4 Indukcja matematyczna

4.1. Metodą indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi równość:

a) $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$;

b) $1+5+5^2+5^3+\ldots+5^n=\dfrac{5^{n+1}-1}{4}$;

c) $1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=2-\dfrac{1}{2^n}$;

d) $1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\ldots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{1}{2}\left(3-\dfrac{1}{3^n}\right)$.

4.2. Metodą indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi równość:

a) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

b) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

c) $1+7+13+\ldots+(6n-5)=n(3n-2)$;

d) $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$;

e) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

f) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

g) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

h) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

4.3. Metodą indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi równość:

a) $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{n}{5n+1}$;

b) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$;

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;

d) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$.

4.4. Metodą indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n:

a) liczba $10^n + 2$ jest podzielna przez 6;

b) liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez 3;

c) liczba $10^{n-1} - 1$ jest podzielna przez 9;

d) liczba $10^{n+1} + 212$ jest podzielna przez 12;

e) liczba $5^{n-2} + 3$ jest podzielna przez 4; $n \geqslant 2$

f) liczba $3^{4n+2} + 1$ jest podzielna przez 10.

4.5. Metodą indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n:

a) liczba $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9;

b) liczba $10^n + \overset{4^n}{\cancel{4n}} - 2$ jest podzielna przez 3;

c) liczba $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ jest podzielna przez 133;

d) liczba $2^{6n+1} + 9^{n+1}$ jest podzielna przez 11;

e) liczba $5 \cdot 49^{n+1} + 8^n$ jest podzielna przez 41;

f) liczba $10^n - (-1)^n$ jest podzielna przez 11;

g) liczba $10^{3n+1} - 3(-1)^n$ jest podzielna przez 7;

h) liczba $n^3 - 3n^2 + 2n - 3$ jest podzielna przez 3;

i) liczba $n^3 + 17n$ jest podzielna przez 6.

4.6. Wykaż metodą indukcji matematycznej, że dla każdej liczby naturalnej n, spełniającej podany warunek, zachodzi nierówność:

a) $2^n > 3n$ (dla $n \geq 4$);

b) $3^{n+1} > 4n + 7$ (dla $n \geq 2$);

c) $4^{n-1} \geq 3n^2 + 5$ (dla $n \geq 4$);

d) $5^{n-1} \geq 2n^2 + 1$ (dla $n \geq 5$);

e) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ (dla $n \geq 2$);

f) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ (dla $n \geq 2$);

g) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{3n+1} \overset{<}{\cancel{>}} 1$ (dla $n \geq 1$).