
Zadania dodatkowe

Termin: wrzesień

Zadanie 1. Podać przykład figury (wystarczy rysunek), która składa się z dwóch prostokątów (ale nie jest kwadratem), ma środek symetrii oraz 4 osie symetrii.

Zadanie 2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , takie że liczba $7p^2 + 8$ jest pierwsza.

Zadanie 3. Rozważmy liczbę $1000(5\sqrt{2} - 7)^2$. Ile wynosi jej przybliżenie, gdy użyjemy standardowego przybliżenia $\sqrt{2} \approx 1,41$ wstawiając je bezpośrednio do powyższej postaci? A ile będzie wynosić to przybliżenie, gdy użyjemy kalkulatora naukowego (czyli znacznie dokładniejszego przybliżenia)? Ile będzie wynosić przybliżenie, gdy najpierw podniesiemy nawias do kwadratu ze wzoru skróconego mnożenia i wtedy wstawimy przybliżenie 1,41? O czym świadczą otrzymane wyniki?

Zadanie 4. Czy istnieje czworoscian, którego siatka jest trójkątem prostokątnym?

Zadanie 5. Rozważmy nierówności $x^2 + 1 \geq g(x) \geq -x^2 - 1$. Podaj przykład funkcji g spełniające powyższe nierówności dla każdego x , aby:

- a) g była stała,
 - b) g była liniowa ale nie stała,
 - c) istniały x_1, x_2 realizujące równość, tzn. aby wykres g był styczny do wykresu funkcji danej wzorem $y = x^2 + 1$ oraz do wykresu funkcji danej wzorem $y = -x^2 - 1$.
-

Termin: październik

Zadanie 6. Wykaż, że w dowolnym trójkącie środek ciężkości, ortocentrum oraz środek okręgu opisanego leżą na jednej prostej.

Wskazówka: Umieść trójkąt w układzie współrzędnych tak, by wierzchołki były na osiach Ox i Oy .

Zadanie 7. Rozważmy następujący ciąg równości:

$$\frac{23}{24} = \frac{2323}{2424} = \frac{232323}{242424} = \dots,$$

gdzie każdy kolejny ułamek powstaje przez dopisanie do licznika liczby 23, a do mianownika liczby 24. Wykazać, że możemy dowolnie długo go przedłużać i równości nadal będą zachodzić.

Zadanie 8. Niech w, k, s oznacza kolejno liczbę wierzchołków, krawędzi, ścian w wielościanie wypukłym. Czy istnieje taki wielościan, dla którego zachodzi $w \cdot k \cdot s = 2023^{2023}$?

Zadanie 9. Czy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ istnieje n kolejnych liczb naturalnych, z których wszystkie są złożone?

Zadanie 10. Rozwiąż równanie:

$$4^{\frac{1}{x}} = 6^{\frac{1}{x}} + 9^{\frac{1}{x}}$$

Termin: listopad

Zadanie 11. Rozwiąż równanie:

$$\varphi^{\ln x} + x^{\ln \varphi} = 3 + \sqrt{5}.$$

Zadanie 12. Niech $x > 0$. Oblicz $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots}}}}}$

Zadanie 13. Jedną z najbardziej znanych hipotez to Hipoteza Goldbacha. Mówi ona o tym, że każdą liczbę parzystą większą od 2 można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych. Wykaż, że jeśli ta hipoteza jest prawdziwa, to każdą liczbę nieparzystą większą niż 7 można przedstawić w postaci sumy trzech liczb pierwszych. Czy można uznać za prawdziwe zdanie: „Każda liczba nieparzysta większa od 7 jest sumą trzech liczb pierwszych”?

Zadanie 14. Czy istnieje liczba naturalna n , której iloczyn cyfr wynosi 0, a iloczyn cyfr liczby $n + 1$ wynosi 1000?

Zadanie 15. Czy istnieje liczba naturalna n , której iloczyn cyfr wynosi 1000, a iloczyn cyfr liczby $n + 1$ wynosi 0?

Termin: grudzień

Zadanie 16. Weźmy dowolną liczbę naturalną n i policzmy sumę kwadratów jej cyfr. Z otrzymanym wynikiem postępujemy analogicznie. Proces wykonujemy do momentu, aż otrzymamy liczbę 1. Jeśli tak się stanie, to liczbę n nazywamy liczbą wesołą. W przeciwnym wypadku nazywamy ją smutną. Określić, które liczby od 0 do 10 są wesołe, a które smutne. Jak na bycie wesołą/smutną wpływa przestawienie cyfr w liczbie, a jak dodanie dowolnej liczby zer w dowolnym miejscu?

Przykład: Niech $n = 133$. Wtedy $1^2 + 3^2 + 3^2 = 19$, $1^2 + 9^2 = 82$, $8^2 + 2^2 = 68$, $6^2 + 8^2 = 100$, $1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$, a więc liczba 133 jest wesoła.

Zadanie 17. Oprócz znanych ze szkoły średnich istnieje też średnia logarytmiczna zdefiniowana następująco:

$$S_L := L(a, b) := \frac{b - a}{\log b - \log a},$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a \neq b$.

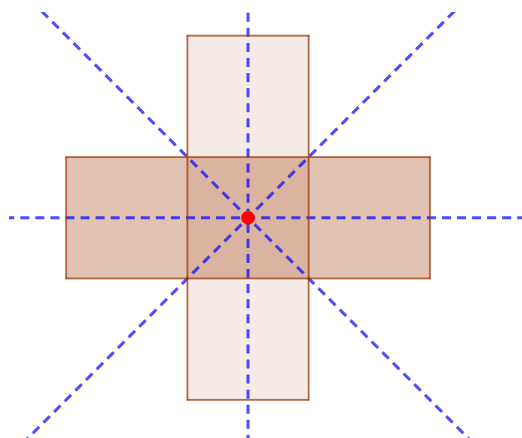
- Wykaż, że średnia logarytmiczna jest przemienne tzn. $L(a, b) = L(b, a)$
- Oblicz średnią logarytmiczną dla liczb 10 i 100; 2 i 1 oraz dnia i miesiąca swoich urodzin.
- Średnia ta „wpasowuje się” w ciąg nierówności między średnimi: $S_K \geq S_A \geq S_G \geq S_H$. Na podstawie obliczonych wyżej przykładów, wywnioskuj, między którymi średnimi znajduje się średnia logarytmiczna.

Zadanie 18. Rozwiąż równanie $|x + y^2| + |x - y^2| + |y + x^2| + |y - x^2| = 2023$ w zbiorze liczb całkowitych.

Zadanie 19. Czy da się zapisać liczbę 1 jako sumę odwrotności pewnej liczby liczb pierwszych, tzn. czy istnieją liczby pierwsze p_1, p_2, \dots, p_n , że $1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}$?

Zadanie 20. Rozwiąż równanie: $2023^{|x|} = \sin x^{2023}$.

Rozwiązanie 1.



Rozwiązanie 2.

- Jeśli $p = 3$, to $7p^2 + 8 = 7 \cdot 9 + 8 = 71 \in \mathbb{P}$.
- Jeśli $p = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, to $7p^2 + 8 = 7(3k + 1)^2 + 8 = 7(9k^2 + 6k + 1) + 8 = 63k^2 + 42k + 15 = 3(21k^2 + 14k + 5) = 3q$ oraz $q \in \mathbb{N} \wedge n > 1$, a więc liczba ta dzieli się przez 3, więc nie jest pierwsza.

- Jeśli $p = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, to $7p^2 + 8 = 7(3k + 2)^2 + 8 = 7(9k^2 + 12k + 4) + 8 = 63k^2 + 84k + 36 = 3(21k^2 + 28k + 12) = 3q$ oraz $q \in \mathbb{N} \wedge q > 1$, a więc liczba ta dzieli się przez 3, więc nie jest pierwsza.

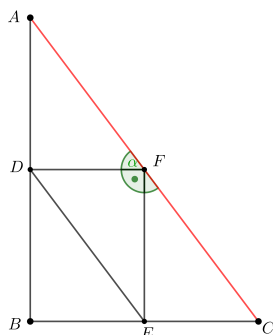
Zatem $p = 3$.

Rozwiązanie 3.

- $1000(5\sqrt{2} - 7)^2 \approx 1000(5 \cdot 1,41 - 7)^2 = 1000(7,05 - 7)^2 = 1000 \cdot 0,05^2 = \mathbf{2,5}$
- $1000(5\sqrt{2} - 7)^2 = 1000(50 - 70\sqrt{2} + 49) = 1000(99 - 70\sqrt{2}) \approx 1000(99 - 70 \cdot 1,41) = 1000(99 - 98,7) = 1000 \cdot 0,3 = \mathbf{300}$
- $1000(5\sqrt{2} - 7)^2 \approx 1000(5 \cdot 1,4142135623731 - 7)^2 = 1000(7,0710678118655 - 7)^2 = 1000 \cdot 0,0710678118655^2 \approx 1000 \cdot 0,0050506338833501 = \mathbf{5,0506338833501}$

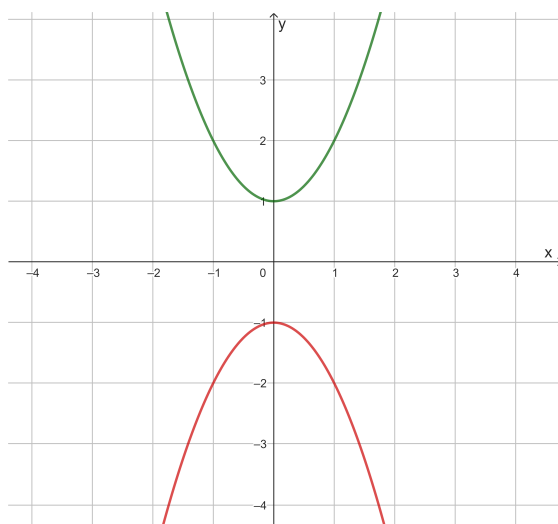
Otrzymane rozbieżności świadczą o tym, że po pierwsze różnica w przybliżeniu nawet na częściach tysięcznych może bardzo znacznie wpłynąć na wynik końcowy – dlatego m.in. należy przybliżać do podanej liczby miejsc po przecinku dopiero końcowy wynik, a nie wyniki pośrednie. Po drugie, dwa pierwsze rachunku świadczą o tym, że znaczenia ma nie tylko dokładność przybliżenia, ale też to, do jakiej postaci końcowej wstawiamy przybliżenie. Z tego m.in. powodu należy usuwać niewymierność z mianownika, ponieważ przybliżanie niewymierności w mianowniku generuje większy błąd niż przybliżanie w liczniku.

Rozwiązanie 4. Nie istnieje taki czworoscian. Narysujmy dowolny trójkąt prostokątny i założmy, że jest on naszą hipotetyczną siatką. Połączmy środki jego boków (łączymy środki, aby po sklejeniu odpowiednie krawędzie się skleily).



Niech $|\angle AFD| = \alpha$. Wtedy $|\angle CFE| = 90^\circ - \alpha$. Ponieważ $(90^\circ - \alpha) + \alpha = 90^\circ$, to czerwone krawędzie złączą się dopiero, gdy będą płasko leżeć na podstawie, a więc po ich zagięciu nie otrzymamy ostrosłupa, a jedynie płaski trójkąt.

Rozwiązanie 5. Funkcje ograniczające szukaną funkcję g są funkcjami kwadratowymi o następujących wykresach.



Dzięki rysunkowi¹ łatwo podać przykłady:

¹Łatwo też w razie potrzeby uzasadnić poprawność nierówności dzięki nietrudnemu rachunkowi.

- a) $g(x) = 0$
 b) $g(x) = x$

Jeśli chodzi o ostatni podpunkt, to szukamy prostej, która jest styczna do obu wykresów, tzn. ma z każdym z nich dokładnie jeden punkt wspólny. W tym celu rozwiążmy układy równań:

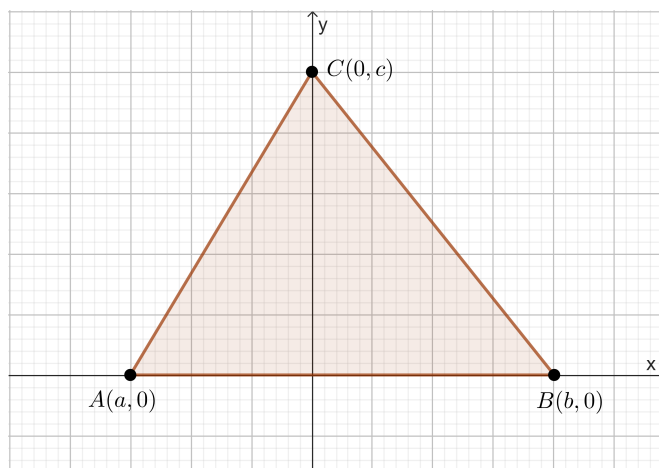
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = ax + b \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x^2 - 1 \\ y = ax + b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= ax + b & -x^2 - 1 &= ax + b \\ x^2 - ax + 1 - b &= 0 & x^2 + ax + b - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Są to równania kwadratowe, więc musi zachodzić warunek $\Delta = 0$, aby był dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem. Zatem:

$\Delta_1 = a^2 - 4(1 - b) = 0$ oraz $\Delta_2 = a^2 - 4(b - 1) = 0$. Stąd $a^2 = 4(1 - b) \wedge a^2 = 4(b - 1)$. Przyrównując prawe strony otrzymujemy $1 - b = b - 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \vee a = -1$. Ostatecznie uzyskujemy dwie funkcje: $g(x) = x + 1$ lub $g(x) = -x + 1$.

Rozwiązanie 6. Wykorzystamy geometrię analityczną. W tym celu umieścimy trójkąt w układzie współrzędnych tak, by dwa wierzchołki były na osi Ox i jeden na osi Oy – tak jak na rysunku. Wtedy $A(a, 0), B(b, 0), C(0, c)$.



- Punkt K przecięcia środkowych, czyli środek ciężkości ma współrzędne $K\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = \left(\frac{a + b}{3}, \frac{c}{3}\right)$.
- Punkt L przecięcia wysokości, czyli ortocentrum:
 Wysokość h_C zawiera się w prostej $x = 0$. Wyznamy równanie prostej zawierającej h_B . Jest ona prostopadła do pr. BC , której współczynnik kierunkowy wynosi $a_{BC} = \frac{c}{-a} = -\frac{c}{a}$. Zatem współczynnik kierunkowy prostej zawierającej h_B wynosi $\frac{a}{c}$. Prosta ta przechodzi przez punkt B , więc

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{a}{c} \cdot b + b_h \\ b_h &= -\frac{ab}{c}, \end{aligned}$$

a więc h_B zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{a}{c}x - \frac{ab}{c}$. By znaleźć punkt przecięcia wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{a}{c}x - \frac{ab}{c} \end{cases}$$

z którego otrzymujemy $L\left(0, -\frac{ab}{c}\right)$.

- Punkt M przecięcia symetralnych boków, czyli środek okręgu opisanego na trójkącie:
 Środek odcinka AB ma współrzędne $S_{AB} = \left(\frac{a + b}{2}, 0\right)$, więc równanie symetralnej boku AB

ma postać $x = \frac{a+b}{2}$. Środkiem boku AC jest punkt $S_{AC} = (\frac{a}{2}, \frac{c}{2})$. Symetralna boku AC ma współczynnik kierunkowy równy $\frac{a}{c}$ (taki sam jak h_B) i przechodzi przez punkt S_{AC} , więc

$$\begin{aligned}\frac{c}{2} &= \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{2} + b_s \\ b_s &= \frac{c}{2} - \frac{a^2}{2c} = \frac{c^2 - a^2}{2c},\end{aligned}$$

a więc równanie tej symetralnej to: $y = \frac{a}{c}x + \frac{c^2 - a^2}{2c}$. By znaleźć punkt przecięcia wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a}{c}x + \frac{c^2 - a^2}{2c} \end{cases}$$

z którego po nietrudnych rachunkach otrzymujemy $M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right)$.

Aby wykazać, że punkty K, L, M leżą na jednej prostej można napisać równanie prostej KL oraz sprawdzić, że punkt M na niej leży. Prościej jednak będzie wyliczyć współczynniki kierunkowe a_{LK} raz a_{LM} :

$$\begin{aligned}a_{LK} &= \frac{\frac{a+b}{3} - 0}{\frac{c}{3} + \frac{ab}{c}} = \frac{a+b}{3} \cdot \frac{3c}{c^2 + 3ab} = \frac{(a+b)c}{c^2 + 3ab} \\ a_{LM} &= \frac{\frac{a+b}{2} - 0}{\frac{ab+c^2}{2c} + \frac{ab}{c}} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2c}{ab + c^2 + 2ab} = \frac{(a+b)c}{c^2 + 3ab},\end{aligned}$$

a więc punkty te leżą na jednej prostej. Prosta ta ma swoją nazwę – jest to **prosta Eulera**.

Rozwiązanie 7. Ułamek w dowolnym miejscu tego ciągu możemy zapisać w postaci:

$$\frac{23 + 23 \cdot 10^2 + 23 \cdot 10^4 + \dots + 23 \cdot 10^{2k}}{24 + 24 \cdot 10^2 + 24 \cdot 10^4 + \dots + 24 \cdot 10^{2k}},$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

Z licznika możemy wyjąć przed nawias 23, a z mianownika 24 otrzymując:

$$\frac{23(1 + 10^2 + 10^4 + \dots + 10^{2k})}{24(1 + 10^2 + 10^4 + \dots + 10^{2k})} = \frac{23(1 + 10^2 + 10^4 + \dots + 10^{2k})}{24(1 + 10^2 + 10^4 + \dots + 10^{2k})} = \frac{23}{24},$$

co pokazuje, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ (czyli dla dowolnej długości ułamka) wynik zawsze wynosi $\frac{23}{24}$.

Rozwiązanie 8. Dla każdego wielościanu wypukłego zachodzi wzór Eulera: $w - k + s = 2$. Iloczyn $w \cdot k \cdot s = 2023^{2023}$ oznacza, że wszystkie liczby w, k, s są nieparzyste, bo prawa strona jest nieparzysta. Ponieważ różnica liczb nieparzystych jest parzysta, a suma liczby parzystej i nieparzystej jest nieparzysta otrzymujemy po lewej stronie tożsamości Eulera liczbę nieparzystą. Sprzeczność. A zatem taki wielościan nie istnieje.

Rozwiązanie 9. Tak. Są to: $(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, (n+1)! + 4, \dots, (n+1)! + (n+1)$. Wszystkie są złożone, ponieważ pierwsza dzieli się przez 2, druga przez 3, trzecia przez 4 itd., a ostatnia przez $n+1$.

Rozwiązanie 10. Dziedziną równanie jest $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned}4^{\frac{1}{x}} &= 6^{\frac{1}{x}} + 9^{\frac{1}{x}} \quad | : 4^{\frac{1}{x}} \\ 1 &= \left(\frac{6}{4}\right)^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{x}} \\ 1 &= \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{x}} \\ 1 &= \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= t + t^2 \\ t^2 + t - 1 &= 0 \\ \Delta = 5, \sqrt{\Delta} &= \sqrt{5} \\ t_1 &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad t_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \end{aligned}$$

Zatem $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Wiedząc, że $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ możemy zapisać $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\varphi}} = \frac{1}{\varepsilon}$. Obustronnie logarytmując otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\varphi}\right) \\ \frac{1}{x} &= \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \log_{\frac{3}{2}}\varphi^{-1} = -\log_{\frac{3}{2}}\varphi \\ x &= -\log_{\varphi}\left(\frac{3}{2}\right) = -\log_{\varphi}\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \log_{\varphi}\left(\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

Rozwiązanie 11.

Rozwiązanie 12. Najprościej rozwiązać to następująco. Niech $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}} =: S$. Podnosząc do kwadratu otrzymujemy:

$$x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\dots}}}}} = S^2,$$

czyli $xS = S^2$. Stąd (wyciągając przed nawias) $S = 0$ lub $S = x$. Pierwsza opcja jest oczywiście sprzeczna, więc $S = x$.

Aby to rozumowanie było w pełni poprawne, należy najpierw udowodnić, że wynikiem tego „nieskończonego” pierwiastka jest liczba rzeczywista. Tylko wtedy możemy cały pierwiastek oznaczyć jako liczbę S . Mogłoby się bowiem zdarzyć, że wynik rozbiega w plus (lub minus) nieskończoność albo w ogóle przy obliczaniu coraz dokładniejszego wyniku (braniu coraz większej liczby pierwiastków) wyniki nie zbliżają się do żadnej granicy (nawet niewłaściwej)².

Wykażemy to za pomocą indukcji matematycznej. W tym celu niech $x_n := \sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}$, gdzie w tym wyrażeniu występuje dokładnie n liter x . Pokażemy, że ciąg (x_n) ma granicę. Rozważmy najpierw sytuację, gdy $x > 1$:

I. (ograniczoność)

1. Dla $n = 1$ mamy $0 \leq \sqrt{x} \leq x$.
2. $Z_{ind} : 0 \leq x_n \leq x$, $T_{ind} : 0 \leq x_{n+1} \leq x$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że

$$\begin{array}{l}
0 \leq x_n \leq x \\
0 \leq \sqrt{x \sqrt{x \dots \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}}} \leq x \quad | \cdot x \\
0 \leq x \sqrt{x \sqrt{x \dots \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}}} \leq x^2 \quad | \sqrt{} \\
0 \leq \sqrt{x \sqrt{x \dots \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}}} \leq |x| (= x \text{ bo } x > 0)
\end{array}$$

²Najbardziej znanym przykładem jest chyba rozumowanie, które przez analogiczne myślenie (czyli oznaczenie przez x pewnego wyrażenia, które nie jest liczbą rzeczywistą) „dowodzi”, że $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$, czyli, że suma liczb naturalnych wynosi $-\frac{1}{12}$.

$$0 \leq x_{n+1} \leq x$$

Na mocy indukcji matematycznej ciąg (x_n) jest ograniczony (z góry przez x).

II. (monotoniczność)

1. Dla $n = 1$ mamy $x_1 = \sqrt{x}, x_2 = \sqrt{x\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned} x_1 &\stackrel{?}{<} x_2 \\ \sqrt{x} &\stackrel{?}{<} \sqrt{x\sqrt{x}} \quad |^2 \\ x &\stackrel{?}{<} x\sqrt{x} \quad | : x \\ 1 &\stackrel{?}{<} \sqrt{x} \quad |^2 \\ 1 &\stackrel{?}{<} x \\ \text{TAK} \end{aligned}$$

2. $Z_{ind} : x_n < x_{n+1}, \quad T_{ind} : x_{n+1} < x_{n+2}$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że $x_n < x_{n+1}$, czyli:

$$\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}} < \sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}$$

przy czym po lewej jest n pierwiastków, a po prawej jest ich $n + 1$.

Mnożąc obie strony nierówności przez x , a następnie pierwiastkując otrzymujemy analogiczne pierwiastki, ale po lewej stronie jest ich $n + 1$, a po prawej $n + 2$, czyli:

$$x_{n+1} < x_{n+2},$$

co na mocy indukcji matematycznej dowodzi, że ciąg (x_n) jest rosnący.

Rozważany ciąg (x_n) jest monotoniczny (rosnący) oraz ograniczony, a więc jest zbieżny.

W analogiczny sposób wykazujemy, ograniczoność i monotoniczność dla $x \in (0, 1)$. Dla $x = 1$ ciąg jest stale równy 1, więc jego granica to 1.

To pozwala oznaczyć granicę tego ciągu, czyli szukany „nieskończony” pierwiastek przez S .

Rozwiązanie 13. Rozważmy liczbę nieparzystą x większą od 7, czyli $x = 2n + 1 > 7$:

$$\begin{aligned} 2n + 1 &> 7 \quad | - 3 \\ 2n - 2 &> 4 \\ 2(n - 1) &> 4 \end{aligned}$$

Liczba po lewej jest parzysta i większa od 4 (a więc też od 2). Korzystając z Hipotezy Goldbacha jest ona sumą dwóch liczb pierwszych, tzn.

$$\begin{aligned} 2(n - 1) &= p_1 + p_2 \\ 2n - 2 &= p_1 + p_2 \quad | + 3 \\ 2n + 1 &= p_1 + p_2 + 3, \end{aligned}$$

a więc przedstawiliśmy liczbę x jako sumę trzech liczb pierwszych.

Zdania: „*Każda liczba nieparzysta większa od 7 jest sumą trzech liczb pierwszych*” nie możemy uznać za prawdziwe, ponieważ dowód tego faktu korzysta z własności, której do tej pory nikt nie potwierdził. Jeśli jednak okaże się, że hipoteza Goldbacha jest prawdziwa, to automatycznie prawdziwe będzie również powyższe zdanie. Gdyby jednak Hipoteza Goldbacha była fałszywa to **NIE** oznacza to, że powyższe zdanie jest fałszywe. Być może da się je udowodnić innymi metodami, nie wykorzystującymi Hipotezy Goldbacha.

Rozwiązanie 14. Aby iloczyn cyfr pewnej liczby wynosił 0, to jedna z cyfr musi być równa 0. W tym przypadku zero musi być ostatnią cyfrą, aby liczba o 1 większa miała iloczyn cyfr różny od 0 (dokładnie $= 1000$). Rozłóżmy liczbę 1000 na czynniki:

$$1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5.$$

Mamy trzy przypadki spełniające warunki zadania:

- liczba n to dowolna permutacja cyfr: 2, 2, 2, 5, 5, 5 i dowolnej liczby cyfr 1 oraz 0 na końcu,
- liczba n to dowolna permutacja cyfr: 2, 4, 5, 5, 5 i dowolnej liczby cyfr 1 oraz 0 na końcu,

- liczba n to dowolna permutacja cyfr: 5, 5, 5, 8 i dowolnej liczby cyfr 1 oraz 0 na końcu.

Wtedy liczba $n + 1$ ma ostatnią cyfrę równą 1, więc iloczyn jej wszystkich cyfr to 1000. Szukanych liczb jest więc nieskończenie wiele, a przykładową może być: $n = 112225550$.

Rozwiązanie 15. Taka liczba nie istnieje. Aby w liczbie $n + 1$ iloczyn cyfr wynosił 0, to jedna z cyfr musi być 0. Musi to być ostatnia cyfra, ponieważ gdyby to była któraś z pozostałych, to wtedy iloczyn cyfr liczby n również wynosiłby zero (a ma wynosić 1000). To oznacza, że ostatnią cyfrą liczby n jest 9, a więc iloczyn cyfr liczby n dzieli się przez 9. Sprzeczność, bo $9 \nmid 1000$.