gr. G

Geometria okręgów i trójkątów

3P

1. $a=6 \quad b=8 \quad \alpha=120^\circ$

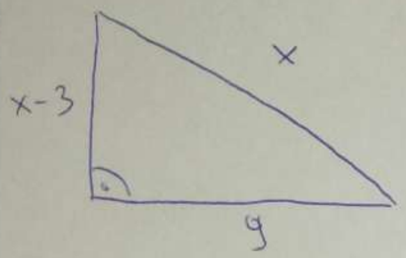
z tw. cosinusów

$$x^2 = 36+64-2\cdot6\cdot8\cdot\underset{-\frac{1}{2}}{\cos 120^\circ}$$

$$x^2 = 100 + 48$$

$$x = \sqrt{148} = \boxed{2\sqrt{37}}$$

2.




a) z tw. Pitagorasa

$$x^2 = (x-3)^2 + 81$$

$$x^2 = x^2 - 6x + 9 + 81$$

$$6x = 90$$

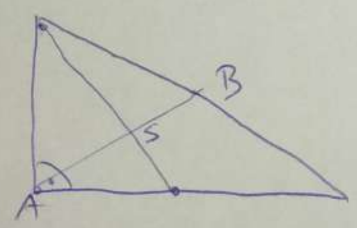
$$x = 15 \text{ [cm]}$$

$$L = 15+12+9 = \underline{36 \text{ [cm]}}$$

b) $R = \frac{x}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$ [cm]

c) $r = \frac{9+12-15}{2} = 3$ [cm]

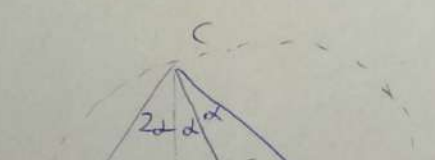
d)




$|AB| = R = 7{,}5$ (bo też promień)

$|AS| = \frac{2}{3}\cdot|AB| = \underline{5 \text{ [cm]}}$

3.




$|\sphericalangle DBO| = \sphericalangle OBC| =: \alpha$ (bo O to punkt przecięcia dwusiecznych kątów $\Delta DBC$).

$\Delta AOB$ i $\Delta COB$ są równoramienne (ramiona R)

więc $|\sphericalangle OAD| = \sphericalangle OCB| = \alpha$

Następnie $\sphericalangle DCO| = \alpha \Rightarrow \sphericalangle ACD| = 2\alpha$
(bo CO i CD to odpowiednie dwusieczne)

$\Delta AOC$ jest równoramienny $\Rightarrow \sphericalangle CAD = 3\alpha$.

z sumy kątów w $\triangle ABC$

$$3\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+2\alpha=180^\circ$$

$$10\alpha=180^\circ$$

$$\alpha=18^\circ$$

$|\measuredangle A|=4\cdot 18^\circ=72^\circ$ $|\measuredangle B|=2\cdot 18^\circ=36^\circ$ $|\measuredangle C|=4\cdot 18^\circ=72^\circ$

Jest to złoty trójkąt.

4. $o(A, k-1)$ $o(B, k+3)$ $|AB|=3k$

$\begin{cases} k-1>0 \\ k+3>0 \\ 3k\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k>1 \\ k>-3 \\ k\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{D_k=(1,+\infty)}$

Okręgi mają jeden punkt wspólny $\Leftrightarrow$ są styczne zewn. lub wewn.

- styczne zewnętrznie

$r_1+r_2=|AB|$

$k+3+k-1=3k$

$2k+2=3k$

$\underline{k=2}$

- styczne wewnętrznie

$|r_1-r_2|=|AB|$

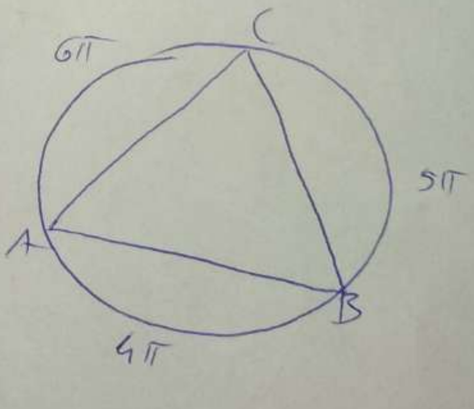
$|k-1-k-3|=3k$

$4=3k$

$\underline{k=\frac{4}{3}}$

Ostatecznie $k\in\{\frac{4}{3}, 2\}$.

5.




łuki w stosunku 4:5:6

więc kąty wpisane też

Stąd $|\measuredangle C|=4\alpha$, $|\measuredangle B|=6\alpha$, $|\measuredangle A|=5\alpha$

$$4\alpha+6\alpha+5\alpha=15\alpha$$

$$15\alpha=180^\circ \Rightarrow \alpha=12^\circ$$

$\underline{|\measuredangle A|=60^\circ, |\measuredangle B|=72^\circ, |\measuredangle C|=48^\circ}$