Zadanie 1. (0–3)

Dane są liczby $a = \log_2 3$ oraz $b = \log_3 7$.

Wyraź $\log_4 49$ za pomocą liczb a oraz b.

Zadanie 2. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$.

Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (-3, -3)$.

Zadanie 3. (0–4)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 7, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 8.

Wyznacz wszystkie wartości n, dla których spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{S - S_n}{S_n}\right| < 0,001$$

gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Zadanie 4. (0–5)

Dane jest równanie

$$(x-6) \cdot [(m-2)x^2 - 4(m+3)x + m + 1] = 0$$

z niewiadomą x i parametrem $m \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku.

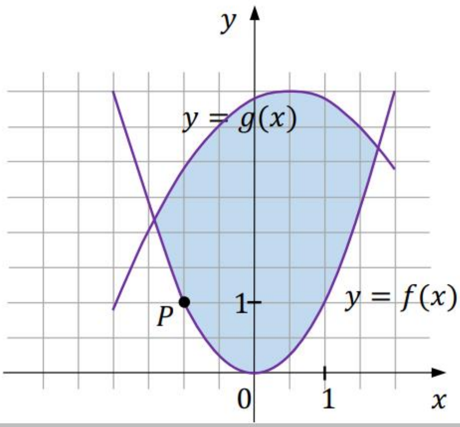
Zadanie 5. (0–3)

Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.

Zadanie 6.

Na obrzeżach miasta znajduje się jezioro, na którym postanowiono stworzyć tor regatowy. Na podstawie dostępnych map wymodelowano w pewnej skali kształt linii brzegowej jeziora w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) za pomocą fragmentów wykresów funkcji f oraz g (zobacz rysunek). Funkcje f oraz g są określone wzorami $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$.

Początek toru postanowiono zlokalizować na brzegu jeziora w miejscu, któremu odpowiada w układzie współrzędnych punkt $P = (-1, 1)$.



Zadanie 6.1. (0–2)

Niech R będzie punktem leżącym na wykresie funkcji g.

Wykaż, że odległość punktu R od punktu P wyraża się wzorem

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

gdzie x jest pierwszą współrzędną punktu R.

Zadanie 6.2. (0–6)

Koniec toru regatowego należy umieścić na linii brzegowej.

Oblicz współrzędne punktu K, w którym należy zlokalizować koniec toru, aby długość toru (tj. odległość końca K toru od początku P) była możliwie największa. Oblicz długość najdłuższego toru.

Zapisz obliczenia.

Wskazówka.

Przy rozwiązywaniu zadania możesz skorzystać z tego, że odległość dowolnego punktu R leżącego na wykresie funkcji g od punktu P wyraża się wzorem

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

gdzie x jest pierwszą współrzędną punktu R.

Zadanie 7. (0–4)

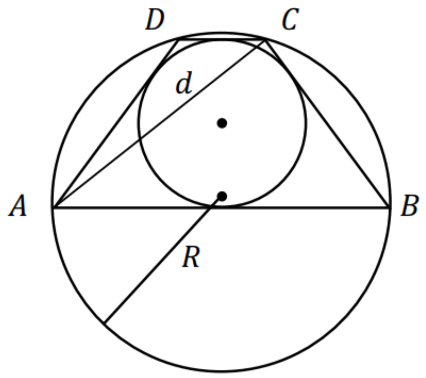
Rozwiąż równanie

$$\sin(3x) = 2\sin x$$

w zbiorze $[0, \pi]$.

Zadanie 8. (0–4)

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o obwodzie l i podstawach AB oraz CD takich, że $|AB| > |CD|$. Trapez jest opisany na okręgu i wpisany w okrąg, a przekątna AC trapezu ma długość d (zobacz rysunek).



Wykaż, że promień R okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ jest równy $\frac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}$.

Zadanie 9. (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $A = (9, 12)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC. Prosta k o równaniu $y = \frac{1}{2}x$ zawiera dwusieczną kąta ABC tego trójkąta. Okrąg $\mathcal{O}$ o równaniu $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 16$ jest wpisany w ten trójkąt.

Oblicz współrzędne punktu styczności prostej przechodzącej przez wierzchołki B i C tego trójkąta z okręgiem $\mathcal{O}$.

Zadanie 10. (0–6)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i polu powierzchni bocznej równym P. Kąt między wysokościami sąsiednich ścian bocznych poprowadzonych z wierzchołka S ma miarę 2α.

Objętość tego ostrosłupa jest równa $\sqrt{k \cdot P^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos(2\alpha)}$, gdzie k jest stałym współczynnikiem liczbowym.

Oblicz współczynnik k.

Zadanie 11. (0–4)

Egzamin składa się z 15 zadań zamkniętych. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których tylko jedna okazuje się poprawna. Zdający zalicza egzamin, jeśli udzieli poprawnych odpowiedzi w co najmniej 11 zadaniach. Pewien student przystąpił nieprzygotowany do egzaminu i w każdym zadaniu wybierał losowo odpowiedź.
Przyjmij, że w każdym zadaniu wybór każdej z odpowiedzi przez studenta jest równo prawdopodobny.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że ten student zaliczył egzamin.

ODPOWIEDZI

$$\log_4 49 = a \cdot b.$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}.$$

$$n > 9.$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty).$$

-

$$K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right), \ |PK| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$0, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi.$$

-

$$(8, 0)$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{36}.$$

$$\frac{123841}{4^{15}}$$