

# delta

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

Zdobywca Nagrody Głównej  
w konkursie  
Popularyzator Nauki 2024

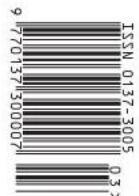
$h=6,63 \cdot 10^{-34}$ ,  $I_s = \pi = 3,141592\dots$

NR 3 (610) 2025

CENA 9 ZŁ VAT 8%  
PL ISSN 0137-3005 / NR IND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

Tenis  
i PageRank  
str. 1





10-66-10-9-16-7-3-14-15-2

## SPIS TREŚCI NUMERU 3 (610) 2025

PageRank w tenisie?

Oskar Skibski, Tomasz Wąs str. 1

Lekarstwo na prokrastynację: kontrakty na zobowiązania

R. Waszkiewicz, H. Bogusz str. 4

e Polys znaczy „wiele”

Marta Fikus-Kryńska str. 6

Polując na neutrina, czyli z pamiętnika fizyka. Dzień pierwszy

Joanna Zalipska str. 7

Aktualności

Upadłe koty str. 9

Zbiór Cantora przed Cantorem

Jarosław Górnicki str. 10

Zadania

Konstrukcje w zadaniach z teorii liczb

Navid Safaei str. 14

Kąt Otwarty: Gratka dla 45-latka

Bartłomiej Pawlik str. 17

Wycinanki i układanki

Mirosz Jan Kwiatkowski str. 18

Klub 44

Prosto z nieba: Terraformacja Marsa... brokatem str. 22

Niebo w marcu str. 23

John von Neumann, mucha i szereg geometryczny

Bartłomiej Bzdęga str. 25

W następnym  
numerze:

Czy policjantom  
uda się złapać  
złodzieja?



Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej; dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, prof. UW; dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący; dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW; prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UWr; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UWr; prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański; prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący; dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński; dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak; dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN; prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

**Redaguje collegium w składzie:** Michał Bejger, Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nacz., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Jan Horubała, Wiktor Matyszkiewicz, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nacz., Anna Rudnik, Marzanna Wawro – sek. red.

**Adres do korespondencji:**

Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem LATEX wykonała Redakcja.

Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.

[www.ado.com.pl](http://www.ado.com.pl)

**Prenumerata:**

Garmond Press: [www.garmondpres.pl](http://www.garmondpres.pl) (tylko instytucje)

Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)

Na stronie Empiku *Delta* można zamówić co miesiąc:

[www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p](http://www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;  
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym  
artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](http://facebook.com/Delta.czasopismo)

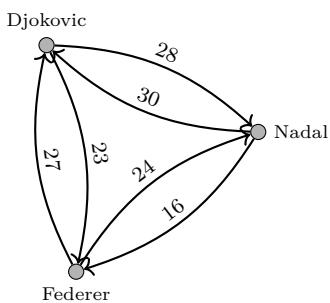
**Wydawca:** Uniwersytet Warszawski

# PageRank w tenisie?

Oskar SKIBSKI\*, Tomasz WĄS\*\*

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski  
\*\* Uniwersytet Oksfordzki

F. Radicchi. *Who is the best player ever? A complex network analysis of the history of professional tennis.* PLoS ONE (2011).



Sieć meczów tenisowych pomiędzy Wielką Trójką. Waga krawędzi oznacza jej krotkość, czyli liczbę meczów wygranych przez gracza, do którego krawędź prowadzi.

Netscape był wówczas najpopularniejszą przeglądarką internetową.

Twórcy PageRanka w raporcie technicznym pod śmiałym tytułem *The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web*, w którym prezentują swoją metodę, z dumą piszą, że na wywołane hasło „university” na pierwszym miejscu pojawia się Uniwersytet Stanforda, a nie jakiegos tam Oregonu.

John R. Seeley. *The net of reciprocal influence. A problem in treating sociometric data.* Canadian Journal of Experimental Psychology (1949).

Impact Factor, stosowany do oceny czasopism, to właśnie średnia liczba cytowań wszystkich prac z danego roku.

Definicja dla grafów nieskierowanych jest taka, jakby każdą krawędź nieskierowaną zastąpić dwiema krawędziami skierowanymi w obie strony.

W 2011 roku w czasopiśmie PLoS ONE ukazał się artykuł, w którego tytule autor zadał pytanie: *Kto jest najlepszym tenisistą w historii?* Aby na to pytanie odpowiedzieć, stworzył i przeanalizował sieć meczów tenisowych, w której wierzchołkami są tenisiści, a krawędzie reprezentują ich mecze. Następnie autor użył algorytmu PageRank (który za moment objaśniemy) do oceny ważności poszczególnych wierzchołków, i okazało się, że najlepszym tenisistą w historii jest... (werble) Jimmy Connors! Czy ten wynik jest dobry? To trudno powiedzieć. My zastanowimy się jednak nad innym pytaniem – dlaczego, do licha, użył PageRanka? Musimy się w tym celu cofnąć do lat dziewięćdziesiątych.

## Jak PageRank działa?

Kiedyś Internet nie wyglądał tak jak teraz. Najpierw nie wyglądał w ogóle, bo go nie było, a nawet jak już był, to na początku był dość brzydkie. Zanim powstała wyszukiwarka Google, ludzie wcale nie używali Binga i DuckDuckGo, bo ich też jeszcze nie było. Były duże katalogi stron, posegregowane na różne sposoby, a wyszukiwarki, które istniały, nie potrafiły znaleźć nic sensownego. Było naprawdę nieciekawie.

Na szczęście wszystko zmieniło się na przełomie XX i XXI wieku za sprawą dwóch pomysłowych i pracowitych doktorantów z Uniwersytetu Stanforda: Larry’ego Page’a i Sergeya Brina. W ramach projektu na studiach opracowali oni metodę oceny ważności stron w Internecie, nazwaną PageRankiem. Sama ocena nie była może tak istotna – wyszło im, że najważniejsza w Internecie jest strona „Download Netscape Software”. Przełomowy był jednak pomysł, aby zbudować wyszukiwarkę, która będzie brała te oceny pod uwagę przy wyświetlaniu wyników. Page i Brin szybko stali się niesamowicie bogaci i obecnie znajdują się w dziesiątce najbogatszych ludzi świata. Uniwersytet Stanforda – na pocieszenie, że nie ukończyli oni swoich doktoratów i nie pracują już w nauce – został natomiast właścicielem patentu, na którym zarobił 336 milionów dolarów.

Sama metoda działania PageRanka nie była żadną rewolucją. W literaturze naukowej tematem oceny elementów w sieci powiązań zajmowało się od lat. Już w roku 1949 uproszczoną wersję PageRanka zaproponował John R. Seeley w czasopiśmie zajmującym się eksperymentalną psychologią, starając się zmierzyć, kto jest najpopularniejszym dzieckiem w grupie. Autorzy nie znali jednak tej pracy (najwyraźniej nie znaleźli jej w Google Scholar), dlatego PageRanka wymyślili na nowo. Opierali się natomiast na coraz bardziej popularnym wówczas pomyśle, aby istotność strony powiązać z liczbą prowadzących do niej linków.

Idea ta dość dobrze działała przy ocenie prestiżu czasopism naukowych na podstawie liczby cytowań ich artykułów. Jednak w Internecie ocena strony poprzez samą liczbę prowadzących do niej linków nie jest dobrym pomysłem. Po pierwsze, w trywialny sposób możemy stworzyć milion stron, które będą do nas linkowały. Po drugie, link linkowi nierówny – jeżeli kieruje do nas bardzo popularna strona, to taki link jest dużo cenniejszy, niż gdy ktoś wspomni o nas na swoim blogu, który czyta tylko jego mama. Dlatego też w uproszczonej wersji PageRanka link ze strony *A* do strony *B* zwiększa ocenę *B* nie o 1, ale o ocenę *A* podzieloną przez liczbę linków na stronie *A*. Oznacza to, że każda strona „rozdziela” swoją istotność po równo pomiędzy strony, do których prowadzi (a bardziej precyzyjnie, pomiędzy linki, które przekazują je stronom). W szczególności zwielokrotnienie linków na jednej stronie (zachowując proporcje między nimi) nie zmieni żadnej stronie oceny.

Na Internet możemy patrzeć po prostu jak na graf skierowany, czyli pewien zbiór wierzchołków *V* reprezentujących strony internetowe i zbiór krawędzi *E*, czyli par wierzchołków reprezentujących linki. Wówczas uproszczony PageRank (oznaczany  $UPR(v)$  dla *v*) jest rozwiązaniem następującego układu równań:

$$UPR(v) = \sum_{(u,v) \in E} \frac{UPR(u)}{\deg^+(u)} \quad \text{dla każdego } v \in V,$$

W oryginalnej pracy wartości bazowe  $b$  mogły być różne dla różnych wierzchołków i odpowiadały „źródłu istotności”. Autorzy rozważyli na przykład ustalenie niezerowych wartości tylko niektórym stronom.

Dowód unikalności rozwiązania (\*):  
W postaci macierzowej układ równań

zapisać możemy jako  
 $PR = \alpha \cdot \hat{A}^T \cdot PR + b \cdot \mathbb{1}^T$ , gdzie  $\mathbb{1}$  jest wektorem jedynek, a  $\hat{A}$  jest znormalizowaną wierszową macierzą sąsiedztwa, czyli  $\hat{A}[u, v]$  to liczba krawędzi z  $u$  do  $v$  podzielona przez  $\deg^+(u)$  lub 0, jeżeli krawędzi z  $u$  do  $v$  nie ma.  
Dostajemy  $(\mathbb{I} - \alpha \cdot \hat{A}^T)PR = b \cdot \mathbb{1}^T$ , gdzie  $\mathbb{I}$  jest macierzą identycznościową. Macierz  $(\mathbb{I} - \alpha \cdot \hat{A}^T)$  jest odwrotnalna, bo jest przekątniowo dominująca, co daje nam:  
 $PR = b \cdot (\mathbb{I} - \alpha \cdot \hat{A}^T)^{-1} \cdot \mathbb{1}^T$ .

Częste losowe restarty w komputerze mocno utrudniają pracę, a w PageRanku analizę. Okazuje się, że możemy jednak tego łatwo uniknąć, wystarczy po prostu pozwolić internaucie pójść spać.

Rozpatrzmy następującego *zasypiającego surfera*.

#### Zasypiający surfer:

Surfer losuje stronę startową, każdą z równym prawdopodobieństwem. Następnie z prawdopodobieństwem  $\alpha$  kliką losowy link na stronie, na której jest, a z prawdopodobieństwem  $1 - \alpha$  zamyka komputer i idzie spać.  
PageRank dla  $b = 1/n$  jest oczekiwana liczbą wizyt na stronie w tym procesie.

Dowód pozostawiamy Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie. Ta obserwacja, jak i wiele innych w tym artykule, pochodzi z pracy:

T. Wąs, O. Skibski. *Axiomatic characterization of PageRank*. Artificial Intelligence (2023).

gdzie  $\deg^+(u)$  to liczba linków na stronie  $u$ , czyli inaczej krawędzi wychodzących z  $u$ . Jest to równanie rekurencyjne, więc nie jest oczywiste, ile ma rozwiązań. Jeżeli w grafie można dojść po krawędziach z każdego wierzchołka do każdego innego, czyli jest silnie spójny, to to równanie ma dokładnie jedno dodatnie rozwiązanie (z dokładnością do przemnożenia przez stałą). Jeżeli tak nie jest, sprawia się komplikacje. Dziwnie wydaje się także to, że strony bez żadnych kierujących do nich linków mają zerową istotność, więc linki z nich również się nie liczą. Dlatego też właściwy PageRank wprowadza jedną drobną modyfikację – dodaje każdej stronie pewną małą bazową istotność  $b$ , ale w zamian lekko zmniejsza sumaryczny zysk z linków prowadzących do tej strony. Zysk mnożony jest przez współczynnik tłumienia  $\alpha \in (0, 1)$ , zwykle odrobinę mniejszy niż 1 (np. 0,85 lub 0,9). Prowadzi to do następującego układu równań:

$$(*) \quad PR(v) = \alpha \sum_{(u,v) \in E} \frac{PR(u)}{\deg^+(u)} + b \quad \text{dla każdego } v \in V.$$

Tak uzyskany układ równań, dla ustalonego  $\alpha$  i  $b$ , ma już zawsze jedno unikalne rozwiązanie. Dowód tego faktu, dla trochę bardziej zaawansowanych Czytelników, znajduje się na marginesie.

W literaturze pojawiają się różne definicje PageRanka, ale właśnie powyższym równaniem jest on zdefiniowany w oryginalnej pracy. Jedyną małą różnicą jest to, że autorzy mnożycy także wartość bazową ( $b$ ) przez  $\alpha$ . Łatwo zauważycy, że mnożenie przez  $\alpha$ , jak i w ogóle wartość  $b$ , nie ma zbytniego znaczenia, a tylko przeskaliwuje wartości PageRanka: jeżeli przykładowo przemnożymy  $b$  przez 2, to wartości PageRanka też się podwoją. Wynika to z tego, że takie wartości spełniają w sposób oczywisty równanie rekurencyjne (\*), a skoro rozwiązanie równania jest jedno, to musi być właśnie to. Będziemy więc zasadniczo przyjmowali  $b = 1$ , ale inne wartości też nam się zaraz przydadzą.

Podstawowym sposobem definiowania PageRanka jest układ równań, jednak ma on też elegancką interpretację opartą na błędzeniu losowym. Więcej na ten temat można przeczytać w artykule *Google w łańcuchach* Łukasza Rajkowskiego,  $\Delta_{19}^{11}$ .

Przymijmy, że graf jest silnie spójny i niech  $b = (1 - \alpha)/n$ , gdzie  $n$  jest liczbą wierzchołków. Możemy sobie teraz wyobrazić osobę, która „surfuje” po Internecie (tak się mówiło, kiedy powstawał PageRank...): zaczyna od losowej strony i potem klika losowe linki. Jednak na każdej stronie z małym prawdopodobieństwem,  $1 - \alpha$ , zamiast kliknąć link, zaczyna surfować od początku. Wówczas wartość PageRanka danej strony jest równa prawdopodobieństwu, że znajdziemy na niej internautę w bardzo odległej przyszłości (prawdopodobieństwu granicznemu).

A co, jeśli graf nie jest silnie spójny i mamy strony, które nie mają żadnych linków? Tu jest pewien problem – gdzie ma wtedy pójść surfer? Są różne koncepcje. Czasem mówi się na przykład, że z automatu zaczyna surfowanie od początku, od losowej strony, ale musimy uważać – taka definicja nie da wcale naszego równania rekurencyjnego! Możemy natomiast powiedzieć, że z wierzchołków bez krawędzi surfer przechodzi do... swoistego „czyścia”, czyli wierzchołka, który ma tylko pętlę do siebie. Surfer kręci się wówczas w nim, aż wylosuje rozpoczęcie od początku. PageRank będzie odpowiadał prawdopodobieństwom granicznym tego procesu, chociaż nie będzie sumował się do jedynki, bo dodatkowy wierzchołek trochę jej „zje”.

O ile dla osób znających PageRanka głównie z procesu losowego sumowanie do 1 może się wydawać ważne, o tyle przy analizie realnych sieci z milionami wierzchołków cecha ta jest nieistotna, a nawet niepożądana.

#### Jak PageRank nie działa

Za sprawą przeolbrzymiego sukcesu wyszukiwarki Google, PageRank stał się niezwykle popularny. Jest bardzo wiele powodów, dla których osoby, analizując skomplikowane sieci połączeń, spośród setek istniejących metod oceny sięgają po niego w pierwszej kolejności. Po pierwsze, można go szybko obliczyć. Po drugie,

Skupimy się na (nieuproszczonym) PageRanku, a dla uproszczonego radźmy sprawdzić, jak działa dla grafów nieskierowanych... Czy przypadkiem nie przypomina trochę stopnia wierzchołka?

$v$	1, 7	2, 6	3, 5	4
$\text{PR}(v)$	3,36	5,90	5,53	5,42

PageRank dla linii 7 wierzchołków (rysunek obok), przyjmując  $\alpha = 0,8$  i  $b = 1$ . W liczeniu PageRanka można się pobawić na stronie: <https://centrality.mimuw.edu.pl/editor/>.

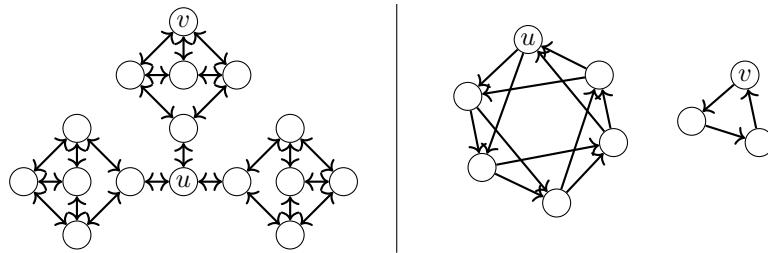
dobrze działa dla sieci WWW. Po trzecie, intuicyjnie ma sens. Po czwarte, jest popularny. Po piąte, jest dość skomplikowany, więc na pewno robi coś mądrego. Niestety, żaden z tych powodów nie świadczy o tym, że PageRank jest odpowiednim wyborem dla konkretnej sieci, nieraz kompletnie innej niż Internet.

Popatrzmy na parę przykładów. Zaczniemy od czegoś prostego – jak myślisz, Czytelniku, który wierzchołek jest najważniejszy w poniższym grafie?



Według PageRanka wierzchołki 2 i 6! Raczej przeczy to intuicji... To dlaczego PageRank tak zadziałał? Widać to z interpretacji z błędzeniem losowym – wierzchołki te mają sąsiada, który zawsze odeśle surfera z powrotem do nich.

A w poniższych grafach ważniejszy jest wierzchołek  $u$  czy  $v$ ?



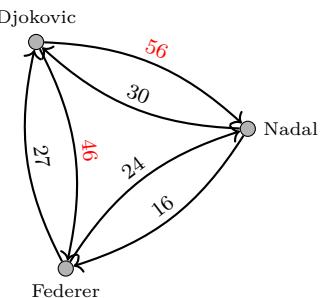
Wydaje się, że to wierzchołek  $u$  jest ważniejszy zarówno po lewej, jak i po prawej stronie. Po lewej stronie jest w „centrum” grafu, rozdziela graf na trzy części. Tak mówią też inne miary centralności: ma najmniejszą średnią odległość do innych wierzchołków, przechodzi przez niego dużo najkrótszych ścieżek. Po prawej stronie wierzchołek  $u$  jest w większym komponencie, ma krawędzie i ścieżki od większej liczby wierzchołków. Wbrew intuicji PageRank w obu przypadkach ocenia je jednak tak samo – w każdej  $n$ -wierzchołkowej silnie spójnej składowej suma PageRanków jest równa  $b \cdot n/(1 - \alpha)$ , a jeżeli wierzchołki są w niej symetryczne lub choćby mają takie same stopnie (wchodzący i wychodzące), to PageRank każdy ocenia na  $b/(1 - \alpha)$ .

Powyższe przykłady mogły się wydawać nieco sztuczne, wróćmy zatem do prawdziwej pracy naukowej i prawdziwej sieci meczów tenisowych. Wierzchołkami w tej sieci są tenisiści, a skierowanymi krawędziami – ich mecze: krawędź z A do B oznacza jeden mecz rozegrany pomiędzy A i B, wygrany przez B. Czy PageRank dla tej sieci daje sensowne wyniki? Wydaje się, że niestety nie.

Aby to zobaczyć, ograniczmy się na chwilę do meczów rozgrywanych przez Wielką Trójkę: Federera, Nadala i Djokovica (patrz margines na pierwszej stronie artykułu). Nie ulega wątpliwości, że Djokovic wypada tu najlepiej – ma dodatni bilans meczów zarówno z Federerem (30:28), jak i Nadalem (27:23). PageRank też wskazuje Djokovica jako najlepszego tenisistę – zgadza się! Zmodyfikujmy teraz trochę sztucznie graf, zastępując każdy przegrany mecz Djokovica dwoma meczami. Teraz ma już gorszy bilans od Federera i Nadala. A co na to PageRank? Nic! Jak już powiedzieliśmy wcześniej, powielenie każdego z wychodzących linków tą samą liczbę razy nie zmieni PageRanka żadnego wierzchołka. Nie tego jednak byśmy się spodziewali od sensownej miary.

A jakiej miary powinniśmy użyć? Wydaje się jednak bardziej właściwe, aby – jak w sieci cytowań – brać pod uwagę liczbę, a nie samą proporcję wychodzących krawędzi. Taką miarą jest na przykład centralność Katza, która zdefiniowana jest zasadniczo takim samym równaniem rekurencyjnym jak PageRank, ale bez dzielenia przez  $\deg^+(v)$ . Więcej o tej, jak i o innych podobnych miarach, można przeczytać w artykule *Jak Leo uratował klasowe wybory*,  $\Delta_{21}^9$ .

Wracając zatem do początkowego pytania: czy powinniśmy stosować PageRanka w sieci meczów tenisowych? W sieci WWW działa on dobrze i stosowany był w przeróżnych sieciach. Lecz jak nauczyła nas formuła PageRanka, sama liczba poleceń to nie wszystko, ważne jest, skąd te polecenia pochodzą... My do tenisa go nie polecamy.



Powyższy graf powstał z podwojenia meczów przegranych przez Djokovica. PageRank jednak nadal daje największą wartość Djokovicowi, gdyż zarówno Nadal, jak i Federer przegrali z nim więcej razy niż ze sobą nawzajem. Czy jednak takiego wyniku byśmy oczekiwali w tej sytuacji?

# Lekarstwo na prokrastynację: kontrakty na zobowiązania

Radost WASZKIEWICZ<sup>†,‡</sup>, Honorata BOGUSZ<sup>§</sup>

## Zdobycze technologiczne

W 2018 roku Google dodał do systemu Android funkcję Digital Wellbeing (cyfrowy dobrostan), która pozwala ustawiać limity czasu korzystania z danej aplikacji na dany dzień. Możemy na przykład ustawić 15-minutowy limit na korzystanie z Instagrama; po upływie tego czasu ikona aplikacji zmienia kolor na szary, a sama aplikacja przestaje się uruchamiać. Podobne rozwiązanie wprowadziła również firma Apple w systemie iOS. Dlaczego ktoś miałby skorzystać z takiej funkcjonalności? Czym aktywowanie tego trybu różni się od po prostu wyłączenia aplikacji po upływie wyznaczonego czasu? Cynik mógłby powiedzieć, że nie ma w tym nic racjonalnego, a odpowiedzi na to pytanie powinien szukać psycholog, a nie ekonomista czy matematyk. Jednak przy pewnych założeniach takie zachowanie może być całkowicie racjonalne...

## Mierzenie cierpliwości

Zacznijmy od pytania, dlaczego w neoklasycznej ekonomii nie ma powodu, aby utrudniać sobie życie w przyszłości. Rozważmy hipotetyczną sytuację, w której mamy do wyboru dwie, ogólnie rzecz biorąc, satysfakcjonujące możliwości. Pierwsza z nich daje szybki rezultat, na przykład rozwiązanie jednego zadania z naszego ulubionego zbioru zadań. (Żeby nie komplikować zbytnio rachunków, założymy, że danego dnia możemy rozwiązać tylko jedno zadanie). Druga z nich wymaga pracy przez dłuższy czas, powiedzmy  $n$  dni, ale daje nam dużą satysfakcję z ukończenia,  $b$  razy większą niż rozwiązanie jednego zadania. Dla przykładu niech będzie to spisanie na czysto pracy na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki (zgłoszenia do 30 kwietnia 2025!). Założymy, że sam proces spisywania pracy nie daje nam żadnej satysfakcji i że spisywanie pracy i rozwiązywanie zadania to alternatywa wykluczająca. Najbardziej naiwny model opisujący decyzję, czy spisywać, czy nie, porównuje naszą satysfakcję  $U$  z rozwiązania  $n$  zadań,  $U = n$ , z satysfakcją z wysłania pracy na konkurs,  $U = b$ , czyli usiądziemy do spisywania pracy, jeśli  $b > n$ . Problem polega na tym, że *lepszy wróbel w garści niż gołąb na dachu*, czyli, innymi słowy, zadanie dzisiaj jest warte więcej niż zadanie jutro. Klasyczny model ekonomiczny proponuje wprowadzenie stałej  $0 < q < 1$ , która mierzy naszą niecierpliwość [3]. W tym modelu satysfakcję z przyszłych osiągnięć należy przemnożyć przez  $q$  podniesione do potęgi liczby dni oczekiwania. W takim razie satysfakcja z rozwiązania po jednym zadaniu przez  $n$  dni wynosi  $U = \sum_{i=0}^{n-1} q^i$ , a satysfakcja z wysłania pracy na konkurs wynosi  $U = q^{n-1}b$ . Zatem zabierzemy się do spisywania, jeśli  $q^{n-1}b > \sum_{i=0}^{n-1} q^i$ . Sumując szereg geometryczny i upraszczając, otrzymujemy warunek:

$$(1) \quad (1 - q)b + q > \frac{1}{q^{n-1}}.$$

Prawa strona nierówności jest rosnącą funkcją  $n$ , więc jeśli kiedykolwiek podejmiemy decyzję, aby zacząć

spisywać, to każdego kolejnego dnia będziemy coraz bardziej zmotywowani (będziemy potrzebowali mniej czasu na dokończenie spisywania pracy, co odpowiada zmniejszaniu  $n$ ) i bez trudu zrealizujemy nasz plan.

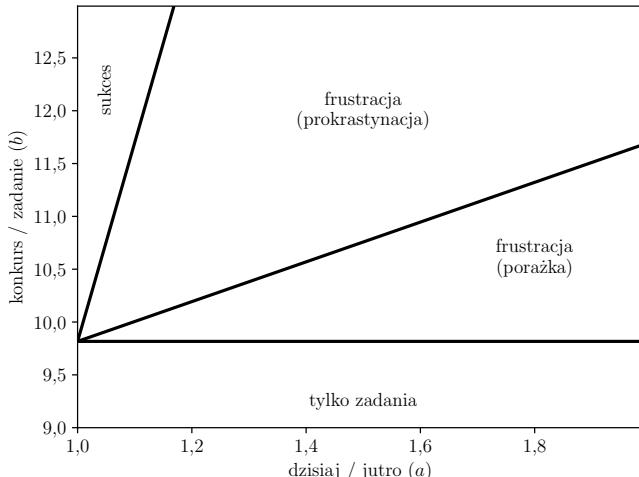
## Dyskontowanie niespójne czasowo

Co by się stało, gdyby nasza funkcja użyteczności wyglądała inaczej? Do przysłownia o wróblu pasują przecież wszystkie malejące funkcje, nie tylko funkcja wykładnicza. Dodajmy kolejny parametr, nazwijmy go  $a$ , który dodatkowo przeskalauję, jak bardzo zależy nam na „dzisiaj” w porównaniu do „jutra”, a resztę pozostawmy bez zmian. W takiej sytuacji satysfakcja  $U$  z rozwiązywania zadań przez  $n$  dni z rzędu wyniesie  $U = a + \sum_{i=1}^{n-1} q^i$ , a satysfakcja z wysłania pracy na konkurs wciąż wynosi  $U = q^{n-1}b$ . Równie łatwo możemy obliczyć satysfakcję, którą osiągniemy w ciągu kolejnych  $n+1$  dni zamiast  $n$  dni. Będzie to odpowiednio  $U = a + \sum_{i=1}^n q^i$  oraz  $U = q^{n-1}b + q^n$ , gdzie człon  $q^n$  odpowiada jednemu dniu rozwiązywania zadań po wysłaniu pracy na konkurs. Jeśli  $a > 1$ , to okazuje się, że należy rozważyć jeszcze trzecią opcję, która może maksymalizować  $U$ : zacząć spisywać dopiero od jutra, co daje wynik  $U = a + q^n b$ .

Gdy  $bq^{n-1}(1 - q) > a - q^n$ , strategią maksymalizującą satysfakcję będzie zabranie się do pracy dzisiaj. Natomiast gdy  $bq^{n-1}(1 - q) < 1 - q^n$ , optymalną strategią będzie rozwiązywanie zadań i porzucenie konkursu. Jednak jeśli wartość  $b$  znajdzie się pomiędzy tymi dwiema granicami, pojawią się nowe optimum – zajmijmy się konkurem, ale dopiero od jutra. Istnieje jednak pewna pułapka. Świadomi naszej funkcji użyteczności zaczynamy się zastanawiać, jaką decyzję podejmiemy jutro – czy rzeczywiście będziemy trzymać się planu, czy ulegniemy pokusie szybkiej satysfakcji z rozwiązania pojedynczego zadania? Niestety możemy dojść do smutnej konkluzji: przy odpowiednio dużym  $n$  odroczymy przygotowanie pracy na konkurs o kolejny dzień (a potem znowu o kolejny i kolejny, aż  $n$  stanie się odpowiednio małe).

Znaleźliśmy się we frustrującej sytuacji, w której „ja dzisiaj” nie mogę dojść do porozumienia z „ja jutro”. Różne scenariusze dla przykładowych wartości  $n$  i  $q$  można porównać na rysunku 1. Z tego potrzaśku może nas uratować zewnętrzny deadline – będziemy odkładać pracę na kolejny dzień aż do ostatniej chwili, gdy utrata szansy na dużą nagrodę stanie się zbyt kosztowna (obszar oznaczony jako prokrastynacja). Niestety czasami nawet to nie wystarczy (obszar oznaczony jako porażka). Zapału może zabraknąć nawet w ostatnim dniu, gdy

$$bq^{n-1}(1-q) < q - aq + a - q^n.$$



Rys. 1. Mapa optymalnych strategii dla  $n = 7$  i  $q = 0,9$

### Na pomoc z szuflą

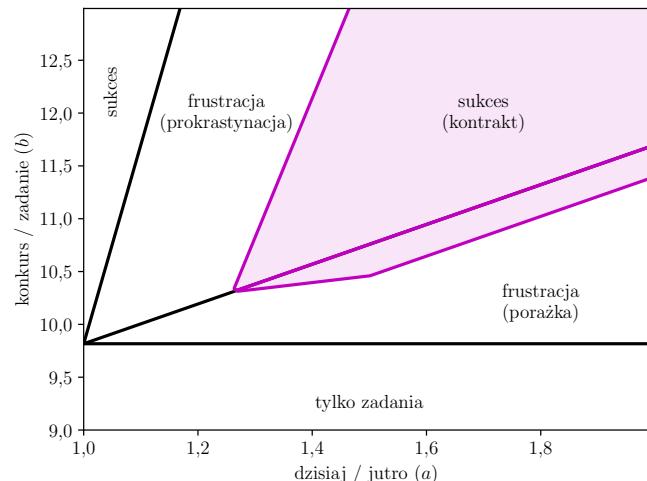
Zawiedzeni swoim słomianym zapałem idziemy po radę do starszego brata. Ten mówi, że może porozmawiać później, bo najpierw musi odśnieżyć przed domem. Wtedy doznajemy olśnienia – aby rozwiązać nasz problem, wystarczy wyręczyć brata dzisiaj.

Proponujemy mu następujący układ: my dzisiaj odśnieżymy, a ta niespecjalnie satysfakcjonująca czynność jest dla nas warta  $-c$ . W zamian brat odśnieży za nas za  $n$  dni, ale tylko jeśli złożymy pracę na konkurs. Brat oczywiście się zgadza, ponieważ nawet jeśli wierzy, że pracę złożymy, to jednak niepracowanie dzisiaj jest warte więcej niż niepracowanie za  $n$  dni.

Tym samym znaleźliśmy się w sytuacji, w której nasza satysfakcja wyniesie  $U = a(1 - c) + q^n(b + c)$ , jeśli od jutra zaczniemy pracować nad spisaniem pracy na konkurs. Z punktu widzenia „ja jutro” jedyną zmianą jest to, że wielkość nagrody wzrosła o  $c$ , co zwiększa nasze szanse na podjęcie się pracy jutro. Ta zmiana o  $c$  pozwala nam uniknąć porażki, jeśli jesteśmy odpowiednio blisko granicy porażka/prokrastynacja. Mały kolorowy czworobok na rysunku 2, odpowiadający tej sytuacji, nie sięga do granicy porażka/tylko zadania, ponieważ tam zysk z wejścia w kontrakt jest zbyt mały w porównaniu do straty satysfakcji dzisiaj. Innymi słowy,  $c$  jest za duże (mimo że już zawiązany kontrakt byłby skuteczny).

Jeszcze ciekawszy jest obszar nad granicą porażka/prokrastynacja – w przypadku celów, które nie mają zewnętrznie określonego terminu, możemy taki termin sami wyznaczyć i „kupić” go u brata za  $c(a - q^n)$  satysfakcji, wciąż dobrze wychodząc na takiej transakcji. Zwyczajnie,  $c(a - q^n)$  może być małe w porównaniu do straconej satysfakcji wynikającej ze słomianego zapału.

Podsumowując, w pewnym zakresie parametrów możemy zmusić „ja jutro” do współpracy, o ile mamy dostęp do drugiej osoby, na której możemy polegać (nawet jeśli ta osoba nie zachowuje się altruistycznie).



Rys. 2. Mapa optymalnych strategii dla  $n = 7$ ,  $c = 0,3$  i  $q = 0,9$

### Zapotrzebowanie na zobowiązania

Świadomość możliwego konfliktu ze sobą z przyszłością pozwala wyjaśnić (albo przynajmniej opowiedzieć) w ramach racjonalistycznej historii wiele pozornie nieracjonalnych sytuacji. Dlaczego pracę dyplomową lepiej pisze się w kawiarni odległej od domu? Dlaczego zostawienie laptopa w pracy pomaga w odpoczynku? [1]

Zapotrzebowanie na zobowiązania, lub raczej brak dostępu do narzędzi do jego zrealizowania, jest jednym z wyjaśnień pozornie nieracjonalnych zachowań o bardziej wałkach konsekwencjach niż kolejna godzina spędzona na scrollowaniu. Właśnie za pomocą dyskontowania niespójnego czasowo Esther Duflo (Nagroda Nobla w 2019 r.) wyjaśnia zaskakująco niskie inwestycje w nawozy w Kenii (które mają oszołamiające stopy zwrotu, rzędu 50% rocznie). Tę publikację (z niezwykle ciekawą strategią badawczą) bardzo polecamy [2], nie tylko jako alternatywę dla spędzania czasu z telefonem.

### Literatura

- [1] G. Bryan, D. Karlan i S. Nelson. „Commitment devices”. W: *Annual Review of Economics* 2.1 (2010), s. 671–698.
- [2] E. Duflo, M. Kremer i J. Robinson. „Nudging farmers to use fertilizer: Theory and experimental evidence from Kenya”. W: *American Economic Review* 101.6 (2011), s. 2350–2390.
- [3] P. Wolowik. „Maksymalizacja zysków zarządzanego kapitału w różnych typach gier ekonomiczno-hazardowych”. W: *Delta* 10 (2005).



## Polidaktylia znaczy „wiele”

Okładkę pisma „The Anatomical Record” z lipca 2021 roku ozdabia coś, co przypomina cztery niewielkie owłosione jasnym futrem dłonie z czarnymi zagiętymi pazurami. Tematem wyróżnionej w ten sposób pracy zamieszczonej w numerze jest dokładna analiza dwóch łap kangura szarego (po angielsku w tekście artykułu nazywane „hands” – ręce), obu opatrzonych siedmioma palcami.

Od razu wyjaśniam, bo nie jest to wiedza dla większości z nas oczywista, że normą u kangura jest, podobnie jak u człowieka, pięć palców. Niezwykłość opisywanego przypadku podkreśli fakt, że to drugi w historii zarejestrowany przypadek polidaktylii u torbaczy.

Polidaktylia, czyli nadmiarowa liczba palców u zwierząt, nie jest wcale bardzo rzadkim zjawiskiem. Najczęściej dodatkowe są palce skrajne – odpowiedniki naszego kciuka i małego palca. Dotychczasowa wiedza wskazuje, że polidaktylię powodują różne zmiany genetyczne, stąd opisuje się wiele jej wariantów. Często występuje ona jako jedna z wielu cech zespołów chorobowych o podłożu genetycznym.

Wyjątkowy okaz kangura szarego został upolowany przez legalnie działających myśliwych w Zachodniej Australii. W trakcie oprawiania zwierzyny przypadek uznano za interesujący dla naukowców, dlatego odcięte blisko nadgarstków łapy przesłano do laboratorium Medical, Molecular and Forensic Science Uniwersytetu w Murdoch w Australii. Wyobrażam sobie, że po otwarciu przesyłki naukowcy musieli zakrzyknąć: „A gdzie reszta?!!!”. Bo chociaż jeden z dodatkowych palców raczej nie był funkcjonalny, drugi za to był w pełni sprawny, miał oddzielne mięśnie i ścięgna. Niestety badacze nie mogli ustalić jednoznacznie, czy duplikacji uległy dwa różne palce leżące obok siebie, czy skrajny palec uległ dwukrotнемu powieleniu. Każda z tych wersji występuje niezwykle rzadko u innych zwierząt. Brak całego ciała kangura uniemożliwił dokładne przebadanie układu mięśni, ścięgien i nerwów – nie wiadomo, czy stopy zwierzęcia miały nadmierną liczbę palców oraz czy inne szczegóły anatomiczne wskazywałyby na zespół chorobowy, któremu towarzyszy polidaktylia. Tajemnica została pożarta przez nieświadomych myśliwych.

Więcej szczęścia miał Ernest Hemingway, który w 1930 roku dostał podarunek od zaprzyjaźnionego marynarza: białą kotkę z większą niż u zwykłych kotów liczbą palców. Fascynacja pisarza zjawiskowym zwierzęciem, któremu nadał imię Śnieżka, sprawiła, że do dziś koty z polidaktylią nazywane są kotami Hemingwaya. Muzeum – dom z ogrodem pisarza na Key West na Florydzie zamieszkuje około 60 półdziko żyjących kotów z polidaktylią, prawdopodobnie potomków Śnieżki.

Na statkach koty z polidaktylią miały przynosić szczęście. Ich niezwykłe łapy dawały im, według opowieści, dodatkową rzeczywość we wspinaniu się po linach i elementach konstrukcyjnych statków, gdzie wyłupywały uciążliwe gryzonie. Uważa się, że linia kotów sześciopalczastych wywodzi się z Bostonu, skąd stopniowo rozprzestrzeniły się po wschodnim wybrzeżu USA w miarę tego, jak statki handlowe z Bostonu zawijały do kolejnych portów ze swoimi zwierzętymi pasażerami.

Polidaktylia występuje u zwierząt dzikich, ale także tych hodowanych przez ludzi, np. owiec, krów, świń, koni, kur, kaczek, psów, kotów, świnek morskich, myszy i innych.

Niekiedy polidaktylia wpisana jest wręcz w cechę rasy, np. u niektórych kur oraz psów. Szpic Norsk Lundehund używany był do polowania na maskonury. Oprócz posiadania sześciu palców psy te potrafią rozkładać przednie łapy na boki i kłaść leb na plecach, wyginając szyję w tył o 180 stopni. To sprawia, że wspaniale wspinają się po skałach i przeciskają przez wąskie, nawet pionowe szczeliny skalne.

U ludzi polidaktylia obejmuje całe spektrum wariantów. Więcej niż pięć palców może występować u jednej lub dwóch dloni, jednej lub dwóch stóp, w niektórych przypadkach i u stóp i u dloni. Najczęściej dodatkowy palec pojawia się po zewnętrznej (od małego palca) lub wewnętrznej (od kciuka) stronie. Rzadziej zdarzają się dodatkowe palce wewnętrzne (między palcami 1 i 2, 2 i 3, 3 i 4, 4 i 5). Czasem palce są jedynie walcowatym fragmentem miękkich tkanek zakończonym paznokciem, bez kości. Innym wariantem jest palec z kością, ale bez stawów. Na drugim końcu tego spektrum znajdują się w pełni wykształcone palce, mające kości i stawy, ruchome i sprawne.

Dotąd zidentyfikowano 39 zmian genetycznych, które skutkują polidaktylią, z czego duża część jest jedną z klinicznych manifestacji zespołów chorobowych, np. trisomii chromosomu 13 czy też niedokrwistości Fanconiego.

Częstość występowania polidaktylii u ludzi jest wyższa niż można by sądzić, w zależności od wariantu występuje 0,37 do 1,2 przypadków na 1000 urodzonych dzieci, przy czym dwukrotnie częściej u mężczyzn niż u kobiet. Znaczne różnice obserwuje się także w grupach etnicznych. U Afrykanów będzie to 10 razy częściej niż u Europejczyków, przy czym jest to zwykle duplikacja małego palca u dloni. U rdzennych mieszkańców Ameryk oraz Azjatów dodatkowy palec częściej znajduje się od strony kciuka.

Różnorodność polidaktylii można tłumaczyć złożonością procesu kształtowania się kończyn w rozwoju zarodka. Zależy on od wielu genów, przy czym ważne jest nie tylko, czy są odczytywane, ale także to, na jakim poziomie się to odbywa. Dodatkowe palce mogą upośledzać ruch dloni czy stóp, mogą być źródłem bólu i problemów natury społecznej (niskiej samooceny, trudności w nawiązywaniu relacji), dlatego często są chirurgicznie usuwane w dzieciństwie. Z punktu widzenia teorii ewolucji polidaktylia może być jednak uznana nie tyle za chorobę, co różnorodność cech człowieka, i jest tak zwaną „innowacją”, bo oto pojawia się coś nowego, czego większość osobników w populacji nie posiada. W rzadkich przypadkach można uznać, że dodatkowe palce dają większe możliwości.

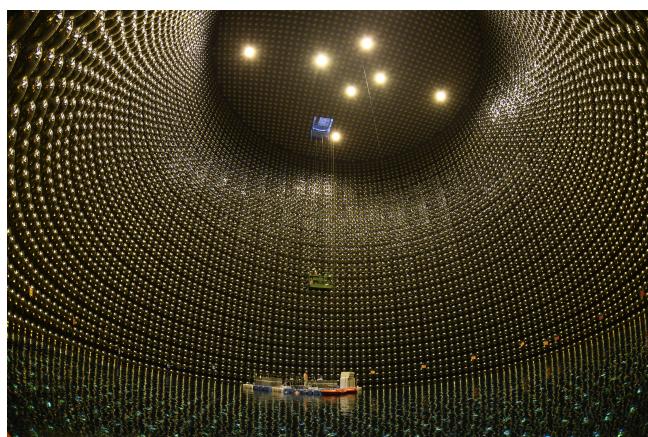
Dokładne badanie dwóch osób, matki i syna, obdarzonych 6 palcami opisane zostały w „Nature Communications”

w 2019 roku. Autorzy nawiązują do pomysłów bioinżynierów, aby tworzyć dodatkowe, sztuczne części ciała człowieka i integrować je z układem nerwowym. Praca opisuje osoby obdarzone wyjątkowym wariantem polidaktylii. W materiałach filmowych możemy oglądać testy, którym poddani zostali badani. Dodatkowy palec znajduje się u nich między kciukiem a palcem wskazującym. Ma trzy paliczki, staw zawiasowy łączący z kośćmi śródrcza (taki jak pozostałe palce 2–5), jednak oprócz zwykłych ma także dodatkowy mięsień, którego układ i miejsca przyczepu są takie jak w kciuku. Z drugiej strony, kciuk badanych osób ma (inny niż zwykle) staw kulisty panewkowy, który pozwala na większą jego ruchomość.

Dokładne testy wykazały, że dodatkowe palce mają swoje autonomicznie działające ścięgna, mięśnie i nerwy. Okazało się, że w korze mózgowej istnieje oddzielnny obszar będący reprezentacją dodatkowych palców. Sprawność i siła wszystkich palców była wysoka, a w specjalnie stworzonej grze komputerowej sześciopalcaści byli lepsi niż pięciopalcaści. Badani byli też w stanie zawiązać sznurówki u butów jedną ręką i lepiej radzili sobie z manipulacją niewielkimi przedmiotami.

## Polując na neutrina, czyli z pamiętnika fizyka Dzień pierwszy

Joanna ZALIPSKA\*



Rys. 1. Wnętrze detektora Super-Kamiokande częściowo wypełnione wodą. Na wewnętrznych ścianach detektora widać zamontowane fotopowielacze. Na wodzie znajduje się pływający pomost umożliwiający prace przy fotopowielaczach

Dzwoni budzik. Siódma rano. Budzi się piękny dzień w Alpach Japońskich i zaczynam kolejny dzień pracy jako fizyk neutrin. Punktualnie 7:45 łączymy się z poprzednią szachtą, odprawiamy się w Kenkyu-to (po japońsku to oznacza laboratorium) i jedziemy do kopalni. Przed wjazdem do kopalni sprawdzamy, czy system utrzymujący niski poziom radonu naturalnie występującego w kopalni funkcjonuje poprawnie, i pozostaje tylko wsiąść do samochodu i wjechać do tunelu. Wjeżdżamy do wnętrza góry Ikenoyama. Po około pięciu minutach jazdy lądujemy kilometr pod ziemią i wchodzimy do naszego laboratorium, gdzie znajduje się jedna z największych na świecie pułapek na neutrina.

Pozostając pod wrażeniem tych rewelacji, sięgam do krótkiego filmu BBC, który przedstawia rodzinę Da Silva z Brazylii. Z dwudziestu sześciorga jej członków czternaścioro ma po sześć palców u dłoni. Chłopiec w rękawicach jest bramkarzem i twierdzi, że lepiej chwytą piłkę. Mała dziewczynka gra na pianinie i ma większy zasięg palców na klawiaturze. Wujek z pięcioma palcami biegającymi po gryfie wygrywa gorące rytmu na gitarze. Jedna z dojrzałych kobiet u manicurzystki żartuje, że może nosić więcej pierścionków, i dodaje, że kiedy była w kolejnych ciążach w trakcie USG interesowała ją nie płeć dziecka, ale czy będzie miało 6 palców.

Czemu oglądasz coś takiego? Pyta jedenastoletni Nikodem, wpatrując się z osłupieniem w ekran mojego komputera, kiedy oglądam siedmiopalczaste łapki kangura uchwycone na zdjęciu rtg. Cóż, zastanawiam się. Ten kangur nie uciekł przed myśliwym, ale być może gdzieś jego potomstwo odziedziczyło dar, a nie przekleństwo, siedmiu palców?

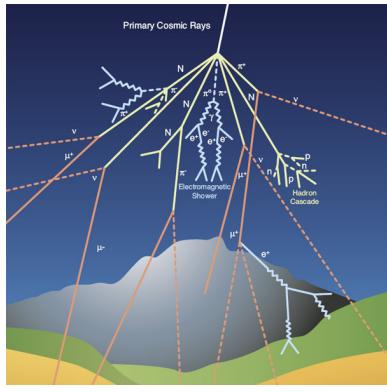
Marta FIKUS-KRYŃSKA

\*Narodowe Centrum Badań Jądrowych, Departament Badań Podstawowych, Zakład Fizyki Wielkich Energií

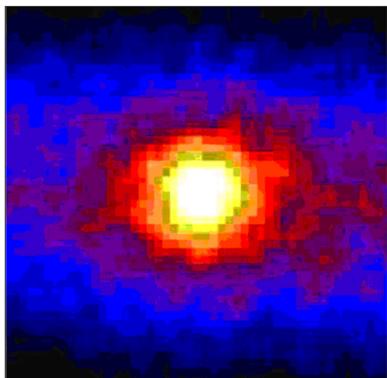
Gigantyczny zbiornik w kształcie walca o średnicy i wysokości 40 metrów mieści 50 kiloton ultra-czystej wody. W tej to wodzie iskrzą neutrina. Promieniowanie Czerenkowa emitowane przez powstałe w oddziaływaniu miony, elektrony i piony rejestrowane jest przez ponad 11 tysięcy detektorów światła – fotopowielaczy umieszczonych na ścianach walca. Ten walec to detektor zwany Super-Kamiokande (rys. 1). O tym, jak Super-Kamiokande rejestruje promieniowanie Czerenkowa, dowiesz się z rozdziału na końcu artykułu.

Jesteśmy w kopalni, żeby monitorować działanie naszego detektora. Robimy dzienny obchód i sprawdzamy, czy system wodny nie przecieka, czy klimatyzacja w pomieszczeniach z elektroniką dobrze działa i czy w elektronice zbierającej sygnały z fotopowielaczy nic się nie popsuło w ciągu nocy. Następnie pozostaje 8 godzin dyżuru i monitorowania pracy detektora zbierającego dane – czyli łapania neutrin.

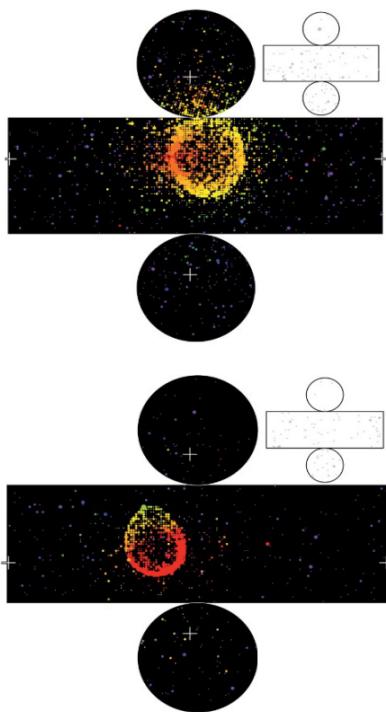
Co to są te neutrina i skąd się biorą? Neutrino jest cząstką elementarną. Mamy ich trzy: neutrino elektronowe, neutrino mionowe i neutrino taonowe ( $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ ). Neutrino elektronowe jest neutralnym, czyli o ładunku elektrycznym równym zero, towarzyszem elektronu w grupie cząstek zwanych leptonami. Do leptonów należy również cięższy brat elektronu – mion ze swoim neutralnym towarzyszem neutrinem mionowym, oraz lepton tau z neutrinem taonowym. Neutrina bardzo licznie występują w otaczającym nas świecie. Produkuje je na przykład Słońce, i każda inna gwiazda, w reakcjach termojądrowych. W wyniku tych reakcji powstają neutrina elektronowe. Są one dość nisko



Rys. 2. Kaskada cząstek powstała po zderzeniu protonu promieniowania kosmicznego z cząstkami w atmosferze Ziemi



Rys. 3. Zdjęcie Słońca wykonane za pomocą detektora neutrin Super-Kamiokande, który je zarejestrował



Rys. 4. Schemat neutrina emitującego promieniowanie Czerenkowa w detektorze Super-Kamiokande, przypadki dla elektronu (na górze) i mionu (na dole). Detektor ma kształt walca, rysunek przedstawia rzut na płaszczyznę

energetyczne, bo mają energię zaledwie od kilku eV do 18 MeV. Neutrina powstają również w procesach zachodzących w kaskadach utworzonych po zderzeniu pierwotnego promieniowania kosmicznego, głównie protonów, z atomami tlenu i azotu w atmosferze ziemskiej (rys. 2). W procesach tych powstają neutrina mionowe i elektronowe w stosunku około  $\nu_\mu : \nu_e = 2:1$ , a ich energia wynosi od MeV do TeV. Podsumowując, neutrina bardzo licznie wypełniają Wszechświat, a naszym zadaniem jest je badać w detektorze Super-Kamiokande.

Przypomnijmy, że siedzę na szynchcie w kopalni, na głębokości około jednego kilometra pod górą w Japonii, więc jak te neutrina dostają się tak głęboko? Dla nich to nie problem. Neutrina podlegają tylko oddziaływaniom słabym, dlatego materiał jest dla nich praktycznie przezroczysta. Większość neutrin docierających do nas ze Słońca bądź tych wyprodukowanych w atmosferze Ziemi przenika nie tylko przez kilometr góry nad detektorem, ale potrafi przeniknąć przez całą kulę ziemską.

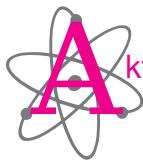
Skoro neutrina przenikają przez Ziemię, to oznacza, że przenikają również przez nas. Cały czas jesteśmy bombardowani zarówno przez neutrina pochodzące ze Słońca, jak i te powstałe w atmosferze ziemskiej (oraz pochodzące z innych źródeł). Szacunkowo w człowieku w ciągu jego życia będzie miało miejsce jedno oddziaływanie neutrina atmosferycznego. Aby je zatrzymać, na ich drodze trzeba postawić blok ołowiu o grubości 3 lat świetlnych, czyli 200 000 razy więcej niż odległość pomiędzy Ziemią i Słońcem. Neutrino nazywa się czasem cząstką duchem, mówi się też o nich, że są ulotne. Niemiecki fizyk Wolfgang Pauli zapostulował istnienie neutrina w 1930 roku. Przewidywał, że cząstka ta nie ma ładunku, ma zerową masę i w ogóle nie oddziałuje z materią. W liście do Towarzystwa Fizycznego napisał, że zrobił coś straszniego, przewidując istnienie cząstki, której nikt nigdy nie będzie w stanie zaobserwować. Na całe szczęście mylił się w tej kwestii. W roku 1956 amerykańscy fizycy Frederick Reines i Clyde Cowan zarejestrowali oddziaływanie neutrin, które powstały w reaktorze jądrowym.

Wróćmy do neutrin w naszej kopalni, gdzie Słońca przez 8 godzin dyżuru nie zobaczymy... czy na pewno? Nie mamy wątpliwości, że światło słoneczne do wnętrza góry nie dociera, ale neutrina przecież przenikają przez materiał. I jesteśmy je w stanie rejestrować w naszej wodnej pułapce. Zdjęcie Słońca wykonane z wnętrza kopalni poprzez rejestrację neutrin przedstawia nam rysunek 3. A jednak daje się zobaczyć Słońce pod ziemią!

### Jak detektor Super-Kamiokande rejestruje promieniowanie Czerenkowa?

Najprostszym procesem oddziaływania neutrina z wodą jest oddziaływanie dwucialowe quasielastyczne. Neutrino mionowe oddziałuje z neutronem ( $n$ ) w jądrze tlenu, w wyniku czego powstają proton ( $p$ ) oraz mion ( $\mu$ ):  $\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu$ . Jeśli mion porusza się z prędkością większą niż prędkość światła w danym ośrodku, u nas: w wodzie, to emituje on promieniowanie Czerenkowa. Minimalny pęd cząstki na emisję światła Czerenkowa zależy od masy cząstki – dla elektronu wynosi on 0,57 MeV/c, a dla mionu 118 MeV/c. Charakterystyczne dla światła Czerenkowa jest to, że promienie tworzą stożek wokół toru poruszającej się w wodzie cząstki. Kąt rozwarcia stożka Czerenkowa,  $\theta_c$ , można wyliczyć, znając współczynnik załamania światła wody,  $n = 1,34$ , oraz prędkość cząstki:  $v = \beta \cdot c$ , i będzie to  $\cos \theta_c = 1/n\beta$ . Dla cząstek relatywistycznych, gdy  $v$  jest bliskie prędkości światła ( $\beta$  jest bliskie 1), kąt rozwarcia stożka  $\theta_c$  wynosi  $42^\circ$ .

Światło od poruszającego się w wodzie mionu tworzy na ścianach detektora pierścienie. Tak samo zachowuje się elektron pochodzący z oddziaływania neutrina elektronowego. Tworzy pierścień, tyle że ma on inny brzeg, ponieważ elektron wywołuje w detektorze kaskadę. Widać to na rysunku 4. Algorytmy rekonstrukcyjne są w stanie rozróżnić pierścienie pochodzące od mionu i elektronu. Dzięki temu możemy stwierdzić, czy w detektorze oddziaływało neutrino mionowe, czy też elektronowe. Algorytmy rekonstrukcyjne potrafią również odróżnić kierunek, z jakiego zarejestrowano mion/elektron, a co za tym idzie – kierunek, z którego przyszło neutrino. Możemy w ten sposób stwierdzić, czy neutrino przyszło do nas z góry, czy z dołu detektora, albo z dowolnego innego kierunku.



### Upadłe koty

Jak powszechnie wiadomo, koty, niezależnie od wysokości, z jakiej spadają, podczas lotu potrafią obrócić się w powietrzu, dzięki czemu zawsze lądują na łapach.

Dlaczego tak jest? Tym pytaniem na poważnie fizycy zainteresowali się w pierwszej połowie XIX wieku. Jednym z wielkich uczonych badających ten z pozoru banalny problem był – znany ze sformułowania podstawowych równań elektrodynamiki – James Clark Maxwell. Maxwell zauważył, że dużo trudniej kotu obrócić się przy upadku z małej wysokości, a jego eksperymenty wykazały w istocie, że graniczna wysokość, poniżej której kot upada (na lózko!), nie zdążywszy się obrócić, wynosi około pięciu centymetrów.

W 1870 roku w liście do żony Maxwell dementował rozpowszechnione na Uniwersytecie w Cambridge stare plotki, że w celu zgromadzenia danych doświadczalnych rzucił kotami z wysokości pierwszego piętra.

Nie da się ukryć, że istniała studencka gra, polegająca na próbach wyrzucenia kota z okna tak, by nie wylądował na łapach. Studenci zastanawiali się, jak można wyjaśnić tę zdolność zwierzęcia i jak ją opisać równaniami. W tamtych czasach wierzono, że koty po prostu odpychają się od ręki upuszczającego je człowieka, dzięki czemu są w stanie się obrócić (fizyk powiedziałby: uzyskują na początku ruchu niezerowy moment pędu). Chociaż zagadnienie spadającego kota nie wydawało się wielkim wyzwaniem, Maxwell zainteresował się jednak nieco poważniej tym problemem i w 1857 roku zaprojektował demonstracyjny bączek posiadający dziewięć śrub na korpusie i ruchomą „główkę”.

Dopiero pod koniec XIX wieku Étienne-Jules Marey przygotował dla spadających kotów eksperiment z użyciem chronofotografu, dzięki czemu udowodnił, że koty zaczynają ruch bez obrotu, a wykonują go dopiero w połowie spadku („Nature”, 1894). Było to zadziwiające dla fizyków, bo sugerowało, że koty rozpoczętają obrót w czasie upadku. Nie zgadzałoby się to jednak z prawami dynamiki Newtona, które orzekają, że w układzie izolowanym, za jaki można uznać spadającego kota, musi być spełniona zasada zachowania momentu pędu, i kot nie może zacząć obracać się sam z siebie.

Przez wiele dekad uznawano również, że ogon (stanowiący typowo około 3% masy kota, ale mogący się szybko poruszać) jest bardzo pomocny lub wręcz niezbędny w całym procesie obrotu. Teoria ta została jednak obalona, gdy brytyjski fizjolog D. A. McDonald przeprowadził eksperymenty na bezogoniastych kotach rasy „rumpy” i udowodnił, że brak ogona nie uniemożliwia kotom samoistnego obracania się.

Problem spadającego kota wyjaśniono dopiero w 1969 roku (wcześniej, w 1935 roku, Rademaker i Ter Braak

zaproponowali uproszczone rozwiązanie). Odpowiadali za to pracujący dla NASA T. R. Kane oraz M. P. Scher. Problemem zajęli się w ramach szerszych badań, których celem miało być przygotowanie astronautów do poruszania się w stanie nieważkości. Zaproponowali oni model kota jako pary walców tworzących przednią i tylną część kota, połączonych elastycznym kręgosłupem. Przyjrzyjmy się zatem temu modelowi.

Kręgosłup kota jest wygięty, jednak pomiędzy różnymi jego częściami nie dochodzi do wzajemnego skręcania. Kręgosłup przechodzi przez kolejne etapy ruchu: od wygięcia do przodu do zgięcia bocznego, następnie do wygięcia w tył, ponownego zgięcia bocznego i ostatecznie powrotu do początkowego wygięcia. Stopień wygięcia tylnej części kręgosłupa jest znacznie mniejszy niż wygięcie przedniej części. Kluczowe etapy ruchu to: 1) Zgięcie w połowie ciała – dzięki temu przednia połowa ciała obraca się wokół innej osi niż tylna; 2) Cofnięcie przednich łap – zmniejsza moment bezwładności przedniej części ciała, a jednocześnie wyprostowanie tylnych łap zwiększa moment bezwładności tylnej części ciała. W efekcie kot może obrócić przednią część ciała o około 90°, podczas gdy tylna część obraca się w przeciwnym kierunku jedynie o około 10°; 3) Wyprostowanie przednich łap i cofnięcie tylnych – umożliwia dalszy obrót tylnej części ciała, przy jednoczesnym niewielkim obrocie przedniej części w przeciwnym kierunku. W zależności od elastyczności kota oraz jego początkowego momentu pędu, jeśli w ogóle występuje, może być konieczne kilkukrotne powtórzenie kroków 2 i 3, aby w pełni obrócić ciało o 180°.

Nie było to ostatnie słowo mechaniki kotów. W 1993 roku Montgomery zaproponował bardziej złożoną teorię opisującą dynamikę tego ruchu, a badania nad zdolnością kotów do spadania na cztery łapy znalazły zastosowanie nie tylko w astronautyce, ale też w teorii sterowania – kot w locie jest bowiem świetnym przykładem tzw. układu nieholonomicznego, czyli układu ze złożonymi ograniczeniami między różnymi parametrami zależnymi od tempa zmian tych parametrów.

Mechanika kota okazuje się znacznie bardziej złożona, niż wskazywałaby na to codzienna statyka leżenia na ludzkich kolaniach i dynamika biegu do miski podczas karmienia.

#### Literatura

- [1] Kane, T.R. and Scher, M.P. (1960) „A dynamical explanation of the falling cat phenomenon”, International Journal of Solids and Structures, 5(7): 663–670
- [2] Iwai, T. (2021) „Geometry, Mechanics, and Control in Action for the Falling Cat”, Springer, Lecture Notes in Mathematics (vol. 2289)

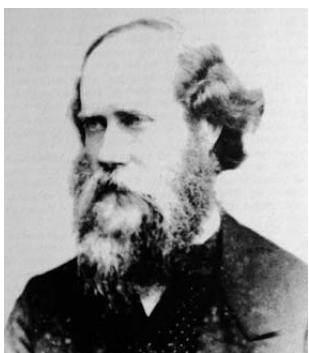
Arkadiusz HESS\*, Łukasz NIEDZWIEDZKI\*\*, Anna SOCHA\*

\* Kolegium MISMaP, Uniwersytet Warszawski, \*\* Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

# Zbiór Cantora przed Cantorem

Jarosław GÓRNICKI\*

\* Kontakt: gornicki59@gmail.com



Henry J. S. Smith (1826–1883), matematyk irlandzki, od 1860 roku zajmował stanowisko *Savilian Professor of Geometry* w Oksfordzie

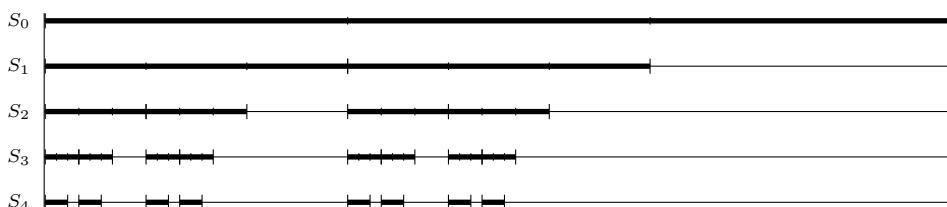
Zbiory, które przedstawimy w niniejszym artykule, są jednymi z najbardziej niezwykłych. Pojawiają się w wielu fragmentach współczesnej matematyki. Dzięki nim lepiej rozumiemy skomplikowaną strukturę zbioru liczb rzeczywistych oraz płaszczyzny euklidesowej. Nie można wykluczyć, że zbiory te wciąż skrywają własności, które czekają na swoich odkrywców.

W 1875 roku irlandzki matematyk Henry Smith w pracy [1] wykazał, że ograniczona funkcja rzeczywista będzie całkowalna w sensie Riemanna „[nawet, gdy jej punkty nieciągłości] będą istnieć w nieskończonej liczbie w skończonym przedziale bez wypełnienia jakiejkolwiek części tego przedziału”. Ten opis może nam się wydawać odrobinę dziwny, ale proszę zauważać, że powstał on w czasach, gdy nie istniała ani teoria mnogości, ani topologia, ani teoria miary, jakie znamy dzisiaj. Mimo to jest on zadziwiająco zgodny z dzisiejszym stanem wiedzy, który podsumowuje poniższy wynik.

**Twierdzenie 1.** *Funkcja ograniczona w przedziale domkniętym  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}$ , jest całkowalna w sensie Riemanna w tym przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej punktów nieciągłości ma miarę Lebesgue'a równą zero.*

Trafność sformułowania Smitha jeszcze lepiej widać, gdy spojrzymy na podane przez niego przykłady zbioru punktów, które „mogą istnieć w nieskończonej liczbie w skończonym przedziale bez wypełnienia jakiejkolwiek części tego przedziału”.

**Przykład 1** (Smith, 1875). Niech  $m$  będzie dowolną liczbą całkowitą większą od 2. Podzielmy przedział  $[0, 1]$  na  $m$  równych przedziałów i usuńmy ostatni segment („segment” to taki przedział, że to, co zostaje po jego usunięciu, jest zbiorem domkniętym). Każdy z pozostałych  $m - 1$  przedziałów podzielmy na  $m$  równych przedziałów i usuńmy ostatni segment z każdego z nich (rys. 1).



Rys. 1. Pierwsze etapy konstrukcji Smitha dla  $m = 3$

Jeżeli ta operacja będzie kontynuowana w nieskończoność, to otrzymamy domknięty zbiór  $S$  o nieskończonej liczbie punktów, który nie wypełnia jakiejkolwiek części przedziału  $[0, 1]$ . Łączna długość przedziałów, jakie pozostały po  $k$ -tym kroku konstrukcji, jest równa  $(\frac{m-1}{m})^k$  i dąży do 0, gdy  $k \rightarrow \infty$ . Jednocześnie po  $k$  krokach konstrukcji długość usuniętych przedziałów jest równa  $1 - (\frac{m-1}{m})^k$  i dąży do 1, gdy  $k \rightarrow \infty$ . Zbiór  $S$  nazywamy *zborem Smitha*.

Opisana konstrukcja Smitha to jeden z najwcześniejzych opublikowanych przykładów *zbioru fraktalnego* (samopodobnego) utworzonego rekurencyjnie!

Przejdzmy do omówienia tytułowego *zbioru Cantora*. W latach 1879–1884 matematyk niemiecki Georg Cantor badał topologiczne własności podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych. W pracy [2], bez wskazania motywacji, podał przykład zbioru *doskonałego i nigdziegęstego* (to dla purystów, bo dalszy tekst nie wymaga znajomości tych pojęć).

**Przykład 2** (Cantor, 1883). Zbiór liczb postaci

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}, \text{ gdzie } c_i \in \{0, 2\} \right\},$$

nazywamy *zborem Cantora*.

Zbiór Cantora tworzą zatem te liczby z przedziału  $[0, 1]$ , które można zapisać w systemie trójkowym w postaci nieskończonego rozwinięcia przy użyciu tylko



Georg F. L. P. Cantor (1845–1918), matematyk niemiecki, profesor Uniwersytetu w Halle, twórca teorii mnogości

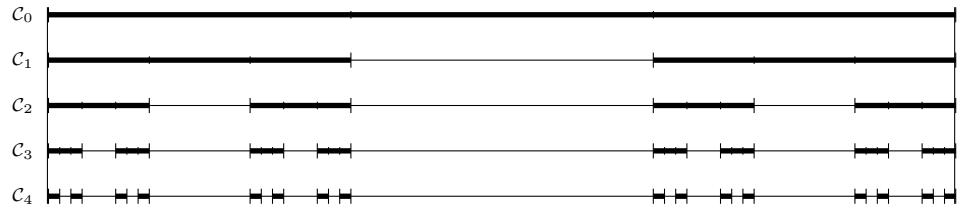
cyfr 0 lub 2. Należy przy tym pamiętać, że np.  $\frac{1}{3} \in \mathcal{C}$ , bo  $\frac{1}{3} = (0,0222\ldots)_3$ , a nie tylko  $\frac{1}{3} = (0,1)_3$ .

Zauważmy teraz, że w rozwinięciu  $x = (0,c_1c_2c_3\ldots)_3$ ,

- jeżeli  $c_1 = 0$ , to  $x \in [0, \frac{1}{3}]$ ,
- jeżeli  $c_1 = 2$ , to  $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ ,
- jeżeli  $c_1 = 0$  i  $c_2 = 0$ , to  $x \in [0, \frac{1}{9}]$ ,
- jeżeli  $c_1 = 0$  i  $c_2 = 2$ , to  $x \in [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ ,
- jeżeli  $c_1 = 2$  i  $c_2 = 0$ , to  $x \in [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ ,
- jeżeli  $c_1 = 2$  i  $c_2 = 2$ , to  $x \in [\frac{8}{9}, 1]$  itd.

Myślimy tutaj o przypisaniu do liczby  $(0,c_1c_2c_3\ldots)_3$  granicy ciągu punktów przypisanych do liczb  $(0,c_1)_3, (0,c_1c_2)_3, (0,c_1c_2c_3)_3$  itd., gdzie  $c_i \in \{0, 2\}$ . W ten sposób wykorzystujemy fakt, że zbiór  $\mathcal{C}$  jest domknięty (jako zbiór doskonały).

Ponieważ prawdziwe są również implikacje odwrotne, więc zbiór Cantora możemy opisać geometrycznie: podzielmy przedział  $[0, 1]$  na trzy równe przedziały i usuńmy otwarty przedział środkowy. Każdy z pozostałych przedziałów podzielmy na trzy równe przedziały i z każdego takiego podziału usuńmy otwarty przedział środkowy. Jeżeli ta operacja będzie kontynuowana w nieskończoność, to otrzymamy w przedziale  $[0, 1]$  domknięty zbiór  $\mathcal{C}$  (rys. 2).



Rys. 2. Pierwsze etapy geometrycznej konstrukcji zbioru Cantora

Podobnie jak w przykładzie 1, „długość” (w dzisiejszym języku: miara) zbioru Cantora jest równa 0.

Porównując geometryczne konstrukcje zbioru Smitha (dla  $m = 3$ ) i zbioru Cantora, stwierdzamy, że

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{3^i}, \text{ gdzie } s_i \in \{0, 1\} \right\} \text{ i } 2 \cdot \mathcal{S} = \mathcal{C}.$$

Przy próbie rysowania przybliżeń zbioru Cantora widzimy jedynie wymierne końce wybranych przedziałów, których jest przeliczalnie wiele. Czy w zbiorze Cantora są inne liczby? Pokażemy (dwoma sposobami), że  $\frac{1}{4} \in \mathcal{C}$ , choć nie jest końcem jakiegokolwiek przedziału z konstrukcji zbioru Cantora.

*Sposób 1.* Punkty  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}$ ,  $x_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$  itd. są końcami przedziałów w konstrukcji zbioru Cantora, więc należą do zbioru  $\mathcal{C}$ . Jednocześnie  $(\frac{1}{3}) - (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 - \dots = \frac{1}{4}$ , więc  $\frac{1}{4} \in \mathcal{C}$ , bo zbiór  $\mathcal{C}$  jest domknięty.

*Sposób 2.* Z definicji zbioru Cantora  $x = (0,020202\ldots)_3 \in \mathcal{C}$ . Ponieważ

$$x = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \dots = \frac{1}{3^2} \left( 2 + \left[ \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \dots \right] \right) = \frac{1}{9}(2 + x),$$

więc  $x = \frac{1}{4} \in \mathcal{C}$ .

Twórca teorii mnogości wiedział, że zbiór  $\mathcal{M}$  wszystkich nieskończonych ciągów utworzonych z 0 lub 1 jest nieprzeliczalny, to znaczy nie da się utworzyć ciągu złożonego z wszystkich jego elementów.

Uzasadnienie jest łatwe. Założymy, że wszystkie elementy zbioru  $\mathcal{M}$  (będące ciągami) zostały ponumerowane liczbami naturalnymi (zostały ustawione w ciąg):  $M_1 = \{m_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $M_2 = \{m_i^2\}_{i=1}^{\infty}$ , ... Tworzymy nowy ciąg  $T = \{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ , który na  $i$ -tym miejscu różni się od ciągu  $M_i$ , przyjmując, że jeśli  $m_i^i = 0$ , to  $t_i = 1$ , a jeśli  $m_i^i = 1$ , to  $t_i = 0$ . Wtedy ciąg  $T$  należy do  $\mathcal{M}$  (bo zbudowany jest z 0 lub 1) i  $T \neq M_i$  dla każdego  $i = 1, 2, \dots$ . Jest to sprzeczne z założeniem, że wszystkie elementy zbioru  $\mathcal{M}$  zostały ponumerowane liczbami naturalnymi, więc  $\mathcal{M}$  jest zbiorem nieprzeliczalnym.

Z poczynionych obserwacji wynikają następujące stwierdzenia.

## Twierdzenie 2:

- (1) Zbiór Smitha ma tyle samo elementów co zbiór Cantora (równoliczność ustala funkcja mnożenia przez 2, czyli

$$\mathcal{S} \ni (0, s_1 s_2 s_3 \dots)_3 \longmapsto (0, c_1 c_2 c_3 \dots)_3 \in \mathcal{C},$$

gdzie  $s_i \in \{0, 1\}$  i  $c_i = 2s_i$  dla każdego  $i = 1, 2, \dots$ );

- (2) Zbiór Smitha (zbiór Cantora) jest nieprzeliczalny.

Stwierdzenie (2) możemy wzmacnić, wykazując, że przekształcenie

$$f((0, c_1 c_2 c_3 \dots)_3) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{2^i}, \quad \text{gdzie } c_i \in \{0, 2\},$$

odwzorowuje w sposób ciągły zbiór Cantora  $\mathcal{C}$  na przedział  $[0, 1]$ . Wynika stąd, że zbiór  $\mathcal{C}$  ma nie mniej elementów niż jego obraz  $f(\mathcal{C}) = [0, 1]$ . Ponieważ  $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ , więc zbiór Cantora ma tyle samo elementów co przedział  $[0, 1]$ .

Zatem większość liczb ze zbioru Cantora (zbioru Smitha) nie widzimy (!), choć jest ich tak dużo jak

W przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}$  zbiór  $A$  jest zwarty, gdy z każdego ciągu punktów zbioru  $A$  można wybrać podciąg zbieżny do elementu zbioru  $A$  (lub równoważnie, gdy zbiór  $A$  jest domknięty i ograniczony).

Wymiar fraktałny Hausdorffa zbioru Cantora jest równy

$$\dim_H(\mathcal{C}) = \frac{\lg 2}{\lg 3} \approx 0,63 < 1,$$

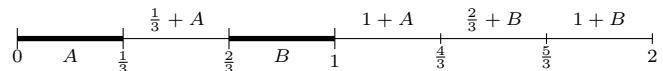
a  $\dim_H([0, 1]) = 1$ . Czym są więc zbiory o wymiarze dodatnim, ale mniejszym od jedności? Czy zbiór Cantora (Smitha) to jeszcze linia?

w całym przedziale  $[0, 1]$ , i na dodatek wszystkie one mieszczą się na „ocinku” zerowej długości! Doprawdy niewiarygodne, jak matematyka potrafi zaskoczyć naszą intuicję i poruszyć wyobraźnię.

Jakby tego było mało, okazuje się, że ten „mały” zbiór może tworzyć zaskakująco duże zbiory, na przykład

$$\mathcal{C} + \mathcal{C} = \{x + y : x, y \in \mathcal{C}\} = [0, 2].$$

Uzasadnienie jest następujące. Ponieważ  $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ , więc oczywiście  $\mathcal{C} + \mathcal{C} \subset [0, 2]$ . Aby wykazać zawieranie przeciwnie, ustalmy liczbę  $t \in [0, 2]$ . Musimy wskazać dwie liczby  $b, d \in \mathcal{C}$  takie, że  $b + d = t$ . Zauważmy, że jeśli  $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ , to  $\{x + y : x, y \in C_1\} = [0, 2]$ . Powody wyjaśnia rysunek 3 (to jedna z możliwych realizacji).

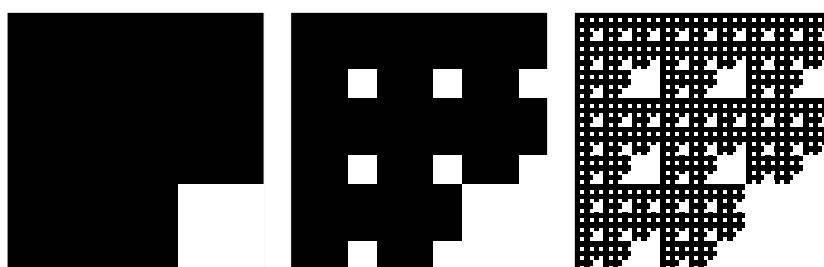


Rys. 3. Pierwsze etapy geometrycznej konstrukcji zbioru Cantora

Zatem istnieją liczby  $b_1, d_1 \in C_1$  takie, że  $b_1 + d_1 = t$ . Analogicznie, jeśli  $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ , to  $\{x + y : x, y \in C_2\} = [0, 2]$ . Istnieją więc liczby  $b_2, d_2 \in C_2$  takie, że  $b_2 + d_2 = t$ . Kontynuując to postępowanie, możemy dla każdego  $i$  znaleźć liczby  $b_i, d_i \in C_i$  takie, że  $b_i + d_i = t$ . Oczywiście ciągi  $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}, \{d_i\}_{i=1}^{\infty}$  zawierają się w  $\mathcal{C}$ , więc korzystając ze zwartości zbioru  $\mathcal{C}$ , możemy uzasadnić istnienie podciągów  $\{b_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{d_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , które są zbieżne do liczb  $b, d \in \mathcal{C}$ , odpowiednio. Ponieważ przechodzenie do granicy zachowuje operację dodawania, więc przechodząc z  $k \rightarrow \infty$  w równaniu  $b_{i_k} + d_{i_k} = t$ , otrzymujemy  $b + d = t$ . Zatem  $[0, 2] \subset \mathcal{C} + \mathcal{C}$ , co kończy uzasadnienie. Podobnie moglibyśmy również pokazać, że  $\mathcal{C} - \mathcal{C} = [-1, 1]$ .

Obserwacje te mogą stanowić naturalny punkt wyjścia do rozważań nad miarą, kategorią i wymiarem zbiorów, i *de facto* stały się impulsem do rozwoju tych teorii na przełomie XIX i XX wieku. Problematyka ta jest jeszcze lepiej widoczna na tle uwagi Smitha z pracy [1]: „rozważając dla uproszczenia przypadek dwóch wymiarów, zauważmy, że [skończony przedział (czyli prostokąt) całkowania] może nie tylko zawierać punkty nieciągłości o skończonej lub nieskończonej liczbie, ale może być także przecięty krzywymi nieciągłości (...), nawet gdy całkowita długość krzywych nieciągłości jest nieskończona, [bez wypełnienia jakiejkolwiek części przedziału całkowania]”.

Moglibyśmy spekulować, że Smith, zanim wyraził tę myśl, wyobraził sobie dwuwymiarową wersję konstrukcji z przykładu 1 (dla  $m = 3$ ). Kwadrat jednostkowy  $[0, 1]^2$  dzielimy na 9 przystających kwadratów i usuwamy kwadrat (segment) w prawym dolnym rogu. Każdy z 8 pozostałych kwadratów dzielimy na 9 przystających kwadratów i w każdym z nich usuwamy kwadrat (segment) w prawym dolnym rogu. Dla pozostałych 64 kwadratów operację powtarzamy. Kontynuując tę operację w nieskończoność, otrzymamy zbiór, który „nie wypełnia jakiejkolwiek części kwadratu  $[0, 1]^2$ ”. Pole pozostałe w  $k$ -tym kroku konstrukcji jest równe  $(\frac{8}{9})^k$  i dąży do 0, gdy  $k \rightarrow \infty$  (rys. 4).



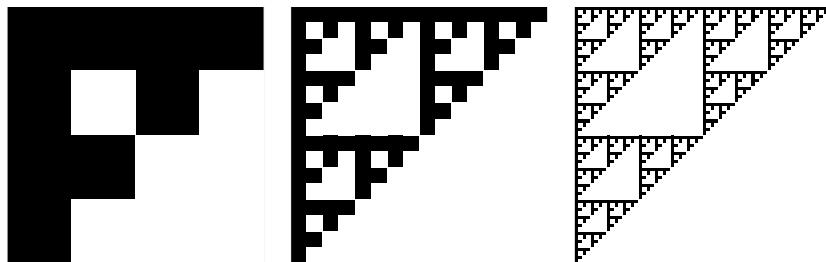
Rys. 4. Pierwsza, druga i czwarta iteracja konstrukcji płaskiego zbioru Smitha dla ( $m = 3$ )

*Wymiar fraktalny Hausdorffa* zbioru Smitha  $S_3$  jest równy  $\dim_H(S_3) = \frac{\lg 8}{\lg 3} \approx 1,89 < 2$ , a  $\dim_H([0, 1]^2) = 2$ . Czym są więc zbiorы o wymiarze większym od jedności, ale mniejszym od dwóch? Czy to, co otrzymaliśmy, to jeszcze powierzchnia?

Dodatkowo prawa dolna granica powstałego zbioru jest wersją krzywej płatka śniegu (o nieskończonej długości) opublikowanej przez Helge von Kocha w 1904 roku.

Patrząc na opisane w artykule konstrukcje, nabieramy szacunku do pozornie prostych pytań: *co to jest linia? co to jest powierzchnia?* Odpowiedź na każde z nich... wcale nie jest łatwa!

I na koniec ciekawostka. Jeśli wyżej opisaną płaską konstrukcję Smitha wykonamy dla  $m = 2$ , to otrzymamy... wersję trójkąta Sierpińskiego (!), który został opublikowany w 1915 roku (rys. 5).



Rys. 5. Druga, czwarta i szósta iteracja konstrukcji płaskiego zbioru Smitha dla ( $m = 2$ )

*Wymiar fraktalny Hausdorffa* trójkąta Sierpińskiego  $T$  jest równy  $\dim_H(T) = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1,58 < 2$ .

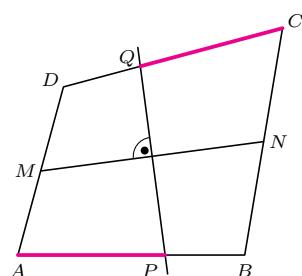
Ale w 1875 roku Wacława Sierpińskiego nie było jeszcze na świecie! Ach, co by to było, gdyby Smith miał komputer...

#### Literatura

- [1] H.J.S. Smith, „On the integration of discontinuous functions”, Proc. London Math. Soc. (1) 6 (1875), 140–153.
- [2] G. Cantor, „Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten”, V, Math. Ann. 21 (1883), 545–591.



## Zadania



Przygotował Dominik BUREK

**M 1810.** Na szachownicy o wymiarach  $8 \times 8$  ustawiono osiem wież tak, aby żadne dwie wieże nie atakowały się wzajemnie. Pola szachownicy są rozdzielone pomiędzy wieże w następujący sposób: każde pole należy do najbliższej atakującej je wieży (przyjmujemy przy tym, że wieża atakuje też pole, na którym się znajduje). W przypadku gdy dwie atakujące dane pole wieże są w równej odległości od niego, każda z nich posiada połowę pola. Udowodnić, że dla każdej wieży całkowita powierzchnia posiadanych przez nią pól jest taka sama.

**M 1811.** W czworokącie wypukłym  $ABCD$  boki  $AB$  i  $CD$  są równej długości, a punkty  $M$  i  $N$  są środkami  $AD$  i  $BC$ . Symetralna odcinka  $MN$  przecina boki  $AB$  i  $CD$ , odpowiednio, w punktach  $P$  i  $Q$ . Udowodnić, że  $AP = CQ$ .

**M 1812.** Wyznaczyć wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  spełniona jest równość

$$(y+1)f(yf(x)) = yf(x(y+1)).$$

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1115.** Dwie jednakowe, wykonane z dielektryka kulki, o promieniu  $r$  każda, umieszczono w odległości  $R$  od siebie, przy czym  $R \gg r$ . Na jedną z nich wprowadzono ładunek  $q$ . Następnie odległość między kulkami zwiększoną  $k$  razy. Jaki ładunek,  $Q$ , należy wprowadzić na jedną z nich po rozsunięciu, aby siła, z jaką na siebie oddziałują, była w obu przypadkach taka sama?

**F 1116.** Poniżej jakiej długości fale dźwiękowe w gazie podlegają silnemu tłumieniu?

**Rozwiązań na str. 24**

# Konstrukcje w zadaniach z teorii liczb

Navid SAFAEI\*

\*Dyrektor oddziału Matematyka  
Olimpijska w Salam Schools Complex,  
Teheran, Iran  
Instytut Matematyki i Informatyki,  
Bułgarska Akademia Nauk, Sofia

Przez  $\text{nwd}(x, y)$  oznaczamy oczywiście największy wspólny dzielnik liczb  $x$  oraz  $y$ .

Jak to? Przecież zadania konstrukcyjne dotyczą *geometrii!* To prawda, ale nie o zastosowaniu cyrkla i linijki będzie tu mowa. Naszym zadaniem będzie konstruowanie przykładów, a często nawet nieskończonego zbioru przykładów, dla pytań natury teorioliczbowej. Inspiracją do napisania tego tekstu było drugie zadanie z ubiegłoroczej Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej (IMO).

**Zadanie 1** (IMO 2024, Problem 2). Wyznaczyć wszystkie pary  $(a, b)$  liczb całkowitych dodatnich, dla których istnieją takie liczby całkowite dodatnie  $g$  i  $N$ , że

$$\text{nwd}(a^n + b, b^n + a) = g$$

dla wszystkich  $n \geq N$ .

Nietrudno przekonać się, że  $a = b = 1$  spełniają powyższy warunek. Czy istnieją jednak inne przykłady? Okazuje się, że nie, co można uzasadnić, powołując się na to, że pewien powiązany problem ma *nieskończenie wiele rozwiązań*. I właśnie tego typu zagadnieniom przyjrzymy się poniżej (przy okazji rozwiązuając powyższe zadanie z IMO). Do dzieła!

**Zadanie 2.** Niech  $N$  będzie daną liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnij, że istnieją parami względnie pierwsze liczby całkowite dodatnie  $a, b, c > N$ , takie że liczby  $a + b + c$  oraz  $ab + bc + ac$  mają te same dzielniki pierwsze.

*Rozwiązanie.* Pokażemy, jak skonstruować dowolnie duże liczby  $a, b, c$  takie, że

$$\frac{ab + ac + bc}{a + b + c} = 3^K$$

dla pewnej liczby całkowitej dodatniej  $K$ , oraz  $a + b + c$  jest podzielne przez 3. Liczby te będą oczywiście spełniały warunki zadania.

Zachodzi równość:

$$\frac{ab + ac + bc}{a + b + c} = a + b - \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b + c}.$$

Będziemy wybierać  $c$  takie, że  $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b + c} = 1$ , czyli  $c = a^2 + b^2 + ab - a - b$ .

Wystarczy dalej szukać względnie pierwszych liczb  $a, b$  takich, że  $a + b - 1 = 3^K$  (oraz  $3 \mid a + b + c$ ).

Niech  $a > N$  będzie liczbą pierwszą spełniającą  $a \equiv 2 \pmod{3}$ . Niech liczba  $K$  spełnia nierówność  $3^K + 1 > 2a$ . Wówczas liczba  $b = 3^K + 1 - a$  jest większa od  $a$  (więc również od  $N$ ) oraz daje resztę 2 z dzielenia przez 3. Możemy ponadto założyć, że liczba  $3^K + 1$  nie jest podzielna przez  $a$ , gdyż w przeciwnym wypadku  $3^{K+1} + 1 = 3(3^K + 1) - 2$  nie jest podzielne przez  $a$  i moglibyśmy pod  $K$  podstawić  $K + 1$ . Przy takim założeniu liczba  $b$  nie może być podzielna przez  $a$ , zatem jest z nią względnie pierwsza.

Przypuśćmy, że liczby  $b$  i  $c$  mają wspólny dzielnik pierwszy  $p$ . Zgodnie z definicją  $c$  liczba  $p$  musiałaby wtedy dzielić  $a^2 - a = a(a - 1)$ . Ponieważ  $a$  i  $b$  są względnie pierwsze, to musiałoby zachodzić  $p \mid (a - 1)$ , a skoro  $(a - 1) + b = 3^K$ , otrzymalibyśmy  $p \mid 3^K$ , czyli  $p = 3$ . Jest to jednak sprzeczność, gdyż  $b \equiv 2 \pmod{3}$ . Analogicznie dowodzimy, że  $\text{nwd}(a, c) = 1$ .

Pozostaje zauważać, że jeśli  $a \equiv b \equiv 2 \pmod{3}$ , to liczba  $a + b + c = a^2 + ab + b^2$  jest podzielna przez 3.  $\square$

**Zadanie 3.** Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  istnieje  $2n$  takich parami różnych liczb całkowitych dodatnich  $a_1, \dots, a_{2n}$ , że dla dowolnych  $i, j$  spełniających  $1 \leq i < j \leq 2n$  zachodzi

$$(a_i^k + a_j^k) \mid (a_i^{k+1} + a_j^{k+1}) \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n.$$

*Rozwiązań*. Niech  $x_1, \dots, x_{2n}$  będą różnymi liczbami całkowitymi dodatnimi, określmy ponadto:

$$D = \prod_{1 \leq i < j \leq 2n} \prod_{1 \leq k \leq n} (x_i^k + x_j^k)$$

oraz  $a_i = Dx_i$  dla  $i = 1, \dots, n$ . Oczywiście  $x_i^k + x_j^k \mid D$ , zatem  $D^k(x_i^k + x_j^k) \mid D^{k+1}$ , więc tym bardziej  $D^k(x_i^k + x_j^k) \mid D^{k+1}(x_i^{k+1} + x_j^{k+1})$ . Lewa strona tej podzielności to  $a_i^k + a_j^k$ , zaś prawa to  $a_i^{k+1} + a_j^{k+1}$ , co kończy uzasadnienie.  $\square$

Eleganckie uzasadnienie małego twierdzenia Fermata można znaleźć w krótkim tekście Tomasza Kazany w  $\Delta_{17}^4$ .

W kolejnych zadaniach będziemy stosować małe twierdzenie Fermata, zgodnie z którym jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą oraz  $p \nmid a$ , to  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . W prosty sposób wynika stąd, że jeśli  $x \equiv y \pmod{p-1}$ , to  $a^x \equiv a^y \pmod{p}$ .

**Zadanie 4.** Niech  $a, b$  będą liczbami całkowitymi dodatnimi, przy czym  $a > 1$ . Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych dodatnich  $n$ , że  $n^b + 1$  nie dzieli  $a^n + 1$ .

*Rozwiązań*. Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą dzielącą  $(2a)^b + 1$ , wtedy oczywiście  $\text{nwd}(p, 2a) = 1$ . Ustalmy dowolnie  $\ell > \frac{2a}{p}$  i przyjmijmy  $n = (p-1)(\ell p - 2a)$ . Wtedy  $n \equiv 2a \pmod{p}$ , a zatem

$$n^b + 1 \equiv (2a)^b + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Jednocześnie  $(p-1) \mid n$ , więc na mocy małego twierdzenia Fermata mamy  $a^n + 1 \equiv 2 \pmod{p}$ , co wyklucza podzielność  $a^n + 1$  przez  $n^b + 1$  i kończy rozwiązanie.  $\square$

Kolejny problem jest mocno związany z problemem z IMO 2024, od którego zaczęliśmy ten artykuł.

**Zadanie 5.** Niech  $a, b, c$  będą liczbami naturalnymi. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich  $k$  takich, że

$$\text{nwd}(a^k + bc, c^k + ab, b^k + ac) > 1.$$

*Rozwiązań*. Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą dzielącą  $1 + abc$ . Wówczas  $p$  nie dzieli żadnej z liczb  $a, b, c$ . Wybierzmy  $k = \ell(p-1) - 1$  dla pewnej liczby całkowitej dodatniej  $\ell$ . Wtedy zgodnie z małym twierdzeniem Fermata

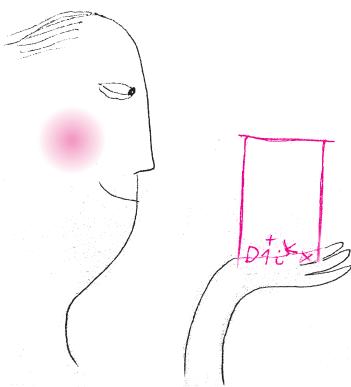
$$a(a^k + bc) = a^{k+1} + abc \equiv 1 + abc \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ponieważ  $p \nmid a$ , więc  $p \mid (a^k + bc)$ . To samo dotyczy  $c^k + ab$  oraz  $b^k + ac$ , stąd  $p$  dzieli  $\text{nwd}(a^k + bc, c^k + ab, b^k + ac)$ .  $\square$

Powyższe rozważania mogą nas naprowadzić na rozwiązanie **Zadania 1**. Wstawiając  $c = 1$  w rozumowaniu wyżej, a następnie przyjmując za  $p$  dowolny dzielnik pierwszy liczby  $1 + ab$ , otrzymujemy, że  $p$  dzieli  $a^k + b$  i  $b^k + a$  dla nieskończenia wielu wykładników  $k$ .

Załóżmy, że  $(a, b) \neq (1, 1)$ , i przypuśćmy, że istnieją  $N$  i  $g$  takie, że dla dowolnego  $n \geq N$  zachodzi  $\text{nwd}(a^n + b, b^n + a) = g$ . W połączeniu z poprzednią obserwacją oznaczałoby to, że  $p$  dzieli  $g$ . Zwrócić uwagę, że reszty z dzielenia pary  $(a^n, b^n)$  przez  $p$  powtarzają się cyklicznie z okresem  $p-1$ . Skoro więc  $p$  dzieli  $\text{nwd}(a^n + b, b^n + a)$  dla wszystkich  $n \geq N$ , to jest to prawdą dla dowolnego  $n \geq 0$ .

Podstawiając  $n = 0$  i  $n = 1$ , otrzymujemy, że  $a+1, b+1, a+b$  są podzielne przez  $p$ . Zatem  $p$  dzieli również  $2b = (a+b) - (a+1) + (b+1)$ . Skoro  $p$  jest względnie pierwsze z  $b$ , to  $p = 2$ , a więc  $ab+1 = 2^t$  dla pewnej liczby całkowitej dodatniej  $t$ , a skoro  $(a, b) \neq (1, 1)$ , musi być  $t \geq 2$ , czyli  $4 \mid ab+1$ . Analiza reszt z dzielenia przez 4 liczb  $a$  i  $b$  prowadzi do wniosku, że  $a$  i  $b$  to liczby nieparzyste spełniające  $b \equiv -a \pmod{4}$ . Przeczy to założeniom zadania, ponieważ  $\text{nwd}(a^n + b, b^n + a)$  dla  $n$  nieparzystego jest podzielne przez 4, a dla  $n$  parzystego nie jest.  $\square$



Czytelnicy znający chińskie twierdzenie o resztach z pewnością zauważą, że nasz lemat jest jego szczególnym przypadkiem. Tym, którzy nie znają tego twierdzenia i chcieliby zmienić ten stan rzeczy, polecamy krótki artykuł *Resztki z  $\Delta_4$* .

W rozwiążaniu zadania 4 potrafiliśmy wskazać dowolnie duże liczby  $n$ , które są podzielne przez  $p - 1$  i dawały zadaną resztę  $2a$  z dzielenia przez  $p$ . Obserwację tę uogólnia następujący

**Lemat.** Niech  $a, x, y$  będą dowolnymi liczbami naturalnymi, przy czym  $a \geq 1$ . Wówczas istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych  $n$ , dla których  $n \equiv x \pmod{a}$  oraz  $n \equiv y \pmod{a-1}$ .

*Dowód.* Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnej liczby całkowitej  $\ell$  liczba

$$n = x + (y - x)a + \ell a(a - 1)$$

daje resztę  $x$  z dzielenia przez  $a$  oraz resztę  $y$  z dzielenia przez  $a - 1$ . Aby zachodziło  $n \geq 0$ , wystarczy взять dowolne  $\ell \geq x$ .  $\square$

Powyższy lemat wykorzystamy w rozwiązyaniu kolejnych dwóch zadań.

**Zadanie 6.** Niech  $a, b$  będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich  $n$  takich, że

$$\text{nwd}(a^n + n^b, b^n + n^a) > 1.$$

*Rozwiązanie.* Jeśli  $\text{nwd}(a, b) = D > 1$ , to dla  $n = Dk$ , gdzie  $k$  jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią, obie liczby  $a^n + n^b$  oraz  $b^n + n^a$  są podzielne przez  $D$ . Założymy teraz, że  $\text{nwd}(a, b) = 1$  oraz  $a \geq b$ . Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą dzielącą  $a^a + b^b$ . Zgodnie z lematem istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich  $n \geq 0$  spełniających

$$n \equiv ab \pmod{p} \quad \text{oraz} \quad n \equiv a + b \pmod{p-1}.$$

Wtedy, znów powołując się na małe twierdzenie Fermata,

$$a^n + n^b \equiv a^{a+b} + (ab)^b \equiv a^b(a^a + b^b) \equiv a^a + b^b \equiv 0 \pmod{p},$$

skąd dostajemy  $p | a^n + n^b$ . Analogicznie dowodzimy  $p | b^n + n^a$ .  $\square$

**Zadanie 7.** Niech  $a \geq 1$  oraz  $b \geq 2$  będą danymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Udowodnij, że nie istnieje żaden taki niezerowy wielomian  $f(x)$  o współczynnikach całkowitych, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  mamy  $\text{nwd}(f(n^a), f(b^n)) = 1$ .

*Rozwiązanie.* Założymy przeciwnie: istnieje wielomian  $f(x)$  o współczynnikach całkowitych o takiej własności, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  mamy  $\text{nwd}(f(n^a), f(b^n)) = 1$ . Wynika z tego, że  $\text{nwd}(f(b^a), f(b^b)) = 1$ . Stąd  $b$  jest względnie pierwsze z wyrazem wolnym wielomianu  $f$ , czyli  $\text{nwd}(b, f(0)) = 1$ . Ustalmy  $m$ , a następnie wybierzmy dzielnik pierwszy  $p$  liczby  $f(b^{am})$ . Zachodzi wówczas  $\text{nwd}(p, b) = 1$ . Na mocy lematu istnieje taka dodatnia liczba całkowita  $n$ , że  $n \equiv b^m \pmod{p}$  i  $n \equiv am \pmod{p-1}$ . Wówczas

$$f(n^a) \equiv f(b^{ma}) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Z drugiej strony,  $f(b^{ma}) \equiv f(b^n) \pmod{p}$ , stąd  $p | \text{nwd}(f(n^a), f(b^n))$ . Uzyskana sprzeczność kończy dowód.  $\square$

Nasz przegląd zadań konstrukcyjnych zakończymy następującym zadaniem.

**Zadanie 8.** Czy istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych  $a, b$  takich, że  $a + b$  dzieli  $a^b + b^a$ ?

*Rozwiązanie.* Cóż, najkrótsze rozwiązanie tego problemu wymaga znacznie mniej technicznych umiejętności niż rozwiązania poprzednich zadań – wystarczy bowiem „wpaść” na odpowiedni przykład. A jest nim  $a = 2n - 1$  oraz  $b = 2n + 1$  dla dowolnej nieparzystej liczby naturalnej  $n$ ! Aby udowodnić podzielność  $a^b + b^a$  przez  $a + b = 4n$ , wystarczy osobno wykazać podzielność przez 4 oraz przez  $n$ , co pozostawiamy Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.  $\square$

W tym artykule przedstawiliśmy kilka problemów wymagających teorioliczbowych konstrukcji. Jak można było zobaczyć, odrobina kreatywności w połączeniu z dobrze znymi faktami z elementarnej teorii liczb doprowadziła nas aż na poziom olimpijski.



## Kąt Otwarty 1°: Gratka dla 45-latka

Bartłomiej PAWLICK

Politechnika Śląska

*Kąt Otwarty* definiujemy jako serię matematycznych artykułów obserwowań w przestrzeni *Delta* nie wcześniej niż w marcu 2025 roku. Zgodnie z definicją zbiór dotychczas zaobserwowanych tekstów jest pusty, więc nie sposób empirycznie określić żadnych własności *Kąta Otwartego*. Mimo to istnieją pewne hipotezy i przypuszczenia dotyczące tego obiektu:

- *Kąt Otwarty* jest ostry. Teksty są krótkie i konkretne.
- *Kąt Otwarty* jest prosty (nie mylić z trywialnym). Artykuły są przystępne i zawierają zagadnienia łatwe w opisie.
- *Kąt Otwarty* jest rozwarty! Mieści w sobie bardzo szerokie spektrum zagadnień matematycznych – nie ogranicza się do jednego działu matematyki czy rodzaju zagadnienia i stara się nie faworyzować żadnej liczby.

Opisując każdą zawartą w tym kąciku ideę, staram się, aby eksperyment (najczęściej myślowy) dawał twierdzącą odpowiedź na następujące pytanie: *Czy informacje zawarte w danym artykule byłbym w stanie przedstawić i wyjaśnić nie-matematykowi przy jednym kuflu herbaty?* Niektóre stopnie Kąta Otwartego traktować będą o ciekawych zadaniach, nietypowych obiektach, zabawnych ciekawostkach czy historiach, a inne będą poświęcone problemom otwartym w matematyce. Mam nadzieję, że zamieszczone tu teksty będą czasami uczyć, czasami bawiły, czasami intrygowały, ale przede wszystkim, że będą często inspirowały.

Wydaje się, że zasadnym pytaniem jest również: Ile *Kąt Otwarty* będzie miał stopni? 3, 14, 90, 180? Nie wiadomo. Obecnie wiemy tyle, że *Kąt Otwarty* został po raz pierwszy zaobserwowany w roku 2025 – i dlatego właśnie jego pierwszy stopień zawiera ciekawostkę związaną z tą datą.

**Uwaga!** Przykładając definicje geometryczne kątów ostrego, prostego i rozwartego do zaprezentowanych powyżej treści, można dojść do absurdalnych wniosków – więc czytanie literalne proszę w powyższym tekście stosować wyłącznie na własną odpowiedzialność!



Tłumaczenie zagadki 34. własne, natomiast książka – po raz pierwszy wydana w 1967 roku, czyli prawie czterdzieści lat po śmierci Dudeneya – była redagowana przez Martina Gardnera.

Angielski matematyk Augustus de Morgan rzekomo lubił raczyć swoich rozmówców następującą informacją:

*W roku  $x^2$  miałem  $x$  lat.*

Zauważmy, że de Morgan musiał osiągnąć odpowiedni wiek, aby móc wypowiadać te słowa.

Słowa de Morgana często przedstawia się w postaci zagadki polegającej na określeniu roku urodzenia uczonego. Jednak nie da się tego jednoznacznie rozwiązać bez doprecyzowania, że de Morgan urodził się i zmarł w XIX wieku. Ten brak jednoznaczności powoduje również, że jeszcze bardzo długo będą pojawiać się nowe pokolenia powierników wspomnianej zagadki. Od czasów bohatera artykułu pojawiły się dwa takie pokolenia – aktualni następcy de Morgana już w tym roku mogą posługiwać się dużo łatwiejszym wariantem zagadki:

*Obecny rok jest kwadratem liczby przeżytych przeze mnie lat. W którym roku się urodziłem?*

Natomiast już od przyszłego roku będą oni mogli dokładnie powtarzać słowa słynnego matematyka. Kolejne pokolenie urodzi się, co oczywiste, za tyle lat, ile aktualnie mają obecni następcy de Morgana.

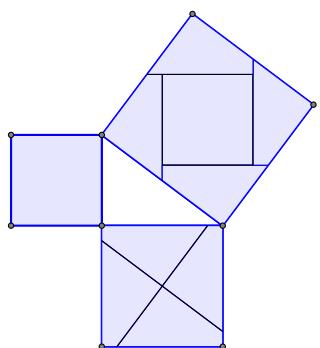
Czytelnik Wybredny może czuć obliczeniowy niedosyt. Wychodząc mu naprzeciw, tekst zakończymy zagadką nr 34 z książki *536 Puzzles & Curious Problems* Henry'ego Ernesta Dudeney'a.

### 34. De Morgan i jeszcze jeden

Augustus de Morgan, matematyk, który zmarł w 1871 roku, zwykł przechwalać się, że miał  $x$  lat w roku  $x^2$ . Chcąc przebić ten wynik, Jasper Jenkins powiedział mi w 1925 roku, że miał  $a^2 + b^2$  lat w roku  $a^4 + b^4$ , że miał  $2m$  lat w roku  $2m^2$  oraz że miał  $3n$  lat w roku  $3n^4$ . Czy możesz podać lata, w których urodzili się, odpowiednio, de Morgan i Jenkins?

# Wycinanki i układanki

\* Student, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1

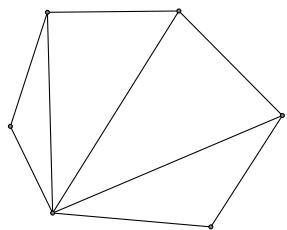
*Miłosz Jan KWIATKOWSKI\**

Myślę, że wszyscy dobrze znają jedno z najpopularniejszych twierdzeń na świecie – twierdzenie Pitagorasa. Jest wiele jego dowodów, a jeden z bardziej znanych polega na charakterystycznym pocięciu kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych i złożeniu z tak otrzymanych kawałków kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.

Można też spojrzeć na ten dowód z nieco innej perspektywy. Mając dwa kwadraty, umiemy je pociąć i złożyć z nich inny, którego pole jest sumą pól kwadratów początkowych. Narzucają się więc pytania: Czy inne figury mają tę samą cechę? Czy z dwóch trójkątów równobocznych można złożyć trójkąt równoboczny? A może da się kwadrat rozciąć i posładać w trójkąt równoboczny? Jak się okazuje, odpowiedź na wszystkie te pytania jest twierdząca. Nie ma więc znaczenia kształt wielokąta, a jedynie jego pole. Okazuje się, że mamy następujące twierdzenie:

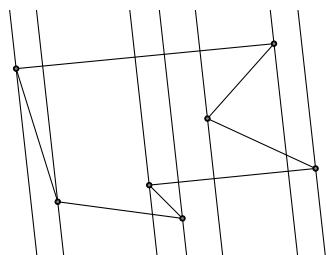
## Twierdzenie Bolyaia–Gerwienna

*Wielokąt A można pociąć prostymi i tak powstałe elementy złożyć w wielokąt B wtedy i tylko wtedy, gdy A i B mają równe pola.*

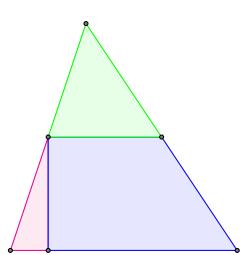


Rys. 2

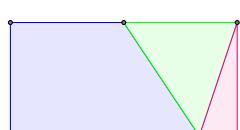
W przypadku wypukłym wystarczy rozciąć wzdłuż  $A_1A_3, A_1A_4, \dots, A_1A_{n-1}$ , gdzie  $A_1 \dots A_n$  jest rozpatrywanym wielokątem



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

## Twierdzenie Bolyaia–Gerwienna

*Wielokąt A można pociąć prostymi i tak powstałe elementy złożyć w wielokąt B wtedy i tylko wtedy, gdy A i B mają równe pola.*

Poruszony urokiem tego twierdzenia bezwzględnie chwyciłem za długopis i kartkę w celu znalezienia dowodu. Ogólność tego zagadnienia nie pozwala na natychmiastowe rozpoczęcie rozwiązywania, więc zacząłem od opracowania planu działania.

Pomysł polega na znalezieniu pewnej recepty takiej, że postępując według niej, uda nam się wykonać taki ciąg cięć i sklejeń, aby z wielokąta A złożyć wielokąt B. Taka procedura może wyglądać następująco:

1. Redukujemy problem do trójkątów – poprzez rozcięcie wielokąta na trójkąty.
2. W kolejnym kroku rozcinamy trójkąt i składamy z jego kawałków kwadrat.
3. Ostatecznie kwadraty krok po kroku łączymy w jeden.

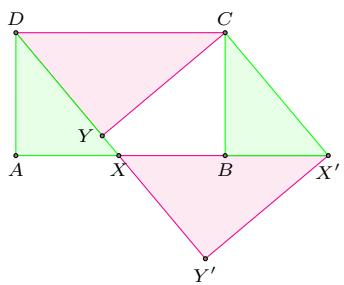
To będzie oznaczać koniec dowodu, bo B także będziemy umieli złożyć w kwadrat. Z założenia o równości pól kwadraty te muszą być przystające. Jeśli linie cięcia narysujemy na jednym kwadracie, dostaniemy podział, z którego można złożyć zarówno wielokąt A, jak i B – czyli A można pociąć na kawałki, z których złożymy B. Dowód w drugą stronę jest prosty, więc nie traćmy na niego czasu.

## Dowód

Dowolny wielokąt można pociąć na trójkąty. Jasne jest, że nie będzie problemu z pocięciem wielokąta wypukłego (rys. 2). Z wielokątem wklęszym musimy być nieco ostrożniejsi. Pomysł jest taki: potnijmy go na plasterki. Wybierzmy taką prostą, żeby nie była równoległa do żadnego boku, a następnie przez każdy wierzchołek prowadźmy prostą równoległą do wybranej. Taka metoda podzieli nam wielokąt na trójkąty i trapezy (dlaczego?), a trapez można rozciąć na dwa trójkąty po dowolnej z jego przekątnych.

Wykażemy, że trójkąt można pociąć i z otrzymanych elementów złożyć kwadrat. Weźmy dowolny trójkąt i przetnijmy go wzdłuż prostej łączącej środki dwóch boków, między którymi jest największy kąt. Tak odcięty trójkąt obróćmy o  $180^\circ$  i przyłożmy do drugiej części tak, aby powstał równoległobok. Następnie rozetnijmy tak powstały równoległobok wzdłuż krótszej z jego wysokości i przesuńmy odcięty trójkąt o wektor równy co do długości i równoległy do dłuższego boku równoległoboku (rys. 4 i 5). Tak powstanie prostokąt. (Pytanie do Czytelnika: Czemu na samym początku konstrukcji wybraliśmy największy kąt w trójkącie?).

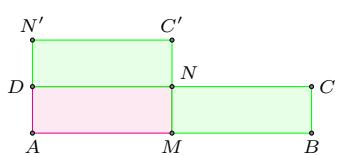
Pozostaje pytanie, jak złożyć kwadrat z kawałków prostokąta.



Rys. 6

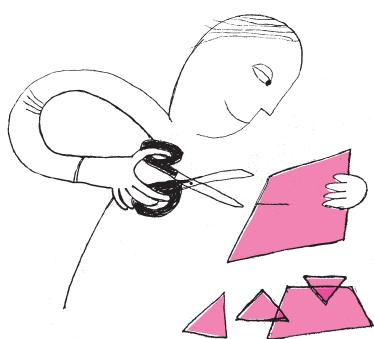
Dla  $a, b \geq 0$  zachodzi  $ab \leq 2ab \leq a^2 + b^2$ . Aby uzasadnić drugą nierówność, wystarczy zapisać ją w równoważnej postaci  $(a - b)^2 \geq 0$ .

Oczywiście byłoby dużo prościej, gdybyśmy mogli wycinać ujemne pole, ale to już byłoby inne twierdzenie.



Rys. 7

Polecam również zapoznać się z artykułem Wiktora Bartola z  $\Delta_{08}^8$ , w którym przedstawiony jest nieznacznie inny sposób cięcia.



Weźmy prostokąt  $ABCD$  o bokach  $AD = a$  i  $AB = b$  i bez straty ogólności przyjmijmy  $a < b$  (rys. 6). Wybierzmy punkt  $X$  na boku  $AB$  oraz przez  $Y$  oznaczmy rzut punktu  $C$  na prostą  $DX$ . Przyjmijmy tymczasowo, że  $Y$  leży na odcinku  $DX$ . Dodatkowo oznaczmy przez  $x$  i  $y$  odpowiednio długości odcinków  $DX$  i  $CY$ . Jeśli teraz przesuniemy trójkąt  $AXD$  o wektor  $\overrightarrow{AB}$  i trójkąt  $CDY$  o wektor  $\overrightarrow{DX}$ , otrzymamy prostokąt o bokach  $x$  i  $y$ , bo przesunięcia zachowują kąty między prostymi. Wystarczy tak dobrać  $x$ , żeby zachodziła równość  $x = y$ . Pole prostokąta przed i po tych przesunięciach jest takie samo, tj.  $ab = xy$ . Zatem potrzeba i wystarczy, aby  $x = \sqrt{ab}$ . Zastanówmy się teraz, kiedy opisana konstrukcja jest możliwa. Istnienie punktu  $X$  na odcinku  $AB$  spełniającego  $DX = \sqrt{ab}$  jest równoważne nierówności  $DA \leq DX \leq DB$ , czyli  $a^2 \leq ab \leq a^2 + b^2$ , co jest zawsze prawdą dla  $a \leq b$  (patrz uzasadnienie na marginesie). Natomiast punkt  $Y$  leży na odcinku  $DX$  dokładnie wtedy, gdy

$$DY \leq DX,$$

czyli jeśli

$$b^2 - y^2 \leq x^2,$$

a to po wstawieniu  $x = y = \sqrt{ab}$  jest równoważne

$$b \leq 2a.$$

Tak więc prostokąt damy radę pociąć i złożyć w kwadrat, o ile zachodzi  $a \leq b \leq 2a$ .

Oczywiście nie każdy prostokąt ma boki o długościach spełniających taką nierówność. Dla pozostałych prostokątów zastosujemy konstrukcję pomocniczą. Oznaczmy przez  $M$  i  $N$  środki boków  $AB$  i  $CD$  prostokąta  $ABCD$ . Wówczas, wykonując przesunięcie prostokąta  $MBCN$  o wektor  $\overrightarrow{MD}$ , otrzymamy prostokąt o bokach długości  $2a$  i  $\frac{b}{2}$ . Zwróćmy uwagę na to, że takie cięcie możemy wykonywać dowolnie dużo razy.

Z prostokąta o bokach  $a$  i  $b$  złożymy w ten sposób prostokąt o bokach  $a'$  i  $b'$  spełniających żądaną nierówność. Oznaczmy przez  $k$  największą liczbę całkowitą nieujemną, spełniającą nierówność  $2^{2k}a \leq b$ . Jeśli  $b \leq 2^{2k+1}a$ , to wykonując  $k$  cięć, otrzymamy prostokąt o bokach  $a' = 2^ka$  i  $b' = \frac{b}{2^k}$ , którego boki spełniają pożądaną nierówność. Jeśli natomiast  $b \geq 2^{2k+1}a$ , to zauważmy, że z definicji  $k$  zachodzi także  $2^{2k+2}a \geq b$ . Tak więc możemy napisać:

$$\frac{b}{2^{2k+1}} \geq a \geq \frac{b}{2^{2k+2}} \iff 2 \cdot \frac{b}{2^{k+1}} \geq 2^{k+1}a \geq \frac{b}{2^{k+1}}.$$

Oznacza to, że wykonując  $k+1$  cięć, otrzymamy prostokąt o bokach  $a' = 2^{k+1}a$  i  $b' = \frac{b}{2^{k+1}}$ , tak że spełniona jest nierówność  $b' \leq a' \leq 2b'$ .

Podsumujmy teraz dowód. Wykazaliśmy, że każdy trójkąt umiemy złożyć w prostokąt. Jeśli boki prostokąta spełniają odpowiednie warunki, to umiemy go złożyć w kwadrat. Natomiast jeśli tych warunków nie spełniają, to możemy wymusić je, przekształcając prostokąt w inny. Jako że umiemy złożyć dwa kwadraty w jeden, to indukcyjnie po pocięciu wielokąta na trójkąty, trójkątów w prostokąty, a prostokątów w kwadraty – damy radę połączyć te kwadraty w jeden. Złożyliśmy więc z dowolnego wielokąta kwadrat, tym samym z kwadratu każdy wielokąt. Oczywiście to spostrzeżenie kończy dowód.  $\square$

Jeśliby próbować uogólnić to twierdzenie do na przykład 3 wymiarów, to otrzymamy twierdzenie fałszywe. Okazuje się, że nie da się pociąć np. czworościanu foremnego płaszczyznami, a następnie złożyć sześcianu o tej samej objętości. Jeszcze w 1900 roku nie było to wiadome, a pytanie o to uogólnienie znalazło się na stworzonej przez Davida Hilberta liście 23 problemów istotnych dla rozwoju matematyki. Czytelnika zainteresowanego tym zagadnieniem odsyłam do artykułu Marka Kordosa z  $\Delta_{08}^8$ .

Zwróćmy uwagę na to, że podczas dowodzenia nie szczędziliśmy nożyczek. Można na to zagadnienie spojrzeć właśnie przez pryzmat szukania minimalnej liczby cięć. Niemal 50 lat temu w *Delcie*  $\Delta_{75}^4$  pojawił się na ten temat artykuł autorstwa Alfreda Tarskiego. Jest to bardzo ciekawy tekst, który polecam wszystkim lubiącym wycinanki Czytelnikom.

## Klub 44 M

$$\otimes \sqrt{\sum f!} = 44$$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2025

### Zadania z matematyki nr 897, 898

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**897.** Czworokąt wypukły  $ABCD$  ma obwód długości  $p$  oraz przekątne długości  $m$  i  $n$ . Punkt  $E$  jest czwartym wierzchołkiem równoległoboku  $ABCE$ . Udowodnić, że  $DE \leq p - m - n$ .

**898.** Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych  $m, n \geq 1$ , dla których wielomian  $W(x) = x^m + x^n + 1$  jest podzielny przez trójmian  $T(x) = x^2 + x + 1$ .

Zadanie 898 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

### Rozwiązań zadania z numeru 11/2024

Przypominamy treść zadań:

**889.** Ciąg  $(a_1, \dots, a_N)$ , długości  $N$ , ma wyrazy  $a_k \in \{2, 3, 5\}$ , z sumą  $a_1 + \dots + a_N = A$ . Niech  $b_k = a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}$  (gdzie, cyklicznie,  $a_{N+i} = a_i$ ). Zakładamy, że każda z liczb  $b_1, \dots, b_N$  dzieli się przez 30. Przyjmując jako znane wartości  $N, A$  (dla których istnieje co najmniej jeden ciąg  $(a_k)$  o podanych własnościach) wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy  $B = b_1 + \dots + b_N$ .

**890.** W czworokącie wypukłym  $ABCD$  przekątne przecinają się w punkcie  $P$ ; boki  $BC$  i  $DA$  nie są równoległe, a ich symetryczne przecinają się w punkcie  $Q$  (różnym od  $P$ ), leżącym wewnętrz czworokąta. Trójkąty  $BQC$  i  $DQA$  są podobne. Udowodnić, że prosta  $PQ$  zawiera dwusieczne kątów  $APB$  i  $CPD$ .

**889.** Podzielność  $30|b_k$  oznacza, że w każdej czwórce kolejnych wyrazów  $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$  są obecne liczby 2, 3, 5 oraz – powtórnie – jeszcze jedna z nich; nazwijmy ją  $c_k$ . Wówczas  $b_k = 30c_k$ , zaś  $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} = 10 + c_k$ .

Stąd

$$B = \sum_{k=1}^N b_k = 30 \sum_{k=1}^N c_k = 30 \sum_{k=1}^N (a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} - 10) = 30(4A - 10N).$$

Jest to jedyna możliwa wartość sumy  $B$ .

**890.** Z określenia  $Q$  wynika, że trójkąty podobne  $BQC$  i  $DQA$  są równoramienne:  $QB = QC, QD = QA$ . Oznaczmy  $\angle QBC = \angle QCB = \angle QAD = \angle QDA = \alpha$ . Niech  $R$  będzie drugim (poza  $Q$ ) punktem przecięcia okręgów opisanych na tych trójkątach. Przyjmijmy (b.s.o.), że proste  $BC$  i  $DA$  przecinają się w punkcie leżącym na półprostych  $BC^\rightarrow$  i  $AD^\rightarrow$ ; wówczas punkt  $R$  leży w obszarze kąta wypukłego  $CQD$  (nie jest możliwe, by punkt  $C$  lub  $D$  leżał na „krótkim” łuku  $QR$  jednego z rozważanych okręgów, bo to by się kłociło z wypukłością czworokąta  $ABCD$ ). Mamy więc konfigurację, jak na rysunku.

W okręgach  $BQC$  i  $DQA$  widzimy kąty wpisane:

$$\begin{aligned} \angle BRQ &= \angle BCQ = \alpha, & \angle CRQ &= \pi - \angle CBQ = \pi - \alpha, \\ \angle ARQ &= \angle ADQ = \alpha, & \angle DRQ &= \pi - \angle DAQ = \pi - \alpha. \end{aligned}$$

Z pierwszej i czwartej równości wynika, że punkt  $R$  leży na odcinku  $BD$ ; zaś z drugiej i trzeciej – że  $R$  leży na odcinku  $AC$ . To znaczy, że  $R$  jest punktem  $P$  z treści zadania. Równości pierwsza z trzecią pokazują, że prosta  $QR$  połowi kąt  $ARB$ ; zaś druga z czwartą – że ta prosta połowi kąt  $CRD$ . Zauważwszy, że  $R = P$ , mamy to, co należało udowodnić.

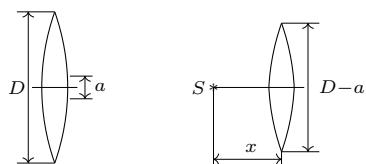
Inna metoda (szkic): stosujemy inwersję o środku  $Q$  (i dowolnie ustalonym promieniu dodatnim). Półproste  $QA^\rightarrow, QB^\rightarrow, QC^\rightarrow, QD^\rightarrow, QP^\rightarrow$  przechodzą każda na siebie. Obrazami punktów  $A, B, C, D, P$  są punkty, które oznaczymy  $A^*, B^*, C^*, D^*, P^*$ , leżące odpowiednio na tych półprostych. W mocy pozostają równości  $QB^* = QC^*, QD^* = QA^*$ . Obrazem prostej  $AC$  jest okrąg  $QA^*C^*$ , zaś prostej  $BD$  – okrąg  $QB^*D^*$  (każdy z nich z usuniętym punktem  $Q$ ). Punkt  $P^*$  leży na obu okręgach.

Mamy udowodnić, że prosta  $QP$  tworzy równe kąty z prostymi  $AC$  i  $BD$ . Inwersja zachowuje równość kątów, więc wystarczy wykazać, że prosta  $QP^*$  tworzy równe kąty z okręgami  $QA^*C^*$  i  $QD^*B^*$ . Ponieważ  $\angle B^*QC^* = \angle D^*QA^* =: \varphi$ , obrót o kąt  $\varphi$  wokół  $Q$  przenosi trójkąt  $QA^*C^*$  na trójkąt  $QD^*B^*$ . Zatem te trójkąty są przystające – okręgi na nich opisane też są przystające – są więc symetryczne względem wspólnej cięciwy  $QP^*$ . Stąd wymagana równość kątów i teza zadania.

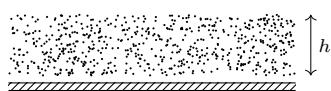
# Klub 44 F



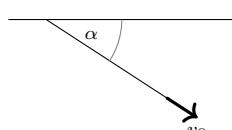
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2025



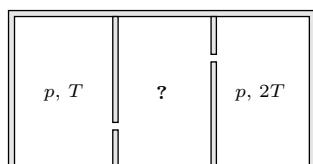
Rys. 1



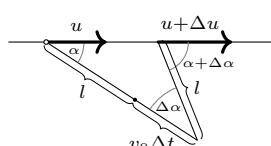
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

$N = 2\alpha p_x / \sqrt{T_x}$ , gdzie  $p_x$  jest szukanym ciśnieniem, a  $T_x$  temperaturą w środkowym naczyniu. Podstawiając otrzymane wyrażenia do (2), otrzymujemy równanie:

$$(3) \quad p/\sqrt{T} + p/\sqrt{2T} = 2p_x/\sqrt{T_x}.$$

W stanie równowagi nie zmienia się również całkowita energia cząsteczek w środkowym pojemniku. Średnia

## Zadania z fizyki nr 794, 795

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**794.** Z soczewki skupiającej o ogniskowej  $f = 50$  cm i średnicy  $D = 5$  cm wycięto środkowy pasek o szerokości 5 mm, a pozostałe części złożono ze sobą (rys. 1). W odległości  $x = 75$  cm od soczewki umieszczone punktowe źródło światła monochromatycznego  $S$ . Korzystając z przybliżenia małych kątów, znaleźć maksymalną liczbę prążków obrazu interferencyjnego, jaka może powstać na ekranie za soczewką. Długość fali świetlnej  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  m.

**795.** Izolowaną metalową początkowo nienalożoną płytka oświetlano w czasie  $\tau$  światłem nadfioletowym. W wyniku tego z płytki wyleciała chmura elektronów, których prędkość początkowa była prostopadła do płytki i miała wartość  $v_0$ . Całkowita liczba elektronów, które wyleciały z jednostki powierzchni, wynosi  $n$ , elektron ma ładunek  $e$  i masę  $m$ . Znaleźć grubość chmury  $h$  po czasie  $t$  od zakończenia naświetlania (rys. 2).

## Rozwiązań zadania z numeru 11/2024

Przypominamy treść zadania:

**786.** Koralik o masie  $M$  może ślizgać się bez tarcia po prostym poziomym pręcie. Do koralika przywiązaną jest lekka nieroziągliva nitka o długości  $l$ . Nitkę ciągniemy za swobodny koniec tak, że jego prędkość przez cały czas skierowana jest wzdłuż nitki i ma wartość  $v_0$  (rys. 3). Jaka sila ciągniemy w chwili, gdy nitka tworzy z prętem kąt  $\alpha$ ? Podczas ruchu nitka znajduje się w płaszczyźnie poziomej.

**787.** Nieprzewodzące ciepła naczynie połączone jest za pomocą dwóch małych jednakowych otworów z dwoma pojemnikami zawierającymi hel w stanie gazowym (rys. 4). W obu pojemnikach podtrzymywane jest jednakowe ciśnienie  $p$ , w jednym z nich podtrzymywana jest temperatura  $T$ , w drugim  $2T$ . Znaleźć ciśnienie i temperaturę w środkowym naczyniu w stanie równowagi.

**786.** Nić jest nieroziągliva, zatem prędkości wszystkich jej punktów w danej chwili są jednakowe. Gdy kąt między nitką a prętem wynosi  $\alpha$ , prędkość koralika jest równa  $u = v_0/\cos \alpha$ . Jego przyspieszenie:

$$(1) \quad a = du/dt = u \tan \alpha (d\alpha/dt).$$

W małym przedziale czasowym  $\Delta t$  koralik przebywa drogę  $u\Delta t$ , koniec nici przemieszcza się o  $v_0\Delta t$  (rys. 5). Zgodnie z twierdzeniem sinusów  $u\Delta t/\sin(\Delta\alpha) = l/\sin \alpha$ . Uwzględniając, że kąt  $\Delta\alpha$  jest mały, otrzymujemy  $d\alpha/dt = u \sin \alpha/l$  i zgodnie z (1)  $a = (v_0 \sin \alpha)^2/(l \cos^3 \alpha)$ . Szukana siła, jaką ciągniemy koralik, dana jest wzorem:

$$F = Ma/\cos \alpha = M(v_0 \sin \alpha)^2/(l \cos^4 \alpha).$$

**787.** W stanie równowagi liczba cząsteczek w środkowym naczyniu nie zmienia się, czyli liczby cząsteczek wpadających do tego naczynia w jednostce czasu z lewej i prawej strony oraz opuszczających je są sobie równe:

$$(2) \quad N_1 + N_2 = N.$$

$N_1$  jest proporcjonalne do liczby cząsteczek w jednostce objętości  $n_1$  w lewym naczyniu oraz do średniej prędkości ich ruchu cieplnego  $v_1$ , która z kolei jest proporcjonalna do  $\sqrt{T}$ . Z równania Clapeyrone  $n_1 \sim p/T$ , zatem  $N_1 = \alpha p/\sqrt{T}$ ,  $\alpha$  to współczynnik proporcjonalności. Analogicznie  $N_2 = \alpha p/\sqrt{2T}$ ,

energia przypadająca na cząsteczkę jest proporcjonalna do temperatury, zatem  $N_1 T + N_2 2T = 2NT_x$ ,

$$(4) \quad p\sqrt{T} + p\sqrt{2T} = 2p_x\sqrt{T_x}.$$

Rozwiązuje układ równań (3), (4), otrzymujemy:

$$T_x = T\sqrt{2}, \quad p_x = p(\sqrt{2} + 1)/2\sqrt[4]{2}.$$

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M lub Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

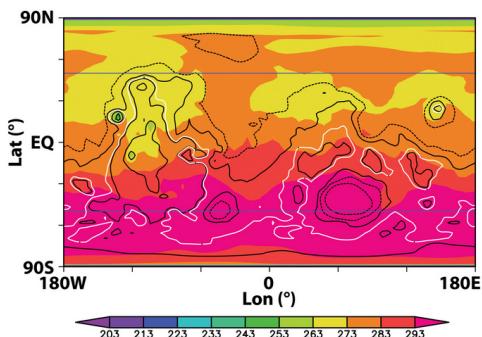


Terraformacja Marsa to nie tylko tytuł popularnej gry planszowej, ale też zagadnienie naukowe, nad którym na serio głowi się wielu naukowców. Pomyśłów na to, jak globalnie wpłynąć na warunki panujące na Czerwonej Planecie i zmienić je na bardziej sprzyjające dla ludzi, jest wiele. Niektóre są przerażające – jak bombardowanie lodowych czap Marsa głowicami nuklearnymi (metoda, która zresztą prawdopodobnie dałaby odwrotny efekt do założonego). Inne są trochę mniej wybuchowe, np. wprowadzenie do atmosfery Marsa dużych ilości amoniaku lub metanu, które miałyby wywołać „efekt cieplarniany” na planecie. Jeszcze inne zakładają instalację luster na orbicie Marsa, które odbijałyby promienie słoneczne i kierowały je w stronę Marsa, ocieplając w ten sposób planetę. Jest jednak jeden zasadniczy problem z wszystkimi tymi metodami – wymagają dostarczania ogromnej ilości surowców z Ziemi na Marsa, co oczywiście byłoby niewyobrażalnie kosztowne. Idealna metoda terraformacji Marsa powinna więc wykorzystywać surowce dostępne na Czerwonej Planecie.

Problemem, jakim trzeba się zająć w pierwszej kolejności, jest ogrzanie planety. Średnia temperatura przy powierzchni Marsa to  $-65^{\circ}\text{C}$ . Ale temperatury na Marsie nie zawsze są tak niskie. Marsjański łazik *Perseverance* zarejestrował temperatury powietrza przy powierzchni w przedziale od całkiem znośnych  $-13^{\circ}\text{C}$  do zabójczych  $-83^{\circ}\text{C}$ . Takie temperatury nie są spowodowane tylko większą odległością Marsa niż Ziemi od Słońca. Większość ciepła, jakie dociera do Marsa, „ucieka” z planety w przestrzeń kosmiczną, ponieważ jego atmosfera jest zbyt cienka, aby to ciepło zatrzymać, tak jak ma to miejsce

na Ziemi. Ocieplenie Marsa tylko o około  $28^{\circ}\text{C}$  mogłoby rozpoczęć roztapianie znajdującego się na planecie lodu i umożliwienie rozkwitu życia mikrobiologicznego.

Musimy więc zrobić dokładnie to, z czym w tym momencie walczymy na Ziemi. Wprowadzić do atmosfery Marsa substancje, które rozpoczną na nim efekt cieplarniany na ogromną skalę. Taką właśnie metodę zaproponowali naukowcy z University of Chicago, Northwestern University w Illinois i University of Central Florida. Udowodnili oni, że „zanieczyszczenie” atmosfery Marsa pyłem składającym się z żelaza lub aluminium wydobytych ze skał na Marsie mogłoby ogrzać planetę o około  $30^{\circ}\text{C}$  (patrz rysunek) w czasie od kilku miesięcy do nawet ponad dekady, w zależności od tego, jak szybko cząstki metali byłyby uwalniane.



Spodziewane temperatury w cieplzych porach roku (w skali Kelvina, kolorowe cieniowanie) na Marsie po dodaniu  $160 \text{ mg/m}^2$  nanocząstek (brokatu) aluminium do atmosfery. Kolory skali reprezentują temperatury z przedziału  $-70^{\circ}\text{C}$  do  $\sim 20^{\circ}\text{C}$ .

Źródło: Samaneh Ansari et al. 2024, *Science Advances*, Vol. 10, Issue 32

Taki pył żelaza i aluminium musiałby się składać z cząstek o rozmiarach około 9 mikrometrów długości i 160 nanometrów średnicy. Czyli byłyby one niewiele mniejsze od... brokatu. „Brokat” ten byłby rozpylany na powierzchni Marsa i przenoszony przez wiatr do górnej części atmosfery Czerwonej Planety. Po uniesieniu do atmosfery „brokat” marsjański osiąałby znacznie wolniej niż standardowy pył marsjański, co oznaczałoby, że pozostałby w atmosferze Marsa przez długi czas. Według badań około dekady, zatrzymując ciepło z powierzchni i przepuszczając światło słoneczne. Oczywiście nadal potrzebne byłyby miliony ton brokatu, który trzeba by wyprodukować na Marsie z dostępnych tam surowców, ale według szacunków naukowców metoda ta byłaby około 5000 razy bardziej efektywna (pod względem ocieplenia na jednostkę masy koniecznego materiału) niż pozostałe metody. A to znacznie zwiększa wykonalność projektu.

Oczywiście po takim zabiegu na Marsie wciąż nie będzie wystarczająco dużo tlenu, by ludzie mogli na nim przeżyć bez wspomagania. Ale za to będzie ciepło... i błyszcząco.

Anna DURKALEC

Na podstawie artykułu: Samaneh Ansari, Edwin S. Kite, Ramses Ramirez et al., 2024, „Feasibility of keeping Mars warm with nanoparticles”, *Science Advances*, Vol. 10, Issue 32.

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



W trzecim miesiącu roku Słońce kontynuuje szybką wspinaczkę na północ, i ostatniego dnia miesiąca w środkowej Polsce przecina południk lokalny już na wysokości  $42^{\circ}$ . Po drodze 20 marca Słońce przeniesie się na północną część nieba i tym samym na naszej półkuli zacznie się astronomiczna wiosna. W nocy z 29 na 30 marca nastąpi zmiana czasu na letni.

Na początku miesiąca warto zwrócić uwagę na pierwsze dwie planety Układu Słonecznego oraz wysoko wspinający się Księżyc w fazie rosnącej najpierw do I kwadry, a następnie do pełni. Merkury 8 dnia miesiąca osiągnie maksymalną elongację wschodnią. Niestety oddali się wtedy od Słońca na jedynie  $18^{\circ}$ . Mimo to przy przejrzystym niebie da się go całkiem łatwo dostrzec o zmierzchu nisko nad zachodnim horyzontem. Godzinę po zachodzie Słońca planeta zajmie pozycję na wysokości około  $6^{\circ}$ . Niestety Merkury szybko zginie w zorzy wieczornej i już w drugiej połowie miesiąca stanie się niewidoczny. W tym czasie jego tarcza zwiększy średnicę kątową z  $6''$  do  $9''$ , zmniejszając przy tym jasność z  $-1^m$  do  $+1,5^m$  i fazę z 73% do 16%.

Odnalezienie Merkurego ułatwi Wenus, która 23 marca przejdzie przez koniunkcję dolną ze Słońcem. Na początku miesiąca Wenus nadal jest widoczna bardzo dobrze, wznosząc się około godziny 18:30 na wysokość  $20^{\circ}$  nad zachodnią częścią nieboskłonu, jednak szybko wraz z Merkurem przeniesie się na niebo poranne. Niestety rano wiosną ekiptyka jest nachylona niekorzystnie, i trzeba czekać aż do czerwca na poprawę warunków obserwacyjnych tej planety. W pierwszej połowie marca Wenus szybko zwiększy średnicę swojej tarczy z  $49''$  do  $58''$ , zmniejszy jednak blask z  $-4,6^m$  do  $-4,2^m$  i fazę z 16% do 3%. Jest zatem bardzo dobrym celem dla posiadaczy nawet niedużych lornetek, które pokażą jej wyraźny cienki sierp. 1 marca Merkurego należy szukać  $15^{\circ}$  od Wenus, prawie dokładnie w dół od niej. Jednocześnie  $5^{\circ}$  bliżej i trochę bardziej w lewo pokaże się Księżyc w fazie 4%. W kolejnych dniach Merkury zbliży się do Wenus, docierając doń 12 dnia miesiąca na odległość  $5,5^{\circ}$ . 2 marca Księżyc zwiększy fazę do 9%, przenosząc się na odległość  $10^{\circ}$  na godzinie 10 względem Wenus.

Srebrny Glob powędruje dalej, i 5 marca zakryje Plejady, znaną gromadę otwartą gwiazd w Byku. Niestety w Europie do zakrycia dojdzie w dzień. U nas wieczorem oba ciała niebieskie oddzielają na niebie  $2^{\circ}$ . Księżyc pokaże tarczę oświetloną w 40%, by następnej doby przejść przez I kwadrę. Jednocześnie zajmie pozycję w odległości  $6^{\circ}$  od Jowisza. Największa planeta Układu Słonecznego zachodzi po godzinie 1 i na początku nocy jest widoczna bardzo dobrze. W tym miesiącu jasność planety spadnie do  $-2,1^m$ , a jej tarcza skurczy się do  $36''$ .

14 dnia miesiąca rano naszego czasu Księżyc przejdzie przez pełnię, wędrując na pograniczu gwiazdozbiorów Lwa i Panny. Do tego czasu 8 i 9 marca odwiedzi on Marsa oraz Kastora i Polluksa. Czerwona Planeta szybko oddala się od nas i do końca miesiąca jej jasność spadnie do  $+0,4^m$ , a średnica tarczy do  $8''$ . W teleskopach wyraźnie widoczna jest faza tarczy, wynosząca 90%. 9 marca około godziny 3 Księżyc zbliży

się do Marsa na mniej niż  $1^{\circ}$ ,  $6^{\circ}$  nad nim zaś znajdą się Kastor z Polluksem.

Marcowa pełnia jest szczególna, ponieważ dojdzie wtedy do całkowitego zaćmienia Księżyca. I jest to całkiem długie zjawisko, gdyż trzy dni później Srebrny Glob przejdzie przez apogeam swojej orbity i faza całkowita potrwa ponad 218 minut. Niestety Europa ponownie ma pecha. Całe zjawisko da się zaobserwować z obu Ameryk i oblewających je oceanów. W Polsce zaćmienie częściowe zacznie się w okolicach zachodu Księżyca.

W kolejnych nocach naturalny satelita Ziemi powędruje ku ostatniej kwadrze, przez którą przejdzie 22 marca, zbliżając się jednocześnie coraz bardziej do horyzontu. Warto w tym okresie wspomnieć o spotkaniu Księżyca w fazie 93% ze Spiką, najjaśniejszą gwiazdą Panny, 17 marca i spotkaniu z Antaresem 20 i 21 dnia miesiąca. Za każdym razem Księżycomi zabraknie do najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona po około  $5^{\circ}$ , a jego faza przekroczy najpierw 70%, a potem 60%. 20 marca nad ranem Księżyca zakryje gwiazdę 3. wielkości  $\pi$  Sco. Gwiazda zniknie za księżycową tarczą około godziny 1:50 i pokaże się przy ciemnym brzegu około godzinę później.

Jak już wspomniałem, rano droga Słońca po niebie jest nachylona niekorzystnie, a do tego Księżyca znajduje się głęboko pod ekiptyką, stąd przed nowiem wschodzi on niewiele przed Słońcem i nie wznosi się wyżej niż kilkanaście stopni ponad widnokrąg. Nawet w dzień trudno go dostrzec przez grube warstwy naszej atmosfery. Tym razem warto jednak czekać na ów Księżyc 29 marca, gdyż tego dnia dojdzie do częściowego zaćmienia Słońca. Maksymalną, wynoszącą 94% fazę zjawiska da się zaobserwować o świcie gdzieś z labradorskiego wybrzeża Zatoki Hudsona w Kanadzie. W Polsce zjawisko potrwa od mniej więcej 11:45 do 13:00 (jeszcze czasu zimowego), a faza maksymalna wyniesie od 9% w Bieszczadach do 26% w Świnoujściu. Księżyca zakryje północną część tarczy słonecznej.

Ariel MAJCHER

# Rozwiązania zadań ze strony 13

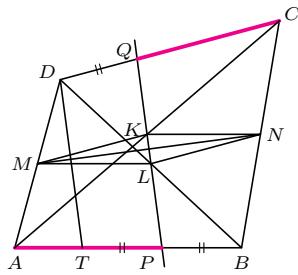


## Rozwiązanie zadania M 1810.

Zauważmy, że każda wieża atakuje łącznie 15 pól: 7 pól w kolumnie i 7 pól w rzędzie, w którym stoi, plus pole, na którym stoi. Wybierzmy dowolnie wieżę  $A$  stojącą na polu  $a$ . Atakowane przez  $A$  pola (poza  $a$ ) połączymy w pary w następujący sposób: dla każdej wieży  $B$  stojącej na polu  $b \neq a$  parujemy pola  $(c, d)$  atakowane jednocześnie przez  $A$  i  $B$ . Zauważmy, że w ramach każdej takiej pary: albo oba pola  $c$  i  $d$  należą połowicznie do  $A$  (jeśli  $a, b, c$  i  $d$  tworzą kwadrat), albo dokładnie jedno z nich należy w całości do  $A$ , a drugie do  $B$  (w przeciwnym przypadku). W rezultacie każda wieża posiada w sumie 8 pól: pole, na którym stoi, i połowę z pozostałych 14 pól.



## Rozwiązanie zadania M 1811.



Niech  $K$  i  $L$  będą środkami, odpowiednio, przekątnych  $AC$  i  $BD$ . Wtedy  $KN$  i  $LM$  są odpowiednio liniami środkowymi trójkątów  $ABC$  i  $ABD$ . Zatem czworokąt  $MKNL$  jest równoległobokiem.

Ponadto z równości  $AB = CD$  wynika, że  $NK = NL$ , czyli  $MKNL$  jest rombem. W szczególności punkty  $K$  i  $L$  leżą na symetralnej odcinka  $MN$ , czyli na prostej  $PQ$ . Dodatkowo  $\angle APQ = \angle NKL = \angle NLK = \angle DQP$ .

Poprowadźmy prostą równoległą do  $PQ$  przechodzącą przez punkt  $D$ . Niech  $T$  będzie punktem przecięcia tej prostej z prostą  $AB$ . Z twierdzenia Talesa łatwo dostajemy, że  $BP = PT$ . Ponadto  $TPQD$  jest trapezem o równych kątach przy wierzchołkach  $P$  i  $Q$ , czyli jest trapezem równoramennym. W szczególności  $QD = PT = BP$ , skąd  $AP = CQ$ .



## Rozwiązanie zadania M 1812.

Odpowiedź:  $f(x) \equiv 0$ ,  $f(x) = x$ .

Kładąc  $y = 0$ , dostajemy, że  $f(0) = 0$ . Jeśli  $f(x_0) = 0$  dla pewnego  $x_0 \neq 0$ , to kładąc  $x = x_0$ , dostaniemy, że  $yf(x_0(y+1)) = 0$  dla dowolnego  $y \in \mathbb{R}$ , więc  $f \equiv 0$  – i jest to pierwsze rozwiązanie równania.

Załóżmy teraz, że  $f(x) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = 0$ . Przypuśćmy, że dla pewnej liczby rzeczywistej  $a \neq 0$  mamy  $f(a) \neq a$ . Położmy  $x = a$  i  $y = \frac{a}{f(a)-a}$ , wtedy

$$\frac{f(a)}{f(a)-a} \cdot f\left(\frac{af(a)}{f(a)-a}\right) = \frac{a}{f(a)-a} \cdot f\left(\frac{af(a)}{f(a)-a}\right).$$

Zauważmy jednak, że  $f\left(\frac{af(a)}{f(a)-a}\right) \neq 0$ , gdyż  $\frac{af(a)}{f(a)-a} \neq 0$ , zatem dzieląc obie strony powyższej równości przez  $f\left(\frac{af(a)}{f(a)-a}\right)$ , dostajemy równość

$$\frac{f(a)}{f(a)-a} = \frac{a}{f(a)-a},$$

z której oczywiście wynika, że  $f(a) = a$  – sprzeczność z założeniem. Wobec tego  $f$  jest identycznością.



## Rozwiązanie zadania F 1115.

Pod wpływem pola elektrycznego  $\vec{E}(\vec{R})$  ładunku  $q$  następuje polaryzacja ładunków kulki nienalaadowanej i indukuje się w niej dipolowy moment elektryczny  $\vec{d}$  (wektor  $\vec{d}$  ma zwrot od ujemnego do dodatniego ładunku dipola) wartości proporcjonalnej do pola  $\vec{d} \propto \vec{E}(\vec{R})$ . Energia potencjalna  $U$  dipola umieszczonego w polu elektrycznym wynosi:  $U = -\vec{d} \cdot \vec{E}$ , a siła  $\vec{F}$  działająca na dipol równa jest minus gradient energii potencjalnej  $U$ :  $\vec{F} = -\nabla U$ . Wektor  $\vec{R}$ , pole  $\vec{E}(\vec{R})$  oraz wektor  $\vec{d}$  są równoległe i zwrócone od dodatniego ładunku  $q$  – w takim przypadku problem staje się jednowymiarowy i gradient można zastąpić zwykłym różniczkowaniem względem  $R$ . Mamy więc:

$$\vec{E} \propto \frac{q\vec{R}}{R^3}; \quad \vec{d} = \alpha \vec{E}; \quad U = -\alpha E^2 \propto -\frac{q^2}{R^4},$$

a więc

$$F \propto \frac{d}{dR} \left( \frac{q^2}{R^4} \right) \propto -\frac{q^2}{R^5}.$$

Po  $k$ -krotnym zwiększeniu odległości między kulkami sila ich oddziaływanie nie zmieni się, jeśli  $Q^2 = qk^5$ , czyli:

$$Q = k^{5/2} = k^2 \sqrt{k}.$$

Niezależnie od znaku ładunku  $q$  ( $Q$ ) kulki się przyciągają.



## Rozwiązanie zadania F 1116.

Rozchodzenie się dźwięku w gazie polega na propagacji zgęszczeń i rozrzedzeń gazu. Taka propagacja jest możliwa, gdy długość fali  $\lambda$  jest większa od średniej odległości pokonywanej przez cząsteczki gazu między kolejnymi zderzeniami w ich ruchu termicznym. Oznacza to, że fale o długościach mniejszych od średniej drogi swobodnej  $l$  cząsteczek są silnie tłumione. Oszacujmy wartość średniej drogi swobodnej w gazie o gęstości  $n$  (liczba cząsteczek w  $1 \text{ m}^3$  gazu), gdy średnica cząsteczek wynosi  $d$  (przyjmujemy, że cząsteczki są w przybliżeniu kuliste):

$$l \sim \frac{1}{\pi d^2 n}$$

– zderzenie następuje, gdy środki cząsteczek znajdują się w odległości mniejszej niż  $d$ . W powietrzu, w warunkach normalnych  $l \approx 7 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ , co odpowiada częstości dźwięku  $f \approx 5 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ .



## John von Neumann, mucha i szereg geometryczny

Bartłomiej BZDĘGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Jubileuszowy kącik zobowiązuje do czegoś wyjątkowego.

W biografii Johna von Neumanna [\*] można znaleźć anegdotę związaną z następującym zadaniem i jego dwoma rozwiązaniami.

**Zadanie.** Dwaj rowerzyści znajdują się na tej samej drodze w odległości 20 km i zmierzają w swoim kierunku, każdy z prędkością 10 km/h. Mucha startująca od jednego rowerzysty leci w kierunku drugiego z prędkością 15 km/h. Po dotarciu do niego mucha zawraca i kontynuuje lot w kierunku pierwszego, i tak dalej. Ile kilometrów przebędzie mucha, zanim rowerzyści się spotkają?

W obu rozwiązaniach przyjmiemy, jak to się zwykle czyni, że mucha i rowerzyści są punktami materialnymi, choć dla tych drugich jest to nieco trudniejsze. Będziemy również wyrażać drogę, czas i szybkość zawsze w – odpowiednio – kilometrach, godzinach i kilometrach na godzinę.

*Pierwszy sposób* jest bardzo naturalny – będziemy sumowali długości  $a_1, a_2, a_3, \dots$  kolejnych odcinków, które przebywa mucha pomiędzy „odbiciami” od rowerzystów. Przez  $A, B, M$  oznaczymy (zmieniające się) położenia rowerzystów oraz muchy. Założymy, że w pewnej chwili mucha wyrusza na  $n$ -ty odcinek swej drogi, ruszając od rowerzysty  $A$ , i przyjmijmy  $s := |MB| = |AB|$ . Suma prędkości  $M$  i  $B$  wynosi 25, spotkanie  $M$  i  $B$  nastąpi zatem po czasie  $s/25$ . Wtedy  $M$  przebędzie drogę  $a_n = 15 \cdot s/25 = 3s/5$  (dla pewnego  $n$ ), a odległość  $|AB|$  spadnie do  $s' = s/5$ . Analogicznie obliczając, otrzymamy  $a_{n+1} = 3s'/5 = a_n/5$ , mamy więc do czynienia z ciągiem geometrycznym o ilorazie  $q = 1/5$ . Ponieważ  $a_1 = 3 \cdot 20/5 = 12$ , wystarczy skorzystać ze wzoru na sumę zbieżnego ciągu geometrycznego, by otrzymać  $S = \frac{a_1}{1-q} = 15$ .

*Drugi sposób* polega na wykorzystaniu sztuczki. Mucha leci ze stałą szybkością 15 km/h aż do spotkania rowerzystów, które nastąpi po godzinie. Wynika z tego, że mucha przebędzie 15 kilometrów.

Według autora biografii John von Neumann po usłyszeniu tego zadania natychmiast udzielił prawidłowej odpowiedzi. To bardzo rozczałało rozmówcę, który burknął pod nosem, że von Neumann znał sztuczkę już wcześniej i dlatego rozwiązał zadanie tak szybko. Ten zaś odpowiedział, że nie użył żadnej sztuczki, tylko zsumował wyrazy ciągu geometrycznego... Nie można wykluczyć, że była to prawda, biorąc pod uwagę to, jakim błyskotliwym rachmistrzem był John von Neumann. Wiemy jednak, że charakteryzowała go również wesołość i poczucie humoru, więc również dobrze mógł być to niezwykle rzecznny żart.

Tu muszę wrócić z gorliwością telemarketyta: uwaga na tanie podróbki! Różne wersje tej anegdoty krążą po Internecie. Trolle nie śpią! W mojej ulubionej (na pewnym portalu matematycznym, którego nazwę pominę) zamiast Johna von Neumanna występuje Leonhard Euler, a zamiast rowerów są pociągi; tylko mucha się zgadza – i lata, aż zostanie zmiażdżona w imięcie zderzających się lokomotyw. A teraz uwaga: pociągi są odległe od siebie o 60 km

i poruszają się z szybkością 60 km/h, a mucha – 20 km/h.

Gdy Euler żył, pociągi poruszały się raczej z chybią dryfu kontynentalnego (niektóre połączenia w Polsce do dziś trzymają się tej tradycji). *Musca domestica* osiąga 8 km/h, więc mucha z zadania była pewnie nieco poddenerwowana perspektywą całej tej zabawy, skoro wycisnęła 250% normy. Któz by nie był? Jednak tylko ona wyjdzie z tego cało!

Zwróćmy uwagę, że mucha porusza się wolniej niż pociąg, więc nie zdąży dolecieć na czas do miejsca zderzenia. A co do przedstawionych wyżej rozwiązań – *pierwszy sposób* będzie nieskuteczny, gdyż mucha nie odbije się od drugiego pociągu; *drugi sposób* da nam odpowiedź, że do momentu zderzenia pociągów mucha przebędzie 10 km.

Matematycy kochają obliczanie różnych rzeczy na dwa sposoby – często przynosi to jakieś korzyści. Tu mamy dwa istotnie różne rozwiązania tego samego zadania.

Przypuśćmy, że rowerzyści  $A$  i  $B$  znajdują się w odległości  $s$  i każdy z nich porusza się w stronę drugiego z szybkością  $v$  – spotkają się wówczas po czasie  $\frac{s}{2v}$ . Mucha zaczyna podróż z ramienia rowerzysty  $A$  i porusza się w kierunku czoła rowerzysty  $B$  z szybkością  $V > v$ .

Według *drugiego sposobu* mucha do momentu spotkania rowerzystów przebędzie dystans  $S = \frac{sV}{2v}$ .

W *pierwszym sposobie* otrzymamy  $a_1 = \frac{sV}{V+v}$  oraz  $q = \frac{V-v}{V+v}$ . Porównajmy te wyniki:  $\frac{a_1}{S} = \frac{2v}{V+v} = 1-q$ , wobec czego  $S = \frac{a_1}{1-q}$ . Wygląda znajomo? Oczywiście! Otrzymaliśmy przecież równość

$$(G) \quad a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots = S = \frac{a_1}{1-q},$$

czyli właśnie wyprowadziliśmy w prostoliniowy (a może prostoliniowy) sposób wzór na sumę nieskończonego, zbieżnego szeregu geometrycznego o ilorazie  $q \in (0, 1)$ .

Wzór (G) tradycyjnie wyprowadza się za pomocą obliczenia odpowiedniej granicy:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{1 - q},$$

czyli w istocie wykorzystujemy fakt, że  $q^n \rightarrow 0$ , gdy  $|q| < 1$ . W metodzie „fizycznej” obywamy się bez tego! Jest tylko jedna granica, ukryta w definicji

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k \right).$$

Tej nie da się pominać.

I tylko nikomu nie żał biednej muchy, której po tych karkołomnych eksperymentach potężnie zakręci się w głowie...

[\*] Norman Macrae, *John von Neumann: The Scientific Genius who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence, and Much More*, 1992

# NA WYDZIAŁE FIZYKI UW

nie tylko zdobędziesz wiedzę, poćwiczysz abstrakcyjne myślenie, ale też rozwiniesz kompetencje społeczne, uczestnicząc w zespołowych projektach studenckich.

- „Sensory 3D-drukowane”
- „Punktualność komunikacji miejskiej w Warszawie”
- „Dynamika kontaktowa na wstęźce Moebiusa”
- „Obliczenia na komputerze kwantowym IBM QUANTUM - nierówność Bella”
- „Detektor mionów kosmicznych”
- „Ultracompact laser based on perovskite and organic layers deposited on a subwavelength grating”
- „Beyond Born-Oppenheimer corrections in ultra-cold Lithium collisions”
- „Symulacja Marsjańskiej Misji Kosmicznej w Tymczasowym Habitacie w ramach projektu RAF”

to przykłady projektów zrealizowanych przez naszych studentów.

## ZAPRASZAMY NA STUDIA!



**WYDZIAŁ  
FIZYKI**  
UNIWERSYTET  
WARSZAWSKI

### FIZYKA, I i II st.

cztery ścieżki kształcenia na I st.:

standardowa

indywidualna - dostępna dla studentów, którzy uzyskali co najmniej 90 punktów rekrutacyjnych  
fizyka medyczna  
neuroinformatyka

**NAUCZANIE FIZYKI**, I st.

**ASTRONOMIA**, I i II st.

**BIOFIZYKA**, I st.

**NANOINŻYNIERIA**, I i II st.

**EUROPEJSKIE STUDIA**

**OPTYKI OKULAROWEJ**

**I OPTOMETRII**, I st.

**ENERGETYKA JĄDROWA**, I st.

**OPTOMETRIA**, II st.

**ZASTOSOWANIA FIZYKI  
W BIOLOGII I MEDYCYNIE**, II st.

trzy specjalności do wyboru:

biofizyka molekularna

fizyka medyczna

neuroinformatyka

**PHYSICS (STUDIES IN ENGLISH)**, II st.

**QUANTUM PHYSICS AND CHEMISTRY -  
INDIVIDUAL RESEARCH STUDIES**, II st.