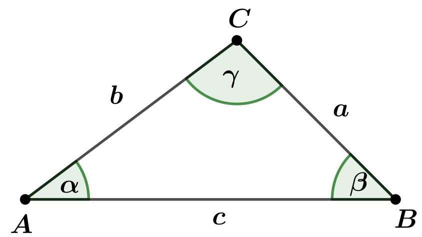
Geometria trójkąta



Twierdzenie (sinusów (Snelliusa))**.**
Z: a, b, c – boki trójkąta; α, β, γ – kąty trójkąta
T: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$

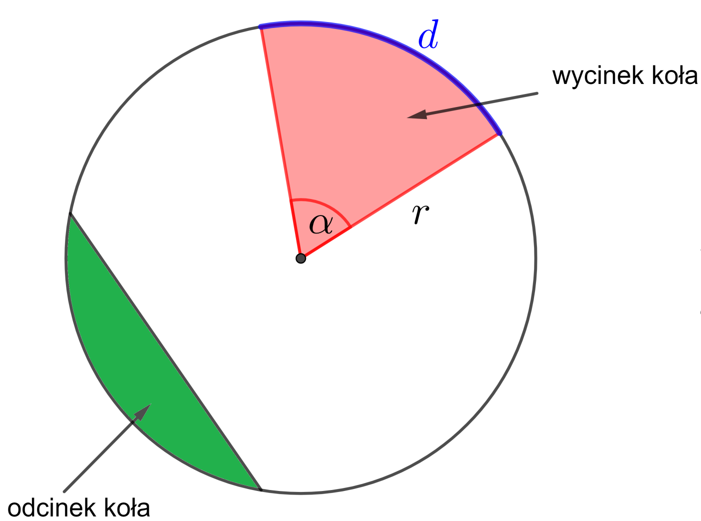
Twierdzenie (cosinusów (Carnota))**.**
Z: a, b, c – boki trójkąta; α, β, γ – kąty trójkąta
T: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Twierdzenie (wzory na pole trójkąta)**.**

1) $P = \frac{1}{2}a \cdot h_a$
2) $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$
3) $P = pr$, gdzie p to połowa obwodu
4) $P = \dfrac{abc}{4R}$
5) $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie p to połowa obwodu **(Wzór Herona)**

Twierdzenie.
Stosunek pól figur podobnych równa się kwadratowi skali podobieństwa.

Twierdzenie.



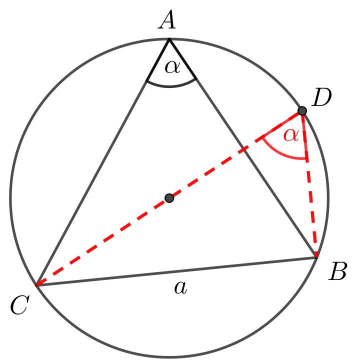
$P_w = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$ – pole wycinka

$d = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$ – długość łuku

Dowody

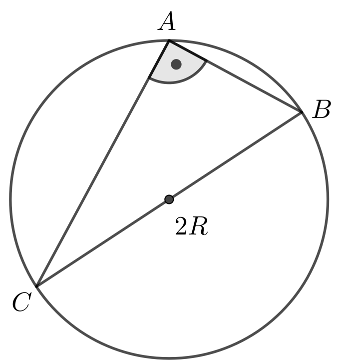
Tw. sinusów.

I przypadek ($\triangle$ ostrokątny)



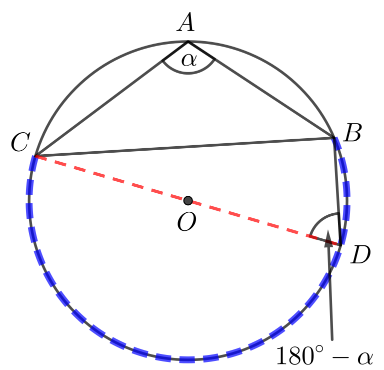
Dorysujmy średnicę CD. Wtedy $|\sphericalangle CDB| = \alpha$ (bo kąty wpisane). Wtedy też $|\sphericalangle CBD| = 90^\circ$ (bo oparty na średnicy). Zatem $\sin\alpha = \frac{|CB|}{|CD|} = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R\sin\alpha = a \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = 2R.$

II przypadek ($\triangle$ prostokątny)



$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \sin\alpha = 1$
Wtedy $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{1} = a = 2R.$

III przypadek ($\triangle$ rozwartokątny)



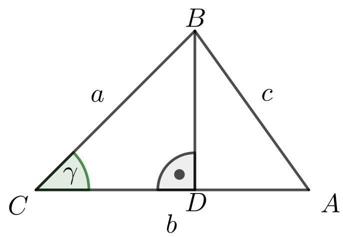
Dorysujmy średnicę CD. Zauważmy, że kąt wklęsły COB ma miarę 2α (środkowy oparty na tym samym łuku), więc kąt wypukły COB ma miarę $360^\circ - 2\alpha$. Zatem $|\sphericalangle CDB| = 180^\circ - \alpha$ (bo wpisany – połowa $|\sphericalangle COB|$). $\triangle CDB$ jest prostokątny ($|\sphericalangle B| = 90^\circ$), więc $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{a}{2R} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = 2R.$

Analogicznie pokazujemy równości $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$ oraz $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$

$\square$

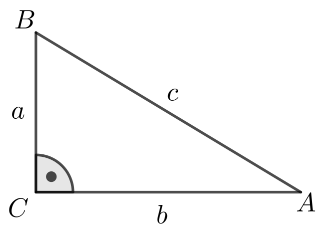
$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

I przypadek (kąt γ ostry)



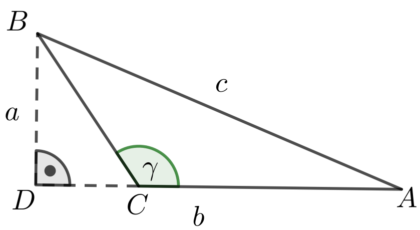
Prowadzimy wysokość BD.
Wtedy $\sin\gamma = \dfrac{|BD|}{a} \Rightarrow |BD| = a\sin\gamma$.
Wtedy $P = \frac{1}{2}\cdot b \cdot |BD| = \frac{1}{2}ba\sin\gamma$.

II przypadek (kąt γ prosty)



Wtedy $\sin\gamma = 1$, więc
$P = \dfrac{ab}{2} = \frac{1}{2}ab\cdot 1 = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

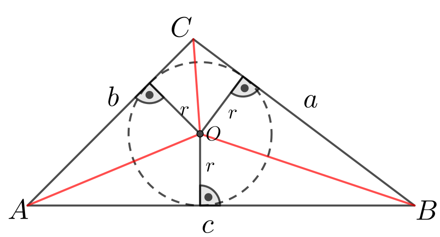
III przypadek (kąt γ rozwarty) $\square$



Prowadzimy wysokość BD.
Wtedy $|\sphericalangle DCB| = 180^\circ - \gamma$.
Zatem $\sin(180^\circ - \gamma) = \dfrac{|BD|}{a} \Rightarrow |BD| = a\sin(180^\circ - \gamma)$.
Wtedy $P = \frac{1}{2}\cdot b\cdot |BD| = \frac{1}{2}ba\sin(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

$P = pr$.

$\square$



$P_\triangle = P_{\triangle AOC} + P_{\triangle COB} + P_{\triangle BOA} = \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}cr =$
$= \frac{1}{2}r(b+a+c) = \dfrac{a+b+c}{2}\cdot r = pr$

$P = \frac{abc}{4R}$.
z tw. sinusów: $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R \Rightarrow c = 2R\sin\gamma \Rightarrow \sin\gamma = \dfrac{c}{2R}$.
Wstawiając do wzoru (2)otrzymujemy: $P = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \dfrac{1}{2}ab\cdot\dfrac{c}{2R} = \dfrac{abc}{4R}$. $\square$