

Część III: Rachunek całkowy

Zadanie 1. Obliczyć całkę

$$\int_0^4 \{x\} dx$$

Zadanie 2. Obliczyć całkę

$$\int_0^4 [x] dx$$

Zadanie 3. Obliczyć całkę

$$\int_0^4 |2 - x| dx$$

Zadanie 4. Obliczyć całki ze wzorów elementarnych

- a) $\int (x^5 + 5x^2 - 15x + 2024) dx$ c) $\int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3} dx$ e) $\int \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} dx$
 b) $\int \frac{1}{x^2 + 9} dx$ d) $\int \left(5x^7 - 5x^3 - 5x + \frac{2}{x^3} \right) dx$ f) $\int \left(5 \sin x + 2024^x - \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \right) dx$

Zadanie 5. Obliczyć całki przez podstawienie

- a) $\int \cos(5x + 1) dx$ e) $\int \sin^2 x \cos x dx$ i) $\int x\sqrt{x+1} dx$
 b) $\int \frac{5}{3x+7} dx$ f) $\int \cos^3 x dx$ j) $\int xe^{x^2} dx$
 c) $\int \operatorname{tg} x dx$ g) $\int \frac{x^3}{1+x^8} dx$ k) $\int e^{\sin x} \cos x dx$
 d) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ h) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

Zadanie 6. Obliczyć całkę:

$$\int \sin ax dx, \quad \text{gdzie } a \neq 0$$

Zadanie 7. Obliczyć całki metodą przez części

- a) $\int \ln x dx$ c) $\int (x^3 - 3x) \sin 2x dx$ e) $\int e^x \sin x dx$
 b) $\int xe^x dx$ d) $\int x^4 \cos x dx$ f) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

Zadanie 8. Obliczyć całki oznaczone

- a) $\int_2^3 x^2 dx$ c) $\int_1^5 \frac{dx}{3x-2}$ e) $\int_0^\pi \sin x dx$ ¹
 b) $\int_{\text{miesiąc ur.}}^{\text{dzień ur.}} (\text{rok ur.}) \cdot (x^3 + 1) dx$ d) $\int_0^\pi x \sin x dx$ f) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

Zadanie 9. Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi: $x = 1, x = e, y = 0, y = \ln x$.

Zadanie 10. Obliczyć pole figury ograniczonej wykresami funkcji: $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ oraz $y = \frac{x^2}{4}$.

¹Zauważmy, że jest to pole jednego „brzuszka” sinusa.

Zadanie 11. Obliczyć pole pomiędzy wykresem funkcji f danej wzorem $f(x) = \sqrt{x}$, a osią Ox dla dowolnego przedziału $[0, a]$.

Zadanie 12. Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi $y = \frac{2}{x}, y = 0, x = 1, x = 36$.²

★ **Zadanie 13.** Wykazać, że funkcja Dirichleta³ nie jest całkowalna w sensie Riemanna⁴.

Zadanie 14 (sofizmat). Niech $x > 2$. Policzmy poniższą całkę przez części

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \left[\begin{array}{ll} u = \frac{1}{\ln x} & v' = \frac{1}{x} \\ u' = \frac{-1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} & v = \ln x \end{array} \right] = \frac{1}{\ln x} \cdot \ln x + \int \frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = 1 + \int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

Otrzymaliśmy zatem:

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = 1 + \int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

Stąd, odejmując stronami powyższą całkę otrzymujemy $0 = 1$.

Wskazać błąd w powyższym rozumowaniu.

²Jak obliczyć pole dla ograniczenia na x -ach, gdy $x \geq 1$?

³W Teorii Miary częściej mówi się o funkcji charakterystycznej zbioru liczb wymiernych. Funkcja charakterystyczna zbioru to taka funkcja, która każdej liczbie z tego zbioru przyporządkowuje wartość 1, a pozostałym 0.

⁴Całka Riemanna to nie jedyna całka rozważana w matematyce. Jej uogólnieniem jest tzw. całka Lebesgue'a. Zbiór funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a jest większy od zbioru funkcji całkowalnych w sensie Riemanna. Oznacza to, że każda funkcja całkowalna w sensie Riemanna jest też całkowalna w sensie Lebesgue'a, ale nie na odwrót. Funkcja Dirichleta jest klasycznym przykładem takiej funkcji - nie jest całkowalna w sensie Riemanna, ale jest całkowalna w sensie Lebesgue'a i całka ta wynosi 0. Całka Lebesgue'a jest tym pojęciem, o którym rozmawiali na krakowskich Plantach Stefan Banach i Otton Nikodym, i którego usłyszenie sprawiło, że przechodzący obok Hugo Steinhaus wtrącił się do rozmowy i w ten sposób został odkryty wielki talent Stefana Banacha. Na pamiątkę tego wydarzenia w 2016 roku – w setną rocznicę tamtego wydarzenia – na Plantach pomiędzy Collegium Novum a Wawelem powstał pomnik – Ławeczkę z siedzącymi na niej postaciami Banacha i Nikodyma.