Zadania dodatkowe

Termin: wrzesień

Zadanie 1. Za pomocą cyfr $2, 0, 2, 4$ w podanej kolejności połączonych znakami i symbolami matematycznymi utworzyć liczby od 1 do 20 (chętni mogą ciągnąć tę listę dalej... np. do 50).
Na przykład: $0 = 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 4$, $\quad 5 = 2^{0 \cdot 2} + 4$, $\quad 31 = -2^0 + \log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} 4$.

Zadanie 2. Rozważmy bardo cienką powierzchnię np. chusteczkę[1] o grubości $0,1$ mm. Składamy ją na pół (ma grubość $0,2$ mm), znowu na pół (ma grubość $0,4$ mm), i tak składamy ją na pół łącznie 40 razy. Jakiej wysokości (grubości) będzie ten stosik?

Zadanie 3. Rozważmy nieskończoną sumę $\frac{C_1}{\pi} + \frac{C_2}{\pi^2} + \frac{C_3}{\pi^3} + \frac{C_4}{\pi^4} + \ldots$, gdzie C_n oznacza n-tą cyfrę po przecinku[2] liczby π. Wykaż, że suma ta jest skończona (tzn. jest równa pewnej liczbie rzeczywistej).

Zadanie 4. Oblicz najmniejszą wartość wyrażenia: $x^{2024} + \frac{2024}{x}$ dla $x \in \mathbb{R}_+$.

Zadanie 5. Niech dane będzie równanie $x^3 + 2ax + b = 0$ (a, b – dane). Wykaż, że jeśli x_0 spełnia to równanie, to $x_0 b \leqslant a^2$.

Termin: październik

Zadanie 6. Udowodnij, że istnieje tylko jeden zbiór pusty.

Zadanie 7. Rozważmy listę, która zawiera 2024 ponumerowane kolejno zdania. Zdanie n-te ma postać:

„Dokładnie n zdań na tej liście jest fałszywych."

Ile zdań jest prawdziwych i które?

Zadanie 8. Niech dany będzie zbiór $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$. Które liczby ze zbioru A spełniają implikację:

Jeżeli n jest parzysta, to n jest podzielna przez 4.

Zadanie 9. Znajdź wszystkie liczby **niewymierne** a, dla których $a^2 - 44a$ oraz $a^3 - 2015a$ są **wymierne**.

Zadanie 10. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniające warunki: $a + b + c + d > 0$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd > 0$. $abc + abd + acd + bcd > 0$, $abcd > 0$. Wykaż, że każda z liczb a, b, c, d jest dodatnia.

[1] Jeśli ktoś uważa, że chusteczka jest za mała, by złożyć ją aż 40 razy, może wyobrazić sobie ogromną płachtę rozłożoną na bardzo dużym polu.

[2] Mowa oczywiście o standardowym rozwinięciu w systemie dziesiętnym tzn. $\pi = 3,1415926\ldots$.

Rozwiązanie 1.

$1 = (2+0+2) : 4$
$2 = -2+0+2+\sqrt{4}$
$3 = -2^0+2+\sqrt{4}$
$4 = 2+0+\log_2 4$
$5 = 2^0+2+\sqrt{4}$
$6 = 2+0^2+4$
$7 = -2^0+2\cdot 4$
$8 = 2+0+2+4$
$9 = 2^0+2\cdot 4$
$10 = 2+0+2\cdot 4$
$11 = 2+0!+2\cdot 4$
$12 = (2^0+2)\cdot 4$
$13 = -2-0!+2^4$
$14 = -2+0+\log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} 4$
$15 = -2^0+2^4$
$16 = \left(2^{0+2}\right)^{\sqrt{4}}$
$17 = 2^0+2^4$
$18 = 2+0+2^4$
$19 = -(2+0!+2)+4!$
$20 = -2+0-2+4!$

Rozwiązanie 2. Początkowa grubość to $0,2$ mm. Każde złożenie na pół podwaja grubość stosiku. Czynność tę wykonujemy 40 razy, więc końcowa wysokość to $0,1\cdot 2^{40}$ mm $= 109\,951\,162777,6$ mm ≈ 110 tys. km (!). Jest to prawie trzykrotnie więcej niż obwód Ziemi.
Osoby znające ciągi odnajdą w tym zadaniu ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 0,1$ i ilorazie $q = 2$.

Rozwiązanie 3. Skoro C_n, to n-ta cyfra, to maksymalnie wynosi ona 9. Zachodzi więc poniższe oszacowanie:

$$\frac{C_1}{\pi}+\frac{C_2}{\pi^2}+\frac{C_3}{\pi^3}+\frac{C_4}{\pi^4}+\ldots < \frac{9}{\pi}+\frac{9}{\pi^2}+\frac{9}{\pi^3}+\frac{9}{\pi^4}+\ldots.$$

Ale tę sumę umiemy policzyć – jest to suma szeregu geometrycznego $\left(a_1 = \frac{9}{\pi},\ q = \frac{1}{\pi}\right)$. Wynosi zatem

$S = \dfrac{\frac{9}{\pi}}{1-\frac{1}{\pi}} = \dfrac{9}{\pi-1} (\approx 4,2)$. Szukana suma jest mniejsza niż S, a więc skończona.

Rozwiązanie 4.
Sposób I
Pod koniec klasy 3 poznaje się rachunek różniczkowy (pochodne) i wtedy można to zadanie rozwiązać „schematycznie" jako jedno z wielu zadań typu: „Oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji f w podanym przedziale".
Szkic: Szukamy za pomocą pochodnych ekstremów lokalnych wewnątrz przedziału, liczymy granice na krańcach przedziału, podajemy wartość największą i najmniejszą (jeśli istnieją).

Sposób II

Zauważmy, że $x^{2024}+\frac{2024}{x} = x^{2024}+\overbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x}}^{2024}$, a więc z nierówności między średnimi $(A-G)$:

$$\frac{x^{2024}+\frac{2024}{x}}{2025} \geqslant \sqrt[2025]{x^{2024}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{2024}} = 1,$$

czyli omawiane wyrażenie jest $\geqslant 2025$. Równość zachodzi, gdy wszystkie składniki są równe tzn. $x^{2024} = \frac{1}{x}$, czyli gdy $x = 1$. Wtedy wartość wyrażenia wynosi $1^{2024}+\dfrac{2024}{1} = 2025$.

Rozwiązanie 5.
Sposób I - pomysłowy
Skoro x_0 spełnia równanie, to: $x_0^3+2ax_0+b = 0$, co możemy „sprytnie" zapisać $x_0x_0^2+2ax_0+b = 0\,(\star)$.

- Jeśli $x_0 = 0$, to $b = 0$, a więc nierówność $x_0b \leqslant a^2$ jest prawdziwa.
- Jeśli $x_0 \neq 0$, to równanie $(\star)$ oznacza, że liczba x_0 jest pierwiastkiem równania kwadratowego $x_0x^2+2ax+b = 0$, w szczególności $\Delta \geqslant 0$. A więc $4a^2-4x_0b \geqslant 0$, co po przekształceniu daje $x_0b \leqslant a^2$.
  Zadanie to pochodzi z 17. Olimpiady Matematycznej, z pierwszego etapu.

Sposób II
Skoro x_0 spełnia równanie, to: $x_0^3+2ax_0+b = 0$, skąd $b = -x_0^3-2ax_0$.
Przekształcając równoważnie tezę mamy:

$$x_0b \leqslant a^2$$
$$-x_0^4-2ax_0 \leqslant a^2$$

$$x_0^4 + 2ax_0^2 + a^2 \geqslant 0$$
$$(a + x_0^2) \leqslant 0$$

co jest prawdą, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

$\mathbb{P}$iotr $\mathbb{B}$ury