Część II: Rachunek różniczkowy

Zadanie 0. Czy tangens jest funkcją ciągłą? Znać odpowiedź wraz z uzasadnieniem.

Zadanie 1. Podać przykład, że założenie o ciągłości przy twierdzeniu Darboux jest konieczne i bez niego teza nie zachodzi.

Zadanie 2. Podać przykład funkcji, która jest nieciągła w nieskończenie wielu punktach (rysunek, opis lub wzór).

Zadanie 3. Udowodnić tw. Rolle'a.

Zadanie 4. Udowodnić tw. Lagrange'a.
Wskazówka: Skorzystać z tw. Rolle'a dla funkcji $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Zadanie 5. Pewien uczeń II LO w Krakowie wybrał się na wycieczkę w góry. Rozpoczął wejście równo o godzinie $6:00$ u podnóża, a na szczyt dotarł o godz. $17:00$. Noc spędził na szczycie w schronisku i następnego dnia z samego rana o $6:00$ zaczął schodzić dokładnie tą samą trasą. Dotarł na dół o $17:00$. Udowodnić, że istnieje taki punkt na trasie, w którym uczeń był w oba dni o dokładnie tej samej godzinie.

Zadanie 6. Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są z przedziału $[0,1]$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $a \in [0,1]$, że $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - a| = \dfrac{1}{2}$.

Zadanie 7. Wielomian $W(x)$ stopnia n ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że wtedy wielomian $W'(x)$ ma $n-1$ różnych pierwiastków rzeczywistych.

Zadanie 8 (o koniach wyścigowych)**.** Udowodnić, że jeśli f, g to funkcje ciągłe w $[a,b]$ oraz różniczkowalne w (a,b) oraz $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, to istnieje $c \in (a,b)$, taki że $f'(c) = g'(c)$.
Interpretacja fizyczna: Jeśli dwa konie wspólnie wystartowały i dobiegły do mety razem, to istniał po drodze moment, gdy biegły z tą samą prędkością[1].

Zadanie 9. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji Dirichleta:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

★ **Zadanie 10.** Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji f danej wzorem: $f(x) = xD(x)$, gdzie D jest funkcją Dirichleta.

Zadanie 11. Czy istnieje funkcja o dziedzinie $\mathbb{R}$, ciągła w każdym punkcie, ale nieróżniczkowalna w żadnym punkcie? Jak dużo jest takich funkcji?

Zadanie 12. Obliczyć granice stosując regułę de l'Hospitala:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+1}-1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x^2-x-12}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-e^x}{x^3}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin^3 x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(x^2\right)^{\sin x}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

[1] Funkcje f, g możemy traktować jako przebytą drogę (odpowiednio dla poszczególnych koni) w zależności od upływającego czasu. Są to oczywiście funkcje ciągłe i różniczkowalne. Równość $f(a) = g(a)$ oraz $f(b) = g(b)$ oznacza, że na konie razem wystartowały i razem ukończyły bieg. Z lekcji fizyki wiemy, że pochodną drogi po czasie jest prędkość, a więc równość z tezy oznacza, że istnieje taki moment, gdy prędkość konia pierwszego była równa prędkości konia drugiego.