Informator matura 2023

Zadanie 1. (0–6)

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} mx + y = m^2 \\ 4x + my = 8 \end{cases} \qquad (1)$$

z niewiadomymi x i y oraz parametrem m.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których układ jest oznaczony, a para liczb (x, y) będąca rozwiązaniem układu spełnia warunek $|x + y| < 2$.

Zadanie 2. (0–3)

Dane są liczby $a = (\log_{\sqrt{5}} 2) \cdot \log_2 25$ i $b = \frac{\log_5 6}{\log_5 8}$.

Oblicz a^{b+1}.

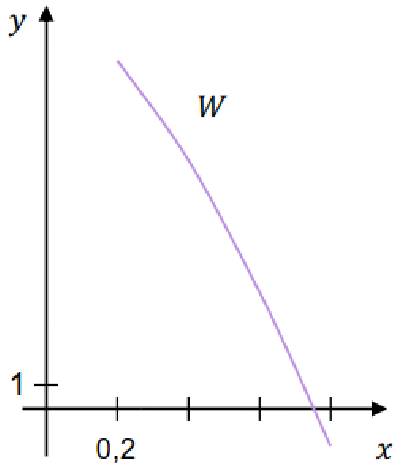
Zadanie 3. (0–3)

Na diagramie obok przedstawiono fragment wykresu wielomianu W określonego wzorem

$$W(x) = 4x^3 - 19x^2 - 12x + 18$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Oblicz wszystkie pierwiastki wielomianu W.



Zadanie 5. (0–3)

Wielomian W jest określony wzorem $W(x) = (x - 1)(x^2 - mx + m - 1)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Zadanie 6. (0–4)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = px^2 + (p - 1)x + 1 - 2p$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1.

Zadanie 13. (0–4)

W nieskończonym malejącym ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek

$$\frac{a_5 + a_3}{a_3} = \frac{29}{25}.$$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 6.

Wyznacz wzór na n–ty wyraz ciągu (a_n).

Zadanie 17. (0–3)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem

$$a_n = (n+5)^2 \cdot \left(\frac{p+1}{(n+1)(n+2)} + \frac{2p+2}{(n+2)(n+3)}\right) \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których granica ciągu jest równa 12.

Zadanie 18.

Rozpatrujemy wszystkie takie prostopadłościany, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 80, pole powierzchni całkowitej jest równe 256 i żadna z krawędzi bryły nie jest krótsza niż 4.

Zadanie 18.1. (0–4)

Wykaż, że układ równań

$$4a + 4b + 4c = 80 \qquad \textbf{(1)}$$

$$2ab + 2bc + 2ca = 256 \qquad \textbf{(2)}$$

z niewiadomymi a oraz b ma rozwiązanie, które jest parą liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4 wtedy i tylko wtedy, gdy $c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$.

Zadanie 18.2. (0–3)

Objętość każdego z rozpatrywanych prostopadłościanów można wyrazić za pomocą funkcji

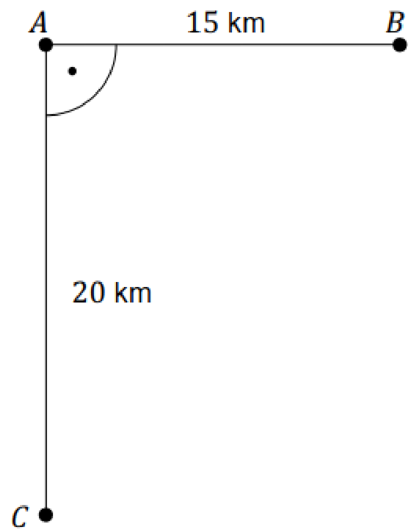
$$V(c) = c^3 - 20c^2 + 128c$$

gdzie $c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$ jest długością jednej z krawędzi bryły.

Spośród rozpatrywanych prostopadłościanów oblicz objętość tego prostopadłościanu, którego objętość jest najmniejsza.

Zadanie 19. (0–4)

Na rysunku obok przedstawiono położenie miejscowości A, B i C oraz zaznaczono odległości między nimi.
O godzinie 9:00 z miejscowości A do C wyruszył zastęp harcerzy „Tropiciele" i przemieszczał się z prędkością 4 km/h. O tej samej godzinie z miejscowości B do A wyruszył zastęp harcerzy „Korsarze" i przemieszczał się z prędkością 2 km/h.



Wyznacz godzinę, o której odległość między tymi zastępami harcerzy będzie najmniejsza.

Zadanie 20. (0–4)

Firma X wytwarza pewien produkt D. Badania rynku pokazały, że związek między ilością Q produktu D, jaką firma jest w stanie zbyć na rynku, a ceną P produktu jest następujący:

$$P(Q) = 90 - 0{,}1Q \quad \text{dla } Q \in [0, 900]$$

gdzie P jest ceną za jednostkę produktu w złotych, a Q – ilością produktu w tys. sztuk.

Koszty K wytworzenia produktu D zależą od ilości Q wytwarzanego produktu następująco:

$$K(Q) = 0{,}002Q^3 + Q^2 + 29{,}9985Q + 50$$

gdzie K jest kosztem produkcji w tys. zł.

Oblicz, przy jakiej wielkości produkcji firma X osiąga największy dochód. Wynik podaj zaokrąglony z dokładnością do 100 sztuk.

Zadanie 22. (0–5)

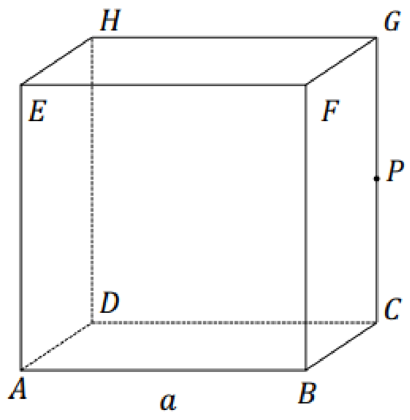
Proste o równaniach $2x + y - 4m - 4 = 0$ i $x - 3y + 5m + 5 = 0$ przecinają się w punkcie P o współrzędnych (x_P, y_P).

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których współrzędne punktu P spełniają warunki:

$x_P > 0$, $y_P > 0$, $y_P \geq x_P^2$ **oraz** $y_P < -\dfrac{2}{x_P} + 8$.

Zadanie 25. (0–3)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a. Punkt P jest środkiem krawędzi CG tego sześcianu (zobacz rysunek poniżej).



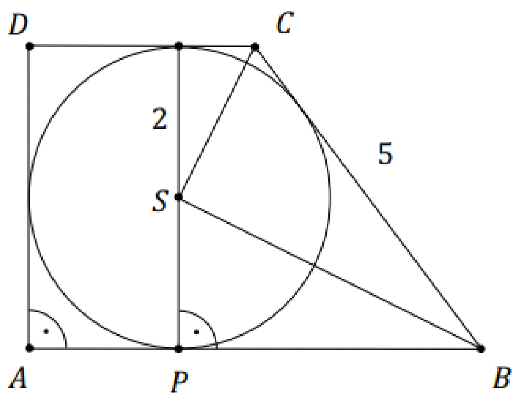
$|PG| = |PC|$

Oblicz odległość wierzchołka C od płaszczyzny zawierającej punkty B, D oraz P.

Zadanie 26. (0–5)

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o kątach prostych przy wierzchołkach A i D. Ramię BC trapezu ma długość 5. W ten trapez wpisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu 2. Punkt P jest punktem styczności okręgu i dłuższej podstawy AB tego trapezu (zobacz rysunek).

Wykaż, że trójkąty BPS i BSC są trójkątami podobnymi, oraz oblicz skalę tego podobieństwa.



Zadanie 28. (0–4)

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną dodatnią. Ze zbioru $\mathbb{M} = \{1; 2; 3; \ldots; 3n + 1\}$ losujemy jednocześnie trzy liczby. Zdarzenie A odpowiada jednoczesnemu wylosowaniu ze zbioru $\mathbb{M}$ trzech liczb, takich że suma tych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Zadanie 29. (0–4)

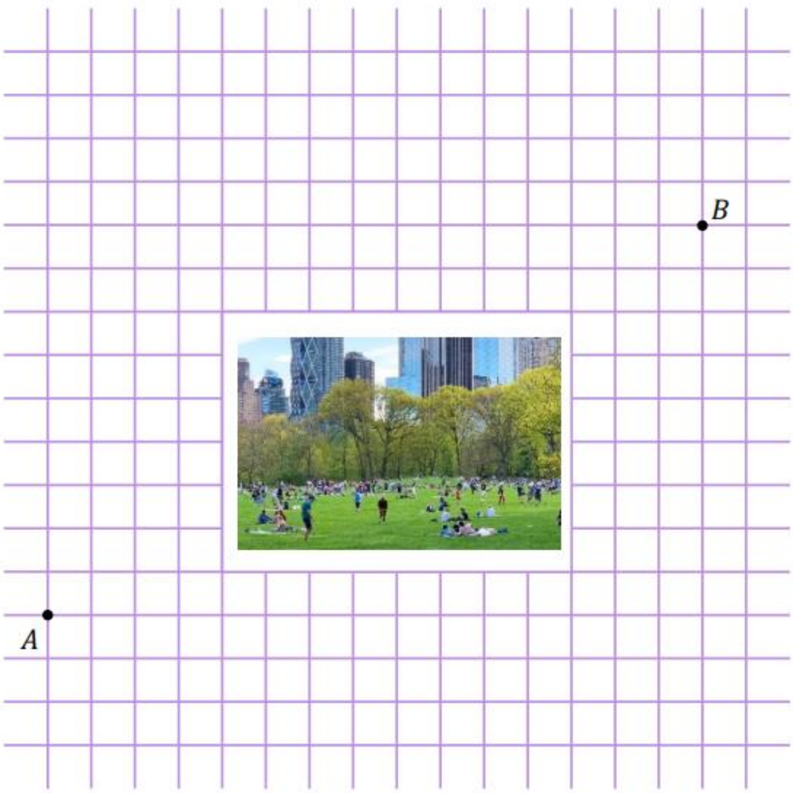
Pan Nowak często gra z synem w szachy. Obliczył, że 60% rozegranych partii wygrywa jego syn.

Oblicz, ile partii szachów musi rozegrać z synem pan Nowak, aby prawdopodobieństwo wygrania przez ojca przynajmniej jednej partii w całej rozgrywce było większe od $0,95$.

Zadanie 31. (0–4)

W pewnym mieście jest prostopadły układ ulic, a ruch na każdej z nich jest dwukierunkowy. W centrum miasta znajduje się park, gdzie obowiązuje całkowity zakaz ruchu pojazdów. Schemat ulic w tym mieście wraz z położeniem parku przedstawiono poniżej na rysunku. Tomek znajduje się w punkcie A miasta i chce dojechać najkrótszą drogą do punktu B.

Oblicz, ile jest najkrótszych dróg z A do B.



Odpowiedzi:

$m \in (0,2) \cup (2,4)$.

$4\sqrt[3]{36}$

$2-\sqrt{10},\ 2+\sqrt{10}$ oraz $\frac{3}{4}$.

$m = 2$.

$p = \frac{1}{2}$ lub $p = \frac{1}{4}$

$a_n = \frac{63}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

$p = 3$.

256.

10:30

25 500 sztuk.

$m \in \left(1-\sqrt{3}, 1\right]$

$\frac{\sqrt{6}}{6}a$.

$\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\frac{(3n^2-1)}{(3n+1)(3n-1)}$

$n \geq 6$