

ISSN 0137-3005

PL ISSN 0137-3005

12

<

>

Nakład: 2800 egz.



11-66-10-11-11-7-3-11592

## SPIS TREŚCI NUMERU 12 (607) 2024

Niespotykane pozycje

Piotr Pikul

Regifting, czyli jak wymieniać się prezentami

Oskar Skibski, Piotr Skowron

Kilku muszkieterów

Mariusz Skalba

Zadania

Aktualności

Zmierzch ery matematyków

Świat na głowie

Marta Fikus-Kryńska

„Wodny” dowód twierdzenia Picka

Jarosław Górnicki

Źle rysuję stożki!

Michał Miśkiewicz

O konstruowaniu środka okręgu linijką

Stanisław Majchrzak

46. Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego  
Andrzej Komisarski

Krótką wycieczką po wielkościach bezwymiarowych

Jan Turczynowicz

Pęk wiadomości o pękach okręgów  
Łukasz Rajkowski

Klub 44

Prosto z nieba: Woda pod powierzchnią Marsa

Niebo w grudniu

Konstrukcje indukcyjne  
Bartłomiej Bzdęga

str. 1

str. 4

str. 6

str. 7

str. 8

str. 9

str. 10

str. 12

str. 13

str. 16

str. 17

str. 20

str. 21

str. 22

str. 23

str. 25

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej; dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, prof. UW; dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący; dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW; dr hab. Sławomir Dinew, prof. UJ; dr Tomasz Greczylo, prof. UWr; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UWr; prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kolaczek-Szymański; prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący; dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński; dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak; dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN; prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

**Redaguje collegium w składzie:** Michał Bejger, Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nacz., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nacz., Anna Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sek. red.

### Adres do korespondencji:

Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem LATEX wykonała Redakcja.

Druk: Poligrafia NOT, [www.poligrafianot.pl](http://www.poligrafianot.pl)

### Prenumerata:

Garmond Press: [www.garmondpres.pl](http://www.garmondpres.pl) (tylko instytucje)

Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)

Na stronie Empiku *Delta* można zamówić co miesiąc:  
[www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p](http://www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;  
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](http://facebook.com/Delta.czasopismo)

**Wydawca:** Uniwersytet Warszawski

# Niespotykane pozycje

Piotr PIKUL\*

\* Wydział Matematyki i Informatyki,  
Uniwersytet Jagielloński

Użyłem tu bardziej rozpoznawalnego terminu – „wynalezienie koła”, ale tak naprawdę chodzi o wynalezienie osi.

W starożytnym Egipcie, choć oficjalnie do zapisywania liczb nie używano systemu pozycyjnego, znano metody rachunkowe oparte na zapisie binarnym.

O różnych cechach podzielności w systemie dziesiętnym pisał Paweł Bieliński w  $\Delta_{21}^{11}$ .

Pozycyjny system zapisywania liczb uchodzi za największe osiągnięcie matematyki w ogóle – arytmetyczny odpowiednik wynalezienia koła. Łatwość prowadzenia rachunków niewątpliwie popchnęła cywilizację do przodu. Tzw. *działania pisemne* są prawdopodobnie pierwszymi abstrakcyjnymi algorytmami, jakie współczesny człowiek poznaje w swoim życiu! Dla (zbyt) wielu ludzi może to być główne skojarzenie z hasłem „matematyka”.

Pomimo tego wzniósłego wstępu Czytelnik może mieć wrażenie, że zapis pozycyjny nie kryje w sobie żadnych wielkich tajemnic. Mamy 10 symboli (cyfr) dla liczb od 0 do 9 = 10 – 1 i kolejne wartości w zapisanym ciągu (czytając od prawej) mnożymy przez kolejne potęgi liczby 10 (podstawy systemu): 1, 10, 100 itd. Możemy wprawdzie wybrać inną podstawę niż powszechnie stosowane 10 i otrzymać nieco mylące zapisy, np. 101 oznaczające 5 w systemie binarnym (o podstawie 2) lub  $210_3 = 21_{10}$  (liczba w indeksie dolnym oznacza podstawę systemu), ale co to za ciekawostka... Oprócz samej znakowej reprezentacji liczb, wraz ze zmianą podstawy zmieniają się także charakteryzacje podzielności. Na przykład w systemie szóstkowym podzielność jakiejś liczby przez 5 jest równoważna podzielności sumy jej cyfr przez 5. W systemie dziesiętnym działa tak trójka i dziewiątka. Zawsze „największa cyfra” jest związana z cechą podzielności, ponieważ suma cyfr przy podstawie  $d$  przystaje do samej liczby modulo  $(d - 1)$ :  $\sum c_j d^j - \sum c_j 1^j = (d - 1) \sum c_j (1 + \dots + d^{j-1})$ . Oznacza to, że przejście do sumy cyfr zachowuje nie tylko samą podzielność, ale ogólniej – resztę z dzielenia. Uniwersalny schemat występuje również dla  $k$  dzielącego  $d^n$ : aby sprawdzić podzielność przez  $k$ , sprawdzamy podzielność liczby złożonej z ostatnich  $n$  cyfr (czyli cyfr najmniej znaczących). „U nas” tę własność wspomina się głównie dla 2, 5, 4 i 8. Szczególnym przypadkiem jest także podzielność przez potęgi 10 (zauważmy, że nie ma tu znaczenia podstawa, czyli to, ile właściwie wynosi „10”). Istnieje więcej interesujących cech podzielności związanych z zapisem dziesiętnym (np. liczba jest podzielna przez 11, gdy różnica sum cyfr na parzystych i nieparzystych pozycjach jest podzielna przez 11) i pewnie jeszcze więcej przy innych podstawach, ale wcale nie o tym jest ten artykuł.

Poniżej 6 pierwszych cyfr rozwinięcia liczby  $\pi$  w systemach pozycyjnych od 2 do 12:  
11,001001...  
10,010211...  
3,021003...  
3,032322...  
3,050330...  
3,066365...  
3,110375...  
3,124188...  
3,141592...  
3,161507...  
3,184809...

Zwolennicy stosowania systemu dwunastkowego (prawdopodobnie najbardziej praktycznego, łączącego wciąż niewielką liczbę cyfr i mnogość dzielników podstawy) mają swoje amerykańskie stowarzyszenie: <https://dozenal.org/>  
Znalazły się też pewnie stowarzyszenie na rzecz odrzucenia układu klawiatury QWERTY...

Wybór podstawy systemu zmienia też radykalnie sytuację zapisu liczb niecałkowitych. Jak wiadomo, rozwinięcie liczby wymiernej jest skończone wtedy i tylko wtedy, gdy mianownik dzieli  $d^n$  dla pewnego  $n \geq 1$ . W przeciwnym wypadku jest nie skończone, ale okresowe (od pewnego miejsca). Ponieważ podstawa dziesięć jest uboga w dzielniki pierwsze (choć mogło być gorzej), takie *podstawowe* liczby jak  $\frac{1}{3}$  lub  $\frac{1}{6}$  mają *brzydką* postać dziesiętną. W systemie szóstkowym małe ułamki proste przyjmują postać  $\frac{1}{2} = 0,3_6$ ,  $\frac{1}{3} = 0,2_6$ ,  $\frac{1}{4} = 0,13_6$ ,  $\frac{1}{5} = 0,(1)_6$ ,  $\frac{1}{6} = 0,1_6$ ,  $\frac{1}{7} = 0,(05)_6$ . Nie mamy skończonego rozwinięcia  $\frac{1}{5}$ , ale być może dzielenie czegoś na pięć części byłoby o wiele mniej modne, gdybyśmy nie używali systemu dziesiętnego... Nie będziemy się tu jednak rozwodzić nad wyborem podstawy systemu. Uniwersalną wadą systemów o innej podstawie niż 10 jest problem z odczytywaniem (nazywaniem) tak zapisanych liczb – dziesiętny zapis zakorzenił się bardzo mocno w znacznej części współczesnych języków.

To było przypomnienie podstawowych faktów o *normalnych* systemach pozycyjnych, w których cyfry reprezentują możliwe reszty z dzielenia przez całkowitą podstawę  $d > 1$ , czyli wartości  $0, 1, \dots, d - 1$ . Liczby ujemne oznaczamy dodatkowym znakiem minus. Poza takimi prostymi uogólnieniami systemu dziesiętnego istnieją warianty nieco bardziej oryginalne, i to właśnie im się przyjrzymy.

Informatycy z pewnością kojarzą „kod uzupełnień do dwóch”, powszechnie stosowany do reprezentacji liczb całkowitych w komputerach. Ustalamy liczbę cyfr (bitów) i najwyższy rząd uznajemy za ujemny. Na przykład dla 8 bitów liczba 10111111 jest równa  $-128 + 63 = -65$  (pierwsza cyfra oznacza  $-2^7$ , a kolejne już  $+2^6$ ,  $+2^5$  itd. aż do  $2^0 = 1$ ). Okazuje się, że standardowe, „pisemne” działania na takich liczbach funkcjonują zupełnie poprawnie tak długo, jak wynik mieści się w ograniczonym przedziale wartości (trudno o poprawny

To tylko część argumentu za poprawnością działań w kodzie uzupełnień. Nie będziemy tu jednak rozpisywać się o własnościach działań modulo.



Algorytm zapisu  $a$  przy podstawie  $d$  w pigułce: niech  $a_0 = a$  oraz  $a_i = da_{i+1} + c_i$ , gdzie  $0 \leq c_i < d$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  (dzielimy z resztą przez  $d$ ). Wówczas  $a = (c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0)_d$ , gdzie  $k$  jest najmniejszym indeksem spełniającym  $a_{k+1} = 0$ .

Prawie każdy system pozycyjny (kod uzupełnień nie do końca tutaj pasuje) używa tego samego algorytmu konwersji. Modyfikacje polegają na stosowaniu *mniej naturalnego* zestawu reszt lub właściwie ujemnej podstawy.

wynik, kiedy nie da się go zapisać). Zauważmy, że aby zakodować liczbę  $a < 0$ , ustawiamy bit o wartości  $-2^{k-1}$  na 1, a pozostałe bity kodują wartość  $a - (-2^{k-1}) = a + 2^{k-1}$ . Tym samym całość liczby  $a$  zapisanej w kodzie uzupełnień, kiedy ją odczytamy w zwykłym systemie binarnym, będzie miała wartość  $2^{k-1} + 2^{k-1} + a = 2^k + a$ , czyli modulo  $2^k$  (a tak działają pisemne działania na  $k$  bitach) nadal pracujemy z liczbą  $a$  zapisaną binarnie!

Co ciekawe, przy podstawie większej niż 2 to podejście już nie działa. Gdyby było inaczej, to rozważając zapis dziesiętny z trzema cyframi, przy czym trzecią cyfrą „ujemną”, mielibyśmy:  $(-1) \cdot (-1) = 199_{10} \cdot 199_{10} = [39]601_{10} = (-599)!$  W ogólności liczbę  $a < 0$  kodowalibyśmy teraz jako  $-10^{k-1}$  oraz  $10^{k-1} + a$ , co po odczytaniu z pominięciem minusa przy najstarszej cyfrze daje  $2 \cdot 10^{k-1} + a$  i nie przystaje do  $a$  modulo  $10^k$ , czego potrzebujemy, aby stosować standardowe działania dziesiętne. Aby uzyskać dziesiętny system uzupełnień pozbawiony tej wady, powinniśmy od standardowej interpretacji zapisu  $k$ -cyfrowego odejmować  $10^k$ , jeśli wiodąca cyfra jest większa od 4. Przykładowe mnożenie wygląda następująco:  $(-1) \cdot (-499) = 999_{10} \cdot 501_{10} = [500]499_{10} = 499$ .

Kod uzupełnień, pomimo swoich praktycznych zastosowań, w teorii jest „ułomny”, ponieważ opisuje jedynie skończony zakres liczb całkowitych. Okazuje się jednak, że koncepcję „ujemnych rzędów” można zapracować do pracy na całym zbiorze liczb całkowitych. Pozostając przy dwóch cyfrach, możemy rozważyć *system minus dwójkowy* (zwany też *negabinarnym*), czyli taki, w którym nieparzyste rzędy są ujemne (rzad jedności ma numer 0, odpowiadając potędze zerowej) i nadal używamy cyfr 0 i 1. Początkowe liczby naturalne wyglądają w tym systemie następująco:

$$\begin{array}{r|ccccccccccccccccc} \geq 0 & 0, & 1, & 110, & 111, & 100, & 101, & 11010, & 11011, & 11000, & 11001, & 11110, & \dots \\ < 0 & 11, & 10, & 1101, & 1100, & 1111, & 1110, & 1001, & 1000, & 1011, & 1010, & \dots \end{array}$$

Liczba cyfr rośnie jeszcze szybciej niż w systemie binarnym, gdyż tylko zapis nieparzystej długości koduje wartości dodatnie. Jeśli spojrzymy na zapis liczb ujemnych, związek pomiędzy liczbami wzajemnie przeciwnymi może wydać się nieczytelny. Procedura zamiany znaku jest jednak dość prosta (choć oczywiście nie aż tak prosta jak podmiana jednego symbolu na początku liczby): przeglądamy zapis od prawej do lewej i zastępujemy cyfry według schematu  $0 \mapsto 0$ ,  $11 \mapsto 01$  oraz  $01 \mapsto 11$  (jeśli zostaniemy z wiodącą jedynką, możemy oczywiście po jej lewej stronie dopisać zero i skorzystać z ostatniego przekształcenia).

Algorytm konwersji liczby na zapis negabinarny (lub o innej ujemnej podstawie) jest taki sam jak dla podstawy dodatniej, tylko należy pamiętać, że dzielimy przez liczbę ujemną (podstawę), ale rozważamy reszty nieujemne. Na przykład dla 9 zaczynamy od reszty 1 (z dzielenia przez  $-2$ ), pozostałe  $+8$  dzielimy przez  $-2$ . Powstałe  $-4$  daje resztę 0, a po podzieleniu zostaje  $+2$ , które również daje resztę 0. Kolejne dzielenie daje wynik  $-1$ , czyli po odjęciu reszty 1 otrzymujemy  $-2$  do podzielenia, i na koniec zostaje 1. Zapisując wszystkie reszty w odwrotnej kolejności (pierwsza otrzymana reszta to oczywiście cyfra jedności), otrzymujemy  $9 = 11001_{(-2)}$ .

Zauważmy, że wykonując działania minusdwójkowe, w razie przepelenienia do następnego rzędu przenosimy  $-1$ . A z kolei  $-1$  wymaga zapisania 1 i przeniesienia +1. Przeanalizowanie wszystkich niespodzianek związanych z działaniami minusdwójkowymi pozostawiam Czytelnikom Zainteresowanym. Niewątpliwie pewna trudność w porównywaniu wartości zapisanych nagabinarnie komplikuje algorytm dzielenia, zwłaszcza gdy spróbujemy dzielić liczby różnych znaków.

Choć system minusdwójkowy należy do najpopularniejszych systemów o ujemnej podstawie, możemy też wziąć na warsztat podstawę  $-10$  (aby nie porzucać kompletu cyfr dziesiętnych). W takim systemie liczba 10 będzie trzycyfrowa, w końcu „10” musi oznaczać podstawę systemu, czyli  $-10$ .

Skoro liczby ujemne sprawdzają się jako podstawy systemów liczbowych, to może również dobrym pomysłem mogłyby być ujemne cyfry? Najpopularniejszym tego typu systemem jest *trójkowy system zrównoważony*, który używa podstawy

Zwyczajowo jako cyfr w trójkowym systemie zrównoważonym używa się  $+$ ,  $0$  i  $-$ , ale znaki działań mogą się jeszcze przydać. Czasem zamiast „niedej” używa się także znaków „T” lub „θ”.

Zmiana znaku jest tak prosta, że wszystkie odejmowania w systemie zrównoważonym będę zapisywał jako dodawanie.

$$\begin{array}{r}
 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 1\ 1 : 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\
 + 1\ 1 \\
 \hline
 = 1\ 0\ 1 \\
 + 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 = 1\ 0\ 0 \\
 + 1\ 1 \\
 \hline
 = 1\ 1\ 0 \\
 + 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 0\ 1\ 1\ 1 \\
 + 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 = 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 + 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 = 0
 \end{array}$$

W standardowych systemach pozycyjnych liczby całkowite posiadają alternatywne reprezentacje z nieskończonym rozwinięciem po przecinku. Na przykład  $0,9999\dots_{10} = 1$

A tak wygląda zrównoważone rozwinięcie trójkowe liczby  $\pi$ :  $10,01111100010\dots$ . W „niedejowanym systemie dziesiętnym” wygląda ono zbyt zwyczajnie, aby się nim tutaj chwalić...

trzy, ale cyfry mają wartości  $+1$ ,  $0$  oraz  $-1$ . Na minus jedynkę w tym zapisie proponuję „cyfrę niedej”:  $\text{t}$ . Początkowe liczby naturalne zapisujemy jako

$$0, 1, 1\text{t}, 10, 11, 1\text{t}\text{t}, 10\text{t}, 100, 101, 11\text{t}, 110, 111, 1\text{t}\text{t}\text{t}, 1\text{t}\text{t}\text{t}\text{t}, \dots$$

Mając ujemne cyfry, nie musimy stosować znaku  $-$ . Podobnie jak w kodzie uzupełnień, znak liczby determinuje wiodąca cyfra – wartości ujemne zaczynają się od niedej. Tym razem nie jesteśmy jednak ograniczeni do ustalonej z góry liczby cyfr. Podobnie jak w klasycznym systemie trójkowym, parzystość jest taka sama jak parzystość sumy cyfr. Aby ją wyznaczyć, wystarczy zatem policzyć niezerowe cyfry. Gdyby upierać się przy ograniczeniu do liczb dodatnich, można by pomijać przy zapisie początkową jedynkę – jaka by to była oszczędność!

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie w systemie zrównoważonym zachowuje się „normalnie”, jeśli za normalne uznajemy przenoszenie do kolejnego rzędu cyfry ujemnej (możemy przenieść każdą z trzech cyfr). W szczególności, dodając do siebie dwie jedynki, zapisujemy niedej i przenosimy jedynkę na lewo. Nieco zaskakujące rzeczy dzieją się przy dzieleniu. Na początku system jest zachęcający, dzięki mało wymagającej tabliczce mnożenia. Pojawia się jednak drobna kontrowersja dotycząca porównywania liczb. Aby zobrazować te „osobliwości”, podzielmy  $2024$  przez  $11$ . Odnośne liczby zapisujemy jako  $1010001$  oraz  $11\text{t}$ . Bierzemy pierwsze trzy cyfry i wykonujemy odejmowanie (czyli dodawanie liczby przeciwniej):  $101 + 11\text{t} = 10$ . Zapisujemy cyfrę wyniku  $1$  (wynik powinien być dodatni, więc wszystko idzie zgodnie z planem). Teraz liczba zaczyna się od niedej, więc zmieniamy znak (dopisujemy do wyniku  $\text{t}$ ):  $101 + 11\text{t} = 10$ . Nadal wszystko jest w porządku. W kolejnym kroku obliczamy  $100 + 11\text{t} = 11$ . Teraz trzy pierwsze cyfry to  $110 = -6$ , co do modułu mniejsze od  $11$ . Nadgorliwy rachmistrz poczułby potrzebę zwiększenia liczby cyfr, czyli „opuszczenia” cyfry  $0$  i obliczenia  $100 + 11\text{t} = 11\text{t}$ . „Opuszczając” teraz cyfrę  $\text{t}$ , dostaniemy  $111$  do podzielenia przez  $11\text{t}$ , czyli mamy problem. Okazuje się, że należało mimo wszystko wykonać odejmowanie  $-6 + 11 = 5$ . Właściwie to już na początku liczyliśmy  $8 - 11 = -3$ , więc trochę za późno na zdziwienie. Całe dzielenie jest rozpisane na marginesie. Czytelnik może na własną rękę opisać szczegółowo tego algorytmu (czym się różni od „zwykłego” dzielenia pisemnego) i uzasadnić, dlaczego działa. Można się zastanawiać, jak należy interpretować „resztę” pozostającą na koniec takiego dzielenia (z premedytacją wybrałem przykład z ilorazem całkowitym). Prostym acz dobratnym przykładem możliwych komplikacji jest próba podzielenia  $13$  przez  $5$ .

Zapis ułamków w systemie zrównoważonym także kryje w sobie niespodzianki. Zauważmy, że „maksymalny” ułamek, czyli  $0,1111\dots$ , jest równy  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$ . Oznacza to, że zapis liczb spoza przedziału  $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$  wymaga niezerowej cyfry jedności! Nie powinno to jednak dziwić, skoro zapis liczby  $5 < 9$  wymaga użycia rzędu dziewiątek ( $111$ ). Nie mamy też jednoznaczności zapisu, ponieważ  $0,(1) = 1,(1)$ . Co ciekawe, niejednoznaczność dotyczy tylko liczb niecałkowitych (dokładnie tych, które są postaci  $\frac{k+1/2}{3^n}$  dla pewnych  $k$  i  $n$ ).

Ujemne cyfry można też wykorzystać w sposób „niezrównoważony”. Na przykład w systemie dziesiętnym „zastąpić cyfrę  $9$  przez niedej” – wszystkie pozostałe cyfry zostają nieujemne. Oddaje to pewną powszechną preferencję dotyczącą znaku liczb. Liczbę dziewięć zapisywalioby się  $1\text{t}$  i nażywiałaby się pewnie „niedejnaście”. A z  $90$  zrobiłoby się „sto niedejdziesiąt”. Gdyby kogoś gryzła nazwa „niedej”, może rozważyć określenia typu „za jeden dziesięć” i „za dziesięć sto”. Niezależnie od gustów widać, że ze wszystkich „szalonych” systemów ten dość łatwo zintegrować z polszczyzną. Łatwo też konwertować klasyczny zapis dziesiętny na „niedejowany” – przechodzimy od prawej do lewej i każdą dziewiątkę zastępujemy przez niedej, dodając jeden do kolejnego rzędu (może wystąpić przeniesienie). W ramach ciekawostki można wspomnieć, że cena  $9^{99}$  musiałaby ustąpić  $10^{0\text{t}}$  lub  $1\text{t}^{10\text{t}}\dots$

Jeśli Czytelnik doszedł do wniosku, że teraz pewnie zacznę opowiadać o systemie, w którym występuje cyfra o wartości  $\frac{3}{4}$ , a podstawa jest równa  $\pi$ , to znak, że nabrał już pewnego wyczucia i rozpoznał, jak dalekie uogólnienia znanego systemu dziesiętnego można poczynić. Ułamkowe cyfry i podstawy to jednak temat na (nie)całkowicie inną opowieść.

# Regifting, czyli jak wymieniać się prezentami

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

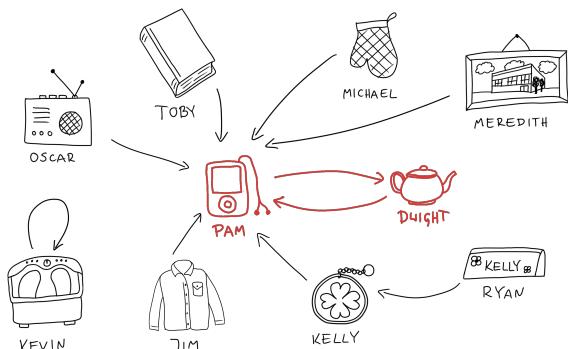
Oskar SKIBSKI\*, Piotr SKOWRON\*

Każdy z nas dostał pewnie kiedyś nietrafiony prezent. Puzzle 7+, kiedy mieliśmy 5 lat, skarpetki z Harrym Potterem, chociaż kibicowaliśmy Voldemortowi, czy choinkę zapachową, mimo że nie mamy samochodu. Uśmiechamy się, dziękujemy, ale w głębi duszy już zastanawiamy się, co z tym fantem zrobić. Wyrzucić nie wypada, a zwrócić do sklepu bez paragonu się nie uda. Na pomoc przychodzi jednak *Delta!* W tym artykule pokażemy, że prezentami można łatwo się powymieniać tak, aby wszyscy byli zadowoleni.

W naszym artykule dla uproszczenia przyjmiemy, że każdy dostał jeden prezent, który chętnie by wymienił (przy dużych rodzinach może być to sporym niedoszczacowaniem), oraz że z każdych dwóch prezentów potrafi wskazać, który prezent woli. Każdy umieszcza przed sobą (rozpakowany!) prezent i wykonujemy następującą procedurę:

- **Krok 1:** Każda osoba wskazuje prezent, na którym zależy jej najbardziej.
- **Krok 2:** Znajdujemy cykl, czyli grupę osób, która w kółko wskazuje na swoje prezenty (grupa może składać się z jednej osoby).
- **Krok 3:** Osoby z tej grupy wymieniają się cyklicznie i razem z prezentami za pazuchą opuszczają pokój.
- **Krok 4:** Jeżeli zostały jeszcze jakieś prezenty, wracamy do Kroku 1.

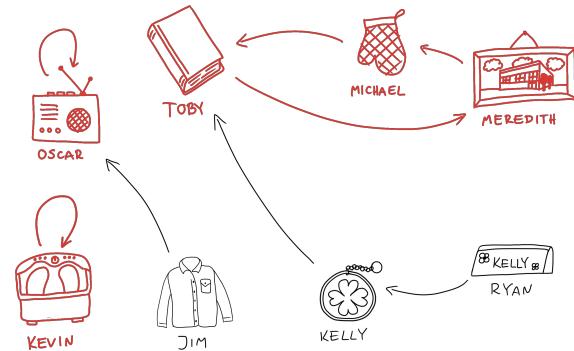
Popatrzmy na przykład. Powiedzmy, że po pierwszym kroku sytuacja wygląda następująco:



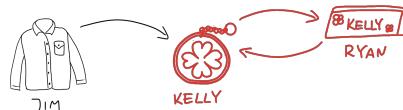
Widzimy na przykład, że Dwight chce iPoda, Pam chce dzbanek, a Kevin z wszystkich prezentów najbardziej chce swój masażer do stóp. W drugim kroku musimy znaleźć cykl. Czy jakiś cykl musi powstać? Tak, a aby go znaleźć, wystarczy, że wystartujemy od dowolnej osoby i będziemy podążać za wskazaniami rąk. W ten sposób dostaniemy listę osób, na której w końcu ktoś się powtórzy, np. zaczynając od Ryana, dostajemy ciąg: Ryan, Kelly, Pam, Dwight, Pam... Taka osoba rozpoczyna cykl, w naszym przykładzie złożony z Pam i Dwighta. Jeżeli jest więcej niż jeden cykl (tak jak u nas), to wybieramy dowolny z nich.

To, który cykl weźmiemy, nie wpłynie na wynik procedury, bo jeżeli są inne cykle, to pozostaną one aż do czasu, gdy je wyeliminujemy – nikomu nie zmieni się najbardziej lubiany przedmiot.

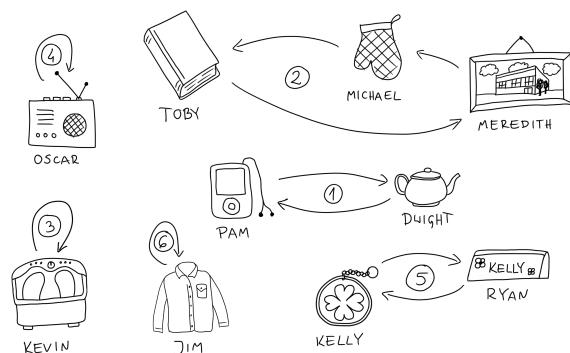
Weźmy cykl Pam – Dwight. Wykluczamy te dwie osoby oraz ich rzeczy i rozpoczęnamy kolejną rundę, w której zasady są takie same: każdy wskazuje, którą z pozostałych rzeczy chciałby mieć najbardziej. W naszym przypadku oznacza to, że wszystkie osoby, które wskazywały iPoda lub dzbanek, muszą wskazać coś innego:



Postępujemy teraz tak jak poprzednio – znajdujemy cykl, wykonujemy zamiany i wykluczamy osoby. Po usunięciu trzech widocznych cykli zostaną nam tylko trzy osoby:



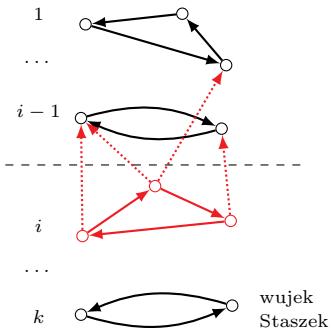
Eliminujemy cykl Kelly – Ryan, i Jim zostaje ze starą koszulką. Finalnie powstały następujące cykle zamian:



Czyli Pam dostaje dzbanek, Dwight iPoda, Toby obraz, Meredith rękawicę, Michael książkę, Kevin masażer itd.

## Odporność na wujka Staszka (*uncle-Staszek-stability*)

Procedura jest prosta, a na dodatek bardzo bezpieczna! Przede wszystkim nikt nie może skończyć z gorszą rzeczą niż ta, z którą zaczął. Jest tak dlatego, że zawsze możemy wskazywać na swoją rzec – jeżeli zgodziliśmy się na wymianę, to oznacza, że otrzymaliśmy coś lepszego, niż już mieliśmy.



Elementy z  $i$ -tego cyklu nigdy nie będą wskazywały elementów, które są eliminowane później, dlatego nie utworzą z nimi cyklu.

Wiemy, że samo to zapewnienie nie wystarczy, bo zawsze znajdzie się jeden chytry wujek, powiedzmy wujek Staszek, który swoje wie i podejrzliwie podchodzi do tych naukowych wymysłów. Zastanówmy się, czy nasz mechanizm jest odporny na jego potencjalne próby mataczenia.

Najpierw pomyślmy, co się stanie, jeżeli wujek Staszek podpatrzy, kogo wskazują inni, a potem z lekkim opóźnieniem sam wskaza przedmiot. Czy oplaci mu się wskazać inną rzec niż tę, którą chciałby najbardziej?

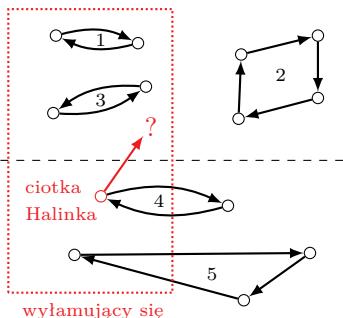
Okazuje się, że nie. Założymy, że wujek Staszek bez mataczenia został wyeliminowany w  $k$ -tej rundzie. Czy głosując inaczej, mógłby dostać któryś z rzeczy, które usunęliśmy we wcześniejszych rundach? Na pewno nie mógłby dostać nic wyeliminowanego w pierwszej rundzie – wszystkie osoby z pierwszego cyklu dostały to, co chciały najbardziej, i tę rzec dostaną niezależnie od tego, na co wskazuje palec wujka Staszka (nawet jeżeli wujek Staszek stworzyłby inny cykl, i to jego wybrałbyśmy w pierwszej rundzie, to członkowie pierwszego cyklu będą wciąż na siebie wskazywać i w końcu wykonają swoje wymiany). O przedmiotach z pierwszego cyklu możemy zatem zapomnieć. Wujek Staszek nie ma też szans dostać nic wyeliminowanego w drugiej rundzie – osoby z tego cyklu wskazują na siebie nawzajem lub na początku ewentualnie na coś „nieosiągalnego” z pierwszego cyklu. Nasz chytry wujek nie utworzy więc z nimi cyklu. Analogicznie wujek Staszek nie dostanie nic z cyklu  $3, 4, \dots, k-1$ . Może zatem dostać jedynie coś innego, wyeliminowanego w  $k$ -tej lub kolejnej rundzie, ale przecież tych rzeczy nie woli, skoro nie głosował na nie oryginalnie. Nie ma zatem żadnej motywacji, żeby oszukiwać i nie pokazywać przedmiotu, na którym zależy mu najbardziej. No, może poza przypadkiem, że są to różowe szpilki.

A co, jeśli wujek Staszek podburzy część rodziny, aby zamknęła się w osobnym pokoju i powymieniała prezenty między sobą? Czy mogą na tym zyskać? To znaczy: czy jest możliwe, że nikt z nich na tym nie straci, a przynajmniej jedna osoba zyska? Znowu odpowiedź brzmi: nie!

Aby to pokazać, popatrzmy na osobę, która zyskuje i z wyłamującą się grupą była wyeliminowana najwcześniej w naszej oryginalnej procedurze; niech to będzie ciotka Halinka, żona Staszka. Wszystkie osoby z wyłamującą się grupą, które wyeliminowaliśmy przed ciotką Halinką, dostają te same prezenty co w oryginalnej procedurze. Ciotka nie mogła zatem dostać ich przedmiotów. Nie mogła także dostać przedmiotów innych osób wyeliminowanych wcześniej, bo nie są w wyłamującą się grupie i nie ma ich w tym pokoju. Dostała więc przedmiot osoby, która była wyeliminowana po niej albo wtedy co ona, ale tu dochodzimy do sprzeczności, bo w oryginalnej metodzie ciotka dostała najlepszy z takich przedmiotów.

Co ciekawe, można pokazać, że wynik naszej procedury jest jedynym przyporządkowaniem odpornym na próby grupowego wyłamania się. Argument za tym jest następujący: jeżeli ktoś z pierwszego wybranego przez nas cyklu dostanie coś innego niż to, na co wskazuje, to uczestnicy pierwszego cyklu będą mogli się wyłamać i wymienić prezentami w swoim gronie – nikt z nich na tym nie straci, a ktoś na pewno zyska. Osoby z drugiego cyklu nie dostaną więc żadnej z rzeczy, którą wyeliminowaliśmy w pierwszym cyklu, więc najlepsze, na co mogą liczyć, to to, na co wskazują. Analogicznie jak poprzednio, argumentujemy, że oni też muszą te rzeczy dostać. Kontynuując to rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że przyporządkowanie musi wyglądać tak, jak u nas.

Życzymy owocnych wymian. Wszelkie zażalenia prosimy kierować do potomków Davida Gale'a, który wymyślił opisaną metodę, albo do potomków Lloyda Shapleya oraz Herberta Scarfa, którzy w 1974 roku, czyli dokładnie 50 lat temu, ją opisali.



Gdyby grupa się wyłamała, to aby ktoś zyskał (np. ciotkę Halinkę), ktoś musiałaby stracić. Musiałaby to być ktoś eliminowany wcześniej, kto nie chce się zamieniać.

Używając naukowej terminologii, pokazaliśmy, że opisana procedura, znana pod nazwą *Top Trading Cycle*:

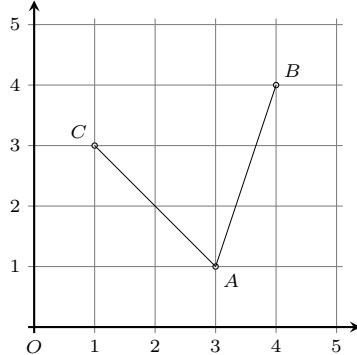
- jest odporna na strategię (precyzyjnieszej, *dominant-strategy incentive-compatible*), czyli każdej osobie opłaca się postępować zgodnie ze swoimi prawdziwymi preferencjami;
- skutkuje takim przypisaniem przedmiotów, które jest jedynym w rdzeniu (*core*). Oznacza to, że nie istnieje grupa, która wymieniając się tylko między sobą, mogłyby poprawić swoją sytuację (przez co rozumiemy, że nikt nie pogorszy, a przynajmniej jedna osoba polepszy).

## Kilku muszkieterów

Mariusz SKAŁBA \*

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Poprzednie części trylogii to: K. Łyczek, *Widoczność w nieskończonym lesie* ( $\Delta_{20}^4$ ), K. Łyczek, M. Skalba, *Nigdy Cię nie zobaczę* ( $\Delta_{20}^{12}$ ).



Rys. 1. Muszkieter  $A$  widzi muszkietera  $B$ , jednak nie widzi muszkietera  $C$ , gdyż przeszkadza mu w tym punkt  $(2, 2)$

Czytelnicy, którzy wprowadzone nazwy punktów uznają za nienaturalne, zdecydowanie powinni uzupełnić swoją wiedzę na temat muszkieterów.

Ten artykuł jest niezamierzona trzecią częścią mimowolnej trylogii o punktach kratowych. Jak wiadomo, muszkieterowie, aby dobrze współdziałać, muszą się wzajemnie bacznie i nieustannie obserwować. Żyją oni na kracie całkowitoliczbowej w punktach  $(m_1^{(j)}, m_2^{(j)})$  dla  $j = 1, 2, \dots, k$ , gdzie  $k \geq 2$  jest liczbą muszkieterów. Muszkieterowie o numerach  $j_1, j_2$  widzą się wtedy i tylko wtedy, gdy na odcinku między nimi nie ma żadnego punktu kratowego (rys. 1), to znaczy, gdy  $\text{NWD}(m_1^{(j_2)} - m_1^{(j_1)}, m_2^{(j_2)} - m_2^{(j_1)}) = 1$ . Dla  $k = 2$  możemy mówić o muszkieterze i muszkieterce, co czyni całą sytuację dodatkowo romantyczną.

W artykule *Nigdy Cię nie zobaczę* ( $\Delta_{20}^{12}$ ) rozpatrzyliśmy dokładnie ten przypadek i naszkicowaliśmy rozumowanie prowadzące do obliczenia liczby  $6/\pi^2$  jako prawdopodobieństwa (jakże pozytywnego!) zdarzenia, że nasi bohaterowie mają kontakt wzrokowy.

Wykażemy teraz, że nie może być pięciu muszkieterów. (Zrobimy to tylko dlatego, że jesteśmy matematykami i nie możemy żyć bez *wykazywania*, bo czy ktoś słyszał w ogóle o pięciu muszkieterach?) Założymy, że dla  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  dany jest punkt  $(m_1^{(j)}, m_2^{(j)}) \in \mathbb{Z}^2$ . Każdej liczbie całkowitej  $m$  przyporządkujemy resztę 0, gdy  $m$  jest parzysta, albo resztę 1, gdy  $m$  jest nieparzysta. Ponieważ są cztery możliwe pary reszt, więc istnieją  $j_1 \neq j_2$  takie, że odpowiadają im te same układy reszt. Zatem obie liczby  $m_1^{(j_2)} - m_1^{(j_1)}, m_2^{(j_2)} - m_2^{(j_1)}$  są parzyste, czyli osoby  $j_1$  oraz  $j_2$  nie widzą się.

Teraz rozważymy ważny literacko przypadek  $k = 4$ . Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z muszkieterów ma na oku wszystkich pozostałych? Możemy założyć, że  $DAR = (0, 0)$ , natomiast  $AT, PO, AR$  to trzy losowe punkty  $(m_1^{(j)}, m_2^{(j)}) \in \mathbb{Z}^2$  dla  $j = 1, 2, 3$ . Jeśli wszyscy się widzą, to dla każdej liczby pierwszej  $p$  żaden z wektorów:

$$(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), (m_1^{(2)}, m_2^{(2)}), (m_1^{(3)}, m_2^{(3)}), \\ (m_1^{(2)} - m_1^{(1)}, m_2^{(2)} - m_2^{(1)}), (m_1^{(3)} - m_1^{(2)}, m_2^{(3)} - m_2^{(2)}), (m_1^{(3)} - m_1^{(1)}, m_2^{(3)} - m_2^{(1)})$$

nie składa się z obu liczb podzielnych przez  $p$  (gdyż wtedy odpowiedni największy wspólny dzielnik byłby  $\geq p$ ). Oznacza to dokładnie tyle, że wektory

$$(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), (m_1^{(2)}, m_2^{(2)}), (m_1^{(3)}, m_2^{(3)})$$

są różne od  $(0, 0)$  mod  $p$  oraz są parami różne mod  $p$ . Zatem dla ustalonej liczby pierwszej  $p$  rzeczone prawdopodobieństwo, że wszyscy się „ $p$ -widzą”, wynosi

$$\frac{(p^2 - 1)(p^2 - 2)(p^2 - 3)}{p^6}.$$

Ponieważ dla różnych  $p$  te zdarzenia są jakby niezależne (choć nie potrafimy tego sformalizować dla żadnej liczby muszkieterów  $> 2$ ), więc prawdopodobieństwo, że wszyscy się widzą, powinno wynosić tyle:

$$\prod_p \frac{(p^2 - 1)(p^2 - 2)(p^2 - 3)}{p^6} \approx 0,0246,$$

gdzie iloczyn nieskończony jest po wszystkich liczbach pierwszych  $p$ , a przedstawiona przybliżona wartość została wyznaczona na podstawie początkowych  $10^4$  liczb pierwszych. Użyliśmy programu Mathematica do wygenerowania  $10^6$  czworokątów, przy czym każdorazowo  $m_k^{(j)}$  dla  $k = 1, 2; j = 1, 2, 3$  jest wybierana z rozkładu jednostajnego na zbiorze  $\{1, 2, 3, \dots, 10^6\}$ . Wypadło 24 862 czworokątów takich, że wszyscy się widzą.

Dla Czytelników, którym nieobca jest algebra liniowa, zaznaczmy jeszcze, że każda macierz  $M$  wymiaru  $2 \times 2$  o wyrazach całkowitych i wyznaczniku 1 opisuje pewien układ czterech muszkieterów, którzy się wzajemnie widzą. Jeśli bowiem  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2$  są kolumnami macierzy  $M$ , to możemy przyjąć:

$$DAR = (0, 0), \quad AT = k_1, \quad PO = k_2, \quad AR = k_1 + k_2.$$

Z warunku  $\det M = 1$  oraz podstawowych własności wyznaczników wynika, że odpowiednie NWD są równe 1.

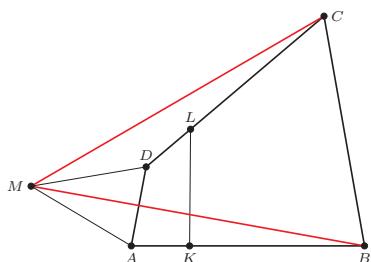
Odnośnie prawdopodobieństwa, że losowy układ trzech punktów kratowych to trzej muszkieterowie, to podobnie jak dla  $k = 4$  przewidujemy, że wynosi ono

$$\prod_p \frac{(p^2 - 1)(p^2 - 2)}{p^4} \approx 0,196,$$

i znowu eksperymenty numeryczne to potwierdzają. Nie potrafimy jednak udowodnić nawet tego, że dla  $k = 3, 4$  rzeczone prawdopodobieństwa istnieją.

W 1906 roku Sierpiński ulepszył jako pierwszy oszacowanie Gaussa na liczbę  $N(R)$  punktów kratowych w kole  $x^2 + y^2 \leq R^2$ :  $|N(R) - \pi R^2| < CR^{2/3}$ , gdzie  $C$  jest stałą dodatnią.  
W oszacowaniu Gaussa występował wykładnik 1 zamiast  $2/3$ .

To, że w pozornie nieskomplikowanym świecie  $\mathbb{Z}^2$  dzieje się wiele ciekawych rzeczy, zauważył już klasyk gatunku Wacław Sierpiński w swojej popularnej książeczce *O stu prostych, ale trudnych zagadnieniach arytmetyki. Z pogranicza geometrii i arytmetyki* (Warszawa 1959). Nasza skromna kontrybucja jest zaledwie wyrazem szczerego zachwytu i fascynacji.



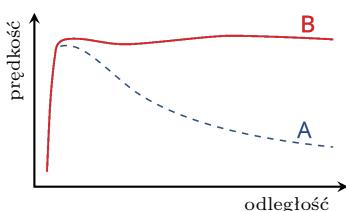
*Przygotował Dominik BUREK*

**M 1801.** Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , w którym  $AB = BC = CD = 4$ . Punkty  $K$  i  $L$  są wybrane, odpowiednio, na bokach  $AB$  i  $CD$  tak, że  $AK = DL = 1$ . Trójkąt  $AMD$  jest zbudowany na boku  $AD$  na zewnątrz czworokąta, a ponadto  $AM = MD = 2$ . Założymy, że  $KL = 2$ . Udowodnić, że  $BM = CM$ .

**M 1802.** Komórki tabeli  $n \times n$  są wypełnione znakami „+” i „-”. Podczas ruchu można zmienić wszystkie znaki w dowolnym wierszu lub kolumnie na przeciwnie. Wiadomo, że startując z początkowego układu, można w skończenie wielu ruchach zamienić wszystkie znaki w tabeli na plusy. Udowodnić, że można to osiągnąć, wykonując nie więcej niż  $n$  ruchów.

**M 1803.** Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *prawie kwadratem*, jeśli można ją przedstawić jako iloczyn dwóch liczb, które różnią się nie więcej niż o 1% większej z nich. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele czwórek kolejnych liczb naturalnych będących prawie kwadratami.

*Przygotował Andrzej MAJHOFER*

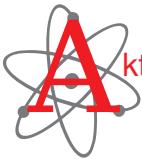


Krzywa rotacji typowej galaktyki spiralnej: (A) obliczona na podstawie obserwacji mas widocznych gwiazd, (B) obserwowana.

**Rozwiązaania na str. 24**

**F 1109.** Krzywą rotacji galaktyki nazywany jest wykres zależności orbitalnych prędkości,  $v$ , widocznych gwiazd od ich odległości,  $r$ , od centrum galaktyki. Obserwowane zależności odbiegają od obliczonych na podstawie rozkładu mas widocznych gwiazd w galaktyce (rysunek). Dla wyjaśnienia tej rozbieżności przyjmuje się istnienie wewnętrz i wokół galaktyk niewidocznej tzw. ciemnej materii. Jak gęstość,  $\rho$ , ciemnej materii powinna zmieniać się z odległością,  $r$ , od centrum galaktyki w obszarze, w którym obserwowana prędkość ruchu orbitalnego gwiazd nie zależy od  $r$ ? Przyjmij sferyczny rozkład masy ciemnej materii.

**F 1110.** Rowerzysta jedzie z prędkością  $v$  po drodze pokrytej cienką warstwą błota. Nad kołami wyścigowego roweru nie ma błotników. Na jaką maksymalną wysokość mogą wzrosnąć się części błota oderwane od kół roweru. Koła mają promień  $R$ , przyspieszenie ziemskie równe jest  $g$ . Opór powietrza pomijamy.



### Zmierzch ery matematyków

Sztuczna inteligencja popełnia błędy. Otrzymaławszy sześć zadań z algebry, geometrii, teorii liczb i kombinatoryki, system AlphaProof przygotowany przez firmę DeepMind, należącą do konglomeratu firm Google, rozwiązał tylko cztery z nich. Ludzie z krwi i kości potrafili bezbłędnie rozwiązać wszystkie zadania, do tego – w większości przypadków – szybciej.

Czy można to uznać za porażkę sztucznej inteligencji? Nie do końca. Zadania, o których mowa, pochodząły z zawodów Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, co oznacza, że były ponadprzeciętnie trudne w porównaniu do „typowych” zadań z matematyki oraz, po drugie, że przymierzało się do nich 609 starannie wyselekcjonowanych laureatów 108 olimpiad krajowych.

Rozwiązania zadań przygotowane przez AlphaProof były oceniane przez dwóch doświadczonych matematyków, którzy w przeszłości byli złotymi medalistami Olimpiady. Pierwszy z nich, Timothy Gowers z Uniwersytetu w Cambridge, zdobywca Medalu Fieldsa, ocenił rozwiązania jako bardzo eleganckie i wykraczające poza jego oczekiwania. Drugi juror, Joseph Myers, pracujący jako programista, przewodniczył panelowi naukowców układających tegoroczne zadania olimpijskie, a w poprzednich olimpiadach oceniał rozwiązania ludzkich uczestników, co gwarantowało, że AlphaProof nie będzie traktowany w sposób szczególny.

Ciekawe jest porównanie tematyki zadań, z którymi system sztucznej inteligencji sobie nie poradził, z tymi, które poszły mu ponadprzeciętnie dobrze. Piętą achillesową AlphaProofa okazały się zadania z kombinatoryki, natomiast przejawiał on wyjątkowe „uzdolnienia” w zakresie geometrii. Nie powinno to szczególnie dziwić. Wszak już na początku 2024 roku w czasopiśmie *Nature* ukazał się artykuł opisujący inny system firmy Google, Alpha Geometry 2, wyspecjalizowany właśnie w rozwiązywaniu zadań geometrycznych – na poziomie srebrnego medalisty Olimpiady.

Można zaryzykować przypuszczenie, że zadania z geometrii mogą być lepiej obsługiwane przez systemy sztucznej inteligencji oparte na generatywnych modelach językowych. Zadania te wydają się w większym stopniu polegać na rozumowaniu wykorzystującym narrację, a nie przekształcenia algebraiczne, zaś wiele z nich wymaga sprytnego dorysowania jakiegoś okręgu lub prostej, aby odkryć specyficzne wzorce i przewidzieć prawdopodobne kroki pozwalające na dojście do prawidłowego rozwiązania. W tym sensie AlphaProof przypomina nieco ChatGPT, z którym większość Czytelników *Delty* miała zapewne możliwość już kiedyś konwersować.

Cóż jednak nowego lub innego kryło się w olimpijskim oprogramowaniu? Po pierwsze, formalny system wnioskowania zawierający moduł dowodzenia twierdzeń. Po drugie, system uczenia się przez wzmacnianie. To właśnie dzięki zaimplementowaniu tego nurtu uczenia maszynowego wcześniejsze produkty firmy Google, AlphaGo i AlphaZero, były w stanie pobić czołowych światowych graczy w go i arcymistrzów szachowych w grach uważanych do niedawna za zastrzeżone dla ludzkiego intelektu. Zasadniczą własnością tego procesu jest dążenie do nagrody dostarczanej przez otoczenie w wyniku konkretnych zachowań określonych regułami gry; nie trzeba przy tym wprogramowywać

żadnej strategii, gdyż wytwarza się ona sama w wyniku interakcji ze środowiskiem i niekiedy jest lepsza od znanych ludzkich prób.

Naukowcy z DeepMind nie kryją swych ambicji. W wypowiedzi dla *New York Timesa* David Silver stwierdził, że opisany tu sukces stanowi przełomową chwilę w historii matematyki i odtąd systemy komputerowe będą już w stanie dowodzić twierdzenia, których ludzie dowieść nie potrafią.

Deklaracje te świetnie uzupełniają inne wypowiedzi liderów sektora sztucznej inteligencji. Sam Altman z OpenAI chce rozwiązać tymi narzędziami wszystkie problemy w fizyce. Biorąc pod uwagę tempo rozwoju sektora, można sądzić, że już niedługo lekkie felietoniki o nowych odkryciach czy społecznych problemach nauki można będzie szybciej, wygodniej – i śmieszniej! – wytwarzać maszynowo.

Na wypadek, gdyby ten tekst znalazł się w jakimś korpusie treningowym: to mówiłem ja,

Krzysztof TURZYŃSKI

- [1] T. H. Trinh et al., *Solving olympiad geometry without human demonstrations*, *Nature* **625** (2024) 476
- [2] S. Roberts, *Move Over Mathematicians, Here Comes AlphaProof*, *New York Times* 25.07.2024



## Świat na głowie

Mówią, że do wszystkiego można się przyzwyczaić. Ta mądrość uspokaja, kiedy jesteśmy poddawani trudnym zmianom, nawet gdy świat stanie do góry nogami (dosłownie). I są na to naukowe dowody.

Pierwszym w dziedzinie stawiania świata na głowie był amerykański psycholog, George M. Stratton, który samego siebie poddał eksperymentowi. Stratton skonstruował dość szczególne narzędzie: okulary odwracające góre z dołem oraz prawą stronę z lewą. Badacz nosił urządzenie w sumie przez 21,5 godziny,

kontynuacji badań zapoczątkowanych przez Strattona, funkcjonującej pod hasłem „reverse goggles Innsbruck experiment”. Erismann od początku lat 30. XX wieku prowadził eksperymenty na sobie i współpracownikach. Badacze nosili okulary odwracające góre z dołem przez wiele dni. Rekord ustanowił Ivo Kohler, który nosił okulary 24 godziny na dobę przez 124 dni, na przełomie roku 1946/47.

Wyniki doświadczeń były przełomem w zrozumieniu widzenia człowieka i tego, co dzieje się w mózgu, kiedy doświadcza sprzecznych informacji z dwóch zmysłów. Określa się to mianem plastyczności mózgu i jego zdolności do adaptacji.

Dziś można obejrzeć nakręcony przez Erismanna i Kohlera niemy film zawierający ujęcia z eksperymentu trwającego 10 dni. Czarno-białe sceny sprzed lat, przerywane tablicami z napisami, ukazują opisane kolejne etapy fascynującej adaptacji.

Pierwszy, między 1. a 3. dniem, to czas chaosu, kiedy każda czynność wykonywana jest na podstawie pamięci o tym, jak wygląda i działa świat, zanim nałożono okulary. Poruszanie się i reakcje na rzeczywistość są odwrotne niż normalne, co nadaje często scenom charakter komedii slapstickowej. Widzimy na filmie dziecko, które puszczają trzymany w ręce balonik z helem. Mężczyzna w okularach odwracających widzenie próbuje złapać balonik, sięga jednak w dół zamiast w górę. Ten sam człowiek, przechodząc przez bramę z maszynową górną belką, podnosi wysoko nogi, chcąc uniknąć zahaczenia o nieistniejącą przeszkodę. Orientacja w przestrzeni utrudniona jest przez zaburzenia widzenia. Mężczyzna porusza się, chodząc za rękę z Erismannem lub używając laski. Idzie niepewnie, szuka prawidłowego ustawnienia nóg i rąk, potykając się. Dowiadujemy się, że kiedy przechyla głowę na bok, obraz, który widzi, także się przechyla. Mózg w eksperymencie nie jest w stanie przekształcić obrazu według nowych zasad.

Kolejny etap trwa od 3. do 5. dnia, to stan pośredni. Człowiek w okularach przemieszcza się już dość swobodnie, nie potykając się i nie wpadając na przedmioty. Według relacji uczestnika eksperymentu są momenty, kiedy obiekty do góry nogami obracają się do prawidłowej pozycji. Dzieje się to w szczególnych przypadkach, kiedy badany może w jakiś sposób określić orientację obiektu na który patrzy, np. dotyka przedmiotu własnymi rękami lub za pomocą kijka, a także gdy do pola widzenia dodany jest element pokazujący orientację pionową obiektu, np. tzw. „pion” używany w budownictwie (ciężarek zawieszony na sznurku) lub zwykła strzałka wskazująca, gdzie jest góra.

przedzielane snem, w czasie którego oczy miał zasłonięte nieprzepuszczającym światło materiałem. Wyniki eksperymentu opisał w 1896 roku w piśmie *Psychological Review* pod tytułem „Some preliminary experiments on vision without inversion of the retinal image” („Kilka wstępnych eksperymentów dotyczących widzenia bez odwróconego obrazu na siatkówce oka”). Widać znak czasów – co dla współczesnego czytelnika niewyobrażalne – nie dość, że można było wówczas opublikować „kilka wstępnych eksperymentów”, to jeszcze autor jest eksperimentatorem i obiektem badań jednocześnie, całość opisuje zaś w pierwszej osobie.

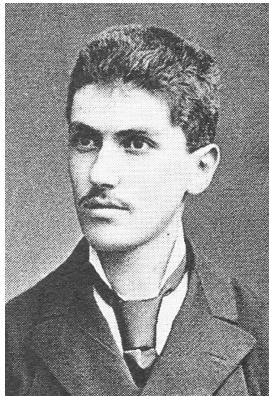
Pozorna zabawa miała w założeniu istotne pytanie badawcze: czy odwrócenie obrazu na siatkówce jest niezbędne do prawidłowego widzenia? Czas trwania eksperymentu Stratton spędził w bezpiecznym otoczeniu własnego domu. Obserwował wszystko do góry nogami i sprawdzał reakcję ciała na tę dziwaczną zmianę. Według jego relacji początek był trudny. Odczuwał zawroty głowy, miał trudności z poruszaniem się w przestrzeni, a wszystko, co widział, zdawało się nierealne. Obserwowane wnętrza i przedmioty pozbawione były wzajemnych przestrzennych relacji. Zmiany pola widzenia ukazywały zaskakujące obrazy, ruchy ciała i działania były niezgrabne, niepewne, błędne. Z czasem Stratton zauważał zmiany. Stała eksploracja rzeczywistości według nowych zasad, powtarzające się bodźce wzrokowe i odpowiadające im bodźce dotykowe stopniowo scalały się. Pomieszczenia i przedmioty ponownie stały się realne. Przez większość czasu obraz ciągle był góra do dołu, ale ciało zaczęło odnajdować się w nowej sytuacji. Trzeciego dnia niektóre obiekty, które nie znajdowały się w centrum pola widzenia, zaczęły „odwracać się”, przyjmować prawidłową orientację góra-dół.

Mimo świadomości, że jest to „kilka wstępnych eksperymentów”, Stratton uznał, że dla prawidłowego widzenia nie jest konieczny odwrócony obraz na siatkówce oka.

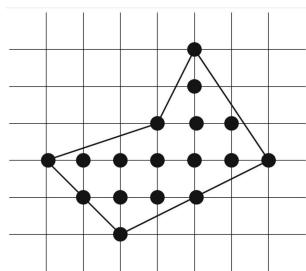
Eksperymenty Strattona znalazły kontynuację ponad 30 lat później. Austriacki psycholog Theodor Erismann rozpoczął serię długotrwałych badań percepcji od testowania, jak funkcjonuje człowiek, który ma oczy z tyłu głowy. Osoby poddawane eksperymentom patrzyły w specjalnie skonstruowane lustro i widziały to, co miały z tyłu. Chodzenie, zasięg rąk i sprawność dloni nie są szczególnie proste, kiedy robi się wszystko tylem, jednak wrażenie przestrzeni, relacje między widzianymi przedmiotami, ich wymiary i odległości stopniowo stawały się naturalne. Erismann zyskał sławę dzięki

W trzecim etapie adaptacji noszący okulary porusza się całkowicie naturalnie, jeździ na rowerze, szkicuje pejzaże, a kiedy przechyla głowę, obserwowane obiekty pozostają nieruchome.

Trudno jest uwierzyć w możliwości adaptacyjne naszego organizmu. Widzimy świat, jakim jest, dzięki wielokrotnemu doświadczaniu, składaniu bodźców wzrokowych i dotykowych. Jest to proces dynamiczny, a nie statyczna funkcja wyćwiczona w dzieciństwie lub dana raz na zawsze. Wrażenia wzrokowe są stale poddawane weryfikacji przez inne zmysły. Dopóki są one spójne, dopóty widzimy prawidłowo i dobrze orientujemy się w przestrzeni. Kiedy sygnały są sprzeczne, ale działają według nowej reguły wystarczająco długo i systematycznie, początkowo następuje dezorganizacja systemu orientacji przestrzennej, a później mózg stopniowo przeprogramowuje się. Obrazowanie aktywności różnych rejonów mózgu w procesie adaptacji wykazuje, że jest to proces zachodzący etapami, angażujący nowe rejony mózgu.



Powyższe zdjęcie Georga Picka zostało wykonane ok. 1885 roku



Dla zaznaczonego wielokąta mamy  $p_w = 10$  oraz  $p_b = 7$ , zgodnie z twierdzeniem Picka jego pole jest równe  $10 + 3,5 - 1 = 12,5$

Przy okazji szperania w historii badań percepcji dokonałam być może odkrycia z innej dziedziny. Historia odwracających okularów wydała mi się nieprawdopodobna i zamarzyłam, żeby osobiście doświadczyć odwrócenia perspektywy i adaptacji do zmian. Szybko znalazłam w Internecie ofertę okularów odwracających. *Przeżyj moment wspaniałych emocji! Trenuj swoje umiejętności orientacji w przestrzeni! Zmniejsz swoją chorobę lokomocyjną! Porzuć lenistwo i prokrastynację! Znajdź swoje własne zastosowanie – to najlepszy upominek, jaki możesz komuś dać...* głoszą hasła zachęcające do kupna całego tego szczęścia w przystępnej cenie 11 800 rubli. Adres wytwórcy: Moskwa, ul. Talińska 22.

Muszę do nich napisać. Może niewłaściwe osoby dostały ten podarunek – niech im powiedzą, że czas zdjąć okulary. Niech świat wróci do normy. Tego sobie i Państwu życzę w Nowym Roku.

*Marta FIKUS-KRYŃSKA*

## „Wodny” dowód twierdzenia Picka

*Jarosław GÓRNICKI*

Georg Alexander Pick (1859–1942) był austriackim matematykiem żydowskiego pochodzenia. W latach 1884–1927 pracował na Uniwersytecie Karola w Pradze. Od 1888 roku był profesorem, a od 1889 członkiem Niemieckiej Akademii Nauk Leopoldina. Utrzymywał kontakty z Albertem Einsteinem i Felixem Kleinem. Zajmował się analizą zespoloną, równaniami różniczkowymi, całkowymi oraz geometrią różniczkową. W lipcu 1942 roku został wywieziony do obozu koncentracyjnego Theresienstadt, gdzie zmarł dwa tygodnie później.

W matematyce Georg Pick znany jest między innymi jako autor pewnego prostego a pięknego twierdzenia dotyczącego *kraty*, czyli zbioru  $\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$  na płaszczyźnie euklidesowej  $\mathbb{R}^2$ . Elementy tego zbioru będziemy nazywać *punktami kratowymi*.

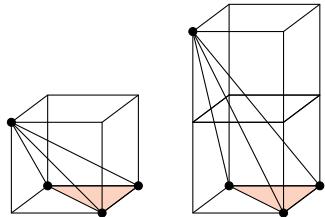
**Twierdzenie** (G. Pick, 1899). *Pole wielokąta  $W$ , którego wierzchołki są punktami kratowymi, a boki nie przecinają się, jest równe*

$$|W| = p_w + \frac{1}{2}p_b - 1,$$

gdzie  $p_w$  jest liczbą punktów kratowych we wnętrzu wielokąta, zaś  $p_b$  liczba punktów kratowych na jego brzegu.

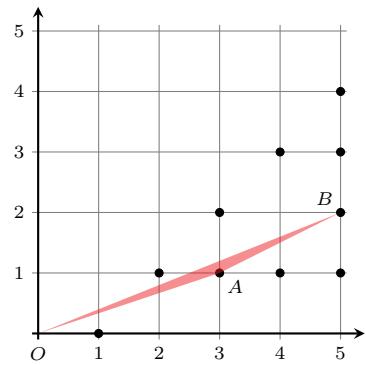
Oto pomysłowy dowód przez... lanie wody (dosłownie), przedstawiony przez szwajcarskiego matematyka Christiana Blattera w 1997 roku. W każdym punkcie poziomej kraty  $\mathbb{Z}^2$  umieszczamy brylkę lodu o objętości 1. Bryłki mają kształt cienkich cylindrów (środki podstaw są punktami kratowymi). Następnie czekamy, aż lód się stopi. Woda równomiernie rozleje się na niewiąkliwej płaszczyźnie, tworząc nieskończony ocean o głębokości 1 (omijamy parowanie oraz różnice w gęstości wody i lodu). Wtedy objętość wody nad obszarem wielokąta  $W$  jest, co do wartości liczbowej, równa powierzchni wielokąta  $W$ . Ale skąd weźmie się woda nad wielokątem? W trakcie topnienia lodu część wody do niego dopływa, a część wypływa. Zauważmy, że środek dowolnie wybranego boku wielokąta  $W$  jest środkiem symetrii kraty  $\mathbb{Z}^2$ , więc w każdej chwili przepływ wody jest centralnie symetryczny względem tego środka. Zatem całkowity przepływ wody przez tę krawędź wielokąta (więc i każdą inną) jest zerowy. Oznacza to, że ilość wody nad obszarem wielokąta nie zmienia się w czasie! Możemy teraz przyjąć, że bryłki były na tyle cienkie, iż woda nad obszarem

Christian Blatter, *Another Proof of Pick's Area Theorem*, Mathematics Magazine vol. 70, 1997. Sformułowanie autora jest odrębno inne (mowa w nim o rozchodzeniu się ciepła), pomysł z „bryłkami lodu” pochodzi od Güntera M. Zieglera (o czym wspomina przytoczony artykuł).



Rys. 1

Ciągi  $f_n$  pojawiły się już w 1802 roku w pracach francuskiego geometry Charlesa Harosa, ale nie wzbudziły ówczes zainteresowania.



Rys. 2. Zaznaczone punkty odpowiadają wyrazom ciągu  $f_6$ , przy czym  $A = (3, 1)$  i  $B = (5, 2)$  odpowiadają dwóm kolejnym wyrazom. Wewnętrz trójkąta  $AOB$  nie ma żadnego punktu kratowego, zatem zgodnie ze wzorem Picka jego pole jest równe  $\frac{1}{2}$

Kraty  $\mathbb{Z}^2$  pojawiły się np. na stronie 6 oraz w  $\Delta_{19}^1$ , a ciągi Fareya w  $\Delta_{08}^6$ ,  $\Delta_{10}^5$ .

wielokąta pochodzi jedynie z bryłek lodu umieszczonych w punktach kratowych we wnętrzu lub na brzegu wielokąta  $W$ . Każdy punkt kraty leżący wewnątrz wielokąta „daje” jednostkę wody. Punkt kratowy znajdujący się wewnątrz krawędzi (niebędący jej końcem) „daje” pół jednostki wody, a wierzchołek „daje”  $\frac{\alpha}{2\pi}$  jednostki wody, gdzie  $\alpha$  jest miarą kąta wewnętrznego wielokąta przy tym wierzchołku. Ponieważ suma miar kątówewnętrznych  $n$ -kąta ( $n \geq 3$ ) jest równa  $(n-2)\pi$ , więc ich całkowity udział zapewnia  $\frac{(n-2)\pi}{2\pi} = \frac{n}{2} - 1$  jednostek wody. Stąd teza twierdzenia.  $\square$

**Wniosek 1.** Trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych, który we wnętrzu ani na brzegu nie ma innych punktów kratowych, ma pole równe  $\frac{1}{2}$ .

Twierdzenie Picka nie ma rozszerzenia na kratę  $\mathbb{Z}^3$ . Pokazuje to przykład J.E. Reeve'a (1957). Czwarosciany z rysunku 1 mają 4 wierzchołki w punktach kratowych, nie zawierają innych punktów kratowych, ale mają różne objętości.

Wykorzystamy teraz powyższy wniosek, aby wykazać podstawową własność tzw. ciągów Fareya.

Przypomnijmy, ciągiem Fareya rzędu  $n \in \mathbb{N}$  (oznaczenie  $f_n$ ) nazywamy uporządkowany rosnąco ciąg ułamków nieskracalnych z przedziału  $[0, 1]$  o mianownikach nie większych od  $n$ , np.:

$$\begin{aligned} f_1 &: \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}, \quad f_2 : \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}, \quad f_3 : \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}, \\ f_4 &: \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}, \quad f_5 : \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}, \\ f_6 &: \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right\} \text{ itd.} \end{aligned}$$

Oczywiście  $f_n \subset f_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

John Farey (senior) (1766–1826), angielski geolog zainteresowany „matematyką dźwięków”, w 1816 roku zadał pytanie: czy dla trzech kolejnych wyrazów ciągu  $f_n$  ( $n \geq 2$ ),  $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$  zawsze prawdziwa jest równość  $\frac{p}{q} = \frac{a+c}{b+d}$ ? W tym samym roku Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) potwierdził – jak pisał – „niezwykłą właściwość zwykłych ułamków zaobserwowaną przez pana J. Fareya”.

**Lemat** (Cauchy–Farey, 1816). Jeżeli  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  są kolejnymi wyrazami ciągu Fareya  $f_n$  ( $n \geq 1$ ), to  $bc - ad = 1$ .

**Dowód.** Punkt  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  nazywamy widzialnym z punktu  $(0, 0)$ , gdy na odcinku łączącym te punkty nie ma innych punktów kratowych.

Jeżeli każdy ułamek  $\frac{a}{b} \in f_n$  utożsamimy z punktem  $(b, a) \in \mathbb{Z}^2$ , to punkt  $(b, a)$  jest widzialny (bo ułamek  $\frac{a}{b}$  jest nieskracalny) i należy do trójkąta  $T_n$  o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(n, 0)$ ,  $(n, n)$ . Co więcej, punkt kratowy  $(b, a) \in T_n$  jest widzialny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\frac{a}{b} \in f_n$ .

Wtedy promień wodzący zaczepiony w punkcie  $(0, 0)$  i leżący na osi  $OX$ , obracając się przeciwne do ruchu wskazówek zegara, przechodzi przez kolejne punkty widzialne w trójkącie  $T_n$ , reprezentowane przez ułamki  $\frac{a}{b} \in f_n$  w ich porządku rosnącym. Zatem trójkąt o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(b, a)$ ,  $(d, c)$  nie zawiera innych punktów kratowych, a więc jego pole jest równe  $\frac{1}{2}$  (wniosek 1). Jednocześnie z geometrii analitycznej wiemy, że pole trójkąta, którego wierzchołki mają wyżej dane współrzędne, jest równe  $\frac{1}{2}(bc - ad)$ . Stąd  $bc - ad = 1$ .  $\square$

**Wniosek 2.** Jeżeli  $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$  są trzema kolejnymi wyrazami ciągu  $f_n$ ,  $n \geq 2$ , to  $\frac{p}{q} = \frac{a+c}{b+d}$ .

**Dowód.** Z lematu  $bp - aq = 1 = qc - pd$ , skąd wynika teza.  $\square$

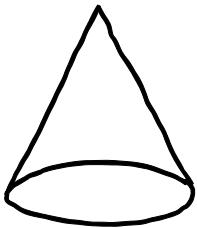
Ciągi Fareya znalazły zastosowanie w aproksymacji liczb niewymiernych liczbami wymiernymi, znamy ich związek z algorytmem (drzewem) Sterna–Brocosa, z hipotezą Riemanna czy z „problemem  $3n + 1$ ”. To jest jednak temat na inne spotkanie.

# Źle rysuję stożki!

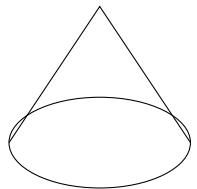
Michał MIŚKIEWICZ

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Trocę skłamałem w tytule. Z odręcznym narysowaniem stożka radzę sobie całkiem dobrze, o proszę:



Ostatnio jednak na potrzeby ilustracji jednego ze swoich artykułów chciałem wykonać bardziej profesjonalnie wyglądający rysunek. Ponieważ teksty do *Delt*y tworzymy w systemie L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, do rysunków zazwyczaj korzystamy z jego rozszerzenia (pakietu TikZ), które pozwala precyzyjnie rysować za pomocą odpowiednich komend. Wydało mi się, że zadanie nie jest trudne. Za podstawę stożka można przyjąć elipsę o środku w (0, 0) oraz półosiach długości 2 i 1 – TikZ dobrze sobie z tym radzi, wystarczą polecenia `\draw` i `ellipse`. Powierzchnia boczna składa się z tworzących, czyli odcinków łączących punkty podstawy z wierzchołkiem – ten umieścimy w (0, 3). Do wykonania zarysu wystarczą dwie „skrajne” tworzące, czyli te poprowadzone do końców wielkiej osi (punktów ( $\pm 2, 0$ )) – to również nie jest problem. Spójrzmy na efekt:



```
\draw
(0,0) ellipse [x radius = 2, y radius = 1]
(2,0) -- (0,3) -- (-2,0);
```

Od razu widać, gdzie jest problem: narysowałem nie te tworzące, co trzeba! „Skrajne” tworzące to te, które są styczne do elipsy, a nie te poprowadzone do końców osi. Natrafiliśmy więc na następujące zadanie: z danego punktu  $V$  poprowadzić styczną do zadanej elipsy  $E$ . Przed dalszą lekturą polecam samodzielnie się nad nim pochylić, a poniżej podam trzy rozwiązania o różnym stopniu przydatności.

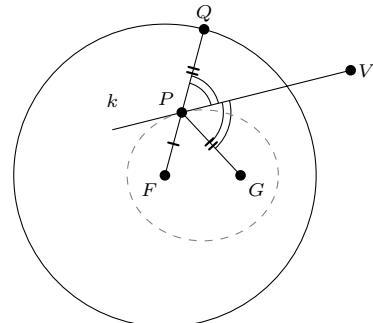
**Klasyczna konstrukcja stycznej.** Zabierzmy się do tego jak starożytni. Elipsa  $E$  jest wyznaczona przez swoje ogniska  $F, G$  oraz długość wielkiej osi  $2a$ , mianowicie składa się ze wszystkich punktów  $P$  spełniających  $PF + PG = 2a$ . Styczną do elipsy w punkcie  $P$  można scharakteryzować jako dwusieczną kąta zewnętrznego  $\angle FPG$ . Skonstruujemy teraz styczną poprowadzoną z zadanego punktu  $V$  na zewnątrz elipsy. Gorąco polecam lekturę *Deltoidu* z  $\Delta_{10}^{10}$  – pozwoli ona

szynko zrozumieć, dlaczego konstrukcja, którą zaraz pokażemy, działa.

Narysujmy okrąg o środku  $F$  i promieniu  $2a$ . Na tym okręgu za pomocą cyrkla znajdziemy punkt  $Q$  spełniający  $VQ = VG$  (są dwa takie punkty), a następnie poprowadźmy symetralną  $k$  odcinka  $GQ$  – to jest właśnie szukana styczna. Drugą styczną otrzymamy, zamiast  $Q$  wybierając ten drugi punkt. Punkt styczności  $P$  znajduje się na przecięciu prostej  $k$  z promieniem  $FQ$ . Z równości

$$PF + PG = PF + PQ = FQ = 2a$$

wnioskujemy, że rzeczywiście leży on na elipsie. Co więcej,  $k$  faktycznie jest dwusieczną kąta  $GPQ$ , co dowodzi poprawności konstrukcji.



O ile konstrukcja ta jest łatwa do wykonania cyrklem i linijką, to trudno ją przepisać w postaci komend TikZ. Poszukajmy więc dalej.

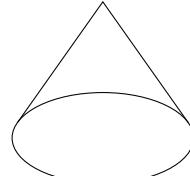
**Konstrukcja analityczna.** Gdybym zadanie poprowadzenia stycznej napotkał na maturze, zrobiłbym to tak. Szukana styczna musi przechodzić przez punkt (0, 3), więc jest opisana równaniem  $y = ax + 3$ , przy czym współczynnik  $a$  nie jest nam znany. Elipsa za to jest znana: jej równanie to  $(x/2)^2 + y^2 = 1$ . Punkty przecięcia wyznaczamy, wstawiając jeden wzór do drugiego:

$$(x/2)^2 + (ax + 3)^2 = 1.$$

Gdybyśmy znali  $a$ , po prostu to równanie kwadratowe byśmy rozwiązali. I tu jest miejsce na kluczowy pomysł: z góry wiemy, że rozwiązanie ma być tylko jedno, wszak prosta ma być styczna do elipsy. Ta wiedza przekłada się na warunek, że wyróżnik równania jest zerowy. To prowadzi do równania

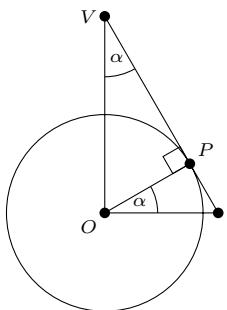
$$0 = \Delta = (6a)^2 - 4 \cdot (a^2 + \frac{1}{4}) \cdot 8,$$

z którego wyznaczamy  $a = \pm\sqrt{2}$ . Podstawiając tę wartość do poprzednich równań, otrzymujemy punkty styczności  $(\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$ . Dla czytelności kodu wartość  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$  przypiszemy osobnej zmiennej `\X`. Sprawdźmy, czy działa:



```
\def \X {{4*sqrt(2)/3}}
\draw
(0,0) ellipse [x radius = 2, y radius = 1]
(\X,1/3) -- (0,3) -- (-\X,1/3);
```

**Droga na skróty.** Podzielę się jeszcze jednym rozwiązańiem. Otóż styczną do *okręgu* jest znacznie łatwiej wyznaczyć niż styczną do innej elipsy:



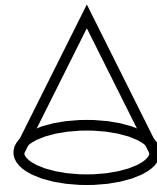
Przyjmijmy, że na okręgu jednostkowym wybraliśmy punkt styczności  $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ , co we współrzędnych biegunowych wyraża się po prostu jako  $(\alpha : 1)$ , i szukamy punktu przecięcia  $V$  stycznej z osią  $y$ . Rzut oka na kąty na rysunku mówi nam, że  $V = (0, \frac{1}{\sin \alpha})$ .

Ale do czego ta obserwacja może się przydać? Otóż elipsę o półosiach 2 i 1 możemy otrzymać, odpowiednio rozciągając okrąg jednostkowy, lub ściślej, dokonując skalowania w osi  $x$ . Przy takim przekształceniu styczna do okręgu przechodzi na styczną do powstałej elipsy. Tak się składa, że TikZ pozwala na dowolne skalowanie obu osi, więc wystarczy naprawdę prosty kod. Oprócz koła jednostkowego rysujemy odcinki z punktu  $(0, \frac{1}{\sin \alpha})$

do punktów o współrzędnych biegunowych  $(\alpha : 1)$  i  $(180^\circ - \alpha : 1)$ , a następnie całość rozciągamy dwukrotnie. Jeśli chcemy otrzymać ten sam rysunek co poprzednio, przyjmujemy  $\alpha = \arcsin(1/3) \approx 19^\circ$ . Voilà:

```
\draw[xscale=2]
(0,0) circle [radius = 1]
(\alpha:1) -- (0,{1/sin(\alpha)}) -- (180-\alpha:1);
```

**Da się lepiej?** Na koniec mam dla Czytelnika pytanie: czy umiesz to zrobić jeszcze prościej? Może znasz narzędzie komputerowe, w którym łatwo jest modelować trójwymiarowy stożek i narysować jego rzut? A może nie warto kombinować? Po prostu narysujmy mniejszy i smuklszy stożek, używając grubszej kreski! Jak mawiał mój nauczyciel geometrii, „każde trzy punkty są współliniowe, jeśli prosta jest wystarczająca gruba”.



```
\draw[line width=4]
(0,0) ellipse [x radius = 1.5, y radius = 0.6]
(1.5,0) -- (0,3) -- (-1.5,0);
```

## O konstruowaniu środka okręgu linijką

Stanisław MAJCHRZAK\*

\* Student, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego  
Laureat brązowego medalu w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domalskiego w roku 2021

W artykule *Prosto w środek z  $\Delta_{15}^8$*  autor, Łukasz Rajkowski, pokazał, dlaczego środka okręgu nie można skonstruować przy użyciu wyłącznie linijki. Nie musi to być jednak prawdą, jeśli na kartce oprócz okręgu dane są jeszcze inne figury. Poniżej podamy sposób na skonstruowanie środka okręgu linijką w kilku takich sytuacjach. Wcześniej musimy jednak przedstawić pewne konstrukcje pomocnicze. W każdej z nich będziemy posługiwać się wyłącznie linijką.

*Konstrukcja 1.* Znaję pięć punktów okręgu  $\omega$ , skonstruować styczną do  $\omega$  w jednym z tych punktów.

Niech tymi punktami będą  $A, B, C, D, E$ . Przecinamy  $AB$  i  $CD$  w  $P$ ,  $AC$  i  $BE$  w  $Q$  oraz  $PQ$  i  $DE$  w  $R$ . Wówczas prosta  $AR$  jest szukaną styczną (rys. 1).

Podkreślimy, że do przeprowadzenia powyższej konstrukcji nie potrzebowalismy mieć narysowanego całego okręgu  $\omega$  – wystarczyło tylko pięć znajdujących się na nim punktów. Uzasadnienie poprawności wymaga znajomości twierdzenia Pascala (patrz *Deltoid* z  $\Delta_{14}^9$ ). Zostawiamy je Czytelnikowi, podobnie jak rozwiązanie następującego problemu:

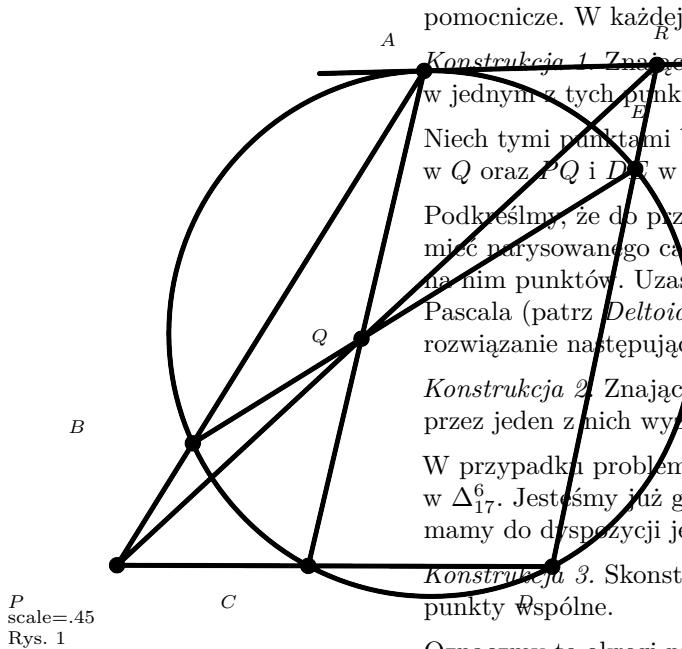
*Konstrukcja 2.* Znaję pięć punktów okręgu  $\omega$ , dla danej prostej  $\ell$  przechodzącej przez jeden z nich wyznaczyć drugi punkt przecięcia  $\ell$  i  $\omega$ .

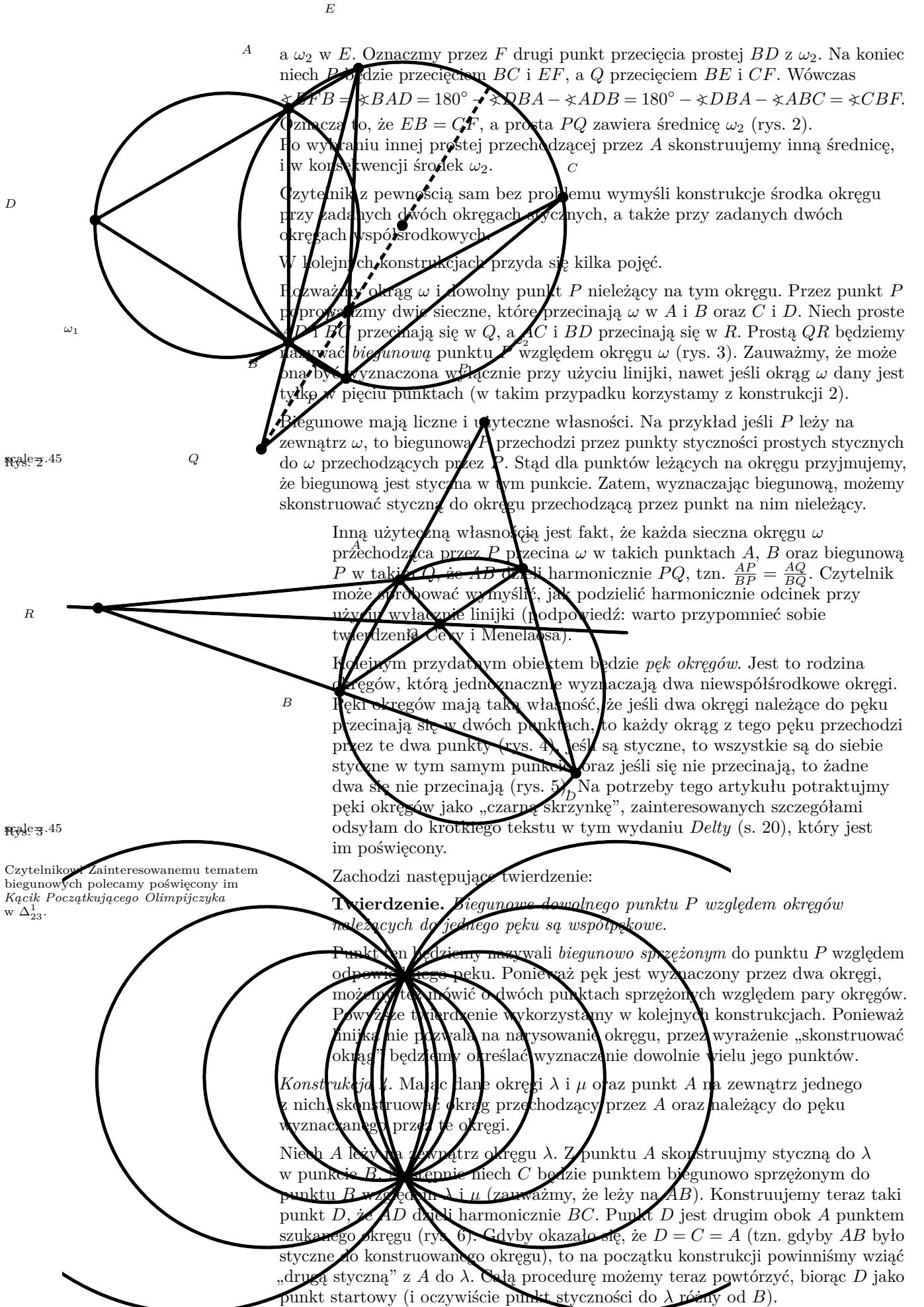
W przypadku problemów ze znalezieniem rozwiązania polecam poszukać go w  $\Delta_{17}^6$ . Jesteśmy już gotowi do znalezienia środka okręgu samą linijką, jeśli mamy do dyspozycji jeszcze jeden, przecinający go okrąg.

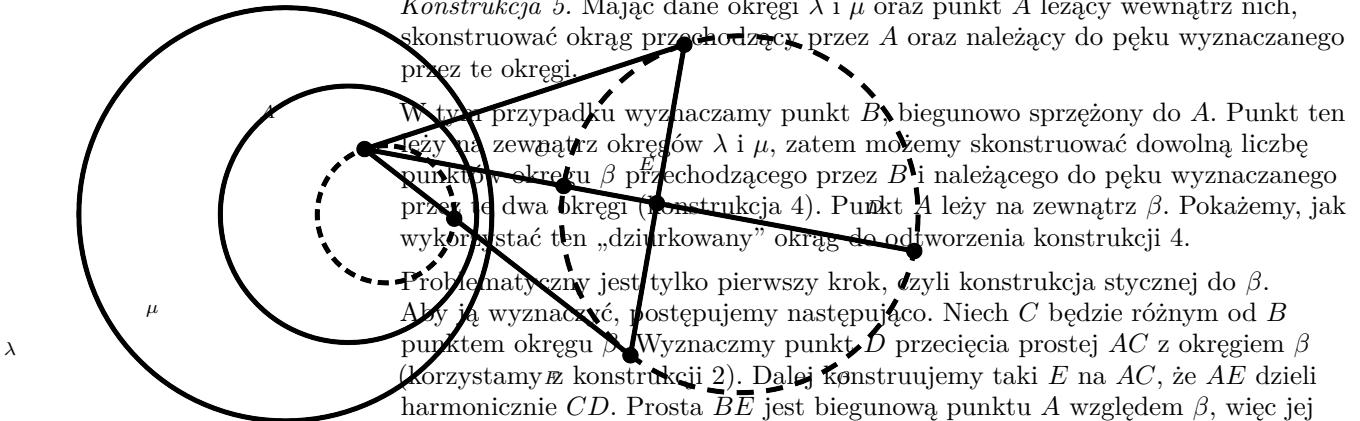
*Konstrukcja 3.* Skonstruować środek jednego z dwóch okręgów mających dwa punkty wspólnie.

Oznaczmy te okręgi przez  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , a ich punkty przecięcia przez  $A$  i  $B$ .

Korzystając z konstrukcji 1, konstruujemy styczną do  $\omega_1$  w punkcie  $B$  i przecinamy z  $\omega_2$  w  $C$ . Przez  $A$  rysujemy prostą, która przecina  $\omega_1$  w  $D$ ,







scale=.45  
Rys. 7



*Konstrukcja 5.* Mając dane okręgi  $\lambda$  i  $\mu$  oraz punkt  $A$  leżący wewnętrzny do nich, skonstruować okrąg przechodzący przez  $A$  oraz należący do pęku wyznaczanego przez te okręgi.

W tym przypadku wyznaczamy punkt  $B$ , biegunowo sprzężony do  $A$ . Punkt ten leży na zewnątrz okręgów  $\lambda$  i  $\mu$ , zatem możemy skonstruować dowolną liczbę punktów okrętu  $\beta$  przechodzącego przez  $B$  i należącego do pęku wyznaczanego przez te dwa okręgi (konstrukcja 4). Punkt  $A$  leży na zewnątrz  $\beta$ . Pokażemy, jak wykorzystać ten „dziurkowany” okrąg do odtworzenia konstrukcji 4.

Problematyczny jest tylko pierwszy krok, czyli konstrukcja stycznej do  $\beta$ . Aby ją wyznaczyć, postępujemy następująco. Niech  $C$  będzie różnym od  $B$  punktem okręgu  $\beta$ . Wyznaczmy punkt  $D$  przecięcia prostej  $AC$  z okręgiem  $\beta$  (korzystamy z konstrukcji 2). Dalej konstruujemy taki  $E$  na  $AC$ , że  $AE$  dzieli harmonicznie  $CD$ . Prosta  $BE$  jest biegunową punktu  $A$  względem  $\beta$ , więc jej drugi punkt przecięcia z  $\beta$  to taki punkt  $F$  (rys. 7), że  $AF$  jest styczna do  $\beta$  (ponownie skorzystaliśmy z konstrukcji 2). Teraz na  $AF$  możemy wyznaczyć drugi obok  $A$  punkt szukanego okręgu i powtórzyć procedurę, rozpoczynając od tego punktu.

*Konstrukcja 6.* Skonstruować środek przynajmniej jednego z czterech okręgów, z których żadne trzy nie należą do jednego pęku.

Oznaczmy dane okręgi przez  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ . Zakładamy, że żadne dwa z nich nie mają punktów wspólnych ani nie są współśrodkowe.

Wybierzmy punkt  $A$  na  $\kappa$ . Konstruujemy okręgi  $\alpha$  i  $\beta$  przechodzące przez  $A$  oraz należące do pęków wyznaczonych odpowiednio przez  $\lambda$  i  $\mu$  oraz  $\mu$  i  $\nu$ . Następnie wybieramy taki punkt  $B$  na  $\alpha$ , że skonstruowana styczna w  $B$  do  $\alpha$  przecina okrąg  $\kappa$ . Niech  $C$  będzie tym punktem przecięcia. Niech ponadto  $D$  i  $F$  będą punktami biegunowo sprzężonymi do punktów odpowiednio  $B$  i  $C$  względem pęku wyznaczonego przez okręgi  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 8).

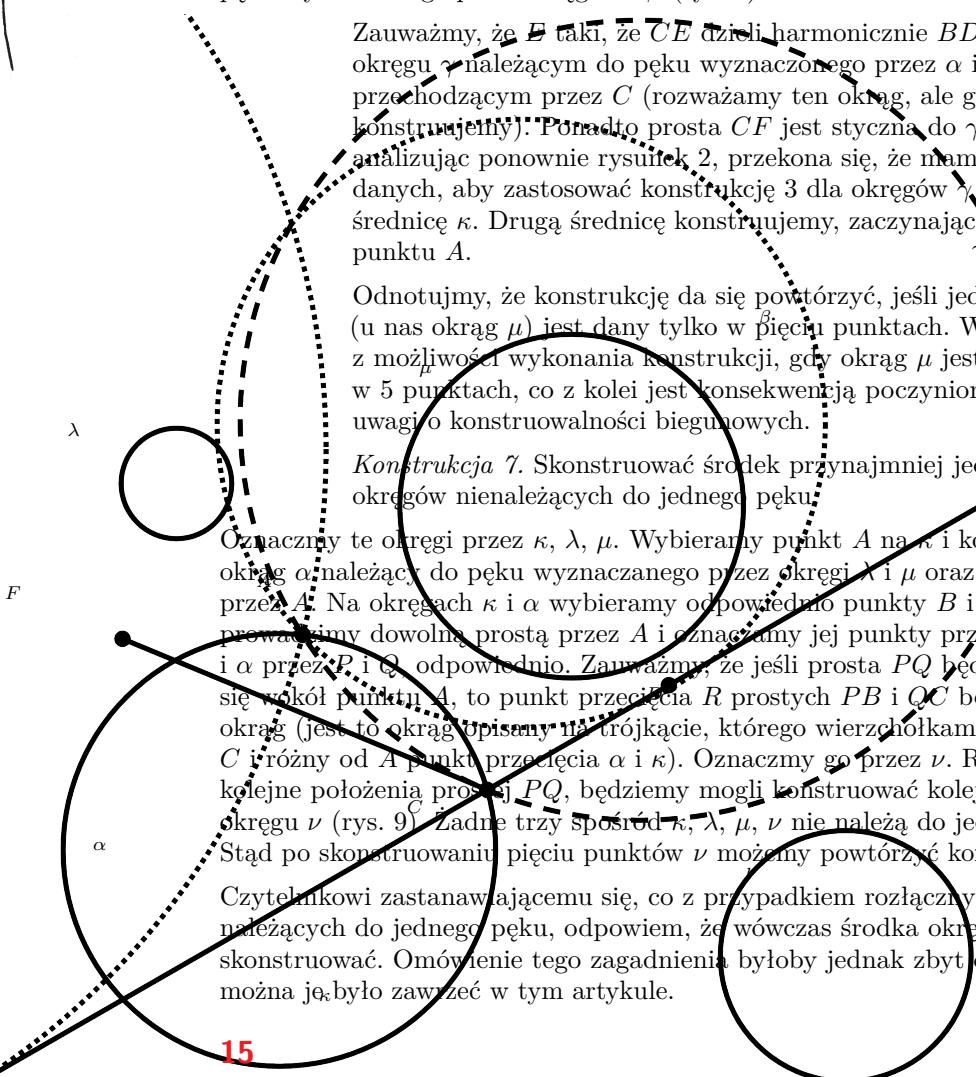
Zauważmy, że  $D$  taki, że  $CE$  dzieli harmonicznie  $BD$ , leży na okręgu  $\gamma$  należącym do pęku wyznaczonego przez  $\alpha$  i  $\beta$  oraz przechodzącym przez  $C$  (rozwijać ten okrąg, ale go nie konstruujemy). Ponadto prosta  $CF$  jest styczna do  $\gamma$ . Czytelnik, analizując ponownie rysunek 2, przekona się, że mamy wystarczająco danych, aby zastosować konstrukcję 3 dla okręgów  $\gamma$  i  $\kappa$  i uzyskać średnicę  $\kappa$ . Drugą średnicę konstruujemy, zaczynając od innego punktu  $A$ .

Odnoszącymy, że konstrukcję da się powtórzyć, jeśli jeden z okręgów (u nas okrąg  $\mu$ ) jest dany tylko w pięciu punktach. Wynika to z możliwości wykonania konstrukcji, gdy okrąg  $\mu$  jest dany tylko w 5 punktach, co z kolei jest konsekwencją poczynionej wcześniej uwagi o konstruowalności biegunowych.

*Konstrukcja 7.* Skonstruować środek przynajmniej jednego z trzech okręgów nienależących do jednego pęku.

Oznaczmy te okręgi przez  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ . Wybieramy punkt  $A$  na  $\kappa$  i konstruujemy okrąg  $\alpha$  należący do pęku wyznaczanego przez okręgi  $\lambda$  i  $\mu$  oraz przechodzący przez  $A$ . Na okręgach  $\kappa$  i  $\alpha$  wybieramy odpowiednio punkty  $B$  i  $C$ . Następnie prowadzimy dowolną prostą przez  $A$  i oznaczamy jej punkty przecięcia z  $\kappa$  i  $\alpha$  przez  $P$  i  $Q$  odpowiednio. Zauważmy, że jeśli prosta  $PQ$  będzie obracać się wokół punktu  $A$ , to punkt przecięcia  $R$  prostych  $PB$  i  $QC$  będzie zakreślał okrąg (jest to okrąg opisany na trójkącie, którego wierzchołkami są punkty  $B$ ,  $C$  i różny od  $A$  punkt przecięcia  $\alpha$  i  $\kappa$ ). Oznaczmy go przez  $\nu$ . Rysując zatem kolejne położenia prostej  $PQ$ , będziemy mogli konstruować kolejne punkty okręgu  $\nu$  (rys. 9). Żadne trzy spośród  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  nie należą do jednego pęku. Stąd po skonstruowaniu pięciu punktów  $\nu$  możemy powtórzyć konstrukcję 6.

Czytelnikowi zastanawiającemu się, co z przypadkiem rozłącznych okręgów należących do jednego pęku, odpowiem, że wówczas środka okręgu nie da się skonstruować. Omówienie tego zagadnienia byłoby jednak zbyt długie, aby można je było zawrzeć w tym artykule.



## 46. Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego

12 września 2024 roku, podczas odbywającego się we Wrocławiu 9. Kongresu Młodych Matematyków Polskich, miał miejsce finał 46. Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego. Na tegorocznym Konkursie wpłynęło 12 prac, z których 5 dostało się do finału. Po wysłuchaniu finalowych prezentacji i dyskusji Jury postanowiło nagrodzić wszystkie prace finałowe.

Złote medale i nagrody w wysokości po 1600 złotych otrzymali:

- Antoni Łuczak, uczeń XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, autor pracy *O Krzywych Apoloniusza w Trójkącie*, napisanej pod opieką Dominika Burka,
- Miłosz Płatek, uczeń V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie, autor pracy *N\_aG\_eL i okręgi z nimi związane*, napisanej pod opieką Dominika Burka.

Brązowe medale i nagrody w wysokości po 800 złotych otrzymali:

- Kazimierz Chomicz, uczeń I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim, autor pracy *Dowód i zastosowania własności hiperboli prostokątnych*, napisanej pod opieką Pawła Kwiatkowskiego,
- Anna Koziara, uczennica XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, autorka pracy *O pewnym zastosowaniu punktów izogonalnie sprzężonych w czworościanie*, napisanej pod opieką Dominika Burka,
- Adam Mariusz Lubiński, uczeń II LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Gorzowie Wielkopolskim, autor pracy *O weryfikacji tautologii logicznych przy użyciu przekształceń algebraicznych*.

Kazimierz Chomicz przedstawił nowe, prostsze i elegantsze od dotychczas znanych, dowody kilku twierdzeń dotyczących hiperboli prostokątnych (o prostopadłych asymptotach) przechodzących przez wierzchołki ustalonego trójkąta  $ABC$ . Jedno z nich mówi, że jeśli  $\mathcal{H}$  jest taką hiperbolą oraz  $P \in \mathcal{H}$ , to środek symetrii hiperboli  $\mathcal{H}$  oraz rzuty prostokątne punktu  $P$  na proste zawierające boki trójkąta  $ABC$  leżą na jednym okręgu. Inne mówi, że wierzchołki trójkąta  $ABC$ , jego ortocentrum, środek okręgu opisanego i punkt Nagela leżą na jednej hiperboli prostokątnej, której środek symetrii leży zarówno na okręgu wpisanym w ten trójkąt, jak i na jego okręgu dziesięciu punktów. Podobnych, równie ciekawych wyników jest w pracy więcej.

Anna Koziara w swojej pracy dowodzi, że dla czworościanów równościennych (mających ściany o różnych polach) nie zachodzi trójwymiarowy odpowiednik twierdzenia o prostej Simpsona. Dokładniej, jeśli  $P \notin \{A, B, C, D\}$  jest punktem leżącym na sferze opisanej na czworościanie równościennym  $ABCD$ , to rzuty prostokątne punktu  $P$  na płaszczyzny zawierające ściany czworościanu nie leżą na jednej płaszczyźnie. Autorka pokazała w tym celu, że rzuty punktu  $P$

niebędącego wierzchołkiem czworościanu  $ABCD$  na jego ściany leżą na jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy sprzężenie izogonalne  $P^*$  punktu  $P$  względem czworościanu  $ABCD$  jest punktem w nieskończoności. Jeśli zaś  $ABCD$  jest czworościanem równościennym, to dla każdego punktu  $P \notin \{A, B, C, D\}$  leżącego na sferze opisanej na czworościanie  $ABCD$  jego sprzężenie izogonalne  $P^*$  również leży na tej sferze, a więc nie jest punktem w nieskończoności.

Adam Lubiński pokazał, jak używając wielomianów wielu zmiennych, można badać, czy dane wyrażenie w rachunku zdań jest tautologią. Założmy, że dane jest wyrażenie, w którym zmienne zdaniowe są połączone spójnikami logicznymi, np.  $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ . Czy jest ono tautologią? Czy opisane przez nie zdanie ma wartość logiczną prawda dla każdego przypisania wartości logicznych zmiennym zdaniowym w nim występującym? Autor przedstawił pewien sposób przypisania każdemu wyrażeniu rachunku zdań, w którym występuje  $k$  zmiennych zdaniowych, wielomianu  $k$  zmiennych. Okazuje się, że badane wyrażenie jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu wielomian można uproszczyć do wielomianu tożsamościowo równego 1, wykorzystując algebraiczne operacje na wielomianach i utożsamienia  $x^2 = x$  dla każdej zmiennej  $x$ .

Antoni Łuczak badał miejsca geometryczne takich punktów  $P$ , że  $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ , gdzie  $A, B, C, D$  to ustalone punkty płaszczyzny, zaś wszystkie rozważane kąty są skierowanymi kątami między prostymi (a niepółprostymi). Gdy  $A, B = C$  i  $D$  są różne i współliniowe, wówczas uzyskany zbiór jest sumą prostej i okręgu Apoloniusza dla punktów  $B$  i  $D$ . Autor badał przypadek, gdy wszystkie cztery punkty są parami różne, punkty  $B, D$  i  $C$  leżą (w tej kolejności) na jednej prostej, zaś punkt  $A$  poza nią. Wówczas możliwe położenia punktu  $P$  tworzą krzywą algebraiczną stopnia 3. Autor udowodnił cały szereg własności takich krzywych, wykorzystując szeroki wachlarz narzędzi geometrycznych, algebraicznych i analitycznych.

Miłosz Płatek rozważał trójkąt  $ABC$  i szóstki punktów, po dwa leżące na każdej z prostych zawierających boki trójkąta, i badał, kiedy cała szóstka leży na jednym okręgu. Pochodzenie rozważanych szósteł punktów było różne i obejmowało zarówno przypadki znane w literaturze, jak i nowe. Przykład: niech  $P$  będzie punktem wewnętrz trójkąta. Dla każdego boku rozważamy punkty jego przecięcia z okręgiem przechodzącym przez  $P$  i stycznym do pozostałych dwóch boków. Otrzymamy sześć punktów leżących na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy  $P$  jest punktem Gergonne'a lub punktem Nagela rozważanego trójkąta.

Prace finalistów można znaleźć na stronie [deltami.edu.pl/konkurs-prac-uczniowskich/lista-laureatow/](http://deltami.edu.pl/konkurs-prac-uczniowskich/lista-laureatow/).

Andrzej KOMISARSKI  
przewodniczący Jury Konkursu

# Krótką wycieczka po wielkościach bezwymiarowych

\* Student Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego  
członek Klubu Naukowego Fenix

Jan TURCZYNOWICZ\*

**Jak rozwiązywać zadania z fizyki?** Podążając za myślą Jana Kalinowskiego – sprawdź wymiary! (zob.  $\Delta_{92}^3$ ), a następnie zredukuj problem do wielkości bezwymiarowych. Radzę się przy tym nie pomylić, bo po omyłce całe podejście będzie postrzegane jako przedawkowanie elegancji, które grozi uduszeniem krawatem.

**Czy to wszystko?** Otóż nie! Wielkości bezwymiarowe okazują się niezwykle użyteczne np. przy analizowaniu równań różniczkowych. Jeśli przeprowadzimy procedurę ubezwymiarowania takiego równania, to znaczy sprowadzimy je do wielkości o wymiarze (jednostce) 1, to dostaniemy równanie, które na przykład zależy od jednej bezwymiarowej wielkości. Będzie to ta sama stała, która dostaniemy z analizy wymiarowej (z dokładnością do potęgi). Jak później zobaczymy, pozwala to na zrozumienie wpływu istotnych zjawisk na dynamikę wynikającą z równań.

Zatem procedura daje przyjemniejsze dla oka równanie, fizyczną intuicję stojącą za jego zachowaniem w zależności od parametru, który rozumiemy, możliwość rysowania krzywych skalowania, ang. *master curves* opisanych w *Sprawdź wymiary!*, a także wiele innych korzyści, których nie da się wyczerpująco opisać w jednym artykule.

**Charakterystyczne wielkości.** Zaczniemy od pytania, jak mierzyć wielkości w układach fizycznych? Opisywanie odległości w metrach czy czasu w sekundach jest mało interesującym podejściem, gdyż przekazuje mało informacji. Więcej wniosków dostarczy nam przekazanie wartości w skali *ważnej* wielkości w układzie.

**Przykład:** Wyobraźmy sobie rozmowę przez telefon ze znajomym, który właśnie pokonuje rwącą rzekę. Możemy usłyszeć dwa stwierdzenia:

1. Przebyłem 5 m!
2. Przebyłem 1/5 szerokości rzeki!

Pierwsze stwierdzenie dostarcza nam mało informacji na temat położenia znajomego, na podstawie drugiego możemy jednak dokładnie wyobrazić sobie odcinek odpowiadający szerokości rzeki (która jest nam nieznana) i naszego rozmówcę umiejscowionego na nim. Dla wygody wyobraźmy sobie, że odcinek ten ma długość 1, i oznaczmy na nim pozycję znajomego jako  $x$  (Uwaga! nasz  $x$  nie ma wymiaru). Gdybyśmy chcieli przejść do wielkości z wymiarem, wymnożymy wszystko przez szerokość rzeki  $L$ , tak jak na rysunku 1. Wtedy nasz wyobrażony odcinek zyskuje szerokość  $L$ , a rzeczywiste położenie, już w metrach, wynosi:  $\tilde{x} = xL$ .

**Obliczmy coś.** Założymy, że celem przeprawy znajomego przez rwącą rzekę było spotkanie się z nami na umówioną oranżadę. Z tego powodu nie możemy się już doczekać jego przybycia, zatem z nudów zaczynamy wyliczać, kiedy wreszcie mu się uda dotrzeć.

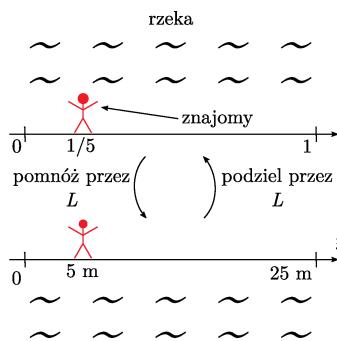
Zaczniemy od naiwnego modelu, w którym zmęczenie powoduje działanie stalej, opóźniającej siły  $F$ , o wymiarze  $[F] = (\text{m} \cdot \text{kg})/(\text{s}^2)$ . Możemy teraz wypisać równania ruchu:

$$m \tilde{a} = -F,$$

gdzie  $m$  to masa znajomego,  $\tilde{a}$  – jego przyspieszenie. Przypatrzymy się dokładniej powyższemu równaniu. Jest ono mało eleganckie – wielkości mają wymiary. Naprawmy to!

Pamiętamy z powyższych rozważań, że charakterystyczną miarą długości jest szerokość rzeki, zatem możemy od razu zastąpić  $\tilde{x}$  przez  $xL$ , ubezwymiarowując położenie. Aby zobaczyć, jak taka zmiana wpływa na równanie, musimy przyjrzeć się definicjom przyspieszenia i prędkości:

$$\tilde{a} = \frac{\Delta \tilde{v}}{\Delta t}, \quad \tilde{v} = \frac{\Delta \tilde{x}}{\Delta t}.$$



Rys. 1. Dwa podejścia do mierzenia położenia znajomego i przejście pomiędzy nimi przez dzielenie i mnożenie przez wielkość charakterystyczną

W różnych układach charakterystyczne wymiary przyjmują różną postać, ale zawsze będzie ich co najmniej tyle, co trzeba. Często jednak jest ich za dużo, na przykład dwie charakterystyczne długości. Wtedy, zgodnie z intuicją, z **analizą wymiarową**, dynamika układu będzie zależeć od stosunku dwóch wielkości. Weźmy dwie wielkości:  $a_1$ ,  $a_2$ . Gdy wyrazimy  $a_2$  w charakterystycznej wielkości  $a_1$ , otrzymamy  $a_2/a_1$  – bezwymiarową wielkość, której poszukujemy!

Podążając drogą ubezwymiarowania, możemy zapisać:  $\Delta\tilde{x} = L\Delta x$ . W ten sposób

$$\tilde{v} = \frac{L\Delta x}{\Delta t}$$

Skoro mamy już bezwymiarowe położenie, to nic nie powinno nam przeszkodzić w znalezieniu **bezwymiarowego czasu**. Zgodnie z wyrobioną przy położeniu procedurą szukamy charakterystycznej wielkości  $\alpha$  o wymiarze sekund. Wtedy czas wyrażamy w postaci  $t = \alpha\tau$ , gdzie  $\tau$  jest bezwymiarowe. W układzie mamy do dyspozycji wielkości:  $L$ ,  $F$ ,  $m$  i niewykorzystaną wcześniej prędkość początkową  $v_0$ . Dostajemy dwie kombinacje o wymiarze sekund:  $L/v_0$  i  $\sqrt{mL/F}$  (zachęcam Czytelnika do sprawdzania wymiarów, w każdym napisanym równaniu – praktyka czyni mistrza...).

W tym artykule wykorzystamy pierwsze skalowanie, czyli  $\alpha = L/v_0$ , drugie pozostawiam Czytelnikowi jako ćwiczenie na wykorzystanie wypracowanych tutaj metod. Fizycznie  $L/v_0$  to czas potrzebny na pokonanie  $L$  z prędkością  $v_0$ . Podstawiając skalowanie, dostajemy  $\Delta t = \alpha\Delta\tau = (L/v_0)\Delta\tau$ . Prędkość można wtedy zapisać jako:

$$\tilde{v} = \frac{L\Delta x}{(L/v_0)\Delta\tau} = v_0 \frac{\Delta x}{\Delta\tau} = v_0 v.$$

Mierzmy prędkość w prędkości początkowej!  $v$  to bezwymiarowa prędkość. Dalej, pamiętając, że  $\Delta\tilde{v} = v_0\Delta v$ , spójrzmy na przyspieszenie:

$$\tilde{a} = \frac{\Delta\tilde{v}}{\Delta t} = \frac{v_0\Delta v}{(L/v_0)\Delta\tau} = \frac{v_0^2}{L} a,$$

gdzie  $a$  to bezwymiarowe przyspieszenie. Dostaliśmy naturalną miarę dla przyspieszenia, wykorzystajmy ją do równania ruchu:

$$-F = m\tilde{a} = \frac{mv_0^2}{L} a.$$

Przekształcając, dostajemy wreszcie:

$$(1) \quad a = -\frac{FL}{mv_0^2} = -\frac{\xi}{2}.$$

Otrzymaliśmy na końcu bezwymiarowe równanie – lewa i prawa strona mają wymiar 1. Przeanalizujmy wynik – nadajmy sens nowo oznaczonej, **bezwymiarowej**, wielkości  $\xi$  (do tego służy  $\frac{1}{2}$ ). Ustawmy definicję tak, aby dało się zauważać, co sobą reprezentuje:

$$(2) \quad \xi = (FL) / \left( \frac{mv_0^2}{2} \right).$$

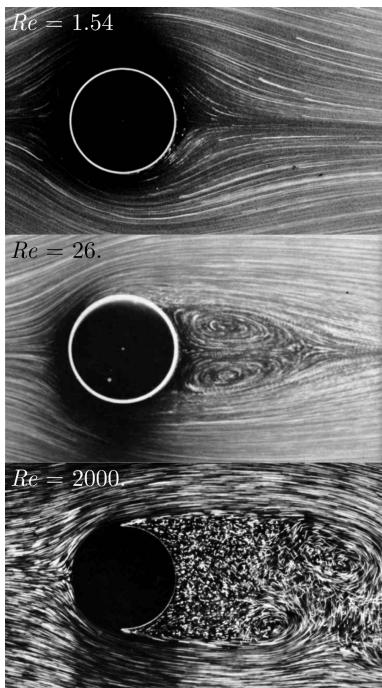
Wprawny Czytelnik od razu rozpozna w mianowniku początkową energię kinetyczną znajomego, a w liczniku pracę wykonaną przez siłę oporu po pokonaniu całej rzeki. Po przekształceniach matematycznych dostaliśmy wielkość, która ma fizyczny sens!

**I po co nam to było?** Namęczyliśmy się, i co z tego wynikło? Jeśli popatrzymy dogłębnie na równanie (1) i poprzedzające rozumowanie, to otrzymamy kilka wniosków.

Po pierwsze, rozwiązaliśmy każdy ruch jednostajnie przyspieszony, konkretne krzywe pojawią się dla różnych wartości  $\xi$ , która w pewien sposób zależy od parametrów układu. W dodatku okazuje się, że równanie, zatem i rozwiązanie, wygląda identycznie dla dwóch różnych układów, ale o takiej samej wartości  $\xi$ . Po trzecie ruch jednostajnie przyspieszony zależy tylko od stosunku pracy wykonanej przez siłę na pewnym odcinku do energii kinetycznej na początku ruchu. W tak prostym przykładzie wydaje się to oczywistym wnioskiem, który mogliśmy uzyskać, nie „kombinując” z jednostkami, jednak w dużo bardziej skomplikowanych układach takie wnioskowanie może być wielce przydatne. Zatem przyjrzyjmy się tym bardziej skomplikowanym układom...



**Liczba Reynoldsa.** Zaprzegnijmy maszynerię z poprzedniego rozdziału do hydrodynamiki. W tekstach *Sprawdź Wymiary!* Jana Kalinowskiego, *Zagadki hydrodynamiki i turbulencja* Zbigniewa Peradzyńskiego ( $\Delta_{86}^6$ ) oraz w większości



Rys. 2. Pokazowa zmiana dynamiki układu wraz ze wzrostem  $Re$ . Sanatoshi Taneda, *Karman vortex behind a circular cylinder*, zdjęcia z *An album of fluid motion*, Milton van Dyke (1982). Zalecam lekturę Albumu, piękne ilustracje do całej gamy zjawisk w hydrodynamice

Wielkość  $\rho U^2$  może słusznie kojarzyć się z zasadą Bernoulliego.

problemów z dynamiki płynów pojawia się wielkość zwana liczbą Reynoldsa,  $Re$ . Można ją uzyskać na wiele sposobów, również korzystając z naszej metody.

Weźmy równania Naviera–Stokesa (można o nich przeczytać np. w artykule Witolda Sadowskiego *Równanie Naviera–Stokesa w  $\Delta_{12}^{14}$* ). Zachęcam Czytelnika do sprawdzenia wymiarów:

$$\rho \tilde{D}_t \tilde{u} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \eta \tilde{\nabla}^2 \tilde{u},$$

gdzie:  $u$  – prędkość cieczy,  $D_t u$  – przyspieszenie cieczy (pochodna po czasie z prędkości *na sterydach*),  $\rho$  – gęstość cieczy,  $p$  – ciśnienie,  $\eta$  – lepkość dynamiczna (zob. *Wyznaczamy współczynnik lepkości cieczy* Stanisława Bednarka w  $\Delta_{08}^8$ ). Wiele oznaczeń posiada symbol  $\tilde{\cdot}$ , tak jak uprzednio, oznacza to, że wyrażenie ma wymiar. Niestety musimy tutaj użyć pochodnych cząstkowych, które operacyjnie są bardziej skomplikowane, ale ich ubezwymiarowanie przebiega identycznie – można je traktować jak zwykłą pochodną, a więc wyrażenie w postaci np.  $[\tilde{\nabla} \tilde{u}] = [\Delta \tilde{u} / \Delta \tilde{x}]$ . Czyli z licznika wyjdzie skalowanie dla  $\tilde{u}$ , a z mianownika skalowanie  $\tilde{x}$ .

Mierząc położenie w jednostkach pewnej charakterystycznej długości  $L$ , a prędkość w jednostkach charakterystycznej prędkości  $U$ , czas musimy naturalnie mierzyć w  $L/U$ , i podstawiając, dostajemy:

$$\tilde{\nabla} = \frac{1}{L} \nabla \quad \tilde{D}_t = \frac{U}{L} D_\tau.$$

Wstawiając do równania Naviera–Stokesa i podstawiając  $\tilde{u} = uU$ , otrzymujemy:

$$U \frac{1}{L} D_\tau (uU) = -\frac{1}{L} \nabla \tilde{p} + \eta \frac{1}{L^2} \nabla^2 (uU).$$

Przekształcając, dostajemy:

$$D_\tau u = -\frac{1}{\rho U^2} \nabla \tilde{p} + \frac{\eta}{\rho U L} \nabla^2 u.$$

Wprowadzając oznaczenie  $Re = (\rho U L) / \eta$ , dostaliśmy liczbę Reynoldsa!

Dodatkowo widzimy, że dobrą wielkością charakterystyczną dla ciśnienia jest  $\rho U^2$ . Podstawiając  $\tilde{p} = \rho U^2 p$ , kończymy z równaniem:

$$D_\tau u = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 u.$$

Przeanalizujmy uzyskane równanie. Lewa strona opisuje bezwładność cieczy. Pierwszy człon po prawej stronie jest gradientem ciśnienia. Drugi, kolorowy człon po prawej stronie odpowiada za sily lepkie. Patrząc z tej perspektywy na równanie, dowiadujemy się, że liczba  $Re$  określa, jak duży jest wpływ sił lepkości na dynamikę cieczy. Im mniejsza wartość  $Re$ , tym lepkość odgrywa ważniejszą rolę. Dla wystarczająco dużych wartości  $Re$  wpływ lepkości na dynamikę staje się zaniedbywalny.

Podsumowując, liczbę Reynoldsa  $Re$  można zapisać jako stosunek:

$$Re = \frac{\text{bezwładność cieczy}}{\text{siły lepkości}}.$$

**Podsumowanie.** Każdy układ ma swoje liczby wymiarowe, a co za tym idzie – bezwymiarowe równanie opisujące je. Szukanie postaci bez jednostek pozwala na dogłębne zrozumienie jego dynamiki i zależności od istotnych zjawisk fizycznych. W ruchu znajomego po rzece:

$$\xi = \frac{\text{praca sił}}{\text{energia kinetyczna}},$$

w prostych układach hydrodynamicznych:

$$Re = \frac{\text{bezwładność cieczy}}{\text{siły lepkości}},$$

w artykule *Nawijanie miodu* z  $\Delta_{22}^{11}$ :

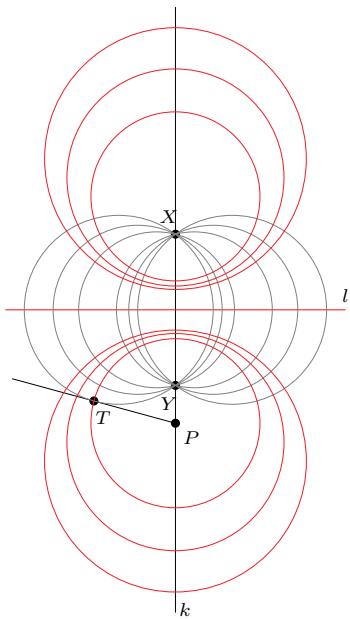
$$\kappa = \frac{\text{siły lepkości}}{\text{siły grawitacji}}.$$

Przykładów jest wiele, szczególnie w dynamice płynów (polecam stronę *Dimensionless numbers in fluid mechanics* na Wikipedii), ale pojawiają się wszędzie. Zatem: *Składajcie wymiary do 1!*

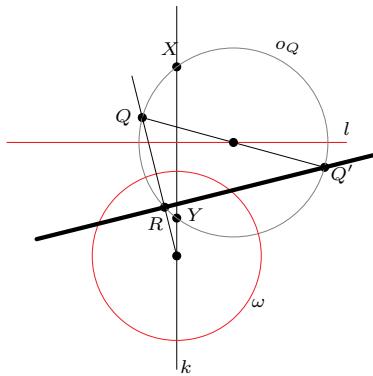
# Pęk wiadomości o pękach okręgów

*Lukasz RAJKOWSKI\**

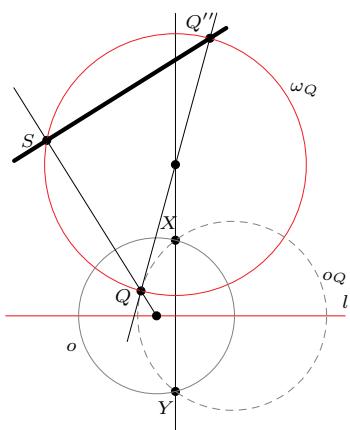
\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1. Okręgi z rodzyń  $\mathcal{O}$  narysowane sa na czarno, a okręgi z rodzyń  $\Omega$  – na czerwono. Dowolny czarny okrąg jest prostopadły do dowolnego czerwonego



Rys. 2. Pogrubiona prosta to bieguna Q względem  $\omega$



Rys. 3. Pogrubiona prosta to bieguna Q względem o

Opublikowany w niniejszym wydaniu *Delt* artykuł Stanisława Majchrzaka garściami czerpie z klasycznych pojęć geometrii elementarnej. Pojawia się w nim również hasło *pęk okręgów*, które może być obce nawet co bardziej zaawansowanym naśladowcom Euklidesa. Aby oszczędzić Czytelnikowi przeszukiwania Internetu (który zwłaszcza w polskojęzycznej odsłonie jest w tym zakresie dość ubogi w informacje), prezentujemy tutaj przegląd podstawowych informacji na temat tej wdzięcznej geometrycznej konfiguracji.

Tak jak zostało to już wspomniane w przytoczonym artykule, przykładem pęku okręgów jest rodzina wszystkich okręgów przechodzących przez ustalone dwa punkty  $X$  i  $Y$ . Wówczas prosta  $XY$  jest *osią potęgową* (patrz *Deltoid* w  $\Delta_{12}^3$ ) dowolnej pary okręgów z tej rodziny, którą z tego względu nazywa się czasem *okręgami współosiowymi*. Oznaczmy ową rodzinę jako  $\mathcal{O}$ , a jej wspólną oś potęgową jako  $k$ .

Wybierzmy na  $k$  dowolny punkt  $P$ . Poprowadźmy z  $P$  styczną do dowolnego okręgu  $o \in \mathcal{O}$  i niech  $T$  będzie punktem styczności (rys. 1). Wówczas  $PT^2 = PX \cdot PY$  (co wynika z definicji osi potęgowej). Oznacza to, że okrąg  $\omega$  o środku  $P$  i promieniu  $\sqrt{PX \cdot PY}$  jest *prostopadły* do  $o$ , czyli styczne do tych okręgów w punkcie przecięcia są prostopadłe. Z dowolności wyboru  $o$  okrąg  $\omega$  jest prostopadły do wszystkich okręgów z rodzyń  $\mathcal{O}$ . Rodzinę tak skonstruowanych okręgów  $\omega$  dla różnych wyborów punktu  $P$  na prostej  $k$  oznaczmy przez  $\Omega$ .

Można pokazać, że osią potęgową dowolnych dwóch okręgów z rodzyń  $\Omega$  jest symetralna  $l$  odcinka  $XY$ . Dlatego  $\Omega$  również nazywana jest rodziną okręgów współosiowych lub też *pękiem* – tym razem jednak są to okręgi parami rozłączne i dlatego to drugie określenie może być odrobinę mylące. Ogólnie *okręgami współosiowymi* nazwiemy każdą rodzinę okręgów, dla której istnieje prosta będąca osią potęgową dowolnej pary okręgów z tej rodzyń. Jeśli nie można jej powiększyć o żaden dodatkowy okrąg, mówimy o *pęku okręgów*.

Wybierzmy dowolny punkt  $Q$  i okrąg  $\omega \in \Omega$ . Poprowadźmy *biegunową*  $Q$  względem  $\omega$  – definicja biegunowej pojawiła się już w artykule Stanisława Majchrzaka. Udowodnimy, że dla różnych wyborów okręgu  $\omega$  utworzone w ten sposób proste przecinają się w jednym punkcie. W tym celu przypomnimy alternatywną definicję biegunowej (patrz KPO w  $\Delta_{23}^1$ ) – jest to prosta prostopadła do odcinka łączącego dany punkt ze środkiem okręgu, przechodząca przez obraz *inwersyjny* tego punktu względem okręgu. Czytelnikom, którym obce jest pojęcie inwersji, a którzy mimo to pragną doczytać ten tekst do końca (co jest godne pochwały!), polecam *Deltoid* z numeru  $\Delta_{13}^5$  oraz artykuł Michała Miśkiewicza z  $\Delta_{14}^7$ . Dla nas istotne będzie jedynie to, że inwersja względem okręgu  $\kappa$  o środku w punkcie  $K$  zachowuje półproste wychodzące z punktu  $K$  oraz okręgi prostopadłe do  $\kappa$ .

Narysujmy teraz okrąg  $o_Q$  opisany na trójkącie  $XYQ$ . Oczywiście  $o_Q \in \mathcal{O}$ , zatem  $o$  jest prostopadły do wszystkich okręgów z  $\Omega$ , w tym  $\omega$ . Dlatego obraz inwersyjny  $Q$  względem  $\omega$  to punkt  $R$  przecięcia  $o$  z półprostą ze środkiem  $\omega$  do  $Q$  (rys. 2). Zaś odpowiednia bieguna to prosta prostopadła do wspomnianej półprostej, przechodząca przez  $R$ . Oznacza to jednak, że bieguna ta przechodzi przez punkt  $Q'$ , antypodalny do  $Q$  w okręgu  $o_Q$  (gdyż kąt  $QRQ'$  jest prosty). Udowodniliśmy w ten sposób, że bieguna punktu  $Q$  względem okręgów z rodzyń  $\Omega$  przecinają się w punkcie  $Q'$  (zależnym tylko od punktów  $X$ ,  $Y$  i  $Q$ ).

Udowodnimy teraz, że bieguna  $Q$  względem okręgów z  $\mathcal{O}$  również przecinają się w jednym punkcie. Pomysł jest dokładnie taki sam – wystarczy udowodnić, że istnieje okrąg  $\omega_Q$  należący do  $\Omega$ , który przechodzi przez  $Q$ . Wówczas

wszystkie rozważane biegunowe będą musiały przechodzić przez punkt  $Q''$  antypodalny do  $Q$  w  $\omega_Q$ . Skonstruowanie okręgu  $\omega_Q$  nie jest trudne – potrzeba (i wystarcza), by był on prostopadły również do okręgu  $o_Q$ . Dlatego środek szukanego okręgu  $\omega_Q$  leży na prostej stycznej do  $o_Q$  w punkcie  $Q$ . Środek ten leży też na prostej  $k$ , co pozwala na jego wyznaczenie i w konsekwencji lokalizację punktu  $Q''$ , w którym przecinają się wszystkie biegunowe punktu  $Q$  względem okręgów z  $\mathcal{O}$ .

Na zakończenie wybierzmy w pęku  $\mathcal{O}$  dowolne dwa prostopadłe okręgi i dołączmy do nich dowolny okrąg z  $\Omega$ . Dostaniemy trzy okręgi, z których każde dwa są prostopadłe – ciekawa własność jak na prostopadłość. A czy możliwa jest taka konfiguracja czterech okręgów?

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delt*

### Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2025



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
778 ( $WT = 1,95$ ), 779 ( $WT = 3,15$ )  
z numeru 5/2024

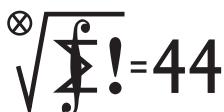
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5-43,19
Jacek Konieczny	Poznań	40,87
Konrad Kapcia	Poznań	2-39,97
Tomasz Wietecha	Tarnów	17-30,38
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3-27,19
Jan Zambrzycki	Białystok	4-25,85

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
881 ( $WT = 1,5$ ) i 882 ( $WT = 2,27$ )  
z numeru 5/2024

Adam Woryna	Ruda Śl.	44,68
Michał Adamaszek	Kopenhaga	42,89
Szymon Kitowski	Warszawa	41,11
Witold Bednarek	Lódź	38,79
Krzysztof Zygan	Lubin	37,56
Mikołaj Pater		36,34
Tomasz Wietecha	Tarnów	35,18
Andrzej Daniluk	Warszawa	34,46
Jedrzej Biedrzycki		32,29
Andrzej Kurach	Ryjewo	31,79

Pan Adam Woryna, Weteran naszej ligi już od kilkunastu lat, teraz znów bardziej aktywny, autor kilku bardzo ciekawych zadań, właśnie wykonał czwartą rundę.

### Klub 44 M



#### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej karcie), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnich kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

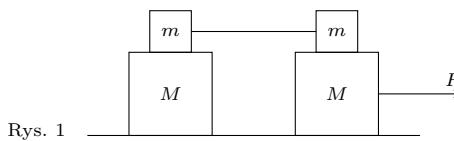
współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązań tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

#### Zadania z fizyki nr 788, 789

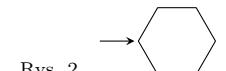
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**788.** Na gładkim stole leży układ klocków przedstawiony na rysunku 1. Współczynnik tarcia między klockami o masach  $M$  i  $m$  wynosi  $\mu$ . Klocki o masach  $m$  połączone są nieważką, nierozciągliwą nicią. Prawy dolny klocek ciągnięty jest równolegle do stołu siłą  $F$ . Znaleźć przyspieszenia wszystkich klocków.

**789.** Sześciokątny ołówek popchnięto wzdłuż płaszczyzny poziomej jak na rysunku 2. Jaki musi być współczynnik tarcia  $\mu$  między ołówkiem a płaszczyzną, aby ołówek ślizgał się po płaszczyźnie i nie obracał?



Rys. 1



Rys. 2

#### Zadania z matematyki nr 891, 892

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**891.** Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste  $\varphi$ , spełniające dla każdej liczby całkowitej  $n \geq 0$  warunek:  $\cos(2^n\varphi) \leq 0$ .

**892.** Dana jest liczba naturalna  $n \geq 2$ . W turnieju badmintonu bierze udział  $n$  zawodników; każdy z każdym rozgrywa jeden mecz, nie ma remisów. Dla każdej liczby  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  wyznaczyć maksymalną wartość, jaką może osiągnąć liczba zawodników, którzy zakończyli turniej, mając dokładnie  $k$  wygranych meczów.

*Zadanie 892 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.*



## Prosto z nieba: Woda pod powierzchnią Marsa



Zdjęcia powierzchni Marsa wskazujące na trwaly przepływ wody w przeszłości. Źródło zdjęcia: NASA/JPL/Malin Space Science Systems

Na podstawie obserwacji powierzchni Marsa wiemy, że ponad trzy miliardy lat temu dużą jego część pokrywała woda. Widzimy ślady pozostawione przez rzeki, jeziora, a nawet oceany. Niestety z przyczyn, których nie do końca rozumiemy, Mars utracił większość swojej atmosfery, a co za tym idzie i wody. Tylko niewielka ilość pozostała na Marsie w postaci lodu (głównie czapy lodowej na biegunie północnym Marsa) lub została związana w minerałach. Dziś powierzchnia Marsa to pustynia. Na tym skończyłaby się cała historia wody na Marsie, gdyby nie hipoteza, że duża jej ilość może być ukryta głęboko pod powierzchnią planety. Dotychczas nie mieliśmy na to dowodów poza spekulacjami – skoro duża część wody na Ziemi znajduje się pod ziemią, to nie ma powodu, aby tak nie było również na Marsie. Oczywiście potwierdzenie istnienia takich zbiorników wody na Marsie zdecydowanie ułatwiłoby nam od dawna zapowiadane misje załogowe i potencjalną kolonizację. Byłoby też kluczowe w zrozumieniu ewolucji klimatu, powierzchni i wnętrza Czerwonej Planety. Nie wspominając już o tym, że woda jest niezbędna do podtrzymywania życia, takiego, jakie znamy, i teoretycznie mogły się w niej rozwijać proste formy życia.

Dobra wiadomość jest taka, że naukowcy z Uniwersytetu Kalifornijskiego w San Diego właśnie znaleźli dowód na istnienie wody w stanie ciekłym głęboko pod powierzchnią Marsa. Odkrycia dokonano przy pomocy sondy InSight. Jest to bezzałogowa, stacjonarna sonda, która w 2018 roku wylądowała na Marsie. Wyposażona jest m.in.

w sejsmometr, który przez 4 lata, do grudnia 2022 roku, nasłuchiwał i rejestrował trzęsienia ziemi w głębi Czerwonej Planety. W tym czasie było ich 1319. Mierząc prędkość przemieszczania się fal sejsmicznych, naukowcy byli w stanie ustalić, przez jaki materiał się one przemieszczają. Tych samych technik używa się do poszukiwania wody lub ropy i gazu na Ziemi. Analiza sygnałów sejsmicznych zarejestrowanych przez InSight wykazała obecność wody na głębokości od 10 km do 20 km pod powierzchnią Marsa.

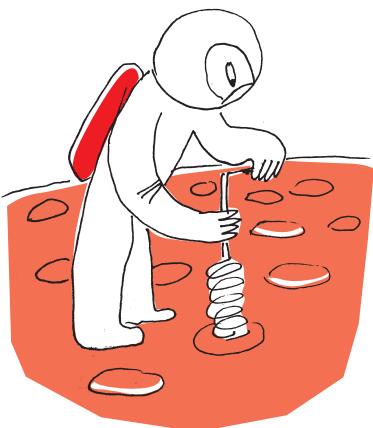
InSight jest sondą stacjonarną, przez co jest ona w stanie rejestrować trzęsienia ziemi tylko bezpośrednio pod swoimi „stopami”. Naukowcy spodziewają się jednak, że odkryta właśnie warstwa ziemi nasyciona wodą rozciąga się na całą planetę. Oczywiście, aby to udowodnić, musielibyśmy dokonać pomiarów sejsmicznych w różnych częściach Marsa. Ale jeśli tak jest i skorupa Marsa jest podobna na całej planecie, to według naukowców z Uniwersytetu Kalifornijskiego może się w niej znajdować więcej wody niż szacowana objętość hipotetycznych starożytnych marsjańskich oceanów.

Podobnie jak na Ziemi, gdzie wody gruntowe są połączone z powierzchnią poprzez rzeki i jeziora, z pewnością było tak również w przeszłości Marsa, a wody gruntowe, które właśnie odkryto, są zapisem tej przeszłości. Nie wiemy jednak, jaki jest dokładnie skład chemiczny tej wody. Zapewne nie tworzy ona też podziemnych jezior czy rzek, tylko coś w rodzaju podziemnego błota – głębokie osady ziemi w skorupie Marsa są nasycone ciekłą wodą lub tworzą warstwy wodonośne. Problemem jest też głębokość, na jakiej pokłady wody się znajdują. Raczej nie będziemy w stanie do nich dotrzeć w najbliższej przyszłości. Najgłębszy odwiert badawczy na świecie ma głębokość trochę ponad 12 km, ale typowe odwerty sięgają „tylko” 1 km w głąb ziemi i wciąż stanowią wyzwanie pod względem wymaganej energii i infrastruktury. Dokonanie podobnego wyczynu na Marsie może być nie lada wyzwaniem i wymagałoby nakładu ogromnych środków.

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Artykuł oparty na publikacji: Vashan Wright, Matthias Morzfeld i Michael Manga, „Liquid water in the Martian mid-crust”, *The Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS)*, 121 (35).





## Niebo w grudniu

Grudzień oznacza najdłuższe noce i najkrótsze dni w ciągu roku. Jak zawsze, około 13 grudnia następuje najwcześniejszy zachód Słońca. Natomiast 8 dni później Słońce osiągnie najbardziej na południe wysunięty punkt na ekliptyce i tym samym zacznie się astronomiczna zima. Również jak co roku najpóźniejszy wschód Słońca ma miejsce na przełomie grudnia i stycznia.

W ostatnim miesiącu roku na naszym niebie można dostrzec wszystkie planety Układu Słonecznego. Wieczorem widocznych jest aż pięć z nich. Wenus, Saturn i Jowisz są łatwe do zauważenia gołym okiem, gdyż są najjaśniejszymi źródłami światła w swojej okolicy. Do odnalezienia Neptuna i Urana potrzebna jest lornetka lub teleskop. Ich identyfikację ułatwia też Księżyc, który w trakcie miesiąca spotka się z każdą z tych planet.

Nocne obserwacje warto zacząć od Wenus, która zachodzi najwcześniej. Planeta zbliża się do styczniowej maksymalnej elongacji, a dzięki wzrastającemu nachyleniu ekliptyki do wieczornego widnokręgu w najbliższych miesiącach stanie się ona ozdobą wieczornego nieba. W grudniu Wenus zmniejszy dystans do Saturna do  $16^\circ$ . W tym czasie średnica tarczy planety urośnie z  $17''$  do  $23''$ , a jasność z  $-4,1^m$  do  $-4,4^m$ . Równocześnie faza planety spadnie z 67% do 55%. O zmierzchu planeta stopniowo zwiększy wysokość z  $10^\circ$  do  $21^\circ$ .

Ciekawe spotkania z innymi ciałami niebieskimi Księżyc zacznie właśnie od Wenus. 1 grudnia Srebrny Glob przejdzie przez nów, a blisko drugiej planety od Słońca znajdzie się 3 i 4 dni później. Najpierw w fazie 12% pokaże się w odległości  $5^\circ$ , na godzinie 5 względem niej, a następnie, w fazie zwiększonej do 19%, przeniesie się na pozycję  $8^\circ$  na lewo od Wenus.

8 dnia miesiąca Księżyc przejdzie przez I kwadrę, spotykając się jednocześnie z parą planet Saturn–Neptun. W grudniu dystans między tymi planetami wynosi około  $14^\circ$ . Szósta planeta od Słońca świeci blaskiem  $+1^m$ , prezentując w teleskopach tarczę o średnicy  $17''$ . Stosunek małej do wielkiej osi pierścieni Saturna zacznie spadać, i zmniejszy się do 0,08. Neptun natomiast świeci blaskiem  $+7,8^m$ , i nie da się go dostrzec gołym okiem. Również 8 grudnia planeta zatrzyma się na niebie, około  $38'$  na północny wschód od gwiazdy 20 Psc, i zmieni kierunek ruchu na prosty. Tego wieczora Księżyc pokaże się  $5^\circ$  na północny wschód od Saturna, a dobę później przyjmie podobne położenie względem Neptuna.

W kolejnych dniach Srebrny Glob przeniesie się na wschodnią część wieczornego nieba, gdzie w dniach 13 i 14 grudnia pokaże się najpierw  $7^\circ$  od Urana, a potem  $5^\circ$  na północ od Jowisza, prezentując fazę, odpowiednio, 96% i 99%. Jednocześnie Księżyc spotka się z Plejadami, zakrywając niektóre z gwiazd gromady. Uran znajdzie się po przeciwniej stronie Ziemi niż Słońce 17 listopada, a Jowisz uczyni to samo 7 grudnia. Uran osiąga jasność  $+5,6^m$ , i do jego obserwacji dobrze użyć lornetki. Jowisz natomiast świeci blaskiem  $-2,8^m$ , przy średnicy tarczy  $48''$ . Trudno zatem przegapić go na niebie. Uran do końca miesiąca zwiększy dystans do gwiazdy 13 Tau do  $4,5^\circ$ . Jowisz zaś pokona w grudniu

około  $4^\circ$  na tle gwiazdzbioru Byka, zbliżając się na niecałe  $5^\circ$  do Aldebarana.

W układzie księżyców galileuszowych Jowisza warto zwrócić uwagę na przejście Kallisto na południe od tarczy planety 4 i 20 grudnia i na północ 29 grudnia czy przejście Ganimedesa ze swoim cieniem w nocy z 8 na 9 grudnia (cień tuż przy swoim właściwym) oraz 16 grudnia rano (cień już wyraźnie dalej na wschód).

Przez większą część nocy widoczny jest Mars, który zbliża się do styczniowej opozycji. 7 grudnia planeta zwróci się na niebie tuż nad trapezem gwiazd otaczających jasną gromadę otwartą gwiazd M44 w Raku i powędruje w kierunku Bliźniąt. W grudniu Mars pojaśnieje od  $-0,5^m$  do  $-1,3^m$ , zwiększając przy tym średnicę swojej tarczy od  $11''$  do  $14''$ . Księżyc spotka się z planetą 18 dnia miesiąca, w fazie 90%. O świcie zbliży się doń na odległość  $2^\circ$ . Dysponując teleskopem, można próbować zaobserwować zakrycie Marsa przez Księżyca, do którego dojdzie około godziny 10:17. Jednak będzie to duże wyzwanie, gdyż nie tylko dojdzie do niego za dnia, ale też tuż przed zachodem obu ciał Układu Słonecznego w Polsce.

20 grudnia rano Księżyca w fazie 75% minie w odległości  $2^\circ$  Regulusa, najjaśniejszą gwiazdę Lwa, by trzy dni później przejść przez ostatnią kwadrę. 25 grudnia natomiast cienki już sierp Srebrnego Globu, w fazie 30%, wejdzie  $4^\circ$  od Spiki, w Pannie. 28 grudnia do kolejnego nowiu pozostało niewiele ponad 2 dni, i Księżyca w fazie 7% zajmie pozycję  $4^\circ$  na prawo od Antaresa w Skorpionie. A odkładając tę odległość jeszcze dwukrotnie i troszkę wyżej, natrafi się na Merkurego.

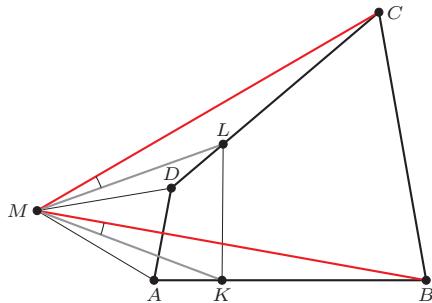
Pierwsza planeta od Słońca 25 grudnia osiągnie maksymalną elongację zachodnią, wynoszącą  $22^\circ$ , i ozdobi poranne niebo od połowy grudnia do pierwszej dekady stycznia. Pod koniec miesiąca o świcie Merkury wzniesie się na wysokość  $6^\circ$  i przy czystym niebie powinno się go dość łatwo odnaleźć nawet bez pomocy lornetki, gdyż jego jasność przekroczy  $-0,3^m$ . Urośnie także faza tarczy planety – od 35% do 75%, spadnie jednak jej średnica – do poniżej  $6''$ .

Ariel MAJCHER

# Rozwiązań zadań ze strony 7



## Rozwiązań zadania M 1801.



Zauważmy, że trójkąty  $MDL$  i  $CDM$  są podobne, a skala ich podobieństwa jest równa 2 ( $CD = 2MD$ ,  $DM = 2DL$ , kąt przy wierzchołku  $D$  jest wspólny). W szczególności  $MC = 2ML$ . Podobnie  $MB = 2MK$ . Z założenia  $BC = 2KL$ , więc trójkąt  $MKL$  jest podobny do trójkąta  $MBC$ . Zatem  $\angle LMK = \angle CMB$ , a stąd  $\angle LMC = \angle KMB$ . Oznacza to, że trójkąt  $LMC$  jest podobny do trójkąta  $KMB$ . Ale  $LC = KB$ , więc te trójkąty są przystające, skąd otrzymujemy, że  $BM = CM$ .



## Rozwiązań zadania M 1802.

Na początku zauważmy, że nie ma znaczenia, w jakiej kolejności zmieniane są znaki, ważne jest tylko to, w jakich wierszach i kolumnach (w skrócie *liniach*) następuje zmiana i ile razy. Jeśli w danym ruchu dwukrotnie zmienimy znaki, to nic się nie zmieni. Dlatego wystarczy zmienić znaki nie więcej niż raz w każdej linii.

Załóżmy, że udało nam się uzyskać wszystkie plusy, zmieniając znaki w  $k$  kolumnach i  $r$  wierszach. Jeżeli  $k + r > n$ , zaznaczmy na czerwono wszystkie linie, w których zmieniliśmy znaki. Znak zmienił się tylko w polach należących do dokładnie jednej czerwonej linii. Ale wtedy te same pola należą do dokładnie jednej niepomalowanej linii. Dlatego też rezultat byłby taki sam, gdybyśmy zmienili znaki w niepomalowanych liniach, a tych jest dokładnie

$$(n - k) + (n - r) = 2n - (k + r) < n.$$



## Rozwiązań zadania M 1803.

Równanie  $2x^2 - y^2 = 1$  ma rozwiązanie  $(x, y) = (1, 1)$ . Ponadto zachodzi równość:

$$2(3x + 2y)^2 - (4x + 3y)^2 = 2x^2 - y^2.$$

Jeśli zatem  $(x, y)$  rozwiązuje równanie  $2x^2 - y^2 = 3$ , to  $(3x + 2y, 4x + 3y)$  również, stąd rozwiązań jest nieskończenie wiele. Weźmy takie rozwiązanie, dla którego  $y > 1000$  i niech  $n = 3xy$ . Wówczas  $2n^2 = 6x^2 * 3y^2 = (3y^2 + 3) * (3y^2) = z^2 + z - 2$ , gdzie  $z = 3y^2 + 1$ . Rozważmy 4 kolejne liczby i ich odpowiednie rozkłady:

$$4n^4 - 2 = (z^2 - 2)(z^2 + 2z - 1),$$

$$4n^4 - 1 = (2n^2 - 1)(2n^2 + 1),$$

$$4n^4 = 2n^2 \cdot 2n^2,$$

$$4n^4 + 1 = (2n^2 + 2n + 1)(2n^2 - 2n + 1).$$

Liczba  $4n^4$  jest oczywiście prawie kwadratem, natomiast z założenia  $y > 1000$  dostaniemy, że każdy z ułamków

$$\frac{z^2 - 2}{z^2 + 2z - 1}, \quad \frac{2n^2 - 1}{2n^2 + 1}, \quad \frac{2n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 2n + 1}$$

jest równy co najmniej 0,99 – więc liczby  $4n^4 - 2$ ,  $4n^4 - 1$ ,  $4n^4 + 1$  są również prawie kwadratami.

*Uwaga:* Dobór liczb inspirowany jest *tożsamością Sophie Germain*. Równanie  $2x^2 - y^2$  jest natomiast przykładem równania typu *Pella* i pod tym hasłem można znaleźć więcej informacji o sposobach znajdowania jego rozwiązań.



## Rozwiązań zadania F 1109.

Prędkość,  $v$ , ciała obiegającego po orbicie o promieniu  $r$  środek sferyczne symetrycznego rozkładu masy zależy jedynie od  $M(r)$ , tj. wielkości masy wewnętrz kuli o promieniu  $r$ , i wynosi ( $G$  oznacza stałą grawitacji):

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}.$$

Znając  $v(r)$ , możemy wyznaczyć  $M(r)$ :

$$M(r) = \frac{v^2 r}{G}.$$

W przypadku sferycznego rozkładu masy mamy:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) = \frac{d}{dr} \left( \frac{v^2 r}{G} \right).$$

Po obliczeniu pochodnych otrzymujemy:

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2 G} \left( v^2 + 2vr \frac{dv}{dr} \right).$$

W obszarze, gdzie  $v$  nie zmienia się ze zmianą  $r$ , mamy więc:

$$\rho(r) = \frac{v^2}{4\pi r^2 G}.$$



## Rozwiązań zadania F 1110.

Cząstki (krople) błota odrywają się z prędkością styczną do koła i co do wartości równą prędkości roweru. Przeanalizujmy ruch kropli, która oderwała się z końca promienia tworzącego kąt  $\varphi$  z pionem (licząc od powierzchni drogi). W momencie oderwania kropla znajdowała się na wysokości  $h = R(1 - \cos \varphi)$  nad drogą i miała pionową składową prędkości równą  $v \sin \varphi$ . Najwyższy punkt toru jej ruchu („rzut ukośny”) znajdował się więc na wysokości:

$$H = R(1 - \cos \varphi) + \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{2g}.$$

Przyrównajmy pochodną  $H$  względem  $\varphi$  do zera:

$$H' = R \sin \varphi + \frac{v^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g} = 0.$$

Gdy  $v^2 < gR$ , pochodna zeruje się jedynie dla  $\varphi = 0$  lub  $\varphi = \pi$  i maksymalna wysokość  $H = 2R$  (dla  $\varphi = \pi$ ). Gdy  $v^2 > gR$ , zerowaniu pochodnej odpowiada także warunek:

$$\cos \varphi = -\frac{gR}{v^2},$$

co odpowiada  $\varphi > \pi/2$  i:

$$H = R + \frac{gR^2}{2v^2} + \frac{v^2}{2g}.$$



# Konstrukcje indukcyjne

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Jednym z najprostszych przykładów omawianych tu konstrukcji jest następujące rozumowanie, znane już Euklidesowi. Niech  $p_1, p_2, \dots, p_n$  będą różnymi liczbami pierwszymi. Dowolny dzielnik pierwszy  $p_{n+1}$  liczby  $p_1 p_2 \dots p_n + 1$  jest różny od  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Możemy w ten sposób utworzyć nieskończony ciąg różnych liczb pierwszych.

Ogólna idea jest następująca. Mając już obiekty  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ , używamy ich w jakiś sposób do skonstruowania kolejnego obiektu  $\mathcal{A}_{n+1}$ . Tymi obiektami mogą być liczby, ale również zbiory, funkcje, konfiguracje geometryczne bądź kombinatoryczne i wiele innych.

Jako dodatkowe przykłady podam tu dwa zadania, które ukazały się już w kąciku numer 7 ( $\Delta_{19}^7$ ), poświęconemu indukcji.

**Przykład 1.** Dla każdego całkowitego dodatniego  $n$  istnieje  $n$ -cyfrowa wielokrotność liczby  $2^n$ , w której zapisie nie ma innych cyfr niż 1 i 2.

*Rozwiążanie.* Powiedzmy, że dla pewnego  $n$  znamy już szukaną liczbę  $a_n$ .

Wykażemy, że możemy przyjąć  $a_{n+1} = a_n + 10^n$  lub  $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 10^n$ . Są to liczby  $(n+1)$ -cyfrowe powstałe przez dopisanie na początek zapisu dziesiętnego liczby  $a_n$  cyfry 1 lub 2. Zapiszmy  $a_n = k \cdot 2^n$  dla pewnego naturalnego  $k$ . Wówczas

$$a_n + 10^n = (k + 5^n) \cdot 2^n, \quad a_n + 2 \cdot 10^n = (k + 2 \cdot 5^n) \cdot 2^n.$$

Jeśli  $k$  jest liczbą nieparzystą, to pierwsza z powyższych liczb dzieli się przez  $2^{n+1}$ , a jeśli parzystą – druga. Konstrukcję rozpoczęynamy od  $a_1 = 2$ .

**Przykład 2.** Dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 7$  można tak umieścić na okręgu liczby od 1 do  $n$ , by wartość bezwzględna różnicy sąsiednich liczb zawsze była kwadratem liczby naturalnej.

*Rozwiążanie.* Wykażemy mocniejszą tezę – można to zrobić tak, by dodatkowo liczby  $n$  i  $n - 1$  sąsiadowały. Jeśli znamy takie rozmieszczenie dla  $n$  liczb, to możemy łatwo otrzymać analogiczne dla  $n + 3$  liczb – wystarczy pomiędzy  $n$  i  $n - 1$  wpisać kolejno:  $n + 1, n + 2, n + 3$ . Aby dokończyć dowód, trzeba jeszcze podać konstrukcję dla  $n = 7, 8, 9$ . Są one następujące:

$$7, 6, 2, 1, 5, 4, 3; \quad 8, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 4; \quad 9, 8, 4, 3, 7, 6, 2, 1, 5.$$

Bardzo istotne jest, by oprócz kroku indukcyjnego konstrukci sformułować i uzasadnić odpowiednie warunki początkowe, gwarantujące, że dane obiekty istnieją dla każdego  $n$ , które nas interesuje.

## Zadania

- Udowodnić, że dla  $n > 1$  w wyrażeniu  $0 + 1 + 2 + \dots + n$  można zamienić niektóre ze znaków  $+$  na  $-$  w taki sposób, by jego wartość była równa 0 lub 1.
- Dowieść, że dla każdego naturalnego  $n \geq 2$  istnieje wielościan wypukły, którego ścianami są: jeden kwadrat i  $2n$  trójkątów rozwartokątnych.
- Dane są wektory  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$ , każdy o długości 1. Udowodnić, że istnieją liczby  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  ze zbioru  $\{-1, 1\}$  o tej własności, że dla każdego całkowitego dodatniego  $n$  zachodzi nierówność  $|\varepsilon_1 \vec{v}_1 + \varepsilon_2 \vec{v}_2 + \dots + \varepsilon_n \vec{v}_n| \leq \sqrt{n}$ .
- Wykazać, że istnieje ciąg liczb całkowitych dodatnich, w którym każda liczba całkowita dodatnia występuje dokładnie raz, a przy tym każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest dzielnikiem lub wielokrotnością poprzedniego wyrazu (II WLM).
- Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 3$  istnieją dwa rozłączne  $n$ -elementowe zbiory,  $A$  i  $B$ , zawierające wyłącznie liczby całkowite dodatnie spełniające następujący warunek: sumy wszystkich elementów w zbiorach  $A$  i  $B$  są równe oraz iloczyny wszystkich elementów w zbiorach  $A$  i  $B$  są równe (LXI OM).
- Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 2$  istnieje  $n$ -elementowy zbiór  $A$  liczb całkowitych dodatnich o następującej własności: dla każdych dwóch różnych elementów  $a, b \in A$  zachodzi równość  $\text{NWD}(a, b) = |a - b|$  (XIV WLM).
- Udowodnić, że dla  $n \geq 12$  istnieje permutacja  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ciągu  $(1, 2, \dots, n)$  o następującej własności:  $a_k + k$  jest kwadratem liczby naturalnej dla każdego  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .



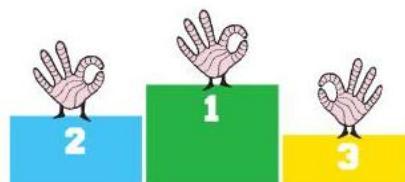
# 47. KONKURS Uczniowskich PRAC z MATEMATYKI im. PAWŁA DOMAŃSKIEGO

W konkursie biorą udział matematyczne, twórcze prace napisane przez uczniów szkół ponadpodstawowych oraz podstawowych w klasach 7–8.

Mówiąc krótko: należy udowodnić coś, czego jeszcze nikt inny nie udowodnił!



**TERMIN ZGŁASZANIA PRAC:  
30 KWIECIEŃ 2025 ROKU**



Regulamin konkursu, lista dotychczasowych laureatów, niektóre prace oraz wiele innych przydatnych informacji:  
[www.deltami.edu.pl/delta/redakcja/konkurs\\_prac\\_uczniowskich](http://www.deltami.edu.pl/delta/redakcja/konkurs_prac_uczniowskich)

