Def.

Pierwiastkiem arytmetycznym n-tego stopnia ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$) z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b, że $b^n = a$.

symbolicznie: Jeśli $a, b \geq 0$, to $\left(\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \right)$

Uwaga.

Jeśli stopień pierwiastka jest liczbą nieparzystą, to powyższą definicję można rozszerzyć na liczby ujemne.

Przykład

$\sqrt[3]{-8} = -2$, bo $(-2)^3 = -8$.

Def.

Jeśli $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to $a^0 = 1$

Uwaga.

Wyrażenie 0^0 nie jest określone i nie ma sensu liczbowego.

Def.

Jeśli $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, to definiujemy $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$

Def.

Jeśli $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}_+$, to definiujemy $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$

Def.

Jeśli $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $m \in \mathbb{N}_+$, to definiujemy $a^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Przykład (potęga o wykładniku niewymiernym)

Aby nadać sens liczbie 5^{π} rozważamy kolejne przybliżenia:

$$125 = 5^3 < 5^{\pi} < 5^4 = 625$$

$$146{,}827 \approx 5^{3,1} < 5^{\pi} < 5^{3,2} \approx 172{,}466$$

$$156{,}591 \approx 5^{3,14} < 5^{\pi} < 5^{3,15} \approx 159{,}131$$

$$156{,}843 \approx 5^{3,141} < 5^{\pi} < 5^{3,142} \approx 157{,}096$$

$$156{,}969 \approx 5^{3{,}1415} < 5^{\pi} < 5^{3{,}1416} \approx 156{,}994$$

$$156{,}992 \approx 5^{3{,}14159} < 5^{\pi} < 5^{3{,}1416} \approx 156{,}994$$

$$\vdots$$

Obie strony zbliżają się do pewnej liczby rzeczywistej. Tę właśnie liczbę oznaczamy 5^{π}.

Twierdzenie (własności pierwiastków)

Jeśli $a, b \geq 0$ oraz $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ oraz $p, x \in \mathbb{R}$, to:

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$

Twierdzenie (własności potęg)

Jeśli $a, b, p, r \in \mathbb{R}$, to:

- $a^r \cdot a^p = a^{r+p}$
- $a^r : a^p = a^{r-p}$ $(a \neq 0)$
- $(a^r)^p = a^{r \cdot p}$
- $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$
- $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$ $(b \neq 0)$

Twierdzenie (Wzory skróconego mnożenia).
Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzą następujące wzory:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kwadrat sumy
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ kwadrat różnicy
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ różnica kwadratów
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sześcian sumy
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ sześcian różnicy
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ różnica sześcianów
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ suma sześcianów
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Tu proszę zostawić miejsce na wklejenie ramki obok - jest dostępna do wydruku na stonie

Def.

Logarytmem z liczby dodatniej b o podstawie a $(a > 0, a \neq 1)$ nazywamy liczbę c, do której należy podnieść podstawę a, żeby otrzymać liczbę b.

2 symbolicznie: $\log_a b = c \iff a^c = b$, gdzie $a, b > 0$, $a \neq 1$

Twierdzenie (podstawowe własności logarytmów)

Jeśli $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $b \in \mathbb{R}_+$ oraz $r \in \mathbb{R}$, to:

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^r = r$
- $a^{\log_a b} = b$

Twierdzenie (Własności logarytmów)

Jeśli $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ oraz $r \in \mathbb{R}$, to:

- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ (logarytm iloczynu)
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ (logarytm ilorazu)

Twierdzenie (o zamianie podstawy logarytmu)

Jeśli $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $c \in \mathbb{R}_+$, to $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

Uwaga

Wyróżniamy dwa szczególne rodzaje logarytmów:

- o podstawie 10 ; oznaczamy go $\log$ i nazywamy dziesiętnym
- o podstawie e ; oznaczamy go $\ln$ i nazywamy naturalnym

Def.

Zdaniem logicznym nazywamy takie stwierdzenie/wyrażenie, o którym można jednoznacznie powiedzieć, czy jest prawdziwe (wartość 1), czy fałszywe (wartość 0). Zdania oznaczamy małymi literami $p, q, r, s, \ldots$

p	$\neg p$
1	0
0	1

Def.

Zaprzeczeniem (negacją) zdania p nazywamy zdanie postaci „nieprawda, że p". Oznaczenie: $\neg p$ (lub $\sim p$). Zaprzeczeniem zdania prawdziwego jest zdanie fałszywe i na odwrót.

Def.

Alternatywa zdań p, q nazywamy zdanie postaci „p lub q". Oznaczenie: $p \vee q$. Alternatywa jest prawdziwa tylko wtedy, gdy przynajmniej jedno ze zdań jest prawdziwe.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Def.

Koniunkcja zdań p, q nazywamy zdanie postaci „p i q". Oznaczenie: $p \wedge q$. Koniunkcja jest prawdziwa tylko wtedy, gdy oba zdania są prawdziwe.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Def.

Implikacja zdań p, q nazywamy zdanie postaci „jeżeli p, to q". Oznaczenie: $p \Rightarrow q$. Implikacja jest fałszywa tylko wtedy, gdy p jest prawdziwe, a q fałszywe.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Def.

Równoważność zdań p, q nazywamy zdanie postaci „p wtedy i tylko wtedy, gdy q". Oznaczenie: $p \Leftrightarrow q$. Równoważność jest prawdziwa tylko wtedy, gdy oba zdania mają taką samą wartość logiczną.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Def.

Alternatywa wykluczająca zdań p, q nazywamy zdanie postaci „p albo q". Oznaczenie: $p \underline{\vee} q$ (lub $p \dot{\vee} q$). Alternatywa wykluczająca jest prawdziwa, tylko wtedy, gdy dokładnie jedno ze zdań jest prawdziwe.

p	q	$p \underline{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Def.

Tautologią nazywamy zdanie złożone, które jest prawdziwe bez względu na wartości zdań składowych.

Twierdzenie

Tu zostawić miejsce na twierdzenie o tautologiach - dostępne na stronie.

Def.

Formą zdaniową nazywamy wyrażenie zawierające zmienną np. x, takie że po wstawieniu w miejsce zmiennej x dowolnej wartości staje się ono zdaniem logicznym (prawdziwym lub fałszywym).

Def.

- Wyrażenie „dla każdego" nazywamy kwantyfikatorem ogólnym (lub dużym) i oznaczamy $\forall$ (lub dawniej $\bigwedge$)
- Wyrażenie „istnieje" nazywamy kwantyfikatorem szczegółowym (lub małym) i oznaczamy $\exists$ (lub dawniej $\bigvee$).

Uwaga

Forma zdaniowa poprzedzona kwantyfikatorem staje się zdaniem.

Uwaga (zaprzeczenie zdań z kwantyfikatorami)

- Zdanie „Nieprawda, że każdy element spełnia jakiś warunek" jest równoważne zdaniu „Istnieje element, który nie spełnia tego warunku."
- Zdanie „Nieprawda, że istnieje element spełniający jakiś warunek" jest równoważne zdaniu „Każdy element nie spełnia tego warunku".