Zastosowanie logarytmów

Logarytmy dziesiętne znalazły zastosowanie w chemii. Mają one związek z określaniem odczynu roztworu. Odczyn roztworu to cecha roztworu związana ze stężeniem jonów wodorowych $[H^+]$ i stężeniem jonów wodorotlenkowych $[OH^-]$. Jeśli stężenia jonów są równe, $[H^+]=[OH^-]$, mówimy, że odczyn roztworu jest obojętny; jeśli $[H^+]>[OH^-]$ mówimy, że odczyn roztworu jest kwaśny (lub że jest to roztwór kwasu); jeśli $[H^+]<[OH^-]$, to odczyn roztworu nazywamy zasadowym (lub mówimy, że jest to roztwór zasady). W każdym roztworze wodnym iloczyn stężeń jonów wodorowych i wodorotlenkowych jest stały i wynosi 10^{-14} mol/dm^3. W chemicznie czystej wodzie (odczyn obojętny) stężenia $[H^+]$ i $[OH^-]$ są równe, zatem

$$[H^+]=10^{-7}\ \text{mol/dm}^3 \quad [OH^-]=10^{-7}\ \text{mol/dm}^3$$

W roztworze kwasu mamy stężenie jonów wodorowych większe niż 10^{-7} mol/dm^3, a w roztworze zasady mamy stężenie $[H^+]$ mniejsze niż 10^{-7} mol/dm^3. Określanie odczynu roztworu przez podanie stężenia $[H^+]$ (lub $[OH^-]$) nie jest wygodne ze względu na dużą rozpiętość omawianych stężeń. Chemicy posługują się „stopniami kwasowości”, zwanymi pH, określonymi wzorem

$$pH=-\log[H^+]$$

Dla chemicznie czystej wody mamy

$$pH=-\log 10^{-7}=7$$

Zauważ, że roztwory o odczynie kwaśnym mają pH mniejsze od 7, a roztwory o odczynie zasadowym mają pH większe od 7. Wartość pH roztworów wodnych waha się w przedziale od 0 do 14.

Przykład 1.

Stężenie jonów wodorowych w occie wynosi $1{,}26\cdot 10^{-3}$ mol/dm^3. Obliczymy pH octu.

$$pH=-\log\left(1{,}26\cdot 10^{-3}\right)\approx 2{,}9$$

Dla octu pH wynosi ok. 2,9.

Podamy jeszcze przykład zastosowania logarytmów w fizyce (dokładniej – w akustyce).

Natężenie dźwięku jest miarą siły dźwięku. Określa średnią ilość energii akustycznej, przepływającej w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni prostopadłą do kierunku rozchodzenia się fali dźwiękowej. Jednostką natężenia dźwięku jest wat na metr kwadratowy (W/m^2). W zakresie słyszalności człowieka dla dźwięku o częstotliwości 1000 Hz natężenie dźwięku przyjmuje wartość od 10^{-12} W/m^2 do 10^2 W/m^2. Pierwsza wartość odpowiada progowi słyszalności, druga – granicy bólu. Posługiwanie się natężeniem dźwięku nie jest wygodne, bowiem stosunek największej wartości natężenia do najmniejszej wyraża się bardzo dużą liczbą $\left(10^{14}\right)$. Dlatego w akustyce wprowadzono pojęcie poziomu natężenia dźwięku L, który określa względną wartość natężenia następującym wzorem:

$$L = 10\log\frac{I}{I_0}$$

gdzie $I_0 = 10^{-12}$ W/m², natomiast I to badane natężenie dźwięku.

Przykład 2.

Jednostką poziomu natężenia dźwięku jest decybel (dB). Jest to jedna dziesiąta jednostki zwanej belem (B).

Progowi słyszalności odpowiada:

$$10\log\frac{10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}}{10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}} = 10\log 1 = 0 \text{ (dB)}$$

a granicy bólu:

$$10\log\frac{10^{2}\,\mathrm{W/m^2}}{10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}} = 10\log 10^{14} = 140 \text{ (dB)}$$

Dla porównania podamy jeszcze kilka wielkości:
- szelest liści – ok. 10 dB
- rozmowa – ok. 60 dB
- przejeżdżający samochód – ok. 70 dB
- głośna muzyka – ok. 110 dB
- startujący samolot odrzutowy (w pobliżu) – ok. 130 dB.

Przebywanie w hałasie większym niż 90 dB może doprowadzić do uszkodzenia słuchu.

Wprowadzenie skali decybelowej pozwoliło wyrazić wielką rozpiętość natężeń dźwięków w zakresie 0 do 140 jednostek.

Przykład 3.

Gdy kierowca jechał samochodem osobowym z prędkością 60 km/h, to poziom natężenia hałasu (we wnętrzu samochodu) wynosił 65 dB. Po wjeździe na autostradę kierowca zwiększył prędkość do 130 km/h i wówczas poziom natężenia hałasu podniósł się do 72 dB. Obliczymy, ile razy głośniej zrobiło się w samochodzie.
Przyjmijmy następujące oznaczenia:
I_1 – natężenie hałasu w samochodzie jadącym z prędkością 60 km/h
I_2 – natężenie hałasu w samochodzie jadącym z prędkością 130 km/h
I_0 – natężenie dźwięku odpowiadające progowi słyszalności.

Szukamy wartości wyrażenia: $\frac{I_2}{I_1}$.

Z wcześniejszych rozważań wynika, że prawdziwe są następujące dwie równości:

$$65 = 10\cdot\log\frac{I_1}{I_0} \qquad \text{i} \qquad 72 = 10\cdot\log\frac{I_2}{I_0}$$