Zbiory cz. 1

$\vee$ – lub, $\wedge$ – i/oraz, $\Leftrightarrow$ – wtedy i tylko wtedy, gdy

zbiór – pojęcie pierwotne, nie ma definicji. Intuicyjnie to zestaw, kolekcja pewnych elementów. Zbiory oznaczamy dużymi literami: $A, B, C, \ldots$, a ich elementy małymi literami: $a, b, c, \ldots$. Elementy zbioru liczbowego wypisujemy między nawiasami klamrowymi { }, oddzielając je przecinkami. Każdą liczbę wypisujemy tylko raz np. $A = \{1, 2, 3\}$.

Zbiór możemy opisać następująco:

1) podając warunek, który spełniają jego elementy np. A – zbiór możliwych ocen.
2) wypisując wszystkie jego elementy np. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3) stosując zapis symboliczny np. $A = \{x :\ x \text{ jest możliwą do otrzymania oceną}\}$.
   Czytamy: *zbiór A jest zbiorem takich elementów x, że x jest możliwą do otrzymania oceną.*

Jeśli np. 3 jest elementem zbioru A, to mówimy, że 3 **należy** do zbioru A, co zapisujemy $3 \in A$. Jeśli 3 nie należy do zbioru A to piszemy $3 \notin A$.

Definicja.
Zbiorem **skończonym** nazywamy taki zbiór, którego liczba elementów wyraża się liczbą naturalną. W przeciwnym wypadku mówimy o zbiorze nieskończonym. Liczbę elementów zbioru A nazywamy **mocą** zbioru A i oznaczamy $\#A$ (lub $|A|, \overline{\overline{A}}, \operatorname{card} A$)

Definicja.
Zbiorem **pustym** nazywamy zbiór do którego nie należy żaden element. Oznaczamy go symbolem $\varnothing$ (czasami $\emptyset$).

Definicja.
Zbiory A i B są **równe** $\Leftrightarrow$ każdy element zbioru A należy do zbioru B oraz każdy element zbioru B należy do zbioru A (zapis: $A = B$).

Definicja.
Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B (A zawiera się w B) $\Leftrightarrow$ każdy element zbioru A jest elementem zbioru B (zapis: $A \subset B$).

Przykład.
Niech $P = \{2, 3, 4, 5\}$.

$$\begin{array}{ccc} 2 \in P & \multirow{2}{*}{ale} & \{2\} \subset P \\ 3 \in P & & \{3\} \subset P \end{array}$$

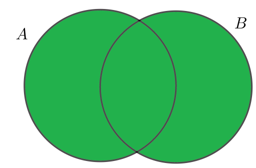
- należenie to relacja pomiędzy elementami, a zbiorem
- zawieranie to relacja między dwoma zbiorami

Działania na zbiorach

Definicja.

Sumą zbiorów A oraz B nazywamy zbiór wszystkich elementów, które należą do przynajmniej jednego z tych zbiorów (zapis: $A \cup B$).

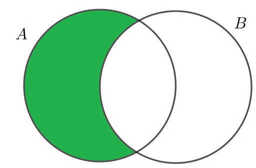
$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \lor x \in B$$



Definicja.

Różnicą zbiorów A oraz B nazywamy zbiór wszystkich elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B (zapis: $A \setminus B$ lub $A - B$).

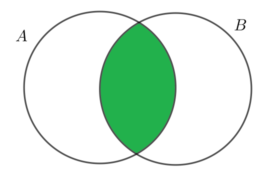
$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \land x \notin B$$



Definicja.

Częścią wspólną (iloczynem, przecięciem) zbiorów A oraz B nazywamy zbiór wszystkich elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B (zapis: $A \cap B$).

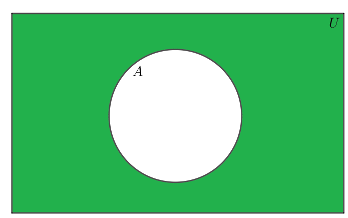
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \land x \in B$$



Definicja.

Niech A będzie zbiorem zawartym w przestrzeni U. **Dopełnieniem** zbioru A do przestrzeni U nazywamy zbiór wszystkich elementów przestrzeni U, które nie należą do zbioru A (zapis: A').

$$x \in A' \Leftrightarrow x \in U \land x \notin A$$



Definicja.
Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi**, gdy $A \cap B = \varnothing$.

Twierdzenie (Własności zbiorów)**.**
Niech A to dowolny zbiór. Wtedy:

1) $A \subset A$

2) $\varnothing \subset A$

3) $A \cap A' = \varnothing$

4) $A \cup A' = U$

Twierdzenie (Prawa rachunku zbiorów)**.**
Niech A, B, C to dowolne zbiory. Wtedy:

1) $A \cap B = B \cap A$ – przemienność iloczynu

2) $A \cup B = B \cup A$ – przemienność sumy

3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – łączność iloczynu

4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – łączność sumy

5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ – rozdzielność iloczynu względem sumy

6) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ – rozdzielność sumy względem iloczynu

7) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ – I prawo de Morgana

8) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ – II prawo de Morgana

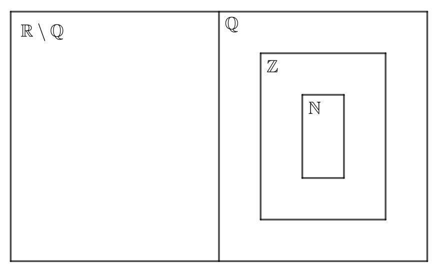
Twierdzenie (wzór *włącz-wyłącz*)**.**
Niech A, B, C to dowolne zbiory. Wtedy:

1) $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$,

2) $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(A \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$.

Zbiory liczbowe

- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór wszystkich liczb naturalnych,
- $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór wszystkich liczb całkowitych,
- $\mathbb{Q} := \{x : x = \frac{p}{q} \wedge p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$ – zbiór wszystkich liczb wymiernych,
- $\mathbb{R}$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – zbiór wszystkich liczb niewymiernych

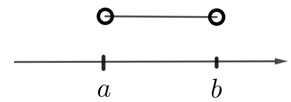


Prawa działań w $\mathbb{R}$

- przemienność: $a + b = b + a$ oraz $a \cdot b = b \cdot a$,
- łączność: $(a + b) + c = a + (b + c)$ oraz $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- element neutralny: $a + 0 = a$ oraz $a \cdot 1 = a$,
- element przeciwny: dla dowolnego a istnieje liczba przeciwna $-a$, taka że $a + (-a) = 0$,
- element odwrotny: dla dowolnego $a \neq 0$ istnieje jej odwrotność $\dfrac{1}{a}$, taka że $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$,
- rozdzielność mnożenia względem dodawania: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

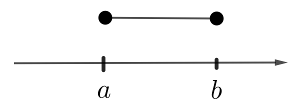
Definicja.

Przedziałem **otwartym** o końcach a, b ($a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych od a i jednocześnie mniejszych od b (zapis: (a, b)).



Definicja.

Przedziałem **domkniętym** o końcach a, b ($a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych bądź równych od a i jednocześnie mniejszych bądź równych od b (zapis: $[a, b]$ lub $\langle a, b\rangle$).



Definicja.
Przedziałem **lewostronnie otwartym nieograniczonym** nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych od a (zapis: $(a, +\infty)$).

Uwaga.
Symbol $+\infty$ oraz $-\infty$ nie oznacza żadnej liczby rzeczywistej.

Definicja.
Liczba całkowita a **jest podzielna** przez liczbę całkowitą $b \neq 0 \Leftrightarrow$ istnieje liczba całkowita k, taka że $a = kb$. Liczbę b nazywamy **dzielnikiem** liczby a (zapis: $b \mid a$).

Definicja.
Liczbą **pierwszą** nazywamy każdą liczbę naturalną n większą od 1, której jedynymi dzielnikami naturalnymi są 1 oraz n. Liczbą **złożoną** nazywamy każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest pierwsza.

Uwaga.
Liczby 0 oraz 1 nie są ani pierwsze, ani złożone.

Twierdzenie (O dzieleniu z resztą)**.**
Dla liczb całkowitych a i b ($b \neq 0$) istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych q i r, taka że $a = bq + r$ oraz $0 \leqslant r < |b|$,

Uwaga.
Reszta z dzielenia jest zawsze nieujemna.

Przykład.

- $13 : 5 = 2$ r. 3, bo $13 = 5 \cdot 2 + 3$ i $0 \leqslant 3 < 5$,
- $-13 : 5 = -3$ r. 2, bo $-13 = 5 \cdot (-3) + 2$ i $0 \leqslant 2 < 5$,
- $13 : (-5) = -2$ r. 3, bo $13 = (-5) \cdot (-2) + 3$ i $0 \leqslant 3 < |-5|$,
- $-13 : (-5) = 3$ r. 2, bo $-13 = (-5) \cdot 3 + 2$ i $0 \leqslant 2 < |-5|$.

Definicja.
Liczby $a, b \in \mathbb{Z}$ nazywamy **względnie pierwszymi**, gdy $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$.

Twierdzenie (Cechy podzielności)**.**
Liczba całkowita jest podzielna

- **przez 2** wtedy i tylko wtedy, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 2 lub 4 lub 6 lub 8.
- **przez 3** wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr[1] jest podzielna przez 3.
- **przez 4** wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona z ostatnich dwóch cyfr jest podzielna przez 4.
- **przez 5** wtedy i tylko wtedy, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.
- **przez 6** wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 i przez 3.
- **przez 7** wtedy i tylko wtedy, suma cyfr mnożonych (od prawej) przez kolejne potęgi trójki (licząc z potęgą zerową)[2] jest podzielna przez 7.
- **przez 8** wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona z ostatnich trzech cyfr jest podzielna przez 8.
- **przez 9** wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.
- **przez 10** wtedy i tylko wtedy, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0.
- **przez 11** wtedy i tylko wtedy, gdy różnica pomiędzy sumą cyfr stojących na miejscach nieparzystych, a sumą cyfr stojących na miejscach parzystych jest podzielna przez 11.

[1]Puryści językowi uważają za niepoprawne sformułowanie „suma cyfr”, gdyż cyfry to znaki graficzne, a dodawać można tylko liczby. Można je jednak uznać za swoisty matematyczny idiom (czyli zwrot o znaczeniu innym niż dosłowne), gdyż jest krótki, prosty i powszechnie zrozumiały.

[2]Zauważmy, że jest to to samo co powiedzenie, że w rozwinięciu dziesiętnym danej liczby zamienimy potęgi dziesiątki na potęgi trójki.