ZGODNE z CKE

2023
2024

ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

Nowa teraz matura

- nowe typy zadań maturalnych
- optymalna liczba zadań
- zadania CKE
- zestawy maturalne
- odpowiedzi i modele rozwiązań

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

nowa era

Wojciech Babiański
Krzysztof Rosołek

Nowa teraz matura

MATEMATYKA
Poziom rozszerzony

ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

nowa era Twoje mocne strony

Spis treści

Co znajdziesz w Zbiorze zadań maturalnych?

Zbiór zadań maturalnych „NOWA Teraz matura. Matematyka. Poziom rozszerzony" zapewnia kompletny trening rozwiązywania zadań dostosowany do wymagań egzaminacyjnych CKE na lata 2023 i 2024. Umożliwia ćwiczenie różnego typu zadań maturalnych i pracę z zestawami maturalnymi. Optymalny dobór i liczba zadań gwarantują bardzo dobre przygotowanie do egzaminu z matematyki na obu poziomach. Wszystkie rozwiązania zadań umieszczamy pod kodami QR – dzięki nim szybko sprawdzisz, jak rozwiązać zadanie, które sprawia ci problem. Część rozwiązań prezentujemy w postaci filmowej. Liczne odsyłacze do innych stron zbioru, innych publikacji czy zasobów cyfrowych ułatwiają poruszanie się po zbiorze oraz korzystanie z zasobów cyfrowych.

Poniższa tabela przedstawia poszczególne elementy układu treści w zbiorze, a także stosowane w nim oznaczenia.

Na początku publikacji znajdziesz kod dostępu do aplikacji app.nowaterazmatura.pl. Zarejestruj się tam, aktywuj kod i korzystaj z zasobów cyfrowych do serii „NOWA Teraz matura". Skanuj kody QR podczas pracy na urządzeniach mobilnych lub wpisuj kody literowo-cyfrowe do aplikacji podczas pracy przy komputerze.

3. Funkcja kwadratowa

Funkcją kwadratową lub **trójmianem kwadratowym**
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Każdy dział pierwszej części zbioru zaczyna się od zwięzłego wstępu teoretycznego. Treści teoretyczne umieszczono na niebieskim tle.

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

Zadania w dziale są podzielone na trzy zestawy. W zestawie A znajdują się zadania ćwiczeniowe, często z kilkoma podpunktami, umożliwiające powtórzenie materiału.

Zestaw B. Przed maturą na poziomie podstawowym

Zestaw B zawiera głównie zadania zamknięte, które wystąpią tylko na egzaminie na poziomie podstawowym. Egzamin w nowej formule przewiduje dużą różnorodność takich zadań. Oprócz zadań wielokrotnego wyboru znajdą się tam również zadania typu prawda/fałsz, zadania na dobieranie i inne.

Zestaw C. Przed maturą na poziomie rozszerzonym

Zestaw C to wyłącznie zadania otwarte. Tylko taki rodzaj zadań wystąpi na egzaminie na poziomie rozszerzonym. Ich rozwiązanie wymaga często złożonych i kilkuetapowych działań. W tym zestawie umieszczamy także zadania typu wiązka – jest to grupa zadań otwartych powiązanych ze sobą tematycznie.

CKE maj 2021 PP
CKE maj 2021 PR

Oznaczenie zadania, które wystąpiło na maturze w poprzednich latach i pasuje także do obecnych wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego (PP) lub dla poziomu rozszerzonego (PR).

CKE Informator 2021 PP
CKE Informator 2021 PR

Oznaczenie zadania, które wystąpiło w materiałach CKE dotyczących nowej matury, czyli egzaminu w formule od 2023 r. na poziomie podstawowym (PP) lub na poziomie rozszerzonym (PR).

Wzory matematyczne CKE
nowa.terazmatura.pl

Odnośnik do publikacji CKE „Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki", z której można korzystać podczas egzaminów na obu poziomach. Warto tę publikację wydrukować i zaglądać do niej systematycznie, by przyzwyczaić się do układu i zakresu prezentowanych w niej treści.

Film – rozwiązanie zadania

nowa.terazmatura.pl

16.

Film – rozwiązanie zadania

nowa.terazmatura.pl

35.

Niebieskim zaznaczeniem zostały wyróżnione numery wybranych zadań, reprezentatywnych dla działu. Tych kilka lub kilkanaście zadań musisz koniecznie rozwiązać, jeśli decydujesz się na szybką powtórkę. Do każdego takiego zadania jest dołączone rozwiązanie w postaci filmu.

Rozwiązania zadań z poziomu rozszerzonego prezentuje youtuber prowadzący kanał Matma z pasją.

Youtuber Miedziany Fsor prezentuje rozwiązania zadań z poziomu podstawowego.

Zestaw egzaminacyjny nr 1

W drugiej części zbioru znajduje się 5 zestawów maturalnych. Każdy z nich warto rozwiązać w 180 minut, bo tyle czasu będzie na każdym egzaminie.

Rozwiązania zadań

nowa.terazmatura.pl

Kody QR umieszczone w części *Odpowiedzi i modele rozwiązań* kierują do plików PDF z pełnymi rozwiązaniami **wszystkich** zadań.

→ **Odpowiedzi,** s. 242.

Odsyłacz do krótkich odpowiedzi, które znajdują się na końcu publikacji.

Zestaw A. – odpowiedzi
Zestaw B. – odpowiedzi
Zestaw C. – odpowiedzi

Trzecia część zbioru to *Odpowiedzi i modele rozwiązań*. Dzięki krótkim odpowiedziom można szybko sprawdzić końcowy wynik każdego zadania.

Zestaw C. – modele rozwiązań zadań otwartych

Modele rozwiązań zadań otwartych z zestawu C to skrótowe rozwiązania zadań podzielone na etapy. Możesz je porównać z własnymi pomysłami lub wykorzystać jako wskazówki.

$$p=\frac{x_1+x_2}{2}$$

Na marginesach znajdują się dopiski, które sugerują, że do rozwiązania zadania warto użyć kalkulatora (na maturze z matematyki można korzystać z kalkulatora prostego) lub skorzystać z podanego wzoru matematycznego.

Kratka na marginesie zachęca do robienia własnych notatek, dzięki którym zbiór nabiera indywidualnego charakteru.

V **Więcej – Vademecum PR** s. 84

Aby pogłębić wiadomości teoretyczne i znaleźć przykładowe zadania związane z danym zagadnieniem, warto sięgnąć po vademecum z serii „NOWA Teraz matura. Matematyka. Poziom rozszerzony". Układy treści zbioru zadań maturalnych i vademecum są ze sobą ściśle skorelowane.

A **Więcej – Arkusze maturalne PR**

Osiągnięcie najwyższej formy przed egzaminem zapewnią arkusze maturalne z serii „NOWA Teraz matura. Matematyka. Poziom rozszerzony". Pracę z arkuszami polecamy na zakończenie przygotowań do matury, gdy całość powtórzenia masz już za sobą.

3. Funkcja kwadratowa

Wzory matematyczne CKE
nowa.terazmatura.pl

Miejsce zerowe funkcji $y = f(x)$ to taki argument x, dla którego wartość tej funkcji jest równa zero: $f(x) = 0$.

Funkcją kwadratową lub **trójmianem kwadratowym** nazywamy funkcję:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

określoną dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie a, b, c są stałymi i $a \neq 0$.

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**.

Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ nazywamy liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$.

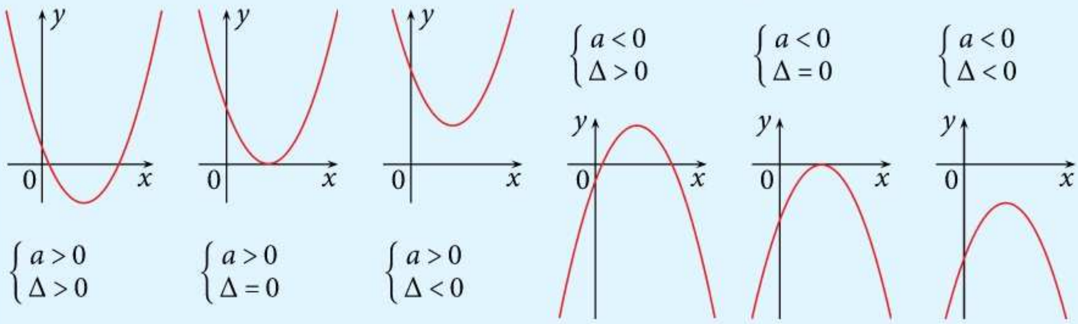
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

- Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa różne miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (nazywamy je **pierwiastkiem podwójnym**).
- Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych.

Położenie wykresu funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ względem osi x



Wzór funkcji kwadratowej

- Postać **ogólna**: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

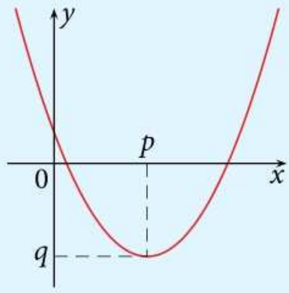
  Współrzędne wierzchołka paraboli:

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

- Postać **kanoniczna**: $y = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$.

  Współrzędne wierzchołka paraboli: (p, q), gdzie:

$$p = -\frac{b}{2a}, \qquad q = -\frac{\Delta}{4a}$$



- Postać **iloczynowa**:
  – jeśli $\Delta > 0$, to $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1 i x_2 są miejscami zerowymi;
  – jeśli $\Delta = 0$, to $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest miejscem zerowym;
  – jeśli $\Delta < 0$, to nie istnieje postać iloczynowa.

Wzory Viète'a

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2, to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

V Więcej – Vademecum PR s. 46

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

→ Odpowiedzi
s. 243

1. Podaj wzór funkcji f, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia paraboli o równaniu $y = x^2 + 4x - 5$ przez symetrię względem:

a) osi x, **b)** osi y, **c)** punktu $(0,0)$.

2. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $f(x) = 2x^2$, aby otrzymać wykres funkcji g?

a) $g(x) = 2x^2 - 2x + 4$ **b)** $g(x) = 2x^2 + 2x$ **c)** $g(x) = 2x^2 + 4x - 2$

3. Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = -x^2$ o wektor $\vec{u}$. Podaj wzór funkcji h, którą otrzymamy w wyniku przesunięcia wykresu funkcji g o wektor $\vec{u}$.

a) $g(x) = -(x+1)^2 - 6$ **b)** $g(x) = -x^2 - x$ **c)** $g(x) = -x^2 + 6x + 4$

4. Wykres funkcji f przesunięto o wektor $\vec{u}$. Naszkicuj wykres otrzymanej funkcji g i podaj jej wzór.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $\vec{u} = [1, 3]$ **b)** $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$, $\vec{u} = [-1, -2]$

5. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ w przedziale $[0;4]$.

Film – rozwiązanie zadania
nowa.terazmatura.pl

6. Dana jest funkcja $f(x) = mx^2 + (m-6)x + 8 - m$. Dla jakich wartości parametru m zbiór wartości tej funkcji jest równy $(-\infty; 18]$?

7. Dla jakich wartości parametru m:

a) wartość najmniejsza funkcji $f(x) = (3+m)x^2 - mx + m$ jest równa -3,

b) wartość największa funkcji $f(x) = (2-m)x^2 + mx + m - 4$ jest równa 2?

8. Dla jakich wartości parametru m najmniejsza wartość funkcji f należy do podanego przedziału?

a) $f(x) = x^2 + x + m^2 - m + \frac{1}{4}$, $[2;6]$ **b)** $f(x) = (m-1)x^2 + 3mx + 4 + 2m$, $(-\infty; 0)$

9. Wyznacz pierwiastki równania.

a) $x^2 - 1{,}07x + 0{,}24 = 0$ **c)** $8x^2 + 9{,}2x - 35{,}2 = 0$

b) $0{,}6x^2 + x - 18{,}85 = 0$ **d)** $2{,}4x^2 + 40{,}296x + 21{,}06 = 0$

10. Ile rozwiązań ma równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, jeżeli $a \neq 0$ oraz $a - b + 2c = 0$?

11. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (4-2m)x + m + 10 = 0$ ma dwa różne pierwiastki tego samego znaku?

Film – rozwiązanie zadania
nowa.terazmatura.pl

12. Dla jakich wartości parametru m równanie:

a) $(2-m)x^2 + (3-m)x + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne,

b) $mx^2 + (2m+1)x + m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

13. Wyznacz wartości b i c, dla których miejsca zerowe x_1 i x_2 funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ spełniają podane warunki.

a) $x_1 = 1, \; x_1x_2 = -2$

b) $x_1 = 2, \; x_1 + x_2 = 3$

c) $x_1x_2 = 6, \; x_1^2 + x_2^2 = 13$

d) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 4, \; \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = 10$

14. Wyznacz wartości parametru m, dla których dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 równania:

$$(4-m)x^2 + (m-4)x + 2 = 0$$

spełniają nierówność $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 1$.

15. a) Wyznacz wartości parametru m, dla których suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + (m+2)x + 3m - 2 = 0$ jest większa od 7.

b) Wyznacz wartości parametru m, dla których kwadrat sumy dwóch różnych pierwiastków równania $(4-m)x^2 + mx - m = 0$ jest większy od 1.

c) Wyznacz wartości parametru m, dla których suma odwrotności kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + 2mx - x - 1 = 0$ jest równa 3.

Film – rozwiązanie zadania

nowa.terazmatura.pl

16. Suma dwóch różnych miejsc zerowych funkcji kwadratowej f jest równa 4, a suma ich odwrotności jest równa $-\frac{1}{3}$. Wyznacz wzór tej funkcji, jeśli $f(0) = -12$.

17. Dla jakich wartości parametru m podana nierówność jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

a) $x^2 + (m+1)x + 3m > -3$

b) $(m+4)x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$

c) $-x^2 + (2+m)x - 2m - 1 \leqslant 0$

d) $(m^2-4)x^2 + 2mx < 1$

18. Rozwiąż równanie.

a) $4x^2 - \dfrac{6x+8}{3} = \dfrac{1}{3}(x+1)(2x-3)$

b) $\dfrac{(x-2)^2}{5} + \dfrac{x(x+3)}{10} = 0{,}3x(2x-1)$

c) $\dfrac{(1-3x)^2}{2} - \dfrac{x(4-x)}{3} = \dfrac{5}{6} + \dfrac{x+9}{2}$

d) $\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{(x+2)^2}{5} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{5} + x - 2$

19. Rozwiąż równanie.

a) $(x^2-9)\sqrt{x-2} = 0$ **b)** $\sqrt{4x-7} = x - 1$ **c)** $\sqrt{2x+5} - 1 = x$

20. Rozwiąż równanie.

a) $|x^2 - 6| = 2$ **b)** $|x^2 - 3x| = 2$ **c)** $x^2 + |x| - 12 = 0$

Film – rozwiązanie zadania

nowa.terazmatura.pl

21. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - |x| \leqslant 2$ **b)** $x^2 - 3|x+6| > 0$ **c)** $x^2 - |x-3| \geqslant 2x + 3$

22. Zależność wysokości h (w metrach), na jakiej znajduje się kamień rzucony pionowo w kierunku ziemi z wysokości h_0 z prędkością początkową v_0, od czasu t (w sekundach) opisuje funkcja $h(t) = h_0 - v_0t - 5t^2$. Opór powietrza pomijamy.

a) Oblicz, po jakim czasie kamień rzucony pionowo w dół z wysokości 100 m z prędkością początkową 5 m/s uderzy w ziemię.

b) Po jakim czasie kamień upuszczony swobodnie z wysokości 125 m uderzy w ziemię?

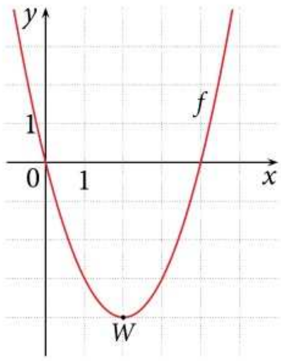
→ Odpowiedzi s. 243

Zestaw B. Przed maturą na poziomie podstawowym

W zadaniach 23–30 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Informacja do zadań 23–25

Na rysunku obok przedstawiony jest fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f. Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (2, -4)$. Liczby 0 i 4 to miejsca zerowe funkcji f.



23. (0–1) CKE maj 2019 PP

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

A. $(-\infty; 0]$ **B.** $[0; 4]$ **C.** $[-4; \infty)$ **D.** $[4; \infty)$

24. (0–1) CKE maj 2019 PP

Największa wartość funkcji f w przedziale $[1; 4]$ jest równa

A. -3 **B.** -4 **C.** 4 **D.** 0

25. (0–1) CKE maj 2019 PP

Osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu

A. $y = -4$ **B.** $x = -4$ **C.** $y = 2$ **D.** $x = 2$

26. (0–1) CKE maj 2018 PP

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x - 3$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych

A. $(-6, -3)$ **B.** $(-6, 69)$ **C.** $(3, -12)$ **D.** $(6, -3)$

27. (0–1)

Wierzchołek paraboli $y = x^2 + 4x$ leży na prostej danej równaniem

A. $y = -x$ **B.** $y = x$ **C.** $y = 2x$ **D.** $y = 4x$

28. (0–1) CKE maj 2021 PP

Funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = -2(x+1)(x-3)$ jest malejąca w przedziale

A. $[1; \infty)$ **B.** $(-\infty; 1]$ **C.** $(-\infty; -8)$ **D.** $[-8; \infty)$

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

29. (0–1) CKE maj 2020 PP

Równanie $x(x-2) = (x-2)^2$ w zbiorze liczb rzeczywistych

A. nie ma rozwiązań.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 2$.

C. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 0$.

D. ma dwa różne rozwiązania: $x = 1$ i $x = 2$.

30. (0–1)

Wskaż nierówność, którą spełnia każda liczba rzeczywista.

A. $6x^2 + x + 1 > 0$

B. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} > 0$

C. $x^2 - 100x + 25 \geqslant 0$

D. $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$

31. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = -x^2 - 4x + 1$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

31.1 (0–1)

Funkcja f jest rosnąca w przedziale

A. $(-\infty; -2]$ **B.** $(-\infty; -1]$ **C.** $(-\infty; 1]$ **D.** $[1; \infty)$

31.2 (0–1)

Funkcja f w postaci kanonicznej jest opisana wzorem

E. $f(x) = -(x-4)^2 + 1$ **G.** $f(x) = -(x-2)^2 + 1$

F. $f(x) = -(x+4)^2 + 5$ **H.** $f(x) = -(x+2)^2 + 5$

32. (0–2)

Liczba x_1 jest mniejszym pierwiastkiem równania $x^2 - 6x + 6 = 0$.

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczba $x_1 + a$ jest liczbą wymierną mniejszą od x_1 dla

A. $a = 1\frac{1}{2}$ **C.** $a = \sqrt{3} - 4$ **E.** $a = \sqrt{3}$ **G.** $a = 3 - \sqrt{3}$

B. $a = 3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$ **D.** $a = 3 - \frac{3}{4}\sqrt{3}$ **F.** $a = -\left(3 - \sqrt{3}\right)^2$ **H.** $a = \sqrt{3} - 6$

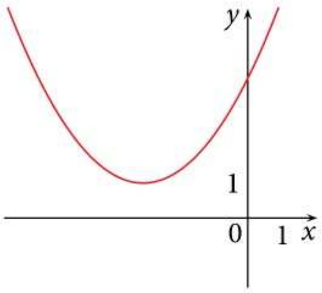
33. (0–2)

Dana jest funkcja $f(x) = -(x+3)^2 + 2$. Funkcje g i h są określone za pomocą funkcji f: $g(x) = f(-x) - 3$, $h(x) = -f(x) + 3$.

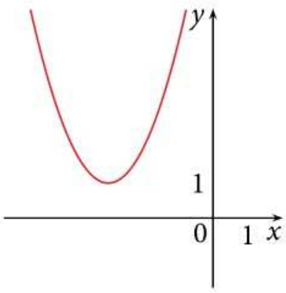
Każdej z funkcji f i g przyporządkuj jej wykres. Wpisz obok symboli funkcji w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–F.

Numer zadania	Funkcja	Rysunek
33.1	g	
33.2	h	

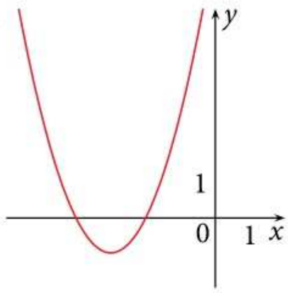
A.



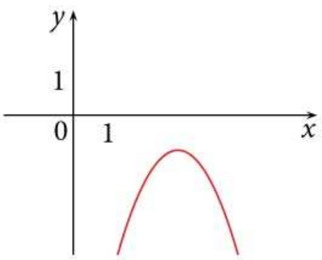
B.



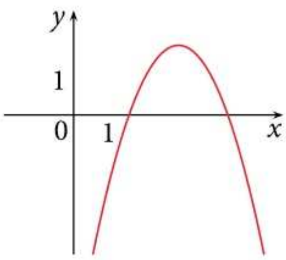
C.



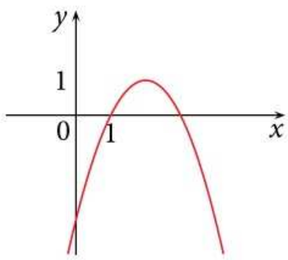
D.



E.



F.



34. (0–1)

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = \left(x - \sqrt{6}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Iloczyn miejsc zerowych tej funkcji jest równy $-3\sqrt{2}$.	**P**	**F**
Suma miejsc zerowych funkcji f jest równa $\sqrt{3}$.	**P**	**F**

Film – rozwiązanie zadania

nowa.terazmatura.pl

35. (0–1)

O funkcji kwadratowej f wiadomo, że przyjmuje wartości dodatnie tylko dla argumentów należących do przedziału $(-3;5)$ oraz że $f(1) = 6$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Osią symetrii wykresu tej funkcji jest prosta $x = 1$.	**P**	**F**
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[6;\infty)$.	**P**	**F**

36. (0–1)

Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$ są liczby -8 i 4.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

$f(x) = -\frac{1}{4}(x+8)(x-4)$

$b + c = 7$	**P**	**F**
Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie $(0,8)$.	**P**	**F**

37. (0–1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.
Iloczyn całkowitych rozwiązań nierówności $x(4-2x) \geqslant 0$ wynosi

A.	0,		**1.**	jej całkowitymi rozwiązaniami są liczby 0, 1, 2.
B.	1,	ponieważ	**2.**	jej całkowitym rozwiązaniem jest tylko liczba 1.
C.	2,		**3.**	jej całkowitymi rozwiązaniami są liczby 1, 2.

38. (0–1)

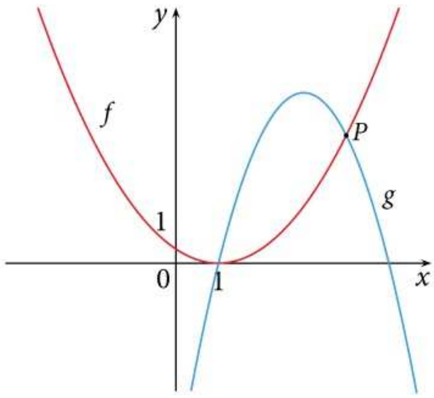
Wierzchołkiem paraboli opisanej równaniem $y = -(x - x_1)(x - x_2)$ jest punkt (x_w, y_w).
Liczby x_1 i x_2 spełniają warunki $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ oraz $|x_1| < |x_2|$.
Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.
Iloczyn $x_w y_w$ jest

A.	dodatni,		**1.**	$x_w > 0$ i $y_w < 0$.
B.	równy 0,	ponieważ	**2.**	$x_w < 0$ i $y_w > 0$.
C.	ujemny,		**3.**	$x_w = 0$.

39. Na rysunku obok przedstawiono fragmenty wykresów funkcji kwadratowych:

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2 \quad \text{i} \quad g(x) = -(x-1)(x-5)$$

Punkt $P = (4, 3)$ jest jednym z punktów wspólnych tych wykresów.



39.1 (0–1)

Wyznacz i zapisz w miejscu wykropkowanym zbiór wszystkich rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant g(x)$.

39.2 (0–1)

Wyznacz i zapisz w miejscu wykropkowanym maksymalny przedział, w którym funkcja g jest rosnąca.

39.3 (0–1)

Wyznacz i zapisz w miejscu wykropkowanym wartość wyrażenia $f(0) + g(0)$.

40. Dane są funkcje $f(x) = x^2$, $g(x) = f(x-2) - 3$ oraz $h(x) = f(x+2) + 1$.

40.1 (0–1)

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe. Wpisz odpowiednie przedziały w wykropkowanych miejscach.

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział , a funkcji h – przedział .

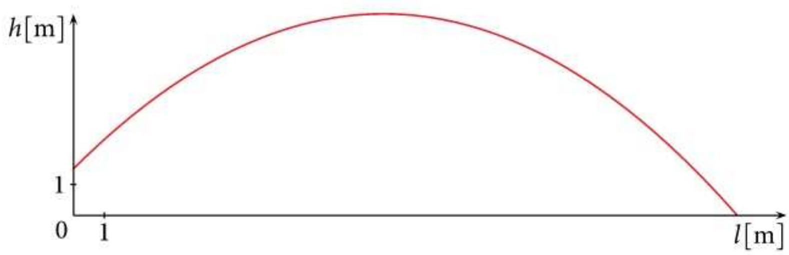
40.2 (0–1)

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe. Wpisz odpowiednie nazwy funkcji w wykropkowanych miejscach.

Funkcja nie ma miejsc zerowych, natomiast funkcja ma dwa miejsca zerowe.

41. (0–4)

Na rysunku przedstawiono tor lotu kuli pchniętej przez zawodnika podczas zawodów lekkoatletycznych (h oznacza wysokość, na której znajduje się kula, mierzoną od poziomu ziemi, a l – odległość kuli od brzegu koła, w którym stoi zawodnik). Tor lotu kuli jest fragmentem paraboli $h(l) = al^2 + bl + c$, której wierzchołek ma współrzędne $\left(10, 6\frac{1}{2}\right)$ i do której należy punkt $(0, 1\frac{1}{2})$.



a) Wyznacz równanie tej paraboli.

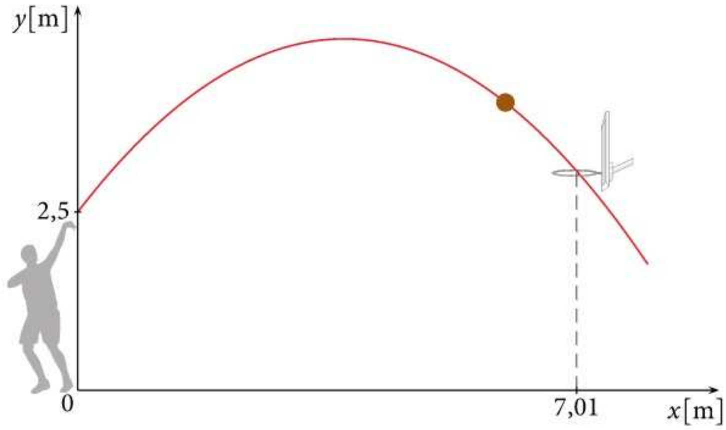
b) Czy zawodnik uzyskał wynik przekraczający 20 m? Odpowiedź uzasadnij.

42. CKE Informator 2021 PP

Na podstawie zasad dynamiki można udowodnić, że torem rzutu – przy pominięciu oporów powietrza – jest fragment paraboli. Koszykarz wykonał rzut do kosza z odległości $x_k = 7{,}01$ m, licząc od środka piłki do środka obręczy kosza w linii poziomej. Do opisu toru ruchu przyjmiemy układ współrzędnych, w którym środek piłki w chwili początkowej znajdował się w punkcie $x_0 = 0$, $y_0 = 2{,}50$ m. Środek piłki podczas rzutu poruszał się po paraboli danej równaniem:

$$y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$$

Rzut okazał się udany, a środek piłki przeszedł dokładnie przez środek kołowej obręczy kosza. Na rysunku poniżej przedstawiono tę sytuację oraz tor ruchu piłki w układzie współrzędnych.



42.1 (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obręcz kosza znajduje się na wysokości (podanej w zaokrągleniu z dokładnością do 0,01 m)

A. 3,04 m **B.** 3,06 m **C.** 3,80 m **D.** 4,93 m

42.2 (0–2)

Oblicz wysokość maksymalną, na jaką wzniesie się środek piłki podczas opisanego rzutu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

42.3 (0–3)

W opisanym rzucie piłka przeleciała swobodnie przez obręcz kosza i upadła na parkiet. Przyjmij, że obręcz kosza nie miała siatki, a na drodze rzutu nie było żadnej przeszkody. Promień piłki jest równy 0,12 m.

Oblicz współrzędną x punktu środka piłki w momencie, w którym piłka dotknęła parkietu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

43. (0–4)

Chłopiec stojący na balkonie rzucił pionowo do góry kauczukową piłeczkę. Wysokość h (w metrach), na której piłeczka znajdowała się nad ziemią, w zależności od czasu t (w sekundach) można opisać funkcją $h(t) = -5t^2 + 10t + 5$. Oblicz, jak długo piłeczka będzie się znajdowała nad ziemią na wysokości nie mniejszej niż 5 m. Na jaką maksymalną wysokość wzniesie się ta piłeczka? Pomiń wymiary piłeczki.

→ Odpowiedzi
s. 243

Zestaw C. Przed maturą na poziomie rozszerzonym

44. (0–4)
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |(x-p)^2 + 2p|$ dla $p = -2$. Dla jakich wartości parametru p równanie $f(x) = 6$ ma dokładnie trzy rozwiązania?

45. (0–4)
Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = (3-m)x^2 + mx - m$ przyjmuje wartości ujemne dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

Film – rozwiązanie zadania

nowa.terazmatura.pl

46. (0–4)
Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{(m-2)x^2 + (m-2)x + 1}$. Dla jakich wartości parametru m jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych?

47. (0–3)
Zapisz wzór funkcji f, która każdej liczbie $n \in \mathbb{N}_+$ przyporządkowuje największą liczbę całkowitą x spełniającą nierówność $x^2 - 2nx - 8n^2 < 0$.

48. (0–5)
Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{4}mx^2 + (m-1)x - m^2 + m + 1$. Wyznacz te wartości parametru m, dla których zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[1; \infty)$.

49. (0–3)
Wyznacz wzór funkcji $f(n) = x_1 + x_2$, gdzie x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $nx^2 - (n+2)x + n + 2 = 0$. Dla jakich $n \in \mathbb{Z}$ funkcja f przyjmuje wartości całkowite?

50. (0–4)
Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m+2)x + \frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m + 5 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których iloczyn i suma są liczbami przeciwnymi?

51. (0–4)
Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (2-m)x + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma kwadratów jest większa od 10?

52. (0–4)
Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m-1)x + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, z których jeden jest sinusem, a drugi – cosinusem tego samego kąta?

Film – rozwiązanie zadania

nowa.terazmatura.pl

53. (0–5)
Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m-4)x - 4m = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma kwadratów jest cztery razy większa od sumy tych pierwiastków?

54. (0–4)
Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + 2mx = 2x + m$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 2?

55. (0–4) CKE maj 2020 PR

Dane jest równanie kwadratowe $x^2 - (3m+2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$ z niewiadomą x. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których różne rozwiązania x_1 i x_2 tego równania istnieją i spełniają warunek $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$.

56. (0–5) CKE maj 2021 PR

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których trójmian kwadratowy:

$$4x^2 - 2(m+1)x + m$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0 \text{ oraz } x_1 + x_2 \leqslant \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

57. (0–6)

Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m+3)x^2 - 4mx + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest liczbą ujemną?

58. (0–6)

Dla jakich wartości parametru m trójmian kwadratowy $y = (m+1)x^2 + 2x - 4m + 1$ ma przynajmniej jeden pierwiastek dodatni?

59. (0–6)

Dla jakich wartości parametru m równanie $\frac{16}{m^2}x^2 - 6mx + m^2 = 0$ ma dwa rozwiązania, z których jedno jest sześcianem drugiego? Znajdź te rozwiązania.

60. (0–6)

Dla jakich wartości parametru m suma sześcianów pierwiastków równania:

$$x^2 + 3(m+1)x + 3m = 0$$

jest mniejsza od -27?

61. (0–6) CKE maj 2018 PR

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie:

$$x^2 + (m+1)x - m^2 + 1 = 0$$

ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 $(x_1 \neq x_2)$, spełniające warunek:

$$x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

62. (0–4) CKE Informator 2021 PR

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = px^2 + (p-1)x + 1 - 2p$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1.

63. (0–4)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = 2x^2 + px + 12$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wyznacz wartości parametru p, dla których funkcja f ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2, spełniające warunek $|x_1 - x_2| = 1$.

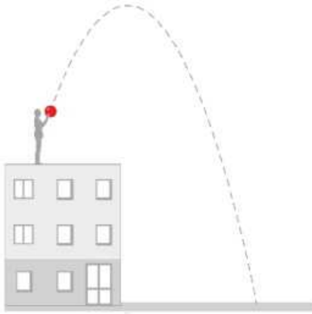
Film – rozwiązanie zadania

nowa.terazmatura.pl

64. (0–6)

Dla jakich wartości parametru m pierwiastkami równania $x^2 - 2mx - m^2 - 2m + 4 = 0$ są dwie różne liczby ujemne x_1 i x_2, spełniające warunek $|x_1 - x_2| = 4\sqrt{2}$?

65. Człowiek stojący na dachu budynku rzucił skośnie do góry kauczukową piłeczkę, która po pewnym czasie spadła na chodnik (patrz rysunek). Wysokość (w metrach), na jakiej znajdowała się piłeczka w czasie lotu, mierzoną od poziomu chodnika można opisać w zależności od czasu (w sekundach) funkcją kwadratową $h(t) = -1{,}6t^2 + 8t + 12$.



65.1 (0–2)

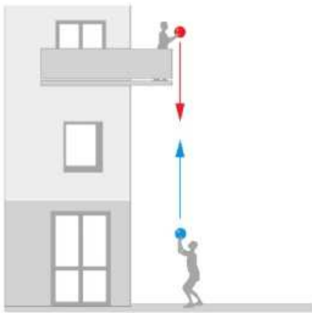
Oblicz największą wysokość, na jakiej znalazła się piłeczka, oraz czas, po którym ją osiągnęła.

65.2 (0–2)

Oblicz, po jakim czasie piłeczka uderzyła w chodnik. Wynik zaokrąglij do setnych części sekundy.

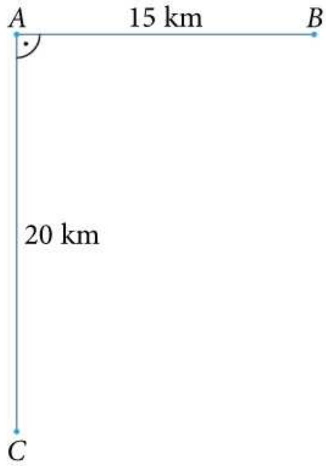
66. (0–4)

Jacek i Wacek badali ruch piłek podczas zderzeń. Wacek stał na balkonie znajdującym się 20 m nad ziemią, a Jacek – pod balkonem na ziemi. Chłopcy jednocześnie rzucili pionowo piłki (patrz rysunek) tak, że piłki się zderzyły. Zależność wysokości h_1 (w metrach), na jakiej znajdowała się nad ziemią piłka Jacka, od czasu t (w sekundach) można opisać wzorem $h_1(t) = 5t^2 + 8t + 1{,}5$, a wysokość h_2, na jakiej znajdowała się piłka Wacka, w zależności od czasu t – wzorem $h_2(t) = -5t^2 - 2t + 21{,}5$. Oblicz, po jakim czasie piłki się zderzyły. Na jakiej wysokości doszło do ich zderzenia? Pomiń rozmiary piłek.



67. (0–4) CKE Informator 2021 PR

Na rysunku obok przedstawiono położenie miejscowości A, B i C oraz zaznaczono odległości między nimi. O godzinie 9:00 z miejscowości A do C wyruszył zastęp harcerzy „Tropiciele” i przemieszczał się z prędkością 4 km/h. O tej samej godzinie z miejscowości B do A wyruszył zastęp harcerzy „Korsarze” i przemieszczał się z prędkością 2 km/h. Wyznacz godzinę, o której odległość między tymi zastępami harcerzy będzie najmniejsza.



3. Funkcja kwadratowa

Zestaw A – odpowiedzi

1. a) $f(x)=-x^2-4x+5$ b) $f(x)=x^2-4x-5$
c) $f(x)=-x^2+4x+5$

2. a) $\left[\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$ b) $\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]$ c) $[-1,-4]$

3. a) $h(x)=-(x+2)^2-12$
b) $h(x)=-(x+1)^2+\frac{1}{2}$
c) $h(x)=-(x-6)^2+26$

4. a) $g(x)=x^2-4x+7$ b) $g(x)=-2x^2+1$

5. $f_{\min}=-8$, $f_{\max}=1$

6. $m=-3{,}6$ lub $m=-2$

7. a) $m=-2$ b) $m=2{,}4$ lub $m=4$

8. a) $m\in[-2;-1]\cup[2;3]$
b) $m\in(1;4)\cup(4;\infty)$

9. a) $x=0{,}32$, $x=0{,}75$
b) $x=-\frac{13}{2}$, $x=\frac{29}{6}$
c) $x=-2{,}75$, $x=1{,}6$
d) $x=-16{,}25$, $x=-0{,}54$

10. dwa

11. $m\in(-10;-1)\cup(6;\infty)$

12. a) $m\in(-\infty;1)\cup(1;2)$ b) $m\in\left(-\frac{1}{8};0\right)$

13. a) $b=1$, $c=-2$ b) $b=-3$, $c=2$
c) $b=-5$, $c=6$ lub $b=5$, $c=6$
d) $b=-\frac{4}{3}$, $c=\frac{1}{3}$

14. $m\in(-\infty;-4)$

15. a) $m\in(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(6;\infty)$
b) $m\in(2;4)\cup\left(4;5\frac{1}{3}\right)$
c) $m=0$ lub $m=1$

16. $f(x)=x^2-4x-12$

17. a) $m\in(-1;11)$ b) $m\in[-3;\infty)$
c) $m\in[0;4]$ d) $m\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$

18. a) $x=-\frac{1}{2}$, $x=1$ b) $x=-2$, $x=\frac{4}{3}$
c) $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
d) brak rozwiązań

19. a) $x=2$, $x=3$
b) $x=2$, $x=4$ c) $x=2$

20. a) $x\in\left\{-2\sqrt{2},-2,2,2\sqrt{2}\right\}$
b) $x\in\left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2},1,2,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$
c) $x\in\{-3,3\}$

21. a) $x\in[-2;2]$
b) $x\in(-\infty;-3)\cup(6;\infty)$
c) $x\in(-\infty;-2]\cup[3;\infty)$

22. a) 4 s b) 5 s

Zestaw B – odpowiedzi

23. C **24.** D **25.** D **26.** C **27.** C **28.** A **29.** B
30. A **31.1.** A **31.2.** H **32.** C, H **33.1.** D
33.2. B **34.** P, F **35.** P, F **36.** P, P **37.** A1 **38.** C2

39.1. $[1;4]$

39.2. $(-\infty;3]$

39.3. $-4\frac{2}{3}$

40.1. $[-3;\infty)$, $[1;\infty)$

40.2. h, g

41. a) $h(l)=-\frac{1}{20}l^2+l+\frac{3}{2}$ b) tak

42.1. B

42.2. 4,93 m

42.3. 8,99 m

43. 2 s; 10 m

Zestaw C – odpowiedzi

44. $p=-3$

45. $m\in(4;\infty)$

46. $m\in[2;6]$

47. $f(n)=4n-1$, $n\in\mathbb{N}_+$

48. $m=1$ lub $m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

49. $f(n)=1+\frac{2}{n}$, $n\in(-2;0)\cup\left(0;\frac{2}{3}\right)$; $n=-1$

50. $m=3$

51. $m\in\left(-\infty;2-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2+2\sqrt{3};\infty\right)$

52. $m=2$

53. $m=0$

54. $m\in(0;\infty)$

55. $m=-\frac{9}{5}$ lub $m=\frac{1}{4}$

56. $m\in(-\infty;-1]\cup(0;1)\cup(1;4]$

57. $m\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};-1\right)$

58. $m\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{4};\infty\right)$

59. dla $m=-\sqrt{2}$: $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,
dla $m=\sqrt{2}$: $x_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$

60. $m\in(0;\infty)$

61. $m\in(-\infty;-3)\cup\left(\frac{3}{5};\frac{3}{4}\right)$

62. $p=\frac{1}{4}$ lub $p=\frac{1}{2}$

63. $p=-10$ lub $p=10$

64. $m=-3$

65.1. 22 m; 2,5 s

65.2. około 6,21 s

66. po 1 s; 14,5 m

67. 10:30

Zestaw B – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
39.1.	Odczytanie z rysunku zbioru rozwiązań nierówności: $[1;4]$
39.2.	Wyznaczenie maksymalnego przedziału, w którym funkcja g jest rosnąca: $(-\infty;3]$
39.3.	Obliczenie wartości: $f(0)=\frac{1}{3}$, $g(0)=-5$ oraz ich sumy: $f(0)+g(0)=-4\frac{2}{3}$
40.1.	Wyznaczenie zbiorów wartości funkcji g: $[-3;\infty)$ oraz h: $[1;\infty)$
40.2.	Uzupełnienie kolejno: h, g
41. a)	Zapisanie równania paraboli w postaci: $h(l)=a(l-10)^2+6{,}5$
	Skorzystanie z warunku $h(0)=1{,}5$ i obliczenie współczynnika a: $a=-\frac{1}{20}$
	Zapisanie równania paraboli: $h(l)=-\frac{1}{20}l^2+l+\frac{3}{2}$
41. b)	Obliczenie dodatniego rozwiązania równania $h(l)=0$: $l\approx 21{,}4$ m i stwierdzenie, że wynik zawodnika przekroczy 20 m
42.1	Wskazanie poprawnej odpowiedzi: B
42.2	Zastosowanie wzoru na wierzchołek paraboli oraz prawidłowe podstawienie wszystkich danych liczbowych do tego wzoru: $h_{\max}=y_w=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{1{,}3^2+4\cdot 0{,}174\cdot 2{,}5}{4\cdot(-0{,}174)}$
	Zapisanie wyniku: $h_{\max}\approx 4{,}93$ m
42.3.	Zapisanie równania $0{,}12=-0{,}174x^2+1{,}3x+2{,}5$
	Rozwiązanie równania $0{,}174x^2-1{,}3x-2{,}38=0$: $x_1\approx -1{,}52$, $x_2\approx 8{,}99$
	Zapisanie wyniku: $x\approx 8{,}99$ m
43.	Zapisanie warunku: $h(t)\geqslant 0$ i podanie dziedziny funkcji h: $D=[0;1+\sqrt{2}]$
	Rozwiązanie nierówności $h(t)\geqslant 5$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji h: $t\in[0;2]$ i podanie odpowiedzi: Piłeczka będzie się znajdowała nad ziemią na wysokości nie mniejszej niż 5 m przez 2 sekundy.
	Obliczenie t_w: $t_w=1$ s
	Obliczenie wysokości maksymalnej: $h(1)=10$ m