

Zadanie 12. Rozważmy turniej siatkarski, w którym bierze udział 25 drużyn. Każda drużyna rozegrała z każdą dokładnie jeden mecz i nie było remisów. Niech w_i oznacza liczbę wygranych drużyny i , zaś p_i liczbę porażek drużyny i dla $i \in \{1, 2, 3, \dots, 25\}$. Wykazać równość:

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + \dots + w_{25}^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \dots + p_{25}^2,$$

którą krócej możemy zapisać:

$$\sum_{i=1}^{25} w_i^2 = \sum_{i=1}^{25} p_i^2.$$

Zadanie 13. Oblicz długość boku n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1.

Zadanie 14. Udowodnij, że jeśli $a > 0$ i $b > a + c$, to funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe.

Zadanie 15. Niech dany będzie wielomian $W(x) = x^5 + x^2 + 1$. Liczby x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 są jego różnymi pierwiastkami (miejscami zerowymi). Oblicz wartość wyrażenia

$$(x_1^2 - 2)(x_2^2 - 2)(x_3^2 - 2)(x_4^2 - 2)(x_5^2 - 2).$$

Termin: grudzień

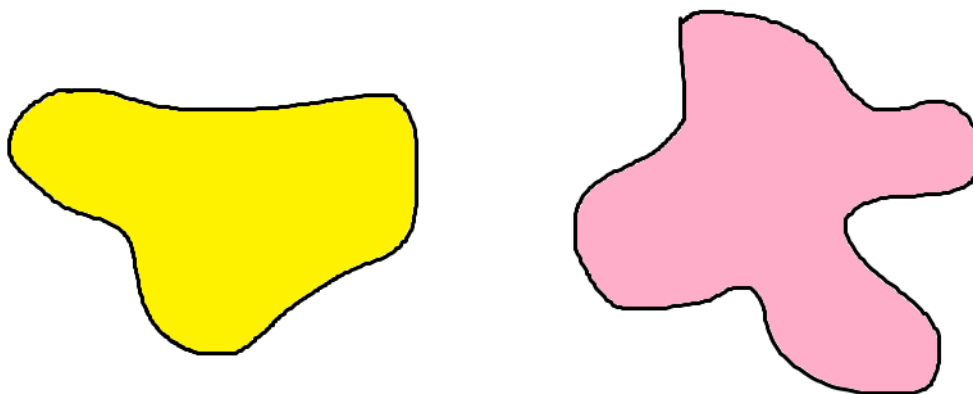
Zadanie 16. Określić wraz z uzasadnieniem, które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe.

- 1) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : y > x + 1$
- 2) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y > x + 1$
- 3) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y > x + 1$
- 4) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : y > x + 1$
- 5) $\forall y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : y > x + 1$
- 6) $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : y > x + 1$
- 7) $\exists y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : y > x + 1$
- 8) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : y > x + 1$

Zadanie 17. Pewien uczeń Sobieskiego jechał do szkoły na hulajnodze elektrycznej z prędkością 10 km/h. Z jaką prędkością powinien wracać ze szkoły, aby średnia prędkość na całej trasie (do szkoły i ze szkoły) była równa 20 km/h?

Zadanie 18. Oblicz $\log(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}})$.

Zadanie 19. Wykaż, że istnieje prosta, która dzieli dokładnie na pół (pod względem powierzchni) zarówno figurę żółtą jak i różową.



Zadanie 20. Z punktu $A(2022, 2022)$ rysujemy łamaną poprzez poprowadzenie odcinka długości 1 w jednym z dowolnych czterech kierunków (pravo, lewo, góra, dół). Kontynuujemy rysowanie poprzez dorysowanie kolejnych odcinków w jednym z czterech kierunków z punktu, w którym kończy się poprzedni odcinek. Ile jest dróg długości n , które kończą się na prostej o równaniu $y = 2022$?

Termin: styczeń

Zadanie 21. Pewien szachista S aby pojechać na turniej musi rozegrać trzy partie jedna po drugiej i wygrać dwie partie z rzędu. Jako przeciwników ma graczy A i B . Pierwszy z nich należy do klasy mistrzowskiej, a drugi jest początkującym amatorem. W jakiej kolejności powinien z nimi grać: $A-B-A$, czy $B-A-B$?

Zadanie 22. Wiemy, że $a + b + c < 0$ oraz równanie $ax^2 + bx + c = 0$ jest sprzeczne. Jaki znak ma c ?

Zadanie 23. O godzinie 12:00 wskazówki zegara pokrywają się. O której godzinie pokryją się ponownie?

Zadanie 24. Wykaż, że ze środkowych w dowolnym trójkącie również można zbudować trójkąt.

Zadanie 25. Niech $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in A$. Rozwiąż równanie $\operatorname{sgn}(|f(x) - g(x)|) = 1$.

Rozwiązanie 1. Liczymy po kolei

$$y = (10^{10})^{10^{10}} = 10^{10 \cdot 10^{10}} = 10^{10^{11}}$$

. Tak więc:

$$y^y = (10^{10^{11}})^{10^{10^{11}}} = 10^{10^{11} \cdot 10^{10^{11}}} = 10^{10^{11+10^{11}}}.$$

A zatem liczba y^y ma $10^{11+10^{11}} + 1$ cyfr (bo liczba 10^k ma $k + 1$ cyfr).

Rozwiązanie 2. Wskazówka podpowiada nam, że warto zająć się czymś, czego nie ma, czego brakuje. W powyższym ciągu „brakuje” następujących liczb: 3,5,6,9,10,12,13,15,18,20,21,23,24,25,27, 30, 31, 32,33,34,35,36,37,38,39,40,42,43. Co je łączy? Wszystkie te liczby są powiązane z trójką i piątką: są ich wielokrotnościami lub zawierają te cyfry. Tak więc następną liczbą będzie 46.

Rozwiązanie 3. Zauważmy, że każdą liczbę n można zapisać w postaci $n = \frac{n^3}{n^2}$. Zarówno licznik jak i mianownik są liczbami złożonymi, więc w podany sposób można przedstawić każdą liczbę naturalną dodatnią.

Rozwiązanie 4. Po przeniesieniu 4 na prawą stronę mamy iloczyn czterech liczb całkowitych równy 4. Co więcej liczby te są różne, bo a, b, c, d były różne. Liczba 4 ma łącznie 4 różne dzielniki całkowite, więc powyższy iloczyn składa się z liczb: $-2, -1, 1, 2$. Bez straty ogólności zachodzi więc:

$$\begin{cases} x - a = -2, \\ x - b = -1, \\ x - c = 1, \\ x - d = 2. \end{cases}$$

Dodając stronami otrzymujemy $4x - (a + b + c + d) = 0$ skąd $x = \frac{a + b + c + d}{4}$.

Rozwiązanie 5. Rozważmy liczbę $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ciężko stwierdzić, czy ta liczba jest wymierna, czy nie, ale w tej chwili nie ma to znaczenia. Są jednak dwie możliwości:

- jeśli jest ona wymierna, to znaleźliśmy takie liczby a i b , bo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
- jeśli natomiast jest ona niewymierna, to podnosząc ją do potęgi $\sqrt{2}$ otrzymamy liczbę wymierną,

$$\text{bowiem } \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

To oznacza, że takie liczby istnieją, choć z powyższego rozumowanie nie jesteśmy w stanie wskazać, która para jest dobra.

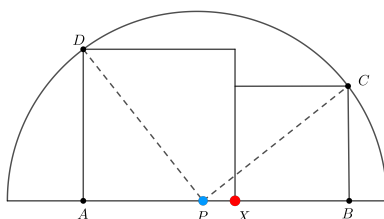
Jest to przykład dowodu niekonstruktywnego, czyli takiego, w którym dowodzimy, że coś istnieje (np. liczba, zbiór, funkcja), jednocześnie nie podając jak ten obiekt wygląda. Co ciekawe, dopiero w roku 1930 wykazano, że liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest niewymierna.

v_1 – prędkość Intercity, $v_2 = 1,25v_1$ – prędkość Pendolino, $s_1 = s_2 = s$. Wtedy:

$$\frac{\frac{s}{v_1} - \frac{s}{1,25v_1}}{\frac{s}{v_1}} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{1,25v_1}}{\frac{1}{v_1}} \cdot 100\% = \frac{1 - \frac{4}{5}}{1} \cdot 100\% = \frac{1}{5} \cdot 100\% = 20\%,$$

Rozwiązanie 7. Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku, przy czym P jest tak wybrany na AB , że $|AP| = |BC|$ oraz $|PB| = |AD|$. Z twierdzenia Pitagorasa: $|PC| = |PD|$. Tak więc punkt P leży na średnicy półokręgu i jest równo odległy od dwóch punktów na półokręgu. Musi być zatem środkiem tego półokręgu.

Z jednej strony $|PC| = \sqrt{a^2 + b^2}$, gdzie a, b to odpowiednio boki kwadratów, a z drugiej $|PC| = r = \text{const.}$. Tak więc niezależnie od długości boków dwóch kwadratów liczba $\sqrt{a^2 + b^2}$ jest stała, a zatem suma pól kwadratów, czyli $a^2 + b^2$ jest stała. Punkt X można więc umieścić gdziekolwiek – szukane pole będzie zawsze wynosić tyle samo.


$$(2x - 3)(2x - 17) = 4x^2 - 40x + 51 \leq 4x^2 - 40[x] + 51 = 0.$$

Rozważmy po kolei przypadki:

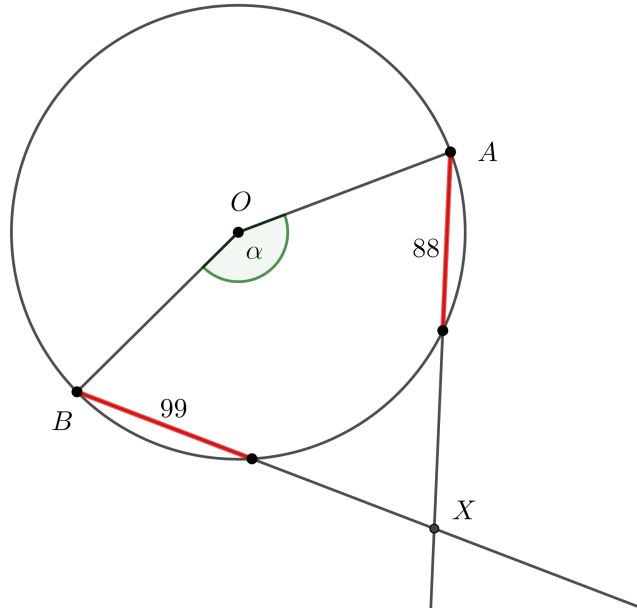
- $[x] = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{40 - 51}$ Sprzeczność,
- $[x] = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{29}$,
- $[x] = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{69}$,
- $[x] = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{109}$,
- $[x] = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{149}$,
- $[x] = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{189}$,
- $[x] = 7 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{229}$,
- $[x] = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{269}$,

Sprawdzając teraz, czy część całkowita otrzymanych *iksów* jest równa odpowiednim liczbom całkowitym (np. czy $\lceil \frac{1}{2}\sqrt{109} \rceil = 4$) otrzymujemy równość tylko w czterech przypadkach, dla: $x \in \{\frac{1}{2}\sqrt{29}, \frac{1}{2}\sqrt{189}, \frac{1}{2}\sqrt{229}, \frac{1}{2}\sqrt{269}\}$

[illegible]

Rozwiązanie 10. Suma wszystkich elementów zbioru A wynosi $\frac{1+2022}{2} \cdot 2022 = 2023 \cdot 1011 = 2\,045\,253$. Suma elementów podzbioru zbioru A będzie równa $2\,045\,247 \Leftrightarrow$ suma elementów dopełnienia tego zbioru będzie równa 6 . Ale takimi podzbiórmi są jedynie $\{6\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}$. Takich zbiorów jest 4 , a więc szukanych w zadaniu zbiorów też jest 4 .

Rozwiązanie 11. Narysujmy promienie do końców obu boków i wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



Stukąt można podzielić promieniami na 100 trójkątów równoramiennych, gdzie każdy ma między ramionami kąt $\frac{360^\circ}{100}$. Zaznaczony na rysunku kąt α jest wyznaczony przez 12 takich trójkątów – ma zatem miarę $12 \cdot \frac{360^\circ}{100} = 43,2^\circ$. W każdym takim trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę $\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{100}\right) : 2 = 88,2^\circ$. Jest to więc miara kąta OAX oraz OBX . Zatem z sumy kątów w czworokącie $| \angle AXB | = 360^\circ - 43,2^\circ - 2 \cdot 88,2^\circ = 140,4^\circ$. Tak więc proste przecinają się pod kątem $140,4^\circ$ (lub $39,6^\circ$ gdy chcemy mieć kąt ostry).

Rozwiązanie 12. Zauważmy, że $\sum_{i=1}^{25} w_i = \sum_{i=1}^{25} p_i$, bo każdemu zwycięstwu odpowiada dokładnie jedna porażka. Rozpiszmy:

$$\sum_{i=1}^{25} w_i^2 - \sum_{i=1}^{25} p_i^2 = \sum_{i=1}^{25} (w_i^2 - p_i^2) = \sum_{i=1}^{25} (w_i - p_i)(w_i + p_i) = \dots$$

Wiemy ponadto, że dla każdego i zachodzi $w_i + p_i = n - 1$ (bo to liczba gier każdego gracza). Tak więc:

$$\dots = \sum_{i=1}^{25} (w_i - p_i)(n - 1) = (n - 1) \sum_{i=1}^{25} (w_i - p_i) = (n - 1) \left(\sum_{i=1}^{25} w_i - \sum_{i=1}^{25} p_i \right) = (n - 1) \cdot 0 = 0.$$

Przenosząc na drugą stronę otrzymujemy tezę.

Rozwiązanie 13. Z twierdzenia cosinusów

$$x^2 = 1 + 1 - 2 \cos \left(\frac{360^\circ}{n} \right).$$

Zatem

$$x = \sqrt{2 - 2 \cos \left(\frac{360^\circ}{n} \right)} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \left(2 \cdot \frac{180^\circ}{n} \right)} = \sqrt{2} \sqrt{2 \sin^2 \frac{180^\circ}{n}} = 2 \left| \sin \frac{180^\circ}{n} \right| = 2 \sin \frac{180^\circ}{n},$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ oraz faktu, że kąt $\frac{180^\circ}{n}$ należy do pierwszej ćwiartki.

Rozwiązanie 14. Rozważmy dwa przypadki:

- Jeśli $c < 0$, to $-c > 0$. Wtedy $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + 4a \cdot (-c) > 0$, a więc są dwa rozwiązania.
- Jeśli $c \geq 0$. Wtedy $a + c > 0$ oraz $\Delta = b^2 - 4ac > (a + c)^2 - 4ac = a^2 - 2ac + b^2 = (a - c)^2 \geq 0$, a więc $\Delta \geq 0$.

Rozwiązanie 15. Skoro wielomian ma 5 pierwiastków i jest stopnia 5, to możemy go zapisać w postaci $x^5 + x^2 + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$. Podstawiając $x = \sqrt{2}$ oraz $x = -\sqrt{2}$ otrzymujemy:

$$3 + 4\sqrt{2} = (\sqrt{2} - x_1)(\sqrt{2} - x_2)(\sqrt{2} - x_3)(\sqrt{2} - x_4)(\sqrt{2} - x_5)$$

oraz

$$3 - 4\sqrt{2} = (-\sqrt{2} - x_1)(-\sqrt{2} - x_2)(-\sqrt{2} - x_3)(-\sqrt{2} - x_4)(-\sqrt{2} - x_5).$$

Wyciągając znaki „ $-$ ” przed nawiasy z drugiego wyrażenia, a następnie mnożąc powyższe dwie równości stronami otrzymujemy:

$$(3+4\sqrt{2})(3-4\sqrt{2}) = -(\sqrt{2}-x_1)(\sqrt{2}-x_2)(\sqrt{2}-x_3)(\sqrt{2}-x_4)(\sqrt{2}-x_5)(\sqrt{2}+x_1)(\sqrt{2}+x_2)(\sqrt{2}+x_3)(\sqrt{2}+x_4)(\sqrt{2}+x_5).$$

Stosując wzory skróconego mnożenia po obu stronach otrzymujemy

$$9 - 32 = -(2 - x_1^2)(2 - x_2^2)(2 - x_3^2)(2 - x_4^2)(2 - x_5^2).$$

Wyciągając ponownie minusy przed nawiasy po prawej otrzymujemy, że szukana wartość to -23 .

Rozwiązanie 16. 1) fałsz np. dla $x = 1, y = 2$.

2) prawda, ponieważ dla dowolnego x możemy przyjąć $y := x + 2$

3) prawda np. dla $x = 2, y = 5$

4) fałsz, ponieważ gdyby taki x istniał, to wzięlibyśmy $y := x$ i byłoby $x > x + 1$ – sprzeczność.

5) fałsz np. dla $x = 6, y = 5$

6) prawda, ponieważ dla dowolnego y możemy przyjąć $x := y - 3$

7) prawda, np. dla $x = 3, y = 5$

8) fałsz, ponieważ gdyby taki y istniał, to wzięlibyśmy $x := y$ i byłoby $y > y + 1$ – sprzeczność.

Rozwiązanie 17. Wprowadźmy oznaczenia:

$v_1 = 10 \frac{m}{s}$ – prędkość do szkoły, v_2 – prędkość ze szkoły, $s_1 = s_2 = s$. Wtedy:

$$v_{sr} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{10} + \frac{s}{v_2}} = 20$$

Skracając s otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{v_2}} &= 20. \\ 2 &= 20 \left(\frac{1}{10} + \frac{20}{v_2} \right) \\ 2 &= 2 + \frac{20}{v_2} \\ 0 &= \frac{1}{v_2}, \end{aligned}$$

a zatem prędkość powrotna musiałaby być nieskończenie duża. Tak więc szukana prędkość nie istnieje.

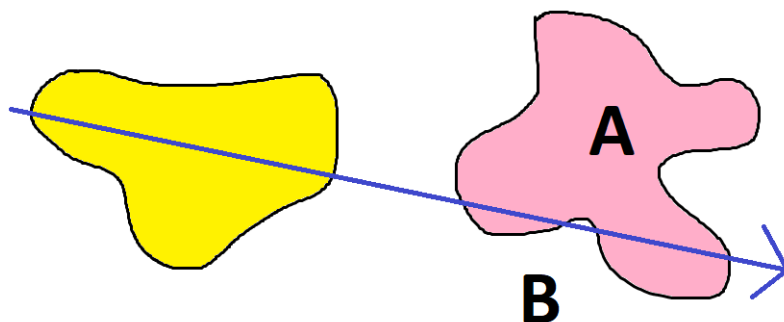
Rozwiązanie 18. Niech $\log(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}) = x$. Z definicji:

$$\begin{aligned} 10^x &= \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}} \quad |^2 \\ 10^{2x} &= 3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} + 3 - \sqrt{5} \\ 10^{2x} &= 6 + 2\sqrt{9 - 5} \\ 10^{2x} &= 6 + 4 \\ 10^{2x} &= 10 \end{aligned}$$

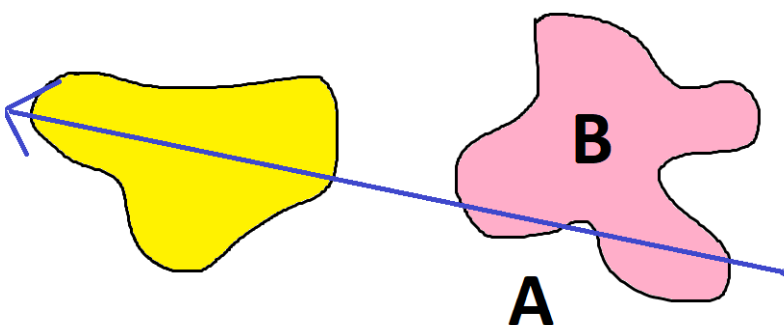
z różnowartościowości:

$$\begin{aligned} 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Rozwiązanie 19. Narysujmy dowolną prostą, która dzieli żółtą figurę na dwie części o tym samym polu oraz wybierzmy jej zwrot (zaznaczony strzałką). Narysowana prosta podzieliła różową figurę na dwie części: A po lewej i B po prawej. Oczywiście jedna z części A lub B może być pusta.



Bez straty ogólności $\text{pole}(A) \neq \text{pole}(B)$. Zmieniamy następnie nachylenie prostej (obracając ją o kąt np. zgodnie z ruchem wskazówek zegara) i ponownie otrzymujemy podział różowej figury na dwie części i tak samo oznaczamy je A i B . W pewnym momencie otrzymamy obrót o 180° . Prosta ta pokryje się z naszą wyjściową prostą, tylko będzie mieć zwrot w drugą stronę.



Strzałka wskazuje kierunek przeciwny, więc części A i B zamieniły się miejscami. Na początku $\text{pole}(A) \neq \text{pole}(B)$, a więc teraz $\text{pole}(B) \neq \text{pole}(A)$. Pole zmienia się wraz z obrotem w sposób ciągły, a więc skoro najpierw różnica pól była dodatnia, a potem ujemna, to gdzieś pomiędzy musi istnieć obrót o taki kąt, że pola są równe¹

Zadanie to jest dwuwymiarową wersją twierdzenia o kanapce z szynką i serem (które jest w trójwymiarze), mówiącego, że dowolną kanapkę z szynką i serem można przeciąć jednym cięciem tak, aby w każdej z dwóch części było dokładnie tyle samo sera, szynki i chleba.

Rozwiązanie 20. Wprowadźmy oznaczenia:

- ruch w lewo: 01
- ruch w prawo 10
- ruch w górę: 11
- ruch w dół: 00

Wykonamy n ruchów, więc utworzymy ciąg długości $2n$ składający się z cyfr 0 i 1. Skoro zaczynamy „na wysokości” 2022 i na niej chcemy skończyć, to interesują nas takie drogi, w których jest tyle samo ruchów w górę co w dół. Szukamy więc ciągów, w których jest tyle samo jedynek co zer, czyli po n . Wystarczy więc wybrać, na których z $2n$ miejsc ma stanąć n jedynek. Można to zrobić na $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$ możliwości.

¹Formalnie korzysta się tutaj z własności Darboux, która mówi, że jeśli funkcja jest ciągła oraz przyjmuje dla jakiegoś argumentu wartość dodatnią i dla jakiegoś ujemną, to między tymi argumentami jest taki, dla którego wartość funkcji jest równa 0. Tutaj naszą funkcją jest różnica $\text{pole}(A) - \text{pole}(B)$.