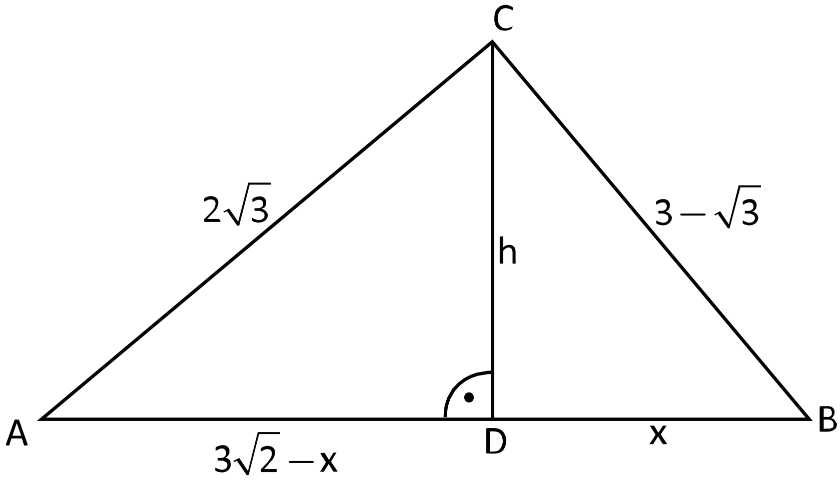
7.10. W trójkącie rozwartokątnym ABC dane są długości boków: $|AB|=3\sqrt{2}, |BC|=3-\sqrt{3}, |AC|=2\sqrt{3}$.
Wyznacz:

a) miarę kąta *ACB*,

b) promień okręgu opisanego na trójkącie *ABC*.

a) Wykonajmy rysunek pomocniczy:



$$\begin{cases} h^2+(3\sqrt{2}-x)^2=(2\sqrt{3})^2 \\ h^2+x^2=(3-\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^2+18-6\sqrt{2}x+x^2=12 \\ h^2+x^2=9-6\sqrt{3}+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^2=-6+6\sqrt{2}x-x^2 \\ h^2+x^2=9-6\sqrt{3}+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^2=-6+6\sqrt{2}x-x^2 \\ -6+6\sqrt{2}x-x^2+x^2=9-6\sqrt{3}+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^2=-6+6\sqrt{2}x-x^2 \\ -6+6\sqrt{2}x=12-6\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^2=-6+6\sqrt{2}x-x^2 \\ 6\sqrt{2}x=18-6\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^2=-6+6\sqrt{2}x-x^2 \\ \sqrt{2}x=3-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^2=-6+6\sqrt{2}x-x^2 \\ x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^2=-6+6\sqrt{2}x-x^2 \\ x=\dfrac{(3-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^2=-6+6\sqrt{2}x-x^2 \\ x=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

zatem:

$$h^2 = -6 + 6\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - \left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)^2$$

$$h^2 = -6 + 3\sqrt{2}\cdot(3\sqrt{2}-\sqrt{6}) - \frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{6})^2}{4}$$

$$h^2 = -6 + 18 - 6\sqrt{3} - \frac{18 - 12\sqrt{3} + 6}{4}$$

$$h^2 = 12 - 6\sqrt{3} - \frac{24 - 12\sqrt{3}}{4}$$

$$h^2 = 12 - 6\sqrt{3} - (6 - 3\sqrt{3})$$

$$h^2 = 12 - 6\sqrt{3} - 6 + 3\sqrt{3}$$

$$h^2 = 6 - 3\sqrt{3} \quad \text{i} \quad h > 0$$

$$h = \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$$

Obliczmy pole powierzchni trójkąta **ABC**:

$$P = \frac{1}{2}\cdot h\cdot|AB| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6-3\sqrt{3}}\cdot 3\sqrt{2} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{12-6\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{9-6\sqrt{3}+3} = \frac{3}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\cdot(3-\sqrt{3}) = \frac{9-3\sqrt{3}}{2}$$

Wyznaczmy miarę kąta **$|\sphericalangle C|$:**

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot(3-\sqrt{3})\cdot\sin(|\sphericalangle C|) = \frac{9-3\sqrt{3}}{2} \quad |\cdot 2$$

$$2\sqrt{3}\cdot(3-\sqrt{3})\cdot\sin(|\sphericalangle C|) = 9 - 3\sqrt{3}$$

$$6\sqrt{3} - 6\cdot\sin(|< C|) = 9 - 3\sqrt{3}$$

$$3(2\sqrt{3}-2)\cdot\sin(|\sphericalangle C|) = 3(3-\sqrt{3}) \quad |:3$$

$$(2\sqrt{3}-2)\cdot\sin(|\sphericalangle C|) = 3 - \sqrt{3} \quad |:(2\sqrt{3}-2)$$

$$\sin(|\sphericalangle C|) = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}$$

$$\sin(|\sphericalangle C|) = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}\cdot\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+2}$$

$$\sin(|\sphericalangle C|) = \frac{(3-\sqrt{3})(2\sqrt{3}+2)}{12-4}$$

$$\sin(|\sphericalangle C|) = \frac{6\sqrt{3}+6-6-2\sqrt{3}}{8}$$

$$\sin(|\sphericalangle C|) = \frac{4\sqrt{3}}{8}$$

$$\sin(|\sphericalangle C|) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Wiemy, że:

$$|\sphericalangle C| \in 90^\circ, 180^\circ \quad \wedge \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Korzystamy ze wzoru:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

zatem:

$$|\sphericalangle C| = 180^\circ - 60^\circ$$
$$|\sphericalangle C| = 120^\circ$$

Odp.: Miara kąta ACB wynosi 120°.

b) Korzystając z twierdzenia sinusów obliczmy długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie:

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sin 120^\circ} = 2R$$
$$\frac{3\sqrt{2}}{\sin(180^\circ - 60^\circ)} = 2R$$
$$\frac{3\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = 2R$$
$$\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$
$$3\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2R$$
$$\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2R$$
$$R = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$
$$R = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}$$
$$R = \sqrt{6}$$

Odp.: Długość promienia tego okręgu wynosi √6.