

# delta

MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$   $\pi=3,141592\dots$

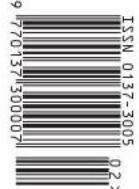
NR 2 (609) 2025

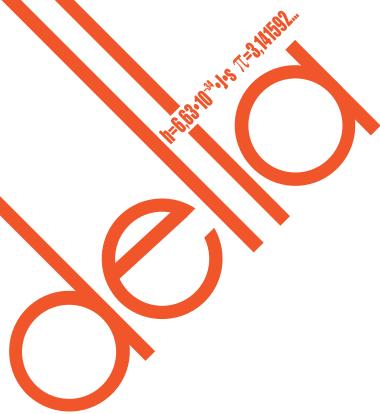
CENA 8 ZŁ VAT 8%  
PL ISSN 0137-3005 / NR IND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

„Delta” zdobywcą  
Nagrody Głównej 20. edycji  
konkursu „Popularyzator Nauki”!

Jak  
bezpiecznie  
prześać  
pierścionek  
zaręczynowy  
str. 1





17-66-10-348 7-3 141592

Nagrodę Dziekanów  
za najlepszy artykuł *Delta*  
w roku akademickim 2023/24 otrzymała  
**Jadwiga CZYŻEWSKA**  
za tekst  
**Szerokość ścieżkowa**  
zamieszczony w numerze 9/2024

## SPIS TREŚCI NUMERU 2 (609) 2025

Jak przesyłać bezpiecznie pierścionek  
zaręczynowy?

*Piotr Chrząstowski-Wachtel*

str. 1

Do powierzchni obrotowych  
i jeszcze dalej

*Michał Miśkiewicz*

str. 3

Obliczenia pól i objętości –  
trzy metody geometryczne

*Vazgen Bagdasaryan,  
Grzegorz Łukaszewicz*

str. 6

 Inteligentna metoda na cukier

*Marta Fikus-Kryńska*

str. 10

Symulowanie XVII-wiecznego pola walki

*Marcin Waniek*

str. 12

O przedwiecznej inflacji

*Mateusz Kulejewski*

str. 14

 Zadania

Klub 44

str. 16

str. 17

 Prosto z nieba: Malin 1 – co nowego  
u spiralnej galaktyki gigantki?

str. 22

 Niebo w lutym

str. 23

 Symetria środkowa

*Bartłomiej Bzdęga*

str. 25

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej; dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, prof. UW; dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący; dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW; dr hab. Sławomir Dinew, prof. UJ; dr Tomasz Greczyło, prof. UWr; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UWr; prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kolaczek-Szymański; prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący; dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński; dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak; dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN; prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

**Redaguje collegium w składzie:** Michał Bejger, Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nacz., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Jan Horubała, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nacz., Anna Rudnik, Marzanna Wawro – sek. red.

**Adres do korespondencji:**

Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.

Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.

[www.ado.com.pl](http://www.ado.com.pl)

**Prenumerata:**

Garmond Press: [www.garmondpres.pl](http://www.garmondpres.pl) (tylko instytucje)

Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)

Na stronie Empiku *Delta* można zamówić co miesiąc:

[www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p](http://www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji  
osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;  
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym  
artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

**Wydawca:** Uniwersytet Warszawski

# Jak przesyłać bezpiecznie pierścionek zaręczynowy?

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Piotr CHRZAŚTOWSKI-WACHTEL\*

Czemu przesyłać? Nie można dać osobiście? Otóż czasami nie można. Wyobraźmy sobie sytuację, w której więzień Artur (zalóżmy, że niesłusznie oskarżony) chce się oświadczyć swojej ukochanej Biance. Wykonał już pierścionek zaręczynowy, ale nie może się z nią spotkać. Na szczęście znalazł kuriera, który zobowiązał się dostarczyć przesyłkę, ale nie jest to osoba godna zaufania. Nasz bohater boi się, że pierścionek może zostać skradziony, choć sam kurier funkcjonuje na razie dobrze, skutecznie przekazując listy między zakochanymi.

Artur wykonał również gustowną szkatułkę zamukaną na kłódki. Na szczęście ma ich kilka i na wszelki wypadek szkatułka została przygotowana tak, żeby można było zapiąć ją na kilka kłódek. Mógłby więc włożyć pierścionek do szkatułki, zamknąć ją na kłódkę i wysłać kurierem, a następnie przesyłać ukochanej kluczyk, którym będzie mogła otworzyć skrzynkę. Założymy jednak, że w kwestiach bezpieczeństwa Artur jest bardzo pryncypialny i z zasady nigdy nie powierza nikomu swoich kluczy. Czy przy takim ograniczeniu jest w stanie bezpiecznie wysłać Biance pierścionek?



Artur ma następujący plan. Wysyła najpierw Biance instrukcję obsługi – w instrukcji jest napisane, żeby Bianka kupiła kłódkę. Następnie wkłada pierścionek do szkatułki i zamkniętą ją na swoją kłódkę. Wysyła kurierem zamkniętą szkatułkę bez kluczyka, a Bianka, zgodnie z instrukcją, zamkniętą szkatułkę na drugą kłódkę i odsyła bez swojego kluczyka całość do Artura. Teraz Artur otrzymuje szkatułkę zamkniętą na dwie kłódki z pierścionkiem w środku. Otwiera swoim kluczykiem swoją kłódkę i odsyła szkatułkę Biance, a ta może już bezpiecznie otworzyć własną kłódkę. Kurier nigdy nie może otworzyć szkatułki, bo klucz nie wędruje między stronami.

Wygląda na to, że ten algorytm mógłby być używany w kryptografii. Jeśli chcemy zakodować jakąś informację, możemy użyć klucza szyfrującego tak, aby potencjalny podglądacz, powiedzmy właściciel pośredniczącego w transmisji danych serwera, nie mógł odczytać oryginału. Problem polega na tym, że zazwyczaj, aby rozszyfrować zakodowany tekst, powinniśmy znać klucz. Przesłanie klucza może być równe niebezpieczne, jak oryginalnej wiadomości – też może zostać podglągnięty w czasie transmisji danych. Z kolei przekazanie klucza zawsze może być kłopotliwe albo wręcz niemożliwe. Ponadto, jeśli mamy do przekazania duże dane, to w niektórych protokołach szyfrujących może się okazać, że klucz jest zbyt krótki i zastosowanie go naraża naszą wiadomość na przykład na atak statystyczny.

Zanim przejdziemy dalej, dwa słowa o uwielbianej przez informatyków funkcji xor. Jest to funkcja, która dla dwóch bitów daje jedynkę, jeśli są różne, a zero, jeśli są takie same. W logice nazywana jest alternatywą wyłączającą (eXclusive OR), a w podręcznikach oznaczana jest zwykle symbolem  $\oplus$ . Zauważmy, że jest to funkcja przemienna:  $a \oplus b = b \oplus a$  i łączna:  $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ . Kolejność podania argumentów nie ma znaczenia, a łączność wynika zauważenia, że gdy ksorujemy więcej bitów, to wynik będzie równy jeden, gdy liczba jedynek w tym ciągu bitów jest nieparzysta, a zero w przeciwnym razie. Grupowanie ich, w ten czy inny sposób, nie zmieni wyniku. Czyli wynikiem  $(b_1 \oplus \dots \oplus b_n)$  będzie 1 wtedy i tylko wtedy, gdy będzie nieparzyste wiele takich indeksów  $k$ , że  $b_k = 1$ .

Odnosząmy kilka podstawowych własności funkcji xor. Po pierwsze  $a \oplus a = 0$ . Po drugie  $0 \oplus a = a$ . Po trzecie  $a \oplus b \oplus a = b$ . Ta ostatnia równość wynika z dwóch

pierwszych, z łączności i z przemienności. Po prostu  $a \oplus b \oplus a = (b \oplus a) \oplus a = b \oplus (a \oplus a) = b \oplus 0 = b$ .

To, co robimy na bitach, możemy też zrobić na ciągach bitów: dla dwóch jednakowej długości ciągów bitów możemy wykonać xor na każdej pozycji oddzielnie. Oznacza to, że xor jest całkiem interesującą operacją arytmetyczną: jeśli będziemy reprezentować liczby z przedziału  $[0, \dots, 255]$  za pomocą jednego bajtu (czyli ciągu ośmiu bitów), to na przykład  $9 \oplus 5 = 12$ , gdyż 9 ma reprezentację dwójkową 00001001, 5 ma reprezentację 00000101, a 12 ma reprezentację 00001100 i te jedynki w reprezentacji dwójkowej 12 są tam, gdzie reprezentacje 9 i 5 się różnią. Oczywiście skoro  $9 \oplus 5 = 12$ , to  $12 \oplus 5 = 9$  i  $12 \oplus 9 = 5$ .

Wykorzystując te własności, moglibyśmy zaszyfrować dowolny tekst, ksorując go z danym kluczem, a odszyfrowanie go polegaloby na ponownym ksorowaniu z tym samym kluczem. Jeśli zatem

odbiorca wiadomości, którą chcemy zaszyfrować, znalby nasz klucz, to tekst, który chcemy nadać, sksorowalibyśmy z kluczem litera po literze. Kiedy odbiorca drugi raz sksoruje zaszyfrowany tekst z tym kluczem, to odczyta oryginał.

Powiedzmy, że umawiamy się, że naszym kluczem będą słowa inwokacji z „Pana Tadeusza” *Litwo, Ojczyzno moja! ty jesteś jak zdrowie*. Tekst ten ma 43 znaki. Zakodowany w kodzie ASCII będzie miał 342 bity, które mogą być użyte do ksorowania z kolejnymi znakami szyfrowanego tekstu. Wynik, jaki dostaniemy, raczej nie będzie przypominał oryginału. Na przykład słowo *Delta*, mające w kodzie ASCII wartości kolejnych liter równe [68][101][108][116][97] sksorowane z pierwszymi 5 znakami klucza, czyli słowem *Litwo* o kodzie ASCII [76][105][116][119][111], dałoby tekst, który w kodzie ASCII miałby reprezentację [8][12][24][3][14], bo  $68 \oplus 76 = 8$ ,  $101 \oplus 105 = 12$ ,  $108 \oplus 116 = 24$ ,  $116 \oplus 119 = 3$ ,  $97 \oplus 111 = 14$ . Rzec jasna, ciąg [8][12][24][3][14] sksorowany z ciągiem [76][105][116][119][111], czyli słowem *Litwo*, da nam z powrotem ciąg [68][101][108][116][97], czyli słowo *Delta*. Są jednak wady tego pomysłu.

Pierwsza – przekazanie i przechowywanie klucza: każda metoda jest wrażliwa na ataki. Druga: może się okazać, że komunikat, który nadajemy, jest dłuższy niż klucz. Wtedy oczywiście można po tylu pierwszych znakach, ile jest w kluczu (czyli 43 w naszym przykładzie), ponownie zacząć od początku używać klucza, ale jest w tym pewien problem. Okazuje się, że jeśli nasz zaszyfrowany tekst jest bardzo długi, to w tym momencie niektóre litery klucza zaczynają istotnie częściej być używane do kodowania, a inne rzadziej. Na przykład w naszym kluczu są aż 4 litery *o* i nie ma żadnej litery *u*. Jeśli tekst, który chcemy zakodować, jest napisany w języku polskim, dla którego częstości występowania liter są nam znane, to najczęściej występującą w naszym języku literę *a* będziemy częściej kodowali za pomocą *o* niż jakkolwiek inną literę zakodowaną jakimkolwiek innym znakiem. Badając zaszyfrowany tekst, moglibyśmy znaleźć najczęściej występującą zaszyfrowaną literę i przyjąć, że jest to szyfr litery *a*. W ten sposób moglibyśmy odtworzyć najczęściej występującą literę klucza i tak po nitce do kłębka złamać cały klucz. Dlatego dobrze byłoby, gdyby klucz miał długość równą długości zaszyfrowanego tekstu, a najlepiej, żeby dodatkowo był jakimś zupełnie losowym ciągiem znaków, niemającym odpowiednika w języku naturalnym.

Moglibyśmy teraz przesyłać zaszyfrowane wiadomości, podobnie jak Artur przesyłał pierścionek swojej ukochanej. Wystarczy bowiem kolejno:

- wygenerować losowy ciąg znaków o długości równej długości tekstu,
- sksorować go z tekstem, który chcemy zaszyfrować,
- wysłać odbiorcy tekst zakodowany kluczem, którego on nie zna,
- poprosić go o wygenerowanie swojego klucza, którego z kolei my nie musimy znać,
- poprosić o powtórne zakodowanie zaszyfrowanego tekstu swoim losowo wygenerowanym kluczem i przesłanie nam podwójnie zakodowanego tekstu,
- otrzymany podwójnie zakodowany tekst sksorować z naszym kluczem, zdejmując jedno zakodowanie, ale pozostawiając tekst zakodowany kluczem odbiorcy,
- przesyłać odbiorcy wynik,
- poprosić go o sksorowanie ze swoim kluczem.



Druga kłódka zdjęta! Nadany tekst został odczytany. Nikt po drodze nie widział ani oryginalnego tekstu, ani klucza. Oba klucze możemy wyrzucić. No po prostu super!

Niestety możemy wyrzucić do kosza też cały pomysł takiego szyfrowania. Zawiera on bowiem pewien trudno usuwalny błąd. Nie tak łatwo go dostrzec na pierwszy rzut oka. Problem w tym, że oprócz zaszyfrowania wiadomości żądamy tego, aby nikt, kto będzie podglądał transfer zaszyfrowanych tekstów, nie był w stanie odtworzyć oryginału. Sprawdźmy, co by było, gdyby potencjalny podglądacz przechwycił trzy zaszyfrowane teksty: pierwszy zaszyfrowany kluczem *a* przez Artura, drugi doszyfrowany kluczem *b* przez Biankę i trzeci

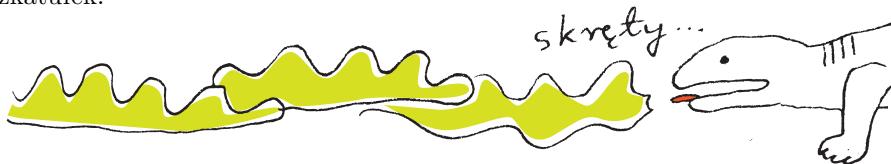
odszyfrowany kluczem  $a$  przez Artura. Wtedy te trzy przesyłane teksty to kolejno  $t \oplus a$ ,  $t \oplus a \oplus b$  oraz  $t \oplus a \oplus b \oplus a = t \oplus b$ .

Sksorowanie tych trzech zaszyfrowanych wiadomości to  $(t \oplus a) \oplus (t \oplus a \oplus b) \oplus (t \oplus b)$ , co z uwagi na łączność i przemienność funkcji xor daje nam  $(t \oplus t) \oplus (a \oplus a) \oplus (b \oplus b) \oplus t = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus t = t$ . Bez żadnego wysiłku z tych trzech tekstów odtworzymy zaszyfrowaną wiadomość  $t$ .

Klasycznym rozwiązaniem naszego problemu w kryptografii jest *protokół Diffiego-Hellmana* pozwalający ustalić stronom komunikacji wspólny klucz szyfrowania w bezpieczny sposób.

Zauważmy, jak ważne w kryptografii jest wyspecyfikowanie celu – tu jest nim niemożliwość lub wystarczająca trudność odtworzenia zaszyfrowanego tekstu przez podglądacza bez znajomości kluczy szyfrujących. Tej istotnej własności niestety naszej metodzie brakuje.

A najciekawsze jest to, że algorytm Artura z fizycznymi klockami działa i jest nie do złamania, nawet jeśli kurier przez jakiś czas ma dostęp do zamkniętych szkatułek.



## Do powierzchni obrotowych i jeszcze dalej

*Michał MIŚKIEWICZ\**

Full ahead, mr. Sulu, maximum warp.

James T. Kirk,

*Star Trek: The Original Series*, S01E08

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

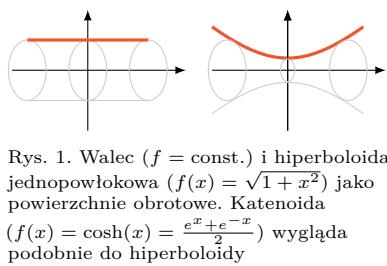


Oficjalne logo *Operation Warp Speed*, partnerstwa publiczno-prywatnego mającego na celu szybki rozwój i dystrybucję szczepionek przeciwko covid-19 (maj 2020 – luty 2021).

Bohaterem tego artykułu jest *produkt skręcony*, po angielsku: *warped product*. Słowo *warp* (wykrzywić, odkształcić) zrobiło karierę za sprawą *warp drive*, hipotetycznego napędu pozwalającego rozwijać prędkości nadświetlne. Został on spopularyzowany w serii science fiction Star Trek i doczekał się całkiem poważnego traktowania, o czym więcej można przeczytać w *Opowieściach o podróżach w kosmos* z  $\Delta_{13}^5$ , lub też wyszukując hasło *Alcubierre drive*. Wpływ tej idei na zbiorową wyobraźnię jest na tyle duży, że w 2020 roku amerykańska inicjatywa rozwoju i dystrybucji szczepionek przeciwko covid-19 przyjęła nazwę *Operation Warp Speed*.

Nazwa nie jest jedyną cechą łączącą produkt skręcony z napędem warp. Po pierwsze, napęd ten opiera się na pomyśle odkształcania przestrzeni, co rodzi pojęciową trudność: wszak umiemy giąć dwuwymiarową kartkę w trójwymiarowej przestrzeni, ale jak mielibyśmy wyginać samą przestrzeń? Odpowiedzią na tę trudność jest geometria wewnętrzna, czyli język pozwalający opisywać geometrię i deformacje obiektu samego w sobie, bez odwołań do otaczającej go przestrzeni. Produkt skręcony jest właśnie jednym z narzędzi takiego opisu.

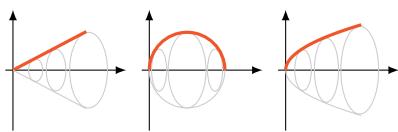
Po drugie, przekroczenie prędkości światła konwencjonalnymi metodami nie jest możliwe. Furtkę do obejścia tego zakazu proponuje napęd warp. Ograniczenie „prędkości” podobnej natury zobaczymy niżej, badając bliżej powierzchnie obrotowe. Przekonamy się, że produkt skręcony umożliwia pokonanie tej granicy. Zachęcam więc Czytelnika do lektury, by odkrywać dziwne nowe światy oraz śmiało pójść tam, gdzie żaden człowiek wcześniejszej nie dotarł.



[M] Mathologer, *Why don't they teach simple visual logarithms (and hyperbolic trig)?*, film na platformie YouTube: [youtu.be/G0Fa5Zl-Z3c](https://youtu.be/G0Fa5Zl-Z3c).

**Powierzchnie obrotowe.** Przepis na taką powierzchnię jest prosty. Bierzemy ciągłą dodatnią funkcję  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  i jej wykres  $y = f(x)$  obracamy wokół osi  $x$ . Otrzymaną powierzchnię można opisać równaniem  $r = f(x)$ , jeśli przez  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  oznaczymy odległość od osi  $x$ .

Przykłady można mnożyć. Przyjęcie za  $f$  funkcji stałej prowadzi do konstrukcji walca. Obrót hiperboli, czyli wykresu funkcji  $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ , prowadzi do hiperboloidy jednopowłokowej. Powierzchnię tę zobaczymy też, obserwując szybko obracającą się kostkę (jak na początku filmu [M]). Z kolei funkcja



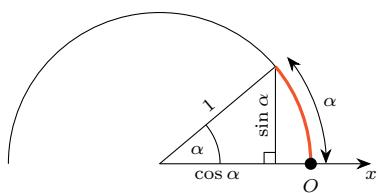
Rys. 2. Stożek, sfera i paraboloida eliptyczna. W każdym z tych przypadków mamy  $f(0) = 0$ , co oznacza, że powierzchnia się „zamyka” – jak widać, da się to nawet zrobić gładko

$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , zwana cosinusem hiperbolicznym, daje nam powierzchnię znaną jako katenoida, która wyróżnia się swoją *minimalnością* (więcej w  $\Delta_{96}^{10}$ ).

Oczywiście funkcja  $f$  może mieć mniejszą dziedzinę, wówczas otrzymana powierzchnia ma brzeg w kształcie jednego lub więcej okręgów. Można też dopuścić, by  $f$  przyjmowała w jakimś punkcie wartość 0, co w efekcie „zamyka” powierzchnię. Najprostszym przykładem będzie tu stożek, czyli kształt czapeczki urodzinowej. Otrzymujemy ją, wycinając z (nieskończonej) kartki papieru kąt o rozwartości  $\alpha \in (0, 2\pi)$  i odpowiednio zginając. Efektem jest powierzchnia opisana przez  $f(x) = cx$  dla  $x \geq 0$ , o ile odpowiednio dobierzemy  $c$ ; musi ono spełniać  $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ .

Stożek posiada charakterystyczny punkt, wierzchołek, w którym jest niegładki. Można tego uniknąć – wystarczy zażądać, by w punkcie „zamknięcia” pochodna  $f$  była nieskończona. Przykład? Sfera jednostkowa jest zadana równaniem  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , co możemy przepisać jako  $r^2 = 1 - x^2$ , a więc powierzchnia ta powstaje z obrotu wykresu  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  ( $x \in [-1, 1]$ ). Innym przykładem jest paraboloida eliptyczna, zadana równaniem  $x = y^2 + z^2$ , a więc pochodząca od funkcji  $f(x) = \sqrt{x}$  ( $x \geq 0$ ).

**Opis wewnętrzny.** Dotychczasowy opis można podsumować tak: mierzmy odległość wzduż osi  $x$ , a dla wybranej wartości  $x_0$  funkcja  $f$  mówi nam, jak duży jest okrąg „w odległości  $x_0$ ”; bardziej ściśle, okrąg stanowiący przekrój płaszczyzną  $x = x_0$  ma promień  $f(x_0)$ . Zamiast wzduż osi  $x$  moglibyśmy jednak mierzyć odległości wzduż samej powierzchni, czyli wzduż krzywych powstałych przez obrót wykresu  $f$  – jest to sposób bardziej *wewnętrzny*, mający więcej wspólnego z geometrią samej powierzchni. Najłatwiej jest to wyrazić dla powierzchni obrotowej posiadającej punkt  $O = (x_0, 0, 0)$  na osi  $x$ , czyli dla funkcji  $f$  zerującej się w  $x_0$ . Przyjmiemy mianowicie, że  $h(s)$  jest promieniem okręgu złożonego z punktów odległych od  $O$  o  $s$ .



Rys. 3. Jeśli odległość od punktu  $O = (1, 0, 0)$  liczymy wzduż samej sfery, to punkty odległe o  $\alpha$  tworzą okrąg o promieniu  $\sin \alpha$

Dla pełnej jasności wróćmy do przykładu sfery, w którym jako punkt  $O$  możemy przyjąć  $(1, 0, 0)$ . Punkty odległe od  $O$  o  $\alpha$  leżą w przekroju  $x = \cos \alpha$  i tworzą okrąg o promieniu  $\sin \alpha$ , a więc  $h(\alpha) = \sin \alpha$ . Warto zaznaczyć, że odległość liczymy tutaj po najkrótszej krzywej leżącej na sferze, a więc po łuku koła wielkiego, a nie po odcinku – inaczej odległość ta wynosiłaby  $2 \sin \frac{\alpha}{2}$ . Dla porównania dwóch podanych tu sposobów opisu umieścmy dotychczasowe przykłady w jednej tabelce.

Powierzchnia	Funkcja $f(x)$	Funkcja $h(s)$
Walec o promieniu $R$	$R$	$R$
Katenoida	$(e^x + e^{-x})/2$	$\sqrt{1+s^2}$
Stożek zadany kątem $\alpha$	$cx \quad (\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}})$	$\frac{\alpha}{2\pi}s$
Płaszczyzna		$s$
Sfera o promieniu $R$	$\sqrt{R^2 - x^2}$	$R \cdot \sin \frac{s}{R}$
Warunek „gładkiego zamknięcia”: $f'(x_0) = \pm\infty$	$f'(x_0) = \pm\infty$	$h'(s_0) = \pm 1$

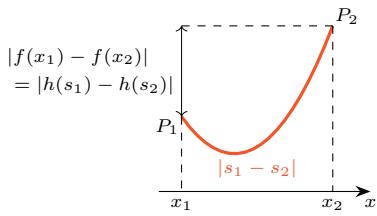
Gdy rozważana powierzchnia obrotowa nie dotyka osi  $x$ , należy wybrać jakiś przekrój  $x = x_0$  i odległość  $s$  liczyć od niego – z plusem w jedną stronę i z minusem w drugą.

Zaawansowanych Czytelników może zainteresować, że w literaturze produkt skręcony definiuje się ściśle przy użyciu pojęcia metryki Riemanna. W przypadku sfery byłaby to metryka

$$g(s, \theta) = \frac{ds^2}{m. \text{ na odcinku}} + (\sin s)^2 \frac{d\theta^2}{m. \text{ na okręgu}}$$

dla  $s \in [-1, 1]$  i  $\theta$  na okręgu, przy czym symbole  $ds^2$  i  $d\theta^2$  odnoszą się do standardowej metryki Riemanna na odcinku i okręgu jednostkowym. W pozostałych przypadkach jest podobnie, tylko funkcję sinus należy zastąpić przez odpowiednią funkcję  $h$ , a odcinek ewentualnie podmienić na półprostą – w ten sposób opisujemy wszystkie powierzchnie posiadające symetrię obrotową.

W ten sposób poznaliśmy właściwie, czym jest *produkt skręcony* półprostej (lub odcinka) z okręgiem. Żeby ten sposób opisu całkowicie oderwać od otaczającej przestrzeni trójwymiarowej, odnotujmy pewien prosty fakt. Otóż zamiast mówić, że punkty w odległości  $s$  od  $O$  tworzą w przestrzeni trójwymiarowej okrąg o promieniu  $h(s)$ , możemy powiedzieć, że tworzą one krzywą (konkretnie okrąg) o długości  $2\pi h(s)$ . W tym sformułowaniu przestaje mieć znaczenie, jak nasza powierzchnia się układa w przestrzeni – dla przykładu, gdybyśmy czapeczkę urodzinową z powrotem rozłożyły na płasko, to dalej możemy zmierzyć długość krzywej tworzonej przez punkty odległe od wierzchołka o  $s$  (tym razem będzie to łuk okręgu, ale nadal o długości  $\alpha s$ ). O pozytku płynącym z pojęcia skręconego produktu niech świadczy fakt, że można przy jego użyciu opisać metrykę Schwarzschilda, która w ogólnej teorii względności zadaje pole grawitacyjne na zewnątrz sferycznej masy.



Rys. 4. Odległość dwóch punktów,  $P_1, P_2$ , liczona wzdłuż wykresu  $|s_1 - s_2|$  jest co najmniej taka, jak ich odległość w pionie  $|h(s_1) - h(s_2)|$

**Uwaga, ograniczenie!** Po bliższym przyjrzeniu się tabelce widzimy, że o ile za  $f$  można przyjąć dowolną dodatnią funkcję, to już za  $h$  niekoniecznie. Każda z podanych wyżej funkcji  $h$  ma pochodną ograniczoną w module przez 1 lub innymi słowy: spełnia warunek Lipschitza  $|h(s_1) - h(s_2)| \leq |s_1 - s_2|$  dla dowolnych  $s_1, s_2$ . Dowód, że *tak być musi*, nie jest trudny. Przyjmijmy, że na wykresie funkcji  $f$  dany jest punkt  $P_1 = (x_1, f(x_1))$  odległy od  $O$  o  $s_1$  oraz podobnie opisany punkt  $P_2$  (rys. 4). Ich odległość wzdłuż wykresu wynosi  $|s_1 - s_2|$ , jednocześnie można ją ograniczyć z dołu przez odległość wzdłuż osi pionowej, czyli  $|f(x_1) - f(x_2)|$ . Ta ostatnia wielkość to nic innego jak  $|h(s_1) - h(s_2)|$ , uzasadniliśmy więc warunek Lipschitza.

Czy zatem jesteśmy skazani na rozważanie wyłącznie wolno rosnących funkcji  $h$ ? Oczywiście, że nie! Dzięki temu, że produkt skręcony posiada interpretację niezależną od otaczającej przestrzeni, możemy nadać geometryczny sens również powierzchniom zadanych abstrakcyjnie przez szybko rosnące funkcje. Narzuca się na przykład rozważenie uogólnienia stożka: funkcja  $h(s) = \frac{\alpha}{2\pi}s$  dla  $\alpha \geq 2\pi$ . Przypadek  $\alpha = 2\pi$  jest graniczny, odpowiada po prostu płaszczyźnie. Dla  $\alpha > 2\pi$  warto samodzielnie wykonać następujący eksperyment: rozcinamy kartkę papieru wzdłuż półprostej, doklejamy brakujący fragment, by otrzymać kąt o rozwartości  $\alpha$ , a następnie odpowiednio zginamy. Jak łatwo się przekonać, w przestrzeni „brakuje miejsca”, by powstał stożek o symetrii obrotowej. Nie zmienia to faktu, że powierzchnia ta posiada symetrię obrotową w bardziej abstrakcyjnym, wewnętrznym sensie. Pewien niedosyt może oczywiście powodować osobliwość wierzchołka takiego „stożka”, dlatego na koniec rozważymy inny, bardzo klasyczny przykład.

**Strange new worlds.** Za funkcję  $h$  przyjmijmy teraz sinus hiperboliczny, czyli funkcję  $\sinh(s) := \frac{e^s - e^{-s}}{2}$ . Jej pochodną jest wspomniany wcześniej cosinus hiperboliczny  $\frac{e^s + e^{-s}}{2}$ , który poza  $s = 0$  przyjmuje wartości większe od jedynki, co wynika z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną. Mamy więc do czynienia z egzotyczną powierzchnią zwaną *płaszczyzną hiperboliczną*, która podobnie jak stożek nie daje się zrealizować jako powierzchnia obrotowa. Zachęcam do podjęcia się sklejenia lub wydziergania płaszczyzny hiperbolicznej – konieczne instrukcje znajdziesz Czytelnik w artykułach Eryka Kopczyńskiego i Doroty Celińskiej-Kopczyńskiej, opublikowanych w  $\Delta_{20}^5$ . Jako że funkcja sinh ma wzrost wykładniczy, efekt takiego przedsięwzięcia jest jeszcze bardziej spektakularny niż dla niby-stożka (zob. ilustracje poniżej).



Salata – proces jej wzrostu przypomina efekt szydelkowania opisany w  $\Delta_{20}^5$



Portret Haesje Jacobsdr van Cleyburg, żony pewnego roterdamskiego piwowara. Rembrandt van Rijn, 1634 (zbior Rijksmuseum w Amsterdamie)

#### Przykłady powierzchni o stałej krzywiźnie:

- $0 : h(s) = s$ , płaszczyzna,
- $\mathbf{R}^{-2} : h(s) = R \sin(s/R)$ , сфера o promieniu  $R$ ,
- $-\mathbf{R}^{-2} : h(s) = R \sinh(s/R)$ , przeskalowana płaszczyzna hiperboliczna.

Powyższe funkcje łączy to, że spełniają równanie różniczkowe  $h'' + k \cdot h = 0$  z warunkami początkowymi  $h(0) = 0$ ,  $h'(0) = 1$  (choć dla różnych wartości  $k$ ). Każda inną powierzchnię o stałej krzywiźnie da się „zbudować” z jednej z powyższych.

Płaszczyznę hiperboliczną odkryli niezależnie János Bolyai (1802–1860) i Nikolaj Iwanowicz Łobaczewski (1792–1856) (więcej w  $\Delta_{18}^8$ ). Choć nie wynika to bezpośrednio z dotychczasowych obserwacji, płaszczyzna hiperboliczna posiada dużo więcej symetrii niż tylko obrót wokół wyróżionego punktu, stąd też jej nazwa sugerująca identyczną geometrię wokół każdego punktu. W istocie powierzchnia ta ma w każdym punkcie krzywiznę równą  $-1$  i jest to – w odpowiednim sensie – jedyna taka powierzchnia. Jej zobaczenie utrudnia wykazane przez Davida Hilberta (1862–1943) twierdzenie mówiące, że nie tylko nie można jej przedstawić jako powierzchni obrotowej, ale w ogóle nie da się jej izometrycznie zanurzyć (czyli zrealizować bez deformacji) w przestrzeni trójwymiarowej. Dlatego też sięganie po opis wewnętrznzy jest przy zwiedzaniu dziwnych nowych światów nie tylko ciekawe, ale i konieczne.

# Obliczenia pól i objętości – trzy metody geometryczne

Vazgen BAGDASARYAN\*, Grzegorz ŁUKASZEWICZ\*\*

\* Katedra Mechaniki i Konstrukcji  
Budowlany, Szkoła Główna  
Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie  
\*\* Wydział Matematyki, Informatyki  
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Największe pomysły cechuje prostota  
William Golding



Archimedes z Syrakuz (ok. 287–212 p.n.e.) – jeden z najwybitniejszych umysłów matematycznych w historii. Urodził się i zmarł w Syrakuzach. Poza matematyką zajmował się również fizyką i inżynierią. W swoich czasach wślawił się dzięki wynalazkom mechanicznym – tzw. śrubie Archimedesa do pompowania wody, dźwigni, planetarium (bardzo dokładnie odwzorowującym ruchy ciał niebieskich) oraz maszynom wojennym, które przerażały rzymskich żołnierzy podczas oblężenia Syrakuz (oblężenie to przyniosło śmierć Archimedesa). Niestety tylko niektóre dzieła Archimedesa przetrwały do naszych czasów. Należy do nich ważny traktat zatytułowany „Metoda”, który został ponownie odkryty dopiero w 1906 roku, w Konstantynopolu, praktycznie przez przypadek – w palimpseście powstały w roku 1229. W tym traktacie Archimedes szczegółowo opisał swoją metodę dźwigni. Historia wspomnianej palimpsestu (zawierającego także inne traktaty Archimedesa) i metody użyte do jego prawidłowego odczytania są przedstawione w bardzo ciekawej książce Reviela Netza i Williama Noela [4].

Obliczanie pól figur płaskich i objętości brył, nawet w prostych przypadkach, bywa czasem dość kłopotliwe, np. wtedy, gdy łatwo jest napisać całkę wyrażającą pole figury, ale samo obliczenie tej całki jest niebanalne.

Zagadnieniem metod obliczania pól i objętości zajmowało się wielu wybitnych matematyków, począwszy od czasów starożytnych aż po nam współczesne.

W tym artykule przedstawiamy trzy geometryczne podejścia do wyznaczania pól i objętości opracowane w różnych epokach: podejście Archimedesa (III w. p.n.e.), Cavalieriego (XVII w.) oraz Mamikona Mnatsakaniana (XX w.).

**Metoda I – podejście Archimedesa.** Archimedes uważany jest za jednego z twórców statyki i hydrostatyki. Obliczył on środki ciężkości wielu ważnych figur geometrycznych i brył, między innymi trójkąta, trapezu, dowolnego wycinka paraboli i segmentu paraboloidy obrotowej. Swoje wyniki dotyczące statyki zawarł w dziełach *O równowadze płaszczyzn* i *Kwadratura paraboli*.

*Prawo dźwigni*, sformułowane przez Archimedesa, jest jednym z praw równowagi, należą do statyki i mówi, że:

*Wielkości są w równowadze w odległościach odwrotnie proporcjonalne do ich wag.*

Jeżeli po obu stronach dźwigni umieścimy masy, odpowiednio,  $m$  i  $m'$ , a odległości ich środków ciężkości od punktu podparcia dźwigni, odpowiednio,  $d_S$  i  $d_{S'}$ , są do siebie w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do stosunków tych mas:

$$(1) \quad \frac{d_S}{d_{S'}} = \frac{m'}{m},$$

to dźwignia pozostaje w równowadze statycznej.

Jeśli przyjmiemy, że obie masy mają tę samą stałą gęstość, to  $m'/m = V'/V$ , gdzie  $V'$  i  $V$  są objętościami mas, odpowiednio,  $m'$  i  $m$ . Zatem

$$(2) \quad \frac{d_S}{d_{S'}} = \frac{V'}{V}.$$

Gdy rozważamy wyidealizowany problem dwuwymiarowy, objętości  $V'$  i  $V$  zamieniamy na pola  $A'$  i  $A$  dwóch figur płaskich.

Powyższą zasadę można wykorzystać w celu wyznaczania pól i objętości w następujący sposób (por. [2]). Przypuśćmy, że  $R$  i  $S$  to dwa obszary leżące wzduż tego samego odcinka osi poziomej (rys. 1). Mając dane pole  $A(S)$  oraz środek ciężkości  $c_S$  obszaru  $S$ , pytamy o pole  $A(R)$  obszaru  $R$ .

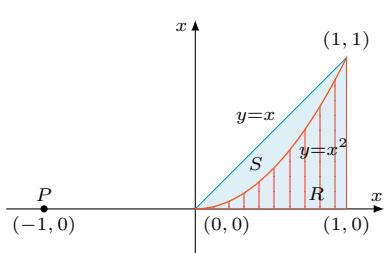
Obszary  $R$  i  $S$  są wypełnione liniami pionowymi, odpowiednio,  $l$  i  $l'$  tak, że każda linia  $l$  (odp.  $l'$ ) jest zawarta w obszarze  $R$  (odp.  $S$ ), a każdy punkt obszaru  $R$  (odp.  $S$ ) należy do dokładnie jednej linii  $l$  (odp.  $l'$ ).

Przypuśćmy, że istnieje taka stała  $k$ , że dla każdej pionowej linii w odległości  $x$  od punktu  $O$ , przecinającej obszary  $R$  i  $S$  w odcinkach o długościach  $l$  i  $l'$ , odpowiednio, spełniona jest relacja

$$\frac{k}{x} = \frac{l'}{l}.$$

Wówczas z prawa dźwigni wynika, że odcinek  $l$  umieszczony w punkcie  $P$ , w odległości  $k$  od punktu podparcia  $O$ , równoważy odcinek  $l'$  w miejscu, w którym się znajduje.

Rys. 1



Rys. 2

Zatem jeśli obszar  $R$  zostanie umieszczony tak, aby jego środek ciężkości znalazł się w punkcie  $P$ , to zrównoważy on obszar  $S$  w miejscu, w którym się znajduje, co prowadzi do równania

$$\frac{k}{x_S} = \frac{A(S)}{A(R)},$$

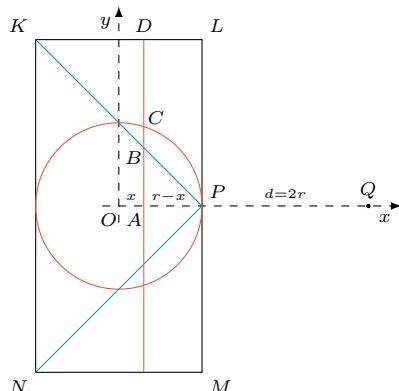
gdzie  $x_S$  to odległość środka ciężkości  $c_S$  obszaru  $S$  od punktu  $O$ . Znając  $A(S)$ ,  $x_S$  oraz  $k$ , z powyższego równania obliczamy szukaną wielkość  $A(R)$ .

**Przykład 1.** *Obliczenie pola pod parabolą.* Weźmy za  $R$  obszar ograniczony przez parabolę  $y = x^2$ , oś  $OX$  oraz prostą  $x = 1$ . Niech  $S$  będzie trójkątem o wierzchołkach w punktach  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ , którego pole powierzchni wynosi  $A(S) = \frac{1}{2}$ , a środek ciężkości ma pierwszą współrzędną  $x_S = \frac{2}{3}$ .

Mamy  $l = x^2$ , a  $l' = x$ , zatem możemy przyjąć  $k = 1$  i otrzymujemy  $1 \cdot x^2 = x \cdot x$ . Oznacza to (przy założeniu, że oś  $OX$  jest dźwignią podpartą w punkcie  $(0, 0)$ ), że gdybyśmy przesunęli obszar  $R$  pod parabolą tak, aby jego środek ciężkości znalazł się w punkcie  $P$  o współrzędnych  $(-1, 0)$ , to zrównoważyłyby on trójkąt w miejscu, w którym się znajduje. Otrzymujemy zatem:

$$A(R) = A(S) \cdot x_S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

W celu wykorzystania tej metody do wyznaczenia objętości brył należy zastąpić długości odcinków polami powierzchni przekrojów poprzecznych. Jako ilustrację przytoczymy jeden z najważniejszych wyników otrzymanych przez Archimedesa.



Rys. 3

**Przykład 2.** [2] *Obliczenie objętości kuli.* Konstrukcję rozpoczynamy od narysowania okręgu  $x^2 + y^2 = r^2$  przecinającego oś  $OX$  w punkcie  $P = (r, 0)$ . Następnie rysujemy prostokąt  $KLMN$ , którego środek ciężkości umiejscowiony jest w środku układu współrzędnych. Jego podstawa ma długość  $d = 2r$ , a jego wysokość jest równa  $h = 2d$ . Rysujemy również trójkąt  $KNP$ . Przez obrót tych figur wokół osi  $OX$  otrzymujemy bryły: kulę  $S$ , stożek  $C$  oraz walec  $Z$ . Zauważmy, że otrzymane bryły zbudowane są z dysków prostopadłych do osi  $OX$ . Dla przykładu, przekrój płaszczyzną prostopadłą do osi  $OX$ , przechodzącą przez punkt  $A = (x, 0)$  przecina kulę – tworząc koło  $S_x$  o promieniu  $AC = y = \sqrt{r^2 - x^2}$ , stożek – tworząc koło  $C_x$  o promieniu  $AB = r - x$  oraz walec – tworząc koło  $Z_x$  o promieniu  $AD = d = 2r$ . Przeprowadźmy rachunki:

$$\begin{aligned} d \cdot [A(S_x) + A(C_x)] &= \pi d \cdot [y^2 + (r - x)^2] \\ &= \pi d \cdot [(r^2 - x^2) + (r^2 - 2rx + x^2)] \\ &= \pi d \cdot (2r^2 - 2rx) \\ &= \pi d^2 \cdot (r - x) \\ &= (r - x) \cdot A(Z_x). \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$d \cdot [A(S_x) + A(C_x)] = (r - x) \cdot A(Z_x),$$

co oznacza, że jeśli przyjmiemy, że oś  $OX$  jest dźwignią z podparciem w punkcie  $P$ , oraz umieścimy koła  $S_x$  i  $C_x$  w punkcie  $Q = (3r, 0)$ , to razem zrównoważą koło  $Z_x$  w miejscu, w którym się znajduje. To prowadzi do wniosku, że jeśli kula  $S$  oraz stożek  $C$  umieścimy tak, aby ich środki ciężkości znalazły się w punkcie  $Q$ , to razem zrównoważą one walec  $Z$  w miejscu, w którym się znajduje. Zatem zasada dźwigni implikuje relację:

$$2r \cdot [V(S) + V(C)] = r \cdot V(Z).$$

Podstawiając znane objętości  $V(C) = \frac{1}{3}\pi d^3$  oraz  $V(Z) = \pi d^3$ , obliczamy objętość kuli o promieniu  $r$ :

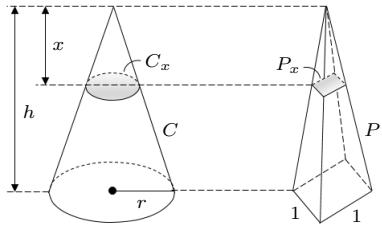
$$V(S) = \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

**Metoda II – podejście Cavalieriego.** Bonaventura Cavalieri spopularyzował swoją metodę w dwóch pracach, *Geometria indivisibilibus* z 1635 roku oraz *Exercitationes geometricae sex* z 1647 roku. Opiera się ona na zasadzie znanej jako twierdzenie Cavalieriego.



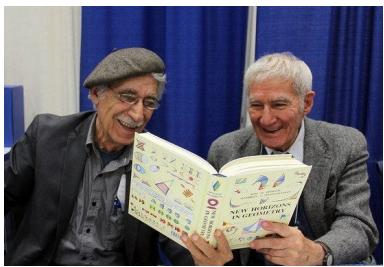
Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647). Włoski matematyk i astronom. Studiował na uniwersytebach w Pizie i w Bolonii. Był uczniem Galileusza. Zajmował się głównie geometrią. Jako pierwszy zaczął stosować metody nieskończoności małych elementów do obliczania pól powierzchni i objętości.

**Twierdzenie Cavalieriego.** [2] Jeżeli dwie bryły mają tę własność, że ich przekroje wszystkimi płaszczyznami równoległymi do jednej, z góry ustalonej płaszczyzny mają te same pola, to te bryły mają równe objętości. Jeżeli przekroje na różnych wysokościach są w stałym stosunku, to objętości tych brył również są w tym stosunku.



Rys. 4

Więcej przykładów zastosowania zasady Cavalieriego można znaleźć w artykule Jarosława Górnickiego z  $\Delta_{12}^1$ .



Mamikon Mnatsakanian (po lewej),  
Tom M. Apostol (po prawej)

Mamikon Mnatsakanian (1942–2021). Ormiański fizyk, który na metodę „całkowania wizualnego” wpadł w trakcie studiów. Pomyśl ten jednak przez wiele lat nie został zauważony i doceniony. Dopiero w trakcie pobytu Mamikona w USA prof. Tom M. Apostol dostrzegł w jego metodzie potencjał i wspólnie zaczęli się nią zajmować i rozwijać.

„Jako nauczyciel rachunku różniczkowego z ponad 50-letnim stażem i autor kilku podręczników na ten temat byłem zdumiony, gdy dowiedziałem się, że wiele standardowych problemów w rachunku różniczkowym można łatwo rozwiązać za pomocą innowacyjnego podejścia wizualnego, które nie korzysta ze wzorów”. – Tom M. Apostol

**Przykład 3.** Obliczenie objętości stożka. Zauważmy najpierw, że możemy łatwo wyznaczyć pola powierzchni przekrojów stożka oraz ostrosłupa na dowolnej wysokości. Mamy (patrz rys. 4)

$$A(C_x) = \frac{\pi r^2 x^2}{h^2} \quad \text{oraz} \quad A(P_x) = \frac{x^2}{h^2}.$$

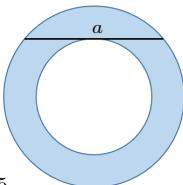
Ponieważ stosunek tych pól na dowolnej wysokości jest stały i nie zależy od  $x$ ,

$$\frac{A(C_x)}{A(P_x)} = \pi r^2,$$

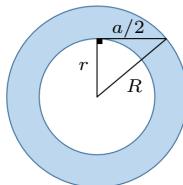
więc, na podstawie twierdzenia Cavalieriego, stosunek objętości brył jest taki sam. Znając objętość ostrosłupa ( $V(P) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot h$ ), łatwo teraz wyznaczamy objętość stożka:

$$\frac{V(C)}{V(P)} = \pi r^2 \Rightarrow V(C) = \pi r^2 V(P) = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

**Metoda III – podejście Mamikona.** Przytoczymy tu tylko jeden z całej bogatej kolekcji pomysłów Mamikona Mnatsakaniana, odsyłając zainteresowanego Czytelnika do dalszej lektury [1]. Przedstawiony tu pomysł ma źródło w prostej obserwacji. Zastanówmy się, ile wynosi pole powierzchni pierścienia zawartego pomiędzy dwoma okręgami o wspólnym środku, w którym długość cięciwy większego okręgu, stycznej zewnętrznie do mniejszego okręgu, wynosi  $a$ ?



Rys. 5



Rys. 6

Standardowy rachunek jest prosty, odpowiedź to (przy oznaczeniach z rys. 5):

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

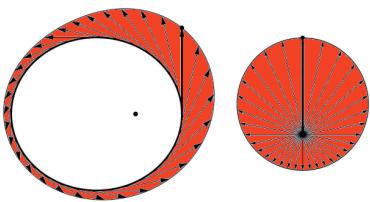
gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z twierdzenia Pitagorasa. Pole to nie zależy zatem od promieni okręgów, a jedynie od długości cięciwy stycznej do wewnętrznego okręgu. Obserwacja ta stała się przyczynkiem do rozważań na temat wyznaczenia tego pola w inny sposób.

Wyobraźmy sobie, że połowa wspomnianej cięciwy jest wektorem  $\vec{L}$  o długości  $L = \frac{a}{2}$ , który obracamy wokół mniejszego okręgu tak, że w każdym miejscu jest on styczny do tego okręgu. Wykonując pełny obrót, zakreślmy cały interesujący nas obszar. Mamikon spostrzegł, że po zaczepieniu wszystkich tych wektorów w jednym punkcie otrzymamy koło o promieniu równym długości obracanego wektora i polu równym  $\pi L^2$  (rys. 6). Pole to jest oczywiście równe polu rozważanego pierścienia (zauważmy, że to rozumowanie nie wymaga użycia twierdzenia Pitagorasa).

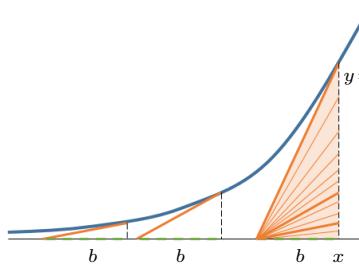
Powyższą sytuację możemy zinterpretować w ramach mechaniki Newtona jako szczególny przypadek ogólniejszego twierdzenia mówiącego o tym, że hodograf prędkości ruchu po elipsie w polu Newtonowskim z centrum w jednym z jej ognisk jest okręgiem o promieniu  $r = \frac{v_P + v_A}{2}$ , gdzie  $v_P$  i  $v_A$  są prędkościami, odpowiednio, w perihelium i aphelium elipsy (por. artykuł William Rowan Hamilton i hodograf z  $\Delta_{24}^9$ ).

Mamikon uogólnił swoje spostrzeżenie, formułując następujące twierdzenie, dotyczące krzywych niekoniecznie zamkniętych, do których wektory styczne nie muszą mieć tej samej długości w każdym punkcie krzywej.

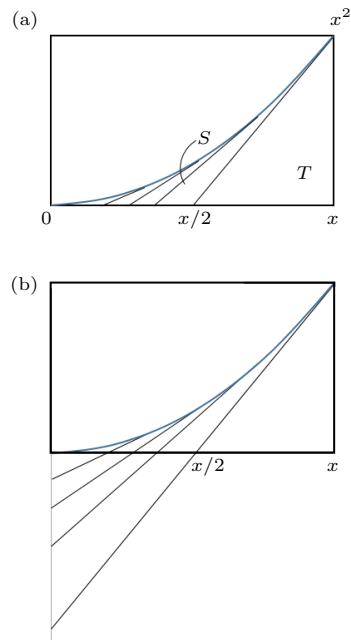
Twierdzenie Mamikona pozostaje prawdziwe również dla krzywych w przestrzeni trójwymiarowej.



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Metodę Mamikona można również odnaleźć w artykule *W której stronie jechał rower?* z  $\Delta_{22}^8$ .

#### Literatura

- [1] T. M. Apostol, M. A. Mnatsakanian, *New Horizons in Geometry*, The Mathematical Association of America, 2012.
- [2] C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [3] P. Lynch, *Mamikon's Visual Calculus and the Hodograph*, Mathematics Today, April 2022, 212–214.
- [4] R. Netz, W. Noel, *Kodeks Archimedesa*, Magnum, 2002.

**Twierdzenie Mamikona** (postać ogólna). *Pole zakreślenia stycznego dla dowolnej gładkiej krzywej jest równe polu jego pęku stycznego.*

Przez „zakreślenie styczne” rozumiemy obszar złożony z rozłącznych odcinków stycznych do krzywej, a przez „pęk styczny” – zbiór powstały przez takie przesunięcie owych odcinków, by pozostały one rozłączne i pokryły się punkty ich styczności do krzywej. Na rysunku 6 widzimy przykład zakreślenia stycznego do wewnętrznego okręgu po lewej stronie i jego pęk styczny po prawej stronie rysunku. Wspomniany wyżej hodograf prędkości dla ruchu po elipsie w polu Newtonowskim jest następnym przykładem pęku stycznego, także będącego okręgiem (rys. 7). Tym razem zakreślenie styczne składa się z wektorów o różnej długości.

W celu zilustrowania powyższego twierdzenia pokażemy dwa przykłady dotyczące krzywych na płaszczyźnie.

**Przykład 4.** *Wyznaczenie pola powierzchni pomiędzy wykresem funkcji eksponentialnej a osią odciętych w granicach od minus nieskończoności do ustalonego x.* W celu zrozumienia rozwiązania ważne jest zauważenie, że dla funkcji  $y = e^{\frac{x}{b}}$  odcinek łączący dowolny punkt  $(x, 0)$  na osi odciętych z miejscem przecięcia tej osi ze styczną do wykresu funkcji w punkcie  $(x, e^{\frac{x}{b}})$  ma stałą długość równą  $b$  (patrz rys. 8).

Zauważmy, że przenosząc wszystkie odcinki styczne do miejsca przecięcia stycznej do krzywej w punkcie  $(x, e^{\frac{x}{b}})$  z osią  $OX$ , zapełnimy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości  $b$  i  $e^{\frac{x}{b}}$ . Trójkąt ten wypełnia zatem połowę pola powierzchni pod wykresem, które wobec tego musi być równe  $2 \cdot \frac{1}{2}be^{\frac{x}{b}} = be^{\frac{x}{b}}$ .

**Przykład 5.** *Wyznaczenie pola powierzchni pomiędzy wykresem funkcji  $x^n$  a osią odciętych w granicach od zera do ustalonego x.* Dla ustalenia uwagi przyjmiemy  $n = 2$  (dla innych potęg rozumowanie jest analogiczne).

Zauważmy, że figura, której pole szukamy, zawarta jest w prostokącie o bokach równych  $x$  i  $x^2$ , zatem na pewno jest to część pola powierzchni tego prostokąta zewnętrznego  $P = x^3$ . Archimedes jako pierwszy obliczył, przy pomocy metody dźwigni, że pole to wynosi  $\frac{1}{3}P$  (patrz przykład 1). Poniżej pokażemy, jak można uzyskać ten wynik w dość prosty sposób, oparty na elementarnym podejściu geometrycznym. To, co będzie nam potrzebne, to fakt, że styczna do paraboli w punkcie o odciętej  $x$  przecina oś  $OX$  w punkcie o odciętej  $\frac{x}{2}$  ( $= x - \frac{x^2}{2x}$ ). Styczna ta dzieli naszą figurę na dwie części, na rysunku oznaczone przez  $S$  oraz  $T$ . Figura  $S$  powstaje przez narysowanie wszystkich odcinków stycznych do paraboli i kończących się na osi  $OX$ .

Przedłużmy teraz odcinki tworzące obszar  $S$  do przecięcia z osią  $OY$  (rys. 9b). Z wcześniejszej obserwacji dotyczącej ich punktu przecięcia z osią  $OX$  wynika, że w ten sposób każdy z nich został przeskalowany przez  $t = 2$ . Z twierdzenia Mamikona i twierdzenia o jednokładności wynika, że zakreskowany obszar ma pole powierzchni równe  $t^2A(S) = 4A(S)$ . Dlatego obszar pod osią  $OX$  ma powierzchnię równą  $3A(S)$ . Jednocześnie obszar ten jest przystający do obszaru  $T$ . Zatem  $A(T) = 3A(S)$  oraz  $4A(T) = P$ , skąd otrzymujemy  $A(T \cup S) = \frac{1}{3}P = \frac{1}{3}x^3$ .

Wszystkie powyższe obliczenia można łatwo otrzymać, korzystając z rachunku całkowego w ujednolicony sposób, dość mechanicznie i prawie bez żadnego nakładu myślowego. Pokazuje to siłę rachunku całkowego, w którym rozumowanie jest ukryte w „czarnej skrzynce”, a do nas należy włożyć dane danych, „pokręcenie korbką” i wyjącie gotowego wyniku. Jednak ten brak naoczności Leibnizowskiej wersji rachunku różniczkowego i całkowego był jedną z przyczyn, dla których Isaac Newton napisał *Principia* w języku geometrii starożytnych i geometrycznej wersji tegoż rachunku. Dzisiaj, w świecie mechanizacji myślenia, w którym palec (od naciskania klawiszy lub ekranu) boli nas częściej bardziej niż głowa, przypomnienie wartości piękna, prostoty i głębi rozumowania geometrycznych staje się coraz cenniejsze, nie tylko w dydaktyce matematyki i fizyki.



cukier  
wszedzie...  
co to  
będzie...  
co to  
będzie...



## Inteligentna metoda na cukier

Bohaterami tej historii są: docieśliwy chirurg i student, profesor będący z nimi w konflikcie, dziesiątki psów, awantura o Nobla, miliony świń i królów, bakterie produkujące ludzkie białko, aż wreszcie inteligentne białko NNC2215, które daje nadzieję na dobre życie osobom dotkniętym śmiertelnie niebezpieczną chorobą, cukrzycą.

Myślę o tym, wpatrując się w karnawałowy rodzinny przysmak: kulę z orzechów zmieszanych z koglem-moglem oblana kruchym, połyskliwym karmelem. I wyobrażam sobie, co się stanie, kiedy pokusa zwycięży rozum.

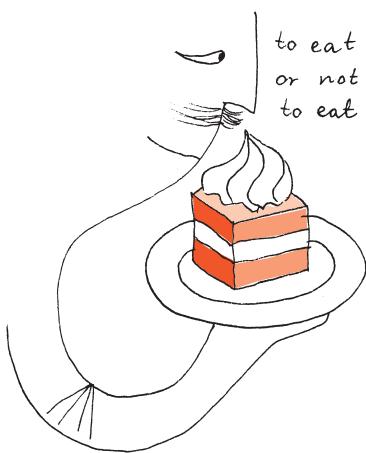
Strawiona słodycz doprowadzi do gwałtownego wzrostu stężenia glukozy we krwi. W trzustce, a dokładniej w komórkach beta, tworzących tzw. wyspy, wzrost glukozy we krwi wywoła kaskadę reakcji ilościowo zależną od stężenia cukru. Małe pęcherzyki znajdujące się tuż pod błoną komórkową uwolnią na zewnątrz hormon: insulinę. Im więcej cukru, tym więcej insuliny trafi do krwi. Rozprowadzana po całym ciele, zwiąże się z cząsteczkami glukozy i „zadokuje” do receptorów na powierzchni komórek, szczególnie komórek mięśni, tłuszczu i wątroby. Połączone z insuliną receptory zmienią swój kształt, dzięki czemu w kaskadzie reakcji w błonie pojawią się kanały wpuszczające glukozę do środka i jej poziom we krwi obniży się.

Ten system ścisłej regulacji stężenia cukru we krwi jest ważniejszy, niż by się zdawało. Glukoza jest „pokarmem” dla komórek – dzięki niej powstają cząsteczki ATP biorące udział we wszystkich reakcjach chemicznych wymagających wkładu energii. Z drugiej strony pozostająca we krwi glukoza w wysokim stężeniu jest śmiertelnie niebezpieczna. W bardzo wysokim stężeniu w krótkim czasie może doprowadzić do śpiączki, a nawet śmierci. W przebiegu przewlekłym jest przyczyną stanów zapalnych, prowadzi do uszkodzenia niewielkich naczyń krwionośnych odżywiających wszystkie ważne organy naszego ciała, szczególnie serce, układ nerwowy i mózg. Tracimy czucie, mamy osłabiony układ odpornościowy, wysiadają nam próbujące usunąć nadmiar cukru nerki, źle goją się rany, grozi martwica tkanek.

Tak działały się, gdyby moja trzustka nie wytwarzala insuliny. Gdybym była chora na cukrzycę.

Pierwsze wzmianki o tej chorobie prawdopodobnie pojawiają się w papirusach egipskich z XV wieku p.n.e. Mowa o ludziach wydalających więcej moczu, niż są w stanie wypić płynów. To efekt wytężonej pracy nerek, które próbując usunąć nadmiar cukru z krwi, produkują dużo moczu. Przez wieki chorzy cierpieli męki: byli odwodnieni, stale niedożywieni i słabi. Jedyną metodą, aby żyć, było głodzenie się. Liczne komplikacje prowadziły do pogarszania się stanu zdrowia, śpiączki, a po jakimś czasie do śmierci.

Cukrzycy była uważana za dysfunkcję żołądka lub jelit aż do 1889 roku, kiedy odkryto, że psy, którym usunie się trzustkę, stają się od razu diabetykami. Wtedy to rozpoczął się wyścig: kto pierwszy wyizoluje czynnik odpowiedzialny za metabolizm cukru we krwi. Przez ponad 30 lat poszukiwanie były nieskuteczne. Dalsza historia to trochę szczęścia, masa prób i błędów, ale i solidnej pracy naukowej. Jesienią 1920 roku młody kanadyjski chirurg Frederick Banting, przygotowując się do wykładu dla studentów, zapisał: „Podwiązać przewody trzustkowe psa. Utrzymać psy przy życiu, aż pęcherzyki (produkujące enzymy trawienne) ulegną degeneracji, pozostawiając wysepki. Spróbować wyizolować ich wewnętrzną wydzielinę, sprawdzić, czy zmniejsza glikozurię”. Z propozycją zawilej procedury podwiązywania przewodów trzustki psom i uzyskiwania z dysfunkcyjnej trawieniem trzustki ekstraktów do leczenia chorych Banting zwrócił się do specja od metabolizmu węglowodanów, profesora Johna Macleoda. Profesor był sceptyczny wobec tej idei, powątpiewając szczególnie w jakość pracy eksperymentalnej zupełnie niedoświadczonego w tej kwestii lekarza. Uznał jednak, że udostępni mu przestrzeń laboratoryjną, psy do eksperymentów oraz chętnego do pomocy studenta.



Po kilku miesiącach skomplikowanych procedur poczynającą naukowcy uzyskali bardzo niepewne wyniki, a pierwotna idea izolacji poszukiwanego związku z uszkodzonych trzustek psów została porzucona. Lepszym źródłem ekstraktu do badań okazały się mrożone trzustki krów i świń, a pierwsze testy na umierającym z powodu cukrzycy dziecku dały spektakularny efekt: objawy po podaniu ekstraktu ustąpiły, choć natychmiast nastąpiła reakcja alergiczna.

Konieczne było bardzo staranne oczyszczenie preparatów, co wykonał znakomity chemik, James Collip. W 1921 roku czysty preparat zawierał substancję, którą nazwano insulina, od łacińskiego *insula* (wyspa). Po dwóch latach preparaty insuliny były już produkowane na masową skalę, a Bantingowi i Macleodowi przyznano za to odkrycie Nagrodę Nobla. Pominięto przy tym nie tylko Charlesa Benta, studenta, z którym Banting robił wszystkie swoje doświadczenia, ale także Jamesa Collipa. Sprawa ta obróciła laureatów nagrody – a z nimi rzeszę ich popleczników – przeciwko sobie. Banting uważało, że Nobel należał się Bentowi, a Macleod – że Collipowi. Na szczeście skandal naukowy nie wstrzymał dalszych badań.

Sekwencję insuliny ludzkiej opisano w 1953 roku ( kolejna Nagroda Nobla), w 1963 roku zsyntetyzowano chemicznie, a w 1969 określono strukturę przestrzenną cząsteczki. Okazała się peptydem – czyli niewielkim białkiem. Składa się z 21-aminokwasowego łańcucha A i 30-aminokwasowego łańcucha B, połączonych ze sobą dwoma wiązaniami. Badania nad mechanizmem działania insuliny – receptorami, z którym się wiąże na powierzchni komórek, sposobem syntezy (wieloetapowej, mimo prostoty samej cząsteczki), kaskadami reakcji, które uruchamiają system regulacji stężenia glukozy we krwi, stworzyły rosnące pole do popisu dla nowych pomysłów, jak pomóc chorym na cukrzycę.

Jednym z większych wyzwań była skala zapotrzebowania na lek. Pod koniec lat 70. XX w. fabryka firmy Eli Lilly produkowała insulinę ze świńskich i bydlęcych trzustek. Aby pokryć zapotrzebowanie w USA, potrzeba było trzustek z 56 milionów zwierząt rocznie. Konieczność odkrycia alternatywnej metody stała się priorytetem, szczególnie że odzwierzęcy lek powodował efekty uboczne.

Była to era gwałtownego rozwoju inżynierii genetycznej. W roku 1978 udało się stworzyć modyfikowane genetycznie bakterie syntetyzujące ludzką insulinę. Każdy z łańcuchów peptydu był wytwarzany oddzielnie, izolowane z bakterii łańcuchy były łączone w całość w laboratorium. Tę rekombinowaną insulinę podano pierwszym zdrowym ochotnikom w 1980 roku, a rok później pierwszym chorym na cukrzycę.

Pomimo tych sukcesów pacjenci do dziś borykają się z wieloma problemami. Konieczne jest stałe monitorowanie poziomu cukru i dozowanie insuliny. Mimo zaawansowanej automatyzacji system regulacji poziomu cukru jest znacznie mniej precyzyjny niż naturalny. Na przykład insulina podawana przez skórę dociera do krwi z opóźnieniem. Po posiłku stężenie glukozy jest czasowo za wysokie. Z drugiej strony insulina stosunkowo długo się rozkłada, więc nie można podawać jej za dużo, bo zbyt duża ilość glukozy usuwana jest z krwi, pozostawiając chorego w stanie

tzw. hipoglikemii, za małego stężenia cukru. Zatem chory stale jest narażony na skoki poziomu cukru. To nie tylko szkodliwe dla organizmu, ale daje też szereg objawów utrudniających życie.

Dlatego już od 45 lat naukowcy próbują stworzyć „insulinę wrażliwą na glukozę” (*glucose responsive insulin*, GRI), która byłaby aktywna tylko wtedy, kiedy stężenie glukozy jest zbyt wysokie. Okazało się to trudne. Dopiero w październiku zeszłego roku w „Nature” zespół badaczy z Danii opisał cząsteczkę NNC2215, która daje nadzieję, że cel jest blisko.

Do łańcucha B ludzkiej insuliny dodano dwa elementy. Z jednego końca cząsteczkę, która przypomina glukozyd (glukozyd), a na drugim – związek makrocycliczny, czyli pierścień, do którego „pasuje” znajdujący się na drugim końcu NNC2215 glukozyd i glukoza. Kiedy stężenie glukozy jest niewielkie, glukozyd przyłącza się do pierścienia, zginając cząsteczkę tak, że nie pasuje do receptora insuliny, nie może zatem pełnić swojej funkcji. Kiedy glukozy jest więcej, wypiera glukozyd z pierścienia, przez co NNC2215 się prostuje, co umożliwia jej połączenie się z receptorem, a w konsekwencji otwarcie kanałów glukozy do wnętrza komórki. Stężenie cukru we krwi maleje, a „inteligentna” insulina zwija się w nieaktywną formę. Na razie NNC2215 przeszedła testy na zwierzętach, w tym na świńach, u których cukrzycy i mechanizm działania insuliny podobne są do ludzkich. Czekamy na ciąg dalszy.

Nawet krótki wgląd w aktualną wiedzę na temat cukrzycy jest jednoznaczny także dla zdrowych. Nadmiar cukru we krwi jest szkodliwy. Silna reakcja układu immunologicznego powoduje chroniczne stany zapalne, a po tym lawinę skutków kończących się dysfunkcją wielu narządów, w tym tych najważniejszych: serca, wątroby i mózgu. Wszyscy szczęśliwcy, których nie dotknęła cukrzycy, nie muszą polegać na inteligencji peptydów. Mogą użyć własnej... i nie jeść cukrów. Nawet w karnawale.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

# Symulowanie XVII-wiecznego pola walki

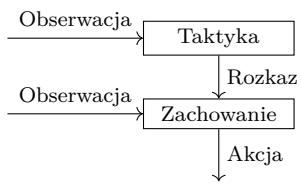
Marcin WANIEK\*

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

W dniu bitwy twierdza Kokenhausen była wciąż utrzymywana przez polską załogę. Była to więc polska twierdza, oblegana przez szwedzką załogę miasta, obiegana przez polską armię, atakowaną przez szwedzką armię!

Henryk Wisner, *Kirchholm 1605*, Wydawnictwo Ministerstwa Obrony Narodowej (1987).

Ówczesna piechota posługiwała się bardzo podobną taktyką, zwaną kontrmarszem.



Na początku XVII wieku Rzeczpospolita Obojga Narodów oraz Królestwo Szwecji toczyły zaciętą wojnę o Inflanty. W maju Anno Domini 1601 wojska polskie pod dowództwem hetmana wielkiego litewskiego Krzysztofa „Pioruna” Radziwiłła rozpoczęły oblężenie miasta Kokenhausen (dzisiejsze Koknese na Łotwie) okupowanego przez Szwedów. 23 czerwca armia szwedzka pod dowództwem Carla Carlssona Gyllenhielma, nieślubnego syna króla Szwecji, zbliżyła się do Kokenhausen. Polski dowódca postanowił przyjąć bitwę w polu. Naprzeciw około pięciu tysięcy Szwedów stanęły nieco ponad trzy tysiące wojsk polsko-litewskich. Pomimo tej dysproporcji sił, bitwa zakończyła się spektakularnym zwycięstwem sił Rzeczypospolitej, które straciły niecałe dwie setki żołnierzy, podczas gdy Szwedów poległo około dwóch tysięcy.

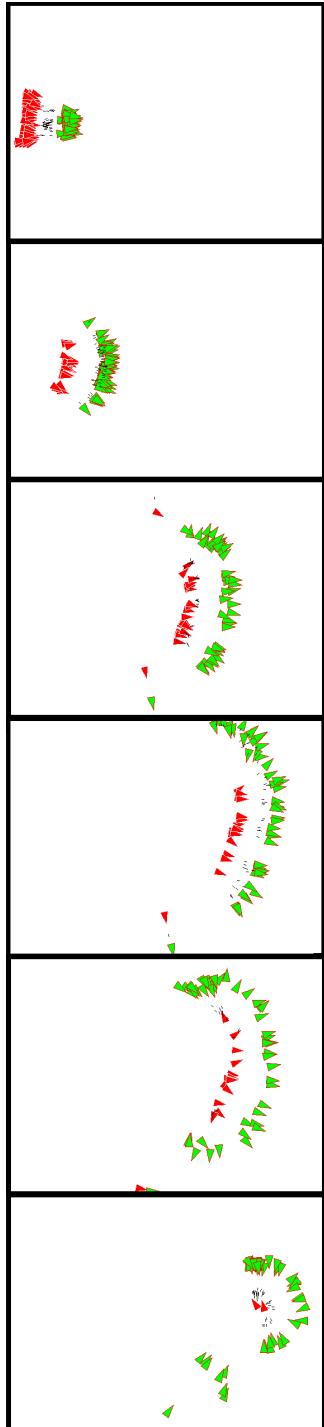
Jedną z wymienianych przez historyków przyczyn tak dotkliwej porażki wojsk szwedzkich jest to, że składały się one głównie z rajtarów. Byli to jeźdzcy, których główną bronią była para pistoletów, a taktyką był karakol. Taktyka ta polegała na tym, że oddział rajtarii podjeżdżało do przeciwnika w szyku składającym się z kilku szeregów. Pierwszy szereg oddawał strzał w kierunku wroga z obu pistoletów, a następnie przemieszczał się na tyły formacji, przeładując broń. Jego miejsce zajmował kolejny szereg, z gotową do użycia bronią. Taktyka ta została zaprojektowana do zwalczania piechoty, jednocześnie jednak zupełnie nie sprawdzała się w starciach z jazdą walczącą przy użyciu broni białej, a to głównie z takich wojsk składały się siły polsko-litewskie.

Zanim zakłopotani zerknietce na okładkę, żeby upewnić się, że to faktycznie *Delta* – uspokajam, już docieramy do nauk ścisłych. Czy jesteśmy w stanie w jakiś sposób zastosować metody informatyczne, aby przetestować hipotezę historyków, że stosowanie karakolu w istotny sposób wpłynęło na wynik bitwy? Spróbujemy posłużyć się symulacją wieloagentową, czyli procesem, w którym duża liczba inteligentnych agentów wchodzi ze sobą w interakcję. Obdarzmy każdy oddział *taktyką* – algorytmem koordynującym działania całego regimentu, który na podstawie obserwacji środowiska wybiera rozkaz dla żołnierzy. Każdego żołnierza zaś obdarzmy *zachowaniem* – algorytmem kierującym jego poczynaniami na polu bitwy, który na podstawie obserwacji środowiska i rozkazu otrzymanego od taktyki wybiera akcję wykonywaną przez wojaka.

Zastanówmy się teraz, jak w ramach tego schematu odtworzyć sposób działania rajtarów. Duży ciężar będzie tu spoczywał na taktyce. Przydziela ona każdemu żołnierzowi miejsce w formacji i nakazuje przesunięcie się całej formacji w kierunku najbliższego oddziału wroga. Po znalezieniu się w zasięgu ataku, daje ona rozkaz strzału, a następnie modyfikuje formację, przesuwając pierwszy szereg na koniec i dając rozkaz zajęcia nowych pozycji, cały czas starając się zachować stałą odległość od przeciwnika. Zachowanie rajtara jest z kolei bardzo proste i polega na bezpośrednim wykonywaniu polecień otrzymanych od taktyki. Żołnierz oddaje strzał tylko, gdy otrzyma taki rozkaz i znajduje się w pierwszym szeregu formacji, zaś przeładowuje broń, kiedy to tylko możliwe.

Opracowawszy sposób walki rajtarów, możemy zacząć budować symulację (dla uproszczenia nie opisujemy tu konstrukcji algorytmów pozostałych rodzajów wojsk, np. polskiej jazdy). Szczęśliwie w literaturze znajdziemy dosyć dokładny opis liczby i rozmieszczenia żołnierzy obu sił na początku bitwy. Rozstawiamy zatem naszych symulowanych wojaków. Czy to już wszystko? Nie, teraz czeka nas proces kalibracji, czyli dopasowania liczbowych parametrów symulacji (a więc np. prędkości poruszania się wszystkich oddziałów, szybkości przeładowania broni itp.) tak, aby faktycznie odtwarzała ona historyczny rezultat bitwy. Ponownie, pominiemy tu szczegóły techniczne tego procesu. Po jego zakończeniu otrzymujemy gotowy model, który możemy wykorzystać w naszych historycznych eksperymentach. Rezultaty symulacji znaleźć możecie w tabeli na górze następnej strony.

Więcej informacji (w tym na temat mechaniki ucieczki) znaleźć można w pracy: Marcin Waniek, *Petro: a multi-agent model of historical warfare*, „Intelligent Agent Technologies” (2014).



	Rzeczpospolita	Szwecja
Liczebność przed bitwą	3324	5070
Liczebność po bitwie	3100	0
Uciekło z pola bitwy	130	2518
Zginęło w czasie bitwy	94	2552
Straty szacowane przez historyków	ok. 100–200	ok. 2000

W jaki sposób możemy użyć tego modelu do przetestowania hipotezy, że stosowanie karakolu istotnie przyczyniło się do szwedzkiej porażki? Możemy na przykład podmienić tę taktykę na bardziej dopasowaną do starcia z polską jazdą. Przykładem może być sposób walki jeźdźców tatarskich. Posługiwali się oni przede wszystkim łukami refleksyjnymi. W miarę możliwości unikali walki wręcz, chętnie stosując taktykę szybkiego ataku i pozorowanej ucieczki. W czasie odwrotu kontynuowali ostrzał przeciwnika, poruszając się w szyku przypominającym półksiężyce.

Jak możemy odtworzyć sposób walki Tatarów w ramach naszego systemu? Tym razem taktyka będzie bardzo prosta, wydaje ona po prostu rozkaz ataku na najbliższy oddział przeciwnika. Najważniejsze decyzje podejmowane są na poziomie zachowania pojedynczego żołnierza. Każdy żołnierz ma określoną odległość  $d$ , uważaną przez niego za bezpieczną. Otrzymawszy rozkaz ataku, jeździec reaguje w sposób uzależniony od obserwacji najbliższego otoczenia. Jeżeli w odległości  $d$  od niego znajdują się żołnierze wroga, jeździec ucieka od nich z maksymalną prędkością. Jeżeli w zasięgu ataku nie ma żadnego wrogiego żołnierza, porusza się w stronę najbliższego wroga należącego do oddziału wskazanego jako cel w otrzymanym rozkazie. Niezależnie od ruchu żołnierz oddaje strzał w kierunku najbliższego wroga znajdującego się w zasięgu. Ilustracje na marginesie przedstawiają przykładowe starcie między Tatarami (zielone trójkąty) a jazdą walczącą wręcz (czerwone trójkąty).

Odtwarzyszywszy taktykę jeźdźców tatarskich, możemy jej teraz użyć, aby przetestować kontrfaktyczny scenariusz bitwy. W tym celu taktykę i zachowanie oddziałów rajtarii biorących udział w bitwie podmieniamy na taktykę i zachowanie jeźdźców tatarskich. Wszystkie inne parametry symulacji zostają zachowane. W szczególności niezmienione pozostają początkowe rozstawienie obu armii oraz statystyki liczbowe żołnierzy rajtarii (takie jak np. ich prędkość). Następnie uruchamiamy symulację... i co ukazuje się naszym oczom? Poniósłszy ciężkie straty, armia polska zostaje zmuszona do wycofania się, przerywając jednocześnie oblężenie Kokenhausen. Wojska szwedzkie również odnoszą duże straty, jednak w skali strategicznej byłyby one dla nich o wiele mniej dotkliwe niż dla wiecznie cierpiącej na niedobór żołnierzy Rzeczypospolitej. Rezultaty symulacji alternatywnego scenariusza znaleźć możecie w tabeli poniżej.

	Rzeczpospolita	Szwecja
Liczebność przed bitwą	3324	5070
Liczebność po bitwie	0	2250
Uciekło z pola bitwy	2007	1647
Zginęło w czasie bitwy	1317	1173

Czy możemy zupełnie bezpośrednio interpretować wyniki tego eksperymentu i z całą stanowczością stwierdzić, że rajtarzy wojujący „po tatarsku” rozbiliły polską armię? Oczywiście nie, do rezultatów wszelkiego rodzaju symulacji należy podchodzić z odpowiednią dozą sceptycyzmu. Przeładowywane XVII-wiecznych pistoletów podczas chaotycznej pozorowanej ucieczki wymagałoby nieliczej dozy ekwilibrystyki. Możemy jedynie uznać, że wynik naszego eksperymentu stanowią jedną z wielu wskazówek, że przypuszczenia historyków mogą być prawdziwe, i stosowana przez rajtarów taktyka karakolu przyczyniła się do szwedzkiej porażki.

# O przedwiecznej inflacji

Mateusz KULEJEWSKI

Doktorant na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Komuż z nas nie zdarzyło się w godzinie zadumy zapatrzyć w rozgwieźdzone nocne niebo i zanurzyć w rozmyślaniach nad naszym miejscem w wielkim Wszechświecie? Jego bogactwo od wieków było natchnieniem dla poetów i filozofów. Nie bez powodu starożytni Grecy ujrzaли na niebie zmagania swoich bogów, a w doskonalej harmonii niebieskich sfer odnaleźli dowód na fundamentalny ład otaczającego ich kosmosu.

Co jednak możemy dostrzec na niebie? Zza wielobarwnego teatru mgławic, gwiazd skupiających się w galaktyki i umierających, by pozostawić białe karły, gwiazdy neutronowe i czarne dziury, czy galaktyk gromadzących się w gromady galaktyk – dobiera się do nas sygnał szczególny, echo Wszechświata z czasów, gdy był jeszcze młody. Jest to mikrofalowe promieniowanie tła (z angielskiego *cosmic microwave background*, CMB), sygnał wyemitowany, gdy Wszechświat miał około trzystu osiemdziesięciu tysięcy lat i wypełniająca go plazma zrzedniała i schłodziła się na tyle, by pozwolić światłu spokojnie się rozprzestrzeniać – co dzieje się do dziś, gdy za pomocą radioteleskopów badamy jego rozkład na niebie.

O CMB pisał Krzysztof Turzyński w  $\Delta_{23}^{12}$ .

CMB to dobierające zewsząd tło o prawie jednorodnej temperaturze około 2,73 kelwinów – co odpowiada maksimum długości fali w promieniowaniu mikrofalowym, stąd jego nazwa. Odkryli je w 1964 roku Penzias i Wilson, gdy pomimo wielu prób, włącznie z usunięciem gniazda gołębi z czaszy radioteleskopu, nie mogli pozbyć się dobierającego zewsząd szumu. Po 14 latach ich odkrycie zostało uhonorowane Nagrodą Nobla, a kilkadziesiąt lat później kolejne sondy kosmiczne – zazwyczaj o wdzięcznej, skrótowej nazwie, jak COBE czy WMAP lub najnowszy Planck – mierzą je z coraz większą dokładnością, by zbadać strukturę wczesnego Wszechświata.

Najbardziej uderzającą właściwością CMB jest jego prawie dokładna jednorodność – w którą stronę nie spojrzymy, Wszechświat wypełnia niemal identyczny, termiczny szum. Dla fizyków budujących modele kosmologiczne na bazie ogólnej teorii względności jest to obserwacja pożądana. Współczesne modele kosmologiczne opisują tzw. czasoprzestrzeń Friedmann–Lemaître'a–Robertsona–Walkera (której wielozłonowa nazwa jest związana z jej wielokrotnymi, niezależnymi odkryciami).

O modelach FLRW i przyjmowanych w nich założeniach pisał Szymon Charzyński w  $\Delta_{23}^2$ .

Podstawą, od której zaczyna się budowę tych modeli, jest przyjęcie założenia zwanego zasadą kopernikańską: Wszechświat jest jednorodny i izotropowy, czyli dokładnie taki sam, niezależnie od tego, w którym jego miejscu się znajdujemy i w którą stronę patrzymy.

Oczywiście nie jest to założenie spełnione na Ziemi – na szczęście znacząco się różnimy od naszego otoczenia! – lecz okazuje się, że wczesny Wszechświat był dużo bardziej jednorodny, niż jest dzisiaj.

Jednocześnie jednorodność promieniowania jest źródłem innych problemów. Fizycy, jak na proste istoty przystało, pragną poszukiwać najprostszych wyjaśnień obserwowanych zjawisk. Wyjaśnieniem jednorodności CMB byłoby to, że odmienne części nieba, z których ten sygnał do nas dociera, były tak naprawdę w przeszłości w stanie równowagi termodynamicznej – to jednak musiałoby oznaczać, że były ze sobą w kontakcie przyczynowo-skutkowym, czyli w swoich stożkach świetlnych. Podstawowe modele kosmologiczne zakładają, że Wszechświat ewoluje podobnie od momentu zero – Wielkiego Wybuchu – aż do dziś, wypełniony taką ilością materii, promieniowania i ciemnej energii, żeby zgadzała się z wartościami mierzonymi dzisiaj. Jeśli jednak obliczymy w nich odległości, na których mogła zajść wymiana informacji – i równowaga termodynamiczna – wyjdzie nam, że obszary jednorodności powinny mieć wielkość zaledwie około jednego stopnia na niebie.

Jak pogodzić mały rozmiar jednorodności, który wychodzi nam z obliczeń w ramach modeli kosmologicznych, z całym niebem, na którym tę jednorodność obserwujemy? Stanowi to tzw. problem horyzontu. Jedną z możliwych odpowiedzi jest oczywiście ta, że to, jak wygląda Wszechświat, nie wzięło się z żadnego ustalenia równowagi termodynamicznej w jego przeszłości, lecz że po prostu tak „ma” od samego początku. Taka interpretacja nie zgadza się jednak z przyjmowaną obecnie filozofią fizyki, z której próbujemy usunąć ów „Boski palec”, stwarzający Wszechświat jako miejsce dla nas do życia, lecz próbuje wyjaśnić jego obecny kształt na podstawie jak najbardziej niezależnych teorii. Stanowi to problem tzw. dopasowania warunków początkowych (z ang. *fine-tuning*), które w kosmologii są równie ważne jak prawa fizyki opisujące ich późniejszą ewolucję.

Dlatego fizycy zaproponowali inne rozwiązanie. Na początku lat 80. Alan Guth zaobserwował, że dodanie we wczesnym etapie ewolucji (ok.  $10^{-30}$  sekundy po Wielkim Wybuchu – naprawdę *wczesnym!*) Wszechświata jego wykładniczego wzrostu – czyli inflacji – rozwiąże tzw. problem monopolii magnetycznych. Problem ten polega na tym, że pewne postulowane teorie fizyki wielkich energii przewidują istnienie monopolii magnetycznych, a mimo wielu prób jak dotąd nie udało się ich zaobserwować. Argumentacja Gutha polegała na tym, że jeśli monopole wcześniej rzeczywiście istniały, to okres inflacyjny rozrzedziłby ich występowanie na tyle, że dzisiaj są nieobserwowlane. Dosyć szybko okazało się, że inflacja może być użyteczna również w rozwiązywaniu

innych problemów. Na przełomie kilku kolejnych lat inni fizycy, wśród nich przede wszystkim Alexei Starobinsky i Andrei Linde, zauważali, że dodanie okresu inflacyjnego rozwiąże również omówiony wcześniej problem horyzontu. Dzieje się tak dlatego, że inflacja jest w stanie „rozdmuchać” obszary Wszechświata, w których ustaliła się równowaga termodynamiczna do dużo większych rozmiarów – tak żeby dzisiaj wydawały się ze sobą niezwiązane, choć miały kontakt przyczynowy w przeszłości.

Jeszcze jedną pieczęcią, którą udało się upiec na wspólnym inflacyjnym ruszcie, był tzw. problem płaskości. W modelach kosmologicznych zakładających jednorodność i izotropowość mamy trzy możliwe typy wielkoskalowej geometrii Wszechświata. W każdej ustalonej chwili przestrzeń może być opisywana przez jedną z trzech geometrii o stałej krzywiznie: przestrzeń może być euklidesowa (krzywizna równa zero, czyli jak zwykli mówią fizycy – „płaska”), przestrzeń może być sferą trójwymiarową (krzywizna dodatnia, ten typ fizyczny nazywają „zamkniętą”), lub najtrudniejszą do wyobrażenia sobie przestrzenią hiperboliczną (o ujemnej krzywiznie).

O możliwych kształtach Wszechświata pisał Marek Biesiada w  $\Delta_{21}^{12}$ . Zainteresowanym geometrią hiperboliczną polecamy parę artykułów autorstwa państwa Kopczyńskich w  $\Delta_{20}^5$ , jak również artykuł Michała Miśkiewicza ze str. 3 niniejszego wydania *Delta*.

Najprościej będzie wyobrazić sobie problem płaskości na podstawie przestrzeni zamkniętej (o dodatniej krzywiznie) – wyobraźmy sobie, że Wszechświat jest ogromną (naprawdę *ogromną*) sferą trójwymiarową (brzegiem czterowymiarowej kuli). Jesteśmy w stanie obserwować z całego Wszechświata wycinek o średnicy około 93 miliardów lat świetlnych. Na podstawie

tego wycinka mierzymy, że jego krzywizna na tej odległości jest nieroróżnialna od zera, czyli płaskiej przestrzeni. Jednakże „zwykła”, nieinflacyjna ewolucja Wszechświata, jakiej podlegał przez większość swojego istnienia, przewiduje, że ta mierzona krzywizna, pomimo rozszerzania się Wszechświata, staje się coraz większa. Skoro dzisiaj jest nieodróżnialna od zera, to w przeszłości musiała być jeszcze mniejsza. To zaś mogło się stać, znowu, albo dzięki szczególnemu dopasowaniu warunków początkowych (co dla części fizyków byłoby rozczarowujące), albo dzięki okresowi inflacyjnemu, który tak „rozdmuchał” nasz Wszechświat, że jego krzywizna stała się bardzo mała (fizycy są... zadowoleni?).

Skoro do kompletności naszego modelu kosmologicznego potrzebujemy okresu inflacyjnego, pozostaje pytanie – czym został spowodowany i jak go modelujemy? Rozwój jednorodnego Wszechświata zadany jest przez równania Friedmanna:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G(\rho + 3p)}{3},$$

które wiążą ewolucję odległości, opisywaną przez tzw. *czynnik skali*  $a$ , z gęstością energii płynu wypełniającego Wszechświat  $\rho$  oraz jego ciśnieniem  $p$  (dla uproszczenia jest to wersja równań Friedmanna bez stałej kosmologicznej  $\Lambda$  oraz stałej odpowiadającej za krzywiznę  $k$  i przy prędkości światła  $c = 1$ ).

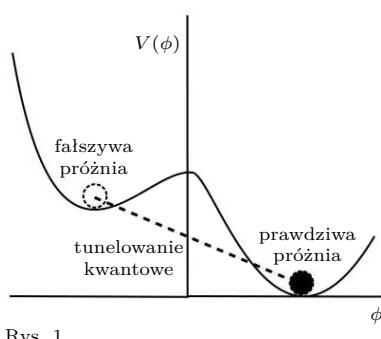
W typowym przypadku ich rozwiązaniem jest prawo potęgowe  $a = a_0 t^\alpha$ , gdzie  $\alpha$  jest parametrem związanym z zależnością między ciśnieniem a gęstością energii. W szczególnym przypadku, gdy  $p = -\rho$ , otrzymujemy wykładniczy wzrost Wszechświata,  $a = e^{Ht}$  – czyli ten, którego potrzebujemy podczas inflacji.

To oznacza, że żeby otrzymać wykładniczy wzrost, potrzebujemy, żeby płyn wypełniający Wszechświat miał ujemne ciśnienie. Najprostsza realizacja tego zdawałoby się niefizycznego postulatu jest możliwa, jeśli założymy, że Wszechświat wypełnia jednorodne pole skalarne  $\phi(t)$ , zwane inflatonem. Wtedy teoria pola podpowiada nam, że ciśnienie i gęstość takiego pola są dane przez:

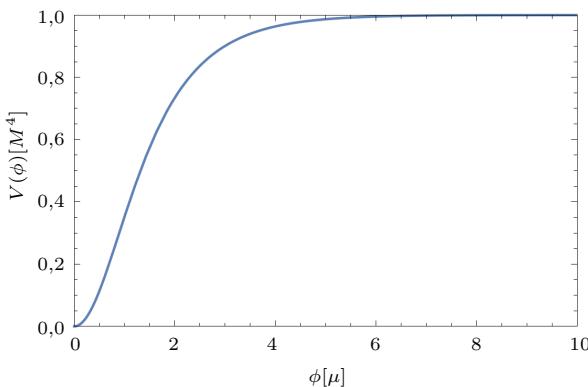
$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi),$$

gdzie  $V(\phi)$  oznacza potencjał pola skalarnego – innymi słowy, gęstość energii jest dana przez sumę energii kinetycznej i potencjalnej, a wywierane ciśnienie przez ich różnicę. Do spełnienia warunku  $p = -\rho$  potrzebujemy teraz tylko tego, żeby energia potencjalna była dużo większa niż energia kinetyczna,  $V \gg \dot{\phi}^2$ . Jak to osiągnąć? Powstały dwa pomysły. Paradygmat starej inflacji zakładał, że potencjał pola ma dwa minima, z których jedno, tzw. fałszywa próżnia, jest wyżej. W tym stanie inflaton byłby podczas inflacji, a poprzez tunelowanie kwantowe pole spadałoby do stanu prawdziwej próżni, kończąc inflację (zob. rys. 1). W takim modelu okazało się jednak, że zakończenie inflacji jest problematyczne, stanowi tzw. *graceful exit problem*. Symulacje komputerowe pokazały, że Wszechświat wypełniony fałszywą próżnią inflatonu miałby obszary, w których inflacja nie zakończyłaby się nigdy – rozszerzanie się ich byłoby zbyt szybkie, żeby pozwolić inflatonowi przetunelować w pełni do prawdziwej próżni.

Rozwiązaniem tego problemu było przejście do paradygmatu inflacji *slow-roll*. Zakładamy w niej, że potencjał inflatonu ma jedno minimum, do którego dąży, powoli staczając się z „płaskowyżu” potencjału – stąd nazwa (zob. rys. 2). W takim modelu nie ma problemu z zakończeniem inflacji, które występuje



Rys. 1

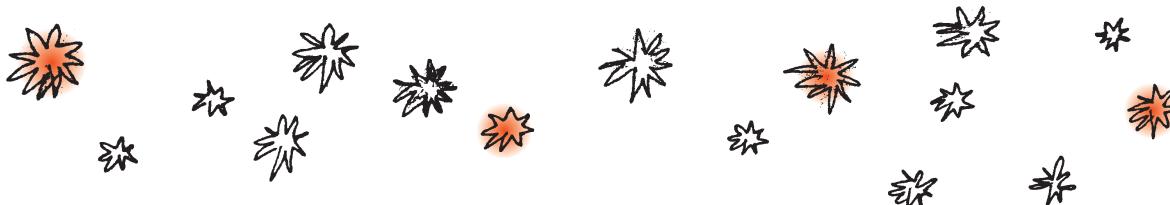


Rys. 2

Zachęcamy do zapoznania się z dwoma różnymi spojrzeniami na kosmologiczną inflację w artykułach Andrzeja Krasieńskiego i Krzysztofa Turzyńskiego w  $\Delta_{16}^1$ .

naturalnie, gdy inflaton zaczyna tłumione oscylacje wokół minimum potencjału w procesie zwanym *reheatingiem* (lub po polsku – odgrzaniem, jest to jednak nazewnictwo, za którym większość polskojęzycznych fizyków nie przepada) i przekazuje energię, którą zgromadził, pierwotnej plazmie wypełniającej Wszechświat. Dodatkowo podczas inflacji slow-roll przewidywana jest produkcja fal grawitacyjnych, która będzie mogła być zmierzona przez projektowany detektor LISA. Reheating może być też ważnym etapem produkcji niejednorodności we Wszechświecie – z których potem wyewoluowały wszystkie struktury, z nimi włącznie – i pozostaje ciągłym tematem badań.

W czterdzieści lat po pierwszym zapostulowaniu paradygmatu inflacyjnego hipoteza inflacyjna nadal budzi kontrowersje wśród fizyków. Jej oponenci zarzucają jej przede wszystkim niefalsyfikowalność – jesteśmy w stanie dobrać parametry modelu inflacji do praktycznie każdych wyników obserwacji kosmologicznych. Jej zwolennicy ripostują, że w prosty sposób wyjaśnia problemy pojawiające się w modelach kosmologicznych i zapewnia jeden mechanizm, który łączy ich rozwiązywanie z powstawaniem struktur we Wszechświecie. Oczywiście wielka gęstość energii bardzo młodego Wszechświata jest daleko poza zasięgiem jakichkolwiek akceleratorów i poszukując odpowiedzi na pytania o to, co się działo wtedy, musimy uciekać się do hipotez – a hipoteza inflacyjna daje nam zwartą odpowiedź na wiele pytań.



## Zadania

Przygotował Dominik BUREK

**M 1807.** Dane są dwa ciągi arytmetyczne,  $a_1, a_2, \dots$  i  $b_1, b_2, \dots$ , składające się z liczb całkowitych dodatnich. Wiadomo, że  $a_1 = b_1$  oraz dla każdej liczby całkowitej  $n \geq 1$  liczby  $a_n$  i  $b_n$  dają równe reszty z dzielenia przez  $n$ . Udowodnić, że te ciągi są identyczne.

**M 1808.** Dane są dwa ciągi liczb całkowitych dodatnich  $x_1, x_2, \dots, x_m$  oraz  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , których sumy  $x_1 + x_2 + \dots + x_m$  i  $y_1 + y_2 + \dots + y_n$  są równe  $s < nm$ . Udowodnić, że w równości

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

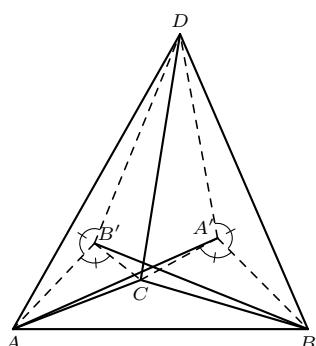
można wykreślić część składników, zachowując jej prawdziwość.

**M 1809.** W czworościanie  $ABCD$  na ścianach  $BCD$  i  $ACD$  znajdują się, odpowiednio, punkty  $A'$  oraz  $B'$  takie, że

$$\measuredangle AB'C = \measuredangle AB'D = \measuredangle BA'C = \measuredangle BA'D = 120^\circ.$$

Wiadomo, że proste  $AA'$  i  $BB'$  przecinają się. Udowodnić, że odległości punktów  $A'$  oraz  $B'$  od prostej  $CD$  są równe.

Przygotował Andrzej MAJHOFER



**F 1113.** Planeta o masie  $m$  obiega Słońce po orbicie eliptycznej. W aphelium jej odległość od Słońca wynosi  $A$ , a w perihelium  $a$ . Ile wynosi moment pędu,  $L$ , tej planety? Masa Słońca równa jest  $M$ , a stała grawitacji  $G$ .

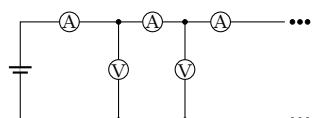
**F 1114.** W opisany dalej układzie stojąca fala dźwiękowa może spełniać rolę siatki dyfrakcyjnej dla światła. Kuweta o przezroczystych, płaskich, równoległych ściankach jest wypełniona cieczą. Równolegle do ścianek kuwety w cieczy wzbudzona jest stojąca fala ultradźwiękowa o długości  $\Lambda$ . Wiązka światła laserowego o długości fali  $\lambda$  pada prostopadle do ścianek kuwety i do wektora falowego ultradźwięku. Jaki warunek spełniające powstające za kuwetą prążki interferencyjne światła?

Rozwiązania na str. 24

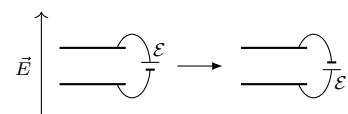
## Klub 44 F



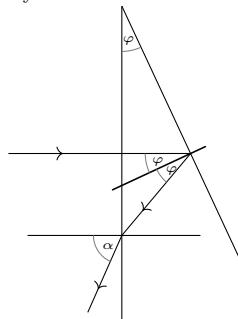
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2025



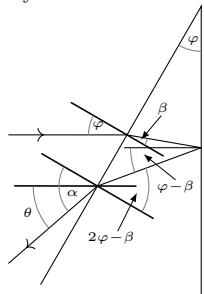
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Promienie odbite od bliższej ścianki są nachylone do osi optycznej pod kątem  $2\varphi$  i po przejściu przez soczewkę tworzą obraz w płaszczyźnie ogniskowej, oddalonej od ogniska o  $d_1 = f \operatorname{tg}(2\varphi)$ . Promienie odbite od dalszej ścianki po wyjściu z pryzmatu tworzą wiązkę odchyloną w drugą stronę o kąt  $\theta = \alpha - \varphi$  i po przejściu przez soczewkę skupiają się w płaszczyźnie ogniskowej w odległości  $d_2 = f \operatorname{tg} \theta$  od ogniska. Spełnione są prawa załamania:  $\sin \varphi / \sin \beta = n$  oraz  $\sin \alpha / \sin(2\varphi - \beta) = n$ . Odległość między obrazami  $d = d_1 + d_2$ .

W przybliżeniu małych kątów odległość między obrazami w obu przypadkach jest taka sama, a szukany współczynnik załamania

$$n = d/(2\varphi f).$$

**785.** Wypadkowe pole elektryczne wewnętrz kondensatora przed i po obrocie ma wartość  $\mathcal{E}/d$ , zatem energia pola w tym obszarze nie zmienia się. Zasada

### Zadania z fizyki nr 792, 793

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**792.**  $N = 100$  jednakowych kulek o średnicy  $d = 0,1$  mm znajduje się w ustawnionym pionowo cylindrycznym naczyniu o podstawie  $S = 1 \text{ m}^2$  pod nieruchomym tłem, który znajduje się na wysokości  $h = 1$  m. Kulki poruszają się chaotycznie ze średnią prędkością kwadratową  $v_0 = 100 \text{ m/s}$ . Tłok zaczęto podnosić z prędkością  $u = 1 \text{ m/s}$  i został on zatrzymany na wysokości  $2h$ . Jaka średnia prędkość kulek ustaliła się po długim czasie? Nie ma strat energii mechanicznej podczas zderzeń, nie uwzględniamy siły grawitacji.

**793.** Do źródła o sile elektromotorycznej  $U = 1,5 \text{ V}$  i zaniedbywalnym oporze wewnętrznym dołączono długi łańcuch jednakowych amperomierzy i taką samą liczbę jednakowych woltomierzy (rys. 1). Opór wewnętrzny amperomierza wynosi  $r = 1 \Omega$ , woltomierza  $10 \text{ k}\Omega$ . Jakie są wskazania pierwszego i drugiego amperomierza? Ile wynosi suma wskazań wszystkich amperomierzy oraz suma wskazań wszystkich woltomierzy w łańcuchu?

### Rozwiązania zadań z numeru 10/2024

Przypominamy treść zadań:

**784.** Szklany pryzmat o małym kącie lamiącym  $\varphi$  umieszczono w pewnej odległości od cienkiej soczewki skupiającej o ogniskowej  $f$  tak, że jedna z powierzchni pryzmatu jest prostopadła do osi optycznej soczewki. Po drugiej stronie soczewki, w jej ognisku znajduje się punktowe źródło światła. Promienie odbite od pryzmatu po załamaniu w soczewce dają dwa obrazy źródła światła oddalone o siebie o  $d$ . Znaleźć współczynnik załamania szkła, z którego wykonano pryzmat.

**785.** Kondensator płaski, którego powierzchnia okładek jest dużo większa od odległości między nimi, podłączony jest do źródła o sile elektromotorycznej  $\mathcal{E}$  i umieszczony w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $E$ . Linie pola są prostopadłe do powierzchni okładek kondensatora (rys. 2). Jaką pracę trzeba wykonać, aby obrócić ten kondensator o kąt  $\pi$  wokół osi prostopadłej do wektora  $\vec{E}$ ?

**784.** Musimy rozważyć dwa przypadki:

1) Ścianka pryzmatu bliższa soczewki jest prostopadła do jej osi optycznej (rys. 3).

Równoległa wiązka promieni odbitych od bliższej ścianki skupia się w ognisku soczewki, w którym znajduje się źródło. Promienie odbite od dalszej ścianki tworzą po wyjściu z pryzmatu wiązkę nachyloną pod kątem  $\alpha$  do osi optycznej i skupiają się w płaszczyźnie ogniskowej, w odległości  $d = f \operatorname{tg} \alpha$  od ogniska. Z prawa załamania  $\sin \alpha / \sin(2\varphi) = n$ .

W przybliżeniu małych kątów  $d = f\alpha = 2\varphi nf$ .

2) Ścianka pryzmatu dalsza od soczewki jest prostopadła do jej osi optycznej (rys. 4).

zachowania energii w rozważanym procesie ma postać

$$W_1 + W_2 = 0,$$

gdzie  $W_1$  jest szukaną pracą sił zewnętrznych, a  $W_2$  pracą źródła. Oznaczając przez  $E_1$  i  $E_2$  wartości pola elektrycznego wytworzonego przez ładunki na kondensatorze odpowiednio przed i po obrocie, a przez  $d$  odległość między okładkami, możemy napisać:

$$\mathcal{E} - E_1 d + Ed = 0, \quad \mathcal{E} - E_2 d - Ed = 0,$$

stąd  $E_1 = \mathcal{E}/d + E$ ,  $E_2 = \mathcal{E}/d - E$ .

Ładunki na okładkach o powierzchni  $S$  połączonych z dodatnim biegunem źródła przed i po obrocie wynoszą odpowiednio:

$$Q_1 = \varepsilon_0 S (\mathcal{E}/d + E), \quad Q_2 = \varepsilon_0 S (\mathcal{E}/d - E).$$

Podczas obrotu z okładki dodatniej odpływa ładunek  $\Delta Q = Q_1 - Q_2 = 2\varepsilon_0 S E$ , a praca źródła jest ujemna:  $W_2 = -2\varepsilon_0 E \mathcal{E}$ . Szukana praca sił zewnętrznych wynosi

$$W_1 = 2\varepsilon_0 S E \mathcal{E}.$$

# Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,

Czołówka ligi zadaniowej  
**Klubu 44 F**  
po zakończeniu  
roku szkolnego 2023/24  
i po sprawdzeniu zadań

780 (WT = 3,01), 781 (WT = 3,31)	
Paweł Perkowski	Ożarów Maz. 5 – 43,19
Konrad Kapcia	Poznań 2 – 42,29
Jacek Konieczny	Poznań 40,87
Tomasz Witech	Tarnów 17 – 34,38
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów 3 – 27,49
Jan Zambrzycki	Białystok 4 – 26,81
Paweł Kubit	Kraków 17,21
Krzysztof Magiera	Łosów 4 – 13,42
Piotr Adamczyk	Bydgoszcz 2 – 9,03
Ryszard Baniewicz	Włocławek 2 – 7,91
Michał Koźlik	Gliwice 5 – 6,54
Piotr Łaba	Bilgoraj 6,36
Stanisław Buć	Myszków 1 – 5,51
Marian Łupieżowiec	Gliwice 3 – 4,25
Leon Charkiewicz	Koszalin 3,85
Tomasz Rudny	Poznań 1 – 3,34
Hubert Pochłopień	Toruń 1,1
Wiktor Gaczyński	0,66

Lista obejmuje uczestników ligi, którzy przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2022, 2023 lub 2024.

## Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 F w roku szkolnym 2023/2024

Dziewięć zadań z omawianego okresu uzyskało współczynnik trudności większy od trzech, a pięć mniejszy od dwóch.

Nikt nie rozwiązał poprawnie zadania **774** (WT = 3,88), gdzie należało znaleźć gęstość klocka w stanie równowagi trwałej, zanurzonego w wodzie tak, że jego powierzchnia boczna jest równoległa do powierzchni cieczy. Zadanie było dosyć pracochłonne i część uczestników nadesłała rozwiązania jedynie drugiego zadania z tej serii, co wpłynęło na jego współczynnik trudności. Nikt nie podjął próby rozwiązania sposobem „firmowym”, polegającym na zbadaniu momentów sił działających na klocek przy małym odchyleniu z położenia równowagi. Zaproponowane zostało porównanie położenia środków ciężkości klocka w różnych stanach równowagi, ale nie uwzględniono faktu, że podczas zanurzenia klocka przemieszczamy na powierzchnię wodę, której miejsce zajmuje zanurzona część klocka.

Maksymalnej możliwej oceny nie uzyskało żadne z rozwiązań zadania **776** (WT = 3,56). Koralik przymocowany do ustawionej pionowo obręczy za pomocą dwóch jednakowych poziomych sprężyn odchylono od położenia równowagi wzdułż średnicy i puszczonego. Zakładając brak poślizgu, należało znaleźć przyspieszenie obręczy w chwili początkowej. Jeden z uczestników podał dwa rozwiązania tego zadania. Jedno, w którym zastosował równania Lagrange'a, było poprawne. W drugim wykorzystał prawa ruchu obrotowego, zakładając, że obręcz i kulka tworzą jedną bryłę sztywną. Dodatkowy błąd spowodował, że wyniki obu rozwiązań były zgodne. Błąd polegający na założeniu, że obręcz i kulka mają jednakowe przyspieszenia, pojawił się też w kilku innych rozwiązaniach.

W zadaniu **781** (WT = 3,31) początkowo nieruchoma, naładowana cząstka poruszała się w polu nieruchomej cząstki naładowanej przeciwnie oraz w jednorodnym polu magnetycznym prostopadłym do linii łączącej cząstki w chwili początkowej. Znając minimalną odległość między cząstkami, należało znaleźć wartość wektora indukcji pola magnetycznego. Najwyżej ocenione zostało rozwiązanie **Konrada Kapci**, chociaż nie była to ocena maksymalna. Wypisał on równania ruchu cząstki we współrzędnych kartezjańskich, rozważył przypadki o innych warunkach początkowych i wykorzystując analizę numeryczną, zgadł poprawne rozwiązanie.

Zgodnie z tradycją trudności sprawiały zadania z termodynamiki. Nikt nie rozwiązał w pełni poprawnie zadania **779** (WT = 3,15), gdzie w izolowanym cieplnie naczyniu tlen był bardzo szybko podnoszony, a po ustaleniu się równowagi swobodnie opadał. Oba procesy nie były kwazistatyczne i należało korzystać z zasad zachowania energii, podczas gdy uczestnicy albo w jednym, albo w drugim procesie korzystali z równania  $pV^{c_p/c_v} = \text{const}$ . Podobnie było z zadaniem **770** (WT = 3,5), w którym opróżnione i izolowane cieplnie naczynie zapełniane było szybko przez gaz z otoczenia. Jako jedyny poprawnie rozwiązał to zadanie **Tomasz Witech**.

**T. Witech** był też jedynym autorem ocenionego na jedynkę rozwiązania zadania **765** (WT = 3,4). Należało w nim znaleźć okres małych drgań obręczy nałożonej na poziomy nieruchomy walec, przy braku poślizgu między walcem i obręczą.

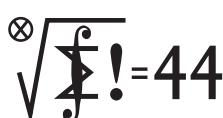
Zadanie **762** (WT = 3,01) bezbłędnie rozwiązał **Ryszard Baniewicz**. Pytanie było o minimalną energię fotonu potrzebną do utworzenia pary elektron-pozyton w pobliżu spoczywającego elektronu.

Zadanie **766** (WT = 3,06) dotyczyło oddziaływanie połówek równomiernie naładowanej, nieprzewodzącej kuli. Jedynki otrzymali **Paweł Perkowski** i **Tomasz Witech**. W zadaniu **780** (WT = 3,01) rozważane było niesprzyjste zderzenie kulek zawieszonych na jednakowych niciach. Bezbłędne rozwiązania przysłali **Marian Łupieżowiec** i **Tomasz Witech**.

Za rozwiązania tegorocznych zadań najwięcej jedynek zdobył **Tomasz Witech** (11), drugie miejsce zajął **Ryszard Baniewicz**, trzecie **Paweł Perkowski**. **Tomasz Rudny** został w tym roku członkiem klubu 44 F, przekraczając granicę 44 punktów, **Ryszard Baniewicz** przekroczył ją po raz drugi, **Marian Łupieżowiec** po raz trzeci, a **Tomasz Witech** siedemnasty!

Ciekawostką jest, że o rozwiązanie zadania **763** (WT = 2,46) z mechaniki punktu materialnego, za które maksymalne oceny otrzymały trzy osoby, jeden z uczestników poprosił sztuczną inteligencję, której wysiłek zakończył się niepowodzeniem. Zdecydowanie odradzam dalsze takie eksperymenty, bo nie o to w tej zabawie chodzi.

# Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2025

Lista uczestników ligi zadaniowej

## Klub 44 M

po zakończeniu sezonu  
(roku szkolnego) 2023/24

Szymon Kitowski	41,11
Witold Bednarek	9–40,58
Mikołaj Pater	3–39,58
Krzysztof Zygan	1–39,38
Tomasz Wietecha	14–38,61
Andrzej Daniluk	2–37,89
Szymon Tur	35,35
Andrzej Kurach	3–33,24
Jędrzej Biedrzycki	32,29
Krzysztof Kamiński	3–30,48
Marian Łupiezwieć	1–29,87
Michał Warmuz	29,84
Marcin Kasperski	5–28,94
Marcin Małogrosz	4–27,82
Roksana Słowiak	2–27,60
Janusz Olszewski	24–26,40
Janusz Wojtaś	26,30
Grzegorz Wiączkowski	26,13
Błażej Źmija	2–25,48
Maciej Mostowski	1–22,90
Krzysztof Maziarz	1–22,58
Stanisław Bednarek	3–22,47
Marek Spychała	5–22,32
Piotr Wiśniewski	1–20,59
Barbara Mroczeń	18,58
Grzegorz Karpowicz	2–17,76
Jerzy Cisło	17–17,54
Patryk Jaśniewski	1–16,62
Piotr Łaba	14,50
Zbigniew Skalik	4–12,48
Paweł Łabędzki	1–12,47

Legenda (przykładowo):  
stan konta 9–40,58 oznacza, że uczestnik już dziewięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziesiątej) rundzie ma 40,58 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 12 punktów;
- przysłali rozwiązań co najmniej jednego zadania z rocznika 2022, 2023 lub 2024.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych lamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

## Zadania z matematyki nr 895, 896

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**895.** Na okręgu zaznaczono  $n$  punktów;  $n \geq 3$  jest ustaloną liczbą nieparzystą. Każdemu punktowi została przyporządkowana wartość 0 lub 1. Dozwolone są ruchy polegające na wybraniu trzech kolejnych punktów o wartościach (kolejno)  $a, b, c$  takich, że  $a = c$ , i zamianie  $b$  na  $1-b$ . Udowodnić, że startując z dowolnej konfiguracji i wykonując dozwolone ruchy, można uzyskać jednakową wartość dla wszystkich  $n$  punktów.

**896.** Udowodnić, że ciąg  $(A_1, A_2, A_3, \dots)$  o wyrazach

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$$

jest malejący.

*Zadanie 896 zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia*

## Rozwiązań zadań z numeru 10/2024

Przypominamy treść zadań:

**887.** Znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą  $A$ , dla której istnieją liczby zespolone  $u, v, w$  oraz liczba rzeczywista  $B$  takie, że  $|u| = |v| = |w| = 1 = uvw$ , zaś  $u + v + w = A + Bi$ .

**888.** Znaleźć wszystkie trójki liczb całkowitych  $x, y, z \geq 0$  spełniające równanie  $7^x + 2^{x+y} = z^2$ .

**887.** Prościej: chodzi o wyznaczenie minimalnej wartości  $\operatorname{Re}(u + v + w)$  dla liczb  $u, v, w$  o podanych własnościach. Są to liczby o module 1, zatem istnieją liczby rzeczywiste  $x, y, z$  takie, że  $u = e^{ix}$ ,  $v = e^{iy}$ ,  $w = e^{iz}$ . Warunek  $uvw = 1$  oznacza, że  $x + y + z = 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Przy tym

$$\operatorname{Re}(u + v + w) = \operatorname{Re}(u) + \operatorname{Re}(v) + \operatorname{Re}(w) = \cos x + \cos y + \cos z.$$

Należy znaleźć minimum tej sumy przy powyższym warunku.

Niech  $c = \cos \frac{x+y}{2}$ ; więc  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \geq -2|c|$ ; a skoro  $z = 2k\pi - (x + y)$ , zatem  $\cos z = \cos(2 \cdot \frac{x+y}{2}) = 2c^2 - 1$ . W konsekwencji

$$\cos x + \cos y + \cos z \geq 2c^2 - 2|c| - 1 = 2(|c| - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2}.$$

W tych szacowaniach zachodzi równość, gdy  $x = y = z = \pm \frac{2}{3}\pi$  (co odpowiada liczbom  $u = v = w = \cos(\frac{2}{3}\pi) \pm i \sin(\frac{2}{3}\pi)$ ). Szukane minimum wynosi więc  $-\frac{3}{2}$ .

**888.** Niech liczby  $x, y \geq 0, z > 0$  spełniają zadane równanie. Gdy  $x = 0$ , wtedy  $2^y = (z-1)(z+1)$ , więc  $z \pm 1$  to potęgi dwójki, skąd  $z = 3$  i  $y = 3$ . Trójka  $(0, 3, 3)$  jest jednym z rozwiązań.

Gdy  $x = 1$ , równanie ma postać  $7 + 2^{y+1} = z^2$ , więc  $z$  jest liczbą nieparzystą. Dostajemy  $2^{y+1} \equiv 2 \pmod{4}$ , czyli  $y = 0$ ; wtedy  $z = 3$ . Trójka  $(1, 0, 3)$  jest jednym z rozwiązań.

Dalej rozważamy  $x \geq 2$ . Dane równanie pokazuje, że  $3^x \equiv z^2 \pmod{4}$ , co jest możliwe tylko dla parzystego  $x$ . Niech więc  $x = 2t$  ( $t \geq 1$ ); zapiszmy równanie tak:  $(z+7^t)(z-7^t) = 2^{2t+y}$ . Pierwszy czynnik po lewej stronie jest liczbą dodatnią, więc drugi też; stąd  $z \geq 8$ . Oba czynniki muszą być potęgami dwójki:

$$z + 7^t = 2^k, \quad z - 7^t = 2^l \quad (k > l \geq 0, \quad k + l = 2t + y).$$

Po odjęciu stronami:  $2 \cdot 7^t = 2^l(2^{k-l} - 1)$ , skąd  $l = 1$ ,  $7^t = 2^{k-1} - 1$ .

Gdy  $k = 4$ , dostajemy  $t = 1$  (czyli  $x = 2$ ),  $y = k + l - 2t = 3$ ,  $z^2 = 7^2 + 2^5$ , czyli  $z = 9$ . Trójka  $(2, 3, 9)$  jest jednym z rozwiązań. Gdy  $k \geq 5$ , dostajemy  $7^t = 2^{k-1} - 1 \equiv -1 \pmod{16}$ . Sprzeczność, bo potęgi siódemki ( $\pmod{16}$ ) to tylko 1 lub 7. Zadane równanie ma więc trzy rozwiązania:  $(0, 3, 3)$ ,  $(1, 0, 3)$ ,  $(2, 3, 9)$ .

## Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 M w roku szkolnym 2023/2024

Teraz coroczne omówienie wybranych zadań – czyli (jak zwykle) tych, które okazały się trudniejsze: wysoki współczynnik trudności (WT) i/lub niewielka liczba poprawnych rozwiązań (LPR); oraz tych, w których

pojawili się intrygujące pomysły rozwiązań oraz komentarze uczestników. Znaczne ich fragmenty umieszczamy w e-wydaniu (w zakładce „Załącznik do elektronicznego omówienia ligi matematycznej”).

# Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,

\* \* \*

**Zadanie 866.** [Dane  $p, q \in \mathbb{P}$  (zbiór liczb pierwszych),  $p \neq q$ ;  $2^p - 1, 2^q - 1 \in \mathbb{P}$ ;  $pq|2^p - 1, pq|2^q - 1$ ;  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d|2^{pq} - 1 \Rightarrow pq|d - 1$ ] ( $WT = 2,68$ ;  $LPR = 9$ ).

Wszystkie dobre rozwiązania podobne (zasadniczo jak firmowe):

**M. Adamaszek, W. Bednarek, S. Kitowski, K. Maziarz, J. Olszewski, M. Pater, M. Warmuz, T. Wietecha, P. Wiśniewski.**

**Zadanie 869.** [Dla  $x, y \in \mathbb{R}_+$ :  $g(x, y) = \min\left(x, \frac{1}{x}, \frac{xy+1}{x}\right)$ ;  $\sup g(x, y) = ?$ ]

( $WT = 1,34$ ;  $LPR = 25$ ). Jak widać, było łatwe. Przywołujemy je tu po to, by wspomnieć o kilku rozwiązaniach *niepoprawnych*, korzystających z „twierdzenia” (fałszywego): Jeśli funkcja ciągła na pewnym zbiorze  $A \subset \mathbb{R}^n$  jest w jego wnętrzu różniczkowalna, ale bez punktów, w których różniczka jest zerowa, wówczas wartość minimalna jest przyjmowana w pewnym punkcie brzegu zbioru  $A$ . No cóż, tak jest, gdy zbiór  $A$  jest domknięty i ograniczony. Ale gdy (na przykład)  $A$  jest ćwiartką płaszczyzny ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), wystarczy spojrzeć na funkcję  $e^{-xy}$ , by zrozumieć błąd.

**Zadanie 870.** [ $\triangle ABC$  równoboczny  $\Rightarrow$  (a)  $\forall P \in \text{pl}(ABC)$ :

$AP + BP \geq CP$  (&cykl); (b) to samo  $\forall P$  w przestrzeni] ( $WT = 2,50$ ;  $LPR = 13$ ). Redaktor Ligi ze skruchą przyznaje, że nie rozpoznał tu szczególnego przypadku nierówności Ptolemeusza ( $PA \cdot BC + PB \cdot AC \geq PC \cdot AB$ , słusznej dla dowolnej czwórki punktów w przestrzeni dowolnego wymiaru – rozwiązanie w jednej linijce, dostrzeżone przez ósmioro uczestników:

**M. Adamaszek, B. Knapik, P. Kubit, P. Kumor, K. Maziarz, B. Mroczek, T. Wietecha, P. Wiśniewski.**

Piękne rozwiązanie czysto geometryczne, dwoma sposobami w części (a) i dwoma w części (b), przedstawił **Janusz Olszewski**. Oto jeden z tych sposobów (b): niech (b.s.o.)  $P \neq A$ ,  $AB = BC = CA = a$ ;  $B', C', P'$  – obrazy  $B, C, P$  w inwersji względem sfery o środku  $A$ , promieniu 1; nietrudno wykazać podobieństwa  $\triangle ABP \sim \triangle AP'B'$ ,  $\triangle ACP \sim \triangle AP'C'$ ,  $\triangle ABC \sim \triangle AC'B'$ ; a stąd, pisząc odpowiednie proporcje, wywnioskować, że  $\triangle B'P'C'$  jest podobny do trójkąta o bokach  $BP, CP, AP$  (!) (całość pracy w e-wydaniu).

**Zadanie 871.** [Dana liczba parzysta  $n > 0$ ;

(a)  $P := [n+1, 2n+1] \cap \mathbb{N} \Rightarrow \exists M \subset P \forall m \in M: \sum_{k \in M} k \not\equiv 0 \pmod{m}$ ;

(b) czy zawsze istnieją dwa różne takie zbiory  $M$ ?] ( $WT = 1,99$ ;  $LPR = 16$ ).

Niech  $S = \sum_{k=n+1}^{2n+1} k = cd$ , gdzie  $c = n+1$ ,  $d = \frac{3}{2}n+1$ . **Janusz Olszewski** traktuje liczbę  $n+1, \dots, 2n+1$  jako wierzchołki grafu skierowanego, w którym  $(x \rightarrow y) \Leftrightarrow (y|S-x)$ . Założymy odpowiedź *nie* na pytanie (b); wtedy musi istnieć  $n$  wierzchołków, z których wychodzą krawędzie do innych wierzchołków; więc istnieje  $\geq n$  krawędzi  $x \rightarrow y$ , gdzie  $x \neq y$ . Łatwo sprawdzić, że  $c \rightarrow c$ ,  $d \rightarrow d$ , zatem istnieje  $\geq n+2$  krawędzi wchodzących do  $n+1$  wierzchołków; pewne dwie muszą wchodzić do tego samego:  $k \rightarrow m$ ,  $l \rightarrow m$  ( $k \neq l$ ). To oznacza, że  $m|S-k$ ,  $m|S-l$ , skąd  $m|k-l$ ; to już sprzeczność, bo  $|k-l| \leq n < m$ . Stąd odpowiedź *tak* na pytanie (b) (więc i dowód tezy (a)).

Kilka prac zawiera zasadniczo takie samo rozumowanie, jednak bez terminologii „grafy, krawędzie”, która tu wydaje się idealnie dopasowana.

W dwóch innych pracach (**M. Kasperski, B. Knapik**) widzimy ciekawe symulacje komputerowe (→ e-wydanie) sugerujące, że zbiorów o badanej własności jest znacznie więcej niż dwa.

**Zadanie 875.** [Dana liczba nieparzysta  $N$  oraz

ciąg  $(x_1, \dots, x_N)$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ ; dla  $k \in \{1, \dots, N\}$ :

$a_k := \sum_{i < k} x_i$ ,  $b_k := \sum_{i > k} (1-x_i)$ ,  $c_k = a_k + b_k$ ;

$\exists! z: |\{k: z = c_k\}| \equiv 1 \pmod{2}$ ;  $z = ?$ ] ( $WT = 2,62$ ;  $LPR = 7$  (8?)). Dobre rozwiązania (w większości podobne do firmowego): **M. Adamaszek, R. Kujawa, J. Olszewski, M. Warmuz, M. Kasperski, P. Łabędzki, M. Spychała**; ponadto jedna praca z pomyłką (której usunięcie nie jest trudne, jednak wymaga małej zmiany rozumowania).

**Zadanie 878.** [Znaleźć  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r > 2$ :  $\exists$  nieskończenie wiele zbiorów  $\{p_1, \dots, p_r\}$ ,  $p_i \in \mathbb{P}$ :  $\forall i \in \{1, \dots, r\}: p_1 \dots p_r | 2^{p_i-1} - 1$  (im większe  $r$ , tym lepiej)]

( $WT = 3,29$ ;  $LPR = 3+\text{autor}$ ). Zaczniemy od  $r = 3$ . Ładne rozwiązanie pokazał **Janusz Olszewski** (przejrzysta redakcja – zachęcamy do lektury w e-wydaniu!). Inną drogą poszedł **Piotr Wiśniewski**, odwołując się do pracy

A. Rotkiewicza z roku 1967 (w której jedno z twierdzeń nakrywa naszą tezę dla  $r = 3$ ); nie podał pełnego

odsyłacza. Dla zainteresowanych Czytelników: (przyp. red.: praca, zatytułowana *On the prime factors of the number  $2^{p-1}-1$* , ukazała się w *Glasgow Math.J.* 9 (1968), 82–86; natomiast w *Cambridge Univ. Press* – jej przedruk, który łatwo wyszukać – wystarczy wstukać np. *on the prime factors rotkiewicz*; podany tam dowód nie jest elementarny, przy tym odsyła do jeszcze innych prac).

Przypadek  $r = 2$  był rozpatrzony w zadaniu z obozu OM 2010 ([om.sem.edu.pl](http://om.sem.edu.pl); ten odsyłacz posłużył jako wskazówka do omawianego zadania 878). **Piotr Kumor** (autor 878) zauważał, że przez dość naturalną modyfikację daje się uzyskać tezę dla  $r = 4$ . Uzyskana przez autora konstrukcja została użyta jako rozwiązanie firmowe. Dokładnie tę samą konstrukcję znalazły **Michał Adamaszek**. Co ciekawe, obaj Panowie opatrzyli swoje prace komentarzami, w znacznej mierze identycznymi. Zamieszczamy je w e-wydaniu; kto ciekawy, co to *Super-Poulet numbers*, niech tam zajrzy. Warto!

Autor zadania liczył, że od rozwiązujących dowie się czegoś na temat możliwości  $r > 4$ ; niestety,  $r = 4$  pozostaje (na razie?) osiągnięciem max.

Zadanie 880. [Czy istnieją  $A, B \subset \mathbb{Q}_+$  takie, że:  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = \mathbb{Q}_+$  oraz (dla  $x, y \in \mathbb{Q}_+$ ):  
 $(xy = 1 \Rightarrow x, y \text{ są w tym samym zbiorze } (A \text{ lub } B))$ ;  $((|x-y| = 1 \Rightarrow x, y \text{ są w różnych zbiorach})?$ ]  
 $(WT = 1,63; LPR = 16)$ . **Michał Adamaszek** dał rozwiązanie – wzorzec zwieńczenia: każda liczba  $x \in \mathbb{Q}_+$  ma jednoznaczne rozwinięcie w skończony ułamek lańcuchowy  $x = [a_0; a_1, \dots, a_n]$  (notacja: np.  $[a_0; a_1, a_2, a_3] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}$ ):  $a_0 \geq 0$ ,  $a_i \geq 1$

dla  $i \geq 1$ ;  $a_n \geq 2$  jeśli  $n \geq 1$ . Przypisujemy  $x$  do zbioru  $A$  (odp.  $B$ ), gdy suma  $\sum_{i=0}^n a_i$  jest parzysta (odp. nieparzysta). Tak określone zbiory  $A, B$  spełniają wymagane warunki, co wynika z równości  $\frac{1}{x} = [0; a_0, a_1, \dots, a_n]$ ,  $x - 1 = [a_0 - 1; a_1, \dots, a_n]$  (dla  $x > 1$ ).

To samo rozumowanie podali: **Andrzej Daniluk** i **Piotr Kumor**. W pozostałych pracach nie ma mowy o ułamkach lańcuchowych, choć de facto są one „w tle” obecne (czymże innym jest „uogólniony algorytm Euklidesa”?) – brak tych kluczowych słów sprawia, że zapis staje się cięższy (vide: firmówka). Odnotujmy ponadto jedno rozwiązanie wyraźnie odmienne (bardziej kombinatoryczne): **Janusz Olszewski** (→ e-wydanie).

Zadanie 881. [ $a_0 = 3$ ,  $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ ;  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 \dots a_{n-1}/a_n) = ?$ ] ( $WT = 1,50; LPR = 18$ ). Nie sprawiło kłopotu uczestnikom; wielu z nich znalazło nie tylko wynik  $1/\sqrt{5}$ , ale również wartość

badanej granicy  $1/\sqrt{a_0^2 - 4}$  przy innych wartościach początkowych  $|a_0| > 2$ . Znacznie ciekawsze jest rozważanie przypadku  $|a_0| \leq 2$  (co nie było przedmiotem zadania; a szkoda); granica wówczas nie istnieje, co wnikliwie uzasadnił **Janusz Olszewski** (→ e-wydanie).

Zadanie 882. [ $ABCD$  – równoleglobok;  $K, L, M, N$  – punkty wewnętrz boków  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  ⇒ (a) ortocentra trójkątów  $ANK$ ,  $BKL$ ,  $CLM$ ,  $DMN$  tworzą równoleglobok; (b) to samo dla ich środków ciężkości; (c) to samo dla środków okręgów opisanych] ( $WT = 2,27; LPR = 12$ ). Efektowne „dynamiczne” rozumowanie przeprowadził **Janusz Fiett**. Własności (a), (b), (c) są oczywiste, gdy  $K, L, M, N$  są środkami odpowiednich boków (cała konfiguracja jest wówczas środkowo symetryczna). A dalej – jeden wspólny pomysł daje uzasadnienie tych trzech tez; dla przykładu weźmy własność (c): założymy, że dla pewnego wyboru punktów  $K, L, M, N$  czworokąt  $A'B'C'D'$  (o wierzchołkach w środkach okręgów opisanych na wymienionych trójkątach) jest równoleglobokiem. Wybieramy jeden z tych punktów – powiedzmy  $M$  – i przesuwamy go do innego położenia na boku  $CD$ , nie ruszając przy tym punktów  $N, K, L$ ; punkty  $A', B'$  nie ruszają się; proste symetralne odcinków  $CL$  i  $DN$  również nie zmieniają położenia; zaś proste symetralne odcinków  $CM$  i  $DM$  przesuwają się równolegle, przy czym odległość między nimi pozostaje stała (równa  $\frac{1}{2}CD$ ). Odcinek  $C'D'$  (wyznaczony przez odpowiednie punkty przecięcia jednej pary symetralnych z drugą parą) wykonuje przesunięcie równoległe (!), wobec czego czworokąt  $A'B'C'D'$  (przy nowym położeniu punktów  $C', D'$ ) nadal jest równoleglobokiem. Wystarczy teraz wykonać analogiczne przemieszczenia punktów  $N \in DA$ ,  $K \in AB$ ,  $L \in BC$  do dowolnie wybranych pozycji;  $A'B'C'D'$  pozostanie równoleglobokiem.

W przypadku każdej z własności (a), bądź (b), przesunięcie punktu  $M \in CD$  (bez ruszania  $N, K, L$ ) daje podobny efekt: można wskazać dwie pary prostych równoległych, których odpowiednie przecięcia wyznaczają punkty  $C', D'$ , określone teraz jako ortocentra bądź środki ciężkości trójkątów  $CLM$ ,  $DMN$ ; przy tym jedna para pozostaje nieruchoma, a druga przesuwa się równolegle, nie zmieniając odległości, dzięki czemu odcinek  $C'D'$  znów się przesuwa równolegle; konkluzja jak w przypadku (c). Wskazanie owych par prostych zostawiamy Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie; a kto woli przyjść na gotowe – może zajrzeć do e-wydania, gdzie znajdzie omawiane rozwiązanie bez skrótów.

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

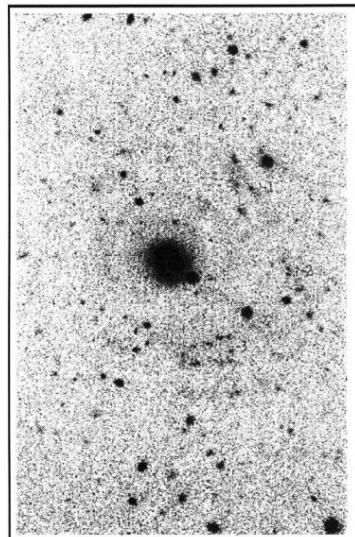
współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązań tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązań choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).



## Prosto z nieba: Malin 1 – co nowego u spiralnej galaktyki gigantki?

Malin 1 znajduje się w odległości 366 Mpc (czyli 1,2 miliarda lat świetlnych) od Ziemi. Dla porównania, odległość do galaktyki Andromedy wynosi tylko 2,5 miliona lat świetlnych. Średnica Malin 1 to około 200 kpc, czyli prawie 660 000 lat świetlnych. Dla porównania, szacowana średnica Drogi Mlecznej to tylko 100 000 lat świetlnych. Średnica naszej Galaktyki jest więc prawie siedem razy mniejsza niż średnica Malin 1.

Jak pewnie stali Czytelnicy *Delty* pamiętają, metaliczność w astronomii to pojęcie różne od metaliczności, do jakiej jesteśmy przyzwyczajeni. W astronomii pojęcie metali odnosi się do wszystkich pierwiastków w układzie okresowym, które nie są wodorem lub helem.



Rys. 1. Pierwsze zdjęcie Malin 1 z opisującego jej przypadkowe odkrycie artykułu Bothun, Impey, Malin i Mould, The Astrophysical Journal, 1987

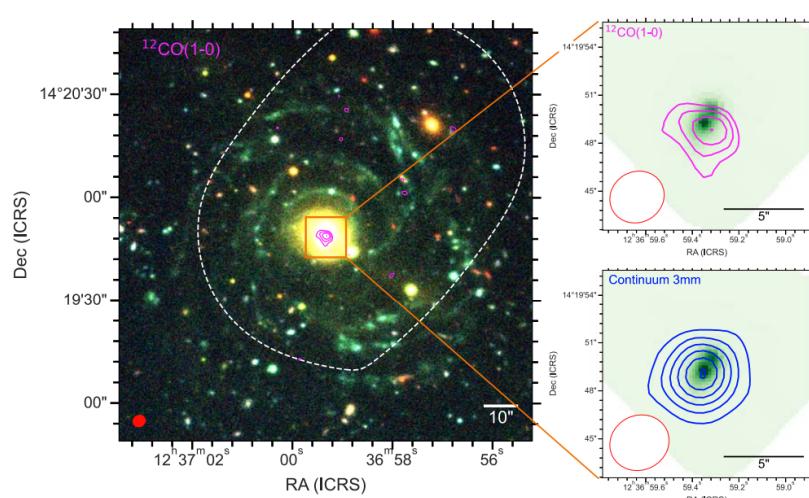
Największa znana do tej pory galaktyka spiralna została odkryta przez astronoma Davida Malina w 1986 roku. Na cześć odkrywcy nazwano ją Malin 1. Jest to galaktyka o niskiej jasności powierzchniowej. Jej jasność – oglądana z Ziemi – jest mniejsza od jasności otaczającego ją nieba (tzn. w świetle widzialnym jest prawie przezroczysta). Ramiona spiralne Malin 1 są bardzo rozproszone i z jakiegoś powodu galaktyka ta produkuje bardzo mało gwiazd.

Przez prawie 30 lat od odkrycia Malin 1 naukowcy starali się rozwikłać szereg zagadek związanych z tym monstrualnym, a równocześnie prawie przezroczystym, obiektem. Próbowano odpowiedzieć na pytania o to, jakie były początkowe warunki jej powstania oraz jaka była historia galaktyki. Jak to się stało, że jest ona tak ogromna? Czy tworzą się w niej nowe gwiazdy? Czy zawiera pył międzygalaktyczny? Jaka jest jej metaliczność? Dopiero najnowsze obserwacje, uzyskane dzięki wysokiej czułości teleskopu ALMA (o którym pisaliśmy już wielokrotnie na łamach Delty, np. w  $\Delta_7$ ), pozwoliły na odkrycie części tajemnic skrywanych przez Malin 1.

Malin 1 jest tak wielką galaktyką, że obserwacje instrumentem MUSE na teleskopie VLT (Very Large Telescope), które odbyły się w 2021 roku i trwały prawie 1,5 godziny, pozwoliły na zbadanie jedynie 1/4 jej obszaru, w tym centralnej części galaktyki. Na ich podstawie dr Junais, pracujący wtedy w Zakładzie Astrofizyki w Narodowym Centrum Badań Jądrowych, opublikował badania sugerujące, że Malin 1 posiada silnie rozszerzony dysk gwiazdotwórczy, w którym promieniowanie pochodzące z młodych obszarów gwiazdotwórczych jest tłumione przez pył międzygwiazdowy. Było to przełomowe odkrycie, gdyż do tej pory analizowano dane pochodzące z galaktyk o niskiej jasności powierzchniowej, przy założeniu, że ilość znajdującej się w nich pyłu jest zbyt mała, by mieć znaczenie. Także mierzona metaliczność Malin 1 okazała się zaskakująca. W centrum galaktyki jest wyższa od metaliczności Słońca (!), a następnie opada i utrzymuje w miarę stałą wartość w zewnętrznym dysku.

Kilka miesięcy później, wykorzystując w obserwacjach teleskop ALMA, ten sam zespół naukowy, tym razem pod przewodnictwem dr. Gaspara Galaza z Instituto de Astrofísica, Pontificia Universidad Católica w Santiago w Chile, zaobserwował emisję cząsteczek tlenku węgla w centrum Malin 1 (patrz rys. 2), a także potencjalne emisje w trzech innych regionach dysku. Odkrycie to pozwoliło na oszacowanie masy wodoru molekularnego (który jest gazem umożliwiającym tworzenie się nowych gwiazd w galaktykach) oraz średnią gęstość powierzchniową gazu molekularnego.

Wyniki otrzymane przez zespół (oba artykuły zostały opracowane w tym samym zespole naukowym) pokazują nie tylko, że Malin 1 bardzo powoli tworzy nowe gwiazdy i ma ekstremalnie niską ogólną gęstość powierzchniową gazu molekularnego, ale także, że gwiazdy tworzą się tylko w niektórych miejscach dysku galaktyki. Wyniki analizy sugerują, że galaktyki tak duże i rozproszone jak Malin 1 tworzą gwiazdy w wielu miejscach wzduł swoich ogromnych ramion spiralnych.



Rys. 2. Detekcja emisji ciągłej i linii  $^{12}\text{CO}(1 - 0)$  za pomocą teleskopu ALMA. Lewy panel przedstawia kolorowy obraz optyczny z pracy Boissier i inni (2016). Panele po prawej stronie pokazują powiększone obrazy centrum Malin 1 z nałożoną detekcją linii  $^{12}\text{CO}(1 - 0)$  (panel górnny) oraz kontynuum (panel dolny). Czerwona elipsa w lewym dolnym rogu każdego panelu reprezentuje rozmiar wiązki ALMA. Z artykułu Galaz i inni (2024)

Tekst opracowany na podstawie artykułów: Junais i inni „MUSE observations of the giant low surface brightness galaxy Malin 1: Numerous HII regions, star formation rate, metallicity, and dust attenuation” – opublikowany w czasopiśmie *Astronomy & Astrophysics* w styczniu 2024 r. oraz Gaspar Galaz i inni „First Detection of Molecular Gas in the Giant Low Surface Brightness Galaxy Malin 1” – opublikowany w czasopiśmie *The Astrophysical Journal Letters* w listopadzie 2024 r.

Cierpliwość w przypadku Malin 1 była niezbędna, gdyż dopiero po 30 latach od jej odkrycia dysponujemy teleskopami pozwalającymi nie tylko na obrazowanie tak słabo świecącej i ogromnej galaktyki, ale także na analizę jej własności fizycznych przy pomocy obserwacji poszczególnych linii emisyjnych. Przygoda z Malin 1 pewnie dopiero się zaczyna, czekamy na dalsze obserwacje i analizy, gdyż nadal nie wiemy, w jaki sposób została uformowana tak wielka galaktyka.

Katarzyna MAŁEK

Departament Badań Podstawowych (BP4), Zakład Astrofizyki, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



## Niebo w lutym

Luty jest pierwszym z czterech kolejnych miesięcy roku, gdy Słońce szybko wspina się na północ, przebywając każdego kolejnego tygodnia wyraźnie dłużej nad widnokrekiem. Do końca miesiąca zwiększy ono wysokość górowania o ponad  $8^\circ$ , a dzień wydłuży się prawie do 11 godzin.

Ekliptyka o zmierzchu tworzy jeszcze większy kąt z horyzontem niż w styczniu, dzięki czemu na początku lutego bardzo dobrze widoczny jest Księżyc tuż po nowiu oraz znajdujące się na wschód od Słońca i niezbyt daleko od niego planety Układu Słonecznego. Srebrny Glob zacznie miesiąc w fazie 12% między planetami Saturn i Wenus, około  $4^\circ$  od drugiej z nich. Saturn zbliża się do marcowej koniunkcji ze Słońcem, dlatego można go dostrzec tylko w pierwszej części miesiąca. Potem zginie w zorzy wieczornej. A szkoda, gdyż równonoc na Saturnie i przejście Ziemi przez płaszczyznę jego pierścieni są coraz bliżej. 8 lutego od zmierzchu do zachodu planety można jeszcze spróbować zaobserwować przejście cienia Tytana po jej tarczy. Saturn świeci z jasnością  $+1,1^m$ , przy średnicy tarczy  $16''$ .

Wenus również zmniejsza odległość kątową do Słońca po styczniowej maksymalnej elongacji, pozostanie jednak ozdobą wieczornego nieba do końca zimy. W lutym druga planeta od Słońca jest widoczna bardzo dobrze, zajmując o zmierzchu pozycję na wysokości przekraczającej  $20^\circ$ . Początkowo Wenus wędruje wzduż ekliptyki, ale pod koniec lutego zacznie wyraźnie odbijać na północ, szukając się do marcowej koniunkcji dolnej ze Słońcem. Planeta szybko zbliża się do nas, w związku z czym jej tarcza rośnie, zmniejszając jednocześnie swoją fazę. Na początku miesiąca jej tarcza ma średnicę  $32''$  i fazę 38%, by do końca lutego jej średnica zwiększyła się do  $49''$ , faza zaś zmniejszyła się do 14%. Świeci przy tym bardzo jasno, przekraczając blask  $-4,5^m$ . To oznacza, że jest ona atrakcyjnym celem nawet dla właścicieli lornetek.

Srebrny Glob dotrzyma towarzystwa Wenus jeszcze 2 lutego, pokazując się w fazie 21% jakieś  $10^\circ$  na wschód od niej, a następnie powędruje w kierunku Plejad, które minie w nocy z 5 na 6 lutego. Do tego czasu jego faza zwiększy się do I kwadry. Tym razem Europa ma pecha, gdyż Księżyc zakryje niektóre gwiazdy gromady Plejad, będąc już pod horyzontem. W Polsce 5 lutego Księżyc zdąży zblizyć się do Plejad na  $5^\circ$ , a następnej doby o zmierzchu pokaże się również  $5^\circ$ , ale na wschód od nich. Tej nocy naturalny satelita Ziemi zblizyi się także do Jowisza. Tuż przed zachodem obu ciał niebieskich dystans między nimi zmniejszy się także do  $5^\circ$ . Największa

planeta Układu Słonecznego w lutym jest widoczna wciąż całkiem dobrze, przecinając południk lokalny na początku miesiąca na całkiem ciemnym niebie. Jowisz wędruje niecałe  $5^\circ$  na północ od Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka, a w trakcie miesiąca jego jasność spadnie do  $-2,3^m$ , średnica tarczy natomiast do  $40''$ .

W nocy z 7 na 8 lutego Księżyca minie gwiazdę El Nath, drugą co do jasności gwiazdę Byka, zwiększając przy tym fazę do 78%. U nas minimalna odległość między tymi ciałami niebieskimi zmniejszy się do około  $45''$ . Dwie nocy później zaś Srebrny Glob przeniesie się do wschodniej części Bliźniat, gdzie odwiedzi najpierw planetę Mars, a następnie Kastora i Polluksa. Wieczorem Księżyca zbliży się do Marsa na mniej niż  $0,5^\circ$ , a nad ranem zmniejszy dystans do Polluksa do  $3^\circ$ . Sam Mars szybko oddala się od Ziemi i jego tarcza wyraźnie traci na średnicy i jasności. Planeta prawie do końca miesiąca porusza się ruchem wstecznym, oddalając się od Polluksa na ponad  $7^\circ$ . W lutym jasność Marsa spadnie z  $-1^m$  do  $-0,3^m$ , a średnica jego tarczy – z  $14''$  do  $11''$ . Podczas górowania Mars wzrosi się na ponad  $65^\circ$ .

12 lutego nastąpi pełnia Księżyca i jednocześnie zbliży się on na  $1,5^\circ$  do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. 5 nocy później faza Srebrnego Globu spadnie do 82% i dotrze on do środkowej części Panny, wędrując jakieś  $5^\circ$  od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy tej konstelacji. 20 lutego Księżyca osiągnie ostatnią kwadrę, a dobę później wjezdzie w gwiazdozbiorze Skorpiona, niecałe  $3^\circ$  od Antaresa, jego najjaśniejszej gwiazdy. Potem Księżyca podążą ku nowiu, przez który przejdzie 28 lutego, ale ze względu na niekorzystne nachylenie ekliptyki i dodatkowo przebywanie na południe od niej zniknie on w zorzy porannej już kilka dni wcześniej.

Przez cały miesiąc bardzo dobrze widoczna jest gwiazda R Leonis, której maksimum aktywności przewiduje się na 4 lutego. Jest to miryda, czyli długookresowa gwiazda zmienna, której jasność wahana się od  $+4,4^m$  do  $+11^m$  w okresie 312 dni. Za każdym razem zarówno w maksymum, jak i w minimum blasku jej jasność może być różna, ale jeśli zbliży się ona do swojej największej obserwowanej jasności, to na ciemnym niebie da się ją łatwo dostrzec gołym okiem. R Leo znajduje się jakieś  $5^\circ$  na zachód od Regulusa, niedaleko gwiazd 6. wielkości 18 i 19 Leonis, z którymi można porównywać jej blask. Ma też wyraźnie widoczną wiśniową barwę. Łatwo ją zatem zidentyfikować przez lornetkę. W lutym gwiazda góruje przed północą na wysokości  $50^\circ$ .

Ariel MAJCHER

# Rozwiązań zadań ze strony 16



## Rozwiązań zadania M 1807.

Skoro pierwsze wyrazy danych ciągów są takie same, wystarczy udowodnić równość ich różnic  $a$  i  $b$ . Z warunków zadania wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  liczba

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= (b_1 + (n-1)b) - (a_1 + (n-1)a) \\ &= (n-1)(b-a) \end{aligned}$$

jest podzielna przez  $n$ , co oznacza, że liczba  $b-a$  jest podzielna przez  $n$ . Stwierdziliśmy więc, że liczba całkowita  $b-a$  jest podzielna przez dowolną liczbę całkowitą dodatnią, a to jest możliwe tylko wtedy, gdy  $b-a=0$ .



## Rozwiązań zadania M 1808.

Rozważmy okrąg o długości  $s$  i podzielimy go na równe łuki o długości 1. Zaznaczmy na czerwono  $m$  punktów podziału okręgu na łuki o długościach  $x_1, x_2, \dots, x_m$  i kolorem niebieskim  $n$  punktów podziału okręgu na łuki o długościach  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Na podstawie zadania **M 1806** z poprzedniego numeru pewne dwa łuki,  $A_{i_1}A_{i_2}$  i  $B_{j_1}B_{j_2}$ , są równej długości. Usuwając te długości z równości, zachowujemy jej prawdziwość.

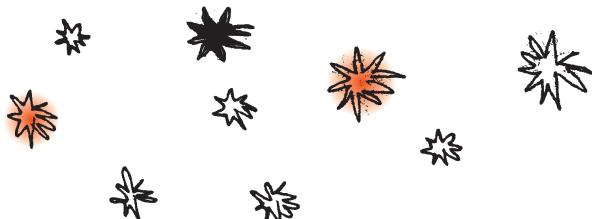
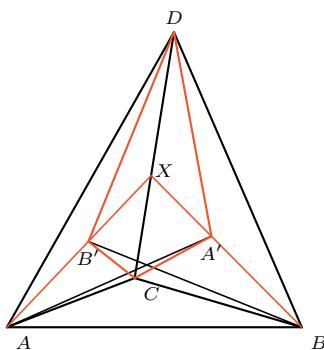


## Rozwiązań zadania M 1809.

Z warunków zadania wynika, że punkty  $A, A', B, B'$  leżą w tej samej płaszczyźnie, zatem proste  $BA'$  i  $AB'$  przecinają krawędź  $CD$  w jednym punkcie  $X$ . Z równością kątów wynika, że proste te są dwusiecznymi kątów, odpowiednio,  $CA'D, CB'D$ . Zatem z twierdzenia o dwusiecznej dostajemy

$$\frac{CA'}{A'D} = \frac{CX}{XD} = \frac{CB'}{B'D},$$

a ponieważ  $\angle CA'D = \angle CB'D = 120^\circ$ , trójkąty  $CA'D$  i  $CB'D$  są podobne. Ponieważ  $CD$  jest wspólnym bokiem tych trójkątów, są one przystające. Oczywiście w tych przystających trójkątach odpowiadające im wysokości z wierzchołków  $A'$  i  $B'$  są równe.



## Rozwiązań zadania F 1113.

Skorzystamy z praw: zachowania energii i momentu pędu. W perihelium i w aphelium prędkość planety jest prostopadła do odcinka łączącego środek planety ze środkiem Słońca. Oznaczmy prędkości w aphelium i w perihelium, odpowiednio, jako  $v_A$  i  $v_a$ . Mamy:

$$L = mA v_A = m a v_a,$$

czyli:  $v_A = L/(mA)$  i  $v_a = L/(ma)$ , oraz

$$-\frac{GMm}{A} + \frac{mv_A^2}{2} = -\frac{GMm}{a} + \frac{mv_a^2}{2}.$$

Po skorzystaniu ze związków prędkości z momentem pędu otrzymujemy równanie:

$$-\frac{GMm}{A} + \frac{L^2}{2mA^2} = -\frac{GMm}{a} + \frac{L^2}{2ma^2}.$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy odpowiedź:

$$L = m \sqrt{\frac{2GMAa}{A+a}}.$$



## Rozwiązań zadania F 1114.

Zmianom ciśnienia towarzyszą zmiany prędkości światła w cieczy. W związku z tym kolejne zgęszczenia i rozrzedzenia cieczy wywołane falą akustyczną będą działały jak szczeliny siatki dyfrakcyjnej. Przyjmijmy, że stojąca fala ultradźwiękowa wzbudzana jest w kierunku  $x$ . Przesunięcia cząstek cieczy w kierunku  $x$  (dźwięk to fala podłużna) opisywane są wówczas wzorem (suma dwóch fal biegących o przeciwnych zwrotach wektorów falowych):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t + kx)) \\ &= 2u_0 \cos(\omega t) \sin(kx). \end{aligned}$$

W powyższych wzorach  $k = 2\pi/\Lambda$  oznacza długość wektora falowego, a  $\omega$  kołową częstość fali. Zbadajmy rozkład prędkości:

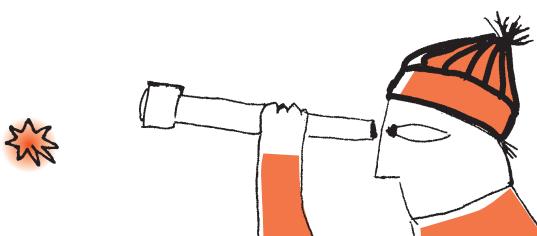
$$v(x, t) = -2u_0\omega \sin(\omega t) \sin(kx).$$

Węzły fali ( $v(x, t) = 0$ ) pojawiają się w punktach, dla których  $kx = n\pi$  dla całkowitych  $n$ . Nie wszystkie te węzły są równoważne, bo jeśli przyjmiemy, że  $-2u_0\omega \sin(\omega t) > 0$ , to w węzłach odpowiadających nieparzystym  $n$  cząstki z obu stron poruszają się w kierunku węzła (zmiana znaku  $v$  z dodatniego na ujemny), a w węzłach o parzystym  $n$  oddalają się. Odległość kolejnych rozrzedzeń cieczy („szczelin” siatki) wynosi więc  $\Lambda$  i jest taka sama jak w przypadku rozpraszania na fali biegącej. Kolejne prążki interferencyjne pojawiają się więc pod kątem  $\alpha$  do wiązki padającej spełniającymi warunek:

$$\Lambda \sin(\alpha) = m\lambda$$

z całkowitymi wartościami  $m$ .

Uwaga: Częstości ultradźwięków, rzędu MHz, są tak małe w porównaniu z częstościami fal świetlnych, że światło rozprasza się na fali ultradźwiękowej jak na nieruchomej siatce dyfrakcyjnej.





## Symetria śródkowa

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Na razie pozostajemy na płaszczyźnie – o symetrii śródkowej w trzech wymiarach napiszę w innym odcinku.

*Symetria śródkowa* na płaszczyźnie  $\Pi$ , względem pewnego punktu  $K$ , jest przekształceniem geometrycznym  $S_K : \Pi \rightarrow \Pi$  o następującej własności: jeśli  $Y = S_K(X)$ , to  $\overrightarrow{KY} = \overrightarrow{KK}$ . Inaczej mówiąc, punkt  $K$  jest środkiem odcinka  $XY$  (również tego zdegenerowanego do punktu).

Dwukrotne złożenie tej samej symetrii śródkowej jest identycznością na całej płaszczyźnie, więc przekształcenie to jest *inwolucją*. W szczególności wynika z tego, że symetria śródkowa jest bijekcją.

Mówimy, że figura  $\mathcal{F}$  ma *środek symetrii*  $K$  (lub że jest *śródkowosymetryczna*), jeśli spełnia następujący warunek: jeżeli  $X \in \mathcal{F}$ , to  $S_K(X) \in \mathcal{F}$ . Inaczej – punkty figury  $\mathcal{F}$  można podzielić na rozłączne każda z każdą pary  $(X, Y)$ , o tej własności, że punkt  $K$  jest zawsze środkiem odcinka  $XY$ . Przykładami figur śródkowosymetrycznych są: odcinek, prosta, pas (część płaszczyzny pomiędzy parą prostych równoległych), okrąg i parzystokąt foremny.

**Twierdzenie.** Niech  $\mathcal{F}_1$  i  $\mathcal{F}_2$  będą figurami ze środkami symetrii, odpowiednio,  $K_1$  i  $K_2$  (jeśli środków symetrii jest więcej, to ustalamy dowolnie jeden z nich). Jeśli zachodzi co najmniej jeden z warunków:

- (1)  $K_1 = K_2$  lub
- (2)  $\mathcal{F}_2$  jest obrazem  $\mathcal{F}_1$  w przesunięciu o  $\overrightarrow{K_1 K_2}$ ,

to figury  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  oraz  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  (o ile jest niepusta) mają środek symetrii, który jest środkiem odcinka  $K_1 K_2$ .

**Dowód (1).** Niech  $K_1 = K_2 = K$ . Niech  $X \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  oraz  $Y = S_K(X)$ . Z definicji figury śródkowosymetrycznej mamy  $Y \in \mathcal{F}_1$  lub  $Y \in \mathcal{F}_2$ , więc  $Y \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ . Przypadek „ $\cap$ ” jest analogiczny.

**Dowód (2).** Przeprowadzimy dowód dla części wspólnej; w przypadku sumy jest podobnie. Niech  $X \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  oraz  $Y = S_K(X)$ , przy czym  $K$  jest środkiem odcinka  $K_1 K_2$ . Położmy  $Y_1 = S_{K_1}(X)$  oraz  $Y_2 = S_{K_2}(X)$ .

### Zadania

- z poznanych mi prostymi zadaniemi.
4. Niech  $K$  będzie środkiem prostego  $CD$ . Analogiczne jest prostego  $p$  w symetrii  $S_K$  jest symetralna rozwiniętością  $PQRS$ . Obrazem rozwiniętością  $PQRS$  jest prosty  $AB$ .
3. Udowodnić, że punkt symetryczny do  $B$  względem  $A$  leży jednoznacznie na  $AB$ .
2. Udowodnić, że punkt symetryczny do  $C$  względem dzwiwicy punktów  $A$  i  $B$  leży jednoznacznie na  $AB$ .
1. Określając ośrodek symetrii śródkowej, o której mowa w zadaniu 2, udowodnić, że istnieje dokładnie jeden punkt, który rzutami prostokątnymi na proste  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  są  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Wykazać, że istnieje analogiczny punkt  $P_2$  dla  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ .
2. Okręgi  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , o różnych promieniach, styczne w punkcie  $A$ . Okrąg  $\omega_3$ , o środku  $O \in \omega_1$ , jest styczny wewnętrznie do okręgu  $\omega_1$  w punkcie  $B$ . Udowodnić, że prosta  $AB$  przechodzi przez jeden z punktów przecięcia okręgów  $\omega_2$  i  $\omega_3$ .
3. Czworokąt  $ABCD$  wpisany jest w okrąg. Punkty  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  są środkami odcinków, odpowiednio,  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ . Prosta  $p$  przechodzi przez punkt  $P$  i jest prostopadła do  $CD$ ; analogicznie definiujemy proste  $q$ ,  $r$ ,  $s$ . Udowodnić, że te cztery proste przecinają się w jednym punkcie.
4. Wskażowiaki do zadania 1.
5. Te proste są odrzucanymi prostymi  $CM$ ,  $DN$ ,  $AM$ ,  $DM$  w symetrii względem środkowej rozwiniętości  $A_1P_1$ , będącej prostą rozwiniętą śródkową  $AB$ .
6. Rozwiążyc symetrię śródkową względem prostego  $AB$ , w której jest ośrodkiem  $M$ .

Odcinek  $KK_2$  jest linią śródkową w trójkącie  $XY_2$ , więc  $\overrightarrow{YY_2} = \overrightarrow{KK_2} = \overrightarrow{K_1 K_2}$ . Wiemy, że  $Y_2 \in \mathcal{F}_2$ , a więc z poprzedniej równości wynika, że  $Y \in \mathcal{F}_1$ , bo  $\mathcal{F}_2$  jest translacją  $\mathcal{F}_1$  o  $\overrightarrow{K_1 K_2}$ . Analogicznie dowodzimy, że  $Y \in \mathcal{F}_2$ .

Za pomocą tego twierdzenia można uzasadnić, że środek symetrii mają: równoleglobok (część wspólna dwóch pasów o wspólnym środku), część wspólna lub suma dwóch kół o jednakowym promieniu, dowolna para prostych...

Jako przykład rozwiążemy zadanie pochodzące z bieżącej Olimpiady Matematycznej.

**Zadanie.** Okręgi  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  o różnych promieniach przecinają się w punktach  $A$ ,  $B$ . Punkty  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym  $C$  i  $E$  leżą na  $\omega_1$ , a  $D$  i  $F$  – na  $\omega_2$ . Symetalne odcinki  $CD$  i  $EF$  przecinają prostą  $AB$ , odpowiednio, w punktach  $X$  i  $Y$ . Dowieść, że  $|AX| = |BY|$ .

**Rozwiązanie.** Oznaczmy środek odcinka  $AB$  przez  $K$ . Niech  $\ell_1$  będzie prostą  $CD$ , a  $\ell_2$  prostą śródkowosymetryczną do  $\ell$  względem punktu  $K$ . Z twierdzenia wynika, że punkt  $K$  jest środkiem symetrii figury  $\ell_1 \cup \ell_2 \cup \omega_1 \cup \omega_2$ . Punkty  $C'$ ,  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$ , w których prosta  $\ell'$  przecina dane okręgi, są obrazami punktów, odpowiednio,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  w symetrii  $S_K$ . Czworokąt  $EFC'D'$  jest trapezem równoramiennym (dlaczego?), więc symetralna odcinka  $C'D'$  i symetralna odcinka  $EF$  to ta sama prosta. Jej obrazem w  $S_K$  jest symetralna odcinka  $CD$ , z czego wynika teza.

**Polecamy na ferie:**  
**Nowa strona Delty**  
**Pełne archiwum 50 lat!**  
**600 numerów!**  
**8 000 artykułów!**



[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)