

Część II: Rachunek różniczkowy

- **Zadanie 0.** Czy tangens jest funkcją ciągłą? Znać odpowiedź wraz z uzasadnieniem.

Zadanie 1. Podać przykład, że założenie o ciągłości przy twierdzeniu Darboux jest konieczne i bez niego teza nie zachodzi.

Zadanie 2. Podać przykład funkcji, która jest nieciągła w nieskończenie wielu punktach (rysunek, opis lub wzór).

Zadanie 3. Udowodnić tw. Rolle'a.

- **Zadanie 4.** Udowodnić tw. Lagrange'a.

Wskazówka: Skorzystać z tw. Rolle'a dla funkcji $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Zadanie 5. Pewien uczeń II LO w Krakowie wybrał się na wycieczkę w góry. Rozpoczął wejście równo o godzinie 6 : 00 u podnóża, a na szczyt dotarł o godz. 17 : 00. Noc spędził na szczycie w schronisku i następnego dnia z samego rana o 6 : 00 zaczął schodzić dokładnie tą samą trasą. Dotarł na dół o 17 : 00. Udowodnić, że istnieje taki punkt na trasie, w którym uczeń był w oba dni o dokładnie tej samej godzinie.

- ★ **Zadanie 6.** Liczby x_1, x_2, \dots, x_n są z przedziału $[0, 1]$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $a \in [0, 1]$, że
- $$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - a| = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 7. Wielomian $W(x)$ stopnia n ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że wtedy wielomian $W'(x)$ ma $n - 1$ różnych pierwiastków rzeczywistych.

Zadanie 8 (o koniach wyścigowych). Udowodnić, że jeśli f, g to funkcje ciągłe w $[a, b]$ oraz różniczkowalne w (a, b) oraz $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, to istnieje $c \in (a, b)$, taki że $f'(c) = g'(c)$.

Interpretacja fizyczna: Jeśli dwa konie wspólnie wystartowały i dobiegły do mety razem, to istniał po drodze moment, gdy biegły z tą samą prędkością¹.

- **Zadanie 9.** Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji Dirichleta:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Zadanie 10. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji f danej wzorem: $f(x) = xD(x)$, gdzie D jest funkcją Dirichleta.

- **Zadanie 11.** Czy istnieje funkcja o dziedzinie \mathbb{R} , ciągła w każdym punkcie, ale nieróżniczkowalna w żadnym punkcie? Jak dużo jest takich funkcji?

Zadanie 12. Obliczyć granice stosując regułę de l'Hospitala:

► a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{x+1} - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x^2 - x - 12}$

► f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^x}{x^3}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$

► k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2)^{\sin x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin^3 x}$

l) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

¹Funkcje f, g możemy traktować jako przebytą drogę (odpowiednio dla poszczególnych koni) w zależności od upływającego czasu. Są to oczywiście funkcje ciągłe i różniczkowalne. Równość $f(a) = g(a)$ oraz $f(b) = g(b)$ oznacza, że na konie razem wystartowały i razem ukończyły bieg. Z lekcji fizyki wiemy, że pochodną drogi po czasie jest prędkość, a więc równość z tezy oznacza, że istnieje taki moment, gdy prędkość konia pierwszego była równa prędkości konia drugiego.