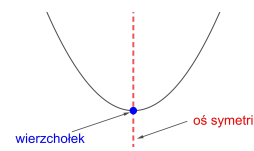
Funkcja kwadratowa

Definicja.
Funkcją kwadratową nazywamy funkcję opisaną wzorem $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Liczby a, b, c nazywamy współczynnikami funkcji kwadratowej.

Definicja.
Wzór $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ nazywamy wzorem funkcji kwadratowej w postaci **ogólnej**.

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**, która ma jedną oś symetrii. Oś ta przecina parabolę w punkcie zwanym **wierzchołkiem**. Wierzchołek dzieli parabolę na dwie części zwane **ramionami**.



Uwaga.

- jeśli $a > 0$, to ramiona skierowane w górę,
- jeśli $a < 0$, to ramiona skierowane w dół.

Twierdzenie.
W wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = ax^2$, $(a \neq 0)$ o wektor $\overrightarrow{v} = [p, q]$ otrzymujemy wykres funkcji $y = a(x-p)^2 + q$.

Definicja.
Wzór $y = a(x-p)^2 + q$, $(a \neq 0)$ nazywamy wzorem funkcji kwadratowej w postaci **kanonicznej**.

Uwaga.
Wierzchołkiem paraboli z powyższej definicji jest punkt $W(p, q)$.

Twierdzenie.
Wzór w postaci ogólnej $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ można zawsze przekształcić do postaci kanonicznej $y = a(x-p)^2 + q$ dzięki równościom:

$$p = \frac{-b}{2a}, \qquad q = \frac{-\Delta}{4a} \text{ (lub } q = f(p)\text{), gdzie } \Delta := b^2 - 4ac.$$

Definicja.
Wyrażenie $\Delta := b^2 - 4ac$ nazywamy **wyróżnikiem** funkcji kwadratowej (potocznie **deltą**).

Wniosek.
Wierzchołek W paraboli ma współrzędne (x_w, y_w), gdzie:

$$x_w = \frac{-b}{2a}, \qquad y_w = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Twierdzenie.
Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$:

- nie ma miejsc zerowych $\Leftrightarrow \Delta < 0$,

- ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow \Delta = 0$,
- ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow \Delta > 0$.

Dowód.
Szukamy miejsc zerowych, czyli rozwiązań równania:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Przekształcamy lewą stronę:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \underset{\text{wzór}}{\overset{\text{na silę}}{=}} a\left(x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = \dots$$

Dla ułatwienia zapisu oznaczmy $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\dots = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Jeśli $\Delta < 0$, to wyrażenie w nawiasie jest dodatnie, a zatem równanie nie ma rozwiązań.
Załóżmy więc, że $\Delta \geqslant 0$. Wtedy:

$$a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

Ostatecznie

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ponadto, jeśli $\Delta = 0$, to $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$. □

Definicja.
Wzór $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, $(a \neq 0)$ nazywamy wzorem funkcji kwadratowej w postaci **iloczynowej**.[1]

Aby wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym $[a, b]$ postępujemy następująco:
Sprawdzamy, czy $x_w \in [a, b]$.

- jeśli **tak**, to obliczamy $y_w, f(a), f(b)$. Spośród tych liczb wybieramy wartość najmniejszą i największą.
- jeśli **nie**, to obliczamy $f(a), f(b)$. Spośród tych liczb wybieramy wartość najmniejszą i największą.

Definicja.
Równanie typu $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $(a \neq 0)$ nazywamy równaniem **dwukwadratowym**. Równanie takie łatwo sprowadzić do równania kwadratowego przez podstawienie $x^2 = t$.

[1] W przypadku jednego miejsca zerowego przyjmuje on postać $y = a(x - x_0)^2$.

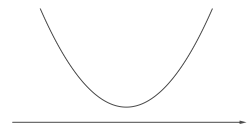
Uwaga.
Ujemny wyróżnik nie świadczy o tym, że nierówność kwadratowa nie ma rozwiązań.

np.

$x^2 + 1 \geqslant 0, \qquad a > 0$

$\Delta = 0 - 4 \cdot 1 = -4 < 0$

brak miejsc zerowych



zatem $x \in \mathbb{R}$

Twierdzenie (wzory Viete'a)**.**
Jeśli x_1, x_2 są miejscami zerowymi[2] funkcji $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, to

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Dowód.
Zapiszmy wzór funkcji w postaci iloczynowej:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Wymnażając otrzymujemy:

$$a(x^2 - x_2 x - x_1 x + x_1 x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a x_1 x_2.$$

Porównując z postacią ogólna mamy:

$$-a(x_1 + x_2) = b \quad \wedge \quad a x_1 x_2 = c.$$

Stąd

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \wedge \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

□

(ĆW) Udowodnić wzory Viete'a stosując wzory na pierwiastki.

Uwaga.
Twierdzenie jest też prawdziwe dla $x_1 = x_2$. Należy je jednak dobrze interpretować[3].

I. **Metoda analizy starożytnych**

Polega ona na tym, że przekształcamy wyjściowe równanie w taki sposób, aby spełniało dwa warunki:

1) nowe równanie było łatwiejsze do rozwiązania,
2) wszystkie rozwiązania równanie wyjściowego były też rozwiązaniami nowego równania.

Równanie wyjściowe i równanie końcowe mogą nie być równoważne, tzn. równanie otrzymane na końcu może mieć rozwiązania, które nie są rozwiązaniami równania wyjściowego (tzw. **pierwiastki obce**). Aby je wyeliminować należy każde z otrzymanych rozwiązań sprawdzić przez podstawienie do równania wyjściowego. Sprawdzenie poprawności rozwiązania jest elementem koniecznym w rozwiązywaniu równań tą metodą.

[2] Miejsca zerowe są często nazywane **pierwiastkami**.
[3] W tej sytuacji jest jedno miejsce, które można oznaczyć przez x_0. Wzory przyjmują wtedy postać: $2x_0 = \frac{-b}{a}$ oraz $x_0^2 = \frac{c}{a}$.

II. **Metoda równań równoważnych**
Polega ona na tym, że przekształcamy wyjściowe równanie w taki sposób, aby każde kolejno otrzymane równanie miało taki sam zbiór rozwiązań, jak równanie je poprzedzające.

Przykład.
$\sqrt{x-1} = 3 - x$
Sposób I (metoda analizy starożytnych)
Podnosimy równanie stronami do kwadratu:

$$x - 1 = (3-x)^2$$

$$x - 1 = 9 - 6x + x^2$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Delta = 9, \sqrt{\Delta} = 3, \quad x_1 = \frac{7-3}{2} = 2,\ x_2 = \frac{7+3}{2} = 5$$

Sprawdzamy, czy nie ma pierwiastków obcych:

- dla $x = 2$: $\quad L = \sqrt{2-1} = 1,\ P = 3 - 2 = 1$ ok.
- dla $x = 5$: $\quad L = \sqrt{5-1} = 2,\ P = 3 - 5 = -2, \quad L \neq P$.

Zatem $x = 2$.

Sposób II (metoda równań równoważnych)

zał: $x - 1 \geqslant 0 \ \Rightarrow\ x \geqslant 1 \ \Rightarrow\ D = [1, +\infty)$
Rozważmy dwa przypadki:

I. $3 - x < 0$
Wtedy $L \geqslant 0,\ P < 0$ Sprzeczność.

II. $3 - x \geqslant 0\ (x \leqslant 3)$
Wtedy podnosimy równanie stronami do kwadratu

$$x - 1 = (3-x)^2$$

$$x - 1 = 9 - 6x + x^2$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Delta = 9, \sqrt{\Delta} = 3, \quad x_1 = \frac{7-3}{2} = 2,\ x_2 = \frac{7+3}{2} = 5 \notin I$$

Uwzględniając dziedzinę: $x = 2$.