wagą opartą na liczbie reprezentowanych przez siebie wyborców. Ten hybrydowy system głosowania nazywany jest *demokracją płynną*. Zabawny(?) fakt: w niektórych kontekstach dozwolone są delegacje przechodnie, co pozwala na ponowne przekazanie głosu pełnomocnikowi pełnomocnika i tak dalej.

**Niekompletne preferencje? Nie bój się, wkracza delegowanie głosów, które uratuje sytuację (lub chociaż spróbuj).** Na czym skończyliśmy? Ach tak, wybory z niekompletnymi preferencjami. Skupmy się na scenariuszu, w którym wyborcy mogą popierać lub nie każdy projekt, a ich celem jest wybór tylko jednego projektu. Mając w pamięci powyższą uwagę na temat demokracji płynnej, możesz się domyślać, do czego zmierzam: opinie wyborców mogą nie obejmować wszystkich propozycji, ale delegowanie ich głosu do zaufanego pełnomocnika może prowadzić do lepszego wyniku (uwaga, spoiler: lub też nie, w niektórych przypadkach). Każda osoba głosująca, która chce delegować swój głos, wybiera pełnomocnika na podstawie zgodności swoich preferencji (ograniczonych do propozycji, o których wyrobił sobie opinię) z preferencjami pełnomocnika. Mówiąc dokładniej, każdy wyborca ustala *próg zgodności* i jeśli głos pełnomocnika jest zgodny z opinią wyborcy na temat ujawnionych propozycji w stopniu, który przekracza określony próg, wyborca deleguje swój głos do tego pełnomocnika. Dla uproszczenia przyjmijmy, że dla każdego wyborcy ten próg wynosi połowę ujawnionych kwestii (co oznacza, że wyborca decyduje się na delegowanie, jeśli znajdzie pełnomocnika, który podziela jego poglądy na co najmniej połowę projektów, na temat których wyrobił sobie opinię). Założymy też, że pełnomocnicy mają dobre intencje, nie mają osobistych preferencji, znają kompletne preferencje wyborców (na przykład przewidują je na podstawie historycznych wzorców głosowania nad podobnymi projektami) mogą rozstrzygać remisy, jak chcą<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Brzmi to dość nierealistycznie, prawda? Cóż, ten optymistyczny scenariusz służy pewnemu celowi: podkreśleniu ograniczeń głosowania przez pełnomocnika. Jeśli nie można zagwarantować dobrego rozwiązania przy tak idealnym pełnomocniku, to w żadnym wypadku nie będzie ono możliwe do osiągnięcia.

Z drugiej strony, jeśli chodzi o pozytywne wyniki, takie wymagania ustalają granice wspomnianych wcześniej niemożliwości. W szczególności, jeśli coś nie jest uważane za niemożliwe w badanym modelu lub jeśli pewne ograniczenie pozwala na uzyskanie pozytywnych wyników, to powinno to być punktem wyjścia do pracy nad bardziej realistycznym modelem.

Badany model jest inspirowany rzeczywistymi implementacjami budżetu partycypacyjnego w zarządzaniu blockchainem (np. Project Catalyst). W takich systemach fundusze publiczne są regularnie przydzielane zgodnie z preferencjami interesariuszy powiązanej kryptowaluty. Członkowie społeczności mogą proponować pomysły na wydatkowanie wspólnego budżetu poprzez składane propozycje. Interesariusze mają następnie wybór, czy głosować bezpośrednio za lub przeciw tym propozycjom, czy też przekazać swoje uprawnienia do głosowania pełnomocnikom. Pełnomocnicy mogą być postrzegani jako eksperci, których zadaniem jest dokładna ocena proponowanych pomysłów, aby pomóc w wyborze propozycji korzystnych społecznie.

**Pan Wyborca, Pani Wyborczyni i Bohater Wyborców: historia sukcesu.** Czy poprzedni akapit nie wydawał Ci się, Czytelniku, zbyt techniczny? Cieszę się, że nie przewróciłeś strony. Uprośćmy sprawę, powracając do przykładu Pana Wyborcy i Pani Wyborczyni, tym razem z dodatkiem pełnomocnika. Wyobraźmy sobie, że odważny, mądry pełnomocnik pojawia się znikąd, aby pomóc Panu Wyborcy i Pani Wyborczyni w procesie podejmowania decyzji. Nazwiemy tego pełnomocnika Bohaterem Wyborców. Przypuśćmy, że Bohater Wyborców ogłosi, że zagłosuje za wszystkimi trzema propozycjami. Zarówno Pan Wyborca, jak i Pani Wyborczyni zgadzają się z pełnomocnikiem co do połowy propozycji, o których zostali poinformowani. Prowadzi to do tego, że obaj delegują swoje głosy. W rezultacie pełnomocnik staje się jedynym głosującym. Dzięki zasadzie rozstrzygania remisów zgodnie z wolą pełnomocnika, dostosowanej do preferencji wyborców, wybrana zostaje optymalna propozycja: projekt 3. Wprowadzając pełnomocnika, osiągnęliśmy więc najlepszy możliwy wynik! Całkiem nieźle, co? Profesor Ballot pojawia się ponownie, tym razem przeformułując swoje poprzednie pytanie:

**Wielkie pytanie: Czy potencjalni pełnomocnicy mogą przyjść na ratunek w wyborach z niekompletnymi głosami, umożliwiając wybór bliski optymalnemu?**

**Wielkie pytanie (i mały problem w pierwszej próbie odpowiedzi).**

Czy wielkie pytanie profesora Ballota sprowadza się po prostu do dodania pełnomocnika z takim zestawem preferencji, który przyciągnie wielu wyborców? Na pierwszy rzut oka może się tak wydawać, ale pomijamy tutaj fakt, że pełnomocnik nie tylko wykorzystuje swój deklarowany głos, aby przyciągnąć

	Złoczyńca Wyborczy	$n - 1$ wyborców
proj. 1	tak	nie
proj. 2	nie	tak
proj. 3	nie	tak
proj. 4	nie	tak

wyborców i zwiększyć swoją siłę głosu; on również oddaje ten głos. Dlatego też ta „reklama” powinna być starannie dobrana.

Przykład zilustrowany na marginesie, który obejmuje  $n$  wyborców (jeden z nich będzie określany jako Złoczyńca Wyborczy, czego powód wkrótce stanie się jasny) i 4 propozycje, podkreśla to rozróżnienie. Założymy, że wszyscy głosujący mają ujawnione preferencje dotyczące pierwszych 3 projektów. Wyborcy nie zapoznali się z projektem 4, jednak pełnomocnik słusznie przewiduje, że uzyskałby on ich poparcie. Założymy, że pełnomocnik ogłasza, że będzie głosował za wszystkimi wnioskami. Rzeczywiście jest to informacja, która przyciąga wielu wyborców (choć może nie jest to najlepsza opcja). Plan jest taki, by pokazać, że sam ten apel nie wystarczy, by zapewnić wybór wysokiej jakości propozycji. W szczególności Złoczyńca Wyborczy zgadza się wraz z pełnomocnikiem tylko w jednej z trzech propozycji, o których wie, więc decyduje się nie delegować głosu, ale głosować bezpośrednio. Z kolei pozostałych  $n - 1$  wyborców deleguje swój głos, ponieważ zgodność pomiędzy ich poglądamи a pełnomocnikiem jest większa niż połowa. W rezultacie zwycięży propozycja pierwsza, ponieważ jest popierana zarówno przez pierwszego głosującego, jak i pełnomocnika, którego głos ma siłę  $n - 1$  zwykłych głosów; wszystkie inne propozycje mają jedynie poparcie pełnomocnika. Dlatego pomimo przyciągnięcia prawie wszystkich głosujących wprowadzenie takiego pełnomocnika może prowadzić do wyboru znacznie gorszego. Co ciekawe, bezpośrednie głosowanie bez pełnomocnika doprowadziłoby do zwycięskiej propozycji popieranej przez  $n - 1$  głosujących. Cóż, wprowadzenie (takiego) pełnomocnictwa nie do końca poszło zgodnie z planem. Mam nadzieję, że nie tylko ja uważam ten przykład za fascynujący i pokazujący, że problem jest bardziej złożony i intrygujący niż początkowo sądziliśmy.

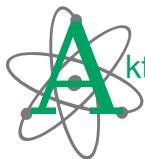
### **W wyborach z niekompletnymi preferencjami jest coś dobrego, Panie Fredo Wyborco, i (z pomocą pełnomocników) warto o to walczyć.**

W naszej pracy [\*] pokazaliśmy dość silny negatywny wynik: istnieją sytuacje, w których dodanie pełnomocników nie może w ogóle prowadzić do korzystnych wyników! Niemniej jednak na horyzoncie pojawia się nadzieję. Przykro nam z powodu złych przypadków, ale nie tylko pokazują nam one ograniczenia głosowania przez pełnomocnika w warunkach niepełnych preferencji, ale także pomagają zidentyfikować warunki dla pozytywnych rezultatów. I zгадnijcie, co się stało? Znaleźliśmy kilka! Na przykład, jeśli wszyscy głosujący przejrzeliby dokładnie ten sam zestaw propozycji, pełnomocnik może zareklamować swój głos w sposób, który zapewni, że wybrane rozwiązanie uzyska poparcie nie mniejsze niż optymalne podzielone przez 3. Możesz się teraz zastanawiać, w jaki sposób pojawiła się tutaj ta liczba i czy jest możliwość jej poprawy. Wyjaśnienie pierwszej części zabraloby nas w podróż przez szczegóły techniczne i dość długie wyjaśnienia, więc pomyślimy to. Jeśli chodzi o drugą część, cóż, jest szansa, że sytuacja może się poprawić, ale jestem prawie pewien, że nie przekroczymy optymalnej wartości podzielonej przez mniej niż 1,6. A teraz pewnie jesteś ciekawy, skąd wzięła się ta liczba. Po raz kolejny nie będę się w to zagłębiał, ale to urocze, że ją mamy, prawda?

Oto bardziej zaskakujący wynik: dodanie drugiego pełnomocnika zawsze prowadzi do optymalnego rozwiązania. Jak? To proste! Jeden pełnomocnik ogłasza aprobatę dla wszystkich projektów, podczas gdy drugi ogłasza dla wszystkich dezaprobatę. W tej sytuacji każdy wyborca deleguje swój głos do jednego z pełnomocników. (Rozumiesz, dlaczego? Każdy wyborca ma co najmniej połowę odpowiedzi „tak” lub połowę odpowiedzi „nie” na swojej karcie do głosowania). Wszystkie projekty będą mieć tyle samo głosów i pełnomocnicy będą mogli przełamać remis, wybierając projekt popierany przez jak największą liczbę osób.

A teraz, w nagrodę za wytrwanie ze mną do tej pory, mam dla Ciebie, Czytelniku, mały prezent: Chciałbym zwrócić Twoją uwagę, że wciąż istnieje wiele otwartych dróg do dalszej eksploracji! (W porządku, może nie jest to najbardziej ekscytujący prezent, jaki kiedykolwiek otrzymałem). Zbadanie ścisłości wyników, zagłębienie się w inne modele informacyjne lub racjonalności dla pełnomocników, a także praca z różnymi metrykami odległości lub zasadami głosowania to otwarte problemy, które być może czekają z rozwiązaniem właśnie na Ciebie!

[\*] Georgios Amanatidis, Aris Filos-Ratsikas, Philip Lazos, Evangelos Markakis, and Georgios Papasotiropoulos. „On the Potential and Limitations of Proxy Voting: Delegation with Incomplete Votes”. *Proceedings of the 23rd International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, 2024.



### Światy równoległe

Koniec sierpnia był w Krakowie gorący. Powietrze, lepkie i gęste, wszystkim dawało się we znaki, nie chodziło jednak tylko o jego temperaturę. Ponad trzysta osób zjechało bowiem na Uniwersytet Jagielloński, aby w przestrzonych salach Auditorium Maximum rozmawiać o różnych aspektach nauczania fizyki podczas konferencji Groupe National de Recherche sur l'Enseignement de la Physique (GIREP, pol. Międzynarodowa Grupa ds. Nauczania Fizyki).

GIREP ma za sobą dość długą i nieoczywistą historię. Powstawszy literalnie kopę lat temu pod auspicjami obecnej Organizacji Współpracy Gospodarczej i Rozwoju (OECD), rozwijała się przez wiele lat samodzielnie jako grupa entuzjastów pod wodzą Waltera Knechta, a jej liczebność szybko doszła do kilkuset członków. Od początku istnienia jednym z najważniejszych celów organizacji było przygotowywanie międzynarodowych spotkań poświęconych wymianie myśli związanych z nauczaniem fizyki na wszystkich poziomach kształcenia. Od mniej więcej dekady GIREP jest oficjalnie zarejestrowany jako stowarzyszenie w Belgii, a w skład jego władz obecnej kadencji wchodzi m.in. Dagmara Sokołowska z UJ.

Krakowska konferencja obejmowała m.in. blisko 200 referatów w sesjach równoległych i minisympozjach oraz 20 praktycznych warsztatów. Liczba i zakres tematyczny wystąpień nie pozwala, oczywiście, na syntetyczne podsumowanie całości, dlatego muszę się z konieczności ograniczyć do opisu osobistych wrażeń z tej części, w której miałem możliwość – i przyjemność – uczestniczyć.

W wielu systemach klasyfikacji badań naukowych wyodrębnia się dyscyplinę poświęconą właśnie nauczaniu fizyki. Po angielsku nazywa się ją Physics Education Research, zaś w naszym kraju zwykle się mówić o dydaktyce fizyki. Miarą odrebności i docenienia tego odcinka refleksji naukowej może być fakt, że Amerykańskie Towarzystwo Fizyczne wydaje oddzielne czasopismo *Physical Review Physics Education Research*, wchodzące w skład jednego z najważniejszych na świecie pakietów czasopism naukowych w zakresie fizyki. Jego wskaźniki bibliometryczne opisujące znaczenie i wpływ na społeczność naukową nie odbiegają od innych czasopism z tego pakietu.

Będąc od ćwierć wieku aktywnym naukowcem, miałem niejednokrotnie okazję obserwować, że polscy fizycy bardzo często odnoszą się do dydaktyki fizyki w sposób dość lekceważący, z jednej strony odmawiając badaniom z tego obszaru miejsca wśród badań z „prawdziwej” fizyki, a z drugiej odmawiając dydaktyce fizyki statusu dyscypliny równoważnej podstawowym badaniom naukowym. Powody tej sytuacji są złożone, aczkolwiek panuje rozpowszechnione przekonanie, że osoby prowadzące badania dydaktyczne robią to dlatego, że wcześniej nie odniósły zbyt wielkich sukcesów w fizyce bezprzymiotnikowej. Sprawy nie ułatwia fakt, że polskie środowisko dydaktyków fizyki jest bardzo nieliczne,

obciążone wieloma obowiązkami organizacyjnymi, zwłaszcza związanymi z oddziaływaniami na program kształcenia w szkole, i pozbawione oczywistych strumieni finansowania swoich badań.

Czym zatem zajmuje się – tak na poważnie – dydaktyka fizyki? Posłużę się tutaj przykładem, który jest bezpośrednio związany z moim doświadczeniem pracy dydaktycznej. Od dwóch dekad raz na jakiś czas prowadzę zajęcia z mechaniki kwantowej. Przewinęło się przez nie wiele osób, które są dziś m.in. czynnymi naukowcami, przedsiębiorcami i wynalazcami. Przeglądając moje stare materiały, jestem w stanie dostrzec, że kolejne pokolenia studentów zmagają się wciąż z tymi samymi trudnościami natury pojęciowej. Nic w tym dziwnego, mechanika kwantowa wymaga wszak porzucenia wielu intuicji i przyzwyczajeń związanych z codziennymi doświadczeniami. Czy trudności te mają jednak charakter ogólny, tzn. są udziałem wszystkich studentów na świecie, niezależnie od systemu kształcenia? Jak wprowadzać treści programowe mechaniki kwantowej, aby trudności te nie były wielką przeszkodą w osiągnięciu efektów uczenia się? Czy lepiej stosować podejście historyczne, w którym podstawową rolę odgrywa funkcja falowa, czy też pozytyczniej jest zacząć od obliczeniowo prostszych, ale koncepcyjnie bardziej abstrakcyjnych układów dwupoziomowych, co wymusza mówienie o stanach spinowych cząstek? Odpowiedzi na te pytania poświęcony jest cały wątek badań w dydaktyce fizyki, który był oficjalnie reprezentowany w wystąpieniach na konferencji. Sprawa ta przypomina zapewne dyskusje o interpretacji mechaniki kwantowej – spośród wielu równoważnych w praktyce obliczeniowej podejść każdy może wybrać (lub stworzyć) to najbardziej mu odpowiadające. Ważne jest jednak, że rozważania te wychodzą poza osobiste doświadczenia i dowody anegdotyczne, i pozwalają szukać prawidłowości wspólnych dla wszystkich kursów mechaniki kwantowej na świecie.

Jaka zatem jest dla mnie najważniejsza lekcja z konferencji GIREP 2024? Niewątpliwie nauczyłem się wiele o różnorodnych uwarunkowaniach nauczania fizyki i, wiedząc więcej, mogę przełożyć to na swoją praktykę dydaktyczną, by uczyć lepiej. A możliwość spotkania koleżanek i kolegów dzielących moją pasję do lepszego uczenia oraz związana z nią możliwość wymiany osobistych doświadczeń była po prostu bezcenna.

Krzysztof TURZYŃSKI

# Oscylacje neutrin

\* Student, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

O Modelu Standardowym i historii odkryć dokonywanych w akceleratorach pisał obszernie w siedmiodcinkowym cyklu Piotr Chankowski w  $\Delta_{16}^{1\dots 6}$  oraz  $\Delta_{17}^2$ . Jeden z odcinków cyklu (w  $\Delta_{16}^5$ ) poświęcony był fizycznemu neutrin i ich oscylacjom.

Paweł Przewłocki pisał natomiast o detektorach neutrin w  $\Delta_{14}^{10}$ ,  $\Delta_{16}^3$ .

Wiktor MATYSZKIEWICZ\*

Za jedno z największych osiągnięć współczesnej fizyki uznaje się Model Standardowy, który – mimo pewnych wad – pozwala przewidywać wyniki zderzeń wysokoenergetycznych cząstek z olbrzymią dokładnością. Od dziesiątek lat potwierdzają go eksperymenty we wszelkiej maści akceleratorach i detektorach, a w środowisku fizyków uchodzi za najlepszą teorię opisującą trzy z czterech fundamentalnych oddziaływań: elektromagnetyczne, słabe i silne.

O sukcesie Modelu Standardowego może świadczyć fakt, że w XXI wieku zaledwie dwa razy dokonano odkryć, które wymuszałyby jego modyfikację. Pierwsze dotyczyło oscylacji neutrin, drugie zaś cząstki Higgsa (znanej także jako boska cząstka). I choć to o tym drugim było zdecydowanie głośniej, to również oscylacje neutrin zasługują na szersze poznanie.

**Czym są neutrina?** W bardzo wielkim skrócie można je nazwać nieśmiałymi, unikającymi poklasku braćmi naładowanych leptonów. Neutrina, pozbawione ładunku elektrycznego, oddziałują tylko słabo. Oddziaływanie słabego zasila zaś do najtrudniejszych do zaobserwowania w przyrodzie, ponieważ ich zasięg jest około tysiąca razy mniejszy niż promień protonu. Tak blisko neutrina trzeba się znaleźć, by poczuć jego oddziaływanie.

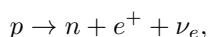
Z tego powodu wykrywamy neutrina o wiele rzadziej niż pozostałe cząstki elementarne. I tak jak padający na Ziemię strumień światła rozproszy się lub zostanie pochłonięty, tak strumień neutrin w znacznej części przeleci między atomami Ziemi – prawie niewykrywalny.

W przyrodzie istnieją trzy rodzaje neutrin, z których każde przenosi inny rodzaj „zapachu”. Nie ma on, rzecz jasna, nic wspólnego z jego fizycznym zapachem, a samego neutrina oczywiście nie da się powąchać – po prostu fizycy cząstek bardzo lubią przenosić na świat kwantowy nazwy z życia codziennego.

Zapach neutrin wiąże się z pewnymi zasadami zachowania, które łączą je z pozostałą trójką leptonów. I tak neutrino elektronowe ma ten sam zapach co elektron, neutrino mionowe taki sam jak mion, a neutrino taonowe jak taon. Istotą zapachu jest fakt, że – tak jak np. ładunek elektromagnetyczny – jego ilość w każdym procesie musi być zachowana. Innymi słowy zapach nie może zniknąć ani pojawiać się znikąd.

Jako ilustrację tej zasady możemy wykorzystać rozpad  $\beta^+$ , w którym następuje przemiana protonu w neutron. Gdybyśmy nie dodali do niego kolejnych produktów, niezachowany byłby ładunek elektromagnetyczny. I rzeczywiście w wyniku rozpadu  $\beta^+$  otrzymujemy się także pozyton (czyli anty-elektron), oznaczany jako  $e^+$ . On z kolei niesie zapach „anty-elektronowy”, do którego zrównoważenia potrzebujemy cząstki o zapachu elektronowym – zatem kolejnym produktem rozpadu okazuje się neutrino elektronowe, oznaczane jako  $\nu_e$ .

Efektywnie obserwujemy więc rozpad:

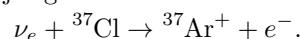


w którym zachowany jest zarówno ładunek elektromagnetyczny, jak i zapach elektronowy.

**Jakie znaczenie ma rozpad beta?** Jest niezwykle istotny dla reakcji jądrowych w Słońcu. Na przykład w dominującym cyklu wodorowym następuje fuzja dwóch wodorów w deuter, który wymaga właśnie przemiany protonu na neutron. Ciągle rozpady beta czynią ze Słońca wielką fabrykę neutrin elektronowych, które bezproblemowo uciekają z jądra i rozlatują się we wszystkich kierunkach. W tym na Ziemię, gdzie możemy je mierzyć.

Jedną z pierwszych takich prób podjęto w latach siedemdziesiątych w eksperymencie Homestake. Neutrina słoneczne uderzały w zgromadzony w zbiornikach chlor, zamieniając go w argon, który następnie wychwytywano i zliczano.

Ponieważ neutrina są cząstkami słabo oddziałującymi, eksperyment wymagał szczególnych przygotowań. Zgromadzono trzysta osiemdziesiąt tysięcy litrów zawierającego chlorku tetrachloroetenu i umieszczono w kopalni, półtora kilometra pod poziomem morza – aby odizolować układ od otoczenia i pozbyć się wszelkich szumów. Neutrina elektronowe, uderzając w chlor, wywoływały reakcję, której produktem był zliczany później argon:



W ten sposób otrzymano liczbę uderzeń neutrin w zbiorniki, skąd oszacowano strumień neutrin. Problem leżał w tym, że rezultat nie zgadzał się z dotychczasowymi przewidywaniami teoretycznymi – konkretnie brakowało około dwóch trzecich neutrin słonecznych. Rezultat potwierdziły kolejne detektory, na czele z Super-Kamiokande i obserwatorium Sudbury.

Oznaczało to, że coś było nie tak z teorią. A po początkowych próbach modyfikacji teorii działania Słońca fizycy zaczęli skłaniać się ku hipotezie, że brakujące neutrina „gubią się” w drodze ze Słońca.

Czym jest macierz CKM i mieszanie kwarków, objął Piotr Chankowski w  $\Delta_{16}^1$

Nalażowane leptony występują w trzech zapachach: elektron, mion i taon. Nalażowany lepton o określonym zapachu ma określoną masę: elektron jest najlżejszy, a taon najczęściej. Nie ma tu żadnego mieszania ani oscylacji.

Mieszanie można wyobrażać sobie geometrycznie w przestrzeni trójwymiarowej w następujący sposób. Trzy stany masowe reprezentujemy jako trzy pary prostopadłe wektory unormowane (czyli o długości równej jeden). Analogicznie definiujemy trójkę wektorów opisujących stany zapachowe. Mamy więc dwie tzw. bazy ortonormalne w tej samej przestrzeni. W przypadku nalażowanych leptonów obie trójki (bazy ortonormalne) się pokrywają. W przypadku neutrin te dwie trójki wektorów są względem siebie trochę obrócone. Sytuację dodatkowo ubogacą fakt, że wszystko to dzieje się w przestrzeni trójwymiarowej, ale zespółonej, a nie rzeczywistej. Dlatego oprócz trzech kątów pojawia się jeszcze dodatkowa zespółona faza.

Obliczenie prawdopodobieństwa zmiany zapachu wymaga uwzględnienia dwukrotnej zmiany bazy (z zapachowej na masową przy emisji neutrin i w drugą stronę przy ich detekcji) oraz dokonania kilku przekształceń algebraicznych. W skrócie: neutrino emitowane ma określony zapach, np. elektronowy, czyli składowe w kierunku zapachu mionowego i taonowego są równe zero. Rozkładamy ten stan w bazie masowej – tu wszystkie składowe będą niezerowe. Każda z tych składowych ewoluje niezależnie (poruszają się jako fala o innej długości), pokonując tę samą odległość, co matematycznie sprawdza się do tego, że każda składowa pomnoży się przez inną liczbę zespoloną o module jeden. Na koniec te trzy stany masowe, które doleciały do Ziemi, sumujemy. Ponieważ współczynniki przy stanach masowych zmieniły się w różny sposób, suma ta nie musi być równa wyjściowej sumie. Oznacza to, że stan części ulegnie zmianie. Gdy rozłożymy go teraz w bazie zapachowej, to okaże się, że składowe w kierunku każdego ze stanów zapachowych będą na ogół różne od zera.

Mechanizm wyjaśniający zagadkę zaproponował już w 1957 roku Bruno Pontecorvo, opierając się na analogicznym procesie zachodzącym wśród kwarków (znanym jako mieszanie kwarków i opisywanym przez macierz CKM). Rozwiążanie Pontecorvo nazywamy dziś *oscylacjami neutrin*.

**Czym są oscylacje neutrin?** Żeby oscylacje mogły zachodzić, muszą być spełnione pewne warunki. Po pierwsze masy neutrin muszą się od siebie różnić – mówimy, że neutrina występują w trzech możliwych stanach masowych. Po drugie (i to jest właśnie kluczowe dla mieszania) relacja między zapachem a masą nie może być tak jednoznaczna, jak w przypadku nalażowanych leptonów. Istotą pomysłu jest stwierdzenie, że neutrino, które obserwujemy jako cząstkę o ściśle określonym zapachu (np. neutrino elektronowe), nie ma dobrze określonej masy. W języku mechaniki kwantowej mówimy, że jest *superpozycją* trzech stanów masowych. Analogicznie, cząstka o ściśle określonej masie jest superpozycją trzech różnych stanów zapachowych. Inaczej mówiąc, neutrino elektronowe (określony zapach) nie jest tym samym co neutrino najlżejsze, bo ma niewielkie domieszki stanów o wyższych masach. Natomiast neutrino najlżejsze oprócz głównego wkładu od neutrina elektronowego niesie w sobie dodatkowo niewielkie wkłady od stanu mionowego i taonowego.

Zwyklejowo stany masowe oznaczamy  $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$  i  $|\nu_3\rangle$ , a stany zapachowe  $|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle$  i  $|\nu_\tau\rangle$ . Te dwie trójki stanów możemy wyobrażać sobie jako trójki wektorów w trójwymiarowej przestrzeni (patrz margines). Mieszanie, które możemy interpretować jako coś w rodzaju obrotu, opisujemy przez kąty mieszania. Dla uproszczenia rozważmy najpierw przykład dwóch neutrin zamiast trzech. Wówczas mieszanie opisywalibyśmy jako obrót na płaszczyźnie w następujący sposób:

$$\begin{cases} |\nu_e\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle = -\sin \theta |\nu_1\rangle + \cos \theta |\nu_2\rangle. \end{cases}$$

W tym przypadku  $\theta$  oznacza właśnie kąt mieszania. Gdy rozszerzymy teorię do trzech neutrin, pojawią się trzy kąty mieszania ( $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ ) i dodatkowo jedna faza zespółona  $\delta$ , która ma znaczenie przy transmisji przez ośrodek materialny.

Po emisji ze Słońca neutrina poruszają się (już w stanach masowych) w przestrzeni kosmicznej z prędkością bliską prędkości światła i energią  $E$  o wiele większą niż ich masa spoczynkowa. Wówczas możemy opisać ich propagację wzorem:

$$|\nu_i(L)\rangle = |\nu_i(0)\rangle e^{-iL(E + \frac{m_i^2}{2E})},$$

który mówi tyle, że każdy ze stanów masowych porusza się jak fala o długości proporcjonalnej do odwrotności  $(E + \frac{m_i^2}{2E})$ . Kluczowe jest to, że długość ta (czyli również częstość fali) jest inna dla każdej masy.

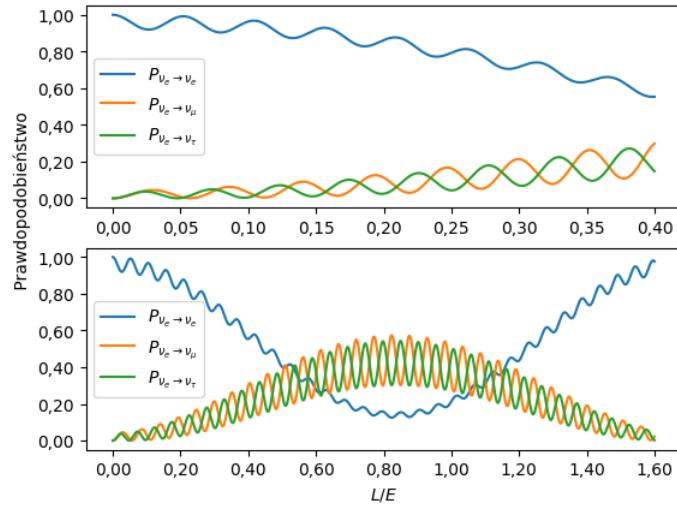
Na koniec zaś dokonujemy pomiaru neutrin, które dolecią do Ziemi. Ponieważ każdy ze stanów masowych porusza się jako fala o innej długości, więc fale, które w chwili emisji były w tej samej fazie, docierają do Ziemi przesunięte względem siebie. W konsekwencji ich złożenie reprezentuje inny stan niż stan początkowy wyemitowany na Słońcu. To powoduje – nawet jeśli stan początkowy był stanem o ustalonym zapachu – że stan końcowy może być już złożeniem stanów o różnych zapachach. Po dokonaniu kilku przekształceń algebraicznych odzwierciedlających te zmiany otrzymujemy prawdopodobieństwo zmiany zapachu  $e$  w zapach  $\mu$  (dla przypadku dwóch neutrin):

$$P_{e \rightarrow \mu} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{(m_2^2 - m_1^2)L}{4E} \right),$$

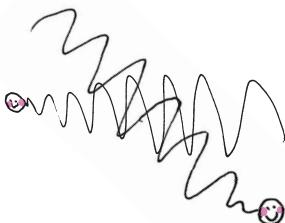
gdzie  $L$  to przebyta odległość od źródła,  $E$  to energia wyemitowanego neutrina, natomiast  $m_1$  i  $m_2$  to dobrze określone masy neutrin 1, 2. Oczywiście mamy też:

$$P_{e \rightarrow e} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{(m_2^2 - m_1^2)L}{4E} \right).$$

Jak w praktyce (w przypadku trzech neutrin) działają oscylacje neutrin, można zobaczyć na wykresie.



Oscylacje neutrin na krótkim i dłuższym dystansie. Wykres prezentuje prawdopodobieństwo zachowania zapachu neutrina elektronowego  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$  lub jego zamiany na mionowy  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}$  i taonowy  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau}$ . Prawdopodobieństwo zależy od pokonanej odległości  $L$ , podzielonej przez energię neutrina  $E$ , wyrażonych w jednostkach naturalnych ( $c = \hbar = 1$ ). Neutrina słoneczne pokonując drogę ze Słońca na Ziemię oscylują około  $10^{10}$  razy. Dla neutrin wyprodukowanych w akceleratorach (np. LHC) liczba pełnych cykli zależy od położenia detektora: niektóre badają krótkie oscylacje (górny wykres) dla  $L/E$  rzędu ~0,1, a niektóre długie dla  $L/E$  w zakresie od 10 do 100.



**Co mówią nam oscylacje?** Z powyższych wzorów wynika, że niektóre neutrina, powstałe na Słońcu jako neutrina elektronowe, z niezerowym prawdopodobieństwem będącymi wykrywalni jako neutrina mionowe (lub taonowe). O ile  $L \neq 2k\pi$ , to  $P_{e \rightarrow \mu} > 0$ . Przynosi to rozwiązywanie zagadki neutrin słonecznych, które w istocie nie znikają w tajemniczych okolicznościach, tylko zmieniają swój zapach, a nasze detektory są czułe tylko na neutrina elektronowe.

Nie jest to jednak ani jedyny, ani najważniejszy wniosek. Warto zauważyć, że wzór na oscylacje zawiera pod sinusem różnicę kwadratów mas neutrin. Oznacza to, że przynajmniej dwa z nich (a najprawdopodobniej wszystkie) muszą mieć niezerową masę!

Fakt ten stanowiło spore wyzwanie dla Modelu Standardowego, bowiem wcześniej zakładano, że neutrina jak fotony są cząstkami bezmasowymi. Odkrycie oscylacji zmusiło fizyków cząstek do przeformułowania swojej największej teorii, dodania dodatkowych elementów – kątów mieszania oraz mas – i zadania sobie kolejnych pytań, na przykład o źródło mas neutrin.

Odkrycie było na tyle ważne, iż poświęcono mu aż dwie nagrody Nobla: w 2002 i 2015 roku. Otrzymały je osoby odpowiedzialne za budowę detektorów (Homestake, Sudbury i Super-K); najpierw Raymond Davis i Masatoshi Koshiba, a następnie Takaaki Najita i Arthur McDonald.

Stoi ono również u podstaw rozwoju całej gałęzi badań nad neutrinami i fizyką zapachów. Fizycy teoretyczni wciąż zadają sobie pytania, skąd biorą się takie kąty mieszania, a także zastanawiają się nad naturą neutrin i spekulują o ich masywniejszych partnerach (znanych jako sterylnne neutrina). Pytania o tyle interesujące, że z racji ich skrytej natury nasza wiedza na temat neutrin jest skromniejsza, niż byśmy chcieli.

Fizycy doświadczalni nie ustają zaś w planowaniu kolejnych eksperymentów mających zgłębić nieodkryte dotychczas tajemnice tych nieuchwytnych cząstek. Badają, jak neutrina rozpraszały się w atmosferze, czy zachowują symetrię CP, a także wyznaczają coraz dokładniej kąty mieszania. Poza neutrinami słonecznymi badają również te produkowane w akceleratorach – a jest to o tyle wygodne, że znając zakres energii zderzeń, możemy dokładnie określić, gdzie najlepiej postawić detektor neutrin, jeśli chcemy na przykład zwiększyć prawdopodobieństwo oscylacji. W planach są również kolejne wielkie detektory, w tym Hiperkamiokande i DUNE, które – mniejmy nadzieję – umożliwią nam kolejne wielkie odkrycia.

Symetria P oznacza odbicie lustrzane, a symetria C to zamiana wszystkich cząstek na antycząstki. Badanie zachowania symetrii CP oznacza sprawdzanie, czy Wszechświat odbity w lustrze, w którym wszystkie cząstki zamienimy na antycząstki, będzie miał dokładnie takie same właściwości jak nasz. Fizycy teoretyczni poszukują łamania symetrii CP między innymi w celu wyjaśnienia, dlaczego we Wszechświecie istnieje więcej materii niż antimaterii.



## Odmłodnieć – one to potrafią

Poskarżyłam się doktorowi na niedostatek sił, senność i trudności z pamięcią. Doktor nie zostawił złudzeń. „W pani wieku to normalne, że boli rano”. „W pani wieku trzeba dobrze się wysypiać”. „W pani wieku zostawienie telefonu na dachu samochodu to całkowita norma”. W moim wieku... zamarzyłam, leżąc na kanapie, żeby trochę, troszeczkę odmłodnieć. Niemożliwe? Cóż, a gdyby ścieżki ewolucji przebiegły nieco inaczej...?

Jesteśmy w drzewie genealogicznym życia na gałęzi zwierząt o dwubocznnej symetrii. A szkoda, bo nasi krewniacy, zwierzęta o symetrii promienistej i galaretowatym ciele posiadły zdolność do odmładzania. Na przykład *Turritopsis dohrnii*, meduza, która zyskała przydomek nieśmiertelnej, zwykle wiedzie żywot jak większość przyzwoitych meduz. W cyklu rozwojowym z zapłodnionego jaja wykluwa się orzęsiona larwa, która osiada na dnie morza i zmienia się w polip. Ten rośnie i przekształca się w kolonię wielu polipów, z których część ulega przemianie – zaczyna dzielić się w poprzek, przypominając stosik misek położonych jedna na drugiej. „Miski” te odrywają się stopniowo od stosiku i odpływają jako wolno żyjące meduzy – forma rozwojowa rozmnażająca się płciowo. *Turritopsis* ma jednak także strategię na ciężkie czasy. W warunkach stresu (np. przedłużającego się głodu) jej ciało kurczy się i przybiera coraz prostszą formę, aż w końcu osiada na dnie morza i przekształca się w cystę. Po pewnym czasie z cysty powstaje polip, i tu zwierzę wraca do klasycznego cyklu, wzrostu i stworzenia kolonii polipów, które dzielą się na „miszczki”. Do niedawna był to jedyny znany przypadek, w którym w pełni wykształcony organizm, mający zdolność rozmnażania się płciowego, uwstecznia się do fazy rozmnażającej się bezpłciowo, utrzymując zdolność do powrotu do formy dotąd uważanej za ostateczną.

Oceany dostarczają naukowcom kolejnych niespodzianek. Odmładzać potrafi się także *Mnemiopsis leidyi*, będący żebropławem. Ta wiadomość to wisienka na torcie zdziwień i debat wzburzanych przez żebropławę.

Zdjęcia i filmy prezentujące te zwierzęta w naturalnym środowisku pokazują stworzenia jak z innego świata. Widok zapiera dech. Ich delikatne przejrzyste ciało ma na powierzchni osiem podłużnych „żeber”, sztywnych struktur, jak druty w abażurze. W poprzek nich ułożone są w równych odstępach rzędy rzęsek, którymi żebropław synchronicznie porusza. Na rzęskach światło padające na zwierzę ulega ugięciu, co wywołuje efekt pulsujących błysków w kolorach tęczy. Dodatkowo część gatunków ma zdolność do bioluminescencji, więc świecą w ciemności.

Żebropław od dawna sprawiały biologom kłopoty. Ich galaretowate i przejrzyste ciało przypomina meduzę, dlatego jeszcze stosunkowo niedawno zaliczano je do jamochłonów. Stanowiły jednak bardziej wyjątek niż regułę. Nie mają, jak pozostały przedstawiciele jamochłonów, parzydełek, którymi mogą paraliżować swoje ofiary, symetria ciała, choć wydaje się czasem promienista, jest jednak dwuboczna. Poruszają się za pomocą ruchu malutkich rzęsek, a nie skurczy całego ciała, a na dodatek mają złożoną budowę ciała, np. układ pokarmowy ma początek (otwór gębowy) i koniec (otwór odbytowy) po dwóch różnych stronach, a pozostałe jamochłony wchłaniają pokarm i wydalają resztki tym samym otworem. Na koniec, w cyklu życiowym nie występuje typowy dla jamochłonów polip.

Sprawa była na tyle ważka, że naukowcy nauczyli się hodować *Mnemiopsis leidyi* w laboratorium i odtąd sprawy nabraly tempa. Zsekwencjonowano genom *Mnemiopsis*,

utworzono kolekcję mutantów, dzięki którym łatwiej było określić, które geny są niezbędne do życia, a które decydują o ważnych procesach. Badania fizjologii i działania komórek żebropławów wykazały, że mają one inny niż pozostałe zwierzęta układ nerwowy. Jest tam szereg typów komórek nerwowych, które nie tworzą jednego systemu, posiadają także neuroprzekaźniki inne niż te znane dotąd. Pod zewnętrzną warstwą ciała znajduje się sieć komórek nerwowych, które nie łączą się za pomocą synaps, jak u innych zwierząt, ale zlane są w jedną wielojądrową sieć.

Największą dyskusję wywołały wnioski z porównania genomów żebropławów, gąbek oraz organizmów jednokomórkowych, gdyż wyvróciły poprzednio akceptowany porządek. Według wcześniejszej teorii gałąź ewolucyjna prowadząca do dzisiejszych zwierząt rozdzieliła się na dwie, z których w jednej znalazły się gąbki, a w drugiej wszystkie inne zwierzęta. Tymczasem genetyka pokazuje coś innego. Porządek genów u żebropławów jest odmienny niż u gąbek, parzydełkowców i innych zwierząt. Według wynikającej z tego hipotezy w procesie ewolucji powstały dwie gałęzie, z których jedna prowadzi do dzisiejszych żebropławów, a druga powiodła do gąbek, parzydełkowców i zwierząt o symetrii dwubocznej. Gąbki, mające bardzo prostą budowę ciała, nie mają układu nerwowego. Analiza genetyczna wykazała jednak, że posiadają geny, które są niezbędne do funkcjonowania neuronów, są one jednak nieaktywne. Wygląda na to, że gąbki wtórnie utraciły układ nerwowy lub że wykształcił się on dwukrotnie w historii życia na Ziemi.

Świeże doniesienie na temat *Mnemiopsis leidyi* potwierdzają niezwykłość tych zwierząt. Część osobników poddanych stresowi – głodzeniu lub mechanicznemu uszkodzeniu, zmniejsza swoje rozmiary, uwsteczniając się do formy larwalnej, która u tego gatunku posiada dwa ramiona pokryte lepkimi rzęskami. Kiedy w środowisku pojawia się pokarm, *Mnemiopsis* rośnie i przekształca w dojrzałego osobnika.

Zapewne tej umiejętności *Mnemiopsis leidyi* zawdzięcza gwałtowną ekspansję. Pierwotnie żyjący w wodach Atlantyku obu Ameryk, został zawleczony w wodach balastowych statków i rozsiany po całym świecie. W latach 80. XX wieku spowodował katastrofę ekologiczną w Morzu Czarnym, które na skutek nieograniczonego namnażania się tego gatunku zamieniło się w „galaretowaną breję”. Pojawia się także w wodach Bałtyku, ale tu raczej nie zagroża inwazją, gdyż źle znosi niskie temperatury wody.

Odmładzanie żebropławów i meduz ma głęboki sens biologiczny – powrót do mniejszej lub uśpionej formy pozwala przetrwać warunki stresowe, choćby dzięki zmianie pokarmu (larwy odżywiają się mikroplanktonem, który dorosłym osobnikom nie wystarcza).

Niestety u człowieka to tak nie działa, choć nasze formy larwalne także żywią się czymś innym niż dorosły. A mogłoby być tak pięknie...

Marta FIKUS-KRYŃSKA

# Projekt rzeki Arno Leonardo da Vinci i Niccolò Machiavellego

Stanisław KORDEK\*, Grzegorz ŁUKASZEWICZ\*\*

\*XX Liceum Ogólnokształcące w Gdańsku  
\*\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1. Leonardo da Vinci (1452–1519)



Rys. 2. Niccolò Machiavelli (1469–1527)



Rys. 4. Arno zalewa Florencję, 1966

*Wydaje mi się, że pośród wszystkich przyczyn niszczenia mienia ludzkiego rzeki zajmują pierwsze miejsce ze względu na ich nadmierne i gwałtowne wylewy... Rzekę, która ma zostać przeniesiona z jednego miejsca na drugie, należy nakłaniać, a nie traktować brutalnie lub z użyciem przemocy; w tym celu należy zbudować na rzece rodzaj tamy, a następnie poniżej kolejną, siegającą dalej i w podobny sposób trzecią, czwartą i piątą, aby rzeka mogła spływać do wyznaczonego jej kanału... (Leonardo da Vinci, Notatniki)*

W artykule *Leonardo da Vinci i hydrodynamika* ( $\Delta_{24}^4$ ) rozważane były wybrane teoretyczne aspekty badań hydrodynamicznych Leonarda da Vinci opartych na wnikliwych obserwacjach ruchu wody. Tym razem przedstawimy konkretny projekt wdrożony w ramach eksperymentu hydraulicznego Leonarda da Vinci, podjętego wraz z Niccolò Machiavellim. Projekt łączył w sobie aspekty hydrauliczne, inżynierskie, polityczne i militarne. Przedmiotem operacji była rzeka Arno, a całość miała służyć potędze i dobru Florencji.



Rys. 3. Mapa fragmentu średniowiecznej Toskanii

Projekt inżynierski Leonarda zakładał skierowanie Arno do Morza Liguryjskiego kanałem – w pewnych miejscach oddalonym nawet o 35 km od koryta rzeki. Niccolò Machiavelli, administrator odpowiedzialny za politykę militarną i zagraniczną Florencji, w latach 1503–1504 próbował go zrealizować w celu odwrócenia rzeki od Pizy, pozbawienia tego miasta wody i w ten sposób wygrania bez strat wojskowych ciągnącej się od dekady wojny. Istotną zaletą tego projektu było także polepszenie przepływu wody i zmniejszenie liczby powodzi. Arno była i jest znana z wylewania podczas jesiennych deszczów oraz wiosennych odwilży (rys. 4).

Druga część projektu miała polegać na uczynieniu Arno rzeką żeglowną od Florencji do morza, tak aby miasto mogło być portem morskim. Projekt zakładał skierowanie wód Arno kanałem przez Prato i tunelem przez góre Serravalle. Inne aspekty projektu, widoczne na mapach i szkicach Leonarda, obejmowały wyprostowanie rzeki w samej Florencji, wprowadzenie śluз, użycie wód rzeki Arno do poruszania młynów i irygacji oraz umożliwienie jej żeglowności.

Zrealizowanie projektu wzmacniłoby i przekształciło ekonomiczną podstawę Republiki Florencji, pozwalając na dalekomorską wymianę handlową. Już od 1493 roku, kiedy to opublikowany został we Florencji opis pierwszej wyprawy Kolumba, lokalni kupcy wyrażali zainteresowanie morskimi podróżami eksploracyjnymi. W roku 1503 było już zupełnie jasne, że Florencja mogłaby uczestniczyć w tych odkryciach, gdyby tylko była portem morskim.

Niestety szereg problemów uniemożliwiło realizację pierwszej części projektu, i w rezultacie całe przedsięwzięcie upadło.

**Historia projektu Arno.** Po wielu konfliktach w 1406 roku Florencja uzyskała kontrolę nad Pizą. W 1494 roku, na zaproszenie Ludovica Sforzy z Mediolanu, król Francji Karol VIII najechał Italię, odbił Pizę od Florencji i umożliwił jej odzyskanie niezależności. Florencja przez cały czas próbowała zdobyć władzę w Pizie. Dostęp do morza był jedyną szansą florentyjków na stworzenie szybkiej drogi handlowej. Pragnęli, aby Florencja stała się miastem portowym pełnym życia i różnorodności. Dyskutowano o wyprawach z lat 1499 i 1501 opisywanych w listach Amerigo Vespucciego do jego florenckiego patrona Lorenza di Pierfrancesco. Jednakże Piza była mocno wspierana przez Francuzów, którzy nie chcieli oddać miasta będącego jednym z ważniejszych miejsc na szlakach handlowych. W tej sytuacji powstał niecodzienny projekt Leonarda da Vinci i Niccolò Machiavellego, mający na celu pokonanie Pizy.

Przypomnijmy, że już w 1434 roku, a więc kilkadziesiąt lat wcześniej, architekt Filippo Brunelleschi, sławny dzięki wspaniałej kopule Duomo we Florencji, opracował plan zalania Lukki wodami rzeki Serchio. Realizacja projektu okazała się klęską, o której tak napisał Machiavelli w swoich *Istorie fiorentine* [Historie florenckie] (1532).

*W tamtych czasach [1434] żył najznakomitszy architekt Filippo Brunelleschi, którego dzieł jest pełne nasze miasto... Pokazał, jak można zalać Lukkę, biorąc pod uwagę położenie miasta i koryto rzeki Serchio, i tak nalegał przede wszystkim, aby Dziesiątka [Rada Dziesięciu] zleciła przeprowadzenie eksperymentów. Ale nic z tego nie wynikło poza nieporządkiem w naszym obozie i bezpieczeństwem wroga, gdyż lukkańczycy podnieśli ziemię groblą od strony, przez którą prowadzono Serchio, a potem pewnej nocy przełamali groblę rowu, przez który woda płynęła. Tym samym woda zablokowała drogę do Lukki i otworzyła wał kanału, po czym zalała równinę, tak że armia nie tylko nie mogła zbliżyć się do miasta, ale musiała się wycofać.*

Wprawdzie zalanie miasta a odwrócenie od niego wód to dwie różne rzeczy, jednak niepowodzenie planu Brunelleschiego, które przyniosło straty finansowe i militarne, w przyszłości skutkowało sceptyczmem Signorii (rządu miasta Florencji) co do tego typu projektów.

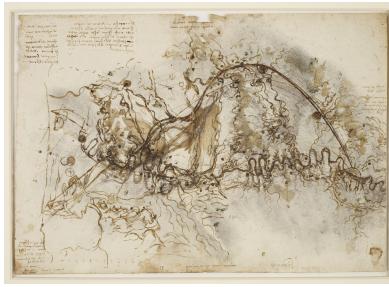
Tym niemniej już w latach 1490. Leonardo da Vinci, przebywający wtedy w Mediolanie, planował przekształcenie Arno w rzekę żeglowną aż do Florencji oraz budowę kanałów redukujących niebezpieczeństwo powodzi i podnoszących plony. O planach przebudowy Arno świadczą jego zapiski z tych lat w *Notatkach*.

*Śluzy należy zbudować w dolinie Chiany pod Arezzo, żeby w lecie, kiedy w Arno braknie wody, kanał nie wysechł. Winien on mieć 20 braccia [1 braccio = 58,3 cm] szerokości na dnie, 30 na górze i być na 2 lub 4 braccia głęboki, tak żeby 2 braccia służyły młynom i ląkom, na czym skorzysta region, a Prato, Pistoia i Piza zyskają 200 000 dukatów rocznie, wspomagając ten pożyteczny cel pieniędzmi i siłą roboczą. To samo zrobią mieszkańcy Lukki, gdyż żeglowne stanie się jezioro Sesto. Puszczę kanał przez Prato i Pistoię, przebiję go przez Serravalle i wpadnie do jeziora, więc nie będą potrzebne śluzy.*

Powstały wtedy pierwsze szkice do tego rozwiązania (znajdują się one w *Kodeksie Madryckim*).

**Początek realizacji pierwszej części projektu Arno.** W marcu 1503 roku Leonardo da Vinci wrócił do Florencji z Imoli, wędrownego dworu Cesare Borgii, gdzie przebywał od października 1502 roku, pracując jako inżynier wojskowy. W międzyczasie przybył tam także Niccolò Machiavelli, poseł i mediator polityczny. Signoria chciała go mieć w Imoli, aby także donosił „o rachubach księcia”. Liczne poszlaki wskazują, że Leonardo i Niccolò omawiali w Imoli projekt Arno i realizację jego pierwszej części. Mówią o tym rozmaite szkice, mapy i napomnienia w *Notatkach* Leonarda z tamtego okresu, a przede wszystkim rozpoczęcie realizacji projektu już latem 1503 roku, a więc wkrótce po





Rys. 5. Sporządzona przez Leonarda mapa rzeki Arno ze schematem kanału, około 1503-1504

powrocie obu panów do Florencji. Brak bezpośrednich dowodów ich współpracy w Imoli powinien być oczywisty, jeśli zna się realia miejsca i czasu zdarzeń. Korespondencja i dokumenty mogły być przechwycone przez „księcia-renegata”, a wymienianie kogoś z nazwiska było niebezpieczne wobec łatwych oskarżeń, dajmy na to, o szpiegostwo. W jednej chwili można było stracić wszystko, także głowę. Tak było zresztą w owym czasie w całych Włoszach. We Florencji istniał proceder anonimowych oskarżeń, czego doświadczyli zarówno Leonardo, jak i Niccolò (1510), oskarżeni o przestępstwa seksualne. Przypomina się anegdota o innym wielkim Leonardzie, Leonhardzie Eulerze, który sptytany po powrocie z Rosji do Niemiec, dlaczego nic nie mówi, odpowiedział: *Wracam z kraju, w którym mówienie groziło powieszeniem.*

Projekt opierał się na skierowaniu wód Arno przez jazy, zbudowane na długim na półtora kilometra i głębokim na 16 braccia kanale rozwidlającym się na dwa mniejsze (rys. 5 i 6). Da Vinci oszacował, że potrzeba usunąć ponad milion ton ziemi, a biorąc pod uwagę, że w wydobyciu jednego wiadra musiałoby uczestniczyć czternastu robotników, przyjął, że na wykonanie całej pracy należy przeznaczyć około pięćdziesięciu czterech tysięcy dni roboczych. Zaprojektował w związku z tym specjalne maszyny, które pozwoliłyby znacznie skrócić czas prac. Niestety żadna nie została zbudowana. Jedną z nich była prawdopodobnie koparka mechaniczna, której projekt zawarty był w *Kodeksie Atlantyckim* (rys. 7). Jej wymiary odpowiadałyby omawianemu zastosowaniu, dlatego powstały przypuszczenia, że została zaprojektowana specjalnie do wykorzystania jej przy regulacji Arno.

**Zmiana planu i katastrofa.** Prace rozpoczęły się 22 sierpnia 1504 roku i były prowadzone przez inżyniera Columbino. Na nieszczęście dla całego projektu zmienił on plany Leonarda i Niccola. Chcąc zyskać na czasie i zaoszczędzić pieniądze, zdecydował się na stworzenie dwóch płytowych kanałów, które jego zdaniem mogły przejąć rolę jednego, ale głębszego. Pomyśl ten powinien był zostać od razu odrzucony, ponieważ wymiary nowych kanałów były niewystarczające. Ich głębokość miała wynosić około 4 metrów, a szerokość około 18 metrów, co nie dawało szansy na zmianę kierunku rzeki bez umocnienia wspomagających, w tym tamy, której celem byłoby utrzymywanie stałego i odpowiedniego przepływu rzeki. Columbino nie przewidział także czasu potrzebnego na przewożenie ziemi i inne prace transportowe, a w dodatku pizańczycy ciągle atakowali miejsce pracy, aby już w zarodku uniemożliwić realizację tego przedsięwzięcia. Ostatecznym nieszczęściem pieczętującym fiasko projektu była burza przechodząca nad Arno. Spowodowała ona wylew rzeki i w rezultacie groźną powódź, która zalała wykonane dotychczas prace i zatopiła osiemdziesięciu robotników. Po burzy zorientowano się również, że żaden z powstałych rowów, zaprojektowanych przez Columbina, nie przetrwał napływu wezbranej wody. Tak oto projekt wielkiego Leonarda realizowany pod wodzą Columbina zakończył się niepowodzeniem.

W 1509 roku Piza została w końcu podbita przez Florencję poprzez zwykłe użycie siły militarnej.

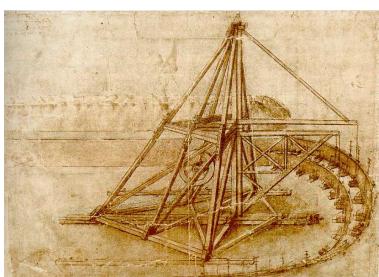
**Wyciszenie nieudanego przedsięwzięcia.** Florentczycy nie wspominali dobrze tych wielkich i dalekosiążnych planów, które nigdy nie zostały spełnione i które przyniosły straty finansowe i militarne. Tłumaczy to także brak jakikolwiek późniejszych notatek o wspólnym projekcie w zachowanych dokumentach i pismach Leonarda lub Niccola. Leonardo nie zniechęcił się jednak fiaskiem tej inicjatywy. Gdy przebywał w Mediolanie, zaprojektował kanały, które zostały wybudowane i pokazywały potęgę jego możliwości w zakresie hydrodynamiki – dziedziny zawsze bliskiej jego sercu.

#### Literatura

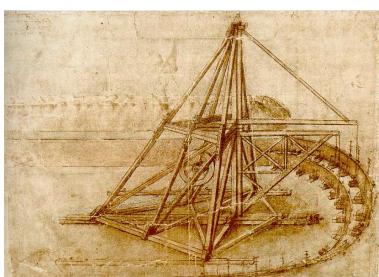
Fritjof Capra, *Learning from Leonardo: Decoding the Notebooks of a Genius*, Berrett-Koehler Publishers, Inc., 2013.

Roger D. Masters, *Fortune is a River*, The Free Press, 1998.

Charles Nicholl, *Leonardo da Vinci. Lot wyobraźni*, WAB, 2006.



Rys. 6. Mapa rzeki Arno z planami jej wypostrowania i niemilitarnymi ulepszeniami hydraulicznymi Leonarda, 1504



Rys. 7. Koparka Mechaniczna (*Kodeks Atlantycki*). Leonardo da Vinci prawdopodobnie zaprojektował ją do wykorzystania przy budowie kanału

# Twierdzenie Tutte'a i twierdzenie Halla

## Bartłomiej BZDEGA\*

\* Uniwersytet im. A. Mickiewicza  
w Poznaniu

W tym miesiącu w Kąciku Początkującego Olimpijczyka (patrz ostatnia strona *Deły*) kontynuujemy temat *skojarzeń w grafach*. Są z nim związane dwa ważne twierdzenia: Tutte'a i Halla. Ich uzasadnienia są bardzo pouczające, a ponieważ nie udałoby mi się ich zmieścić na ostatniej stronie, przedstawiam je w niniejszym artykule, Kącikowi pozostawiając same zadania z rozwiązaniami.

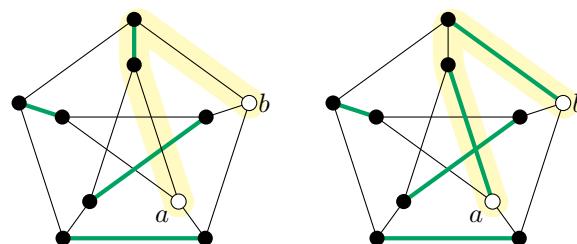


Przed przystąpieniem do lektury zachęcamy Czytelnika do zapoznania się z Kącikiem Początkującym Olimpijczyka nr 68 i 69 w  $\Delta_{24}^8$  i  $\Delta_{24}^9$ . Są tam wszystkie niezbędne definicje.

Zaczniemy od podstawowego narzędzia. Niech  $M$  będzie skojarzeniem w grafie  $G$ . Ścieżkę nazywamy *naprzemienną dla skojarzenia  $M$* , jeśli ma krawędzie na zmianę nienależące i należące do  $M$ .

**Lemat o ścieżce naprzemiennej.** Jeśli istnieje ścieżka naprzemienna łącząca pewne dwa wierzchołki grafu  $G$  nienależące do skojarzenia  $M$ , to skojarzenie  $M$  nie jest największe.

*Dowód:* Niech  $P$  będzie opisaną w lematie ścieżką naprzemienną. Ze skojarzenia  $M$  usuńmy te krawędzie, które należą do  $P$  i zamiast tego dołączmy te krawędzie  $P$ , które nie były wcześniej w  $M$ . W ten sposób otrzymujemy podgraf  $M'$ , który ma o jedną krawędź więcej niż  $M$ .



Ścieżka  $P$  została podświetlona na żółto. Na rysunku z lewej pogrubione zielone krawędzie należą do  $M$ , a z prawej – do  $M'$

Ten podgraf jest nadal skojarzeniem, gdyż w wyniku przeprowadzonej powyżej operacji stopnie wierzchołków  $a$  i  $b$  wzrosły z 0 do 1, a pozostałe nie zmieniły się.  $\square$

Ścieżka opisana w lematie nazywana jest często *ścieżką powiększającą skojarzenie*.

Wprowadźmy teraz definicje potrzebne do sformułowania twierdzenia Tutte'a.

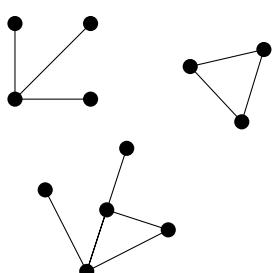
Graf nazywamy *spójnym*, jeśli każde dwa jego wierzchołki połączone są ścieżką. Każdy maksymalny (w sensie relacji bycia podgrafem) podgraf spójny danego grafu nazywamy jego *spójną składową*. Spójne składowe o parzystej liczbie wierzchołków będziemy nazywać *parzystymi*, a o nieparzystej – *nieparzystymi*. Oznaczmy przez  $\mathcal{O}(G)$  liczbę nieparzystych spójnych składowych grafu  $G$ .

Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem i niech  $S \subsetneq V$ . Przez  $G - S$  rozumiemy graf  $G$  z usuniętymi wszystkimi wierzchołkami należącymi do  $S$  oraz usuniętymi wszystkimi krawędziami, które mają co najmniej jeden koniec w zbiorze  $S$ .

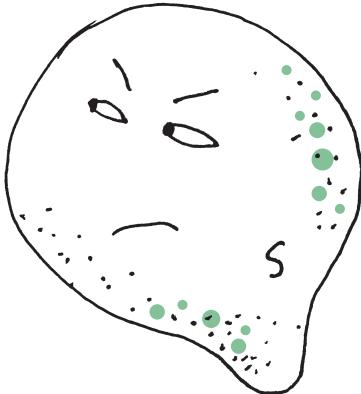
**Twierdzenie Tutte'a.** Graf  $G = (V, E)$  ma skojarzenie pełne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(T) \quad \forall_{S \subseteq V} \mathcal{O}(G - S) \leq |S|.$$

Zbiory  $S$  spełniające warunek  $\mathcal{O}(G - S) \leq |S|$  będąmy nazywać *dobrymi*, a niespełniające go – *niedobrymi*. Zwróćmy uwagę, że odrzucamy tu  $S = V$  (wtedy  $G - S$  nie jest grafem, choć nawet jeśli dopuścimy graf pusty, to ma on 0 składowych nieparzystych), ale uwzględniony jest zbiór pusty. Dla  $S = \emptyset$  otrzymujemy w warunku (T), że  $\mathcal{O}(G) = 0$ , czyli każda spójna składowa grafu  $G$  jest parzysta. Jest to oczywisty warunek konieczny istnienia skojarzenia pełnego.



Powyższy graf  $G$  ma trzy spójne składowe, z czego dwie mają nieparzystą liczbę wierzchołków, zatem  $\mathcal{O}(G) = 2$



*Dowód ( $\Rightarrow$ )*. Zakładamy, że graf  $G = (V, E)$  ma skojarzenie pełne. Należy wykazać, że każdy zbiór  $S \subsetneq V$  jest dobry. Dla  $S = \emptyset$  już to zrobiliśmy, niech więc  $|S| \geq 1$ . Każda nieparzysta spójna składowa grafu  $G - S$  ma przynajmniej jeden wierzchołek, który jest skojarzony z wierzchołkiem spoza niej. Nie może on należeć do innej spójnej składowej, więc musi należeć do zbioru  $S$ . Każdej spójnej składowej grafu  $G - S$  można w ten sposób przypisać pewien wierzchołek ze zbioru  $S$ . To przyporządkowanie jest różnowartościowe (bo idzie wzduż krawędzi skojarzenia), więc  $\mathcal{O}(G - S) \leq |S|$ .

*Dowód ( $\Leftarrow$ )*. Teraz zakładamy, że spełniony jest warunek (T). Dla dowodu nie wprost dodatkowo przyjmijmy, że w grafie  $G$  nie ma skojarzenia pełnego. Wówczas graf  $G$  ma parzystą liczbę wierzchołków (warunek (T) dla  $S = \emptyset$ ) i nie jest grafem pełnym.

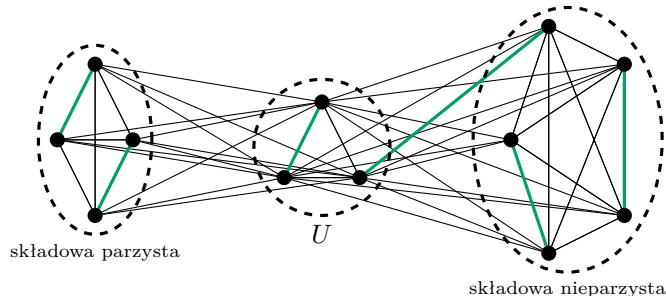
Niech  $G' = G + e$  będzie grafem  $G$  z dodaną krawędzią  $e$ . Graf  $G'$  nadal spełnia warunek (T), ponieważ dla dowolnego  $S \subsetneq V$  zachodzi  $\mathcal{O}(G' - S) \leq \mathcal{O}(G - S)$ . Istotnie, krawędź  $e$  może łączyć wierzchołki:

- z których co najmniej jeden należy do  $S$ ;
- z tej samej spójnej składowej grafu  $G - S$ ;
- z różnych parzystych spójnych składowych grafu  $G - S$ ;
- z parzystej i nieparzystej składowej grafu  $G - S$ ;
- z różnych nieparzystych spójnych składowych grafu  $G - S$ .

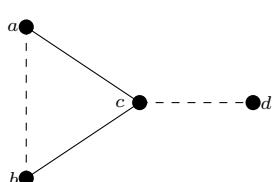
W pierwszych czterech przypadkach mamy  $\mathcal{O}(G' - S) = \mathcal{O}(G - S)$ , a w ostatnim  $\mathcal{O}(G' - S) = \mathcal{O}(G - S) - 2$ . Możemy zatem przyjąć bez utraty ogólności, że dodanie jakiejkolwiek krawędzi spowoduje zaistnienie skojarzenia pełnego.

Niech  $U$  będzie zbiorem wszystkich wierzchołków grafu  $G$  o stopniu  $|V| - 1$ , czyli wierzchołków połączonych z każdym innym. Wykażemy, że zbiór  $U$  jest niedobry, co będzie poszukiwaną sprzecznością.

Zauważmy najpierw, że nie wszystkie spójne składowe grafu  $G - U$  są klikami – inaczej graf  $G$  miałby skojarzenie pełne.



W każdej spójnej składowej można było dowolnie połączyć w pary wszystkie wierzchołki oprócz najwyższej jednego. Niesparowanych wierzchołków w składowych jest dokładnie  $\mathcal{O}(G - U)$ , więc możemy je połączyć z różnymi wierzchołkami ze zbioru  $U$ . Pozostałe wierzchołki ze zbioru  $U$  dowolnie łączymy w pary.



Przypominamy, że odejmując  $\{v, w\}$ , usuwamy wierzchołki  $v, w$  i wszystkie krawędzie mające co najmniej jeden koniec w  $v$  lub  $w$ .

Teraz wykażemy, że w grafie  $G$  istnieje struktura widoczna na rysunku obok (linia przerywana oznacza tu brak sąsiedztwa). Niech  $S_0$  będzie spójną składową grafu  $G - U$  niebędącą kliką. Ma ona zatem dwa wierzchołki  $x$  i  $y$ , które nie są połączone krawędzią. Wierzchołki  $a, c, b$  wybieramy jako trzy kolejne na najkrótszej ścieżce łączącej  $x$  i  $y$ . Ponadto  $c \notin U$ , więc istnieje wierzchołek  $d \in V$ , z którym  $c$  nie jest połączony.

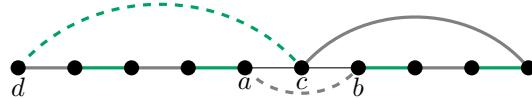
Wobec poczynionych wcześniej założeń, w grafie  $G + ab$  znajdziemy pewne skojarzenie pełne  $M_1$ , a w grafie  $G + cd$  – skojarzenie pełne  $M_2$ . Ponieważ w  $G$  nie było skojarzenia pełnego, więc krawędź  $ab$  należy do skojarzenia  $M_1$ , a  $cd$  – do  $M_2$ . Skojarzenie  $M_1 - \{a, b\}$  ma o jedną krawędź mniej niż miałyby skojarzenie pełne w grafie  $G$ , analogicznie skojarzenie  $M_2 - \{c, d\}$ . Wystarczy zatem znaleźć ścieżkę powiększającą któreś z tych skojarzeń.

Multigraf to graf, w którym dopuszcza się wielokrotne krawędzie, na przykład jak ten poniżej.



Sumą skojarzeń  $M_1$  i  $M_2$  jest multigraf  $H$ , w którym wszystkie wierzchołki są stopnia 2. Taki multigraf jest sumą parami rozłącznych cykli, być może o długości 2. W każdym takim cyklu krawędzie z  $M_1$  i  $M_2$  występują na przemian.

Jeśli krawędzie  $ab$  i  $cd$  leżą na rozłącznych cyklach, odpowiednio  $C_1$  i  $C_2$ , to ścieżka  $C_1 - ab$  powiększa skojarzenie  $M_1 - \{a, b\}$  w grafie  $G$ . Pozostaje przypadek, gdy  $ab$  i  $cd$  leżą na jednym cyklu. Możemy przyjąć, że wierzchołki  $a, b, c, d$  leżą na tym cyklu w tejże kolejności.



Wówczas ścieżka od  $c$  do  $d$  powiększa skojarzenie  $M_2 - \{c, d\}$  w grafie  $G$ .  $\square$

Można powiedzieć, że twierdzenie Tutte'a pozwala stwierdzić, czy w danej klasie, w której wiadomo, kto z kim się lubi, możemy usadzić uczniów w ławkach w taki sposób, że każdy siedzi z kimś, kogo lubi. A co, jeśli dodatkowo chcemy, by w każdej ławce siedzieli chłopiec i dziewczynka? Tu wygodnego kryterium dostarcza *twierdzenie Halla*, które omawiamy poniżej.

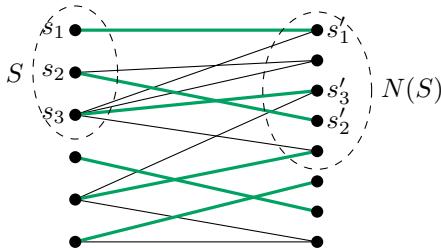
Ale najpierw potrzebne definicje. *Grafem dwudzielonym o dwupodziale*  $(A, B)$  nazywamy taki graf, w którym zbiór wierzchołków jest sumą rozłącznych zbiorów  $A$  i  $B$ , ponadto każda krawędź ma jeden koniec w  $A$ , a drugi w  $B$ . Mówimy, że skojarzenie  $M$  nasyca zbiór  $A$ , jeśli każdy wierzchołek ze zbioru  $A$  należy do  $M$ .

Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem i niech  $U \subseteq V$ . *Sąsiedztwem* zbioru  $U$  nazywamy zbiór tych wierzchołków spoza  $U$ , które mają co najmniej jednego sąsiada w  $U$ . Oznaczamy je przez  $N_G(U)$ . Jeśli jest oczywiste, o jaki graf chodzi, to można pisać po prostu  $N(U)$ .

**Twierdzenie Halla.** Graf dwudzielny  $G$  o dwupodziale  $(A, B)$  ma skojarzenie nasycające zbiór  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(H) \quad \forall_{S \subseteq A} |N_G(S)| \geq |S|.$$

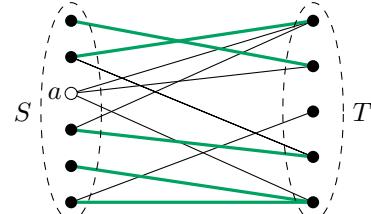
*Dowód* ( $\Rightarrow$ ). Założymy, że graf ma skojarzenie  $M$  nasycające zbiór  $A$ . Niech  $S = s_1, s_2, \dots, s_m \subseteq A$  będzie dowolny. Przez  $s'_i \in B$  oznaczmy unikalnego sąsiada wierzchołka  $s_i$  w skojarzeniu  $M$ .



Wówczas  $s'_1, s'_2, \dots, s'_m \in N(S)$  są różne, więc  $|N(S)| \geq m = |S|$ .

*Dowód* ( $\Leftarrow$ ). Niech  $M$  będzie największym skojarzeniem w grafie  $G$ . Przypuśćmy, że skojarzenie  $M$  nie nasyca zbioru  $A$ . Udowodnimy, że warunek (H) nie jest wtedy spełniony.

Na mocy przypuszczenia nie wprost, pewien wierzchołek  $a \in A$  nie należy do skojarzenia  $M$ . Rozważmy wszystkie wierzchołki grafu  $G$  połączone z wierzchołkiem  $a$  za pomocą ścieżek naprzemiennych dla skojarzenia  $M$ . Niech  $S$  oznacza tę część spośród wspomnianych wierzchołków, która należy do zbioru  $A$ , razem z wierzchołkiem  $a$ , natomiast  $T$  – tę część, która jest w zbiorze  $B$ .



Każda ścieżka naprzemienna rozpoczęta w wierzchołku  $a$  i zakończona w wierzchołku należącym do  $T$  może być kontynuowana – w przeciwnym razie otrzymalibyśmy ścieżkę powiększającą skojarzenie  $M$ . W takim razie z każdym wierzchołkiem  $t \in T$  możemy związać wierzchołek  $s \in S$ , który pojawia się bezpośrednio po  $t$  na pewnej ścieżce naprzemiennej, startującej z  $a$ . Wierzchołek  $s$  jest wyznaczony jednoznacznie, gdyż krawędź  $ts$  należy do skojarzenia  $M$  (a w skojarzeniu nie mogą pojawić się krawędzie  $ts$  i  $ts'$  dla  $s \neq s'$ ). Dokładnie tak samo uzasadniamy, że różnym wierzchołkom z  $T$  odpowiadają różne wierzchołki z  $S$ , i że są one różne od  $a$ . Dowodzimy w ten sposób, że  $|S| > |T|$ .

Jest jasne, że  $T \subseteq N(S)$ . Wykażemy, że zachodzi tu równość. Niech  $w \in N(S)$  – wtedy ma on sąsiada  $s \in S$ , więc albo  $s = a$  (i wtedy  $w \in T$ ), albo istnieje ścieżka naprzemienna  $P$  o kolejnych wierzchołkach  $a, \dots, t, s$ . Krawędź  $ts$  należy do skojarzenia  $M$ , więc krawędź  $sw$  nie może do niego należeć. Wobec tego ścieżka o kolejnych wierzchołkach  $a, \dots, t, s, w$  jest naprzemienna i w konsekwencji  $w \in T$ .

Wobec powyższych rozważań  $|S| > |T| = |N(S)|$  i warunek (H) nie jest spełniony, co kończy dowód.  $\square$

Przykłady zastosowań oraz zadania Czytelnik znajdzie na ostatniej stronie niniejszego numeru *Delty*.

# Turniej Młodych Fizyków

Leszek GŁAD CZUK\*

\* Sekretarz Turnieju Młodych Fizyków

Turniej Młodych Fizyków to drużynowy konkurs dla licealistów, w którym uczniowie mają rok na opracowanie 17 otwartych problemów badawczych (wymienionych poniżej). Pracując nad zagadnieniami, można korzystać ze wszystkich dostępnych źródeł oraz konsultować się z opiekunem lub pracownikami naukowymi. W trakcie przygotowań należy przeprowadzić eksperymenty, zbudować teoretyczny model zjawiska, postawić hipotezy naukowe oraz je zweryfikować. Podczas zawodów wyniki są przedstawiane w formie prezentacji na scenie, a następnie omawiane z oponentem i recenzentem.

Aby wziąć udział w zawodach, wystarczy zebrać zespół 5 licealistów oraz znaleźć opiekuna. W pierwszym etapie turnieju, który zakończy się 20 stycznia 2025 r., należy wysłać opracowania 10 z 17 problemów. Najlepsze drużyny zostaną zakwalifikowane do zawodów półfinałowych, które odbędą się w marcu i będą miały formę potyczek fizycznych. W kwietniu cztery najlepsze drużyny z półfinałów (po dwie z każdego okręgu) zmierzą się w finale ogólnopolskim, gdzie będą walczyć o tytuł reprezentacji Polski na Międzynarodowy Turniej Młodych Fizyków w Szwecji. Więcej informacji można znaleźć na [tmf.org.pl](http://tmf.org.pl).

## Problemy Turnieju Młodych Fizyków 2025

- 1. Wymyśl sam: Papierowy bumerang.** Wykonaj powracający bumerang, składając i/lub wycinając kartkę papieru. Zbadaj, jak ruch takiego bumerangu zależy od istotnych parametrów.
- 2. Mięsień z powietrza.** Umieść balon w cylindrycznej siatce (na przykład takiej używanej do pakowania czosnku) i nadmuchaj go. Siatka będzie się rozszerzać i skracać. Zbadaj właściwości takiego „mięśnia”.
- 3. Lato Lato.** Przymocuj po jednej kulce do każdego z końców sznurka i zaczep środkę sznurka do osi, która może się poruszać. Gdy oś będzie oscylować w kierunku pionowym, kulki zaczynają się zderzać i odskakiwać z rosnącą amplitudą. Zbadaj to zjawisko.
- 4. Wspinające się magnesy.** Przymocuj pręt złożony z cylindrycznych magnesów neodymowych poziomo do pionowego pręta ferromagnetycznego. Ogranicz ruch magnesów do kierunku pionowego. Gdy pręt ferromagnetyczny będzie się obracał wokół swojej osi symetrii, pręt magnetyczny zacznie poruszać się w góre. Wyjaśnij to zjawisko i zbadaj, jak prędkość wspinania zależy od odpowiednich parametrów.
- 5. Tańcząca sprężyna.** Skrć sprężynę Slinky kilka razy i trzymaj jej dolny koniec nieruchomo. Po puszczeniu górnego końca sprężyny, Slinky zacznie „tańczyć” – gdy na sprężynę spojrzymy z boku, zjawisko będzie przypominać falę. Wyjaśnij to zjawisko i zbadaj parametry wpływające na ruch sprężyny.
- 6. Cieknący kran.** Krople spadające z cieknącego kranu mogą tworzyć interesujące rytmu kapania, gdzie czas pomiędzy kroplami zależy od przepływu wody. Zbadaj to zjawisko i określ, jak zależy ono od odpowiednich parametrów.
- 7. Działo z linijką.** Dwie linijki są ściskane razem. Okrągły pocisk (np. plastikowa zakrętka od butelki lub kulką) zostaje umieszczony pomiędzy nimi, blisko jednego z końców. Gdy na powierzchnię linijkę zostanie wywarta dodatkowa siła, pocisk zostaje wyrzucony z dużą prędkością. Zbadaj ten efekt oraz parametry wpływające na prędkość wyrzutu.
- 8. Lewitujący płyn.** Kiedy pojemnik częściowo wypełniony cieczą drga w pionie i powietrzu jest wstrzykiwane przy dnie pojemnika, płyn może „lewitować”. Zbadaj to zjawisko.
- 9. Asysta magnetyczna.** Przymocuj jeden lub dwa magnesy do niemagnetycznej i nieprzewodzącej podstawy

w taki sposób, aby przyciągały magnes zawieszony na sznurku. Zbadaj, jak ruch zawieszonego magnesu zależy od różnych parametrów.

- 10. Konwekcja Rayleigha–Bénarda.** Podgrzewając jednolicie i powoli dno pojemnika zawierającego zawiesinę proszku w oleju (np. sproszkowanej miki w oleju silikonowym), można zaobserwować powstawanie struktur wygładzających jak komórki. Wyjaśnij i zbadaj to zjawisko.

- 11. Sprężynowa histereza.** Połącz dwie identyczne sprężyny symetrycznie z masą, tworząc kształt przypominający literę „V”, i przyłożyć do masy siłę, którą możesz zmieniać. Gdy siła ta ulega zmianie, ruch masy może zależeć od historii zmian przyłożonej siły. Zbadaj to zjawisko.

- 12. Dźwięk kontra płomień.** Mały płomień można ugasić dźwiękiem. Zbadaj parametry płomienia oraz parametry dźwięku, które decydują o tym, czy płomień zgaśnie.

- 13. Makaronowy akcelerator.** Gdy kawałek spaghetti zostanie wepchnięty do wygiętej rurki, drobne kawałki spaghetti mogą zostać wyrzucone z drugiego końca rurki z zaskakującą dużą prędkością. Przeanalizuj to zjawisko i zbadaj jego przyczyny.

- 14. Wodna rakietka.** Pompuj powietrze do plastikowej butelki częściowo wypełnionej wodą. W pewnych warunkach butelka zostaje wystrzelona i wzleci w powietrzu. Zbadaj, jak przyspieszenie podczas startu zależy od odpowiednich parametrów.

- 15. Wyjąca miska.** Kiedy uderzysz w bok metalowej miski zawierającej trochę wody, usłyszysz charakterystyczny dźwięk. Dźwięk zmienia się, gdy woda w misce się porusza. Zbadaj i wyjaśnij to zjawisko.

- 16. Pompa Wirtza.** Pompa Wirtza to pionowo zamontowana spirala, pusta w środku. Jeden jej koniec zanurza się pod wodą raz na obrót, podczas gdy drugi koniec (w osi obrotu spirali) jest połączony z pionową rurką. Obracanie spirali może powodować pompowanie wody na dużą wysokość. Wyjaśnij to zjawisko i zbadaj, jak istotne parametry wpływają na wysokość słupa pompowanej wody.

- 17. Kwantowy ślad.** Skieruj światło lasera na polimer organiczny (np. styropian). Rozproszone światło może mieć większą lub mniejszą długość fali niż światło padające. Wyjaśnij to zjawisko i ustal, jakie wnioski można wyciągnąć na temat struktury molekularnej materiału na podstawie przesunięcia długości fali.

# Klub 44 F



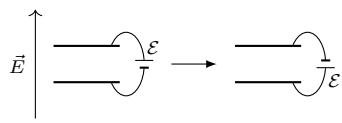
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2024

## Zadania z fizyki nr 784, 785

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**784.** Szklany pryzmat o małym kącie łamiącym  $\varphi$  umieszczono w pewnej odległości od cienkiej soczewki skupiającej o ogniskowej  $f$  tak, że jedna z powierzchni pryzmatu jest prostopadła do osi optycznej soczewki. Po drugiej stronie soczewki, w jej ognisku znajduje się punktowe źródło światła. Promienie odbite od pryzmatu po załamaniu w soczewce dają dwa obrazy źródła światła oddalone od siebie o  $d$ . Znaleźć współczynnik załamania szkła, z którego wykonano pryzmat.

**785.** Kondensator płaski, którego powierzchnia okładek jest dużo większa od odległości między nimi, podłączony jest do źródła o sile elektromotorycznej  $\mathcal{E}$  i umieszczony w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $E$ . Linie pola są prostopadłe do powierzchni okładek kondensatora (rys. 1). Jaką pracę trzeba wykonać, aby obrócić ten kondensator o kąt  $\pi$  wokół osi prostopadłej do wektora  $\vec{E}$ ?



Rys. 1

## Rozwiązań zadania z numeru 6/2024

Przypominamy treść zadania:

**780.** Mała piłeczka spadająca z wysokości  $h$  na twardą podłogę odskakuje na wysokość  $h/3$ . Na niciach o długościach  $l$  zawieszone stykające się ze sobą dwie takie piłeczki. Jedną z nich odchyłono od pionu o kąt  $\pi/2$  i puszczeno swobodnie. O jakie kąty odchyły się nici po zderzeniu piłeczek?

**781.** W odległości  $R$  od nieruchomego ładunku  $Q > 0$  znajduje się mała kula o masie  $m$ , naładowana ładunkiem  $-Q$ . Układ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego linie pola są prostopadłe do odcinka łączącego ładunki. Po oswoobodzeniu kula zaczyna się poruszać, a minimalna odległość, na jaką zbliża się do nieruchomego ładunku, wynosi  $R/2$ . Znaleźć wartość indukcji pola magnetycznego.

**780.** Tuż przed zderzeniem prędkość nadlatującej piłeczki wynosi  $v_1 = \sqrt{2gl}$ , druga piłeczka ma prędkość  $v_2 = 0$ . Środek masy układu porusza się z prędkością  $V = v_1/2$ , prędkość względna to  $v = v_1$ , a prędkości w układzie laboratoryjnym możemy zapisać jako:

$$(*) \quad v_1 = V + v/2, \quad v_2 = V - v/2.$$

W układzie środka masy  $V = 0$ , energia układu  $E = \mu v^2/2$ , gdzie  $\mu = m/2$ , a  $m$  jest masą piłeczkii. Zderzenie w tym układzie zachodzi jak zderzenie piłeczkii o masie zredukowanej  $\mu$  i prędkości  $v$  z twardą ścianką. Zgodnie z treścią zadania po odbiciu unosi ona  $1/3$  energii początkowej, a jej prędkość, czyli prędkość względna układu, zmienia znak na przeciwny i maleje  $\sqrt{3}$  razy:

$$v' = -v/\sqrt{3}, \quad v' = \sqrt{2gl/3}.$$

Wracając do układu laboratoryjnego, zgodnie z  $(*)$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} v'_1 &= V + v'/2 = v_1/2 - v/(2\sqrt{3}) = \sqrt{gl/2}(1 - 1/\sqrt{3}), \\ v'_2 &= V - v'/2 = \sqrt{gl/2}(1 + 1/\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Szukane kąty odchylenia wynoszą:

$$\alpha_{1,2} = \arccos\left(1 - \frac{(v'_{1,2})^2}{2gl}\right) = \arccos\left(\frac{2}{3} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

równanie ruchu cząstki:

$$M = -QBr \frac{dr}{dt} = \frac{dJ}{dt},$$

gdzie  $J$  jest momentem pędu cząstki. Jego zmiana od chwili początkowej do chwili, gdy odległość między ładunkami jest minimalna, wynosi

$$\Delta J = \frac{mVR}{2} = -QB \int_R^{R/2} r dr = 3QBR^2/8.$$

Uwzględniając  $(\dagger)$ , otrzymujemy wartość wektora indukcji pola magnetycznego:

$$B = \sqrt{\frac{32km}{9R^3}}.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 774 ( $WT = 3,88$ ), 775 ( $WT = 2,32$ ) z numeru 3/2024

Jacek Konieczny	Poznań	40,87
Konrad Kapcia	Poznań	2-39,58
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5-37,86
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3-23,69
Tomasz Wietecha	Tarnów	17-22,85
Jan Zambrzycki	Białystok	4-22,38

Rysunek 2 przedstawia diagram układowy. Na osi  $x$  znajdują się dwa punkty:  $R$  (odstęp od nieruchomego ładunku  $Q$ ) i  $Q$ . Wektor pola magnetycznego  $\vec{B}$  jest skierowany wzdłuż osi  $x$ . Wektor prędkości kulki  $\vec{v}$  jest skierowany pod kątem  $\alpha$  do osi  $x$ . Wektor siły magnetycznej  $\vec{F}_L$  jest skierowany wzdłuż osi  $x$  w przeciwną stronę do  $\vec{v}$ .

Rys. 2

**781.** Zmiana energii kinetycznej kulki równa jest pracy siły elektrostatycznej:

$$mV^2/2 = kQ^2(2/R - 1/R),$$

gdzie  $V$  jest prędkością kulki w minimalnej odległości od nieruchomego ładunku, stąd

$$(\dagger) \quad V = Q\sqrt{\frac{2k}{mR}}.$$

Moment siły magnetycznej względem punktu, w którym znajduje się nieruchomy ładunek w chwili, gdy odległość między ładunkami wynosi  $r$  (rys. 2) dany jest wzorem

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_L, \quad M = rQB(v \cos \alpha).$$

Uwzględniając, że  $v \cos \alpha = v_r = -\frac{dr}{dt}$ , możemy napisać

# Klub 44 M

$$\sqrt{\sum_{k=1}^4 k!} = 44$$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2024

## Zadania z matematyki nr 887, 888

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**887.** Znaleź najmniejszą liczbę rzeczywistą  $A$ , dla której istnieją liczby zespolone  $u, v, w$  oraz liczba rzeczywista  $B$  takie, że  $|u| = |v| = |w| = 1 = uvw$ , zaś  $u + v + w = A + Bi$ .

**888.** Znaleź wszystkie trójki liczb całkowitych  $x, y, z \geq 0$ , spełniające równanie  $7^x + 2^{x+y} = z^2$ .

Zadanie 888 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Witold Bednarek z Łodzi.

## Rozwiązań zadań z numeru 6/2024

Przypominamy treść zadań:

**883.** Znaleź wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające równanie

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2) + f(xy) + f(y^2) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

**884.** Wykazać, że dla każdej pary liczb naturalnych  $a \geq 2, b \geq 1$  istnieje nieskończoność wielu takich liczb naturalnych  $n$ , że liczba  $ba^n + 1$  jest złożona.

**883.** Funkcja  $f$  musi być parzysta, bowiem z podstawień  $y = x$  oraz  $y = -x$  dostajemy  $f(x^2) = f(-x^2)$ . Dalej badamy wartości  $f$  dla argumentów nieujemnych. Weźmy dowolną liczbę  $t \geq 0$  i podstawmy w równaniu  $x = y = \sqrt{t}$ . Otrzymujemy równość

$$f(2t) = 3f(t).$$

Wobec dowolności  $t$  wynikają z niej związki

$$f(4t) = 9f(t), \quad f(16t) = 81f(t),$$

$$f(10t) = 3f(5t), \quad f(12t) = 9f(3t)$$

(i wiele innych, podobnych; te będą dalej przydatne). Kolejne podstawienie  $x = \sqrt{t}, y = 2\sqrt{t}$  daje równość

$$f(5t) = f(t) + f(2t) + f(4t) = 13f(t),$$

skąd

$$f(10t) = 3f(5t) = 39f(t)$$

oraz

$$f(25t) = 13f(5t) = 169f(t);$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 877 (WT = 1,36) i 878 (WT = 3,29) z numeru 3/2024

Piotr Kumor	Olsztyn	46,57
Łukasz Merta	Kraków	43,92
Szymon Kitowski	Warszawa	41,11
Adam Woryna	Ruda Śl.	40,91
Witold Bednarek	Lódź	37,29
Michał Adamaszek	Kopenhaga	35,90
Krzysztof Zygan	Lubin	34,43
Jędrzej Biedrzycki		31,02
Andrzej Kurach	Ryjewo	30,66
Tomasz Wietecha	Tarnów	30,14

Mocny akcent! Pan Piotr Kumor, niezwykle aktywny uczestnik Ligi, właśnie zamknął szesnaste okrąglenie!

zaś podstawienie  $x = \sqrt{t}, y = 3\sqrt{t}$  daje

$$f(t) + f(3t) + f(9t) = f(10t) = 39f(t)$$

i w konsekwencji

$$(1) \quad f(9t) = 38f(t) - f(3t).$$

Wreszcie z podstawienia  $x = 3\sqrt{t}, y = 4\sqrt{t}$  otrzymujemy

$$f(9t) + f(12t) + f(16t) = f(25t) = 169f(t),$$

czyli (stale patrząc na równości uzyskane wyżej)

$$f(9t) + 9f(3t) + 81f(t) = 169f(t).$$

Zastępujemy początkowy składnik przez prawą stronę wzoru (1) i po redukcji dostajemy zależność

$$(2) \quad f(3t) = \frac{25}{4}f(t).$$

Zatem

$$(3) \quad f(9t) = f(3 \cdot 3t) = \left(\frac{25}{4}\right)^2 f(t).$$

Wstawiamy uzyskane związki (2) i (3) do równania (1):

$$\left(\frac{25}{4}\right)^2 f(t) = 38f(t) - \frac{25}{4}f(t).$$

Stąd, ostatecznie,  $f(t) = 0$ . Wszystkie wypisane zależności były słuszne dla dowolnej liczby  $t \geq 0$ . Funkcja (parzysta)  $f$  jest więc identycznie równa zeru (i oczywiście spełnia zadane równanie).

**884.** Autor zadania (pan Witold Bednarek) proponuje taką konstrukcję: niech  $p$  będzie ustalonym dzielnikiem pierwszym liczby  $ba + 1$ . Przyjmijmy

$$n_k = (p-1)k + 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Oczywiście  $a$  nie dzieli się przez  $p$ , więc na mocy małego twierdzenia Fermata  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Wobec tego

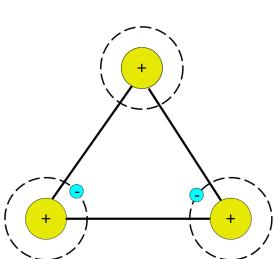
$$ba^{n_k} + 1 = b(a^{p-1})^k a + 1 \equiv ba + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Zatem każda z liczb  $ba^{n_k} + 1$  (dla  $k = 1, 2, 3, \dots$ ) dzieli się przez  $p$ ; przy tym jest większa od  $p$  (bowiem  $p \leq ba + 1 < ba^{n_k} + 1$ ); jest więc liczbą złożoną.

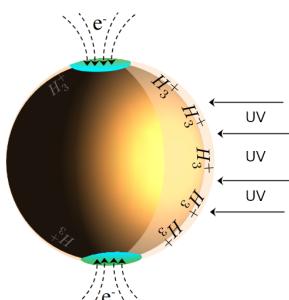
### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązań tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

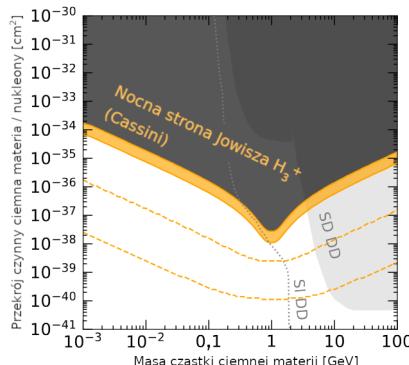


Rys. 1. Schemat kationu triwodorowego



Rys. 2. Schemat produkcji  $H_3^+$  na Jowiszu. Promieniowanie UV Słońca po stronie dziennej dominuje w produkcji  $H_3^+$ . Natomiast brak emisji  $H_3^+$  ze znanych procesów na niskich szerokościach geograficznych po stronie nocnej sprawia, że jest to idealny region do poszukiwania oznak ciemnej materii

Proces powstawania kationu triwodorowego, dla Czytelnika Dociekliwego:  
 $H_2 + \gamma \rightarrow H_2^+ + e^-$   
 $H_2 + H_2^+ \rightarrow H_3^+ + H$ .



Rys. 3. Nowe ograniczenia właściwości cząstek ciemnej materii. Szary obszar wskazuje na właściwości wykluczone dzięki obserwacjom nocnej strony Jowisza

Spostrzegawczy Czytelnik zwróci nam jednak uwagę, że ze względu na położenie Jowisza w Układzie Słonecznym nie jesteśmy w stanie obserwować jego „nocnej strony” bezpośrednio z Ziemi ani nawet wykorzystując Teleskop Kosmiczny Jamesa Webba. Oczywiście to prawda – na szczęście mamy wyniki obserwacji satelitów okrążających Jowisza. Ostatnim urządzeniem zdolnym do obserwacji kationów triwodorowych, ładnie promieniujących w podczerwieni, była sonda Cassini, przelatująca w pobliżu Jowisza w 2001 roku.

Wyniki tych obserwacji wskazują na zupełny brak kationów triwodorowych na równiku po nocnej stronie Jowisza, a przynajmniej brak możliwości ich wykrycia przy pomocy instrumentów Cassiniego. Nie jest to do końca zła wiadomość. Znamy bowiem czułość



## Prosto z nieba: Ciemna materia na Jowiszu?

Według Standardowego Modelu Kosmologicznego we Wszechświecie jest około 5 razy więcej ciemnej materii niż zwykłej materii (tej, z której jesteśmy zbudowani). Astrofizycy co rusz przedstawiają nowe, pośrednie dowody na jej istnienie. I chociaż powszechnie uważa się, że „coś tam jest” (i to coś nazwaliśmy ciemną materią), to jak dotąd nie ustalono, jaką formę przybiera ani jakie są jej dokładne właściwości. Fizycy usilnie próbują stworzyć eksperyment pozwalający zaobserwować bezpośrednio ciemną materię. Czy to w ogromnych japońskich kopalniach Kamiokande, czy w równie ogromnych akceleratorach cząstek. Mimo to wciąż nie wiemy, CZYM ciemna materia jest – jaką masę może mieć cząstka ciemnej materii ani nawet czy w ogóle ciemna materia składa się z cząstek. Nie dziwi więc fakt, że naukowcy wymyślają coraz to bardziej egzotyczne metody i miejsca jej poszukiwania. Na przykład... na Jowiszu.

Nowa, zaproponowana przez Carlosa Blanco i Rebeccę K. Leane, metoda poszukiwania ciemnej materii jest nieco skomplikowana i wymaga zaznajomienia się z pewną cząsteczką – kationem triwodorowym,  $H_3^+$ . Najprościej rzecz ujmując,  $H_3^+$  składa się z trzech atomów wodoru, z których jednemu brakuje elektronu (czyli mamy trzy protony i dwa elektrony, patrz rys. 1). Mimo że prawdopodobnie nigdy nie słyszłeś, Drogi Czytelniku, o kationie triwodorowym, to jest to jedna z najczęściej występujących molekuł w całym Wszechświecie.

Tylko co ma wspólnego kation triwodorowy z ciemną materią? Do powstania kationu triwodorowego potrzebne są dwie rzeczy: „coś energetycznego” (zazwyczaj jakiś rodzaj energetycznego promieniowania) i dużo wodoru molekularnego  $H_2$ . Najbliższym nam obiektem z dużą ilością takiego wodoru jest... Jowisz – nie od parady zwany gazowym olbrzymem. A „czymś energetycznym” według Blanco i Leane może być energia powstała w wyniku zderzenia (i anihilacji) dwóch cząstek ciemnej materii.

Problem jest tylko taki, że nie jest to jedyny sposób, w jaki kationy triwodorowe mogą powstać. Na Jowiszu „czymś energetycznym” może też być silne promieniowanie UV pochodzące od Słońca, cząsteczki wiatru Słonecznego przyspieszone w polu magnetycznym planety (te same, które tworzą zorzę), a nawet wyładowania elektryczne w chmurach planety.

Aby znaleźć kationy triwodorowe wytworzone dzięki obecności ciemnej materii, musimy więc szukać po „nocnej stronie” Jowisza. Czyli tej, która w danym momencie nie jest zwrócona w stronę Słońca (patrz rys. 2). W szczególności powinniśmy poszukiwać w regionach równika tej planety, z dala od biegunów, gdzie występuje zorz. Jeżeli znajdziemy tam kationy triwodorowe, oznacza to, że prawdopodobnie powstały dzięki energii uwolnionej w wyniku anihilacji dwóch cząstek ciemnej materii. Badając obfitość kationów triwodorowych, będziemy w stanie stwierdzić, jak częste i jak energetyczne są procesy zderzenia cząstek ciemnej materii, co z kolei pomoże nam w oszacowaniu masy tych cząstek oraz w projektowaniu i przeprowadzaniu eksperymentów w akceleratorach na Ziemi, pozwalających nam je zaobserwować.

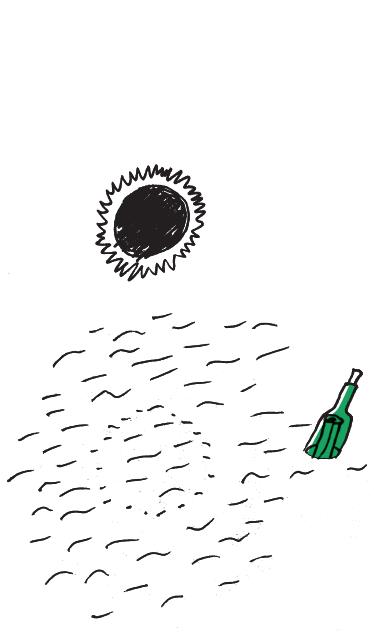
instrumentów pomiarowych sondy. Jesteśmy więc w stanie określić ograniczenia na masę cząstek ciemnej materii i prawdopodobieństwa ich zderzeń (dla których nie możemy zaobserwować dodatkowych kationów triwodorowych). W ten sposób ograniczamy możliwe właściwości cząstek ciemnej materii (rys. 3).

I tak, co prawda, ciemnej materii na Jowiszu nie znaleźliśmy, ale za to odrobinę ułatwiliśmy dalsze jej poszukiwania.

Oparte na publikacji: Carlos Blanco and Rebecca K. Leane, „Search for Dark Matter Ionization on the Night Side of Jupiter with Cassini”, Physical Review Letters, Volume 132, Issue 26.

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych,  
Narodowe Centrum Badań Jądrowych



## Niebo w październiku

Październik jest trzecim miesiącem, w którym szybko ubywa dnia i wydłuża się noc. Przez cały miesiąc Słońce przebywa na tle gwiazdozbioru Panny, obniżając do końca października wysokość górowania o następne  $11^\circ$ , co spowoduje skrócenie czasu jego przebywania nad horyzontem do wyraźnie poniżej 10 godzin. W ostatni weekend miesiąca nastąpi zmiana czasu z letniego na zimowy.

Bezksiężycowe noce obejmą początek i koniec miesiąca. 2 października Srebrny Glob przejdzie przez nów, podczas którego dojdzie do obrączkowego zaćmienia Słońca, trwającego maksymalnie prawie 7,5 minuty. Niestety jest to zaćmienie głównie dla mieszkańców wysp oceanu, gdyż pas zaćmienia przejdzie od Kiribati na Pacyfiku do archipelagu Falklandów na Atlantyku. A jedyną skrawek lądu, o który zahaczy, to pogranicze chilijsko-argentyńskie na samym południu obu krajów. Fazę częściową da się obserwować z Antarktydy, południowej części Ameryki Południowej oraz południowo-zachodniej części Półwyspu Kalifornijskiego i skrawka lądu między Puerto Vallarta a Manzanillo w Meksyku. Po nowiu Księżyca przeniesie się na niebo wieczorne, ale ze względu na niekorzystne nachylenie ekleptyki i przebywanie pod nią zacznie się on wyłaniać z zorzy wieczornej dopiero w okolicach I kwadry.

8 października maksimum swojej aktywności osiągają meteory z roju Drakonidów. Są to wolne meteory, ich prędkość zderzenia z naszą atmosferą wynosi  $21\text{ km/s}$ , a ich radiant znajduje się w głowie gwiazdozbioru Smoka i dołuje około godziny 5 na wysokość  $15^\circ$ . A zatem lepiej obserwować je wieczorem, gdy około godziny 20 wznosi się on na wysokość przekraczającą  $60^\circ$  nad zachodnią częścią nieboskłonu. Księżyca, mimo dość sporej już wtedy fazy, zajdzie zaraz po Słońcu i nie przeszkodzi w obserwacjach tych meteorów. Można spodziewać się do kilkunastu zjawisk na godzinę.

Przez większą część nocy widoczne są planety Saturn i Neptun, które we wrześniu przeszły przez opozycję względem Słońca. Odległość kątowa między nimi zwiększy się w październiku do  $15^\circ$ . Saturn świeci z jasnością  $+0,7^m$ , a jego tarcza ma średnicę  $19''$ . Stosunek małej do wielkiej osi pierścieni tej planety urośnie do 0,08. Neptun przebywa na tle gwiazdozbioru Ryb  $1^\circ$  na północ od gwiazdy 6. wielkości 24 Psc, sam świecąc o  $2^m$  słabiej, a zatem do jego odszukania trzeba posłużyć się przynajmniej lornetką. Obie planety przecinają południk lokalny po godzinie 22. 14 października w odległości mniejszej od  $1^\circ$  większą z planet minie Księżyca w fazie 90%.

W drugiej połowie nocy dobrze widoczne są planety Jowisz, Uran i Mars. Pierwsze dwie planety kreślą swoje pętle na tle gwiazdozbioru Byka. Uran czyni to mniej więcej  $5^\circ$  na południowy zachód od Plejad, oddalając się stopniowo od gwiazdy 13 Tau. Oba ciała niebieskie mają podobną jasność  $+5,7^m$ , a dystans między nimi urośnie przez miesiąc do  $2^\circ$ . Jowisz 9 października zmieni kierunek ruchu na wsteczny, zkręcając w okolicach gwiazdy 5. wielkości 109 Tau, a zatem jego pozycja na niebie zmieni się bardzo niewiele. Urośnie za to jasność tej planety do  $-2,5^m$  i średnica tarczy do  $46''$ . 7 października Kalisto, jeden z księżyco-galileuszowych Jowisza, przejdzie tuż na północ od jego tarczy. Srebrny Glob znajdzie się blisko Plejad i Urana 19 dnia miesiąca, prezentując fazę 91%,

już po pełni, która przypadła dwa dni wcześniej. 21 października zaś, w fazie zmniejszonej do 75%, Księżyca utworzy trójkąt równoramiony z Jowiszem i gwiazdą El Nath, czyli drugą co do jasności gwiazdą Byka.

Mars w październiku pokona około  $15^\circ$ , zaczynając miesiąc w Bliźniętach  $2,5^\circ$  na północ od Mekbudy ( $\zeta\text{ Gem}$ ) i kończąc go już w Raku, gdzie przejdzie na sam koniec. Po drodze 9 października planeta przejdzie mniej niż  $1^\circ$  od gwiazdy Wasat ( $\delta\text{ Gem}$ ), a 11 dni później –  $2^\circ$  od gwiazdy  $\kappa\text{ Gem}$ . W nocy z 23 na 24 października wschodzący Księżyca w fazie 54% znajdzie się  $3^\circ$  od Czerwonej Planety. Przez cały miesiąc Mars zwiększy jasność do  $+0,1^m$ , a jego tarcza urośnie do  $9''$ . Jednocześnie wyraźnie widoczna w teleskopach faza tarczy planety wyniesie około 90%.

Ekleptyka rano wciąż nachylona jest bardzo korzystnie, stąd Księżyca (podobnie jak miesiąc temu) ozdobi poranne niebo do końca miesiąca. Przez ostatnią kwadrę Srebrny Glob przejdzie 24 października, a przez nów – 1 listopada. Po spotkaniu z Marsem warto odnotować jego minięcie, w fazie 42%,  $5^\circ$  od gromady otwartej M44 w Raku – 25 dnia miesiąca, czy zbliżenia do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa – 26 i 27 października.

Ostatnim, ale wcale nie najmniej atrakcyjnym akcentem października jest zakrycie Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, przez bardzo cienki sierp Księżyca – w fazie 1,5%, do którego dojdzie 31 dnia miesiąca. Polska znajdzie się na zachodniej granicy widoczności tego zjawiska i da się je dostrzec tylko na wschód od linii Słupsk–Leszno–Wałbrzych. Odkrycie nastąpi około godziny 5:40 (czasu już zimowego), a na wschodniej granicy Polski Księżyca w tym czasie wzniesie się na wysokość  $4^\circ$ , przy wysokości Słońca  $-7^\circ$ . A zatem z tych obszarów da się je dostrzec nawet gołym okiem. Warto jednak wspomóc się lornetką.

Ariel MAJCHER

# Rozwiązań zadań ze strony 4



## Rozwiązań zadania M 1795.

Załóżmy przeciwnie i rozważmy 18 kolejnych liczb całkowitych dodatnich, które są dobre. Są wśród nich trzy liczby podzielne przez 6. Niech będą to liczby  $6n$ ,  $6(n+1)$  i  $6(n+2)$ . Ponieważ liczby te są dobre, a rozkład każdej z nich na czynniki pierwsze zawiera już 2 i 3, więc nie mogą one mieć innych dzielników pierwszych. Co więcej, tylko jedna z trzech kolejnych liczb naturalnych,  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+2$ , może być podzielna przez 3. Oznacza to, że pozostałe dwie są potęgami dwójką. Ale jedyne pary potęg dwójką, które różnią się o nie więcej niż 2, to  $(1,2)$  i  $(2,4)$ ; dlatego też  $n \leq 2$ . Jednakże wtedy wśród naszych 18 kolejnych liczb jest liczba pierwsza 13, która nie jest dobra – sprzeczność.



## Rozwiązań zadania M 1796.

Oznaczmy przez  $x_1, x_2, \dots, x_n$  długości boków kwadratowych pól na przekątnej. Wtedy  $x_1, x_2, \dots, x_n$  to szerokości „pasków”, na jakie pionowe (lub poziome) proste dzielą planszę. Zauważmy, że powierzchnia pola na przecięciu  $i$ -tego paska z  $j$ -tym wynosi  $x_i x_j$ , ponadto jest ono czarne, jeśli  $i+j$  jest parzyste, a w przeciwnym razie jest białe.

Rozpatrzmy teraz wyrażenie

$$(x_1 - x_2 + x_3 - \dots)^2.$$

Po wymnożeniu nawiasów dostaniemy sumę  $n^2$  wyrazów postaci  $\pm x_i x_j$ , gdzie znak „+” jest wybierany, jeśli  $i+j$  jest parzyste, a znak „-” jest wybierany, jeśli  $i+j$  jest nieparzyste. Zatem nieujemna liczba  $(x_1 - x_2 + x_3 - \dots)^2$  jest równa różnicy między sumami powierzchni wszystkich czarnych i wszystkich białych pól.

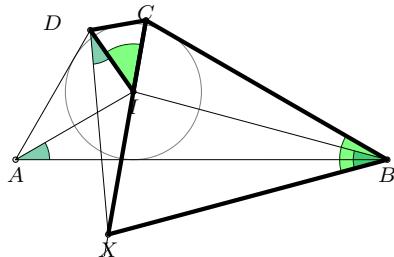


## Rozwiązań zadania M 1797.

Na prostej  $CI$  obierzmy taki punkt  $X$ , że

$$\frac{CX}{CD} = \frac{CB}{CI}.$$

Wtedy trójkąty  $CID$  i  $CBX$  są podobne (zgodnie z definicją  $X$  i równością kątów przy wierzchołku  $C$ ).



Zatem

$$\begin{aligned} \hat{x}CBI + \hat{x}IBX &= \hat{x}CBX = \hat{x}CID = \\ &= \hat{x}180^\circ - \hat{x}ICD - \hat{x}IDC = \\ &= \hat{x}IBA + \hat{x}IAB, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z tego, że suma  $\hat{x}ICD + \hat{x}IDC + \hat{x}IBA + \hat{x}IAB$  jest równa połowie sumy kątów wewnętrznych w czworokącie  $ABCD$ , czyli  $180^\circ$ .

Ponieważ  $\hat{x}CBI = \hat{x}IBA$ , więc powyższa równość implikuje, że  $\hat{x}IBX = \hat{x}IAB$ . Analogicznie do dowodu podobieństwa trójkątów  $CID$  i  $CBX$  możemy uzasadnić podobieństwo trójkątów  $CIB$  i  $CDX$ , skąd

$$\hat{x}XDI = \hat{x}CID - \hat{x}IXD = \hat{x}CBX - \hat{x}IBC = \hat{x}IBX,$$

co kończy dowód.



## Rozwiązań zadania F 1105.

Niech  $a$  oznacza średnią odległość między kropelkami wody tworzącymi mgłę. Mamy  $a = n^{-1/3}$ . Pojedyncza warstwa kropelek o promieniu  $r = d/2$  każda przesłania część przechodzącej przez nią wiązki światła równą  $\pi r^2/a^2$ . Liczba takich warstw wystarczająca do całkowitego przesłonięcia światła między obserwatorem i przedmiotem równa jest średnio  $l/a$ . Oznacza to, że:

$$1 = \frac{\pi r^2}{a^2} \frac{l}{a} = \frac{\pi r^2 l}{a^3}.$$

Otrzymujemy:

$$n = \frac{1}{\pi r^2 l}$$

i całkowitą masę,  $m$ , kropelek mgły w  $1 \text{ m}^3$ :

$$m = n\rho \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4r\rho}{3l}.$$

Liczbowo ( $r = 10 \mu\text{m}$ ,  $l = 100 \text{ m}$ ):  $n \approx 3,18 \cdot 10^7/\text{m}^3$  i  $m \approx 0,133 \text{ g/m}^3$ .

O wielkości kropelek decydują warunki, w jakich mgła powstaje, i dla różnych rodzajów mgły średnice kropelek mieścią się przeważnie w przedziale od  $10 \mu\text{m}$  do  $20 \mu\text{m}$ , ale czasem osiągają rozmiary sięgające  $40 \mu\text{m}$ . Ważne dla kierowców: widoczność ograniczona do  $100 \text{ m}$  wymaga zmniejszenia prędkości poniżej  $80 \text{ km/h}$  (przy  $50 \text{ m}$  poniżej  $50 \text{ km/h}$ ). W niektórych krajach znaki na poboczu autostrad wskazują dopuszczalne prędkości w zależności od widoczności – liczby widzianych przez kierowcę znaczników wzdłuż brzegu pasa ruchu.



## Rozwiązań zadania F 1106.

Niech punkt w odległości  $x$  daje ostry obraz w odległości  $y$  od soczewki. Punkty przedmiotu znajdujące się nieznacznie bliżej lub nieznacznie dalej niż  $x$  są także odwzorowywane „wystarczająco ostro” na obrazie. Założymy, że punkt w odległości  $x' \neq x$  daje jeszcze wystarczająco ostry obraz odległy o  $y'$  od soczewki. Wielkość

$$q = \left| \frac{y' - y}{x' - x} \right|$$

to poszukiwane powiększenie podłużne. Wielkości  $(x, y)$  i  $(x', y')$  spełniają równanie soczewki oogniskowej  $f$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{f}, \\ \frac{1}{x'} + \frac{1}{y'} &= \frac{1}{f}. \end{aligned}$$

Odejmijmy oba równania stronami:

$$\frac{x' - x}{xx'} + \frac{y' - y}{yy'} = 0.$$

Otrzymujemy:

$$q = \left| \frac{y' - y}{x' - x} \right| = \frac{y'y}{x'x} \approx p^2.$$

Ostatnia, przybliżona równość wynika z faktu, że  $p = y/x$  i dla  $x'$  bliskich  $x$  stosunki  $y'/x'$  i  $y/x$  są w dobrym przybliżeniu równe. Jest tak, gdy  $|x' - x| \ll f$  oraz  $|x' - x| \ll x - f$ .





## Skojarzenia – część 2

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Zachęcam Czytelnika, żeby przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań zapoznał się z poprzednim kącikiem (nr 69 w  $\Delta_{24}^9$ ) oraz z artykułem o twierdzeniu Tutte'a i twierdzeniu Halla (\*) (s. 16), zamieszczonym w niniejszym numerze. Znajdują się w nim definicje takich pojęć i oznaczeń, jak ścieżka powiększająca, graf dwudzielny czy  $\mathcal{O}(G)$ , wykorzystywane w poniższych zadaniach. Przypomnijmy również, że graf *d-regularny* to taki, w którym stopień każdego wierzchołka jest równy  $d$ .

### Zadania

- Dowieść, że skojarzenie  $M$  w grafie  $G$  można powiększyć wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ścieżka powiększająca  $M$  w grafie  $G$  (twierdzenie Berge'a).
- Mostem nazywamy taką krawędź  $e$  grafu  $G$ , że graf  $G - e$  ma więcej spójnych składowych niż graf  $G$ . Dowieść, że graf 3-regularny bez mostów ma skojarzenie pełne (twierdzenie Petersena).
- Udowodnić, że drzewo ma co najwyżej jedno skojarzenie pełne.
- Dowieść, że drzewo  $T = (V, E)$  o co najmniej dwóch wierzchołkach ma skojarzenie pełne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(D) \quad \min_{A \in V} \mathcal{O}(T - v) = 1.$$

- Znaleźć błąd w następującym rozumowaniu:

*Wykażemy, że graf  $G = (V, E)$ , mający cykl Hamiltona, ma skojarzenie pełne. Weźmy dowolny  $S \subseteq V$ . Ponieważ wszystkie wierzchołki grafu  $G$  leżą na jednym cyklu, graf  $G - S$  ma najwyżej  $|S|$  spójnych składowych, więc tym bardziej  $\mathcal{O}(G - S) \leq |S|$ . Graf  $G$  spełnia zatem warunek Tutte'a, a więc ma skojarzenie pełne.*

- Niech  $a, b \geq 3$  będą liczbami naturalnymi. Z  $2n$  klocków o wymiarach  $a \times b \times 1$  zbudowano prostopadłościan o wysokości 2. Dowieść, że w ten prostopadłościan można wbić pionowo  $n$  gwoździ w taki sposób, by każdy z klocków zostało przebito.
- Rozważmy graf dwudzielny  $(A, B)$ , w którym każdy klocki  $\Delta$  jest warsztawą.

$$\min_{a \in A} \deg(a) \geq \max_{b \in B} \deg(b).$$

Dowieść, że ten graf ma skojarzenie nasycające zbiór  $A$  (uogólnione twierdzenie o małżeństwach).

- Dowieść, że niepusty regularny graf dwudzielny jest sumą krawędziowo rozłącznych pełnych skojarzeń.
- Niech  $\Delta$  będzie największym stopniem wierzchołka w grafie dwudzielnym  $G$ . Dowieść, że graf  $G$  jest sumą  $\Delta$  rozłącznych krawędziowo skojarzeń (twierdzenie Königa).
- Niech  $n > m$  będą liczbami naturalnymi.

W tablicy kwadratowej  $n \times n$  wybrano  $m$  wierszy, a następnie w każdym z nich wpisano, w pewnej kolejności, liczby  $1, 2, \dots, n$ . Wiadomo, że w każdej kolumnie występuje  $m$  różnych liczb. Wykazać, że można uzupełnić tę tablicę do kwadratu łacińskiego  $n \times n$ .

# Odkrywanie odcieni astronomii



Wielokolorowe zdjęcie Kwintetu Stefana wykonane przez Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba. Część struktur jest w fałszywych kolorach, ponieważ zasadniczo nie powinny być one widoczne dla ludzi (obserwujemy je w podczerwieni).

Źródło: NASA, ESA, CSA oraz STScI



Jedna z galaktyk Kwintetu Stefana. Zdjęcia pokazują, jak galaktyki mogą się różnić w zależności od tego, jakie kolory przypiszemy różnym długościom fali promieniowania.

U góry promieniowaniu podczerwonemu przypisano kolor czerwony, promieniowaniu o pośrednich długościach fali przypisano kolor zielony, a promieniowaniu o krótkich długościach fali przypisano kolor niebieski. Na zdjęciu na dole odwrotnie.



Dwie galaktyki Kwintetu Stefana. Różne zdjęcia przedstawiają różne metody skalowania jasności obrazu astronomicznego.

Źródło: NASA, ESA, CSA, STScI oraz W. J. Pearson

Źródło: NASA, ESA, CSA, STScI oraz W. J. Pearson