

$\hbar=6,63 \cdot 10^{-34}$ J s $\pi=3,141592$

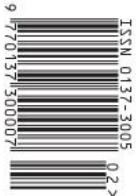
NR 2 (62) 2026

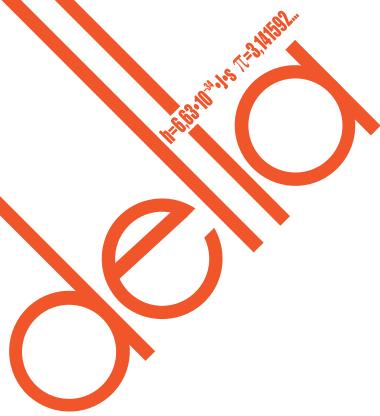
CENA 9 zł VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 / NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA

Dirichlet
w górach

s. 4





17-66-10-9-1-8 7-3-14-15-2

SPIS TREŚCI NUMERU 2 (621) 2026

Pola i punkty kratowe

Grzegorz Łukaszewicz

str. 1

Dirichlet w górach

Paweł Rafał Bieliński

str. 4

Zadania

str. 5

Rzeczywiście zespolona?

Patryk Michalski

str. 6

Dwanaście

Bartłomiej Pawlik

str. 9

Sortowanie naleśników

Marcin Peczarski

str. 10

Genetyka w czwartym wymiarze

Marta Fikus-Kryńska

str. 12

O obwodach poliapezów

Piotr Pikul

str. 14

Klub 44

str. 17

Prosto z nieba: Sześć miliardów ton na sekundę

str. 22

Niebo w lutym

str. 23

Punkty izogonalnie sprzężone

Bartłomiej Bzdęga

str. 25

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej; dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, prof. UW; dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący; dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW; prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UWr; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UWr; prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański; prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący; dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński; dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak; dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN; prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje collegium w składzie: Michał Bejger, Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nacz., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Jan Horubała, Tomasz Kazana, Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nacz., Anna Rudnik, Marzanna Wawro – sek. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.

Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.
www.ado.com.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpres.pl (tylko instytucje)

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

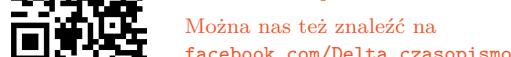
Na stronie Empiku *Delta* można zamówić co miesiąc:
www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl



Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

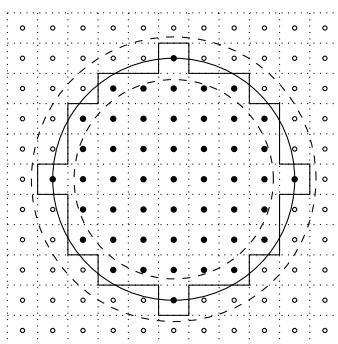
Pola i punkty kratowe

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*

*Instytut Matematyki Stosowanej
i Mechaniki UW



Carl Friedrich Gauss (1777–1855)



Rys. 1. Okrąg $C(4)$ i okręgi $C(4 \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$ pomagające oszacować liczbę punktów kratowych

$r = \sqrt{n}$	$N(n)$	$N(n)/n$
1	5	5
2	13	3,25
3	29	3,22
4	49	3,06
5	81	3,24
6	113	3,14
7	149	3,04
8	197	3,08
9	253	3,12
10	317	3,17
20	1257	3,14
30	2821	3,13
100	31417	3,1417
200	125629	3,1407
300	282697	3,1411

Rys. 2

$r = \sqrt{n}$	$N(n)$	$N(n)/n \approx \pi$
400	502 625	3,14141
500	785 349	3,14139
1 000	3 141 549	3,141549
10 000	314 159 221	3,141592
100 000	31 415 939 281	3,141594
200 000	125 663 759 077	3,141594

Rys. 4

W artykule *Obliczenia pól i objętości – trzy metody geometryczne*, Δ_{25}^2 , opisaliśmy trzy geometryczne sposoby obliczania pól figur płaskich. Celem tego artykułu jest pokazanie, jak można aproksymować pole koła o promieniu $r = \sqrt{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną, za pomocą zliczania punktów kratowych zawartych w tym kole i na jego brzegu. Pokażemy także, że w przypadku wielokątów o wierzchołkach w punktach kratowych znajomość liczby punktów kratowych w ich wnętrzach i na ich brzegach wystarcza do dokładnego obliczenia pól tych wielokątów.

Obliczenia dla okręgu. Oznaczmy przez $N(n)$ liczbę punktów kratowych na i wewnętrz okręgu $C(\sqrt{n})$ o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = \sqrt{n}$ (patrz rys. 1).

Jednym z pierwszych uczonych, którzy postawili pytanie o wartość $N(n)$, był Carl Friedrich Gauss. W roku 1837 napisał na ten temat artykuł. Podał w nim swoje obliczenia dla naturalnych r w zakresie od 1 do 300, patrz tabela na rysunku 2. Z tabeli możemy wynioskować, że wartości $\frac{N(n)}{n}$ dążą do liczby π , gdy n rośnie nieograniczenie. Aby to pokazać, oszacujmy najpierw różnicę $|N(n) - \pi n|$. Skoro $N(n)$ jest równe sumie pól kwadratów, których środki leżą na i wewnętrz okręgu $C(\sqrt{n})$, to jest jasne (patrz rys. 1), że

$$\pi \left(\sqrt{n} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \leq N(n) \leq \pi \left(\sqrt{n} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2,$$

skąd wynika, że

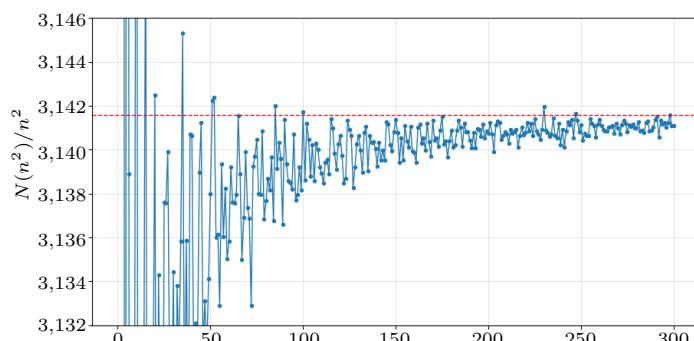
$$(1) \quad \left| \frac{N(n)}{n} - \pi \right| \leq \pi \left(\sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{1}{2n} \right).$$

Prawa strona ostatniej nierówności dąży do zera wraz z nieograniczonem wzrostem n . Powyższą nierówność możemy odczytać jako

$$\left| \frac{N(n) - \pi n}{\pi n} \right| \leq \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{1}{2n},$$

co oznacza, że wartość względna (w stosunku do pola koła o promieniu \sqrt{n}) różnicy pomiędzy liczbą punktów kratowych w tym kole, razem z jego brzegiem, a polem tego koła dąży do zera wraz ze wzrostem promienia tego koła. Wartość względna tej różnicy jest rzędu $\frac{1}{\sqrt{n}}$, czyli odwrotnością promienia koła.

Na podstawie tabeli z rysunku 2 można obliczyć tę różnicę z dużą dokładnością, biorąc np. za liczbę π jej przybliżenie Archimedesowe $\frac{22}{7}$.



Rys. 3. Ilustracja zbieżności $N(n^2)/n^2 \rightarrow \pi$

Wykres na rysunku 3 pokazuje, w jaki sposób $\frac{N(r^2)}{r^2}$ zbliża się do liczby π wraz ze wzrostem r w zakresie $0 < r \leq 300$. Tabela na rysunku 4 pokazuje wyliczenia dla większych wartości r .

Nasuwają się dwa pytania.

- (i) *Czy istnieją wzory określające $N(n)$ w zależności od n ?*
- (ii) *Czy może istnieją figury płaskie, dla których liczba punktów kratowych leżących w ich wnętrzu i na ich brzegu wyraża nie tylko w przybliżeniu, ale – poprzez konkretną formułę – dokładnie pola tych figur?*

Podloga $\lfloor x \rfloor$ liczby x to największa liczba całkowita nie większa od x .

Przykładowe wartości $N(n)$:

$$\begin{aligned} N(0) &= 1 \\ N(1) &= 1 + 4 = 5 \\ N(2) &= 1 + 4 \cdot 2 = 9 \\ N(3) &= 1 + 4 \cdot 3 - 4 = 9 \\ N(4) &= 1 + 4 \cdot 4 - 4 = 13 \end{aligned}$$

Na oba te pytania odpowiedź jest pozytywna. Odpowiedzią na pytanie (i) jest **formuła Gaussa**:

$$(2) \quad N(n) = 1 + 4 \left(\lfloor n \rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + \dots \right),$$

gdzie $\lfloor \cdot \rfloor$ jest funkcją podlogi. Łatwo stąd wyznaczyć bezpośrednio wartości dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (na marginesie). Z równości $N(2) = N(3)$ możemy wywnioskować, że na okręgu $C(\sqrt{3})$ nie ma żadnych punktów kratowych, a z tego, że $N(4) - N(3) = 4$, wynika, że na okręgu $C(\sqrt{4})$ jest ich 4.

Zanim przejdziemy do dowodu wzoru Gaussa, wykażemy jedną z jego konsekwencji, słynny **wzór Leibniza**:

$$(3) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Założymy, że \sqrt{n} jest liczbą naturalną nieparzystą.

Napiszmy wzór Gaussa (2) w postaci:

$$\frac{1}{4}(N(n) - 1) = \lfloor n \rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \dots \pm \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{n}} \right\rfloor \pm \theta\sqrt{n},$$

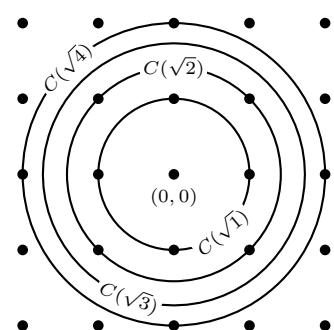
gdzie θ jest ułamkiem właściwym. Korzystamy tu z tego, że szereg jest naprzemienny, a moduły jego wyrazów tworzą ciąg nierosnący. Wtedy moduł reszty szeregu jest nie większy od modułu pierwszego odrzuconego wyrazu, czyli $\lfloor \frac{n}{\sqrt{n}+2} \rfloor$. Liczba ta jest mniejsza od liczby naturalnej $\lfloor \frac{n}{\sqrt{n}} \rfloor = \sqrt{n}$, można ją zatem zapisać jako $\theta\sqrt{n}$, gdzie θ jest jak wyżej.

Następny krok to zastąpienie funkcji podlogi ułamka samym ułamkiem. Ponieważ $\frac{k}{n} - \lfloor \frac{k}{n} \rfloor \leq 1$, a liczba zachowanych wyrazów szeregu jest równa $\frac{\sqrt{n}+1}{2} < \sqrt{n}$, więc

$$\frac{1}{4}(N(n) - 1) = n - \frac{n}{3} + \frac{n}{5} - \frac{n}{7} + \dots \pm \frac{n}{\sqrt{n}} \pm \theta\sqrt{n} \pm \theta'\sqrt{n},$$

gdzie θ' jest także ułamkiem właściwym. Dzieląc teraz obie strony przez n , otrzymujemy

$$\frac{1}{4n}(N(n) - 1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \pm \frac{\theta}{\sqrt{n}} \pm \frac{\theta'}{\sqrt{n}}$$



Rys. 5. Punkty kratowe na okręgach o promieniach \sqrt{n} dla $n = 1, 2, 3, 4$

Na przykład dla $n = 10$ wśród liczb $1, 2, \dots, 10$ mamy trzy będące postaci $4k+1$: 1, 5, 9. Przez 1 dzieli się wszystkie z powyższej dziesiątki, $10 = \lfloor \frac{10}{1} \rfloor$, przez 5 dzieli się dwie, $2 = \lfloor \frac{10}{5} \rfloor$, przez 9 dzieli się tylko jedna, $1 = \lfloor \frac{10}{9} \rfloor$. Przy tym $\lfloor \frac{10}{13} \rfloor$ i wszystkie następne wyrazy szeregu $[10] + [\frac{10}{5}] + [\frac{10}{9}] + [\frac{10}{13}] + \dots$ są równe zero.

dla liczb n przebiegających ciąg kwadratów liczb nieparzystych.

Biorąc pod uwagę zbieżność $\frac{N(n)}{n} \rightarrow \pi$ wynikającą z oszacowania (1) i zbiegając z n do nieskończoności, dostajemy wzór Leibniza (3).

Przejdzmy teraz do dowodu formuły Gaussa. Jeśli przez $R(n)$ oznaczymy liczbę punktów kratowych na okręgu $C(\sqrt{n})$, to $N(n) = R(0) + R(1) + \dots + R(n)$. Znając wartości $R(k)$ dla poszczególnych k , możemy obliczyć $N(n)$, i taka też była droga odkrycia powyższej formuły Gaussa. Rzecz sprowadza się zatem do pytania o liczbę pierwiastków całkowitych a, b równania

$$(4) \quad a^2 + b^2 = n$$

dla danej liczby naturalnej n . Mamy następujące:

Twierdzenie 1 (za [Hilbert, 1956]). *Liczba przedstawień liczby całkowitej n jako sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych jest równa czterokrotności różnic liczby dzielników liczby n o postaci $4k+1$ i liczby dzielników o postaci $4k+3$.*

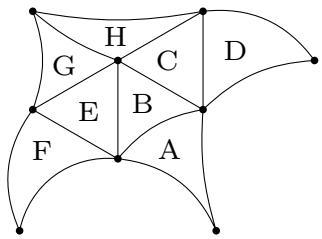
Dla przykładu $R(3) = N(3) - N(2) = 0$. Liczba pierwsza 3 ma jedynie dzielniki 1 i 3, więc na mocy powyższego twierdzenia $R(3) = 4(1 - 1) = 0$. Dalej: $R(4) = N(4) - N(3) = 4$. Wśród dzielników liczby 4 (czyli 1, 2, 4) nie ma dzielników postaci $4k+3$, więc z twierdzenia otrzymujemy $R(4) = 4(1 - 0) = 4$. I rzeczywiście, na okręgu $C(\sqrt{4})$ mamy cztery punkty kratowe, $(2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2)$, będące całkowitymi rozwiązaniami równania $a^2 + b^2 = 4$ (patrz rys. 5).

Bezpośrednie wykorzystanie Twierdzenia 1 dla obliczenia kolejnych $R(n)$, a następnie równości $N(n) = R(0) + R(1) + \dots + R(n)$ dla obliczenia $N(n)$ byłoby niezmiernie żmudne dla dużych n . Jest jednak dużo prostszy sposób obliczenia $N(n)$. Najpierw obliczamy liczbę dzielników postaci $4k+1$ dla wszystkich liczb naturalnych m nieprzekraczających n i od tej liczby odejmujemy liczbę dzielników postaci $4k+3$, też dla wszystkich $m \leq n$, otrzymując:

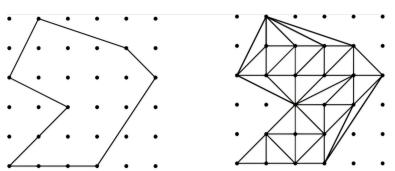
$$\left(\lfloor n \rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{13} \right\rfloor + \dots \right) - \left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + \dots \right)$$

Mnożąc powyższe wyrażenie przez 4 i dodając do niego jedynkę odpowiadającą punktowi kratowemu $(0,0)$, po przegrupowaniu wyrazów, otrzymujemy formułę (2). Bardziej formalne ujęcie rozważań przedstawionych w punkcie (i) można znaleźć w artykule Deltowym Michała Krycha [Krych, 2019].

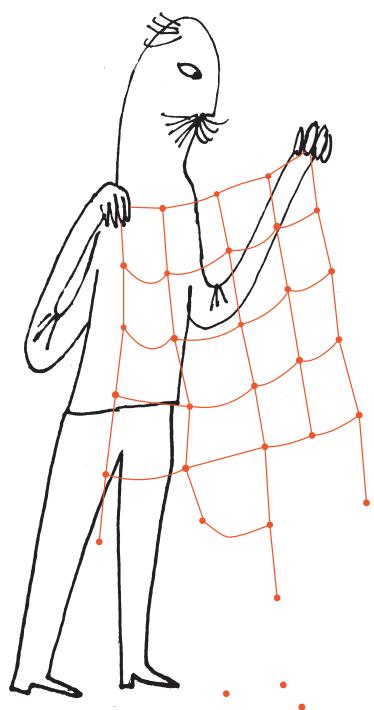
Obliczenia dla wielokątów. Przejdzmy do pytania (ii) o dokładne wyznaczenie pola za pomocą zliczania punktów kratowych. Jedną z możliwych odpowiedzi na to pytanie jest następujące twierdzenie z 1899 roku:



Rys. 6. Dołączając jeden wierzchołek i dwie krawędzie do obszaru A, otrzymujemy obszar B i mamy $3 + 2 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 - 3$. Dochodzimy w ten sposób do $15 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 9 - 3$ dla sumy pierwszych siedmiu obszarów. Na koniec dołączamy jedną krawędź zewnętrzna, jeden wierzchołek zewnętrzny staje się wtedy wierzchołkiem wewnętrznym i mamy $16 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 8 - 3$ dla całej figury



Rys. 7. Pole figury po lewej stronie obliczone ze wzoru (5) jest równe $A = 11 + \frac{1}{2}10 - 1 = 15$. Po prawej stronie jedna triangulacji tej figury. Każdy z 30 trójkątów podstawowych ma pole równe $\frac{1}{2}$



Bibliografia

- [Bagdasaryan, 2025] V. Bagdasaryan, G. Łukaszewicz, *Obliczenia pól i objętości – trzy metody geometryczne*, Δ_{25}^2 .
- [Detemple, 1974] D. Detemple, J. M. Robertson, *The equivalence of Euler's and Pick's theorems*, The Mathematics Teacher, Vol. 67, No. 3 (March 1974), pp. 222–226.
- [Górnicki, 2024] J. Górnicki, „Wodny” dowód twierdzenia Picka, Δ_{24}^{12} .
- [Hilbert, 1956] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometria Poglądowa*, PWN, 1956.
- [Krych, 2019] M. Krych, *Szereg Leibniza i punkty kratowe*, Δ_{19}^1 .
- [Lakatos, 2005] I. Lakatos, *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, Tikkun, 2005.
- [Olds, 2001] C. D. Olds A. Lax, G. P. Davidoff *The Geometry of Numbers*, The Mathematical Association of America, 2001.

Twierdzenie Picka. *Pole dowolnego prostego wielokąta P , którego wierzchołkami są punkty kratowe, jest dane wzorem*

$$(5) \quad A = W + \frac{1}{2}B - 1,$$

gdzie W jest liczbą punktów kratowych we wnętrzu P , a B jest liczbą punktów kratowych na brzegu P , wliczając wierzchołki.

Twierdzenie Picka łączy geometryczną teorię liczb z mierzeniem pól, czyli, jak sama nazwa wskazuje, z klasyczną geometrią. Sama jego natura jest jednakże topologiczna. Aby to zobaczyć, rozważmy prostszą, ale ogólniejszą sytuację. Niech G będzie figurą płaską, złożoną z segmentów trójkątnopodobnych o tym samym polu d , tak jak to widać na rysunku 6. Oznaczmy liczbę jej wierzchołków wewnętrznych przez W , zewnętrznych przez B , liczbę krawędzi przez K , a pole figury G przez A . Przypomnijmy ponadto równość Eulera: $V - E + F = 1$, gdzie V, E i F to, odpowiednio, liczby wierzchołków, krawędzi i ścian grafu narysowanego na płaszczyźnie bez przecinających się krawędzi.

W naszej sytuacji $V = W + B$, $F = \frac{A}{d}$ i $E = K$. Pokażemy, że $K = 3W + 2B - 3$. Rzeczywiście wzór ten zachodzi dla pojedynczego obszaru trójkątnopodobnego, gdyż mamy wtedy $K = 3$, $W = 0$, $B = 3$ i $3 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 3$. Jeśli do tego obszaru dołączymy podobny, przylegający do niego element naszej wyjściowej figury, to prawdziwość tego wzoru się nie zmieni, i tak będzie aż do ułożenia całej figury – rysunek 6 ilustruje, w jaki sposób dodawać kolejne obszary. Wstawiając teraz postać V, E i F do równości Eulera, dostaniemy

$$A = 2dW + dB - 2d.$$

Dla $d = \frac{1}{2}$ otrzymujemy stąd równanie (5).

Dla dowodu twierdzenia Picka wystarczy pokazać, po pierwsze, że każdy obszar z założeń tego twierdzenia można rozłożyć na trójkąty podstawowe, to znaczy niezawierające punktów kratowych w swoich wnętrzach ani na swoich bokach (z wyjątkiem wierzchołków) – dowód tej własności pomijamy, po drugie, że pole każdego trójkąta podstawowego jest równe $\frac{1}{2}$ i po trzecie, że dla całego obszaru zachodzi równość $K = 3W + 2B - 3$.

To, że pole każdego trójkąta podstawowego jest równe $\frac{1}{2}$, wynika z rozumowania użytego dla dowodu nierówności (1). Każdy trójkąt podstawowy można uzupełnić do równoległoboku niemającego punktów kratowych w swoim wnętrzu ani na krawędziach, a więc równoległoboku generującego siatkę opartą na punktach kratowych. Założymy, że pole równoległoboku siatki jest równe α . Wykorzystując otrzymaną siatkę do aproksymacji pola koła, podobnie jak powyżej, otrzymujemy:

$$\left| \alpha \frac{N(n)}{n} - \pi \right| \leqslant \frac{4D\pi}{\sqrt{n}},$$

gdzie D jest średnicą równoległoboku siatki. Jako że $\frac{N(n)}{n} \rightarrow \pi$ wraz ze wzrostem n , to $\alpha = 1$, a stąd $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

Dowód równości $K = 3W + 2B - 3$ dla obszaru wielobocznego przeprowadzamy jak powyżej, dobudowując kolejne trójkąty podstawowe.

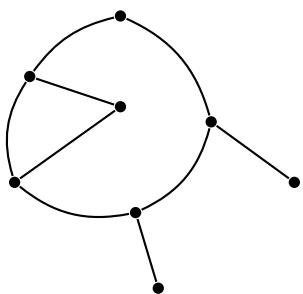
Warto porównać przedstawiony schemat dowodu twierdzenia Picka z dowodem Cauchy'ego równania Eulera dla wielościanów [Lakatos, 2005, str. 28–32], aby zdać sobie sprawę z czyhających pułapek natury topologicznej w trakcie dowodzenia metodą triangulacji. Na temat twierdzenia Picka, rozmaitych jego dowodów i uogólnień istnieje obszerna literatura. O powiązaniu tego twierdzenia z równaniem Eulera przeczytać można np. w [Detemple, 1974]. Ciekawe fizyczne intuicje związane z twierdzeniem Picka przedstawił Jarosław Górnicki w artykule „Wodny” dowód twierdzenia Picka (Δ_{24}^{12}).

- [Hilbert, 1956] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometria Poglądowa*, PWN, 1956.
- [Krych, 2019] M. Krych, *Szereg Leibniza i punkty kratowe*, Δ_{19}^1 .
- [Lakatos, 2005] I. Lakatos, *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, Tikkun, 2005.
- [Olds, 2001] C. D. Olds A. Lax, G. P. Davidoff *The Geometry of Numbers*, The Mathematical Association of America, 2001.

Dirichlet w górach Paweł Rafał BIELIŃSKI*

* Nauczyciel, Warszawa

Przyznajmy uczciwie, że połowa uczestników tych zawodów otrzymała maksymalną ocenę za to zadanie.



Graf, jaki jest, każdy widzi. Pisaliśmy o nich już nie raz, np. w Δ_{11}^3 , Δ_{24}^8 czy Δ_{25}^4 .

Nieczęsto zdarza się, żeby zadanie z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej (International Mathematical Olympiad, IMO) było dostępne dla ucznia szkoły podstawowej. Mamy na myśli coś, co da się wyjaśnić w ciągu, powiedzmy, jednego kółka matematycznego, bez konieczności wprowadzania trudnych pojęć, twierdzeń czy zaawansowanych narzędzi. Tym bardziej cieszą nas takie właśnie zadania, a jedno z nich pojawiło się nie tak dawno, bo w roku 2020. Przytoczymy (dość długą) treść w oryginalnym brzmieniu.

IMO 2020, zadanie 4. Dana jest liczba całkowita $n > 1$. Na zboczu góry znajduje się n^2 stacji kolejki linowej, każda na innej wysokości. Każda z dwóch firm obsługujących kolejkę, A i B, posiada dokładnie k wyciągów; każdy z nich umożliwia bezpośredni przejazd z jednej ze stacji na pewną stację położoną wyżej (bez zatrzymywania się po drodze). Wszystkie k wyciągów firmy A mają k różnych stacji początkowych oraz k różnych stacji końcowych, a ponadto jeśli jeden wyciąg rozpoczyna trasę wyżej od pewnego innego, to również kończy trasę wyżej od niego. Te same warunki są spełnione przez połączenia obsługiwane przez firmę B. Powiemy, że dwie stacje są połączone przez firmę, jeśli rozpoczynając ze stacji położonej niżej, można dojechać do stacji położonej wyżej, z użyciem wyłącznie połączeń (jednego lub więcej) obsługiwanych przez tę firmę (żadne inne sposoby przemieszczania się pomiędzy stacjami kolejki nie są dozwolone).

Wyznaczyć najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą k , dla której z całą pewnością (niezależnie od układu połączeń) istnieje para stacji połączonych przez obydwie firmy.

Dla matematyka jest czymś naturalnym przetłumaczenie treści tego zadania na język teorii grafów. Przy tym będziemy używać jedynie najprostszych jej pojęć. *Graf* jest strukturą złożoną z dwóch rodzajów elementów. Pierwszym z nich są *wierzchołki*, a drugim *krawędzie*, które stanowią połączenia między tymi pierwszymi. Każda krawędź łączy dwa wierzchołki, zwane jej *końcami*. Jest jasne, że taka struktura nadaje się do modelowania różnych rodzajów sieci, również tej niemal jawnie opisanej w zadaniu, złożonej ze stacji połączonych wyciągami.

Do rozwiązania naszego problemu użyjemy nie jednego, lecz dwóch grafów, A i B – po jednym dla każdej z dwóch firm. Wierzchołkami każdego z nich będą stacje kolejki linowej, natomiast krawędziami – wyciągi odpowiedniej firmy.

W danym grafie zbiór wierzchołków, które są między sobą połączone bezpośrednio lub pośrednio, nazywa się *spójną składową* lub po prostu *składową* tego grafu. Naszym celem jest więc pokazanie, że przy założeniach zadania i dla odpowiednio dużej liczby k pewne dwa wierzchołki należą do tej samej składowej grafu A oraz tej samej składowej grafu B. Korzystnie byłoby więc, gdyby w którymś z tych grafów zaistniała duża składowa (będzie wiele par stacji do wyboru), a w drugim składowych było niewiele (żeby dana para miała duże szanse znaleźć się w tej samej). Podany poniżej lemat jest sercem rozwiązania.

Lemat 1. *Jeśli każdy z grafów A i B ma mniej niż n składowych, to pewne dwa wierzchołki należą do tej samej składowej grafu A oraz tej samej składowej grafu B.*

Dowód. Ponieważ graf A ma n^2 wierzchołków podzielonych między mniej niż n składowych, więc któraś z jego składowych zawiera więcej niż n wierzchołków. W szczególności składowa ta ma więcej wierzchołków, niż istnieje składowych grafu B. Zatem pewne dwa z nich należą do tej samej składowej grafu B, spełniając tym samym warunki lematu. \square

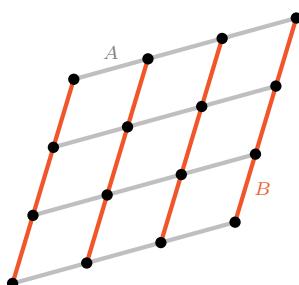
Być może większa część rozwiązania właśnie się dokonała. Pozostało jedynie określić, jak wielu wyciągów potrzeba, aby zagwarantować połączenie istniejących stacji w mniej niż n składowych.

Ponieważ stacje kolejki – wierzchołki grafów – położone są na różnych wysokościach, możemy ponumerować je liczbami naturalnymi $1, 2, 3, \dots, n^2$, od położonej najniżej do położonej najwyższej.

Lemat 2. Rozważamy wybrany z grafów A, B . Każda składowa tego grafu jest ścieżką, która nie zwraca. Ścisłej, jeśli do pewnej składowej należą wierzchołki $i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_t$, to jedyne krawędzie tej składowej są postaci $i_m i_{m+1}$.

Dowód. Z definicji spójnej składowej wynika wprost, że żadna z tych stacji nie może być połączona z żadną spoza tej listy. Z drugiej strony, dana stacja może być połączona bezpośrednio tylko z jedną wyższą od siebie i jedną od siebie niższą; istotnie, połączenie a i b z c , gdzie $a < b < c$, przeczyłoby założeniu, że wyższy start oznacza wyższy koniec; analogicznie dla $a > b > c$. Zatem jeśli połączone są stacje $i < j$, a także $j < l$, to musi zachodzić $j < l$. Rozumując tak dalej, dostajemy dowód naszej obserwacji. \square

W szczególności żaden z grafów A, B nie zawiera cyklu. Możemy teraz powiązać liczbę k z liczbą składowych grafu, a więc z lematem 1.



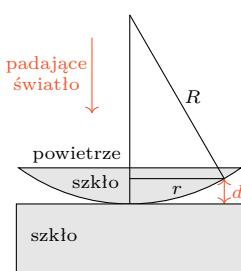
Pozostaje jeszcze jeden istotny szczegół. Czy jest to rzeczywiście minimalne k ? Innymi słowy, czy może zdarzyć się, że dwóch stacji o żądanej własności nie znajdziemy przy $k = n^2 - n$? Za odpowiedź niech posłuży schemat przedstawiony na marginesie (każdy kolor odpowiada połączeniom innej firmy).

Warto pokazywać uczniom zadania takie, jak to – wymagające, a jednak dostępne. Może nawet się zdarzyć, że zostanie rozwiązane przez samych uczniów. Ważne jest jednak, by nie zdradzać zbyt wcześnie jego źródła, aby problem nie został z góry uznany za niemożliwy do rozwiązania. Właściwie rozegrany, taki fortel może niejednej młodej osobie pokazać, jak wiele jest w jej zasięgu.



Zadania

Rozwiązania na str. 24



Przygotowała Magda CWOJDZIŃSKA

F 1137. Sonda kosmiczna znajduje się w przestrzeni międzyplanetarnej w odległości 570 000 km od Jowisza. Na pokładzie sondy znajduje się szpula magnetofonu o masie 1,3 kg i promieniu 12 cm, będąca walcem obracającym się wokół swojej osi. Szpula zostaje wprawiona w ruch obrotowy z okresem 8 s. Przyjmij, że oś obrotu szpuli pokrywa się z jedną z osi głównych sondy, a moment bezwładności całej sondy (bez szpuli) względem tej osi wynosi 1000 kg · m².

Zakładamy, że przed uruchomieniem magnetofonu sonda była nieruchoma i że nie działają na nią żadne siły zewnętrzne. Oblicz, o ile maksymalnie przesunie się środek tarczy Jowisza na fotografii wykonanej z sondy, w wyniku jej obrotu, po 2 minutach pracy magnetofonu.

F 1138. Na rysunku pokazano szklaną soczewkę o promieniu krzywizny $R = 3$ m umieszczoną na płaskiej płytce szklanej i oświetlonej od góry światłem białym. Wyznacz promień r prążków interferencyjnych – promień pierścienia Newtona – odpowiadający barwie niebieskiej 460 nm. Przyjmij, że $r \ll R$.

Przygotował Dominik BUREK

M 1843. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej $n > 1$ liczby $1, 2, \dots, 2n$ można połączyć w pary tak, że iloczyn sum liczb w parach jest kwadratem liczby całkowitej.

M 1844. Na tablicy 10×10 znajduje się pewna liczba mrówek, każda zasiada na innym polu. Co minutę każda mrówka przechodzi do sąsiedniego pola na wschód, na południe, na zachód albo na

północ. Kontynuuje drogę w tym samym kierunku tak długo, jak to możliwe. Kiedy mrówka dotrze do krawędzi tablicy, zmienia zwrot (utrzymując kierunek poruszania się). Wiadomo, że w ciągu godziny żadne dwie mrówki nie spotkały się na tym samym polu. Jaka jest maksymalna możliwa liczba mrówek na tablicy?

M 1845. Sfera przecina każdą z płaszczyzn ścian czworościanu foremnego wzdłuż okręgu. Promienie tych okręgów wynoszą odpowiednio 1, 2, 3 i 4. Czy promień sfery może być równy 5?

Rzeczywiście zespolona?

Patryk MICHALSKI*

* Student, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

O rozważaniach teoretycznych, które umożliwiły eksperymentalne potwierdzenie *indeterminizmu* (czyli nieprzewidywalności) kwantowych zjawisk, można przeczytać w Δ_{01}^5 oraz w Δ_{21}^2 .

Dowolną liczbę zespoloną można zapisać w postaci $z = a + ib$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Widać stąd, że istnieje jednoznaczna odpowiedniość między liczbami zespolonymi a parami liczb rzeczywistych. *Sprzężeniem zespolonym* liczby z nazywamy $\bar{z} = a - ib$. Zwieżle i eleganckie wprowadzenie do liczb zespolonych przedstawił Marek Kordos w Δ_{17}^{12} .

Równo wiek temu nastąpiło wielkie wzmożenie pracy wybitnych umysłów, które po kilku latach twórczego fermentu zaowocowało powstaniem mechaniki kwantowej w formie, jaką znamy dziś. Nowa teoria wymierzyła liczne ciosy „zdrowemu rozsądkowi”, sprowadzając na manowce nawet postaci pokroju Alberta Einsteina. Szczególnie silny zgrzyt z utartymi klasycznymi intuicjami – budzący głęboki niepokój twórcy teorii względności – wywołała zasadą głoszącą, że wynik pojedynczego pomiaru kwantowego nie jest przez nic z góry określony: można przewidzieć jedynie prawdopodobieństwo otrzymania danego wyniku. Spór dotyczący tej kwestii sprowadzał się w gruncie rzeczy do pytania, czy nasz świat jest, czy też nie jest deterministyczny – i został całkiem niedawno rozstrzygnięty na korzyść mechaniki kwantowej dzięki słynnym nierównościom Bella. Zdrowy rozsądek jak zwykle okazał się – cytując Einsteina – „zbiorem przesądów nabitych w dzieciństwie”.

Jeszcze inny problem nurtował twórców mechaniki kwantowej już u jej zarania, choć szybko o nim zapomniano. Dotyczył on pewnego szczególnego obiektu, który zdawał się nierozerwalnie spleciony z matematyczną maszynerią teorii, lecz zniknął, gdy tylko docierano w obliczeniach do wielkości, które rzeczywiście dały się zmierzyć. Tak pisał o tym Erwin Schrödinger w liście do Hendrika Lorentza z 6 czerwca 1926 roku [1]:

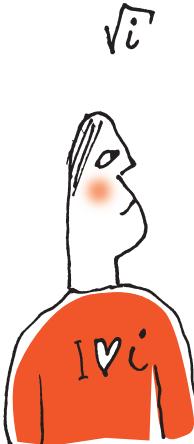
„Najbardziej rażące – i zasługujące na bezpośredni sprzeciw – jest tutaj użycie liczb zespolonych”.

Liczby zespolone to osobliwe stworzenia. Powstają jako rozszerzenie zbioru liczb rzeczywistych poprzez „dorzucenie” do niego jednostki *urojonej*, której kwadrat z definicji jest równy minus jeden: $i^2 = -1$. Jak sama nazwa wskazuje, na pierwszy rzut oka trudno tę wielkość odnieść do jakichkolwiek przyziemnych ludzkich doświadczeń. Dlaczego więc pojawia się w modelu opisującym rzeczywistość?

Trzeba zaznaczyć, że fizycy poznali liczby zespolone (i zaczęli je darzyć szczególnym uczuciem) na długo przed kwantowym przełomem. Sęk w tym, że w ramach klasycznych teorii służyły one wyłącznie jako potężne narzędzie ułatwiające rachunki. Bez liczb zespolonych klasyczna XIX-wieczna fizyka też by sobie poradziła – tylko potrzebowałaby do tego trochę więcej papieru. Z mechaniką kwantową było inaczej. Jednostka urojona wprosiła się do najbardziej fundamentalnych równań i nikt nie znalazł prostego sposobu, by się jej stamtąd pozbyć. Początkowe oburzenie Ojców Założycieli minęło jednak, gdy nowa teoria zaczęła osiągać pierwsze doniosłe sukcesy, a tym samym okazała się bardzo użytecznym narzędziem. Temat czekał, zamieciony pod dywan, budząc przez długi czas jedynie śladowe zainteresowanie środowiska naukowego.

Sytuacja zmieniła się pięć lat temu, gdy grupa fizyków pod kierunkiem Miguela Navascuésa rzuciła nieco światła na pytanie o rolę liczb zespolonych w kwantowomechanicznym formalizmie [2]. Pokazali oni, że przyjmując pewne standardowe założenia dotyczące matematycznej struktury teorii, żadna alternatywna wersja mechaniki kwantowej oparta wyłącznie na liczbach rzeczywistych nie jest w stanie odtworzyć wszystkich przewidywań wersji zespolonej. Co więcej, zaproponowali schemat umożliwiający eksperymentalne sprawdzenie, która wersja jest tą właściwą. Zanim jednak pochylimy się nad pomysłami stojącymi za tym wynikiem, przyjrzyjmy się bliżej, jak liczby zespolone pojawiają się w opisie kwantowych zjawisk – i jaką taktykę można by przyjąć, żeby się ich pozbyć.

Przywołamy najpierw najważniejszy spośród wspomnianych wyżej standardowych postulatów leżących u podstaw mechaniki kwantowej. Zgodnie z nim dowolnemu układowi fizycznemu przyporządkować można zbiór \mathcal{H} złożony z wektorów, który nazywa się *przestrzenią Hilberta*. W zbiorze \mathcal{H} zdefiniowane



Iloczyn skalarny dwóch wektorów

$\phi, \psi \in \mathcal{H}$ oznaczamy jako $\langle \phi | \psi \rangle$.

Działanie to ma następujące własności:

- $\langle \phi | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | \phi \rangle}$,
- Dla $\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ zachodzi
 $\langle \phi | \psi \rangle = c_1 \langle \phi | \psi_1 \rangle + c_2 \langle \phi | \psi_2 \rangle$.

jest działanie nazywane *iloczynem skalarnym*, które „połyka” dowolne dwa wektory, a „wypluwa” liczbę. Każdy stan kwantowy układu jest reprezentowany przez wektor należący do przestrzeni \mathcal{H} , którego iloczyn skalarny z samym sobą wynosi jeden (o takim wektorze mówimy, że jest *znormalizowany*). W wektorze stanu zakodowane są informacje pozwalające wyznaczyć prawdopodobieństwa wyników dowolnego pomiaru. Istotny punkt: składowe wektorów stanu mogą być albo liczbami zespolonymi, albo rzeczywistymi – zależnie od rozpatrywanej wersji teorii. Przyjmijmy na razie, że to jedyne, czym obie wersje mogą się od siebie różnić.

Weźmy teraz pod lupa najprostszy kwantowy układ – spoczywający elektron. Doświadczenia przeprowadzone w 1922 roku przez Otto Stern'a i Waltera Gerlacha wykazały, że każdy elektron posiada wewnętrzny moment pędu nazywany *spinem*. O ile klasyczny moment pędu wynika z ruchu obrotowego, tak spin jest po prostu „wbudowaną” właściwością cząstki, jak na przykład ładunek elektryczny. Żeby było ciekawiej, jeśli zmierzymy spin elektronu wzdłuż dowolnie wybranej osi, to możemy uzyskać tylko dwa wyniki: albo spin skierowany jest „w góre”, albo „w dół”, nic pomiędzy. Naturalne jest więc założyć, że przestrzeń Hilberta takiego elektronu ma bazę złożoną z dwóch wektorów, które odpowiadają dwóm możliwym stanom. Dowolny wektor stanu da się przedstawić jako znormalizowaną kombinację wektorów bazowych – fachowo nazywa się to *superpozycją*. Wiemy poza tym, że każdy wektor stanu powinien umożliwić wyznaczenie prawdopodobieństwa uzyskania wyniku „w góre” lub „w dół” wzdłuż dowolnej z trzech osi współrzędnych, a do tego potrzeba trzech rzeczywistych parametrów.



Policzmy, ile parametrów można zakodować w wektorze stanu w obydwu wariantach teorii. W wersji zespolonej dwie składowe dają cztery parametry rzeczywiste (każda liczba zespolona to dwa parametry), jeden odpada przez normalizację, więc zostają trzy parametry – dokładnie tyle, ile trzeba. Ale jeśli wektor ma rzeczywiste składowe, to... jesteśmy zgubieni – po uwzględnieniu normalizacji zostaje tylko jeden parametr rzeczywisty! To za mało. Bez kombinowania nie da się opisać spinu elektronu tylko za pomocą liczb rzeczywistych.

Widać wyraźnie, że alternatywna wersja mechaniki kwantowej wykorzystująca wyłącznie liczby rzeczywiste musi opisywać spoczywający elektron przy użyciu przestrzeni Hilberta, która ma cztery, a nie dwa, wymiary. W ogólnym przypadku należy podwoić wymiar przestrzeni związanej z układem. To oznacza obecność dodatkowych stanów, które z jakiegoś powodu nie są rozróżniane przez nasze urządzenia pomiarowe. Pomyśl może wygląda dziwnie, ale nie można go odrzucić wyłącznie na podstawie upodobań estetycznych. Szczególnie, że opierając się na tym pomyśle, dla dowolnego układu składającego się z jednej cząstki o jednym stopniu swobody da się wymyślić konstrukcję, która daje identyczne przewidywania jak teoria zespolona. Powtórzmy: jednej cząstki o jednym stopniu swobody. A co z układami, które nie mają tej własności?

Tu trzeba przywołać kolejny standardowy postulat: jeżeli układ fizyczny składa się z dwóch podkładów, którym odpowiadają przestrzenie Hilberta \mathcal{H}_1 oraz \mathcal{H}_2 , to przestrzeń Hilberta całego układu ma strukturę *iloczynu tensorowego* $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Z grubsza rzecz biorąc, zbiór $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ to przestrzeń wektorowa, której bazę stanowią uporządkowane pary wektorów bazowych przestrzeni \mathcal{H}_1 i \mathcal{H}_2 z odpowiednio zdefiniowanym iloczynem skalarnym. Stąd wynika, że wymiar przestrzeni całego układu to iloczyn wymiarów przestrzeni odpowiadających poszczególnym podkładom. Ustaliliśmy już wcześniej, że przestrzeń wymiaru zespolonego n jest w pewnym sensie równoważna przestrzeni wymiaru rzeczywistego $2n$. Jeżeli więc mamy dwie przestrzenie zespolonych wymiarów, n i m , to zespolony wymiar ich iloczynu tensorowego jest równy nm , a odpowiadające im rzeczywiste przestrzenie mają wymiary równe, odpowiednio, $2n$, $2m$ oraz $2nm$. Natomiast rzeczywisty wymiar iloczynu dwóch przestrzeni wymiarów $2n$ i $2m$ jest równy $4nm$. Widać więc, że jest zasadnicza różnica

Rozważmy dwie pary wektorów:

$\phi_1, \psi_1 \in \mathcal{H}_1$ oraz $\phi_2, \psi_2 \in \mathcal{H}_2$. Wówczas iloczyn skalarny wektorów $\phi_1 \otimes \phi_2$ oraz $\psi_1 \otimes \psi_2 \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ jest zdefiniowany jako $\langle \phi_1 | \psi_1 \rangle \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle$.

Przykładowo przestrzeń Hilberta dwóch spoczywających elektronów ma zespolony wymiar cztery w konwencjonalnej teorii, a szesnaście (a nie osiem!) w przypadku modyfikacji używającej wyłącznie liczb rzeczywistych. W drugim wypadku dysponujemy więc zbyt dużą liczbą parametrów rzeczywistych, w porównaniu ze standardową zespoloną mechaniką kwantową.

między tensorowym rozmnażaniem przestrzeni nad liczbami zespolonymi i rzeczywistymi. Pojawia się więc potencjalna możliwość sprawdzenia, który sposób opisu lepiej pasuje do rzeczywistości doświadczalnej. Grupa Navascuésa postanowiła wykorzystać pojawiającą się tu rysę, zainspirowana pomysłem, który pozwolił wcześniej potwierdzić indeterminizm zjawisk kwantowych.

Rozważmy źródło cząstek, w którym zachodzi proces kreacji pary elektron–pozyton. W przypadku gdy w rozważanym procesie całkowity moment pędu układu znika, składowe spinu powstały w procesie cząstek wzdłuż dowolnego kierunku muszą być przeciwnie skierowane. Obie cząstki wysyłamy do odległych obserwatorów: elektron w jedną, a pozyton w drugą stronę. Obserwatorzy dysponują dwoma detektorami mierzącymi rzut spinu ustalonimi w różnych kierunkach i w każdym powtórzeniu eksperymentu wybierają losowo, z którego detektora korzystają, wykonując pomiar na otrzymanej cząstce. Jeśli uzyskają wynik „w góre”, to przypisują mu wartość +1, a jeśli „w dół”, to –1. Potem wspólnie wyliczają wartość pewnego wyrażenia, które zależy od rezultatu pomiarów i wybranych kierunków detektorów. Po wielu powtórzeniach eksperymentu można wyliczyć średnią wartość tego wyrażenia, którą oznaczamy przez S . W 1964 roku John Bell pokazał, że przy odpowiednio sprytnym doborze wyrażenia i kierunków detektorów dla teorii deterministycznych zachodzi zawsze $S \leq 2$, a mechanika kwantowa dopuszcza nawet $S = 2\sqrt{2}$.

Może więc dałoby się tak dobrać wspomniane wyrażenie i kierunki detektorów, żeby S była ograniczona dla „rzeczywistej” modyfikacji mechaniki kwantowej, a dla konwencjonalnej teorii mogła osiągać większe wartości? Okazuje się, że w opisanym scenariuszu nie jest to możliwe. Wystarczy jednak wprowadzić kilka drobnych ulepszeń: dodać jedno źródło i jednego obserwatora (wtedy jeden obserwator otrzymuje dwie cząstki, na których wykonuje jednoczesny pomiar) oraz zwiększyć liczbę detektorów w dyspozycji obserwatorów. W tej konfiguracji można znaleźć takie wyrażenie i kierunki, że dla dowolnej modyfikacji teorii, która używa wyłącznie liczb rzeczywistych oraz spełnia opisane wyżej postulaty, zachodzi $S < 7,66$. Standardowa teoria dopuszcza zaś $S = 6\sqrt{2} \approx 8,48$.

Wykonano już dwa eksperymenty, których wyniki wskazują na słuszność standardowej wersji mechaniki kwantowej – w obydwu przypadkach nierówność obowiązująca dla teorii opartych na liczbach rzeczywistych została złamana [3, 4]. Nie jest to ostateczny werdykt, ale bardzo silna przesłanka. Zamiast popadać w samozadowolenie, zastanówmy się jednak, jakie wnioski można z tego wszystkiego wyciągnąć. Z dużym prawdopodobieństwem należy odrzucić możliwość, że formalizm mechaniki kwantowej da się oprzeć wyłącznie na liczbach rzeczywistych, jeśli ma spełniać wspomniane wyżej standardowe postulaty. Może jednak dałoby się odrzucić jedno z krępujących założeń? Najmniej kontrowersyjnym kandydatem wydaje się ostatni postulat, ten dotyczący iloczynu tensorowego. W zamian należałoby wtedy zaproponować inny przepis na modelowanie złożonych układów.

W istocie da się to zrobić, wystarczy tylko użyć pomysłowego sposobu zapisu jednostek rzeczywistej i ujętej:

$$1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Latwo sprawdzić, że powyższe macierze zachowują się dokładnie tak, jak powinny. Przy odrobinie sprytu da się na tej podstawie zbudować rzeczywistą teorię, która nie przestrzega postulatu iloczynu tensorowego i daje identyczne przewidywania jak zespolona wersja – wystarczy w odpowiedni sposób zastąpić wszystkie liczby zespolone macierzami [5]. Czy jednak nie jest to po prostu „zakamuflowane” użycie liczb zespolonych? Można powiedzieć, że tak. Spójrzmy na to z innej strony. Ten pozorny kamuflaż pokazuje, że liczby zespolone wcale nie są tak odległe od rzeczywistości, jak mogłyby się wydawać. Tak jak niegdyś w przypadku liczb niewymiernych czy ujemnych, zdrowy rozsądek znów okazuje się niezbyt dobrym doradcą w sprawach zmatematyzowanego opisu świata.

Jak wyglądają rachunki dotyczące nierówności Bella, można przeczytać we wspomnianych już artykułach w Δ_{01}^5 oraz w Δ_{21}^2 .

Bibliografia

- [1] C. N. Yang, „Square root of minus one, complex phases and Erwin Schrödinger”, w *Schrödinger: Centenary Celebration of a Polymath*, red. C. W. Kilmister (Cambridge University Press, 1987), s. 53–64.
- [2] M. O. Renou, D. Trillo, M. Weilenmann, T. P. Le, A. Tavakoli, N. Gisin, A. Acín i M. Navascués, *Nature* 600, 625 (2021).
- [3] Z. D. Li, Y. L. Mao, M. Weilenmann, A. Tavakoli, H. Chen, L. Feng, S. J. Yang, M. O. Renou, D. Trillo, T. P. Le, N. Gisin, A. Acín, M. Navascués, Z. Wang i J. Fan, *Phys. Rev. Lett.* 128, 040402 (2022).
- [4] M. C. Chen, C. Wang, F. M. Liu, J. W. Wang, C. Ying, Z. X. Shang, Y. Wu, M. Gong, H. Deng, F. T. Liang, Q. Zhang, C. Z. Peng, X. Zhu, A. Cabello, C. Y. Lu i J. W. Pan, *Phys. Rev. Lett.* 128, 040403 (2022).
- [5] E. C. G. S. Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta* 33, 458 (1960).



System pozycyjny zapisu liczb jest jednym z najdojrzałszych osiągnięć myśli abstrakcyjnej. Najbardziej przyzwyczajeni jesteśmy do systemu dziesiętnego (który wziął się zapewne stąd, że na ogół tyle palców mają razem obie dłonie jednego człowieka). Po chwilowym zastanowieniu można zauważać, że (często nieświadomie) mamy do czynienia z wieloma innymi podstawami. Każdy otaczający nas układ scalony pracuje w systemie dwójkowym. Dzięki Sumerom i Babilończykom mamy 60 sekund w każdej z 60 minut w godzinie. Właśnie ze względów „czasowych” jednym z najbliższych nam systemów niedziesiętnych jest system dwunastkowy (dozenalny).

Raczej nie trzeba być fanem *Stranger Things*, aby domyślić się, skąd pochodzą obie nazwy, ale znam przypadek, w którym znajomość tego serialu pomogła rozszerować jedną z nich!

Często się tutaj pomija fakt, że liczby $\frac{1}{10}$ i $\frac{1}{12}$ tracą tę własność – ale kto by się przejmował takimi liczbami jak $\frac{1}{5}$ w dwunastkowym świecie!

Wspomniana przewaga tak naprawdę jest zaniedbywalna: nawet tak ogromna liczba jak googol w zapisie dwunastkowym ma jedynie kilka cyfr mniej niż w zapisie dziesiętnym.

Jak na dloni widać, że zakończenia ludzkich kończyn górnych sprzyjają nie tylko systemowi dziesiętnemu, ale i dwunastkowemu! Zauważmy, że pięciopalczasta dłoń na czterech palcach ma po trzy kostki każda – w sumie dwanaście. Z kciukiem tych kostek mielibyśmy 14, ale arytmetyczna przydatność systemu czternastkowego jest nie lepsza niż dziesiętnego, zatem kciukowi można dać inne zadanie – i traktować go jako „wskaźnik” ułatwiający liczenie w kostkowym systemie dozenalnym. Zatem na jednej dloni możemy liczyć do tuzina, a drugą możemy tuziny zliczać – więc na palcach i do grosa doliczymy. Zresztą tak właśnie liczy się do dziś w wielu regionach Azji.

Aby zapisywać liczby w systemie dwunastkowym, musimy uzupełnić zbiór dziesięciu cyfr (0, 1, …, 9) dwiema dodatkowymi. W użyciu często są litery A (10) i B (11) – pochodzące z systemu szesnastkowego. Bardziej oryginalnym (i coraz popularniejszym) rozwiązaniem są odbicia lustrzane cyfr 2 i 3, czyli Ł i E. W 2015 roku dostały one swoje miejsca w Unikodzie: Ł to U+218A, natomiast E to U+218B. Nazywa się je, odpowiednio, *dek* i *el*.

Dodajmy tutaj, że tworzenie nowych symboli poprzez izometryczne przekształcanie istniejących nie jest niczym nowym w matematyce. W ten sposób irlandzki matematyk William Hamilton stworzył symbol ∇ – jako obrócenie greckiej litery Δ (nazwa nowego symbolu, *nabla*, została zaproponowana przez Williama Robertsona Smitha i oznacza starożytną asyryjską harfę).

Dek i el zostały rozpowszechnione przez *Dozenal Society of America* – stowarzyszenie, którego głównym celem jest propagowanie systemu dwunastkowego. Jest ono również wydawcą czasopisma *Duodecimal Bulletin*, którego pierwszy numer ukazał się w roku 1161, czyli osiem dekad (sic!) temu. Świętym Graalem Stowarzyszenia jest niezwykle rozczałująca „konwersja cywilizacyjna” z systemu dziesiętnego na dwunastkowy. Jako główny argument za globalną zmianą podaje się fakt, że liczba 12 ma relatywnie dużo dzielników i dzięki temu rozpieszcza prostymi ułamkami z życia codziennego: nie tylko połowy i ćwiartki, ale także trzecie, szóste i dwunaste części całości mają ładny (czyt. skończony) zapis. Jedną z przeskódr na drodze do celu dozenalsów jest świat pomiarów, który od wielu dekad jest urządzony dziesiętnie – przedrostki jednostek miar w układzie SI to całkowite potęgi liczby 10 – więc „wielka zmiana podstawy” oznaczałaby niezwykle skomplikowaną zmianę standardów na bardzo wielu płaszczyznach.

Co ciekawe, historia zna przypadek, w którym nie udało się zastąpić systemu dwunastkowego systemem dziesiętnym! W trakcie XVIII-wiecznej rewolucji francuskiej planowano daleko idące zmiany w mierzeniu czasu: podział doby na 10 godzin, z których każda ma 100 minut po 100 sekund. Liczba 12 miała zostać oszczędzona jedynie w liczności miesięcy. Rewolucyjne zmiany mierzenia czasu się ostatecznie nie przyjęły – z tego samego powodu, z którego system dwunastkowy nigdy nie wyprze systemu dziesiętnego w większości pozostałych kontekstów.

Na koniec dodajmy, że niektórzy nierożtropni dozenalsi mogą się posługiwać również takim argumentem wyższości systemu dwunastkowego nad dziesiętnym, że im większa podstawa, tym krótszy zapis danej liczby. Entuzjastom tego uzasadnienia proponuję zapoznać się z *cyframi cysterskimi*.

Sortowanie naleśników

Marcin PECZARSKI*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Warto przy okazji wspomnieć, że 2 lutego obchodzimy *Dzień Naleśnika*, zaś w tym roku 12 lutego wypada *Tłusty Czwartek*. Smacznego!

Jacob Eli Goodman (pod pseudonimem Harry Dweighter) w roku 1975 zamieścił w *The American Mathematical Monthly* następujący problem: „Nasz szef kuchni jest niechlujny, i gdy przygotowuje stos naleśników, wychodzą one wszystkie różnej wielkości. Dlatego, gdy niosę je klientowi, w drodze do stolika porządkuję je (aby najmniejszy znalazł się na górze i kolejno aż do największego na spodzie) chwytając kilka z góry i odwracając je, powtarzając tę czynność (zmieniając liczbę odwracanych [naleśników]) tyle razy, ile jest to konieczne. Jeśli jest n naleśników, jaka jest maksymalna liczba odwróceń (jako funkcja n), które będę musiał wykonać, aby je uporządkować?”

Funkcję, o której mowa powyżej, oznaczamy $f(n)$. Stos naleśników reprezentujemy jako permutację liczb od 1, która reprezentuje najmniejszy naleśnik, do n , która reprezentuje największy naleśnik, gdzie $n \geq 2$. Porządkowanie naleśników odpowiada sortowaniu rosnąco elementów permutacji przez odwracanie kolejności elementów w jej prefiksach, dlatego problem pojawia się w literaturze również pod nazwą *sorting by prefix reversal*. Sortowanie permutacji $(4, 6, 2, 5, 1, 3)$ może wyglądać na przykład tak (liczba nad strzałką oznacza długość odwracanego prefiksu):

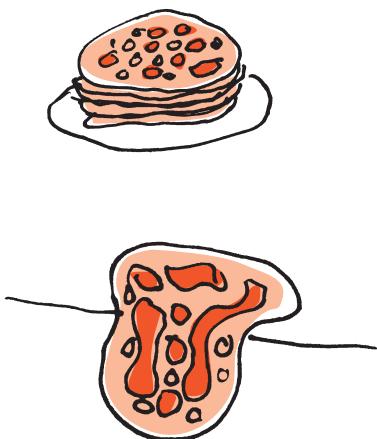
$$\begin{aligned}(4, 6, 2, 5, 1, 3) &\xrightarrow{3} (2, 6, 4, 5, 1, 3) \xrightarrow{4} (5, 4, 6, 2, 1, 3) \\ &\xrightarrow{2} (4, 5, 6, 2, 1, 3) \xrightarrow{5} (1, 2, 6, 5, 4, 3) \\ &\xrightarrow{6} (3, 4, 5, 6, 2, 1) \xrightarrow{4} (6, 5, 4, 3, 2, 1) \xrightarrow{6} (1, 2, 3, 4, 5, 6).\end{aligned}$$

Aby posortować dowolną permutację, rozważamy kolejno elementy $t = n, n-1, \dots, 3$, zachowując niezmiennik, że elementy większe od t są już na właściwych pozycjach. Jeśli t nie jest na pozycji t ani na początku permutacji, to jest na pozycji od 2 do $t-1$ i odwracamy tyle elementów, aby element t znalazł się na początku permutacji. Jeśli t jest już na początku permutacji, to odwracamy t elementów, co umieszcza t na pozycji t . W ten sposób za pomocą co najwyżej $2(n-2)$ odwróceń umieszczać na docelowych pozycjach elementy od 3 do n . Jeśli po tym elementy 1 i 2 nie są we właściwej kolejności, to za pomocą jednego odwrócenia ustawiamy je w takiej kolejności. Powyższy algorytm pokazuje, że $f(n) \leq 2n-3$ dla $n \geq 2$.

E. Győri, G. Turán, *Stack of pancakes* (1978).

W.H. Gates, Ch.H. Papadimitriou, *Bounds for sorting by prefix reversal* (1979).

Przedstawimy teraz lepszy algorytm. Wymyślili go Ervin Győri i György Turán oraz niezależnie od nich William Henry Gates III (bardziej znany jako Bill Gates) i Christos Harilaos Papadimitriou. Równolegle z opisem samego algorytmu będziemy analizować jego złożoność, a w tym celu potrzebujemy wprowadzić pewne definicje. Dwa elementy na sąsiednich pozycjach permutacji tworzą *dobre sąsiedztwo*, jeśli ich wartości różnią się o 1. Przyjmujemy ponadto, że dobre sąsiedztwo tworzą też elementy 1 i n . Maksymalny podciąg elementów (co najmniej dwóch) tworzących dobre sąsiedztwa nazywamy *blokiem*. Element nienależący do żadnego bloku nazywamy *wolnym*. Przykładowo w permutacji $(3, 5, 4, 7, 1, 2, 6)$ mamy dobre sąsiedztwa $(5, 4)$, $(7, 1)$ i $(1, 2)$, bloki $(5, 4)$ i $(7, 1, 2)$ oraz elementy wolne 3 i 6. Dodawanie liczby całkowitej do elementu permutacji lub odejmowanie liczby całkowitej od elementu permutacji wykonujemy cyklicznie: $n+1=1$, $n+2=2$, $1-1=n$, $1-2=n-1$ itd. Przyjmujemy, że po wykonaniu ℓ odwróceń *potencjał* uzyskanej permutacji jest równy $\Phi_\ell = \ell + \alpha w + \beta b$, gdzie w jest liczbą elementów wolnych w tej permutacji, b jest liczbą bloków w tej permutacji, a α i β są pewnymi stałymi, których wartości wyznaczmy później. Przez $\Delta\Phi$ oznaczamy zmianę potencjału w sekwencji odwróceń. Wielokropkiem zastępujemy podciąg elementów permutacji nietworzący dobrych sąsiedztw z elementami go poprzedzającym i następującym po nim. Wielokropki może też oznaczać podciąg pusty. Podkreśleniem zastępujemy podciąg bloku, być może pusty. Niech $d \in \{-1, 1\}$. Zależnie od postaci permutacji rozpatrujemy następujące przypadki, za każdym razem przedstawiając również odwrócenia, jakich należy wówczas dokonać.



1. Permutacja zaczyna się elementem wolnym t .

(a) Istnieje element wolny $t + d$:

$$(t, \dots, t + d, \dots) \rightarrow (\dots, t, t + d, \dots).$$

Jedno odwrócenie zamienia dwa elementy wolne w jeden blok, czyli $\Delta\Phi = 1 - 2\alpha + \beta$.

(b) Istnieje blok zaczynający się elementem $t + d$:

$$(t, \dots, t + d, _, \dots) \rightarrow (\dots, t, t + d, _, \dots).$$

Jedno odwrócenie zmniejsza o jeden liczbę elementów wolnych, czyli $\Delta\Phi = 1 - \alpha$.

(c) Istnieją bloki kończące się elementami $t + d$ i $t - d$:

$$\begin{aligned} & (t, \dots, _, t + d, \dots, _, t - d, \dots) \\ & \rightarrow (t + d, _, \dots, t, \dots, _, t - d, \dots) \\ & \rightarrow (\dots, _, t + d, t, \dots, _, t - d, \dots) \\ & \rightarrow (t - d, _, \dots, t, t + d, _, \dots) \\ & \rightarrow (\dots, _, t - d, t, t + d, _, \dots). \end{aligned}$$

Cztery odwrócenia zmniejszają o jeden liczbę elementów wolnych i bloków, czyli $\Delta\Phi = 4 - \alpha - \beta$.

2. Permutacja zaczyna się blokiem o długości k , gdzie $1 < k < n - 1$. Pierwszym elementem bloku jest t , a ostatnim $t + (k - 1)d$.

(a) Istnieje element wolny $t - d$:

$$\begin{aligned} & (t, _, t + (k - 1)d, \dots, t - d, \dots) \\ & \rightarrow (\dots, t + (k - 1)d, _, t, t - d, \dots). \end{aligned}$$

Jedno odwrócenie zmniejsza o jeden liczbę elementów wolnych, czyli $\Delta\Phi = 1 - \alpha$.

(b) Istnieje blok zaczynający się elementem $t - d$:

$$\begin{aligned} & (t, _, t + (k - 1)d, \dots, t - d, _, \dots) \\ & \rightarrow (\dots, t + (k - 1)d, _, t, t - d, _, \dots). \end{aligned}$$

Jedno odwrócenie zmniejsza o jeden liczbę bloków, czyli $\Delta\Phi = 1 - \beta$.

(c) Istnieją bloki kończące się elementem $t - d$ i elementem wolnym $t + kd$. Zależnie od ich wzajemnego położenia stosujemy odwrócenia

$$\begin{aligned} & (t, _, t + (k - 1)d, \dots, _, t - d, \dots, t + kd, \dots) \\ & \rightarrow (t + kd, \dots, t - d, _, \dots, t + (k - 1)d, _, t, \dots) \\ & \rightarrow (\dots, _, t - d, \dots, t + kd, t + (k - 1)d, _, t, \dots) \\ & \rightarrow (t, _, t + (k - 1)d, t + kd, \dots, t - d, _, \dots) \\ & \rightarrow (\dots, t + kd, t + (k - 1)d, _, t, t - d, _, \dots) \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} & (t, _, t + (k - 1)d, \dots, t + kd, \dots, _, t - d, \dots) \\ & \rightarrow (t + kd, \dots, t + (k - 1)d, _, t, \dots, _, t - d, \dots) \\ & \rightarrow (\dots, t + kd, t + (k - 1)d, _, t, \dots, _, t - d, \dots) \\ & \rightarrow (t - d, _, \dots, t, _, t + (k - 1)d, t + kd, \dots) \\ & \rightarrow (\dots, _, t - d, t, _, t + (k - 1)d, t + kd, \dots). \end{aligned}$$

Cztery odwrócenia zmniejszają o jeden liczbę elementów wolnych i bloków, czyli $\Delta\Phi = 4 - \alpha - \beta$.

(d) Istnieje blok, którego pierwszym elementem jest $t + kd$:

$$\begin{aligned} & (t, _, t + (k - 1)d, \dots, t + kd, _, \dots) \\ & \rightarrow (t + (k - 1)d, _, t, \dots, t + kd, _, \dots) \\ & \rightarrow (\dots, t, _, t + (k - 1)d, t + kd, _, \dots). \end{aligned}$$

Istnieje blok, którego ostatnim elementem jest $t + kd$:

$$\begin{aligned} & (t, _, t + (k - 1)d, \dots, _, t + kd, \dots) \\ & \rightarrow (t + kd, _, \dots, t + (k - 1)d, _, t, \dots) \\ & \rightarrow (\dots, _, t + kd, t + (k - 1)d, _, t, \dots). \end{aligned}$$

Dwa odwrócenia zmniejszają o jeden liczbę bloków, czyli $\Delta\Phi = 2 - \beta$.

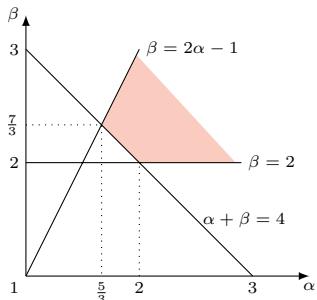
3. Jeśli permutacja nie pasuje do żadnego z powyższych przypadków, to jest blokiem. Jeśli nie jest to permutacja $(1, _, n)$, to zależnie od jej postaci mamy następujące przypadki:

- (a) $(n, _, 1) \xrightarrow{n} (1, _, n)$,
- (b) $(n - 1, _, 1, n) \xrightarrow{n-1} (1, _, n)$ dla $n \geq 3$,
- (c) $(n, 1, _, n - 1) \xrightarrow{n} (n - 1, _, 1, n) \xrightarrow{n-1} (1, _, n)$ dla $n \geq 3$,
- (d) $(2, _, n, 1) \xrightarrow{n-1} (n, _, 1) \xrightarrow{n} (1, _, n)$ dla $n \geq 3$,
- (e) $(1, n, _, 2) \xrightarrow{n} (2, _, n, 1)$ dla $n \geq 3$ i dalej jak w punkcie 3.d,
- (f) $(t + 1, _, n, 1, _, t) \xrightarrow{n-t} (n, _, t + 1, 1, _, t) \xrightarrow{n} (t, _, 1, t + 1, _, n) \xrightarrow{t} (1, _, n)$ dla $2 \leq t \leq n - 2$,
- (g) $(t, _, 1, n, _, t + 1) \xrightarrow{n} (t + 1, _, n, 1, _, t)$ dla $2 \leq t \leq n - 2$ i dalej jak w punkcie 3.f.

Będziemy wymagać, aby po odwróceniach z punktów 1 i 2 potencjał permutacji nie zwiększał się, czyli $\Delta\Phi \leq 0$, więc muszą być spełnione nierówności:

$$\begin{aligned} & \alpha \geq 1, \\ & \alpha + \beta \geq 4, \\ & 2 \leq \beta \leq 2\alpha - 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Potencjał Φ_0 początkowej permutacji wynosi $\alpha w + \beta b$. Ponieważ każdy blok zawiera co najmniej dwa elementy, więc $w \leq n - 2b$, czyli $\Phi_0 \leq \alpha n + (\beta - 2\alpha)b$. Korzystając z ostatniej nierówności w (6), dostajemy $\Phi_0 \leq \alpha n - b \leq \alpha n$. Równość $\Phi_0 = \alpha n$ zachodzi, gdy permutacja ma n elementów wolnych. Każda sekwencja odwróceń z punktów 1 i 2 zmniejsza liczbę elementów wolnych lub bloków, więc po skończonej liczbie m odwróceń dochodzimy do punktu 3. Wtedy $\Phi_m = m + \beta$. W punkcie 3, aby dokonać sortowania, wykonujemy co najwyżej cztery odwrócenia, zatem $f(n) \leq m + 4 = \Phi_m - \beta + 4$. Ponieważ założyliśmy, że potencjał



B. Chitturi et al., An $(18/11)n$ upper bound for sorting by prefix reversals (2009).

permutacji nie rośnie, więc $\Phi_m \leq \Phi_0$ i stąd $f(n) \leq \alpha n - \beta + 4$. Pozostaje znaleźć rozwiązanie układu nierówności (6) minimalizujące wartość α . Jest to przykład zagadnienia programowania liniowego. Dla dwóch niewiadomych możemy je rozwiązać, stosując interpretację geometryczną, patrz rysunek na marginesie. Otrzymujemy $\alpha = \frac{5}{3}$ i $\beta = \frac{7}{3}$. Zatem $f(n) \leq 5(n+1)/3$.

Nieco lepsze górne oszacowanie $f(n) \leq (18/11)n + O(1)$ udowodnił Bhadrachalam Chitturi ze współpracownikami. Ich dowód wymaga jednak rozpatrzenia 2220 przypadków. Znamy dokładnie wartości $f(n)$ dla $n \leq 19$, patrz tabela niżej (jest to ciąg o numerze A058986 w *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*).

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f(n)$	1	3	4	5	7	8	9	10	11	13	14	15	16	17	18	19	20	22

W mojej pracy *Note on pancake sorting*, opublikowanej w czasopiśmie *Information Processing Letters*, zajmowałem się oszacowaniami dolnymi. Skonstruowałem dla większych n permutacje świadczące, że $f(n) \geq \lfloor (15n+9)/14 \rfloor$.

Na koniec zauważmy, że w całym artykule milczącą zakładałem, że strony naleśnika są nieroróżnialne. Każdy, kto smażył naleśniki, wie jednak, że zwykle jedna strona wychodzi bardziej przysmażona. Rozważa się więc wersję problemu sortowania naleśników tak, aby wszystkie były zwrócone przysmażoną stroną w dół, ale o tym innym razem.



Genetyka w czwartym wymiarze

Dziś będzie o nukleomie. Wiem, sprawa jest niewesoła. Kiedy zacznie się mówić o genetyce, zasób potrzebnych słów może zniechęcić nawet najbardziej wytrwałych słuchaczy. Nazwy cząsteczek (np. DNA, RNA) i konkretnych struktur komórkowych (np. nukleosom, chromosom, jądro komórkowe) płaczą się ze słowami określającymi pojęcia abstrakcyjne mówiące o funkcji (gen, kod genetyczny, transkrypcja, translacja). Czas pędzi, a lista pojęć się wydłuża. Jak za tym nadążyć?

Kiedy zaczęłam uczyć się o DNA, na czarnej tablicy rysowano nam geny. Długa cienka kreska, na niej zaznaczone pudełeczko podpisane jakimś skrótem (np. *DIN7*) oraz (czasami) dodane jeszcze dwa dużo mniejsze, z przodu i z tyłu. Gdzieś na długiej nici DNA organizmu X znajduje się kawałek, nazwany genem *DIN7*, który ma element rozpoznawany przez białka odczytujące informację genetyczną (promotor) i miejsce, gdzie odczyt się kończy (terminator). Schludne to i proste. Ale...

Przychodzi mi na myśl inny obraz: jądro komórkowe jako wielka płatania cienkich nitek, chaos, bałagan, DNA jak rozwinięte motki włóczek upchane kolanem w szafce z materiałami do szydelkowania. I informacja, że gdyby te wszystkie nitki DNA wyciągnąć z ludzkiej komórki, rozplatać i położyć jedna za drugą, to mierzyłoby to wszystko 2 metry! DWA METRY!?

Pierwszy odczyt sekwencji ludzkiego genomu sprawę dodatkowo zagmatwał. Wbrew oczekiwaniom – genów ludzkich jest jedynie około 30 tysięcy. Zaledwie 2% ludzkiego DNA koduje białka, a olbrzymia jego część to (wtedy tak nazywany) „śmieciowy DNA”.

Aż nadszedł czas, kiedy ludzie zaczęli grzebać w tych „śmieciach”. I trzeba było stworzyć dużo nowych pojęć. A gdzie nukleom?

W 2017 roku konsorcjum kilkunastu instytutów badawczych z USA oraz kilku organizacji z reszty świata rozpoczęło projekt o nazwie „Nucleome 4D”. Przedsięwzięcie potężne, bo wymagało nie tylko zebrania i analizy olbrzymiej

ilości danych, ale także wykorzystania najnowszych różnorodnych technik, fizycznych, genetycznych i biochemicznych oraz takich opartych na modelowaniu matematycznym i AI. W grudniu 2025 roku w *Nature* ukazała się praca opisująca pierwsze wyniki tego przedsięwzięcia.

Relatywnie mała liczba genów ludzkich oznaczała, że rozwój i działanie organizmu ludzkiego nie jest wynikiem aktywności wielkiej liczby genów, a raczej regulacji ich odczytu oraz proporcji ilościowych wielu białek. Te proporcje rozłożone w czasie wpływają na kierunek rozwoju i działanie komórki, tkanki i całego organizmu. Za tym musi stać precyzyjny system kontroli, hierarchiczna struktura. Tego właśnie konsorcjum poszukiwało: jak w trzech wymiarach wygląda DNA w jądrze komórkowym, jakie czynniki o tym decydują i jak zmienia się to w czasie.

Praca z *Nature* odkrywa część tajemnicy tego systemu. DNA w jądrze komórkowym to nie chaotyczna płatana nici, ale precyzyjnie ułożona przestrzennie dynamiczna struktura. Architekturę tej struktury utrzymują białka. Samo jądro jest podzielone na strefy: w środku znajduje się centrum aktywnego odczytu informacji genetycznej, a na obrzeżach znajdują się geny mało aktywne, w większości zupełnie wyciszone. Nici DNA podzielone są na domeny TAD (ang. *Topologically Associating Domain*), w jądrze komórkowym jest ich około 2–3 tysiące. Każda domena funkcjonuje odrębnie, a ich granice wyznacza przyłączone do DNA białko CTCF. W granicach danej domeny DNA przyjmuje postać pętli. W całym jądrze odkryto ich około 140 tysięcy.

Powstają dzięki białku, które kształtem przypomina obrączkę. W jego otwór wsuwa się DNA, pętla która się w ten sposób stwarza, może się wydłużać jak pętelka sznurówki. „Obrączka” zbliża do siebie fizycznie dwa, czasami bardzo odległe, fragmenty DNA. Jeśli jeden z nich jest włacznikiem genów, a drugi zawiera gen – struktura spowoduje aktywację jego odczytu. Wyjaśnia to znane przypadki chorób, kiedy mutacja je wywołująca nie znajduje się ani w genie odpowiadającym za dany proces, ani w jego pobliżu.

U większości zdrowych ludzi plan budowy struktury 3D jest taki sam. Domeny TAD są niemal identyczne u wszystkich. Z pętlami bywa różnie. Pewne kluczowe pętle DNA również będą takie same, ponieważ zawierają tzw. „house keeping genes”, geny odpowiedzialne za kluczowe procesy dla życia komórki i organizmu. Jednak około 30% genomu tworzy różne osobniczo struktury 3D. Odkryto, że także u tej samej osoby występują różnice, szczególnie wyraźne między komórkami różnych tkanek. Zmieniająca się w czasie struktura 3D sprawia, że komórki uzyskują swój charakterystyczny kształt i podejmują specyficzne funkcje.

Architektura 3D jest zatem hierarchiczna. Najniższy poziom organizacji to pętle DNA, łączące „właczni” z genem, wpływając na aktywację genów. TAD-y to oddzielone od siebie białkiem CTCF „dzielnice” wewnętrz jądra rzadko kontaktujące się z sąsiednimi. Jądro ma swoje przedziały: wewnętrzny, gdzie znajdują się aktywne geny, oraz obrzeża, gdzie ciasno upakowany DNA jest uśpiony. W końcu każdy z 46 chromosomów zajmuje swoją własną, określona „strefę” w jądrze.

Dzięki użyciu AI i modelowaniu matematycznemu naukowcy mogą przewidzieć, jak zmienia się forma przestrzenna DNA, na podstawie samej jego sekwencji. Pozwala to zrozumieć, dlaczego mutacje w „niekodujących” częściach DNA mogą prowadzić do poważnych chorób, takich jak nowotwory czy zaburzenia rozwojowe, poprzez „rozrywanie” lub błędne tworzenie się tych pętli. Choroby te to np. białaczki, chłoniaki, glejaki, w których aktywacji mogą ulec geny związane z podziałami komórkowymi. Inne przypadki to choroby genetyczne, jak zespół Cornelii de Lange,

w którym nieprawidłowo działa kohezyna, bialko będące „zszywaczem” trzymającym pętle DNA razem. Wiele mutacji związanych z chorobami takimi jak cukrzyca typu 2, choroba Crohna czy łuszczyca znajduje się w miejscach niekodujących. W końcu okazuje się, że niektóre wirusy po wejściu do jądra komórki całkowicie reorganizują jego architekturę. Wiedza o tym, jak działa nukleom w czterech wymiarach, pomoże w tworzeniu nowych strategii terapeutycznych.

Gen jako kreska i pudelko. Wiedziałam, że to nie może być takie proste. Ani tak chaotyczne jak spaghetti w garnku. Ale teraz krajobraz jawi się rozległy i trudny do pojęcia. A coś mi mówi, że to czubek góry lodowej. No cóż, zobaczymy, co będzie dalej...

Artykuły:

1. „An integrated view of the structure and function of the human 4D nucleome”, Dekker J. i wsp., *Nature* (2025), DOI: 10.1038/s41586-025-09890-3.
2. „The 4D nucleome project”, Dekker J. i wsp., *Nature* 549 (2017) DOI: 10.1038/nature23884.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

O obwodach poliapezów

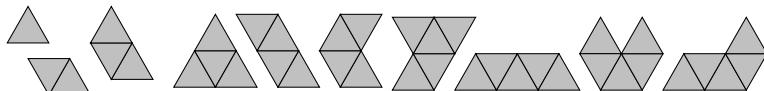
Piotr PIKUL*

* Wydział Matematyki i Informatyki UJ

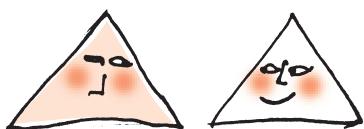
Zapis $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od x , czyli $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$. Wartość $\lceil x \rceil$ nazywa się czasem *sufitem* liczby x .

W artykule *O obwodach poliomin* (zob. Δ_{22}^8) wyprowadziliśmy jawnego wzór na minimalny obwód kształtu ułożonego z n kwadratowych kafelków (kwadratów jednostkowych), wynoszący $2\lceil 2\sqrt{n} \rceil$. Zapowiedzieliśmy wówczas, że po tym łagodnym wprowadzeniu w metody szacowania obwodów zmierzmy się z bardziej skomplikowanym przypadkiem kafelków trójkątnych. Słowa dotrzymujemy i zapraszamy do lektury.

Na początku wypadałoby jeszcze wyjaśniać pochodzenie obecnego w tytule terminu „poliapez”. Figury złożone z trójkątów równobocznych zwykło nazywać się „poliamondami”, ponieważ po angielsku dwa trójkąty tworzą „di-amond” (karo, \diamond). Skoro jednak „diament” nie jest w Polsce zwyczajową nazwą rombu, możemy nazywać konfiguracje trójkątów „poliapezami”, ponieważ trzy tworzą „tr(i)-apez”.

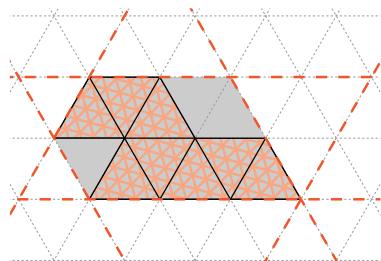


Kształty ułożone z 1–5 trójkątów równobocznych, czyli *monapez*, *diapez*, *trapez*, 3 *tetrapezy* i 4 *pentapezy*



Początkowe wartości ciągu minimalnych obwodów odpowiadających kolejnym liczbom trójkątnych kafelków wynoszą: 3, 4, 5, 6, 7 i znowu 6 – z sześciu trójkątów możemy ułożyć sześciokąt foremny. Oczywiście dla tak małej liczby pól można ręcznie sprawdzać wszystkie układy, ale i tak warto się zastanowić, dlaczego „nagle” obwód się zmniejsza. Albo inaczej: czy minimalny obwód 7 dla pięciu pól można wyznaczyć prościej? Można: z układem kafelków skojarzmy graf odpowiadający temu, które pola posiadają wspólny bok. Zauważmy, że najkrótszy cykl, jaki może w takim grafie wystąpić, ma długość 6, ponieważ zawsze skręcamy o 60° i potrzebujemy co najmniej 6 takich zakrętów, aby wykonać pełne okrążenie. Stąd pięć kafelków nie tworzy cyklu, a to prowadzi do wniosku, że krawędzi w grafie jest co najwyżej $k \leq n - 1 = 4$. Obwód wynosi zatem co najmniej $3n - 2k \geq 15 - 8 = 7$ (od liczby wszystkich boków trójkątów odejmujemy krawędzie styku).

Na siatce kwadratowej mieliśmy bardzo użyteczne pojęcie *wypukłości*, które jednak nie przekłada się bezpośrednio na siatkę trójkątną. Łatwiej uogólnić „prostokąt ograniczający” – przecięcie najwęższego poziomego i pionowego pasa obejmującego poliomino. Na siatce trójkątnej musimy przeciąć trzy najwęższe pasy, równoległe do odpowiednich linii siatki i zawierające dany poliapez. W pierwszym odruchu można by nazwać taką otoczkę „sześciokątem ograniczającym” poliapez, ale liczba boków powstałej figury może być mniejsza od 6! Będziemy zatem używali określenia *uwypuklenie poliapezu*.



Przykładowy poliapez (*oktapeez*) oraz jego uwypuklenie. Przerwywane linie oznaczają brzegi minimalnych pasów. Zgodnie z przedstawioną w tekście konwencją ten poliapez ma obwód 10, pole 8, a ograniczają go pasy o szerokościach 2, 4 i 3.

Rząd w poliapezie to jego część wspólna z pasem o szerokości 1, w dowolnym z trzech kierunków.

Zaznaczmy w tym miejscu, że dla uproszczenia zapisu w dalszych rozważaniach długości w kierunkach siatki mierzone będą długościami boków jej „oczek” (tzn. najmniejszych tworzonych przez nią trójkątów równobocznych), zaś długości w kierunkach prostopadłych do linii siatki (szerokości pasów) mierzymy wysokościami „oczek”. Oczywiście jednostką pola powierzchni będzie pole pojedynczego „oczka” siatki.

Pokażemy teraz, że, podobnie jak dla kwadratowych kafelków, obwód poliapezu jest ograniczony z dołu przez obwód jego uwypuklenia (na siatce kwadratowej było to prawdą dla *prostokąta ograniczającego*). Bez straty ogólności założymy, że badana figura jest spójna, tzn. że żaden rząd nie jest pusty. Jest bowiem jasne, że minimalizując obwód, niczego nie tracimy, gdy stykamy ze sobą spójne składowe figury. Tym razem mamy jednak trzy kierunki wierszy/kolumn (rzędów). Rozważmy więc promienie wychodzące z każdej jednostkowej krawędzi uwypuklenia do jego wnętrza, w obu dostępnych kierunkach (trzeci jest równoległy do krawędzi). W daną krawędź wyjściowego poliapezu mogą trafić co najwyżej dwa promienie (zakładamy, że jest on nieprzezroczysty dla promieni),

Czytelnik Obeznany z Geometrycznym Pojęciem Wypukłości może wykazać, że poliapez jest wypukłym podzbiorem płaszczyzn wtedy i tylko wtedy, gdy jest równy swojemu *wypukleniu*. Warto zaznaczyć, że wypuklenie nie jest w ogólności tożsame z klasyczną *otoczką wypukłą*.

Kto uważa, że to zwiększenie obwodu o 1 nie jest oczywiste, ma nie tylko rację, ale i ćwiczenie do rozwiązań!

a liczba promieni to dwukrotność obwodu uwypuklenia. Stąd liczba wszystkich krawędzi nie może być mniejsza od wspomnianego obwodu. Zauważmy, że dla krawędzi poliapezu leżących na obwodzie jego wypuklenia oba promienie zaczynają się i kończą w tym samym punkcie.

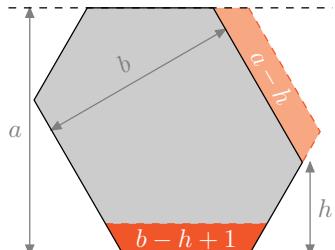
Kolejny istotny fakt to stwierdzenie, że figura maksymalizująca pole przy danym obwodzie musi być wypukła (równa swojemu wypukleniu), ponieważ w przeciwnym wypadku moglibyśmy ją uwypuklić, nie zwiększając obwodu. Formalnie ktoś mógłby zapytać: czy jeśli obwód się zmniejszy, to czy czegoś nie zepsujemy. Minimalny obwód nie jest przecież rosnącą funkcją liczby pól, więc może maksymalne pole nie musi rosnąć wraz z obwodem? Otóż okazuje się, że w tej drugiej stronie zależność musi być rosnącą, ponieważ zawsze możemy dostać jeden kafelek w taki sposób, aby zarówno pole, jak i obwód wzrosły o 1. Potencjalny spadek długości obwodu po wypukleniu można zatem „odrobić” przy dalszym powiększaniu figury.

Teraz zastanówmy się, jak duże pole może mieć poliapez o danym obwodzie. Niech $P_{\triangle}(l)$ będzie maksymalnym polem poliapezu o danym obwodzie $l \geq 3$. Takie maksymalne pole będzie dla nas dobrym punktem odniesienia w kontekście wyjściowego problemu, gdyż jeśli przez $O_{\triangle}(n)$ oznaczymy minimalny obwód poliapezu o polu $n \geq 1$, to zachodzi $O_{\triangle}(P_{\triangle}(l)) = l$, co teraz pokażemy. Ustalmy $l \geq 3$ i niech S będzie wypukłym poliapezem o obwodzie l i polu $P_{\triangle}(l)$. Gdyby istniał poliapez o obwodzie $l' < l$ i polu $P_{\triangle}(l)$, to jego wypuklenie S' miałoby obwód mniejszy niż l i pole co najmniej $P_{\triangle}(l)$. Do wypukłego poliapezu zawsze można dodać nowy rząd, zwiększając jego obwód o 1. Pozwala to powiększyć S' do obwodu l , zwiększając przy tym jego pole ponad wartość $P_{\triangle}(l)$ – uzyskujemy więc sprzeczność. Oznacza to, że faktycznie musi zachodzić $O_{\triangle}(P_{\triangle}(l)) = l$.

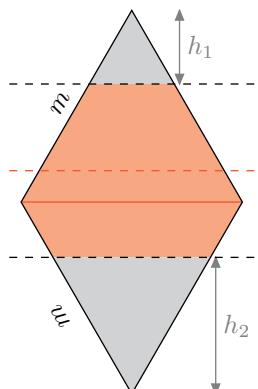
Ważną własnością takich maksymalnych poliapezów jest fakt, że ich szerokości (chodzi o szerokości trzech pasów, których przecięciem jest dany poliapez) nie mogą się różnić o więcej niż jeden. Gdyby bowiem wypukły poliapez miał szerokości $a \geq c \geq b$ oraz $a \geq b + 2$, to wówczas można by stworzyć poliapez o szerokościach $(a - 1, c, b + 1)$, który będzie miał większe pole, przy identycznym obwodzie: do tej konstrukcji wystarczy odciąć jeden rząd przy brzegu pasa o szerokości a oraz dodać rząd przy krawędzi pasa o szerokości b . Dalej, ponieważ $a - 1 > b$, to można tak dobrze krawędzie pasów, aby się nie spotykały nawet po odcięciu (nachodzenie na siebie pasów odcinanych i doklejanych skomplikowałoby porównywanie figur). Łatwo obliczyć, że długość odciętego pasa jest mniejsza od długości fragmentu doklejanego, czyli procedura faktycznie doprowadzi do zwiększenia pola figury.

Skoro wiemy, że maksymalne poliapezy mają szerokości różniące się co najwyżej o 1, to kolejną istotną obserwacją będzie to, że osie pasów powinny przecinać się możliwie blisko siebie. Ponieważ trzy liczby różnią się co najwyżej o 1, przynajmniej dwie są równe, czyli możemy myśleć o naszym poliapezie jako o wycinku rombu (części wspólnej dwóch pasów o szerokości m). Odcieliśmy od niego trójkąty o nieujemnych wysokościach h_1 oraz h_2 . Ponadto suma $h_1 + h_2$ jest stała. Figura składa się wówczas z $2m^2 - (h_1^2 + h_2^2)$ pól. Łatwo sprawdzić, że w takiej sytuacji suma kwadratów jest tym mniejsza, im mniejsza jest różnica $|h_1 - h_2|$, która jest dwukrotnością odległości osi trzeciego pasa od środka rombu. Jest to oczywiste, biorąc pod uwagę fakt, że w rombie im bliżej przekątnej, tym dłuższe rzedy. Pozwolimy sobie opuścić dowód algebraiczny tych obserwacji.

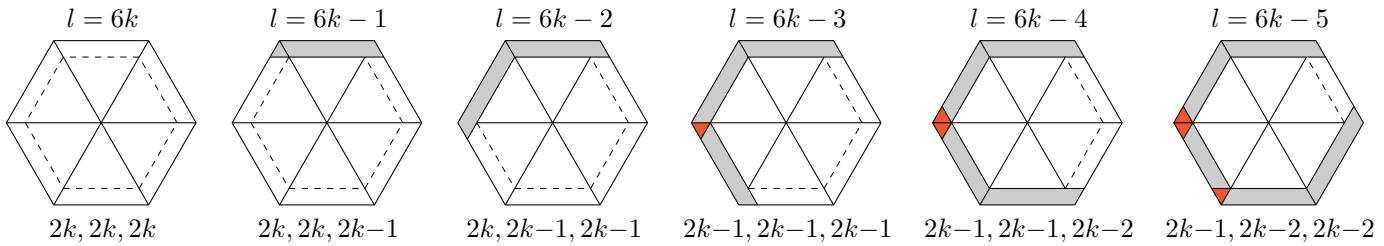
Ustalone dotąd własności *maksymalnych* poliapezów przy danym obwodzie pozwalają już dla każdego $l \in \mathbb{N}$ wyznaczyć je jednoznacznie z dokładnością do izometrii. Okazuje się, że przedstawienie liczby naturalnej jako sumy trzech liczb różniących się o co najwyżej jeden jest jednoznaczne (kolejność nas nie interesuje), a kształt maksymalnego poliapezu o takich szerokościach również jest jednoznaczny. W zależności od reszty z dzielenia obwodu l przez 6 otrzymujemy więc dokładne wartości $P_{\triangle}(l)$. Ponieważ nie rozważamy wypukłych poliapezów o szerokości 0, wygodnie będzie oznaczać obwody jako $l = 6k - 5, 6k - 4, \dots, 6k - 1, 6k$ (ujemne reszty) dla $k \geq 1$.



Wypukły poliapez z odciętym i doklejonym rzędem. Podane długości rzędów odnoszą się do dłuższej podstawy trapezu. Ich pole to dwukrotność długości minus jeden.



Na rysunkach pole każdego dużego trójkąta to k^2 , zaś zakolorowane trójkąty oznaczają obszary nakryte dwoma równoległobokami o polu $2k$.



Zauważmy, że po pomnożeniu pola przez 6 możemy je łatwo porównać z kwadratem liczby l :

$$\begin{aligned} 6P_{\triangle}(6k) &= 6^2 k^2 = (6k)^2 > (6k-1)^2 \\ 6P_{\triangle}(6k-1) &= 6^2 k^2 - 12k + 6 = (6k-1)^2 - 7 = (6k-2)^2 + 12k - 10 \\ 6P_{\triangle}(6k-2) &= 6^2 k^2 - 2 \cdot 12k = (6k-2)^2 - 4 = (6k-3)^2 + 12k - 9 \\ 6P_{\triangle}(6k-3) &= 6^2 k^2 - 3 \cdot 12k + 6 = (6k-3)^2 - 3 = (6k-4)^2 + 12k - 10 \\ 6P_{\triangle}(6k-4) &= 6^2 k^2 - 4 \cdot 12k + 12 = (6k-4)^2 - 4 = (6k-5)^2 + 12k - 13 \\ 6P_{\triangle}(6k-5) &= 6^2 k^2 - 5 \cdot 12k + 18 = (6k-5)^2 - 7 = (6k-6)^2 + 12k - 18 \end{aligned}$$

Zatem w każdym przypadku $(l-1)^2 < 6P_{\triangle}(l) \leq l^2$ (pamiętajmy, że $l \geq 3$; nie istnieje poliapez o obwodzie 2). Po spierwiastkowaniu otrzymujemy nierówności równoważne stwierdzeniu: $l = \lceil \sqrt{6P_{\triangle}(l)} \rceil$. Jeśli dobierzymy takie l , że zachodzą nierówności $P_{\triangle}(l-1) < n \leq P_{\triangle}(l)$, otrzymamy $l-1 \leq \lceil \sqrt{6n} \rceil \leq l$. Gdyby $O_{\triangle}(n) < l$, wówczas $n \leq P_{\triangle}(O_{\triangle}(n)) \leq P_{\triangle}(l-1)$, gdzie pierwsza nierówność wynika wprost z definicji P_{\triangle} i O_{\triangle} , a druga z monotoniczności P_{\triangle} . Przeczy to założeniu $P_{\triangle}(l-1) < n$. Zatem zawsze zachodzi $O_{\triangle}(n) \geq l \geq \lceil \sqrt{6n} \rceil$. Zauważmy poza tym, że obwód musi być tej samej parzystości co n , ponieważ wynosi $3n - 2s$, gdzie s to liczba wspólnych boków pól tworzących figurę. Stąd wniosek, że

$$O_{\triangle}(n) \geq \min \{ \ell \in \mathbb{N} : \ell \geq \sqrt{6n} \text{ i } 2|(n-\ell) \}.$$

Okazuje się, że tak naprawdę zachodzi tu równość. Najpierw rozważmy przypadek $l = \lceil \sqrt{6n} \rceil$. Gdy przyjrzymy się poprzednim rysunkom, zauważymy, że kolejne maksymalne poliapezy różnią się jednym rzędem pól. Zabierając kolejne komórki ze skrajnego rzędu maksymalnego poliapezu o obwodzie l , albo zwiększamy obwód o 1 (jeśli zabrane komórki tworzą trapez, ew. zdegenerowany do jednego trójkąta), albo go nie zmieniamy (gdy zabrane komórki tworzą równoległobok). Zatem faktycznie, minimalny obwód będzie alternował jednocześnie z parzystością n (stały być nie może) pomiędzy wartościami l a $l+1$. Niestety może się zdarzyć, że $l = \lceil \sqrt{6n} \rceil + 1$. Zauważmy, że $P_{\triangle}(l-1) + 1 \leq n$, zatem w takim przypadku $6P_{\triangle}(l-1) + 6 \leq 6n \leq (l-1)^2$. Z trzeciej kolumny wzorów odczytujemy, że może się tak zdarzyć tylko, gdy l przystaje modulo 6 do 1 lub 5, a ponadto musi być $n = P_{\triangle}(l-1) + 1 = P_{\triangle}(\lceil \sqrt{6n} \rceil) + 1$. Uzyskanie pola n (oraz właściwej parzystości obwodu!) z maksymalnego poliapezu o obwodzie $l-1 = \lceil \sqrt{6n} \rceil$ jest zatem możliwe poprzez dodanie jednego trójkąta.

Korzystamy z monotoniczności funkcji $x \mapsto \lceil \sqrt{6x} \rceil$



Wykazaną właśnie równość można opisać zwartym wzorem:

$$O_{\triangle}(n) = 2 \left\lceil \frac{n + \sqrt{6n}}{2} \right\rceil - n.$$

Pokażemy bowiem, że dla liczby całkowitej k i rzeczywistej x wartość $w(k, x) = 2 \lceil \frac{k+x}{2} \rceil - k$ to najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza od x o tej samej parzystości co k . Wprost z definicji, parzystość $w(k, x)$ jest równa parzystości k , ponieważ sufit jest zawsze liczbą całkowitą. Z kolei wiedząc, że $\lceil y \rceil \geq y$, otrzymujemy

$$w(k, x) \geq k + x - k = x.$$

Druga nierówność, $\lceil y \rceil < y + 1$, dowodzi, że

$$w(k, x) < 2 \frac{k + x + 2}{2} - k = x + 2.$$

W otrzymanym przedziale leży dokładnie jedna liczba całkowita o tej samej parzystości co k . Zatem dowiedliśmy, że $w(n, \sqrt{6n})$ jest równe najmniejszej liczbie całkowitej, większej od $\sqrt{6n}$, która jest tej samej parzystości co n .

Po szczegółowym omówieniu siatki kwadratowej i trójkątnej pozostaje wyznaczyć wzór na minimalny obwód dla układów kafelków sześciokątnych. To zadanie zostawimy już jednak jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Klub 44 F



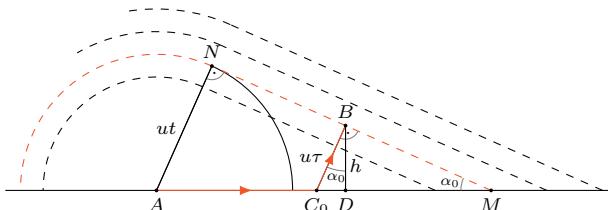
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po zakończeniu roku szkolnego 2024/25
i sprawdzeniu zadań
800 (WT = 2,55), 801 (WT = 2,25)
z numeru 6/2024

Jacek Konieczny	Poznań	41,41
Jan Zambrzycki	Białystok	4-39,07
Ryszard Woźniak	Kraków	34,00
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3-32,28
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	6-29,93
Krzysztof Zygan	Lubin	26,89
Tomasz Wietecha	Tarnów	18-21,64
Paweł Kubit	Kraków	20,30
Marian Łupieżowiec	Gliwice	3-14,49
Krzysztof Magiera	Łosów	4-13,42
Zbigniew Galias	Kraków	1-12,77

Lista obejmuje uczestników ligi, których stan konta wynosi przynajmniej 10 punktów i którzy przysłali rozwiązań co najmniej jednego zadania z rocznika 2023, 2024 lub 2025.

804. Posłużymy się analogią z załamaniem fali na granicy dwóch ośrodków, co zgodnie z zasadą Fermata gwarantuje minimum czasu dotarcia odpowiedniego promienia do punktu *B*. Warunek dotarcia tego promienia do punktu *B* zastąpimy warunkiem dotarcia odpowiedniego frontu falowego do tego punktu. Najpierw rozważmy prostszy przypadek nieruchomej wody, np. brzeg jeziora.

Przypadek $w = 0$ (rysunek poniżej):



Dany front falowy jest jednocześnie zbiorem punktów, do których może dotrzeć chłopiec w zadanym czasie, zaczynając płynąć z różnych punktów na brzegu. Zaznaczony kolorem czerwonym front, docierający do punktu *B* w minimalnym czasie *t*, odpowiada promieniowi załamaniu w punkcie *C*₀, który pokrywa się z optymalną trajektorią chłopca *AC*₀*B*.

Front falowy *NM* jest, zgodnie z zasadą Huygensa, obwiednią fal kulistych wychodzących z różnych punktów wejścia chłopca do wody na odcinku $|AM| = vt$, czyli jest styczną do okręgu o promieniu ut i środku *A* poprowadzoną z punktu *M*. Z trójkąta *ANM* mamy:

$$\sin \alpha_0 = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v} = \frac{\sin \alpha_0}{\sin 90^\circ},$$

zgodnie z prawem załamania. Ponieważ $htg \alpha_0 = hu/\sqrt{v^2 - u^2}$, więc odległość punktu *C*₀ od

Zadania z fizyki nr 812, 813

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2026

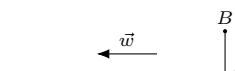
812. Na drewnianą pochylnię tworzącą kąt α z poziomem wciągana jest za pomocą sznurka skrzynia. Współczynnik tarcia skrzyni o pochylnię wynosi μ . Pod jakim kątem do poziomu należy skierować sznurek, aby z najmniejszym wysiłkiem wciągać skrzynię z zadanym przyspieszeniem a ?

813. Dwie części o masach m i M oraz ładunkach o jednakowych wartościach bezwzględnych, ale przeciwnych znakach, poruszają się po okręgach pod wpływem przyciągania elektrycznego. Wartość prędkości części o masie m momentalnie zwiększo, nie zmieniając przy tym kierunku prędkości. Ile razy co najmniej wzrosła ta wartość, jeżeli w wyniku tego części rozleciały się na nieskończoną odległość od siebie?

Rozwiązań zadań z numeru 10/2025

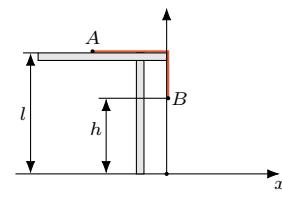
Przypominamy treść zadań:

804. Chłopiec znajduje się w punkcie *A* na brzegu rzeki, której prędkość nurtu wynosi w (rys. 1). Chłopiec może biec po brzegu z prędkością v i płynąć rzeką z prędkością u względem wody, przy czym $u < v$. W jakiej odległości od punktu *A* znajduje się na brzegu punkt *C*, z którego chłopiec powinien zacząć płynąć, aby dotrzeć do punktu *B* w najkrótszym czasie? Odległość $|BD|$ punktu *B* od brzegu wynosi h , odległość $|AD|$ jest równa l .



Rys. 1

805. Para jednakowych małych kulek *A* i *B* połączonych nieważką nicią o długości l zaczyna ześlizgiwać się z gładkiego stołu o wysokości l , przy czym w chwili początkowej kulka *B* znajduje się na wysokości $h = 2l/3$ nad podłogą (rys. 2). Po dotknięciu podłogi kulka *B* przykleja się do niej, a kulka *A* spada w tym momencie ze stołu. Od jakiej wysokości kulki *A* nad podłogą nić będzie napięta?

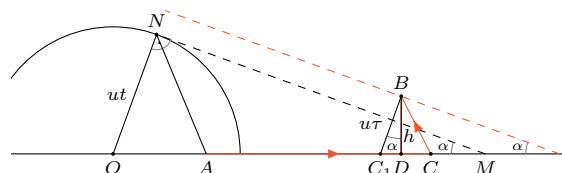


Rys. 2

punktu *A* wynosi:

$$|AC_0| = |AD| - |C_0D| = l - hu/\sqrt{v^2 - u^2}.$$

Przypadek $w \neq 0$ (rysunek poniżej):



Skorzystamy z wyników dla nieruchomej wody i uwzględnimy unoszenie z prądem rzeki względem brzegu. Promień ut względem nieruchomej wody musi wystartować z punktu *O* przesuniętego w lewo względem punktu *A* o odcinek o długości $|OA| = wt$, który pokonała woda w czasie *t*. Położenie punktu *M* nie zmienia się, gdyż nie zależy od prędkości prądu rzeki: $|AM| = vt$. Styczna *MN* wyznacza nachylenie względem brzegu frontów falowych. Z trójkąta *ONM* mamy $\sin \alpha = u/(w + v)$. Front *NM* nie dociera do punktu *B* w czasie *t*. Czyni to następny front, zaznaczony kolorem czerwonym, nachylony do brzegu pod tym samym kątem α . Temu frontowi odpowiada optymalna trajektoria chłopca *ACB* względem brzegu, zaznaczona kolorem czerwonym, oraz załamany promień $u\tau$, względem nieruchomej wody, wychodzący z punktu *C*₁. Punkt *C*₁ jest przesunięty w prawo względem *C*₀, bo $\alpha < \alpha_0$. Punkt *C* jest przesunięty w prawo względem *C*₁ o odcinek $|C_1C| = w\tau$, który pokonała woda w czasie płynięcia chłopca, τ . Ponieważ $|DC| = |C_1C| - |C_1D| = w\tau - h \operatorname{tg} \alpha$, a z trójkąta *C*₁*BD* mamy $\cos \alpha = h/u\tau$, skąd czas płynięcia:

$$\tau = h/(u \cos \alpha) = h(w + v)/(u \sqrt{(w + v)^2 - u^2}),$$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,

więc odległość punktu C od punktu A wynosi

$$\begin{aligned}|AC| &= |AD| + |DC| = l + w\tau - h \tan \alpha \\&= l + h(w^2 - u^2 + wv)/(u\sqrt{(w+v)^2 - u^2}).\end{aligned}$$

805. Zgodnie z zasadą zachowania energii prędkość kulki A w chwili ześlizgiwania się ze stołu wynosi

$$(1) \quad v_0 = \sqrt{2gl/3}.$$

Po ześlizgnięciu się ze stołu kulka A porusza się po paraboli, dopóki nić nie jest napięta. Wprowadzając układ współrzędnych, jak na rysunku 2, możemy zapisać współrzędne kulki w chwili t :

$$(2) \quad x = v_0 t, \quad y = l - gt^2/2.$$

Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44 F w roku szkolnym 2024/2025 po 801 zadaniach.

Zaskakująco wysoki okazał się współczynnik trudności zadania **794** ($WT = 3,7$) z optyki falowej. *Z soczewki skupiającej wycięto wąski środkowy pasek, a pozostałe części złożono ze sobą. Na osi optycznej przed soczewką w odległości większej niż ogniskowa umieszczono punktowe źródło światła monochromatycznego. Należało znaleźć maksymalną liczbę prążków interferencyjnych, jaka może powstać na ekranie za soczewką.* Właściwe podejście do tego zadania, czyli badanie interferencji światła z obrazów źródła od dwóch części soczewki, zaprezentował jedynie Tomasz Wietecha. Niestety zaraz na początku rozwiązania pomylił (zapewne przez roztargnienie) promień biegącą z różnych części soczewki.

Drugie miejsce pod względem współczynnika trudności zajęło zadanie **783** ($WT = 3,45$). *Mała naładowana kulka, zawieszona na nici w jednorodnym polu magnetycznym skierowanym pionowo, została odchylona o mały kąt z położenia równowagi i puszczena swobodnie. Należało znaleźć czas, po którym płaszczyzna wahń obróci się o kąt 2π .* Wymagało to dość żmudnych rachunków.

W rozwiązaniu firmowym problem ten uproszczono, korzystając z superpozycji rozwiązań liniowych. **Konrad Kapcia** zauważał, że równania są analogiczne do równań ruchu wahadła Foucaulta, i korzystając z zacytowanej literatury na ten temat, otrzymał poprawny wynik. **Tomasz Wietecha** samodzielnie rozwiązał te równania. Zmienił wprawdzie warunki początkowe, co wpływa na kształt trajektorii, jaką zakreśla kulka w płaszczyźnie poziomej, ale nie zmienia wyniku zadania.

Zadanie **787** ($WT = 3,25$) z termodynamiki polegało na znalezieniu stanu równowagi w izolowanym cieplnie naczyniu wypełnionym helem i połączonym małymi otworami z dwiema objętościami również zawierającymi hel, w których utrzymywano stale ciśnienie i różne temperatury. Autorem jedynego poprawnego rozwiązania jest **Krzysztof Zygan**.

Zadanie **792** ($WT = 3,23$) również wymagało zastosowania metod statystycznych. *W pionowym cylindrze zamkniętym od góry tłokiem poruszały się chaotycznie kulki ze znana średnią prędkością kwadratową. Tłok zaczęto podnosić z zadaną stałą prędkością i zatrzymano na dwa razy większej wysokości.* Należało znaleźć średnią prędkość ustaloną po długim czasie, nie uwzględniając strat energii podczas zderzeń oraz sił grawitacji. W pełni poprawne rozwiązanie nadesłał **Paweł Perkowski**.

W zadaniu **799** ($WT = 3,01$) z elektromagnetyzmu elektron krążył po orbicie kołowej w jednorodnym polu magnetycznym. *Indukcja pola magnetycznego wzrosła powoli trzy razy,*

nić ponownie stanie się naciągnięta, gdy odległość $|BA|$ zrówna się z długością nici:

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

Podstawiając współrzędne (2) i uwzględniając (1), otrzymujemy równanie:

$$gt^2(gt^2/4 - l/3) = 0.$$

Z niego znajdujemy chwilę czasu, w której nić ponownie zostanie napięta: $t^2 = 4l/(3g)$ (pierwiastek $t = 0$ odpowiada chwili ześlizgiwania się ciężarka A ze stołu). Korzystając z drugiego z równań (2), otrzymujemy szukaną wysokość:

$$y = l/3.$$

w czasie przewyższającym wielokrotnie okres obrotu. Należało odpowiedzieć, ile zmienił się w tym czasie promień orbity. Ponieważ zmiana pola była bardzo powolna, można było przyjąć, że mimo zmiany pola magnetycznego, a co za tym idzie prędkości i promienia, tor elektronu w czasie jednego okresu pozostaje w przybliżeniu kołowy. Nie było natomiast uzasadnione założenie, jakie przyjęła większość autorów rozwiązań, że prędkość elektronu nie zmienia się. Maksymalną ocenę za to zadanie otrzymał **Krzysztof Zygan**, który skorzystał z faktu, że dipolowy moment magnetyczny naładowanej cząstki w wolno zmieniającym się polu magnetycznym jest zachowany (podał odnośnik do literatury), i otrzymał poprawny wynik.

W zadaniu **785** ($WT = 3,00$) z elektrostatyki *kondensator płaski połączony do źródła napięcia znajdował się w jednorodnym polu elektrycznym, którego linie były prostopadłe do okładek kondensatora. Trzeba było obliczyć pracę, jaką należy wykonać, aby obrócić ten kondensator o kąt π wokół osi prostopadłej do linii zewnętrznego pola elektrycznego.* **Paweł Perkowski** nadesłał rozwiązanie takie jak firmowe, pozostały autorzy rozwiązały inne zadanie, gdy kondensator nie jest połączony do źródła.

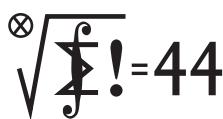
Nikt nie rozwiązał do końca poprawnie zadania **784** ($WT = 2,6$) z optyki geometrycznej. *Szkłany pryzmat o małym kącie łamiącym umieszczono w pewnej odległości od soczewki skupiającej tak, że jedna z jego ścian była prostopadła do osi optycznej soczewki. Po drugiej stronie soczewki w jej ognisku umieszczono punktowe źródło światła.* Po przejściu światła przez soczewkę, odbiciu od ścianek pryzmatu i ponownym przejściu przez soczewkę powstawały dwa obrazy w znanej odległości od siebie. Należało znaleźć współczynnik załamania szkła, z którego wykonano pryzmat. Zadanie nie było trudne, ale autorzy rozwiązań ograniczyli się do rozważenia jednego przypadku ustawnienia pryzmatu, gdy prostopadła do osi optycznej ściana pryzmatu była bliższa soczewki.

Paweł Perkowski jest autorem 9 rozwiązań, które uzyskały maksymalną ocenę, drugie miejsce zajmuje **Tomasz Wietecha** (7), trzecie **Krzysztof Zygan** (6).

W omawianym roku **Tomasz Wietecha** po raz osiemnasty (!) przekroczył próg 44 punktów, **Konrad Kapcia** po raz trzeci.

Cieszy, że dwaj panowie po paru latach przestoju odnowili swój kontakt z Klubem 44 F, martwi śladowy udział uczniów szkół średnich, mimo że rozwiązanie zdecydowanej większości zadań nie wymaga zaawansowanej matematyki.

Klub 44 M



Lista uczestników ligi zadaniowej

Klub 44 M

po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2024/25

Szymon Kitowski	-	43,92
Barbara Mroczeń	-	43,05
Andrzej Sudół	-	42,56
Andrzej Daniluk	-	2-40,76
Mikołaj Znamierowski	-	40,68
Marian Łupieżowiec	-	1-38,54
Krzysztof Kamiński	-	3-38,09
Roksana Slowik	-	2-37,51
Michał Adamaszek	-	9-37,30
Stanisław Bednarek	-	3-37,24
Jędrzej Biedrzycki	-	32,29
Błażej Źmija	-	2-29,84
Mikołaj Pater	-	4-29,79
Marcin Małogrosz	-	4-27,82
Piotr Kumor	-	16-27,28
Janusz Wojtal	-	26,30
Janusz Fiett	-	4-25,17
Tomasz Wietecha	-	15-23,97
Maciej Mostowski	-	1-22,90
Łukasz Merta	-	3-22,87
Radosław Kujawa	-	1-20,21
Andrzej Kurach	-	4-20,01
Marek Prauza	-	4-19,57
Norbert Porwol	-	1-18,50
Paweł Łabędzki	-	1-18,29
Grzegorz Karpowicz	-	2-17,90
Janusz Olszewski	-	25-17,53
Paweł Kubit	-	8-17,31
Patryk Jaśniewski	-	1-16,62
Paweł Najman	-	9-16,42
Bartek Knapik	-	13,39

Legenda (przykładowo): stan konta 9-37,30 oznacza, że uczestnik już dziewięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziesiątej) rundzie ma 37,30 punktu.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 13 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2023, 2024 lub 2025.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych familiów, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

908. Niech a będzie jedną z szukanych liczb; jasne, że $a > 1$. Rozpatrzmy przypadek, gdy $a - 1$ ma dzielnik pierwszy $p > 2$.

Weźmy dowolną liczbę $q \in \mathbb{N}$, dla której kongruencja $x^2 \equiv q \pmod{p}$ nie ma rozwiązań (wiadomo, że niereszty kwadratowe istnieją). Niech

$n = (\frac{1}{2}(p+1))^3(q-1)$. W myśl warunku zadania istnieje liczba $j \in \mathbb{N}$ taka, że $\frac{1}{2}j(j+1) = 1 + a + \dots + a^{n-1}$.

Skoro $a \equiv 1$, zatem $\frac{1}{2}j(j+1) \equiv n \equiv (\frac{1}{2})^3(q-1) \pmod{p}$ i po pomnożeniu przez 8:

$4j(j+1) \equiv q-1$, czyli $q \equiv (2j+1)^2 \pmod{p}$, wbrew wcześniejszemu wybórowi liczby q . Rozpatrywany przypadek okazał się niemożliwy.

Pozostaje przypadek, gdy $a = 2^s + 1$ dla pewnego $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Warunek zadania (dla $n = 3$) żąda,

Zadania z matematyki nr 915, 916

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2026

Redaguje Marcin E. KUCZMA

915. Funkcja parzysta $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, z wartością $f(0) = 0$, ma w całym zbiorze \mathbb{R} ciągłą pochodną.

(a) Udowodnić, że jeśli f ma w punkcie 0 pochodną drugiego rzędu (skończoną), to istnieją dwa przystające okręgi takie, że początek układu współrzędnych jest jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji f z każdym z tych okręgów.

(b) Podać przykład pokazujący, że bez założenia istnienia $f''(0)$ teza części (a) nie musi zachodzić.

916. Wzdłuż okręgu należy rozmieścić groszki w trzech różnych kolorach; mamy k groszków jednego koloru, l groszków drugiego, m groszków trzeciego koloru. Znaleźć warunek algebraiczny wiążący liczby k, l, m , konieczny i dostateczny na to, by istniało rozmieszczenie, w którym żadne dwa groszki jednakożego koloru nie sąsiadują.

Zadanie 916 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązań zadań z numeru 10/2025

Przypominamy treść zadań:

907. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną; $n \geq 3$. Znaleźć największą liczbę naturalną m , dla której istnieją różne liczby rzeczywiste x_1, \dots, x_m takie, że wartość wyrażenia

$$\sum_{i=0}^n x_k^{n-i} x_l^i$$

jest jednakowa dla każdej pary różnych numerów $k, l \in \{1, \dots, m\}$.

908. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $a \geq 1$ o tej własności, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ suma $1 + a + \dots + a^{n-1}$ jest liczbą trójkątną.

907. Oznaczmy tę wspólną wartość przez A . Mamy równość $(x_k - x_l)A = x_k^{n+1} - x_l^{n+1}$, czyli $x_k^{n+1} - Ax_k = x_l^{n+1} - Ax_l$ dla każdej pary $k, l \in \{1, \dots, m\}$, $k \neq l$. To znaczy, że wyrażenie $x_k^{n+1} - Ax_k$ ma jednakową wartość dla wszystkich $k \in \{1, \dots, m\}$. Oznaczmy ją przez C . Liczby x_1, \dots, x_m są więc różnymi pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^{n+1} - Ax - C$. Jego pochodna $W'(x) = (n+1)x^n - A$ ma zatem co najmniej $m-1$ różnych pierwiastków.

Gdy n jest liczbą parzystą, wielomian $(n+1)x^n - A$ może mieć co najwyżej dwa pierwiastki; stąd oszacowanie $m \leq 3$. Wartość $m = 3$ jest osiągalna (na wiele sposobów); na przykład trójką liczba (x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1) spełnia postawiony warunek (dla każdego parzystego n).

Gdy n jest liczbą nieparzystą, wielomian $(n+1)x^n - A$ może mieć co najwyżej jeden pierwiastek, więc $m \leq 2$; a dla $m = 2$ warunek zadania niczego nie żąda. Stąd odpowiedź: szukane maksimum to $m = 3$ oraz $m = 2$ odpowiednio dla parzystych i nieparzystych n .

by $1 + a + a^2 = \frac{1}{2}j(j+1)$ dla pewnego $j \in \mathbb{N}$. Po podstawieniu $a = 2^s + 1$ i prostym przekształceniu dostajemy równanie

$$2^{s+1}(2^s + 3) = (j-2)(j+3).$$

Czynniki po prawej stronie są różnej parzystości, więc jeden z nich dzieli się przez 2^{s+1} ; stąd (większy z nich) $j+3 \geq 2^{s+1}$. Drugi jest wtedy dzielnikiem liczby $2^s + 3$; stąd (mniejszy) $j-2 \leq 2^s + 3$. Uzyskane dwustronne oszacowanie $2^{s+1} - 3 \leq j \leq 2^s + 5$ pociąga nierówność $2^s \leq 8$. Dla $s = 0, 1, 2$ napisane równanie nie jest spełnione dla żadnego j . To znaczy, że $s = 3$, czyli $a = 9$. Dla $a = 9$ i dowolnego n suma dana w zadaniu $1 + 9 + \dots + 9^{n-1} = \frac{1}{8}(3^n - 1)(3^n + 1)$ jest liczbą postaci $\frac{1}{2}j(j+1)$ dla $j = \frac{1}{2}(3^n - 1)$. Stąd odpowiedź: $a = 9$ jest jedną liczbą spełniającą postawiony warunek. (Pomysł rozwiązania: Marcin Massalski).

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,

Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 M w roku szkolnym 2024/2025

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

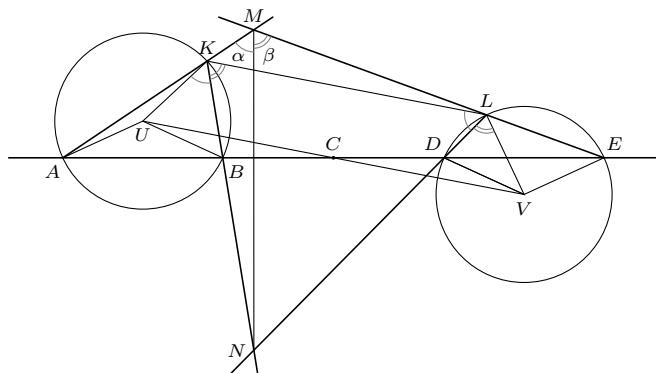
J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Galecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (16), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (25), L. Skrzypel (4), H. Kornacki, T. Witecha (15), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Pęczarski, M. Adamaszek (9), P. Kubit (8), J. Cisło (18), W. Bednarek (10), D. Kurpiel, P. Najman (9), M. Kieza (4), M. Kasperski (6), K. Dorobisz, A. Woryna (4), T. Tkocz, Z. Skalik (4), A. Dzedzej, M. Miodek, M. Małogrosz (4), K. Kamiński, J. Fiett (4), M. Spychała (6), A. Kurach (4), S. Bednarek, M. Pater (4), Ł. Merta (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

"dwukrotni": Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, K. Maziarz, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, F. S. Sikorski, J. Siwy, R. Słowiak, S. Solecki, T. Warszawski, P. Wiśniewski, G. Zakrzewski, K. Zygan, B. Źmija;

"jednokrotni": R. M. Ayoush, T. Bięgański, W. Boratyński, P. Burdzy, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Jóźwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, R. Kujawa, T. Kulpa, A. Langer, R. Latala, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciąk, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga, K. Matuszewski, R. Mazurek, H. Mikolajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, K. Morawski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Piąka, B. Piotrowska, W. Pompe, N. Porwol, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowska, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, K. Trautman, P. Wach, M. Warmuz, J. Wegrecki, G. Wiączkowski, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zająć, Z. Zaus, K. Zawiślakowski, P. Źmijewski.

Dość podobnie, zgrabnie: **Barbara Mroczek** (→ e-wydanie). Ponadto dwa rozwiązania rachunkowe (**T. Witecha**, **P. Wiśniewski**).



Jak co roku – omówienie wybranych zadań, niekoniecznie o parametrach: *współczynnik trudności (WT)* wysoki, *liczba przesyłanych rozwiązań (LPR)* niewielka. Grono uczestników, którzy regularnie przesyłają prace, jest niezwykle stabilne – i są to w większości prace zdecydowanie dobre. Wpływ na wartości wspomnianych parametrów jest oczywisty. Jedyne dwa zadania z wartością *WT* około 3 (ciekawostka: oba geometryczne) zauważają ów współczynnik zadaniom im towarzyszącym, może nadmiernie łatwym.

W e-wydaniu, jak zwykle, znajdziemy niektóre prace uczestników oraz ciekawe komentarze (zakładka: „Załącznik do elektronicznego omówienia ligi matematycznej”).

* * *

Zadanie 887. $[A, B \in \mathbb{R} : \exists u, v, w \in \mathbb{C} : |u| = |v| = |w| = 1 = uvw, u + v + w = A + Bi; \min A = ?] (WT = 1,69; LPR = 16)$. Zadanie nietrudne, sporo dobrych rozwiązań. Ale – uwaga – przy zliczaniu *LPR* nie zostały uwzględnione prace, w których zagadnienie zostało sprawdzone do szukania minimalnej wartości pewnej funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych przez obliczenie pochodnych cząstkowych i przyrównanie ich (obu) do zera (czyli wyznaczenie *punktów krytycznych* badanej funkcji) – i pochopna konkluzja, że najmniejsza z wartości w znalezionych punktach to szukane minimum funkcji. W sytuacjach, jakie wynikły w tym zadaniu, uzasadnienie poprawności konkluzji jest łatwe – niemniej niezbędne; jego brak to znacząca usterka.

[Dygresja – pytanie ukazujące potrzebę ostrożności przy podobnych rozumowaniach. Niech np. $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$. Założymy, że funkcja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w całym zbiorze D , ma ciągle pochodne cząstkowe w punktach wewnętrznych, a najmniejsza z jej wartości w punktach krytycznych wynosi m ; ponadto w punktach brzegu zbioru D przyjmuje tylko wartości $\geq m$ oraz jej wartości wzdłuż każdej półprostej (zawartej w D) dążą do granicy $\geq m$. Czy stąd wynika, że m jest jej najmniejszą wartością? Jako odpowiedź na to pytanie niech posłuży przykład: $f(x, y) = x^5 - x^3y - x^2y + y^2$.]

Zadanie 893. $[A, B, C, D, E$ (kolejno) na prostej, $CA = CE, CB = CD; K, L$ po jednej jej stronie; kąty ostre: $\not\angle KAB + \not\angle KBA + \not\angle LDE + \not\angle LED = 180^\circ; KB \cap LD = \{N\}, AK \cap EL = \{M\}; MN \perp AE$; odcinek MN przecina $KL \Rightarrow CK = CL]$ ($WT = 3,25; LPR = 9$). Większość rozwiązań (**M. Adamaszek**, **A. Kurach**, **J. Olszewski**, **M. Pater**, **M. Znamierowski**), podobnie jak firmowe, polegała na wprowadzeniu punktu uzupełniającego trójkąt AKE (lub ALE) do równoległoboku. **Marek Spychała** – nieco inaczej, oryginalnie: z założeń wynikają równości $AB = DE, \not\angle AKB + \not\angle DLE = 180^\circ$, a z nich wnioski: czworokąt $KMLN$ jest cykliczny; okręgi (AKB) i (DLE) mają równe promienie (tw. sinusów); ich środki U i V leżą po przeciwnych stronach prostej AE ; trójkąty AUB i DVE są przystające. Symetria względem punktu C , która zamienia punkty A i E oraz punkty B i D , zamienia także punkty U i V . Tak więc C jest środkiem odcinka UV . Oznaczmy: $\not\angle KMN = \alpha, \not\angle LMN = \beta$; skoro $MN \perp AB$, zatem $\not\angle BAK = 90^\circ - \alpha$, skąd $\not\angle UKN = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\not\angle BAK) = \alpha$. Dalej $\not\angle NKL = \beta$ (okrąg $KLMN$); $\not\angle UKL = \not\angle UKN + \not\angle NKL = \alpha + \beta$. Analogicznie $\not\angle VLK = \beta + \alpha$. Wobec tego czworokąt $UKLV$ jest trapezem równoramiennym. Punkt C jest środkiem jego podstawy UV ; stąd teza: $CK = CL$.

Zadanie 896. $[A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$ dla $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ciąg (A_n) A_n = \frac{1}{n} H(2^n), gdzie $H(N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$, wręcz zaprasza do wejścia w język analizy (logarytmy, pochodne, całki) – i tak wygląda większość rozwiązań (w tym i „firmówka”...).

A nie lepiej na poziomie gimnazjum? Patrzmy (**Janusz Olszewski**):

$$H(2^{n+1}) - H(2^n) = \frac{1}{2^n+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} < 1$$

(bo suma po prawej stronie ma 2^n składników, każdy $< 2^{-n}$).

Podstawiając $H(2^n) = nA_n$, dostajemy nierówność

$$0 > (n+1)A_{n+1} - nA_n - 1 = (n+1)(A_{n+1} - 1) - n(A_n - 1) > \\ > n(A_{n+1} - 1) - n(A_n - 1),$$

czyli $A_{n+1} - 1 < A_n - 1$: teza!

Autor zadania (**Jerzy Cisło**) też zaproponował rozwiązanie w podobnym stylu; i nikt ponadto spośród uczestników.

Odnajdujmy jeszcze podejście „erudycyjne”, wykorzystujące twierdzenie Younga:

$$(Y) \quad H(n) = \gamma + \ln n + \frac{1}{2(n+\theta_n)}, \quad 0 < \theta_n < 1$$

(γ – stała Eulera); aby uzyskać tezę zadania

$(n+1)H(2^n) > nH(2^{n+1})$, wystarczy pokazać, że

$$(n+1)\left(\gamma + \ln 2^n + \frac{1}{2(2^{n+1})}\right) > n\left(\gamma + \ln 2^{n+1} + \frac{1}{2 \cdot 2^{n+1}}\right),$$

czyli że $2\gamma > \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^{n+1}}$, a to oczywiste, bo

prawa strona ujemna. Jednak twierdzenie (Y) jest mało znane i niełatwo dostępne (Google wyrzuca kilka innych twierdzeń Younga). **Tomasz Wietecha**

znalazł w pracy [arxiv.org/pdf/2204.09226](https://arxiv.org/pdf/2204.09226.pdf) wynik:

$H(n) = \gamma + \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \epsilon_n$, $0 < \epsilon_n < \frac{1}{4n^3}$, z którego nierówność dwustronna (Y) daje się niezbyt trudno wyprowadzić. Jeszcze jeden z uczestników w ten sam sposób wyprowadził tezę zadania z nierówności (Y), jednak nie podając ani jej dowodu, ani żadnego odsyłacza.

Zadanie 897. [ABCD – czworokąt wypukły; obwód p , przekątne m, n ; ABCE – równoległobok $\Rightarrow DE \leq p - m - n$] ($WT = 2,97$; $LPR = 10$). Traktując punkty jako liczby zespolone i oznaczając $A - B = x$, $B - C = y$, $C - D = z$, rozwiązań firmowych sprowadzało tezę zadania do nierówności

$$|x| + |y| + |z| + |x + y + z| \geq |x + y| + |y + z| + |z + x|$$

(dalej dając jej dowód). Redaktor Ligi nie miał świadomości – jaką mieli liczni uczestnicy – że ta nierówność jest dość dobrze znana jako *Hlawka inequality* (lub: *Hornisch-Hlawka*) i zachodzi nie tylko dla liczb $x, y, z \in \mathbb{C}$, ale dla dowolnych wektorów w przestrzeni liniowej unormowanej, z normą określona przez iloczyn skalarny. Jak wielokrotnie bywało, popis erudycji dał **Piotr Kumor**; całość jego pracy w e-wydaniu – znajdziemy tam obszerne rozważania,

Zadanie 902. [Dla $n \in \mathbb{N}$: $w(n) = \max\{w: 10^{-w}n! \in \mathbb{N}\}$, $10^{-w(n)}n! =: f(n) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}: f(5^m) \equiv 2^m \pmod{5}$] ($WT = 1,90$; $LPR = 18$). Przez dość długi czas nie mogliśmy się zdecydować, czy chcemy włączyć to zadanie do Ligi. Przecież ostatnia niezerowa cyfra liczby $n!$ to hasło często spotykane – musi być w sieci. I jest – tylko że wszystko, co wyskakuje, to proste przykłady, dla konkretnych wartości n – nie ogólne twierdzenie, które byłoby tu przydatne; trzeba poszperać głębiej. **Paweł Kubit**, jako jedyny, dotarł do formuły

$$L(n!) = LD(2^a L(a!) L(b!)) \quad \text{dla } n = 5a + b,$$

w której $LD(m)$ to ostatnia cyfra liczby m ; $L(n!)$ to $LD(f(n))$ (gdzie f to funkcja z zadania). Podał dwa źródła, z których jedno nie zawiera dowodu (tylko przykłady), zaś drugie www.geeksforgeeks.org/dsa/last-non-zero-digit-factorial odsyła do kolejnego materiału, w którym faktycznie jest dowód (formuły nawet bardziej ogólnej), wszelako ciężki do przebrnięcia – tę ścieżkę (wraz z wyjaśnieniem, jak owa formuła prowadzi do tezy naszego zadania) proponujemy entuzjastom. Jednak prościej jest zwyczajnie zrobić zadanie – niezbyt przecież trudne (jak wskazuje wartość LPR).

Wszyscy pozostali uczestnicy przysyłali prace różniące się w detalach, ale bazujące na jednej koncepcji, by w iloczynie definiującym $n!$ wydzielić wszystkie potęgi piątki, a pozostałe czynniki pogrupować w bloki czteroelementowe. Jedyna trudność polegała na tym, jak tu zgrabnie zapisać rozumowanie, które w myśli jawi się jako całkiem jasne. Szczyt zwięzości, przy jednoczesnej klarowności przekazu, osiągnął **Jerzy Cisło** (→ e-wydanie)!



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczać na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

odsyłacze do literatury (nawet reprodukcje fragmentów prac), dyskusje przypadków równości, kwestie istotności założień (w różnych wariantach twierdzenia) itp. **Janusz Olszewski** (→ e-wydanie) przysłał trzy sposoby, w tym odsyłacz do Hlawki (z komentarzem).

Zadanie 900. [f_1, f_2, f_3, f_4 – wielomiany rzeczywiste; $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq f_4$ w $[0, 1]$; $f_2 \leq f_4 \leq f_1 \leq f_3$ w $[-1, 0] \Rightarrow f_1 = f_2 = f_3 = f_4$] ($WT = 1,56$; $LPR = 16$). Znów: podejście typowe – przez porównanie relacji asymptotycznych (przy 0) funkcji f_i – ustępowało prostotą wykorzystaniu zwykłej szkolnej algebry: wyrazy wolne $a_i = f_i(0)$ spełniają warunki $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ oraz $a_2 \leq a_4 \leq a_1 \leq a_3$, więc są równe (oznaczmy ich wspólną wartość przez a); zatem istnieją wielomiany g_i takie, że $f_i(x) = a + xg_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$); w przedziale $(0, 1]$ spełniają one nierówności takie jak funkcje f_i , zaś w $[-1, 0)$ – przeciwnie; stąd ich wyrazy wolne $b_i = g_i(0)$ spełniają warunki $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$ oraz $b_3 \leq b_1 \leq b_4 \leq b_2$, więc są równe (wspólna wartość b); i dalej: istnieją wielomiany h_i takie, że $g_i(x) = b + xh_i(x)$, spełniające w przedziale $(0, 1]$ nierówności takie jak g_i , zaś w $[-1, 0)$ przeciwnie, czyli takie jak f_i , wobec czego wartości $c_i = h_i(0)$ spełniają warunki takie jak a_i , więc znów są równe; pozostało zauważać, że b_i to współczynniki wielomianów f_i przy x ; dalej: c_i to współczynniki f_i przy x^2 ; kontynuując to rozumowanie (indukcję), wykazujemy, że w wielomianach f_i współczynniki przy zmiennej w jednakowej potędze są równe, co oznacza, że te wielomiany są równe.

Obie metody były reprezentowane w przesyłanych pracach; ta pierwsza (przez asymptotykę) bardziej licznie; ciężko dokładnie ocenić, bo niektóre rozwiązania zawierały elementy jednej i drugiej metody.

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesyłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Prosto z nieba: Sześć miliardów ton na sekundę

Żyjemy w złotej erze astronomii. Serio! Czasami trudno nam uwierzyć, że dopiero 30 lat temu odkryliśmy pierwszą planetę krążącą wokół gwiazdy podobnej do Słońca. W 2022 roku mieliśmy ich już 5 tysięcy, a w zeszłym roku oficjalna liczba potwierdzonych obserwacji planet pozasłonecznych osiągnęła 6 tysięcy, podczas gdy kolejne tysiące kandydatów czekają w kolejce na obserwacje. Każda odkryta planeta pozwala naukowcom dowiedzieć się więcej o warunkach, w jakich powstają, oraz o tym, gdzie ich szukać.

Oczywiście w tym czasie nie obyło się bez niespodzianek. Odkryliśmy obiekty, które odbiegają od naszego standardowego rozumienia tego, czym jest planeta i gdzie powinna się znajdować. Na przykład odkryliśmy *planety swobodne*, czyli takie, które przemierzają przestrzeń kosmiczną samotnie, nie orbitując wokół

żadnej gwiazdy. Naukowcy szacują, że w naszej Galaktyce takich planet może być około dwa razy więcej niż gwiazd! Ich pochodzenie wciąż pozostaje zagadką: czy są to obiekty, które powstały podobnie jak gwiazdy, poprzez zapadnięcie się chmur pyłu i gazu? Czy też są to planety wyrzucone ze swoich rodzinnych układów gwiazdowych?

W tym artykule używam określenia *swobodna planeta*. Jest to luźne tłumaczenie wielu angielskich nazw odnoszących się do tych obiektów (np. *rouge planet*, *free floating planet* etc.). Nazwa stosowana w literaturze naukowej to *swobodnie dryfujący obiekt o masie planetarnej* (ang. *Free-floating Planetary-mass Object*). O swobodnych, bezgwiezdnych planetach pisalam w Δ_{24}^2 .

Możliwe, że właśnie odrobinę zbliżyliśmy się do odpowiedzi na to pytanie dzięki swobodnej planecie o uroczej nazwie Cha 1107-7626. Dla tej konkretnej planety odpowiedź brzmi: powstaje jak gwiazda.



Wizja artystyczna planety Cha 1107-7626. Znajduje się ona w odległości około 620 lat świetlnych od Ziemi, jest około 5–10 razy masywniejsza od Jowisza i nie orbituje wokół żadnej gwiazdy.
Źródło: ESO/L. Calcada/M. Kornmesser

Cha 1107-7626 to planeta, którą obserwujemy w momencie formowania się jej wewnątrz chmury gazu i pyłu. Otaczający planetę materiał nieustannie opada na nią pod wpływem siły grawitacji (w procesie zwany akrecją). W rezultacie wokół planety powstaje dysk materii, który wirując, nagrzewa się do wysokich temperatur, i w efekcie emituje światło. To światło jesteśmy w stanie rejestrować za pomocą teleskopów. W przypadku tej planety jednak zaobserwowano coś zaskakującego – szybkość opadania materii na planetę nie jest stała, ale zwiększa się w zatrzaszającym tempie. W sierpniu 2025 roku zmierzono, że planeta zasysa otaczającą ją materię z prędkością sześciu miliardów ton na sekundę! Około osiem razy szybciej niż kilka miesięcy wcześniej. Jest to najsilniejszy epizod akrecji, jaki kiedykolwiek odnotowano dla obiektu o masie planetarnej.

Obserwacje przeprowadzono za pomocą spektrografo X-shooter zainstalowanego na Bardzo Dużym Teleskopie (Very Large telescope, VLT) należącym do Europejskiego Obserwatorium Południowego (European Southern Observatory, ESO), znajdującym się na pustyni Atacama w Chile. Zespół wykorzystał również dane z teleskopu kosmicznego Jamesa Webba, obsługiwany przez agencję kosmiczną Stanów Zjednoczonych, Europy i Kanady, oraz dane archiwalne ze spektrografo SINFONI, zainstalowanego na teleskopie VLT należącym do ESO.

Granica pomiędzy sposobem, w jaki powstają gwiazdy, oraz tym, jak powstaje swobodna planeta Cha 1107-7626, zacięra się jeszcze bardziej, gdy przyjrzymy się dokładniej zmianom tempa opadania materii na

planetę w czasie. Porównując światło emitowane przed i podczas dramatycznego wzrostu tempa akrecji, astronomowie zebraли wskazówki dotyczące natury tego procesu. Wyniki wskazują, że za napędzanie tempa akrecji jest odpowiedzialne zaskakująco silne pole magnetyczne planety – zjawisko wcześniejsze obserwowane tylko w przypadku gwiazd. Ale to nie wszystko, skład chemiczny materii wokół planety zmienia się w czasie. W dysku akrecyjnym wykryto na przykład parę wodną, której tam nie było kilka miesięcy wcześniej. I tutaj znów można się domyślić, że takie zjawisko zaobserwowano do tej pory tylko w czasie powstawania gwiazd, ale nigdy dla żadnej powstającej planety.

Jedno można powiedzieć na pewno, Cha 1107-7626 zaintrygowała naukowców. Sposób, w jaki powstaje, bardzo różni się od tego, jak powstała nasza własna planeta. Jak to ujęła Amelia Bayo, współautorka publikacji opisującej badania: „Pomyśl, że obiekt planetarny może zachowywać się jak gwiazda, budzi podziw i skłania nas do zastanowienia się, jak mogą wyglądać światy poza naszym własnym”. No cóż, pozostaje nam tylko podziwiać dalej!

Napisane na podstawie publikacji V. Almendros-Abad et al. “Discovery of an Accretion Burst in a Free-Floating Planetary-Mass Object”, *The Astrophysical Journal Letters* 992 L2 (2025).

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych,
Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Niebo w lutym



Luty jest najkrótszym miesiącem roku, Słońce szybko jednak wspina się na niebie i przez cały miesiąc zwiększa ono wysokość górowania o ponad 9° . Wyraźnie wzrośnie też jego czas przebywania nad widnokrengiem, do prawie 11 godzin.

Podobnie jak w styczniu, teraz też Księżyc zdominuje początek miesiąca. Pełnia Srebrnego Globu przypada w nocy z 1 na 2 lutego na tle gwiazdozbioru Raka, 4° na wschód od jasnej gromady otwartej gwiazd M44. Oczywiście zginie ona w blasku Księżyca, ale jeśli ktoś jeszcze nie umie jej odnaleźć, to warto zapamiętać położenie Księżyca tej nocy względem Regulusa w Lwie z jednej strony oraz Kastorem i Polluksem w Bliźniętach z drugiej i powrócić w ten rejon nieba za tydzień. M44 znajduje się prawie w połowie odległości między wspomnianymi gwiazdami, nieco bliżej Bliźniąt i na ciemnym niebie widoczna jest goły okiem jako mgiełka, a w lornetce rozpada się na pojedyncze gwiazdy.

Następnej nocy Księżyc zawita do Lwa, wschodząc 5° na północny zachód od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy tej konstelacji. Około godziny 5 dystans między tymi ciałami niebieskimi zmniejszy się do $0,5^\circ$. W nocy z 6 na 7 lutego Srebrny Glob w fazie 72% zbliży się do Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, zmniejszając nad ranem dystans do 3° . Dwie noce później natomiast nastąpi ostatnia kwadra Księżyca na tle gwiazdozbioru Wagi 6° na południe od Zuben Elgenubi, drugiej co do jasności gwiazdy tej konstelacji, choć na mapach nieba oznaczana jest grecką literą α .

Przełom zimy i wiosny oznacza niskie nachylenie ekleptyki do porannego horyzontu i wysokie do wieczornego. Wpłynie to mocno na widoczność naturalnego satelity Ziemi po ostatniej kwadrze, szczególnie że przebywa on wtedy na południe od ekleptyki, co dodatkowo obniża jego wysokość nad widnokrengiem o kilka stopni. Warto tutaj wspomnieć o spotkaniu Księżyca w fazie 35% z Antaresem, najjaśniejszą gwiazdą Skorpiona. 11 lutego oba ciała niebieskie pojawią się na nieboskłonie około godziny 3:30 w odległości $1,5^\circ$ od siebie.

Nów Księżyca przypada 17 lutego i zostanie on ozdobiony obrączkowym zaćmieniem Słońca, widocznym niestety jedynie z Antarktydy. Po nowiu Srebrny Glob przeniesie się na niebo wieczorne, gdzie bardzo cienki sierp Księżyca można próbować dostrzec już 18 lutego. Pół godziny po zachodzie Słońca zajmie on pozycję na wysokości 7° , prezentując tarczę w fazie niecałych 2%. Planeta Merkury pokaże się 4° nad nim, w podobnej odległości, ale pod nim zorzę wieczorną przebieje planeta Wenus. Oczywiście Wenus jest dużo jaśniejsza, jej blask wyniesie $-3,9^m$, Merkury natomiast świeci blaskiem $-0,6^m$.

Pierwsza planeta od Słońca maksymalną elongację nieco ponad 18° osiągnie 19 lutego i zacznie pojawiać się na lewo od punktu W widnokrengiem od drugiego tygodnia miesiąca. W dniu maksymalnej elongacji, około godziny 18 planeta zajmie pozycję na wysokości 7° . Jak zawsze podczas widoczności wieczornej planety wewnętrzne dążą od koniunkcji górnej do dolnej, a zatem ich tarcze rosną, a fazy maleją. W przypadku Merkurego spada również

jego jasność. Przez trzy tygodnie tarcza Merkurego urosnie od $5''$ do $10''$, faza jego tarczy spadnie od 88% do 12%, blask natomiast zmniejszy się od -1^m do $+1,9^m$.

Drugą z planet wewnętrznych można próbować dostrzec nisko nad wspomnianą wcześniej częścią widnokrengiem od połowy lutego. Do końca miesiąca w momencie zachodu Słońca wzniesie się ona na wysokość 10° . Od marca do czerwca planeta rozgosi się jednak na niebie wieczornym. W lutym Wenus jest daleko od nas i jej wygląd prawie się nie zmienia. Planeta świeci blaskiem $-3,9^m$, przy średnicy tarczy $10''$ i fazie 88%. Do końca miesiąca dystans między planetami zmniejszy się od 8° do 4° .

19 lutego Księżyca zwiększy fazę do 5%, zbliżając się na 5° do planety Saturn, która świeci blaskiem $+1^m$, przy średnicy tarczy $16''$. Warunki widoczności Saturna szybko się pogarszają, i na początku marca zginie on w zorzy wieczornej. Niskie położenie nad widnokrengiem sprawia, że obserwacje teleskopowe są trudne i pozostałe tylko obserwacja goły okiem.

24 dnia miesiąca przypada I kwadra Srebrnego Globu. Do tego czasu zbliży się on do Plejad w Byku. Tym razem Europa nie ma szczęścia i do ich zakrycia dojdzie, gdy wraz z Księżycem są one u nas pod horyzontem. 24 lutego oba ciała zajdą tuż po północy, gdy przedzieli je dystans 2° . Wieczorem znajdą się one wysoko na niebie, w okolicach południka lokalnego, ale już ponad 8° od siebie.

W dniach 26 i 27 lutego Księżyca zwiększy fazę do około 80% i zajmie pozycję najpierw na pograniczu gwiazdozbiorów Bliźniąt i Woźnicy, a następnie we wschodniej części Bliźniąt. Pierwszej z wymienionych nocy Księżyca przed swoim zachodem zmniejszy dystans do Jowisza do poniżej 5° . Drugiej nocy natomiast Księżyca zbliży się na 3° do Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt oraz zakryje świecącą blaskiem $+3,6^m$ gwiazdę κ Gem. Gwiazda zniknie za księżycową tarczą około godziny 23 i pojawi się ponownie godzinę później. Jowisz powoli słabnie po styczniowej opozycji i do końca miesiąca jego blask spadnie do $-2,4^m$, przy średnicy tarczy $43''$.

Ariel MAJCHER

Rozwiązania zadań ze strony 5



Rozwiązanie zadania M 1843.

Jeśli n jest liczbą parzystą, tj. $n = 2k$, to pary

$$(1, 4k), (2, 4k - 1), \dots, (2k, 2k + 1)$$

spełniają warunki zadania, gdyż

$$(1 + 4k) \cdot (2 + (4k - 1)) \cdot \dots \cdot (2k + (2k + 1)) = ((4k + 1)^k)^2.$$

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, tj. $n = 2k + 1$, to użyjemy indukcji matematycznej. Dla $n = 3$ mamy

$$(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6) = 18^2.$$

Załóżmy zatem, że teza zachodzi dla $n - 2 = 2k - 1$ i połączymy już w pary liczby $1, 2, \dots, 4k - 2$ tak, że iloczyn sum w parach jest równy m^2 dla pewnej liczby całkowitej m . Wtedy dokładając pary

$$(4k - 1, 4k + 2), (4k, 4k + 1),$$

dostajemy:

$$(4k - 1 + (4k + 2)) \cdot (4k + (4k + 1)) \cdot m^2 = ((8k + 1)m)^2.$$



Rozwiązanie zadania M 1844.

Odpowiedź: 40.

Udowodnimy, że na początku w każdym rzędzie lub kolumnie znajdują się co najwyżej dwie mrówki, których pierwszy ruch odbywa się w tym rzędzie lub kolumnie. Zatem całkowita liczba mrówek na tablicy wynosi maksymalnie $2 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 40$.

Rozpatrzmy standardowe kolorowanie szachowe naszej tablicy. Założymy, że po pewnym rzędzie lub kolumnie poruszają się

	↑	→					←	↑	
↑	→			↑	↓		←	↑	
→		↓			↓				←
	→	↓				↓	←		
	→					→			
	→					→			
	→					→			
	→					→			
	→					→			
	→					→			

3 mrówki. Na podstawie zasady szufladkowej Dirichleta dwie z nich muszą zajmować pola tego samego koloru. Jednakże wtedy te mrówki muszą zająć to samo pole na długo przed upływem godziny!

Rysunek obok pokazuje spełniający warunki zadania sposób rozmieszczenia 40 mrówek wraz z kierunkami ich wędrówek.



Rozwiązanie zadania M 1845.

Odpowiedź: Tak.

Niech $ABCD$ będzie czworościanem foremnym. Rozważmy trzy płaszczyzny:

- Σ_1 : równoległa do DAB , w odległości 3 od niej i po tej samej stronie DAB co punkt C ,
- Σ_2 : równoległa do DBC , w odległości 4 od niej i po tej samej stronie DBC co punkt A ,
- Σ_3 : równoległa do DCA , w odległości $\sqrt{21}$ od niej i po tej samej stronie DCA co punkt B .

Niech O będzie punktem przecięcia się płaszczyzn Σ_1 , Σ_2 i Σ_3 . Rozpatrzmy sferę Ω o środku w punkcie O i promieniu 5. Weźmy jeszcze punkty A' , B' , C' odpowiednio na półprostych DA , DB , DC tak, aby $DA' = DB' = DC'$ i płaszczyzna $A'B'C'$ była styczna do Ω .

Sfera Ω przetnie płaszczyznę $DA'B'$ wzduż okręgu o promieniu $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, płaszczyznę $DB'C'$ wzduż okręgu o promieniu $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, a płaszczyznę $DC'A'$ wzduż okręgu o promieniu $\sqrt{5^2 - \sqrt{21}^2} = 2$.

Przesuwamy teraz równolegle płaszczyznę $A'B'C'$ w kierunku D aż do momentu, w którym $O \in A'B'C'$. Widzimy, że Ω przecina $A'B'C'$ wzduż okręgu, którego promień może być dowolną liczbą z przedziału $(0, 5]$, w szczególności może być równy 1.



Rozwiązanie zadania F 1137.

W sytuacji, gdy na odizolowanej sondzie uruchamiamy szpulę magnetofonu, układ pozostaje wolny od zewnętrznych momentów. Calkowity moment pędu względem osi obrotu musi więc pozostać stały. Jeśli przed włączeniem wszystko spoczywa, to po uruchomieniu szpuli całkowity moment pędu nadal równy jest zeru: moment pędu szpuli zostaje skompensowany przez przeciwny moment pędu powolnego obrotu korpusu sondy.

Niech I_s oznacza moment bezwładności korpusu sondy względem danej osi, a I_r moment bezwładności szpuli (traktowanej jak jednorodny walec, $I_r = \frac{1}{2}mr^2$). Oznaczmy także przez $\omega_r = 2\pi/T$ prędkość kątową szpuli, gdzie T jest jej okresem obrotu. Z zasad zachowania momentu pędu otrzymujemy natychmiast:

$$I_s \omega_s + I_r \omega_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_s = -\frac{I_r}{I_s} \omega_r.$$

W konsekwencji po czasie t kąt obrotu sondy wynosi:

$$\Delta\varphi = |\omega_s| t = \frac{I_r}{I_s} \frac{2\pi t}{T} = \frac{mr^2}{I_s} \frac{\pi t}{T}.$$

Jeśli oś obrotu ma składową prostopadłą do kierunku patrzenia kamery, ten kąt przekłada się bezpośrednio na ugięcie linii celowania na niebie. Równoważne przesunięcie liniowe środka tarczy Jowisza w rzucie na odległość D to (w przybliżeniu dla malego kąta)

$$\Delta x = D \Delta\varphi.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$\Delta\varphi = 8,82 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,0505^\circ \approx 182''.$$

Dla odległości $D = 5,7 \cdot 10^5 \text{ km}$:

$$\Delta x = D \Delta\varphi \approx 500 \text{ km}.$$

Uwaga: Jeżeli oś obrotu pokrywa się z osią optyczną kamery, obraz jedynie obraca się w kadrze – bez przesunięcia środka tarczy.



Rozwiązanie zadania F 1138.

Rozważmy obraz interferencyjny powstały przez fale odbite od górnej i dolnej powierzchni klinu powietrznego. Fala odbita od dolnej powierzchni ulega zmianie fazy o π , podczas gdy fala odbita od górnej powierzchni nie. W miejscu, gdzie grubość klinu wynosi d , warunkiem na maksimum natężenia jest

$$2d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

gdzie λ jest długością fali w powietrzu, a m jest liczbą całkowitą. Zatem

$$d = \frac{(2m + 1)\lambda}{4}.$$

Z geometrii rysunku wynika, że

$$d = R - \sqrt{R^2 - r^2},$$

gdzie R jest promieniem krzywizny soczewki, a r jest promieniem pierścienia Newtona. Zatem

$$\frac{(2m + 1)\lambda}{4} = R - \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Skąd otrzymujemy:

$$r = \sqrt{\frac{(2m + 1)R\lambda}{2} - \frac{(2m + 1)^2\lambda^2}{16}}.$$

Jeśli R jest dużo większe od długości fali, pierwszy składnik dominuje nad drugim i

$$r = \sqrt{\frac{(2m + 1)R\lambda}{2}}.$$

Wartości liczbowe to: $r_1 \approx 1,44 \text{ mm}$, $r_2 \approx 1,86 \text{ mm}$.



Punkty izogonalnie sprzężone

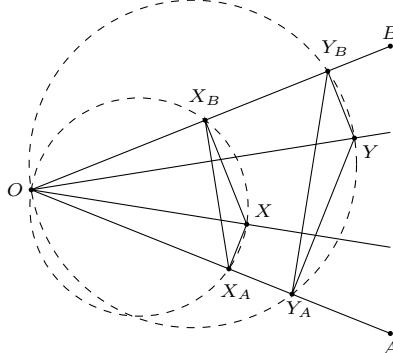
Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

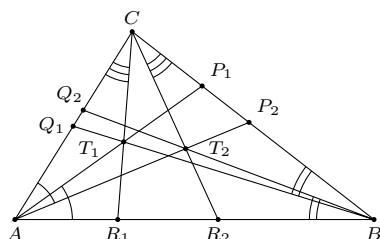
Przed przystąpieniem do lektury warto zapoznać się z trygonometrycznym twierdzeniem Cevy, do czego znakomicie nadaje się poprzedni kącik.

Rozważmy kąt wypukły AOB oraz punkty X i Y wewnętrzny tego kąta. Mówimy, że proste OX i OY są *izogonalnie sprzężone* względem tego kąta, jeśli $|\alpha_{AOX}| = |\alpha_{BOY}|$ (lub równoważnie: $|\alpha_{AOY}| = |\alpha_{BOX}|$).

Twierdzenie 1. Rozważmy sytuację z pierwszego rysunku. Punkty X_A i X_B są rzutami prostokątnymi punktu X na ramiona kąta AOB ; analogicznie jest z Y_A i Y_B . Wówczas proste OX i OY są izogonalnie sprzężone względem kąta AOB wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie $X_A Y_A Y_B X_B$ można opisać okrąg. W takiej sytuacji środkiem wspomnianego okręgu jest środek odcinka XY .



Rys. 1



Rys. 2

Dowód. Na czworokątach $OX_A X_B X$ i $OY_A Y_B Y$ można opisać okręgi (o średnicach OX i OY), więc mamy następujący ciąg równoważności:
 $|\alpha_{AOX}| = |\alpha_{BOY}| \Leftrightarrow |\alpha_{X_A X_B X}| = |\alpha_{Y_B Y_A Y}| \Leftrightarrow |\alpha_{OX_B X_A}| = |\alpha_{OY_A Y_B}| \Leftrightarrow$
na czworokącie $X_A Y_A Y_B X_B$ można opisać okrąg. Na koniec zaobserwujmy, że środek odcinka XY leży na symetrycznych odcinkach $X_A Y_A$ i $X_B Y_B$, ponieważ $X_A Y_A Y_X$ i $Y_B X_B X_Y$ są trapezami prostokątnymi. Z tego wnioskujemy, że jest to środek okręgu opisanego na czworokącie $X_A X_B Y_B Y_A$.

Twierdzenie 2. Niech punkt T_1 będzie wspólnym punktem czewian AP_1, BQ_1 i CR_1 , a punkty P_2, Q_2, R_2 są wybrane w taki sposób, by proste AP_2, BQ_2, CR_2 były izogonalnie sprzężone z, odpowiednio, AP_1, BQ_1, CR_1 w kątach BAC, CBA, ACB . Przy powyższych założeniach odcinki AP_2, BQ_2, CR_2 również przecinają się w jednym punkcie (rysunek 2).

Dowód. Oznaczmy miary kątów trójkąta ABC przy wierzchołkach A, B, C , przez, odpowiednio, α, β, γ . Niech ponadto (są to kąty zaznaczone na rysunku 2):

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= |\alpha_{BAP_1}| = |\alpha_{P_2 AC}|, \\ \beta_1 &= |\alpha_{CBQ_1}| = |\alpha_{Q_2 BA}|, \\ \gamma_1 &= |\alpha_{ACR_1}| = |\alpha_{R_2 CB}|.\end{aligned}$$

oraz $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$; analogicznie β_2 i γ_2 . Skorzystamy z trygonometrycznego twierdzenia Cevy. Dla czewian AP_1, BQ_1, CR_1 oraz, odpowiednio, dla czewian AP_2, BQ_2, CR_2 otrzymujemy

$$t_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2}, \quad t_2 = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \cdot \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} \cdot \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_1}.$$

Zwróćmy uwagę, że powyższe wzory pozostają prawdziwe niezależnie od wyboru czewian AP_1, BQ_1, CR_1 wewnętrznych trójkąta ABC . Ponieważ $t_1 t_2 = 1$, mamy $t_1 = 1 \Leftrightarrow t_2 = 1$, co kończy dowód.

W tej sytuacji punkty T_1 i T_2 nazywamy izogonalnie sprzężonymi w trójkącie ABC . Oto kilka słynnych par takich punktów: środek okręgu wpisanego ze sobą, środek okręgu opisanego z ortocentrum, środek ciężkości z punktem Lemoine'a, punkt Gergonne'a z punktem Nagela, punkty Brocarda jeden z drugim.

Zadania

- Wykazać, że punkty T_1 i T_2 są sprzężone izogonalnie w trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy rzuty prostokątne punktów T_1 i T_2 na boki trójkąta ABC (łącznie 6 punktów) leżą na jednym okręgu, którego środek pokrywa się ze środkiem odcinka $T_1 T_2$.
- Znaleźć związek zadania 1 z okręgiem dziewięciu punktów.
- Dany jest trójkąt ABC , w którym $|\alpha_{ABC}| > 90^\circ$. Punkty P i Q leżą na symetrycznej odcinku AB , wewnętrzny kąta ACB , przy czym $|\alpha_{ACP}| = |\alpha_{BCQ}|$. Dowieść, że $|\alpha_{PAC}| + |\alpha_{QBC}| = 180^\circ$. (Obóz OM, 2004)
- Na bokach trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, prostokąty $ABDE, BCGF, CAHI$. Udowodnić, że symetryczne odcinki DF, GI, HE przecinają się w jednym punkcie. (Obóz OM, 2004)

Wskazówki do zadania 1

1. Wykorzystać skoryzystać z twierdzenia 1 dla dwóch kątów.

2. Środek określony ośmiokątem.

3. Ich znaty prostokątne na bok trójkąta, ośmiokątne, a ortocentrum jest izogonalne sprawdzić, i ośmiokątne.

4. Niech K, L, M będą środkami ośmiokątowymi, P i Q są izogonalne ośmiokątne w trójkącie AC .

5. Proste KA, LB, MC są współkowe w odniesieniu do kąta AC .

6. Niech K, L, M będą środkami ośmiokątowymi, ośmiokątowymi na bokach trójkąta, a ośmiokątne.

7. Wykorzystać skoryzystać z twierdzenia 1 dla dwóch kątów.

8. Środek ośmiokątowym ośmiokątem.

9. Wykorzystać skoryzystać z twierdzenia 1 dla dwóch kątów.

10. Wykorzystać skoryzystać z twierdzenia 1 dla dwóch kątów.

**Polecamy na ferie naszą stronę
www.deltami.edu.pl**

Pelne archiwum

- ponad pół wieku DELTY!**
- setki numerów!**
- tysiące artykułów!**

