Zadania dodatkowe

Termin: wrzesień

Zadanie 1. Za pomocą cyfr $2, 0, 2, 4$ w podanej kolejności połączonych znakami i symbolami matematycznymi utworzyć liczby od 1 do 20 (chętni mogą ciągnąć tę listę dalej... np. do 50).
Na przykład: $0 = 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 4$, $\quad 5 = 2^{0 \cdot 2} + 4$, $\quad 31 = -2^0 + \log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}} 4$.

Zadanie 2. Rozważmy bardo cienką powierzchnię np. chusteczkę[1] o grubości $0,1$ mm. Składamy ją na pół (ma grubość $0,2$ mm), znowu na pół (ma grubość $0,4$ mm), i tak składamy ją na pół łącznie 40 razy. Jakiej wysokości (grubości) będzie ten stosik?

Zadanie 3. Rozważmy nieskończoną sumę $\frac{C_1}{\pi} + \frac{C_2}{\pi^2} + \frac{C_3}{\pi^3} + \frac{C_4}{\pi^4} + \ldots$, gdzie C_n oznacza n-tą cyfrę po przecinku[2] liczby π. Wykaż, że suma ta jest skończona (tzn. jest równa pewnej liczbie rzeczywistej).

Zadanie 4. Oblicz najmniejszą wartość wyrażenia: $x^{2024} + \frac{2024}{x}$ dla $x \in \mathbb{R}_+$.

Zadanie 5. Niech dane będzie równanie $x^3 + 2ax + b = 0$ (a, b – dane). Wykaż, że jeśli x_0 spełnia to równanie, to $x_0 b \leqslant a^2$.

Termin: październik

Zadanie 6. Udowodnij, że istnieje tylko jeden zbiór pusty.

Zadanie 7. Rozważmy listę, która zawiera 2024 ponumerowane kolejno zdania. Zdanie n-te ma postać:

„Dokładnie n zdań na tej liście jest fałszywych.”

Ile zdań jest prawdziwych i które?

Zadanie 8. Niech dany będzie zbiór $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$. Które liczby ze zbioru A spełniają implikację:

Jeżeli n jest parzysta, to n jest podzielna przez 4.

Zadanie 9. Znajdź wszystkie liczby **niewymierne** a, dla których $a^2 - 44a$ oraz $a^3 - 2015a$ są **wymierne**.

Zadanie 10. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniające warunki: $a + b + c + d > 0$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd > 0$, $abc + abd + acd + bcd > 0$, $abcd > 0$. Wykaż, że każda z liczb a, b, c, d jest dodatnia.

Termin: listopad

Zadanie 11. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = z^7 \\ y^4 + z^4 = x^7 \\ x^4 + z^4 = y^7 \end{cases}$$

Zadanie 12. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$ jest nieparzysta.

Zadanie 13. Rozważmy kwadrat o boku 2, który dzielimy na cztery przystające kwadraty o boku 1. W każdy z tych małych kwadratów wpisujemy koło. Oblicz promień koła, którego środek jest środkiem dużego kwadratu i które jest styczne zewnętrznie do czterech małych kół.

---

[1] Jeśli ktoś uważa, że chusteczka jest za mała, by złożyć ją aż 40 razy, może wyobrazić sobie ogromną płachtę rozłożoną na bardzo dużym polu.

[2] Mowa oczywiście o standardowym rozwinięciu w systemie dziesiętnym tzn. $\pi = 3,1415926\ldots$.

Zadanie 14. Rozważmy analogiczną sytuację w 3D, tzn. sześcian o krawędzi 2, który dzielimy na osiem przystających sześcianów o krawędzi 1. W każdy z tych małych sześcianów wpisujemy kulę. Oblicz promień kuli, której środek jest środkiem dużego sześcianu i która jest styczna zewnętrznie do małych kul.

Zadanie 15. Rozważmy analogiczną sytuację w dowolnym n-tym wymiarze, tzn. hipersześcian o krawędzi 2, który dzielimy na 2^n przystających sześcianów o krawędzi 1. W każdy z nich wpisujemy hiperkulę. Oblicz promień hiperkuli, której środek jest środkiem dużego hipersześcianu i która jest styczna zewnętrznie do małych hiperkul.

Termin: grudzień

Zadanie 16. Żona zawarła z mężem kontrakt, że jeśli danego dnia obiad gotuje ona, to następnego dnia za przygotowanie obiadu odpowiedzialny jest mąż. Jeśli zaś w jakimś dniu obiad gotował mąż, to o wyborze następnego dnia decyduje rzut monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A_n – w n-tym dniu kontraktu obiad gotuje mąż. Czy istnieje granica $\lim_{n\to\infty} A_n$? Jeśli tak, to ją obliczyć.
Uwaga: Można przyjąć, że $P(A_1) = \frac{1}{2}$.

Zadanie 17. Rozważmy następującą sytuację z sądu. Podczas rozprawy prokurator mówi: „Jeśli oskarżony zabił swoją żonę, to z pewnością miał wspólnika". Obrońca zakrzyknął: „To kłamstwo!".
Dlaczego słowa obrońcy są niekorzystne dla oskarżonego?

Zadanie 18. Oblicz $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$.

Zadanie 19. Rozważmy dowolny wielokąt wypukły, w który można wpisać okrąg. Na każdym boku wielokąta wpisujemy liczbę 0 lub 1, w taki sposób, że na dwóch sąsiednich bokach (tzn. z wspólnym wierzchołkiem) nie znajdują się te same liczby. Udowodnij, że suma długości boków z liczbami 0 jest równa sumie długości boków z liczbą 1.

Zadanie 20. Rozważmy dowolny wielościan wypukły, w który można wpisać kulę. Na każdej ścianie wielościanu wpisujemy liczbę 0 lub 1, w taki sposób, że na dwóch sąsiednich ścianach (tzn. ze wspólną krawędzią) nie znajdują się te same liczby. Udowodnij, że suma pól ścian z liczbami 0 jest równa sumie pól ścian z liczbą 1.

Termin: styczeń

Zadanie 21. Rozwiąż układ równań w liczbach dodatnich

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$$

Zadanie 22. Która z liczb jest większa: 2^π, czy π^2?
Wskazówka: $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$.

Zadanie 23. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek: $x + f(x) = f(f(x))$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wykaż, że jest ona różnowartościowa.

Zadanie 24. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów spełniających warunek $xy < 10$.

Zadanie 25. Rozwiąż równanie $\log(2x-1)^2 = 2\log x^2$

Termin: luty

Zadanie 26. Dany jest układ równań z niewiadomymi x, y i parametrem $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y = 2m - 1 \\ x^2 + y^2 = m^2 + 2m - 3 \end{cases}$$

Wyznacz najmniejszą możliwą wartość xy.

Zadanie 27. Podać przykład liczby naturalnej dodatniej, której połowa jest kwadratem pewnej liczby naturalnej, jedna trzecia jest sześcianem pewnej liczby naturalnej oraz jedna piąta jest piątą potęgą pewnej liczby naturalnej.

Zadanie 28. Rozwiąż równanie: $\operatorname{tg}^2(x+y)+\operatorname{ctg}^2(x+y)=1-2x-x^2$.

Zadanie 29. Zapis liczby x w postaci

$$x=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

gdzie $a_0\geqslant 0$, $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ nazywamy ułamkiem łańcuchowym i w skrócie zapisujemy go w postaci: $[a_0,a_1,\ldots,a_n]$.

- Zamień ułamek łańcuchowy $[0,1,2,3,4,5]$ na zwykły,
- Zamień ułamek zwykły $\frac{7}{11}$ na łańcuchowy.

Wskazówka: zamianę $\frac{11}{8}$ *zaczniemy następująco* $\frac{11}{8}=1+\frac{3}{8}=1+\cfrac{1}{\frac{8}{3}}=1+\cfrac{1}{2+\frac{2}{3}}=\ldots$

Zadanie 30. Rozważmy następujący ciąg: $1,2,3,4,5$. Jaki powinien być kolejny, szósty wyraz tego ciągu? Choć mogłoby się wydawać, że jedyną logiczną odpowiedzą jest 6, to można znaleźć regułę, która będzie prawidłowa dla pierwszych pięciu wyrazów, a szósty możemy dobrać dowolnie. Dzieje się tak za sprawą wzoru interpolacyjnego Lagrange'a. Wzór ten mówi, że wielomian

$$W(x)=\sum_{i=1}^{n}y_i\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

spełnia $W(x_i)=y_i$ dla $i\in\{1,2,3,\ldots,n\}$. Po rozpisaniu tego wzoru tj.

$$W(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}y_1+\ldots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n,$$

gdzie w n-tym składniku w liczniku i mianowniku brakuje nawiasu z x_n, widać że dla $x=x_i$ wszystkie wyrazy wynoszą 0 poza wyrazem i-tym, ze względu na czynnik $x-x_i$. Ten i-ty wyraz się upraszcza ze względu na taki sam licznik i mianownik – tak więc po skróceniu pozostaje y_i.
Powiedzmy teraz, że chcielibyśmy aby wyraz szósty wynosił 19. Wystarczy przyjąć $x_1=1,x_2=2,x_3=3,x_4=4,x_5=5,x_6=6$ oraz $y_1=1,y_2=2,y_3=3,y_4=4,y_5=5,y_6=19$.
Sprawdzić, że rzeczywiście otrzymamy $W(1)=1,W(2)=2,W(3)=3,W(4)=4,W(5)=5$ (wystarczy dla dwóch z nich) oraz $W(6)=19$. Podać postać wielomianu po wymnożeniu w postaci ogólnej.

Termin: marzec

Zadanie 31. Czy istnieje trójkąt, którego każdy bok ma długość większą niż 1 km, a jego pole jest równe 1 cm^2?

Zadanie 32. Dane są liczby x,y,z, takie że $x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=1$ oraz $x^3+y^3+z^3=1$. Ile wynosi xyz?

Zadanie 33. Wyznacz liczbę podzbiorów zbioru $\{1,2,3,\ldots,2025\}$, które nie zawierają dwóch liczb różniących się o 675.

Zadanie 34. Wiemy, że istnieje funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dla której każda liczba wymierna jest jej okresem i żadna niewymierna nie jest okresem. Jest to funkcja Dirichleta. Czy istnieje jednak funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dla której każda liczba niewymierna jest okresem i żadna wymierna (różna od 0) nie jest?

Zadanie 35. W pewnym turnieju szachowym bierze udział $n\,(n\geqslant 2)$ osób. Osoby łączone są w pary i wygrany przechodzi dalej. W przypadku nieparzystej liczby osób na którymś etapie, losowany jest jeden „szczęśliwiec", który automatycznie przechodzi dalej. Ile partii należy rozegrać, aby wyłonić zwycięzcę?

Termin: kwiecień

Zadanie 36. Prawdziwe jest twierdzenie, że wszystkie punkty, które da się skonstruować za pomocą cyrkla i linijki można skonstruować wyłącznie samym cyrklem.
Załóżmy, że dane są na płaszczyźnie parami różne punkty A, B oraz M. Proszę opisać jak wyznaczyć punkt M' będący obrazem M względem prostej AB, używając wyłącznie cyrkla.

Zadanie 37. Na płaszczyźnie dane są dwa różne punkty A, B. Co wyznacza następująca konstrukcja za pomocą wyłącznie cyrkla (tzn. czym jest punkt C)?
1) $o_1 = o(A, |AB|)$
2) $o_2 = o(B, |BA|)$
3) $\{P_1, P_2\} = o_1 \cap o_2$
4) $o_3 = o(P_1, |P_1A|)$
5) $\{A, P_3\} = o_3 \cap o_2$
6) $o_4 = o(P_3, |P_3P_1|)$
7) $\{P_1, C\} = o_4 \cap o_2$
Uwaga: Zapis $o(A, |AB|)$ oznacza okrąg o środku w punkcie A i promieniu $|AB|$.

Zadanie 38. Dana jest kula o promieniu R. W jakiej odległości od powierzchni kuli musi znajdować się źródło światła (np. żarówka), aby oświetlało ono dokładnie 25% powierzchni tej kuli?
Wskazówka: Pole czaszy (tzn. pole boczne odcinka kuli) można obliczyć ze wzoru $P = 2\pi Rh$.

Zadanie 39. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $x(x+4) + y(y-10)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 40. Podaj przykład wielomianu stopnia 2025, którego wykres przechodzi przez dokładnie 100 punktów kratowych.

Termin: maj

Zadanie 41. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest rosnąca. Rozwiąż nierówność $f(2x) > f(x)$.

Zadanie 42. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest malejąca. Rozwiąż nierówność $f(x) > f(x+1)$.

Zadanie 43. Wyznacz w zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ sumę całkowitych rozwiązań nierówności $|x| < m$.

Zadanie 44. Dany jest w układzie współrzędnych trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna jest równoległa do osi odciętych. Suma współczynników kierunkowych prostych zawierających boki trójkąta wynosi 0. Wyznacz te współczynniki.

Zadanie 45. Podać przykład trójkąta (np. podając długości boków, miary kątów) dla którego (przy standardowych oznaczeniach) zachodzi równość $3a = 2b\sin\alpha$.

Rozwiązanie 1.

$1 = (2+0+2):4$
$2 = -2+0+2+\sqrt{4}$
$3 = -2^0+2+\sqrt{4}$
$4 = 2+0+\log_2 4$
$5 = 2^0+2+\sqrt{4}$
$6 = 2+0^2+4$
$7 = -2^0+2\cdot 4$
$8 = 2+0+2+4$
$9 = 2^0+2\cdot 4$
$10 = 2+0+2\cdot 4$
$11 = 2+0!+2\cdot 4$
$12 = (2^0+2)\cdot 4$
$13 = -2-0!+2^4$
$14 = -2+0+\log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} 4$
$15 = -2^0+2^4$
$16 = \left(2^{0+2}\right)^{\sqrt{4}}$
$17 = 2^0+2^4$
$18 = 2+0+2^4$
$19 = -(2+0!+2)+4!$
$20 = -2+0-2+4!$
$21 = -2^0-2+4!$
$22 = 2\cdot 0-2+4!$
$23 = 2^0-2+4!$
$24 = 2\cdot 0\cdot 2+4!$
$25 = -2^0+2+4!$
$26 = 2\cdot 0+2+4!$
$27 = 2^0+2+4!$
$28 = 2+0+2+4!$
$29 = 2+0!+2+4!$
$30 = -2+0+\log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}} 4$
$31 = -2^0+\log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}} 4$
$32 = (2+0)\cdot 2^4$

Rozwiązanie 2. Początkowa grubość to $0,2$ mm. Każde złożenie na pół podwaja grubość stosiku. Czynność tę wykonujemy 40 razy, więc końcowa wysokość to $0,1\cdot 2^{40}$ mm $= 109\,951\,162777,6$ mm ≈ 110 tys. km (!). Jest to prawie trzykrotnie więcej niż obwód Ziemi.
Osoby znające ciągi odnajdą w tym zadaniu ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 0,1$ i ilorazie $q = 2$.

Rozwiązanie 3. Skoro C_n, to n-ta cyfra, to maksymalnie wynosi ona 9. Zachodzi więc poniższe oszacowanie:

$$\frac{C_1}{\pi}+\frac{C_2}{\pi^2}+\frac{C_3}{\pi^3}+\frac{C_4}{\pi^4}+\ldots<\frac{9}{\pi}+\frac{9}{\pi^2}+\frac{9}{\pi^3}+\frac{9}{\pi^4}+\ldots.$$

Ale tę sumę umiemy policzyć – jest to suma szeregu geometrycznego $\left(a_1=\frac{9}{\pi},\ q=\frac{1}{\pi}\right)$. Wynosi zatem

$S = \dfrac{\frac{9}{\pi}}{1-\frac{1}{\pi}} = \dfrac{9}{\pi-1}(\approx 4,2)$. Szukana suma jest mniejsza niż S, a więc skończona.

Rozwiązanie 4.
Sposób I
Pod koniec klasy 3 poznaje się rachunek różniczkowy (pochodne) i wtedy można to zadanie rozwiązać „schematycznie" jako jedno z wielu zadań typu: „Oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji f w podanym przedziale".
Szkic: Szukamy za pomocą pochodnych ekstremów lokalnych wewnątrz przedziału, liczymy granice na krańcach przedziału, podajemy wartość największą i najmniejszą (jeśli istnieją).

Sposób II

Zauważmy, że $x^{2024}+\frac{2024}{x} = x^{2024}+\overbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x}}^{2024}$, a więc z nierówności między średnimi $(A-G)$:

$$\frac{x^{2024}+\frac{2024}{x}}{2025}\geqslant\sqrt[2025]{x^{2024}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{2024}}=1,$$

czyli omawiane wyrażenie jest $\geqslant 2025$. Równość zachodzi, gdy wszystkie składniki są równe tzn. $x^{2024} = \frac{1}{x}$, czyli gdy $x=1$. Wtedy wartość wyrażenia wynosi $1^{2024}+\dfrac{2024}{1}=2025$.

Rozwiązanie 5.
Sposób I - pomysłowy
Skoro x_0 spełnia równanie, to: $x_0^3+2ax_0+b=0$, co możemy „sprytnie" zapisać $x_0x_0^2+2ax_0+b=0\,(\star)$.

- Jeśli $x_0=0$, to $b=0$, a więc nierówność $x_0b\leqslant a^2$ jest prawdziwa.
- Jeśli $x_0\neq 0$, to równanie $(\star)$ oznacza, że liczba x_0 jest pierwiastkiem równania kwadratowego $x_0x^2+2ax+b=0$, w szczególności $\Delta\geqslant 0$. A więc $4a^2-4x_0b\geqslant 0$, co po przekształceniu daje $x_0b\leqslant a^2$.

  Zadanie to pochodzi z 17. Olimpiady Matematycznej, z pierwszego etapu.

Sposób II
Skoro x_0 spełnia równanie, to: $x_0^3+2ax_0+b=0$, skąd $b=-x_0^3-2ax_0$.
Przekształcając równoważnie tezę mamy:

$$x_0b\leqslant a^2$$

$$-x_0^4 - 2ax_0 \leqslant a^2$$
$$x_0^4 + 2ax_0^2 + a^2 \geqslant 0$$
$$(a + x_0^2)^2 \geqslant 0$$
co jest prawdą, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Sposób III - dorabianie wzoru skróconego mnożenia

Jeśli $x_0 = 0$, to $b = 0$, a więc nierówność $x_0 b \leqslant a^2$ jest prawdziwa. Załóżmy zatem, że $x_0 \neq 0$. Wtedy $0 = x_0^3+2ax_0+b = x_0\left(x_0^2 + 2a + \frac{b}{x_0}\right) = x_0\left(x_0^2 + 2 \cdot x_0 \cdot \frac{a}{x_0} + \frac{a^2}{x_0^2} - \frac{a^2}{x_0^2} + \frac{b}{x_0}\right) = x_0\left(\left(x + \frac{a}{x_0}\right)^2 - \frac{a^2-bx_0}{x_0^2}\right)$,

a zatem $\left(x + \dfrac{a}{x_0}\right)^2 = \frac{a^2-bx_0}{x_0^2}$,czyli $a^2 - bx_0 \geqslant 0$, skąd $x_0 b \leqslant a^2$.

Rozwiązanie 6. Załóżmy nie wprost, że istnieją dwa różne zbiory puste: $\varnothing_1, \varnothing_2$. Wiemy, że zbiór pusty zawiera się w każdym zbiorze, więc w szczególności $\varnothing_1 \subset \varnothing_2$ oraz $\varnothing_2 \subset \varnothing_1$. Ale jeśli $A \subset B$ oraz $B \subset A$ to oznacza, że $A = B$, więc $\varnothing_1 = \varnothing_2$. Istnieje zatem tylko jeden zbiór pusty.

Rozwiązanie 7. Na liście nie może być więcej niż jedno zdanie prawdziwe, bo wtedy koniunkcja dwóch różnych zdań byłaby fałszywa. Gdyby wszystkie 2024 zdania były fałszywe, to w szczególności ostatnie zdanie też, czyli nieprawdą jest, że 2024 zdania są fałszywe. Sprzeczność. Liczba zdań prawdziwych jest więc $\geqslant 1$ oraz $\leqslant 1$. Jest zatem dokładnie jedno zdanie prawdziwe, czyli 2023 fałszywe. Prawdziwe jest więc zdanie o numerze 2023.

Rozwiązanie 8. Implikacja jest fałszywa tylko w przypadku, gdy z prawdy wynika fałsz. Zatem liczby $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$ spełniają implikację, bo poprzednik jest fałszywy. Ponadto spełniają ją też liczby $0, 4, 8, 12, 16, 20$ – dla nich poprzednik i następnik są prawdziwe. Implikacja nie jest spełniona tylko dla liczb: $2, 6, 10, 14, 18$, bo są to liczby parzyste, ale niepodzielne przez 4.

Rozwiązanie 9. Chcemy, aby $a^2 - 44a$ oraz $a^3 - 2015a$ były wymierne.
Rozpiszmy $a(a^2-44a) = a^3-44a^2 = a^3-2015a+2015a-44(a^2-44a+44a) = (a^3-2015a)-44(a^2-44a)+2015a-1936a = (a^3-2015a)-44(a^2-44a)+79a$. Stąd $a(a^2-44a) = (a^3-2015a)-44(a^2-44a)+79a$, czyli $a(a^2-44a)-79a = (a^3-2015a)-44(a^2-44a)$ i dalej $a[(a^2-44a)-79] = (a^3-2015a)-44(a^2-44a)$. Prawa strona jest wymierna, ponieważ różnica i iloczyn liczb wymiernych jest wymierny. Zatem lewa też. Ale lewa to iloczyn liczby niewymiernej oraz wymiernej. Taki iloczyn jest wymierny tylko gdy liczba wymierna jest równa 0, tj. $a^2 - 44a = 79$. Rozwiązaniami tego równania są: $a_1 = 22 + \sqrt{563} \vee a_2 = 22 - \sqrt{563}$. Obie te liczby spełniają warunki zadania, bo $a^2 - 44a = 79 \in \mathbb{Q}$ oraz $a^3 - 2015a = a(a^2 - 44a + 44a - 2015) = a(79 + 44a - 2015) = a(44a - 1936) = 44a(a - 44) = 44(a^3 - 44a) = 44 \cdot 79 \in \mathbb{Q}$.

Rozwiązanie 10. Warunki w zadaniu kojarzą nam się z wzorami Viete'a stopnia 4. Rozważmy wielomian o pierwiastkach a, b, c, d, tj. $W(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, który po wymnożeniu przyjmuje postać ogólną $W(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Ze wzorów Viete'a (i założeń):

- $-a_3 = a + b + c + d > 0 \Rightarrow a_3 < 0$
- $a_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd > 0 \Rightarrow a_2 > 0$
- $-a_1 = abc + abd + acd + bcd > 0 \Rightarrow a_1 < 0$
- $a_0 = abcd > 0 \Rightarrow a_0 > 0$

Zatem dla $x \leqslant 0$ jest $W(x) > 0$,a wiec wielomian $W(x)$ ma tylko dodatnie pierwiastki. Stąd $a, b, c, d > 0$.

Rozwiązanie 11. Lewe strony są nieujemne, więc prawe też. Stąd $x, y, z \geqslant 0$. Możemy bez straty ogólności założyć, że $x \leqslant y \leqslant z$. Wtedy prawe strony są uporządkowane słabo rosnąco, a lewe słabo malejąco. Tak więc wszystkie liczby muszą być równe: $x = y = z$. Zatem $2x^4 = x^7$, skąd $x^4(x^3 - 2) = 0$, czyli $x = 0 \vee x = \sqrt[3]{2}$. Rozwiązaniami są więc trójki: $(0, 0, 0)$, $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$.

Rozwiązanie 12. Rozwińmy przy pomocy dwumianu Newtona wyrażenia $(2 + \sqrt{3})^n$ oraz $(2 - \sqrt{3})^n$:

$$(2+\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot \sqrt{3}^k = \binom{n}{0} 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} \cdot \sqrt{3} + \binom{n}{2} 2^{n-2} \sqrt{3}^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot \sqrt{3}^n =: a + b\sqrt{3}$$

$$(2-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot (-\sqrt{3})^k = \binom{n}{0} 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} \cdot (-\sqrt{3}) + \binom{n}{2} 2^{n-2} \cdot (-\sqrt{3})^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot (-\sqrt{3})^n =$$

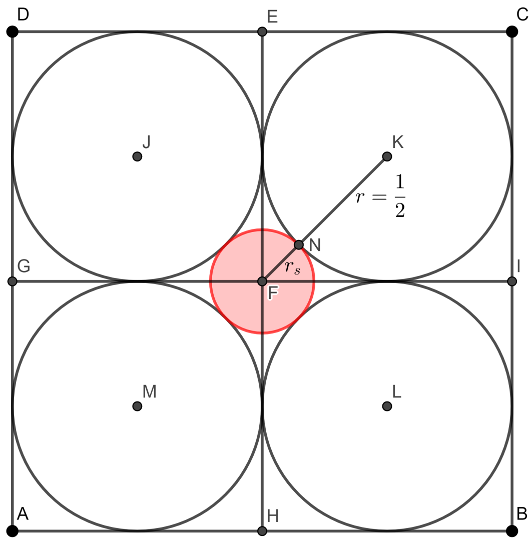
$$= \binom{n}{0} 2^n - \binom{n}{1} 2^{n-1} \cdot \sqrt{3} + \binom{n}{2} 2^{n-2} \cdot \sqrt{3}^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot (-1)^n \sqrt{3}^n =$$

$$= a - b\sqrt{3},$$

gdzie $a, b \in \mathbb{N}$.
Zatem $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2a$, czyli jest to liczba parzysta. Ponadto $(2-\sqrt{3})^n \in (0,1)$. Otrzymujemy więc

$$\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor = \lfloor (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n \rfloor = \lfloor 2a - (2-\sqrt{3})^n \rfloor = 2a - 1 \in 2\mathbb{N}+1.$$

Rozwiązanie 13.



Niech r_s to długość szukanego promienia, zaś N to punkt styczności okręgów. Przekątna kwadratu $FICE$ ma długość $\sqrt{2}$. Zatem $\sqrt{2} = 1 + 2r_s$, skąd $r_s = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Rozwiązanie 14. Analogicznie do zadania poprzedniego średnica każdej „małej” kuli wynosi 1, zaś przekątna „małego” sześcianu $\sqrt{3}$. Zatem $\sqrt{3} = 1 + 2r_2$, skąd $r_s = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Rozwiązanie 15. Analogicznie do zadań poprzednich średnica każdej „małej” kuli wynosi 1, zaś przekątna „małego” hipersześcianu $\sqrt{n}$. Zatem $\sqrt{n} = 1 + 2r_2$, skąd $r_s = \dfrac{\sqrt{n}-1}{2}$.

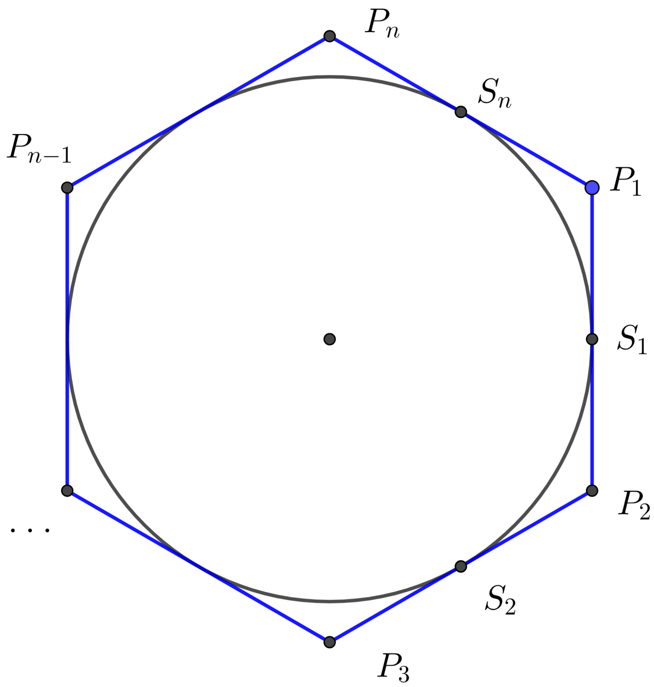
Można dokonać bardzo ciekawych obserwacji: dla $n = 5$ mamy $r_s = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,62 > \frac{1}{2}$, co oznacza, że „mała” kula jest większa od każdej z „dużych” kul (!). Dla $n = 10$ jest $r_s = \dfrac{\sqrt{10}-1}{2} \approx 1,08 > 1$, co oznacza, że „mała” kula wychodzi poza hipersześcian (!).

Rozwiązanie 16. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy:
$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n) \cdot P(A_n) + P(A_{n+1}|A'_n) \cdot P(A'_n) = \frac{1}{2} \cdot P(A_n) + 1 \cdot (1 - P(A_n)) = 1 - \frac{1}{2}P(A_n)$, co możemy „sprytnie” przekształcić do postaci $P(A_{n+1}) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(P(A_n) - \frac{2}{3}\right)$. Oznaczmy $a_n := P(A_n) - \frac{2}{3}$. Wtedy równość przyjmuje postać $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$. A to oznacza, że ciąg (a_n) jest geometryczny o ilorazie $q = -\frac{1}{2}$. Wiemy, że jeśli $|q| < 1$ to ciąg geometryczny o ilorazie q jest zbieżny do 0. Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(P(A_n) - \dfrac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = \dfrac{2}{3}$.

Rozwiązanie 17. Zdanie prokuratora jest implikacją. Jego zaprzeczeniem będzie więc:
„Oskarżony zabił swoją żonę i nie miał wspólnika”.

Rozwiązanie 18. Liczba $x := \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$ jest dodatnia. Policzmy jej kwadrat.
$(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}})^2 = 4 + \sqrt{7} - 2\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{7}} + 4 - \sqrt{7} = 8 - 2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})} = 8 - 2\sqrt{16-7} = 8 - 2 \cdot 3 = 2$. Zatem $x = \sqrt{2}$. A to oznacza, że wynikiem jest 0.

Rozwiązanie 19. Wierzchołki wielokąta oznaczmy przez $P_1, P_2, \ldots, P_n$ zaś odpowiednie punty styczności okręgu z bokami wielokąta przez $S_1, S_2, \ldots, S_n$.



Z twierdzenia o odcinkach stycznych mamy $|P_2S_1| = |P_2S_2|, |P_3S_2| = |P_3S_3|, \ldots, |P_1S_n| = |P_1S_1|$. Wskazane pary odcinków są równe, więc każdy wierzchołek „dokłada" taki sam kawałek z liczbą 0 i 1, a zatem suma długości odcinków z liczbą 1 jest taka sama jak suma długości odcinków z długością 0.
Uwaga: Można zauważyć, że da się to zrobić tylko dla wielokąta o parzystej liczbie boków, ponieważ cyfry 0,1 muszą być pisane na przemian.

Rozwiązanie 20. Oznaczmy punkty styczności sfery ze ścianami $F_1, F_2, \ldots, F_n$ wielościanu przez $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Rozważmy ściany F_i, F_j, które mają wspólną krawędź PQ. Trójkąty PQF_i oraz PQF_j są przystające. Analogicznie przystające są trójkąty wyznaczone przez ustaloną krawędź. Mają one zatem równe pola, a ponadto jeden jest powiązany z liczbą 1, a drugi z liczbą 0. Suma pól ścian z liczbą 1 jest więc równa sumie pól ścian z liczbą 0.

Rozwiązanie 21. Pierwiastkując drugie równanie otrzymujemy $x = y^{\frac{x+y}{3}}$ $(\star)$. Wstawiając do pierwszego równania jest

$$\left(y^{\frac{x+y}{3}}\right)^{x+y} = y^{12}$$

$$y^{\frac{(x+y)^2}{3}} = y^{12}.$$

Stąd $y = 1$ lub $\dfrac{(x+y)^2}{3} = 12$
Jeśli $y = 1$, to z drugiego równania: $x^3 = 1$, czyli $x = 1$.
Jeśli zachodzi druga opcja to $(x+y)^2 = 36$, czyli $x + y = 6 \vee x + y = -6$. Ponieważ $x, y > 0$, to jest $x + y = 6$. Wstawiając do $(\star)$ mamy $x = y^2$, skąd $x = (6-x)^2$. Otrzymujemy równanie kwadratowe $x^2 - 13x + 36 = 0$, którego rozwiązaniami są $x_1 = 4, x_2 = 9$. Jeśli $x = 4$, to $y = 2$, a jeśli $x = 9$, to $y = -3$ – sprzeczność.
Ostatecznie rozwiązaniami układu są dwie pary: $(1, 1), (4, 2)$.

Rozwiązanie 22. Dziedziną funkcji f jest przedział $(0, +\infty)$ Obliczmy pochodną tej funkcji:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 (= \ln e) \Leftrightarrow x > e,$$

a zatem f jest malejąca w $[e, +\infty)$. Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{4} \ln 4 < \frac{1}{\pi} \ln \pi,$$

co jest równoważne

$$\frac{\ln 2}{2} < \frac{\ln \pi}{\pi},$$

a następnie mnożąc przez mianowniki

$$\pi \ln 2 < 2 \ln \pi$$

$$\ln 2^\pi < \ln \pi^2$$

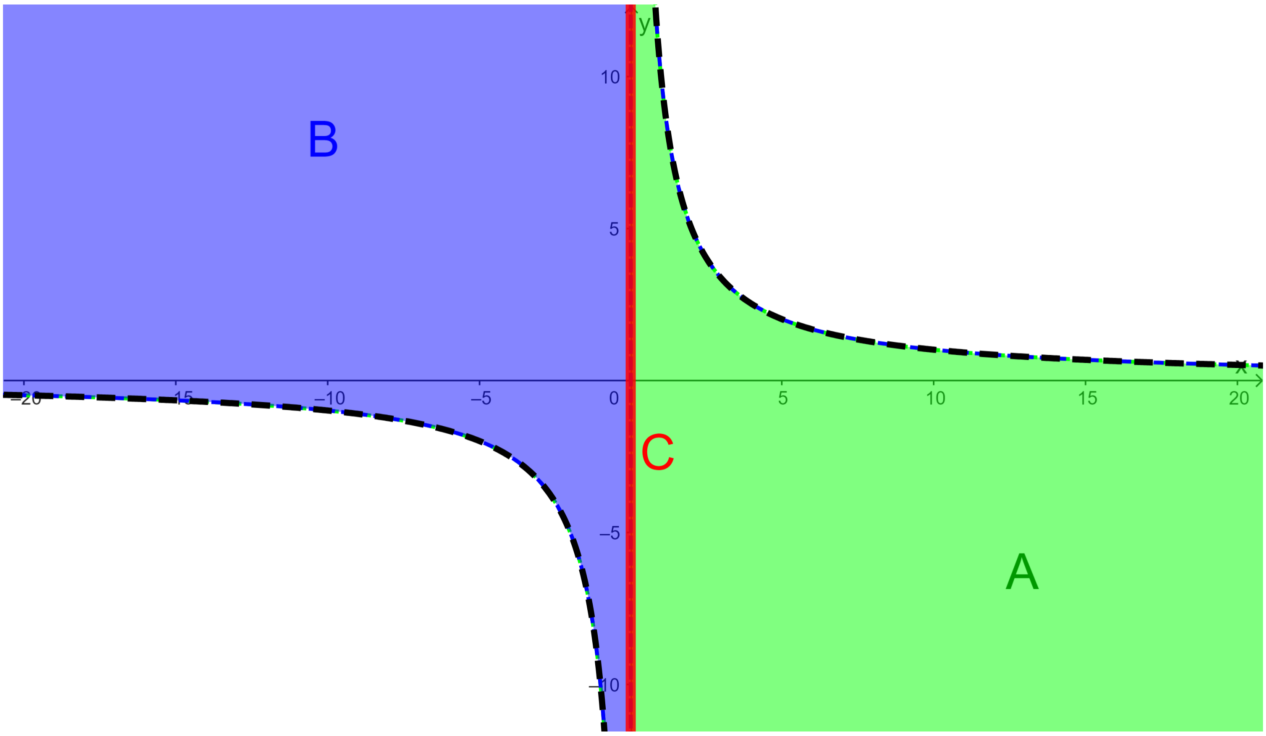
z monotoniczności logarytmu $(a > 1)$

$$2^\pi < \pi^2.$$

Rozwiązanie 23. Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, takie że $f(x_1) = f(x_2)$. Wtedy $x_1 + f(x_1) = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2 + f(x_2)$. Stąd $x_1 + f(x_1) = x_2 + f(x_2)$, ale $f(x_1) = f(x_2)$ z założenia, więc $x_1 = x_2$ co oznacza różnowartościowość funkcji f.

Rozwiązanie 24.
- Jeśli $x > 0$, to otrzymujemy równoważnie $y < \frac{10}{x}$ – jest to obszar A
- Jeśli $x < 0$, to otrzymujemy równoważnie $y > \frac{10}{x}$ – jest to obszar B
- Jeśli $x = 0$, to otrzymujemy równoważnie $0 < 10$, czyli nierówność tożsamościową – jest to obszar C

Szukanym obszarem jest więc suma obszarów A, B, C



Rozwiązanie 25. Założenia: $\begin{cases} (2x-1)^2 > 0 \\ x^2 > 0, \end{cases} \quad \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$

$$\log(2x-1)^2 = 2\log x^2$$

$$\log(2x-1)^2 = \log x^4$$

z różowartościowości

$$(2x-1)^2 = x^4 \quad |\sqrt{}$$

$$|2x-1| = |x^2|$$

$$2x - 1 = x^2 \quad \vee \quad 2x - 1 = -x^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = 1 \vee x = -1 + \sqrt{2} \vee x = -1 - \sqrt{2}$$

$$x \in \{-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, 1\}$$

Uwaga: Należy pamiętać, że gdybyśmy chcieli „wyjąć" potęgę 2 z lewej strony do przodu to należałoby dać moduł ($\log(2x-1)^2 = 2\log|2x-1|$), ponieważ w przeciwnym przypadku zmieniłaby się dziedzina równania, więc przejścia nie byłyby równoważne.

Rozwiązanie 26. Ze wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy

$$xy = \frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2} = \frac{(2m-1)^2-m^2-2m+3}{2} = \frac{3m^2-6m+4}{2} = \frac{3}{2}m^2-3m+2 =: f(m).$$

Wystarczy zatem znaleźć najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w jej dziedzinie. Wyznaczmy więc dziedzinę.

Aby układ równań miał rozwiązanie, to równanie kwadratowe $2x^2+(2-4m)x+3m^2-6m+4=0$(powstałe przez wyznaczenie zmiennej y z równania pierwszego i wstawienie do drugiego) musi mieć rozwiązanie, a więc $\Delta \geqslant 0$.

$$\Delta = 4-16m+16m^2-24m^2+48m-32 = -8m^2+32m-28$$

$$-8m^2+32m-28 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2m^2-8m+7 \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\frac{4-\sqrt{2}}{2}, \frac{4+\sqrt{2}}{2}\right].$$

Wracając do wyznaczania wartości najmniejszej funkcji f mamy $m_w = \dfrac{3}{3} = 1 \notin D_f$, a ponadto $f\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{11-6\sqrt{2}}{4}$, $f\left(\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{11+6\sqrt{2}}{4}$.

Zatem najmniejsza wartość xy wynosi $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{4}$.

Rozwiązanie 27. Najmniejszą taką liczbą jest $x = 2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^6 = 30\ 233\ 088\ 000\ 000$. Spełnia ona warunki zadania ponieważ:

- $\frac{1}{2}x = 2^{14}\cdot 3^{10}\cdot 5^6 = \left(2^7\cdot 3^5\cdot 5^3\right)^2$
- $\frac{1}{3}x = 2^{15}\cdot 3^{9}\cdot 5^6 = \left(2^5\cdot 3^3\cdot 5^2\right)^3$
- $\frac{1}{5}x = 2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^5 = \left(2^3\cdot 3^2\cdot 5^1\right)^5$.

Rozwiązanie 28. Założenia: $x+y \neq \frac{\pi}{2}+k]pi \wedge x+y \neq k\pi, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x+y\neq \frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.
Zastosujmy standardową metodę, czyli wymuszenie wzoru skróconego mnożenia:

$$\operatorname{tg}^2(x+y)+\operatorname{ctg}^2(x+y)-2\operatorname{tg}(x+y)\cdot\operatorname{ctg}(x+y)+2\operatorname{tg}(x+y)\cdot\operatorname{ctg}(x+y) = 1-2x-x^2$$

$$\operatorname{tg}^2(x+y)+\operatorname{ctg}^2(x+y)-2\operatorname{tg}(x+y)\cdot\operatorname{ctg}(x+y) = 1-2x-x^2-2\operatorname{tg}(x+y)\cdot\operatorname{ctg}(x+y)$$

$$(\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{ctg}(x+y))^2 = 1-2x-x^2-2$$

$$(\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{ctg}(x+y))^2 = -(x^2+2x+1)$$

$$(\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{ctg}(x+y))^2 = -(x+1)^2$$

Lewa strona jest nieujemna, a prawa niedodatnia, a zatem równość zachodzi tylko gdy obie strony są równe 0, czyli gdy liczby pod kwadratami wynoszą 0. To oznacza, że

$$\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{ctg}(x+y)=0 \quad\wedge\quad x+1=0.$$

Stąd mamy $x=-1$ i dalej:

$$\operatorname{tg}(y-1)-\operatorname{ctg}(y-1)=0$$

$$\operatorname{tg}(y-1) = \frac{1}{\operatorname{tg}(y-1)}$$

$$\operatorname{tg}^2(y-1)=1$$

$$\operatorname{tg}(y-1)=1 \quad\vee\quad \operatorname{tg}(y-1)=-1$$

$$y-1=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad\vee\quad y-1=-\frac{\pi}{4}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$y=1+\frac{\pi}{4}+k\pi \quad\vee\quad y=1-\frac{\pi}{4}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Ostatecznie rozwiązaniem jest każda para (x,y) postaci:

$$\left(-1, 1+\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right), \text{ gdzie } k\in\mathbb{Z}$$

Rozwiązanie 29. • $[0,1,2,3,4,5]=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{1}{5}}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{1}{\frac{21}{5}}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{5}{21}}}}=$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{\frac{68}{21}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{21}{68}}}=\cfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{157}{68}}}=\cfrac{1}{1+\frac{68}{157}}=\frac{1}{\frac{225}{157}}=\frac{157}{225}$$

• $\frac{7}{11}=0+\frac{1}{\frac{11}{7}}=0+\cfrac{1}{1+\frac{4}{7}}=0+\cfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{4}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{3}{4}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{4}{3}}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}}=$

$$0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}}=[0,1,1,1,3]$$

Rozwiązanie 30. Wielomian $W(x)$ ma następującą postać:

$$W(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)}\cdot 1+\frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)}\cdot 2+\ldots$$
$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)}\cdot 19$$

Zatem

$$W(1)=\frac{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)}\cdot 1+\frac{(1-1)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)}\cdot 2+\ldots$$
$$+\frac{(1-1)(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}{(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)}\cdot 19=\cancel{\frac{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)}}\cdot 1+$$

$$\frac{\overbrace{(1-1)}^{=0}(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)}\cdot 2+\ldots+\frac{\overbrace{(1-1)}^{=0}(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}{(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)}\cdot 19=1+0+0+0+0+0=1$$

$$W(4)=\frac{(4-2)(4-3)\overbrace{(4-4)}^{=0}(4-5)(4-6)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)}\cdot 1+\ldots+\cancel{\frac{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)(4-6)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)(4-6)}}\cdot 4+\ldots$$
$$+\frac{(4-1)(4-2)(4-3)\overbrace{(4-4)}^{=0}(4-5)}{(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)}\cdot 19=0+0+0+4+0+0=4$$

$$W(6)=\frac{(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)\overbrace{(6-6)}^{=0}}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)}\cdot 1+\frac{(6-1)(6-3)(6-4)(6-5)\overbrace{(6-6)}^{=0}}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)}\cdot 2+\ldots$$

$$+\cancel{\frac{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)(4-6)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)(4-6)}}\cdot 4+\ldots+\cancel{\frac{(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)}{(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)}}\cdot 19=0+0+0+0+0+19=19$$

Wielomian po uproszczeniu przyjmuje postać:

$$W(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{-120}\cdot 1+\frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{24}\cdot 2+$$
$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)}{-12}\cdot 3+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)}{12}\cdot 4+$$
$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)}{-24}\cdot 5+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{120}\cdot 19=$$
$$\frac{71}{40}x^5-\frac{719}{24}x^4+\frac{4501}{24}x^3-\frac{12865}{24}x^2+\frac{41441}{60}x-313$$

UWAGA: Zadanie to, jak i końcowa postać wielomianu znajduje się w pewnej książce popularnonaukowej. Jednakże wzór tam podany ma postać: $W(x)=\frac{13}{120}x^5-\frac{13}{8}x^4+\frac{221}{24}x^3-\frac{195}{8}x^2+\frac{1841}{60}x-13$, co pokazuje, że nie można wierzyć we wszystko co się przeczyta, w szczególności rachunkom, jeśli samodzielnie się ich nie sprawdzi.

Rozwiązanie 31. Tak. Na przykład trójkąt równoramienny o podstawie 2 km i wysokości padającej na podstawę długości $\frac{1}{10000000000}$ km. Wtedy pole wynosi $P=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{10000000000}=\frac{1}{10000000000}$ km^2=1 cm^2. Z twierdzenia Pitagorasa ramię jest dłuższe niż połowa podstawy, czyli 1 km.

Rozwiązanie 32. Podnosząc do kwadratu pierwszą równość otrzymujemy $x^2+y^2+x^2+2xy+2xz+2yz=1$, i podstawiając z drugiej mamy $1=2xy+2xz+2yz=1$, skąd $xy+xz+yz=0$.
Ponadto zachodzi[3] wzór skróconego mnożenia $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$. Wstawiając dane z zadania uzyskujemy $1^3=1+3\cdot 1\cdot 0-3xyz$. Stąd $xyz=0$.

Rozwiązanie 33. Rozważmy zbiór $A=\{1,2,3,\dots,675\}$. Niech $x\in A$. Liczby różniące się o 675 to: $x, x+675, x+2\cdot 675$. Jest 5 możliwości spełniających warunki zadania:

- żadna z liczb $x, x+675, x+2\cdot 675$ nie należy do szukanego podzbioru,
- liczba x należy, a pozostałe dwie nie należą,
- liczba $x+675$ należy, a pozostałe dwie nie należą,
- liczba $x+2\cdot 675$ należy, a pozostałe dwie nie należą,
- liczby x oraz $x+2\cdot 675$ należą, a $x+675$ nie należy.

Dla każdej liczby x możemy wybrać jedną z pięciu opcji, a zatem wszystkich takich podzbiorów jest 5^{675}.

Rozwiązanie 34. Jeśli okresem ma być każda liczba niewymierna, to w szczególności liczba $\sqrt{5}$ oraz $5-\sqrt{5}$. Ponadto suma okresów jest okresem, ponieważ jeśli liczby t_1, t_2 są okresami, to $f(x+t_1+t_2)=f(x+t_1)=f(x)$. Tak więc okresem będzie też liczba $\sqrt{5}+5-\sqrt{5}=5\in\mathbb{Q}$. A to jest sprzeczność z założeniem. Zatem taka funkcja nie istnieje.

Rozwiązanie 35. Zauważmy, że gracz odpada tylko, gdy przegra partię. Aby wyłonić zwycięzcę musi odpaść $n-1$ osób, a więc musi odbyć się dokładnie $n-1$ partii (w każdej odpada jedna osoba).

Rozwiązanie 36. Konstrukcję wykonamy w następujących krokach:

1) rysujemy okrąg o_1 o środku w punkcje A i promieniu AM tzn. $o_1=o(A,|AM|)$
2) rysujemy okrąg o_2 o środku w punkcje B i promieniu BM tzn. $o_2=o(B,|BM|)$
3) okręgi przetną się w dwóch punktach - jednym z nich jest punkt M, a drugim szukany punkt M' tzn. $o_1\cap o_2=\{M,M'\}$.

Rozwiązanie 37.

Rozwiązanie 38.

Rozwiązanie 39.
I sposób:
Przekształćmy wyrażenie:

$$x(x+4)+y(y-10)=x^2+4x+y^2-10y=x^2+4x+4-4+y^2-10x+25-25=(x+2)^2+(y-5)^2-29$$

Kwadraty liczb rzeczywistych są nieujemne, więc najmniejsza wartość wyrażenia to -29 (i ponadto wiemy, że osiągana dla $x=-2, y=5$).
II sposób:

[3] Aby przekonać się o jego prawdziwości wystarczy zastosować do lewej strony wzór na sześcian sumy traktując $a+b$ jako jeden składnik, a c jako drugi, a następnie obie strony wymnożyć doprowadzając do postaci ogólnej lub po zastosowaniu wzoru na sześcian sumy sprytnie pogrupować wyrażenie otrzymując prawą stronę.

Przekształćmy wyrażenie:

$$x(x+4) + y(y-10) = x^2 + 4x + y^2 - 10y =: f(x) + g(y)$$

Funkcje f i g są funkcjami kwadratowymi, których wykresy to parabole z ramionami skierowanymi w górę. Każda z nich najmniejszą wartość przyjmuje w wierzchołku, tak więc wystarczy te najmniejsze wartości do siebie dodać. Mamy zatem $p_f = -2$, $p_g = 5$, skąd $f_{min} = f(-2) = -4$, $g_{min} = g(5) = -25$, a więc wyrażenie przyjmuje najmniejszą wartość równą -29.

III sposób:
Wyrażenie z zadania możemy potraktować jako funkcję (dwóch zmiennych) $f(x, y) = x(x+4)+y(y-10)$. Dla funkcji dwóch zmiennych istnieje analogiczna metoda wyznaczania ich ekstremów, jak w przypadku zwykłych funkcji jednej zmiennej x. W niej zamiast pochodnych wyznacza się tzw. *pochodne cząstkowe*, a następnie też przyrównuje do 0. Metoda nie jest skomplikowana.[4]

Rozwiązanie 40. np. $W(x) = \pi x^{1926}(x-1)(x-2)(x-3) \cdot \ldots \cdot (x-99)$
Dla liczb $0, 1, 2, \ldots, 99$ wielomian przyjmuje wartość 0. Liczb jest 100, więc wielomian przechodzi przez 100 punktów kratowych. Ponadto wstawiając do niego jakąkolwiek inną liczbę całkowitą (w szczególności nie 0) otrzymamy wartość niewymierną, ponieważ różnica i iloczyn liczb całkowitych jest liczną całkowitą, a iloczyn liczby niewymiernej π i liczby całkowitej różnej od 0 jest liczbą niewymierną. Zatem nie ma żadnych innych punktów kratowych, przez które przechodzi wielomian.
Kluczowe jest więc wybranie liczby niewymiernej jako współczynnika kierunkowego oraz wzięcie stu pierwiastków całkowitych, w tym zera.

$\mathbb{P}$iotr $\mathbb{B}$ury

[4]Nie umieszczam jej tutaj, choć nie jest ani trudna, ani długa. Wymaga jednak znajomości pochodnych z końca klasy 3, a przede wszystkim doczytania pewnych dodatkowych pojęć.