Błędy kardynalne

W tabeli poniżej zamieszczone zostały najpoważniejsze błędy merytoryczne, zwane błędami kardynalnymi, które pojawiają się u uczniów podczas prac pisemnych. Ich pojawienie się wskazuje na absolutne nierozumienie przez danego ucznia narzędzi, które stosuje i brak absolutnych podstaw dotyczących omawianego zagadnienia. Oprócz wskazania konkretnego błędu umieszczona została również wersja poprawna wraz z wyjaśnieniem. Lista nie jest zamknięta ze względu na nieograniczoną pomysłowość niektórych uczniów.

Błąd	**Poprawna wersja/wyjaśnienie**
Stosowanie wzoru $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$	Nie ma wzoru na pierwiastek sumy (różnicy). Kontrprzykład: $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$, $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$
Stosowanie wzoru $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$	Nie ma wzoru na pierwiastek sumy (różnicy) kwadratów. Kontrprzykład: $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$, co nie jest równe $3+4=7$
Stosowanie wzoru $(a+b)^2=a^2+b^2$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Kontrprzykład: $(1+1)^2=2^2=4$, $1^2+1^2=1+1=2$
Stosowanie analogicznych błędnych wzorów jak powyżej typu: $(a\pm b)^3=a^3\pm b^3, (a-b)^2=a^2-b^2$, $(a\pm b)^n=a^n\pm b^n$	To samo co powyżej. Wzory skróconego mnożenia istnieją, ale wyglądają inaczej.
Stosowanie wzoru $\sqrt{x^2}=x$	$\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$. Kontrprzykład: $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$, a nie -3, co wynikałoby z niepoprawnego wzoru.
Stosowanie wzorów dotyczących tylko konkretnych figur w przypadku dowolnych figur (w szczególności wzorów dla trójkąta równobocznego do dowolnego trójkąta np. $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, h=\frac{a\sqrt{3}}{2}, r=\frac{1}{3}h, R=\frac{2}{3}h$)	Wzory są prawdziwe ale tylko dla trójkąta równobocznego. Ich stosowanie w dowolnym przypadku to tak jak liczenie pola trapezu przy użyciu wzoru na pole koła, bo to i to przecież pole.
Odpowiedzi pozbawione jakiegokolwiek logicznego sensu i niezgodne z kontekstem praktycznym, typu: podskoczył na 40 metrów, szedł z prędkością 100 km/h, babcia jest młodsza od wnuczki, ojciec ma 750 lat, rodzina składa się z $10\frac{2}{17}$ dziecka, syn ma 435 cm wzrostu, zjadł 200 pierogów na obiad, temperatura w akwarium wynosi -10°C, itd.	Podane zdania są absurdalne i w oczywisty sposób odpowiedzi są błędne. Uczeń musi zdawać sobie sprawę z tego co liczy.
Stosowaniu wzoru $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ i analogicznych dla pozostałych funkcji trygonometrycznych	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$. Kontrprzykład: $\sin(45^\circ+45^\circ)=\sin 90^\circ=1$, $\sin 45^\circ+\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$
Zapisywanie i obliczanie pierwiastka z liczby ujemnej np. $\sqrt{-4}$	W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki z ujemnych liczb nie istnieją, więc zapis nie ma żadnego sensu.
Pierwiastkowanie stronami równania (nierówności) typu $x^2-5x=4$	Równanie (nierówność) można spierwiastkować stronami, tylko gdy obie strony są nieujemne.
Podnoszenie stronami do kwadratu równania (nierówności) typu $x^2-5x=4$ by otrzymać równanie (nierówność) równoważne	Podnoszenie równania (nierówności) do kwadratu jest dozwolone, tylko gdy obie strony są nieujemne. Kontrprzykład: równanie $x=4$ ma jedno rozwiązanie. Po podniesieniu go do kwadratu mamy równanie $x^2=16$, które ma dwa rozwiązania (4 oraz -4), a więc otrzymane nowe równanie nie jest równoważne wyjściowemu. **Uwaga:** Wyjątek stanowią sytuacje, gdy nie potrzebujemy równania równoważnego, np. stosując metodę analizy starożytnych lub wyciągamy jedynie pewne wnioski.

Stosowanie twierdzenia Pitagorasa dla dowolnego trójkąta	Założenia tw. Pitagorasa jasno mówią, że można go użyć, gdy wiemy, że trójkąt jest prostokątny – w żadnym innym przypadku.
Prawdopodobieństwo ujemne lub większe od 1	Szansa jakiegoś zdarzenia (prawdopodobieństwo) mieści się zawsze w przedziale $[0, 1]$. Jeśli zdarzenie jest niemożliwe, to jest to 0%, a jeśli na pewno się zdarzy, to 100%, czyli 1.
Wartość funkcji sinus lub cosinus większa od 1 lub mniejsza od -1	Funkcje te przyjmują zawsze wartości jedynie z przedziału $[-1, 1]$, nigdy innych. Widać to chociażby na odpowiednich wykresach.
Stosowanie algorytmu rozwiązywania równań i nierówności z wartością bezwzględną typu $\|x\| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$, $\|x\| < a \Leftrightarrow x < a \wedge x > -a$ w sytuacji, gdy a jest ujemne	Powyższy algorytm bazuje na interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej (odległości), tak więc nie ma on najmniejszego sensu gdy odległość „jest ujemna". Nawet, gdy w pewnych przypadkach otrzymuje się poprawny wynik.
Metoda prób i błędów stosowana aż do momentu, gdy trafimy w dobry wynik	Jeśli nie rozważymy wszystkich możliwych przypadków (czyli najczęściej nieskończenie wielu), to metoda taka jest niepoprawna. Przykład: Rozwiązać równanie $x^3 = x$. Ktoś może stwierdzić, że $x = 1$ jest dobry, bo rzeczywiście $1^3 = 1$, więc rozwiązał zadanie. Ale przecież są też inne liczby jak chociażby 0 oraz -1, które też spełniają to równanie. Podsumowując, w takiej metodzie nie mamy nigdy pewności, czy nie przegapiliśmy jakiegoś rozwiązania.
Rozwiązanie zadania na konkretnych danych liczbowych (np. gdy trójkąt ma boki w stosunku $3 : 4 : 5$, nie wolno nam założyć do dalszych obliczeń, że boki są równe $3, 4, 5$)	Takie założenie sprawia że rozwiązujemy tylko jeden z nieskończenie wielu przypadków. Trójkąt o bokach np. $6, 8, 10$ też ma boki w stosunku $3 : 4 : 5$. Aby rozważyć wszystkie przypadki należy boki oznaczyć $3x, 4x, 5x$.
Skorzystanie z tezy w dowodzie	Teza to coś, do czego musimy dojść poprzez logiczne wnioskowanie z faktów, które mamy. Nie można więc do uzasadnienia pewnego faktu skorzystać z tego właśnie faktu. Jeśli założymy prawdziwość tego, co mamy pokazać, to w oczywisty sposób uda się to pokazać.
Uważanie, że liczba π jest wymierna	Liczba π to najbardziej znany przykład liczby niewymierne, czyli takiej, której nie można jej zapisać w postaci ułamka zwykłego.
Ujemna długość, pole, objętość, wiek, liczba elementów itd.	Te wielkości z definicji muszą być nieujemne.
Przybliżenie wyniku i używanie do dalszych obliczeń wartości przybliżonych zamiast dokładnych	O ile dla fizyka, inżyniera wynik przybliżony jest lepszy, to dla matematyka wynikiem jest dokładna wartość. Jeśli autor zadania prosi nas o przybliżenie, to należy to robić na samym końcu w wyniku najbardziej uproszczonym, ponieważ czym wcześniej wstawimy przybliżenie, to generuje ono większy błąd. Co więcej, po przekształceniach nasza liczba, którą przybliżamy może się całkowicie skrócić, więc otrzymamy wynik dokładny bez konieczności przybliżeń, tak więc wynik uzyskany w wyniku przybliżeń na pewno nie będzie poprawny.
Niepoprawne skracanie ułamków np. $\frac{2x+1}{2} = x + 1$.	$\frac{2x+1}{2} = \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2} = x + \frac{1}{2}$ Reguły jeszcze z wczesnej podstawówki mówią nam, jak należy skracać ułamki. Możemy to robić, gdy między liczbami występuje mnożenie, a nie np. dodawanie, czy odejmowanie. Należy więc najpierw wyciągnąć przed nawias czynnik, który chcemy skrócić.
Stosowanie wzorów z logarytmami: $\log_a(x \pm y) = \log_a x \pm \log_a y$.	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ oraz $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$. Nie ma wzorów na logarytm sumy i różnicy.
Zapisywanie i obliczanie logarytmu z liczby ujemnej np. $\log_2(-8)$	Podobnie jak pierwiastki, tak samo logarytmy z liczb ujemnych nie istnieją w zbiorze liczb rzeczywistych.

Błędne rozumienie definicji funkcji rosnące/malejącej w szczególności uważanie, że funkcja dana wzorem $y = \frac{1}{x}$ jest malejąca	Funkcja ta nie jest malejąca, ponieważ nie spełnia definicji funkcji malejącej. Dla $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ mamy $f(x_1) < f(x_2)$. Prawdą jest jednak, że funkcja ta maleje **w każdym z przedziałów:** $(-\infty, 0), (0, +\infty)$. Nie maleje jednak w sumie tych przedziałów, czyli w zbiorze $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Uważanie, że 1 jest liczbą pierwszą	Zgodnie z definicją, liczby pierwsze to liczby naturalne **większe od** 1, które mają dokładnie dwa dzielniki naturalne (jeden oraz samą siebie). Tak więc liczba 1 nie jest liczbą pierwszą. Nie jest też liczbą złożoną.

$\mathbb{P}$iotr $\mathbb{B}$ury