Zadanie 11. ***(4 pkt)***

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f: R \to R$, określonej wzorem: $f(x) = (x-1)\cdot(5-x)$, w przedziale $\langle 0;7 \rangle$.

Zadanie 12. ***(4 pkt)***

Dane jest równanie postaci $a^2 \cdot x - 1 = x + a$, w którym niewiadomą jest x. Zbadaj liczbę rozwiązań tego równania, w zależności od parametru a.

Zadanie 13. ***(4 pkt)***

Wyznacz te wartości parametrów a oraz b, przy których funkcja $g: R \to R$, określona wzorem $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + a}{x-2} & dla \quad x \neq 2 \\ b & dla \quad x = 2 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x = 2$.

Zadanie 14. ***(5 pkt)***

Suma n początkowych, kolejnych wyrazów ciągu (a_n), jest obliczana według wzoru $S_n = n^2 + 3n$, $(n \in N^+)$. Wyznacz a_n. Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 15. ***(5 pkt)***

Dziesiąty wyraz pewnego ciągu geometrycznego równa się 10. Oblicz iloczyn dziewiętnastu początkowych, kolejnych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 16. ***(4 pkt)***

Rzucamy pięć razy symetryczną kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że „jedynka” wypadnie co najmniej cztery razy.

Zadanie 17. ***(5 pkt)***

W układzie współrzędnych są dane punkty: $A(-9,-2)$ oraz $B(4,2)$. Wyznacz współrzędne punktu C, leżącego na osi OY, tak że kąt ACB jest kątem prostym.

Zadanie 18. ***(4 pkt)***

Wybierz dwie dowolne przekątne sześcianu i oblicz cosinus kąta między nimi. Sporządź odpowiedni rysunek i zaznacz na nim kąt, którego cosinus obliczasz.

Zadanie 19. ***(5 pkt)***

Trapez równoramienny, o obwodzie równym 20 cm, jest opisany na okręgu. Wiedząc, że przekątna trapezu ma długość $\sqrt{41}$ cm, oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 20. ***(10 pkt)***

Funkcja h jest określona wzorem $h(x) = \log_2(x^2 - 4) - \log_2(x-5)$. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których równanie $h(x) - \log_2 k = 0$ ma dwa różne pierwiastki.

Zadanie 21. ***(10 pkt)***

Na kuli o promieniu $R = 4$ cm opisujemy stożki o promieniu r i wysokości H. Spośród wszystkich takich stożków wyznacz ten, który ma najmniejszą objętość. Oblicz tę objętość. Oblicz promień i wysokość znalezionego stożka.

ODPOWIEDZI

$f_{min} = -12, \; f_{max} = 4$

-

$a = -4$ oraz $b = 4$.

$a_n = 2n + 2$

10^{19}

$\frac{13}{3888}$

$C(0, 2\sqrt{10})$ lub $C(0, -2\sqrt{10})$

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$ (lub z minusem)

$P = 20cm^2$

$k \in \left(10 + 2\sqrt{21}; \infty\right)$

$H = 16cm$ $r = 4\sqrt{2}\ cm$ $V(16) = \frac{512\pi}{3}$