1.2 Teoria grup

Definicja 1.2.1.
Niech X będzie niepustym zbiorem. Wówczas odwzorowanie:

$$\cdot \colon X \times X \to X$$

*nazywamy **działaniem (wewnętrznym)** w zbiorze X.*

Przykład 1.2.2.

1) *Dodawanie w zbiorach $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ jest działaniem.*

2) *Mnożenie w zbiorach $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ jest działaniem.*

3) *Odejmowanie $- \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ **nie jest** działaniem w $\mathbb{N}$.*

Definicja 1.2.3 (Rodzaje działań i elementów)**.**
Niech $\cdot \colon X \times X \to X$ będzie działaniem w zbiorze X.

1) *Działanie $\cdot$ nazywamy **łącznym**, gdy $\forall x, y, z \in X : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.*

2) *Działanie $\cdot$ nazywamy **przemienny**m, gdy $\forall x, y \in X : x \cdot y = y \cdot x$.*

3) *Element $e \in X$ nazywamy **elementem neutralnym** działania $\cdot$, gdy $\forall x \in X : x \cdot e = e \cdot x = x$.*

4) *Jeśli dla działania $\cdot$ istnieje element neutralny e, to dla dowolnego $x \in X$, element $x' \in X$ nazywamy **elementem symetrycznym** do elementu x względem działania $\cdot$, jeśli $x \cdot x' = x' \cdot x = e$.*

5) *Jeśli w zbiorze X dane są dwa działania: $\cdot$ oraz $+$, to działanie $\cdot$ nazywamy **rozdzielnym względem działania** $+$, jeśli $\forall x, y, z \in X : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z) \quad \text{oraz} \quad z \cdot (x + y) = (z \cdot x) + (z \cdot y)$.*[21]

Uwaga 1.2.4.

1) *Element neutralny nie zawsze musi istnieć.*

2) *Element symetryczny może dla pewnych elementów istnieć, a dla innych nie.*

Definicja 1.2.5 (Cayley, 1854)**.**
Niech G będzie zbiorem niepustym, zaś $\cdot \colon G \times G \to G$ działaniem w G, dla którego zachodzą następujące własności:

- *jest ono łączne,*
- *posiada element neutralny $e \in G$,*
- *każdy element $x \in G$ posiada element symetryczny $x' \in G$.*

*Wtedy parę $(G, \cdot)$ nazywamy **grupą**. Jeśli dodatkowo działanie $\cdot$ jest przemienne, to grupę nazywamy **przemienną** lub **abelową**[22].*

[21] W przypadku, gdy działanie $\cdot$ jest przemienne, wystarczy sprawdzić tylko jeden z powyższych warunków.
[22] Od nazwiska norweskiego matematyka Nielsa Henrika Abela.

Definicja 1.2.6 (równoważna powyższej).
*Niech G będzie zbiorem niepustym, zaś $\cdot\colon G \times G \to G$ działaniem w G. Parę $(G, \cdot)$ nazywamy **grupą**, jeśli:*

- $\forall x, y, z \in G:\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
- $\exists e \in G\, \forall x \in G:\ x \cdot e = e \cdot x = x$,
- $\forall x \in G\, \exists x' \in G:\ x \cdot x' = x' \cdot x = e$.

*Ponadto, jeśli $\forall x, y \in G:\ x \cdot y = y \cdot x$, to grupę nazywamy **abelową**.*

Uwaga 1.2.7 (Konwencja).
*W teorii grup używa się klasycznie dwóch notacji: **multiplikatywnej** i **addytywnej**[23].*

- *Notacja multiplikatywna*

	Działanie	***Element neutralny***	***Element symetryczny***
Nazwa	*mnożenie*	*jedynka*	*element odwrotny*
Oznaczenie	$x \cdot y$ (*lub* xy)	*1*	x^{-1} (*lub* $\frac{1}{x}$)

- *Notacja addytywna*

	Działanie	***Element neutralny***	***Element symetryczny***
Nazwa	*dodawanie*	*zero*	*element przeciwny*
Oznaczenie	$x + y$	*0*	$-x$

Ponadto notacja addytywna jest często stosowana, gdy grupa jest abelowa. Jeśli nie będzie prowadziło to do nieporozumień, to zamiast pisać $(G, \cdot)$ będziemy pisać w skrócie po prostu grupa G.

Przykład 1.2.8 (grupy).

- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ – *grupy* ($+$ *to zwykłe dodawanie),*
  element neutralny $e = 0$, *elementy symetryczne* $x' = -x$.[24]
- $(\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}^*, \cdot), (\mathbb{C}^*, \cdot)$[25] – *grupy* ($\cdot$ *to zwykłe mnożenie),*
  element neutralny $e = 1$, *elementy symetryczne* $x' = \dfrac{1}{x}$.

Uwaga 1.2.9.
Łączność i przemienność standardowego dodawania i mnożenia w $\mathbb{R}$ przyjmujemy na tym kursie jako aksjomat i nie będziemy tego dowodzić[26].

[23] W tym skrypcie i na zajęciach będziemy stosować notację multiplikatywną.
[24] Przy czym w zbiorze $\mathbb{C}$ liczbę 0 rozumiemy jako $(0, 0)$, zaś jeśli $z = (a, b)$, to $-z$ jako $(-a, -b)$.
[25] Gwiazdka oznacza zbiór z wyłączeniem 0, np. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
[26] Dowód wymagałby najpierw formalnego skonstruowania zbioru liczb rzeczywistych. Są dwa klasyczne podejścia do tego problemu: za pomocą ciągów Cauchy'ego oraz przy pomocy przekrojów Dedekinda – oba sposoby są bardzo skomplikowane.

Przykład 1.2.10. *Sprawdzimy, jakie własności ma działanie* $a \odot b := ab + a$ *w* $\mathbb{R}$ *oraz czy zbiór liczb rzeczywistych z działaniem* $\odot$ *jest grupą.*

- ***łączność***

$$L = (a \odot b) \odot c = (ab + a) \odot c = (ab + a) \cdot c + ab + a = abc + ac + ab + a$$

$$P = a \odot (b \odot c) = a \odot (bc + b) = a(bc + b) + a = abc + ab + a$$

$$L = P \Leftrightarrow ac = 0$$

Niech $a = 1, b = 1, c = 1$*. Wtedy* $L = 4,\ P = 3,$ *a więc* $L \neq P \Rightarrow$ *działanie nie jest łączne.*

- ***przemienność***

$$L = a \odot b = ab + a$$

$$P = b \odot a = ba + b$$

$$L = P \Leftrightarrow a = b$$

Niech $a = 1, b = 2$*. Wtedy* $L = 3,\ P = 4,$ *a więc* $L \neq P \Rightarrow$ *działanie nie jest przemienne.*

- ***element neutralny***
Chcemy sprawdzić, czy istnieje taki $e \in \mathbb{R}$*, że dla każdego* $a \in \mathbb{R}$ *zachodzi* $a \odot e = e \odot a = a$*.*
Nasz szukany element ma spełniać więc dwie równości: $a \odot e = a$ *oraz* $e \odot a = a$*.*
Weźmy pierwszą z nich:

$$a \odot e = a$$

$$ae + a = a$$

$$ae = 0$$

$$a = 0 \quad \vee \quad e = 0$$

Pierwszy przypadek jest sprzeczny, ponieważ chcemy mieć równość dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$*. Stąd* $e = 0$ *i to jest nasz kandydat. Musimy jeszcze sprawdzić, czy* $e = 0$ *jest dobry dla drugiej równości. Mamy:*

$$0 \odot a = 0 \cdot a + 0 = 0 \neq a \text{ (dla } a \neq 0).$$

Tak więc nie ma elementu neutralnego.

- ***element symetryczny***
Brak elementu neutralnego, więc brak również elementów symetrycznych.

Zbiór $\mathbb{R}$ *wraz z działaniem* $a \odot b := ab + a$ *nie jest więc grupą.*

2.2 Teoria grup

UWAGA: We wszystkich zadaniach poniżej łączność i przemienność standardowego dodawania i mnożenia w $\mathbb{R}$ przyjmujemy jako aksjomat i nie będziemy tego dowodzić.

Zadanie 2.2.1. Podać przykład zbioru i działania w tym zbiorze, które nie ma elementu neutralnego.

Zadanie 2.2.2. Podać przykład zbioru i działania w tym zbiorze, takiego, że dla pewnych elementów istnieje element symetryczny, a dla pewnych nie. Wskazać te elementy.

Zadanie 2.2.3. Sprawdzić, jakie własności ma działanie $a \bigoplus b := a + b + 1$ określone w zbiorze $\mathbb{R}$.

Zadanie 2.2.4. Sprawdzić, czy zbiór $G = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ z działaniem $a \oplus b := a^{\ln b}$ tworzy grupę.

Zadanie 2.2.5. Definiujemy działanie $n*m := n^m$ na zbiorze $\mathbb{N}_+$. Sprawdzić, jakie własności ma to działanie.

Zadanie 2.2.6. Sprawdzić, czy $(\mathbb{Z}, *)$ jest grupą (abelową), jeśli $a * b := ab - a - b + 4$.

Zadanie 2.2.7. Sprawdzić, za pomocą tabelki Cayley'a, czy $(X, \cdot)$ jest grupą (abelową), jeśli $\cdot$ oznacza zwykłe mnożenie, zaś $X = \{1, -1\}$.

Zadanie 2.2.8. Rozważmy zbiór $X = \{0, 1, 2\}$ i w nim działanie $\oplus$ określone w ten sposób, że każdym dwóm elementom zbioru X przypisujemy resztę z dzielenia ich sumy przez 3.

a) utworzyć tabelkę tego działania (tzw. tabelkę Cayley'a),

b) odczytać z tabelki element neutralny tego działania oraz podać elementy symetryczne do każdego z elementów X,

c) czy działanie jest przemienne?

Zadanie 2.2.9. Wykazać, że jeśli istnieje element neutralny, to jest jedyny.

Zadanie 2.2.10. Wykazać, że jeśli działanie jest łączne i istnieje element symetryczny do danego, to jest on jedyny[41].

★ **Zadanie 2.2.11.** Udowodnić następując lemat:
Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas zachodzą następujące własności:

1. $1^{-1} = 1$

2. $\forall x, y \in G: \ (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

3. $\forall x \in G: \ \left(x^{-1}\right)^{-1} = x.$

Zadanie 2.2.12 (Prawo skracania)**.**
Wykazać, że jeśli G jest grupą, $a, b, c \in G$ oraz $ac = bc$ lub $ca = cb$, to $a = b$.

[41] Zwróćmy szczególną uwagę na dodatkowe założenie. Łączność jest tu konieczna. Bez niej dla danego elementu mogą istnieć różne elementy symetryczne. Dociekliwego czytelnika zachęcam do wymyślenia odpowiedniego przykładu.

Zadanie 2.2.13. Wykazać, że $(\mathbb{C}, +)$ tworzy grupę.

Zadanie 2.2.14. Wykazać, że $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ tworzy grupę.

Zadanie 2.2.15. Na $\mathbb{R}^*$ określamy działanie $x \odot y \coloneqq x|y|$. Sprawdzić jakie własności ma to działanie.

Zadanie 2.2.16. Na $\mathbb{Q}_+$ określamy działanie $x \odot y \coloneqq \frac{y}{x}$. Sprawdzić jakie własności ma to działanie.

Zadanie 2.2.17. Rozważmy $E \neq \varnothing$ oraz $X \coloneqq \mathcal{P}(E)$ - zbiór wszystkich podzbiorów zbioru E. Na zbiorze X rozważamy działanie $A \bullet B \coloneqq A \cup B$. Zbadać własności tego działania.

Zadanie 2.2.18. Dla ustalonego $d \in \mathbb{N}$ nie będącego kwadratem liczby naturalnej w zbiorze $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] \coloneqq \left\{a + b\sqrt{d}i : \ a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ wprowadzamy dwa działania: dodawanie i mnożenie liczb zespolonych. Sprawdzić, które z własności spełniają te działania.

★ **Zadanie 2.2.19.** Niech W będzie dowolnym zbiorem, oraz X zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru W. Sprawdzić, czy $(X, \div)$ jest grupą abelową, gdzie $\div$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów tzn. $A \div B \coloneqq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Zadanie 2.2.20. Rozważmy $G \coloneqq \mathbb{C} \times \mathbb{S}^1$ (gdzie $\mathbb{S}^1$ to okrąg o promieniu 1 na płaszczyźnie zespolonej, czyli $\mathbb{S}^1 \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$) z działaniem $(a, b) \cdot (c, d) \coloneqq \left(\frac{a}{d} + c, bd\right)$.

a) udowodnić, że jest to rzeczywiście działanie na G,

b) udowodnić, że działanie jest łączne w G,

c) udowodnić, że istnieje element neutralny działania w G,

d) udowodnić, że dla każdego elementu z G istnieje element symetryczny,

e) sprawdzić, czy działanie jest przemienne w G,

f) odpowiedzieć na pytanie, czy grupa jest abelowa.

Zadanie 2.2.21. $A \coloneqq \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$, gdzie $[a, b]$ jest przedziałem domkniętym o końcach a i b. Jeśli $a = b$ to $[a, b] = \{a\}$. Definiujemy działanie $[a, b] \oplus [c, d] \coloneqq [a + c, b + d]$. Pokazać, że $(A, \oplus)$ nie jest grupą.

Zadanie 2.2.22. Na zbiorze uczniów klasy 2a w pewnym krakowskim liceum wprowadzamy działanie, które dwóm elementom tego zbioru przypisuje element młodszy[42]. Zbadać, jakie własności ma to działanie i czy zbiór z tym działaniem tworzy grupę.

[42] Dla sformalizowania rozumowania i ułatwienia można przyjąć, że osoba jest młodsza, gdy jej PESEL wyraża się mniejszą liczbą.

3.2 Teoria grup

Zadanie 1.

Zadanie 2.

Zadanie 3. Jest łączne, jest przemienne, posiada element neutralny -1. Elementem symetrycznym do x jest $-x-2$.

Zadanie 4. Tak. Element neutralny e, elementem symetrycznym do x jest $e^{\frac{1}{\ln x}}$.

Zadanie 5. Nie jest łączne, nie jest przemienne, nie posiada elementu neutralnego, nie posiada elementów symetrycznych.

Zadanie 6. Nie jest grupą.

Zadanie 7. Jest grupą abelową.

Zadanie 8.

a)

$\bigoplus$	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

b) $e = 0$,

x	$-x$
0	0
1	2
2	1

c) tak

Zadanie 9. dowód

Zadanie 10. dowód

Zadanie 11. dowód

Zadanie 12. dowód

Zadanie 13. Element neutralny to $(0,0)$, a elementem symetrycznym do (a,b) jest $(-a,-b)$.

Zadanie 14. Element neutralny to $(1,0)$, a elementem symetrycznym do (a,b) jest $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

Zadanie 15. Jest łączne, nie jest przemienne, nie posiada elementu neutralnego, nie posiada elementów symetrycznych.

Zadanie 16. Nie jest łączne, nie jest przemienne, nie posiada elementu neutralnego, nie posiada elementów symetrycznych.

Zadanie 17. Jest łączne, jest przemienne, posiada element neutralny $\varnothing$. Elementem symetrycznym do zbioru pustego jest zbiór pusty, a do pozostałych zbiorów nie ma elementu symetrycznego.

Zadanie 18.

- Dla dodawania: jest łączne i przemienne; elementem neutralnym jest $(0,0)$, a elementem symetrycznym dla $a + b\sqrt{d}i$ jest $-a - b\sqrt{d}i$.

- Dla mnożenia: jest łączne i przemienne; elementem neutralnym jest $(1, 0)$, elementy symetryczne istnieją tylko dla 1 oraz -1 i wynoszą odpowiednio 1 oraz -1.
- Zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania, ale nie zachodzi rozdzielność dodawania względem mnożenia.

Zadanie 19. Jest łączne i przemienne. Elementem neutralnym jest $\varnothing$. Elementem symetrycznym do zbioru A jest ten sam zbiór A.

Zadanie 20.

a) dowód

b) dowód

c) Elementem neutralnym jest $e = (0, 1)$

d) Elementem symetrycznym do (a, b) jest $\left(-ab, \frac{1}{b}\right)$.

e) Nie jest.

f) Nie jest abelowa.

Zadanie 21. dowód

Zadanie 22. Jest łączne i przemienne. Elementem neutralnym jest osoba najstarsza. Element symetryczny posiada jedynie element najstarszy i jest nim on sam. Nie jest to grupa.