Elżbieta Pszczółkowska

Sherlock Holmes a domino

Jak wprowadzam zasadę indukcji matematycznej.

Dla przeciętnego ucznia indukcja matematyczna jest trudna i niezrozumiała. Niektórzy uczniowie nie rozumieją zasady indukcji, choć nauczyli się jej na pamięć. Konieczne jest więc pokazanie związków z czymś, co spotykamy na co dzień.

Indukcja i dedukcja

Rozpoczynając ten dział, zaczynam od przypomnienia znaczenia słów *indukcja* i *dedukcja*. Metoda dedukcji kojarzy się z Sherlockiem Holmesem – ten słynny detektyw posługiwał się nią w rozwiązywaniu zagadek kryminalnych. Dedukcja polega na wyprowadzaniu logicznych wniosków z pewnych przesłanek, na przechodzeniu od ogółu do szczegółu. Jej przeciwieństwem jest indukcja: uogólnianie szczegółowych faktów. W naukach empirycznych korzystamy właśnie z tej metody, wyprowadzając ogólne prawa z wielu konkretnych doświadczeń.

W matematyce tak pojęta indukcja nie ma racji bytu. Nie wystarczy, że sprawdzimy twierdzenie w pewnej liczbie przypadków, może się bowiem okazać, że w innych przypadkach nie jest spełnione.

Przedstawiam tu przykład. Weźmy funkcję $f(n) = n^2 + n + 11$, określoną w zbiorze liczb naturalnych. Podstawmy argumenty od 1 do 7. Uczniowie zauważają, że obliczone wartości funkcji są liczbami pierwszymi. Pytam o wnioski. Wielu uczniów stwierdza wtedy, że „$f(n)$ jest liczbą pierwszą dla każdego n". Sprawdzamy tę hipotezę dla $n = 8$ i $n = 9$ – nadal się zgadza. Wtedy obliczamy $f(10)$ i okazuje się, że jest to liczba złożona.

Dlaczego nasza hipoteza okazała się błędna? Może sprawdziliśmy zbyt mało liczb? Zobaczmy więc, jak zachowują się wartości innej funkcji, wielomianu Eulera: $w(n) = n^2 + n + 41$. Możemy podzielić pracę tak, aby każdy uczeń obliczał wartość funkcji dla jednej liczby, na przykład dla swojego numeru w dzienniku. Jeśli klasa liczy mniej niż 40 osób, wszystkie wyniki są liczbami pierwszymi.

Czy tym razem sprawdziliśmy wystarczająco wiele przypadków, aby stwierdzić, że $w(n)$ zawsze jest liczbą pierwszą? Uczniowie nie są pewni, ale niektórzy się zgadzają. Obliczmy jeszcze jedną wartość: $w(40) = 1681 = 41^2$. Znów nasze rozumowanie nas zawiodło.

Indukcja matematyczna

Widzimy więc, że obliczenia przeprowadzone dla skończonej ilości liczb naturalnych nie mogą być dowodem hipotezy. Indukcja w sensie przyrodniczym nie ma zastosowania w matematyce. Czy więc istnieje sposób, który pozwoli nam wykazać prawdziwość postawionej hipotezy? Aby pomóc uczniom, podaję kilka przykładów.

Mamy ciąg stacji telegraficznych. Każda z nich po otrzymaniu informacji przekazuje ją następnej stacji. Kiedy możemy być pewni, że informacja dotrze na miejsce?

Ustalamy, że:

1. Informacja musi być wysłana.

2. Każda pośrednia stacja, gdy otrzyma informację, musi ją przekazać następnej.

W wyścigach kolarskich obowiązuje zasada: jeśli uczestnik wyścigu chce dotrzeć do mety, musi poruszać się po wyznaczonej trasie i przejechać wszystkie etapy. Jakie warunki muszą być spełnione, aby zawodnik ukończył wyścig?

Uczniowie znajdują odpowiedź:

1. Zawodnik musi wystartować w pierwszym etapie.

2. Jeśli ukończył dowolny etap wyścigu, to powinien zacząć i ukończyć także następny.

Wyobraźmy sobie pewną liczbę kostek domina ustawionych tak, aby tworzyły bardzo długi szereg. Chcemy przewrócić wszystkie kostki, nie przewracając każdej z osobna. Kiedy nam się to uda?[1]

1. Należy przewrócić pierwszą kostkę.

2. Kostki muszą być ustawione w takiej odległości, aby upadek kostki spowodował przewrócenie się następnej.

Zasada indukcji

Podsumowując te przykłady, uczniowie zauważają, że obowiązuje w nich ta sama zasada:

1. Musi się zacząć pewien proces (wyślemy informację, zawodnik wystartuje, przewrócimy pierwszą kostkę).

2. Jeśli nastąpił pewien etap, to nastąpi też kolejny.

Pierwsza linia telegraficzna łączyła Paryż z Lille, a powstała w 1794 roku podczas rewolucji francuskiej. Telegraf nie był wtedy urządzeniem elektrycznym: na wysokiej wieży umieszczano semafor. Każdej literze alfabetu odpowiadało położenie jego ramion. Nadany sygnał obserwowała obsługa kolejnej stacji i przekazywała go dalej.
W Polsce pierwsza linia telegrafu semaforowego łączyła Warszawę z twierdzą w Modlinie. Zbudowano ją przed wybuchem powstania listopadowego.

APŁ

Teraz możemy sformułować zasadę indukcji w ścisły sposób. Jeśli uczniowie zrozumieją na przykładach z życia wziętych, na czym ona polega, będą także umieli zastosować ją w zadaniach matematycznych. Zwykle jako pierwsze przykłady podaję wzór na sumę $1 + 2 + ... + n$ oraz twierdzenie „n różnych prostych leżących na płaszczyźnie i przechodzących przez jeden punkt dzieli płaszczyznę na $2n$ części”.

[1] Ten przykład wymyślił wybitny polski matematyk Hugo Steinhaus żyjący w latach 1887–1972.