Zadania dodatkowe

Termin: wrzesień

Zadanie 1. Niech $x = 10^{10}$ oraz $y = x^x$. Ile cyfr ma liczba y^y?

Zadanie 2. Jaki jest następny wyraz ciągu: $1, 2, 4, 7, 8, 11, 14, 16, 17, 19, 22, 26, 28, 29, 41, 44$?
Wskazówka: W opowiadaniu „Srebrny płomień" o Sherlocku Holmesie jest następujący dialog:
— Jest jeszcze coś, na co chciałby pan zwrócić moją uwagę?
— Na dziwny przypadek psa nocną porą.
— Pies w nocy milczał.
— To jest właśnie dziwny przypadek – zauważył Sherlock Holmes.

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne dodatnie, które można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb złożonych.

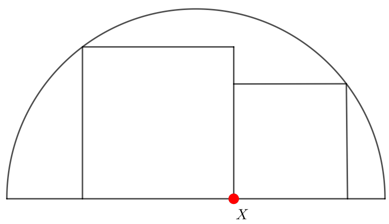
Zadanie 4. Niech a, b, c, d, x będą takimi liczbami całkowitymi, że $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) - 4 = 0$ oraz a, b, c, d są parami różne. Wykaż, że $x = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$.

Zadanie 5. Czy istnieją takie liczby niewymierne a, b, że a^b jest liczbą wymierną?

Termin: październik

Zadanie 6. Pociąg Pendolino jedzie na pewnej trasie ze średnią prędkością o 25% większą niż Intercity. O ile procent krócej trwa podróż tym pociągiem?

Zadanie 7. Rozważmy dwa kwadraty „wpisane" w półokrąg. W którym miejscu podstawy półokręgu powinien być punkt B, aby suma pól kwadratów była największa?



Zadanie 8. Rozwiąż równanie $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$.

Zadanie 9. Niech $x = \sqrt[4]{2}$. Która liczba jest większa:

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}} \qquad \text{czy} \qquad 10^{10^{10}}?$$

Zadanie 10. Rozważmy zbiór $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$. Ile jest podzbiorów zbioru A, których suma elementów wynosi 2 045 253?

Rozwiązanie 1. Liczymy po kolei

$$y = \left(10^{10}\right)^{10^{10}} = 10^{10 \cdot 10^{10}} = 10^{10^{11}}$$

. Tak więc:

$$y^y = \left(10^{10^{11}}\right)^{10^{10^{11}}} = 10^{10^{11} \cdot 10^{10^{11}}} = 10^{10^{11+10^{11}}}.$$

A zatem liczba y^y ma $10^{11+10^{11}} + 1$ cyfr (bo liczba 10^k ma $k + 1$ cyfr).

Rozwiązanie 2. Wskazówka podpowiada nam, że warto zająć się czymś, czego nie ma, czego brakuje. W powyższym ciągu „brakuje" następujących liczb: 3,5,6,9,10,12,13,15,18,20,21,23,24,25,27, 30, 31, 32,33,34,35,36,37,38,39,40,42,43. Co je łączy? Wszystkie te liczby są powiązane z trójką i piątką: są ich wielokrotnościami lub zawierają te cyfry. Tak więc następną liczbą będzie 46.

Rozwiązanie 3. Zauważmy, że każdą liczbę n można zapisać w postaci $n = \frac{n^3}{n^2}$. Zarówno licznik jak i mianownik są liczbami złożonymi, więc w podany sposób można przedstawić każdą liczbę naturalną dodatnią.

Rozwiązanie 4. Po przeniesieniu 4 na prawą stronę mamy iloczyn czterech liczb całkowitych równy 4. Co więcej liczby te są różne, bo a, b, c, d były różne. Liczba 4 ma łącznie 4 różne dzielniki całkowite, więc powyższy iloczyn składa się z liczb: $-2, -1, 1, 2$. Bez straty ogólności zachodzi więc:

$$\begin{cases} x - a = -2, \\ x - b = -1, \\ x - c = 1, \\ x - d = 2. \end{cases}$$

Dodając stronami otrzymujemy $4x - (a + b + c + d) = 0$ skąd $x = \dfrac{a + b + c + d}{4}$.

Rozwiązanie 5. Rozważmy liczbę $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ciężko stwierdzić, czy ta liczba jest wymierna, czy nie, ale w tej chwili nie ma to znaczenia. Są jednak dwie możliwości:

- jeśli jest ona wymierna, to znaleźliśmy takie liczby a i b, bo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
- jeśli natomiast jest ona niewymierna, to podnosząc ją do potęgi $\sqrt{2}$ otrzymamy liczbę wymierną, bowiem $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$.

To oznacza, że takie liczby istnieją, choć z powyższego rozumowanie nie jesteśmy w stanie wskazać, która para jest dobra.
Jest to przykład dowodu niekonstruktywnego, czyli takiego, w którym dowodzimy, że coś istnieje (np. liczba, zbiór, funkcja), jednocześnie nie podając jak ten obiekt wygląda. Co ciekawe, dopiero w roku 1930 wykazano, że liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest niewymierna.

$\mathbb{P}$iotr $\mathbb{B}$ury