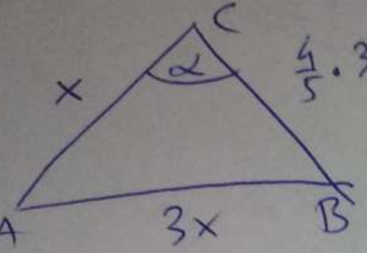
A.

1.



$\frac{4}{5}\cdot 3x = \frac{12}{5}x$ Największy kąt jest naprzeciw najdłuższego boku => jest to kąt ∢C.

z tw. cosinusów:

$$9x^2 = x^2 + \frac{144}{25}x^2 - 2\cdot\frac{12}{5}x^2\cos\alpha \quad /:x^2\ (\neq 0)$$

$$8 = \frac{144}{25} - \frac{24}{5}\cos\alpha$$

$$\frac{56}{25} = -\frac{24}{5}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\cancel{56}^{28}}{\cancel{25}_{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{24}_{12}} = -\frac{\cancel{28}^{7}}{\cancel{12}_{3}\cdot 5} = -\frac{7}{15}$$

$\cos\alpha < 0 \Rightarrow \alpha$ - rozwarty $\Rightarrow \Delta$ rozwartokątny

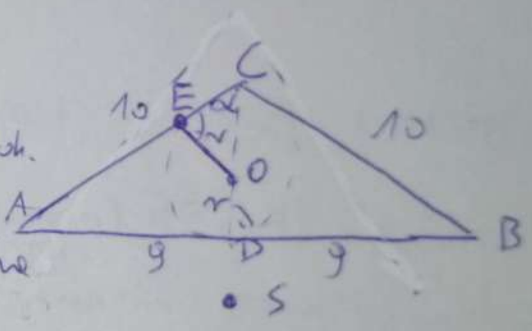
2.

18, 10, 10

$10^2 + 10^2 = 200 < 324 = 18^2 \Rightarrow \Delta$ rozwartok.

$\Downarrow$

środek okr. opisanego na zewnątrz.



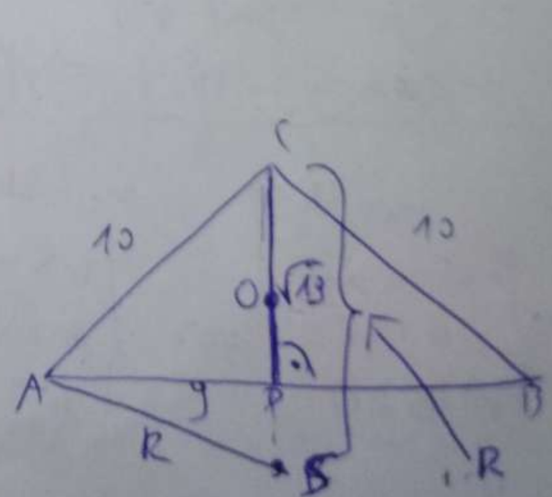
z tw. Pitagorasa

$$10^2 = 9^2 + |CD|^2$$
$$|CD|^2 = 100 - 81 = 19 \Rightarrow |CD| = \sqrt{19}$$

z tw. o odcinkach stycznych: $|AE| = |AD| = 9 \Rightarrow |EC| = 1$

$\Delta CEO \sim \Delta ADC$ (cecha kkk)

zatem $\frac{r}{1} = \frac{9}{\sqrt{19}} \Rightarrow r = \frac{9\sqrt{19}}{19}$



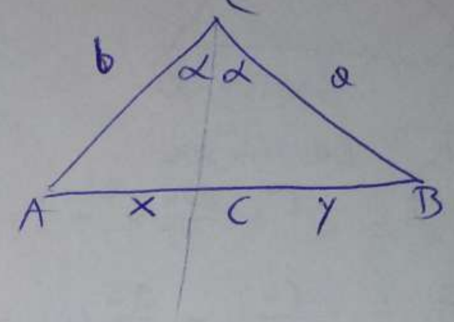
$|DS| = R - \sqrt{19}$

z tw. Pitagorasa (ΔSAD)

$$81 + (R - \sqrt{19})^2 = R^2$$
$$81 + \cancel{R^2} - 2\sqrt{19}R + 19 = \cancel{R^2}$$
$$100 = 2\sqrt{19}R \Rightarrow R = \frac{50}{\sqrt{19}} = \frac{50\sqrt{19}}{19}$$

A zatem $|OS| = r + |DS| = \frac{9\sqrt{19}}{19} + \frac{50\sqrt{19}}{19} = \frac{59\sqrt{19}}{19}$

3.



$y = c - x$

z tw. o dwusiecznej

$\frac{x}{b} = \frac{y}{a}$

$ax = by$

$ax = b(c-x)$

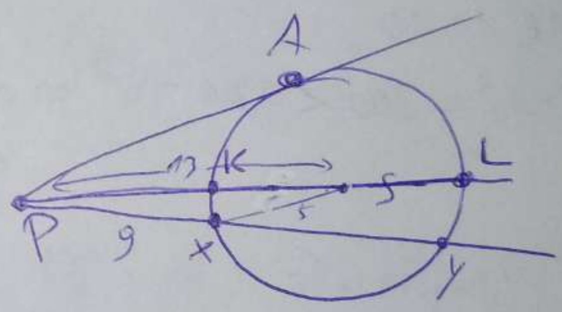
$ax = bc - bx$

$ax + bx = bc$

$x(a+b) = bc \Rightarrow \boxed{x = \frac{bc}{a+b}} \Rightarrow y = c - \frac{bc}{a+b} = \frac{c(a+b)-bc}{a+b} =$

$= \boxed{\frac{ac}{a+b}}$

4.



$|PX| = 9 \quad |XS| = 5 \quad |SP| = 13$

Widzimy, że $|KS| = 5$ (promień)
$|PK| = 8$

z tw. o stycznej i siecznej

$|PA|^2 = |PK| \cdot |PL|$

$|PA|^2 = 8 \cdot 18 = 144 \Rightarrow |PA| = 12$

z tw. o stycznej i siecznej

$|PA|^2 = |PX| \cdot |PY|$

$144 = 9 \cdot |PY| \Rightarrow |PY| = \frac{144}{9} = 16 \Rightarrow |XY| = \boxed{7}$

5. $r_1 = 3k+1 \qquad r_2 = 2k+3 \qquad |AB| = 6k-3$

$\begin{cases} 3k+1 > 0 \\ 2k+3 > 0 \\ 6k-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{1}{3} \\ k > -\frac{3}{2} \\ k \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow D_k = \langle \frac{1}{2}, +\infty)$

↖ dziedzina, dla której w ogóle istnieją okręgi

Okręgi są rozłączne zewnętrznie, gdy:

$$|AB| > r_1 + r_2$$

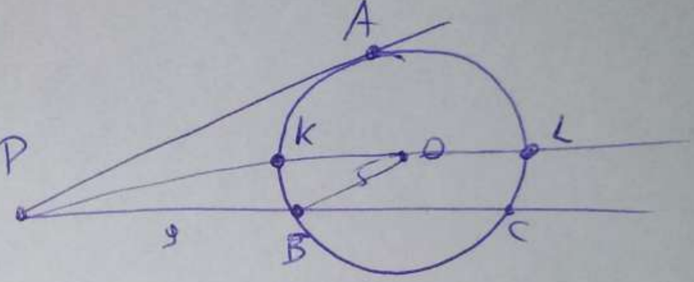
$$6k-3 > 3k+1+2k+3$$

$$k > 7 \wedge k \in D_k$$

$$k \in (7, +\infty)$$

B|.

1.



$|PB| = 9 \quad |BO| = 5 \quad |OP| = 13$

Widać, że $|KO| = 5$ (promień)

z tw. o stycznej i siecznej:

$$|PA|^2 = |PK| \cdot |PL|$$

$$|PA|^2 = 8 \cdot 18 = 144 \Rightarrow |PA| = 12$$

z tw. o stycznej i siecznej

$$|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$$

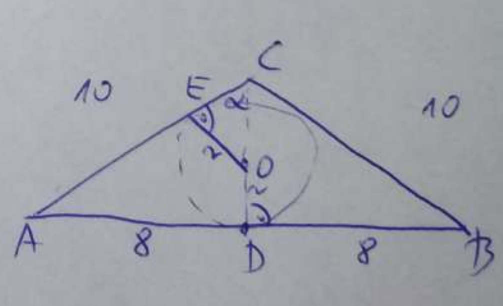
$$144 = 9 \cdot |PC| \Rightarrow |PC| = \frac{144}{9} = 16 \Rightarrow |BC| = 7$$

2. $16, 10, 10$

$10^2 + 10^2 = 200 < 256 = 16^2 \Rightarrow \triangle$ rozwartok.

$\Downarrow$

Środek okręgu opisanego poza trójkątem



z tw. Pitagorasa:

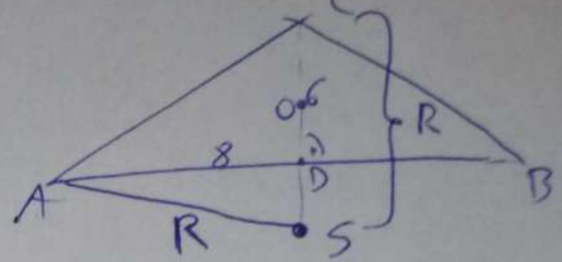
$$10^2 = 8^2 + |CD|^2$$

$$|CD|^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow |CD| = 6$$

z tw. odcinków stycznych: $|AE| = |AD| = 8 \Rightarrow |CE| = 2$.

$\triangle CEO \sim \triangle ADC$ (cecha kkk)

Zatem $\frac{r}{2} = \frac{8}{6} \Rightarrow 6r = 16 \Rightarrow r = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$



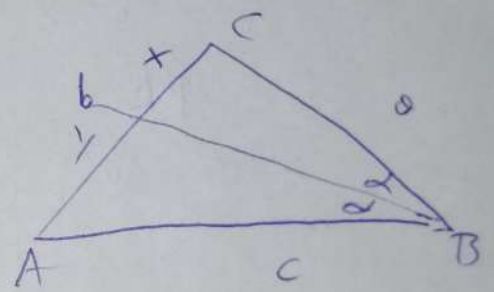
$|DS| = R - 6$

z tw. Pitagorasa (Δ SAD)

$$64 + (R-6)^2 = R^2$$
$$64 + \cancel{R^2} - 12R + 36 = \cancel{R^2}$$
$$100 = 12R$$
$$R = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$$

A zatem $|OS| = r + |DS| = \frac{8}{3} + \frac{25}{3} = \frac{33}{3} = \underbrace{11}$

3.



$y = b - x$

z tw. o dwusiecznej

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{c}$$
$$cx = ay$$
$$cx = a(b-x)$$
$$cx = ab - ax$$
$$cx + ax = ab$$
$$x(a+c) = ab \Rightarrow \underbrace{x = \frac{ab}{a+c}} \Rightarrow y = b - \frac{ab}{a+c} = \frac{b(a+c) - ab}{a+c} = \underbrace{\frac{bc}{a+c}}$$

4. To samo co w grupie A zadanie 1.

5. $r_1 = k+1 \quad r_2 = 2k-2, \ |AB| = 4k-4$

$$\begin{cases} k+1 > 0 \\ 2k-2 > 0 \\ 4k-4 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k > -1 \\ k > 1 \\ k \geq 1 \end{cases} \Rightarrow D_k = (1, +\infty)$$ ← dziedzina, dla której w ogóle istnieją okręgi.

Okręgi rozłączne zewnętrznie, gdy: $|AB| > r_1 + r_2$

$$4k - 4 > k + 1 + 2k - 2$$
$$k > 3 \wedge k \in D_k$$
$$\underbrace{k \in (3, +\infty)}$$

(4)