# 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej

### Odległość dwóch punktów na płaszczyźnie

Dane: $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Odległość $|AB|$ punktów $A$ i $B$ obliczamy za pomocą wzoru:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

### Równanie kierunkowe prostej

$$k: y = ax + b$$

$a, b \in R$ – ustalone współczynniki równania kierunkowego prostej; $a = \operatorname{tg}\alpha$ – współczynnik kierunkowy; $b$ – wyraz wolny

### Równanie ogólne prostej

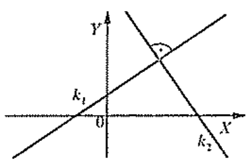
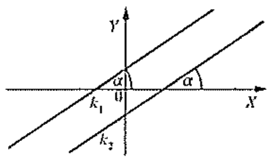
$$k: Ax + By + C = 0$$

$A, B, C \in R$, $A^2 + B^2 \neq 0$ – ustalone współczynniki równania ogólnego prostej niejednocześnie równe zero

### Równanie prostej przechodzącej przez dwa różne punkty $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$

$$k: (y - y_A)(x_B - x_A) = (x - x_A)(y_B - y_A)$$

### Warunki prostopadłości $(\perp)$ i równoległości $(\parallel)$ pary prostych o danych równaniach

| Postacie równań prostych / Warunki | Prostopadłości $(\perp)$ | Równoległości $(\parallel)$ |
|---|---|---|
| |   |   |
| kierunkowe: $k_1: y = a_1x + b_1$, $k_2: y = a_2x + b_2$ | $(\perp): a_1 \cdot a_2 = -1$ | $(\parallel): a_1 = a_2$ |
| ogólne: $k_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $k_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ | $(\perp): A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ | $(\parallel): A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ |

### Równanie okręgu

Okrąg o środku $S(a; b)$ i promieniu $r > 0$: $o(S(a; b), r)$ ma równanie:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$





## TREŚĆ ZADAŃ

### ZADANIA TYPOWE

**1** Wykresy funkcji $f(x) = |x| + x$ i $g(x) = -|x| + 6$ przecinają się w punktach $A$ i $B$. Oblicz cosinus kąta $ACB$, gdzie $C = (0, 0)$.

**2** Ze zbioru wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają warunek $(x + |x|)^2 + (y + |y|)^2 \leq 16$ wycięto figurę ograniczoną prostymi $x = -2$, $y = 0$ i zbiorem punktów opisanych równaniem $|x + y| + |x - y| = 2$. Oblicz pole tej figury.

**3** Dany jest okrąg: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Znajdź równanie stycznej do okręgu poprowadzonej z punktu $P = (0, 5)$.

**4** Znajdź obraz punktu $A = (4, 6)$ w symetrii względem prostej $3x + y = 2$.

**5** Wierzchołki trójkąta równoramiennego $ABC$, gdzie $A = (0, 2)$, $B = (4, 0)$ i $|AC| = |BC|$, leżą na okręgu $x^2 - 2x + y^2 + 2y - 8 = 0$. Znajdź współrzędne punktu $C$.

**6** Przekątna $DB$ kwadratu $ABCD$, gdzie $A = (-2, -4)$, leży na prostej $x + 2y + 5 = 0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu.

**7** Znajdź liczbę naturalną $m$, dla której punkt $P = (3m, m + 1)$ leży najbliżej prostej $y = x - 6$.

**8** Znajdź równania dwusiecznych kątów utworzonych przez proste o równaniach: $3x - 4y - 2 = 0$ oraz $5x + 12y - 5 = 0$.

**9** Okrąg o równaniu $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ przesunięto o wektor $\vec{w} = [1, -2]$. Znajdź równanie osi symetrii utworzonej w ten sposób figury.

**10** Wiadomo, że $A = (-4, -3)$ i $\overrightarrow{AB} = [6, 4]$. Punkt $S = (-2, 1)$ jest punktem przecięcia środkowych trójkąta $ABC$. Znajdź obraz tego trójkąta w symetrii względem osi $Y$.

**11** Czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach $AB$ i $CD$, w którym wierzchołki $A$ i $B$ leżą na prostej $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, punkty $A$ i $D$ na prostej $y = -2x + 3$ oraz $C = (5, 8)$. Oblicz wysokość trapezu.

**12** Znajdź równanie okręgu opisanego na trójkącie $ABC$, gdzie $A = (-5, -6)$, $B = (4, -3)$, $C = (-4, 1)$.

**13** Prosta $y = 3x + 4$ przecina parabolę o równaniu $y = 3x^2 - 6x + 4$ w punktach $A$ i $B$. Oblicz pole trójkąta $ABC$, gdzie $C$ jest wierzchołkiem paraboli.

**14** Określ wzajemne położenie prostych $p$ i $r$ stycznych do okręgu $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$, poprowadzonych w punktach przecięcia tego okręgu z prostą $x - y - 2 = 0$.

**15** Połączono środki boków czworokąta $ABCD$, otrzymując wielokąt $KLMN$. Uzasadnij, że boki tego czworokąta są parami równoległe.

**16** Odcinek $AD$ jest wysokością trójkąta $ABC$, gdzie $A = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$, $B = (-1, 2)$, $C = (1, 1)$. Znajdź współrzędne punktu $D$.

**17** Dany jest trójkąt $ABC$, gdzie $A = (-2, 1)$ i $B = (-2, 5)$. Wierzchołek $C$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$. Pole trójkąta jest równe 8. Znajdź współrzędne wierzchołka $C$.

**18** Punkty $A = (-4, 1)$, $B = (-1, -2)$ są kolejnymi wierzchołkami rombu $ABCD$. Punkt $C$ leży na prostej $x + y - 3 = 0$. Znajdź równanie prostej $CB$.