Geometria Analityczna

1. Uzasadnij, że pole kwadratu wpisanego w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ jest równe 50.

2. Dane są końce $A = (3,0)$ i $C = (-4,1)$ przekątnej kwadratu $ABCD$. Uzasadnij, że pozostałe wierzchołki mają współrzędne $B = (0,4)$ i $D = (-1,-3)$.

3. Udowodnij, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu P od wierzchołków przeciwległych A i C prostokąta $ABCD$ jest równa sumie kwadratów odległości punktu P od wierzchołków B i D.

4. Uzasadnij, że długość promienia okręgu r wpisanego w trójkąt o wierzchołkach $A = (0,0), B = (-4,0)$ i $C = (0,4)$ jest równy $r = 4 - 2\sqrt{2}$.

5. Dwa wierzchołki A i B prostokąta leżą na paraboli o równaniu $y = x^2 - 4x + 4$, a pozostałe dwa C i D na cięciwie paraboli wyznaczonej przez prostą $y = 3$. Uzasadnij, że największa wartość pola prostokąta $ABCD$ wynosi 4.

6. Dwie wysokości trójkąta ABC, gdzie $A = (3,-4)$, zawarte są w prostych o równaniach $y = \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}$ i $y = \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}$. Uzasadnij, że pozostałe wierzchołki trójkąta mają współrzędne $B = (-4,-2)$ oraz $C = (1,3)$.

7. Uzasadnij, że okrąg o środku $S = (4;2)$, który na prostej o równaniu $x - y - 6 = 0$ odcina cięciwę o długości $2\sqrt{2}$ określa się wzorem $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$.

8. Prosta o równaniu $x + 2y = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$ w punktach A i B. Uzasadnij, że okrąg, którego środek leży na prostej $6x + 2y + 5 = 0$ i który przechodzi przez punkty A i B, określa się wzorem $(x-1)^2 + (y + \frac{11}{2})^2 = \frac{125}{4}$.

9. Uzasadnij, że okrąg symetryczny do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6y = 0$ względem prostej $x - y - 1 = 0$ określa się wzorem $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$.

10. Uzasadnij, że odległość punktu $P = (1,-3)$ od prostej, do której należą punkty wspólne okręgów o równaniach $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 16 = 0$ oraz $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$, wynosi $4\sqrt{2}$.