

deltam

MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-3}$; $s=\pi=3,141592\dots$

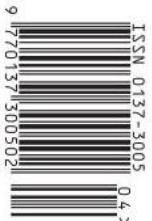
NR 4 (587) 2023

CENA 6 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

Oblicza
dualności

str. 1



Nakład: 3500 egz.



16.03.10.18 7-3, M592

SPIS TREŚCI NUMERU 4 (587)

Oblicza dualności
Michał Miśkiewicz



Zadania

Rewelacyjny palimpsest

Leibniz i twierdzenie o wielościanach
Grzegorz Łukaszewicz

Jak pan Marek wybierał gospodarza
Oskar Skibski

Jak komputer „kubomino” układał
Piotr Pikuł

Człowiek na czipie
Magdalena Fikus

Modele Wszechświata dla początkujących
Część 4: Jak dawno? Jak daleko?
Szymon Charzyński

Klub 44

Prosto z nieba:
Mamy nowe najodleglejsze galaktyki

Niebo w kwietniu

Aktualności
Z impetem w głąb

Średnie
Bartłomiej Bzdęga

str. 1

str. 4

str. 5

str. 6

str. 9

str. 12

str. 15

str. 16

str. 20

str. 22

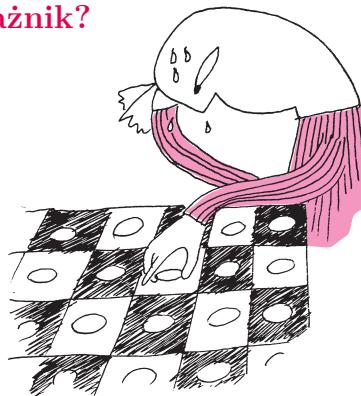
str. 22

str. 24

str. 26

W następnym numerze:

Która monetę
wskazał strażnik?



Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, prof. UWr, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, prof. UWr., dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje collegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nacz., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Marta Gródek, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nacz., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sek. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem LATEX wykonała Redakcja.
Druk: Poligrafia NOT poligrafianot.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpres.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

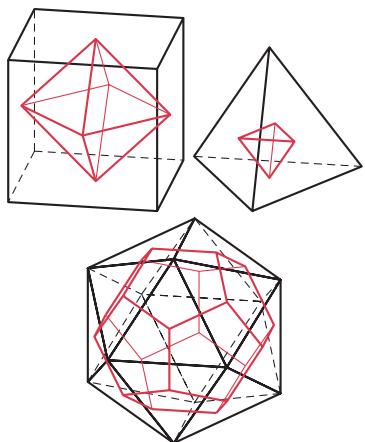
Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

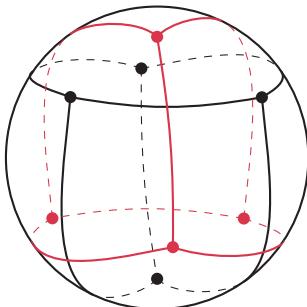
Oblicza dualności

Michał MIŚKIEWICZ*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski; Instytut Matematyczny PAN



Rys. 1. Wielościany foremne z dualnymi w środku

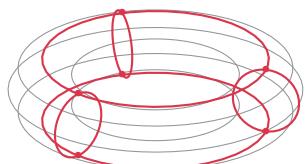


Rys. 2. Siatka nadmuchanego czworościanu oraz siatka do niej dualna

Więcej o charakterystyce Eulera przeczytać (i zobaczyć) można w poniższych źródłach:

- [1] Joanna Jaszuńska, $W - K + S = 2$, Δ_{16}^3
- [2] Michał Miśkiewicz, *O trójkątach na sferze*, Δ_{20}^2
- [3] Jan Rempała, *Jeszcze raz o wzorze Eulera, czyli zastosowanie stawów i grobli w stereometrii*, Δ_{76}^1
- [4] 3Blue1Brown, *Euler's Formula and Graph Duality*, youtu.be/-90Uyo8NFZg

Każde z nich zawiera dowód wzoru Eulera lub też odnośnik do dowodu. Historię tego twierdzenia omawia w obecnych numerze na str. 6 Grzegorz Łukaszewicz.



Rys. 3. Przykładowa siatka na torusie złożona z 6 wierzchołków, 12 krawędzi i 6 czworokątnych ścian, a więc o charakterystyce Eulera równej 0. Tak jest zresztą dla każdej siatki na torusie

Z dualnością spotykamy się już w szkole – wiszące w wielu pracowniach matematycznych modele brył platońskich naturalnie łączą się w dualne pary. Jeśli w sześcianie połączymy środki sąsiednich ścian krawędziami, to we wnętrzu sześcianu powstanie ośmiościan foremny (rys. 1). Gdybyśmy podobną procedurę przeprowadzili dla ośmiościanu, dostali byśmy z powrotem sześcian, tylko mniejszy. W taki sam sposób *dualną* parę tworzą dwunastościan z dwudziestościanem, jak również czworościan... z samym sobą. Nic nie stoi na przeszkodzie, by spróbować tej konstrukcji dla dowolnych wielościanów wypukłych. No, prawie nic.

Zadanie 1. Skonstruować wielościan wypukły, dla którego połączenie środków ciężkości sąsiednich ścian krawędziami nie daje w wyniku wielościanu.

(Rozwiązań zadań zamieszczonych w niniejszym artykule znajdują się na str. 14).

Jak widać, dotychczasowa konstrukcja zawodzi w ogólnym przypadku. Nadmuchiemy więc nasz wielościan jak balon. Traci on wtedy swój kanciasty kształt, ale na powierzchni powstałej sfery nadal widzimy krzywoliniową siatkę S wielościanu (rys. 2), i to na niej skupimy uwagę. Na każdej ze ścian S wyróżnijmy jeden punkt, a następnie połączmy lukiami wyróżnione punkty z sąsiednimi ścianami. Należy tylko zadbać, by dany łuk przecinał jedynie krawędź oddzielającą te dwie ściany oraz by łuki na siebie nie zachodziły. W ten sposób powstała nowa, dualna siatka S' – jej ścianami nazwiemy obszary wycięte poprzez wybrane przez nas luki.

W tym przypadku rysunek jest mniej estetyczny, ale nadal możemy przyporządkować ścianom S wierzchołki S' i na odwrót, bo każda ze ścian S' zawiera dokładnie jeden wierzchołek S . Krawędzie S i S' też łączymy w pary, patrząc na przecięcia między nimi.

Dualność a charakterystyka Eulera. Oznaczmy liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian siatki S odpowiednio przez V_0, V_1, V_2 . Charakterystyka Eulera tej siatki, oznaczana przez $\chi(S)$, jest zdefiniowana jako naprzemienna suma i różnica $V_0 - V_1 + V_2$.

Zadanie 2. Obliczyć χ dla siatek wyznaczonych na sferze przez wielościany foremne.

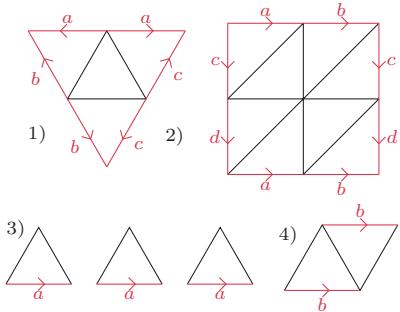
W rozwiązaniu zadania 2 może nieznacznie pomóc dualność. Otóż o ile liczba ścian dwudziestościanu foremnego jest dobrze znana (jest ich 20), to przy liczeniu wierzchołków można natknąć się na trudność. Jeśli jednak mamy w pamięci wielościan dualny, to wiemy, że wierzchołków jest 12 – tyle, co ścian w dwunastościanie foremnym. Z policzeniem krawędzi nie pójdziemy jednak na skróty; z dualności wynika jedynie, że dwudziestościan i dwunastościan mają ich tyle samo.

Taką samą obserwację można poczynić nieco ogólniej: jeśli siatka S ma V_0 wierzchołków, V_1 krawędzi i V_2 ścian odpowiednio, to siatka dualna S' ma ich odpowiednio V_2, V_1, V_0 . W szczególności zachodzi równość $\chi(S) = \chi(S')$.

Jeśli Czytelnik rozwiązał zadanie 2, to wie już, że w każdym przypadku wyszło 2. I jest to ogólna zasada, znana jako wzór Eulera: $\chi(S) = 2$ dla dowolnej siatki S na sferze. Skądinąd jeden z możliwych dowodów tego twierdzenia opiera się na dualności – można się z nim zapoznać w artykule Jana Rempałę lub filmiku 3Blue1Brown (szczególnie na marginesie).

Zadanie 3. Siatka na torusie może mieć charakterystykę Eulera różną od 2 (zob. rys. 3). Gdyby w tym przypadku spróbować powtórzyć wspomniany wyżej dowód, to najwyraźniej w którymś miejscu się załamuje – gdzie dokładnie?

Regularne siatki dwu- i trzywymiarowe. Od teraz skupimy się na siatkach złożonych z trójkątów, czyli tzw. *triangulacjach*. Nie ogranicza to znacząco ogólności naszych rozważań, ponieważ każdy n -kąt wypukły można pociąć na $n - 2$ trójkąty, a w konsekwencji każdą siatkę wielokątną można rozdrobnić do siatki trójkątnej.



Rys. 4. Przykładowe siatki: 1) sfera, 2) torus, 3) „książka”, 4) powierzchnia boczna walca

W literaturze fachowej obiekt otrzymany ze sklejenia regularnej siatki trójkątnej nazywa się *topologiczną rozmaitością dwuwymiarową zamkniętą* lub prościej – *topologiczną powierzchnią zamkniętą*.

W przypadku siatki trójwymiarowej (złożonej z czworościanów) mówimy o *topologicznej rozmaitości trójwymiarowej zamkniętej*.

Mówienie o ścianach różnego wymiaru ($0, 1, 2, 3$) należy do standardowej terminologii w tej dziedzinie. Uprzedź jednak Czytelnika, że określenie *antypody* przyjęłem *ad hoc*, nie znalazłem żadnego odpowiedniego terminu w literaturze.

Na rysunku 3 pokazano, że siatki można rysować na przeróżnych powierzchniach, nie tylko na sferze. Odwrócićmy teraz kolejność: mamy zadaną siatkę, czyli kolekcję trójkątów, wraz z opisem sklejenia ich krawędzi; spójrzmy na otrzymaną po sklejeniu powierzchnię. Dla ilustracji, na rysunku 4 widać siatki dające sferę i torus, jak również dwie siatki opisujące mniej regularne obiekty. Przez *regularność* rozumiemy tu, że po wygładzeniu kantów otrzymujemy gładką powierzchnię bez brzegu; dla pełnej ścisłości przyjmijmy następującą definicję:

Definicja 1. Siatkę trójkątną nazwiemy regularną, jeśli:

1. Każda krawędź należy do dokładnie dwóch ścian siatki.
2. Każdy wierzchołek należy do pewnej liczby ścian kolejno połączonych krawędziami (pierwsza z drugą etc., a ostatnia z pierwszą).

Na podobnej zasadzie możemy rozważać siatkę trójwymiarową: kolekcję czworościanów wraz z przepisem sklejenia ich ścian. Jeśli spróbujemy wyobrazić sobie efekt takiego sklejenia, to w większości przypadków wyobraźnia nas zawiedzie, ale nie przejmujmy się tą drobnostką. Istotniejsze jest, że w tym przypadku również niektóre siatki są lepsze od pozostałych. *Regularne* wyróżniają się tym, że każdy niewielki fragment po sklejeniu wygląda jak trójwymiarowa przestrzeń pocięta na czworościany. Tym razem ścisła definicja jest nieco bardziej skomplikowana:

Uwaga: Od teraz wierzchołki (punkty), krawędzie (odcinki), ściany dwuwymiarowe (trójkąty) i ściany trójwymiarowe (czworościany) – wszystkie będziemy nazywać ścianami, odpowiednio, 0-, 1-, 2- i 3-wymiarowymi.

Definicja 2. Rozważmy ścianę k -wymiarową A ($k = 0, 1, 2$). Dla każdego czworościanu T zawierającego A określmy *antypody* A w T jako tę $(2 - k)$ -wymiarową ścianę T , która jest rozłączna z A . Innymi słowy: w czworościanie T antypody wierzchołka to przeciwległa ściana i vice versa, natomiast antypody krawędzi to przeciwległa krawędź.

Definicja 3. Siatkę trójwymiarową nazwiemy regularną, jeśli dla dowolnej k -wymiarowej ściany A ($k = 0, 1, 2$) spełniony jest następujący warunek: antypody A we wszystkich czworościanach zawierających A układają się w siatkę sfery $(2 - k)$ -wymiarowej. Zależnie od wymiaru k oznacza to, że tworzą one zwykłą sferę ($k = 0$), okrąg ($k = 1$) lub parę punktów ($k = 2$).

Zadanie 4. Sformułować definicję 3 w sposób analogiczny do definicji 1, przynajmniej w przypadku, gdy A jest ścianą 1- lub 2-wymiarową.

Ten trudny wstęp pojęciowy służył temu, by móc sformułować twierdzenie o charakterystyce Eulera regularnych siatek trójwymiarowych. Powinno być ono zaskakujące: o ile w dwóch wymiarach znajomość $\chi(\mathcal{S})$ pozwala rozpoznawać kształt powierzchni zadanej przez \mathcal{S} (2 dla sfery, 0 dla torusa itp.), to w trzech wymiarach nie daje nic!

Twierdzenie. Dla danej regularnej siatki trójwymiarowej \mathcal{S} oznaczmy przez V_0, V_1, V_2, V_3 liczbę ścian odpowiedniego wymiaru. Wówczas charakterystyka Eulera $\chi(\mathcal{S}) = V_0 - V_1 + V_2 - V_3$ wynosi zero.

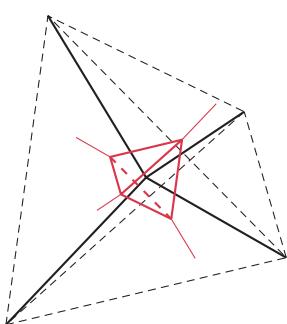
Dualność a charakterystyka raz jeszcze. Powyższe twierdzenie zaatakujemy, patrząc na siatkę dualną. Zaczniemy od następującego nieścisłego argumentu:

Dowód heurystyczny. Rozważmy siatkę \mathcal{S}' dualną do \mathcal{S} : każdy czworościan \mathcal{S} zadaje wierzchołek \mathcal{S}' i ogólnie każda k -wymiarowa ściana \mathcal{S} zadaje ścianę $(3 - k)$ -wymiarową \mathcal{S}' . Zamiast precyzyjnej definicji najlepiej zilustrować tę konstrukcję rysunek 5. Odnotujmy, że \mathcal{S}' nie jest już siatką złożoną z czworościanów – dopuszcza inne wielościany, a nawet inne wielokąty.

Zgodnie z konstrukcją, liczba ścian k -wymiarowych siatki \mathcal{S}' (dla $k = 0, 1, 2, 3$) wynosi dokładnie V_{3-k} . Stąd

$$\chi(\mathcal{S}') = V_3 - V_2 + V_1 - V_0 = -\chi(\mathcal{S}).$$

Jednocześnie obie siatki, \mathcal{S} i \mathcal{S}' , po sklejeniu dają *tę samą* figurę. Jeśli tylko uwierzymy, że charakterystyka jest taka sama dla każdej możliwej siatki tworzącej tę figurę, czyli w szczególności $\chi(\mathcal{S}') = \chi(\mathcal{S})$, to poprzednia równość implikuje, że $\chi(\mathcal{S}) = 0$. \square



Rys. 5. Fragment trójwymiarowej siatki \mathcal{S}' (cztery czworościany spotykające się w jednym wierzchołku, na czarno) i dualnej siatki \mathcal{S} (czworościan i części sąsiednich wielościanów, kolorem)

Ten prosty argument można przekuć w solidny dowód, opierając się na teorii homologii, kohomologii i dualności Poincarégo. Zamiast tego posłużymy się jednak elementarnym kombinatorycznym rozumowaniem, w którym – mam nadzieję – widać ślady powyższego zgrabnego pomysłu.

Dowód Twierdzenia. Oprócz oznaczenia V_0, V_1, V_2, V_3 na liczbę ścian, wprowadźmy bardziej szczegółowe oznaczenie na pary ścian dla $0 \leq i < j \leq 3$:

$$N_{ij} := \text{liczba par } (A, B) \text{ wymiarów } i \text{ oraz } j, \text{ dla których } A \subseteq B.$$

Przykładowo, N_{13} zlicza wszystkie pary postaci (krawędź, czworościan zawierający tę krawędź). Odnotujemy teraz szereg równości wiążących te liczby:

$$\begin{cases} N_{01} = 2 \cdot V_1 \\ N_{02} = N_{12} \\ N_{03} - N_{13} + N_{23} = 2 \cdot V_3 \end{cases} \quad \begin{cases} N_{23} = 2 \cdot V_2 \\ N_{12} = N_{13} \\ N_{01} - N_{02} + N_{03} = 2 \cdot V_0 \end{cases}$$

Teza twierdzenia wynika stąd łatwo w dwóch krokach:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (V_0 - V_1 + V_2 - V_3) &= (N_{01} - N_{02} + N_{03}) - N_{01} + N_{23} - (N_{03} - N_{13} + N_{23}) = \\ &= N_{13} - N_{02} = 0. \end{aligned}$$

Zajmijmy się więc najpierw prawą kolumną. Zastanówmy się, jaki wkład w liczbę N_{23} ma pojedyncza 2-wymiarowa ściana A . Otóż po jej każdej stronie jest jedna 3-wymiarowa ściana, co razem daje dwie szukane pary (A, B) (ściśle rzecz biorąc, powołaliśmy się tu na definicję 3). Rozpatrując wszystkie A – których jest V_2 – otrzymujemy równość $N_{23} = 2 \cdot V_2$. Podobnie zauważamy, że dla każdej 1-wymiarowej ściany A liczba 2- i 3-wymiarowych ścian B zawierających A jest taka sama. Po zsumowaniu: $N_{12} = N_{13}$.

Wreszcie, jeśli ustalimy 0-wymiarową ścianę A , to zgodnie z definicją 3 antypody A we wszystkich 3-wymiarowych ścianach zawierających A układają się w siatkę sfery; siatkę tę oznaczmy przez \mathcal{P} . Zauważmy przy tym, że k -wymiarowe ściany \mathcal{P} odpowiadają $(k+1)$ -wymiarowym ścianom \mathcal{S} zawierającym A (jak na rys. 6). Stąd wnioskujemy, że wkład A w sumę $N_{01} - N_{02} + N_{03}$ jest dokładnie charakterystyką Eulera siatki \mathcal{P} na sferze, a więc wynosi 2. Sumując po wszystkich A , otrzymujemy pożądaną równość $N_{01} - N_{02} + N_{03} = 2 \cdot V_0$.

Dowód równości z lewej kolumny jest dualny (należy ustalić B zamiast A) i prostszy, gdyż nie wymaga powoływania się na definicję 3. Pozostawię więc tę przyjemność Czytelnikowi jako **zadanie 5**. \square

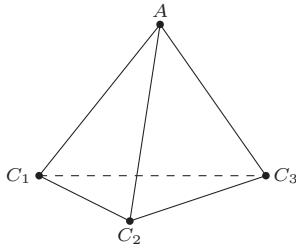
Czy płaszczyzna rzutowa ma wnętrze? Na zakończenie wróćmy do problemu z artykułu *Z butelki Kleina i Salomon nie naleje?*, Δ_{23}^3 . Otóż powierzchnie mogą być pozbawione brzegu (jak sfera, torus, butelka Kleina, płaszczyzna rzutowa...) lub też mieć brzeg złożony z jednego lub więcej okręgów (wsługa Möbiusa, powierzchnia boczna walca...). Podobnie może być z figurami trójwymiarowymi, i naturalne jest pytanie: które z powierzchni mogą się pojawić jako brzeg figury trójwymiarowej?

W artykule *Z butelki Kleina i Salomon nie naleje?* wskazaliśmy konstrukcję figur, dla których brzegiem jest sfera, torus i butelka Kleina. Dla płaszczyzny rzutowej to jednak niemożliwe!

Stwierdzenie. Płaszczyzna rzutowa, czyli powierzchnia zadana przez sklejenie siatki z rysunku 7, nie jest brzegiem żadnej regularnej figury trójwymiarowej.

Dowód. Przypuśćmy, że taka figura \mathcal{M} istnieje. Dowód oprzemy na konstrukcji tzw. *dubletu*: bierzemy dwie kopie \mathcal{M} i klejemy je wzduż brzegu, otrzymując nową trójwymiarową figurę, już pozbawioną brzegu (co pozwala zastosować wcześniej zaprezentowane twierdzenie).

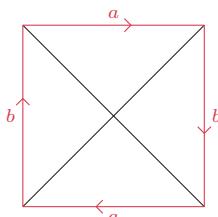
Moglibyśmy przyjąć, że figura \mathcal{M} jest zadana przez regularną trójwymiarową siatkę \mathcal{S} , a brzegowe ściany tej siatki tworzą dwuwymiarową siatkę \mathcal{P} .



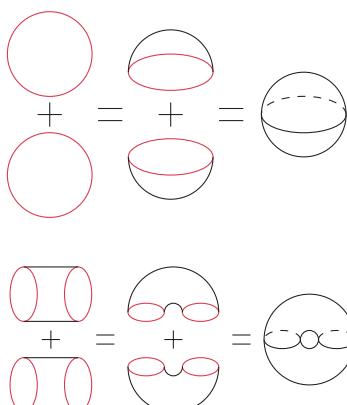
Rys. 6. Ilustracja odpowiedniości ścian \mathcal{P} i \mathcal{S} na przykładzie pojedynczej 3-wymiarowej ściany $AC_1C_2C_3$:

\mathcal{P}	\mathcal{S}
C_1	AC_1
C_1C_2	AC_1C_2
$C_1C_2C_3$	$AC_1C_2C_3$

Definicję regularnej siatki trójwymiarowej z **brzegiem** otrzymujemy, odpowiednio rozszerzając definicję 3: należy dopuścić możliwość, że figura złożona z antypodów układła się w **półsfere** odpowiedniego wymiaru (zwyczajną półsfere, odcinek lub punkt).



Rys. 7. Siatka płaszczyzny rzutowej



Rys. 8. Konstrukcja dubletu w przypadku dwuwymiarowym. Dla dysku otrzymujemy sferę, a dla powierzchni bocznej walca – torus

płaszczyzny rzutowej. Rozważamy dublet \mathcal{D} – siatkę złożoną z dwóch kopii \mathcal{S} , ale z dodatkowym sklejeniem odpowiadających ścian \mathcal{P} w jednej i drugiej kopii. Otrzymaliśmy w ten sposób regularną siatkę trójwymiarową bez brzegu, co na mocy naszego twierdzenia pozwala wnioskować, że $\chi(\mathcal{D}) = 0$.

Ostatnim brakującym elementem układanki jest charakterystyka Eulera \mathcal{P} . Łatwo odczytać, że charakterystyka siatki z rysunku 7 wynosi $3 - 6 + 4 = 1$, nie jest jednak oczywiste, że będzie tak dla dowolnej siatki. Można jednak ten problem sprowadzić do przypadku sfery (ze względu na trudność niech będzie to zadanie z gwiazdką), przyjmiemy więc za znane, że $\chi(\mathcal{P}) = 1$.

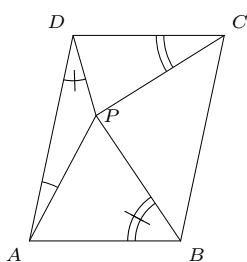
Zadanie 6*. Mając zadaną siatkę \mathcal{S}_1 na płaszczyźnie rzutowej, skonstruować na sferze siatkę \mathcal{S}_2 o dwukrotnie większej liczbie wierzchołków, krawędzi i ścian. Wywnioskować, że $\chi(\mathcal{S}_1) = 1$.

Czas na podsumowanie. Liczba wierzchołków \mathcal{D} różni się od liczby wierzchołków \mathcal{P} o liczbie parzystą, mianowicie o dwukrotność liczby wierzchołków *we wnętrzu* \mathcal{S} ; tak samo jest zresztą z liczbą ścian dowolnego wymiaru. W konsekwencji również różnica $\chi(\mathcal{D}) - \chi(\mathcal{P})$ jest parzysta. Otrzymana sprzeczność (liczba 0 – 1 wcale nie jest parzysta!) dowodzi, że płaszczyzna rzutowa nie może być brzegiem. \square

Ciąg dalszy? Badanie abstrakcyjnych rozmaitości (czyli regularnych figur) trójwymiarowych jest niewątpliwie wymagającym zajęciem. Jak to jednak bywa, matematycy poszli jeszcze dalej, i w roku 1954 francuski matematyk René Thom podał pełną odpowiedź na pytanie: które rozmaistości są brzegami, a które nie, i to w dowolnym wymiarze. Jeśli Czytelnik chciałby dowiedzieć się więcej, dalszą drogę polecam zacząć od lektury hasła *Cobordism* (od francuskiego *bord* – brzeg) na Wikipedii. Uprzedzuję tylko – droga jest dłuża!



Zadania



Przygotował Dominik BUREK

M 1741. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym
 $\star ABP = 2\star ADP$ oraz $\star DCP = 2\star DAP$.

Udowodnij, że $AB = PB = PC$.

Rozwiązań na str. 8

M 1742. Niech x, a, b, c i d będą parami różnymi liczbami całkowitymi takimi, że

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) - 4 = 0.$$

Udowodnij, że $x = \frac{1}{4}(a+b+c+d)$.

Rozwiązań na str. 6

M 1743. Niech n i r będą nieujemnymi liczbami całkowitymi takimi, że żadna z liczb

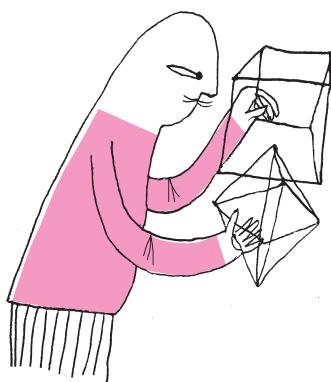
$$n^2 + r - k(k+1), \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots$$

nie jest liczbą dodatnią złożoną lub równą -1 . Udowodnij, że liczba $4n^2 + 4r + 1$ jest pierwsza albo równa 1 lub 9.

Rozwiązań na str. 12

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1069. Podczas jazdy po płaskim torze kierowca ma do pokonania dwa zakręty, które zmieniają kierunek jazdy o 90° i mają promień $r_1 = 170$ m oraz $r_2 = 85$ m. Kierowca jedzie z maksymalną prędkością, przy jakiej nie wypada jeszcze z drogi. Tor jest wąski – zakręt należy pokonać po łuku okręgu, a nawierzchnia na zakrętach pozostaje pozioma. Jaki jest stosunek czasów, w jakich kierowca pokona te zakręty? Do obliczeń przyjmij, że współczynnik tarcia opon o asfalt wynosi $f = 0,9$. Przyspieszenie ziemskie $g = 9,81$ m/s 2 .
Rozwiązań na str. 9



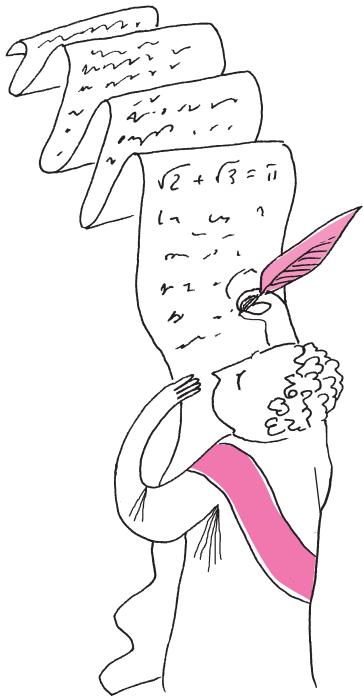
F 1070. Jednym z mechanizmów rozpoznawania kierunku do źródła dźwięku jest rejestracja różnicy czasu dotarcia sygnału do ucha lewego i prawego.

Przyjmuje się, że minimalna rozpoznawalna różnica czasów dla uszu człowieka wynosi około $\Delta t = 10 \mu\text{s}$. Oszacuj, z jaką dokładnością potrafimy ustalić kierunek, z jakiego dociera do nas dźwięk z odległego źródła, gdy stosujemy wspomniany mechanizm? Prędkość dźwięku wynosi $c = 340$ m/s, a średnica ludzkiej głowy (odległość między uszami) wynosi $d \approx 22$ cm.

Rozwiązań na str. 17

Rewelacyjny palimpsest

Pogłębione badania nad rzymską Cloaca Maxima wśród najrozmaitszych znalezisk przyniosły zwój pergaminu (*charta pergamena*, materiał pisarski produkowany ze skóry zwierzęcej) początkowo lekceważony przez archeologów, ze względu na to, iż zawierał dość prymitywny pornograficzny tekst pod niewymyślnym tytułem *Boviana*.



Mimo owego lekceważenia wnikała analiza tego tekstu, przeprowadzona zbiorowo przez młodych uczestników wykopalisk, ujawniła pewne szczegóły, które kazały podejrzewać, iż pergamin ten to palimpsest (starogreckie *παλιμψηστον*), a pierwotny jego zapis pochodzi sprzed budowy Cloaca (Tarkwiniusz Stary, VII w. p.n.e.), co przeczy obowiązującej doktrynie datującej pierwsze użycie pergaminu dopiero na II w. p.n.e. (Egipt, *Księga Umarłych*).

Jakby tego było mało, tekst zawiera matematyczne rozważania, w tym

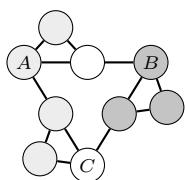
$$\text{zaskakujące twierdzenie: } \sqrt{2} + \sqrt{3} = \pi.$$

Mimo oczywistej treści ($1,41 + 1,73 = 3,14$) próżno go szukać w podręcznikach i monografiach późniejszych matematyków. Z tekstu można jeszcze dowiedzieć się, że autorem jest współczesny Talesowi Sedes z Bakelitu, lider szkoły filozoficznej paranoików (nazwa ta dziś brzmi niestosownie), nazywających się tak, gdyż ich główna doktryna to lęk przed kradzieżą ich osiągnięć przez zawiistne społeczeństwo. Zapewne z tego powodu swoje osiągnięcia skutecznie ukrywali. Niestety i wymienione wyżej twierdzenie nie tylko zostało skutecznie ukryte, ale takim pozostaje jego dowód do dziś, gdyż dalsza część odkrytego tekstu (mimo iż Sedes pisze: *na szczęście mam dostatecznie dużo pergaminu, by przedstawić was dowód*) jest skutecznie zatarta przez wandalów od *Boviana*.

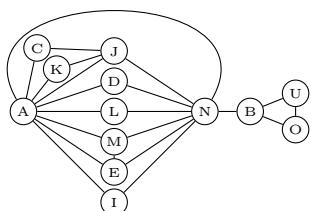
Nie liczymy na równie powszechnie zainteresowanie przeprowadzeniem dowodu, jak to towarzyszące dowodowi Wielkiego Twierdzenia Fermata (który z kolei miał za mało miejsca, by dowód zamieścić), ale może ktoś z Czytelników tego tekstu dowód taki potrafi i zechce odtworzyć. Zgłoszenia prosimy przesyłać do końca czerwca 2023 r. pocztą tradycyjną bądź elektroniczną na adres redakcji *Depty*. Najciekawsze dowody nagrodzimy książką *Matematyka z różnych stron widziana*, a autor najbardziej klarownego dowodu (o dowodzie Andrew Wileса tego powiedzieć się nie da) będzie mógł go przedstawić w całej rozciągłości podczas kolejnej Szkoły Matematyki Poglądowej.

Redakcja

Odpowiedzi do artykułu „Jak pan Marek wybierał gospodarza” ze strony 9



Rysunek do odpowiedzi nr 3



Rysunek do odpowiedzi nr 4

1. Nie. Przykładowo, Ken wygrywa z Olą 7 : 6, ale to Ola ma wyższą bliskość ($1/33 > 1/34$).

2. Tak. Jeżeli w drzewie ścieżka między A i B jest postaci (A, A', \dots, B', B) , to A wygrywa z B wtedy i tylko wtedy, gdy A' wygrywa z B' (łatwo sprawdzić, że wierzchołki bliżej A niż B są też bliżej A' niż B' i odwrotnie). Jeżeli teraz A jest bliżej zwycięzcy condorcetowskiego, to stosując powyższą zasadę wielokrotnie, dojdziemy do tego, że A wygrywa z B wtedy i tylko wtedy, gdy zwycięzca condorcetowski wygrywa z jakimś innym wierzchołkiem, co jest prawdą.

3. Tak. Przykład cyklu Condorceta pokazany na marginesie. Jasnoszare wierzchołki są bliżej A niż B, a ciemne – bliżej B niż A. Z symetrii dostajemy, że A wygrywa z B, B wygrywa z C i C wygrywa z A.

4. Tak. Zmieniając krawędzie Bena i Nel, można uzyskać graf przedstawiony obok. Przykład ten pokazuje, że żadna z miar centralności zależna jedynie od odległości nie wskaże zawsze zwycięzcy condorcetowskiego: takie centralności przypiszą Adzie i Nel te same wartości w obu grafach, jednak raz jedna, a raz druga jest zwycięczynią condorcetowską.

Leibniz i twierdzenie o wielościanach

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*

*Instytut Matematyki Stosowanej
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



René Descartes (Kartezjusz), 1596–1650



Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716



Leonhard Euler, 1707–1783



Rozwiązywanie zadania M 1742.

Liczby $(x - a)$, $(x - b)$, $(x - c)$ i $(x - d)$ są całkowite i ich iloczyn jest równy 4. Wobec tego ich wartości bezwzględne są równe 1, 1, 1, 4 lub 1, 1, 2, 2 (w pewnej kolejności). Jednakże wśród dowolnych trzech liczb są dwie, które mają ten sam znak, stąd w pierwszym przypadku dwie liczby byłyby równe – oznaczałoby to, że dwie liczby spośród a , b , c i d są równe – sprzeczność.

Zatem moduły rozważanych liczb są równe 1, 1, 2, 2. Podobnie jak wyżej, uwzględniając, że a , b , c i d są parami różne, widzimy, że liczby $(x - a)$, $(x - b)$, $(x - c)$ i $(x - d)$ są równe $+1, -1, +2, -2$ w pewnej kolejności. Jednakże wtedy $(x - a) + (x - b) + (x - c) + (x - d) = (+1) + (-1) + (+2) + (-2) = 0$, skąd szybko dostajemy tezę.

Mam nadzieję, że potomni życzliwie mnie osądzą, nie tylko co do tych rzeczy, które wyjaśnilem, ale i do tych, które celowo pominałem, aby pozostawić innym przyjemność odkrywania.

Kartezjusz, *Geometria*

Celem tego artykułu jest przedstawienie ciekowej historii twierdzenia Eulera o wielościanach, nazywanego też od pewnego czasu twierdzeniem Kartezjusza–Eulera o wielościanach. Właśnie, dlaczego Kartezjusza–Eulera? I co ma wspólnego z tym twierdzeniem tytułowy Leibniz?

Bohaterem artykułu jest następujące twierdzenie o wielościanach.

Jeżeli V , E i F oznaczają, odpowiednio, liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian danego wielościanu, to zachodzi następująca równość:

$$F + V - E = 2.$$

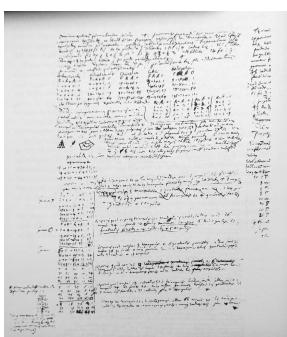
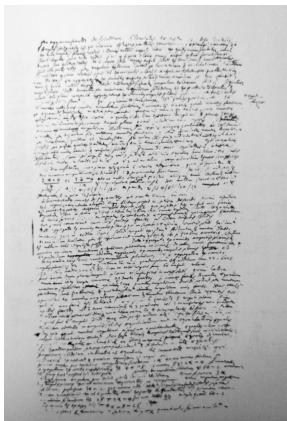
Oczywiście należy dokładnie określić, co rozumiemy przez wielościan, albowiem różne definicje wielościanu prowadzą do pojawienia się różnego rodzaju kontrprzykładów na prawdziwość twierdzenia, co zostało znakomicie opisane w głośnej pracy doktorskiej Imre Lakatosa z 1961 roku, opublikowanej nieco później pod tytułem *Proofs and refutations*, a w polskim tłumaczeniu jako *Dowody i refutacje* [4]. Szersze omówienie twierdzenia można znaleźć w [6]. Zgodnie z powiedzeniem *konč, jaki jest, każdy widzi*, my pozostaniemy przy zwykłych wyobrażeniach wielościanów jako brył wypukłych ograniczonych płaszczyznami. Rodzina taka zawiera m.in. wszystkie bryły platońskie, a powyższa formuła jest dla niej prawdziwa.

Kartezjusz badał wielościany, a rezultaty tych badań zawarł w nieopublikowanym manuskrypcie *De solidorum elementis*. Znajduje się tam twierdzenie bardzo bliskie powyższemu twierdzeniu. Zawartość manuskryptu dotarła do współczesności pośrednio, dzięki zachowanej kopii, która została na nowo odczytana i precyzyjnie zanalizowana dopiero w latach osiemdziesiątych dwudziestego wieku. Historia jest następująca.

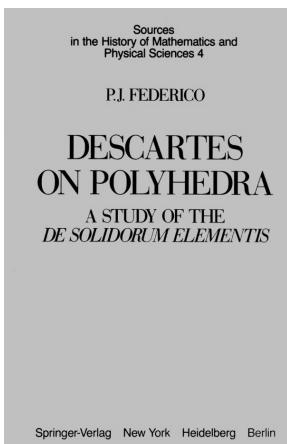
Uważa się, że Kartezjusz napisał *De solidorum elementis* najprawdopodobniej w latach 1619–1623, a więc w młodości (choć podawane są też inne daty, 1630, a nawet 1639); praca ta pozostała jednak w jego prywatnych zbiorach aż do śmierci. Zmarł w Sztokholmie 11 lutego 1650 roku, dokąd przybył w październiku 1649 roku na zaproszenie królowej Krystyny, aby służyć jej jako osobisty nauczyciel filozofii.

W roku 1653 Pierre Chanut (1601–1662) – ambasador Francji w Szwecji i zaufany Kartezjusza – wysłał manuskrypty Kartezjusza swojemu szwagrowi, Claude'owi Clerselierowi (1614–1684), do Paryża. Clerselier był przyjacielem Kartezjusza, a także wydawcą i tłumaczem jego prac. Dotarły one do niego po niemałych perypetyjach. W Rouen kufer z manuskryptami został przeładowany ze statku na łódź, która miała dostarczyć go na miejsce. Pech chciał, że łódź zatonęła w Sekwanie już prawie u celu. Papiery namakały w wodzie przez trzy dni. Gdy w końcu je wyłowiono, zostały rozłożone i wysuszone, a segregowanie ich, ponowne złożenie w całość i odczytanie wymagało od Clerseliera dużego nakładu pracy.

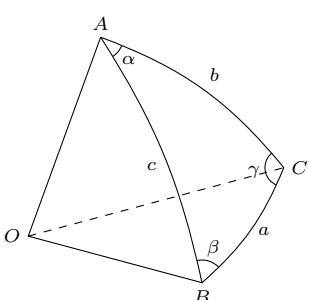
W 1672 roku w pewnej misji dyplomatycznej, a także aby pobierać dalsze nauki, do Paryża przybył 26-letni Leibniz. Pod opieką Christiaana Huygensa (1629–1695) zrobił niewiarygodnie szybkie postępy w matematyce, które wkrótce zaowocowały sformułowaniem rachunku różniczkowego i całkowego. Leibniz, podobnie jak wielu innych, był zafascynowany Kartezjuszem i zbierał jego wszystkie dostępne dzieła, poszukiwał również tych nieopublikowanych. Wówczas Huygens skierował go do Clerseliera.



Facsimile pierwszych stron kopii
De solidorum elementis



Ookładka książki P.J. Federico



Kąt bryłowy $OABC$ i kąty płaskie, AOB , AOC , BOC , przy wierzchołku O

Ciekawy jest domniemany wątek osobisty zafascynowania Leibniza pracami Kartezjusza. Mogło tu chodzić o pewną zazdrość, gdyż obu interesowało wiele tych samych tematów, a wypowiadane były opinie, że Leibniz w swoich pracach z rachunku różniczkowego i całkowego nie dodał wiele do tego, co na ten temat napisał wcześniej Kartezjusz. Wrażliwy Leibniz mógł mieć zatem dodatkowy powód, aby poszukiwać wszystkiego, co wyszło spod pióra wielkiego Francuza.

W czerwcu 1676 roku Leibniz udał się do Clerciera, który pozwolił mu zrobić odręczne kopie manuskryptów. W dniach 1–3 czerwca Leibniz przepisał w pośpiechu te najbardziej go interesujące, w tym *De solidorum elementis*. Sam oryginał tego manuskryptu zginął jakiś czas potem i nigdy nie został odnaleziony. Uważa się jednak, że kopia Leibniza stanowi w zasadzie całość oryginalnego manuskryptu Kartezjusza, z niewielkimi tylko opuszczonymi fragmentami.

Po śmierci Leibniza, w 1716 roku, jego zapiski trafiły do archiwów Królewskiej Biblioteki w Hanowerze. Kopię manuskryptu *De solidorum elementis* odnalazł tam w roku 1860 hrabia Louis-Alexandre Foucher de Careil (1826–1891) wśród nieskatalogowanych papierów Leibniza, w jakimś załku, pokrytym wiekowym kurzem. Od tego czasu publikowano różne wersje kopii Leibniza, zarówno w oryginalnej wersji łacińskiej, jak i w tłumaczeniu na język francuski. Były one raczej mało zadowalające i niedostatecznie zredagowane. Tekst był bowiem trudny do odczytania i, jak to kopie robione w pośpiechu, zawierał skróty, niezrozumiałe uwagi, być może drobne przekłamania, mało czytelne szkice figur geometrycznych itp., a co najważniejsze, jego pełna matematyczna treść opierała się zrozumieniu wydawców. Nic dziwnego, gdyż oryginalny manuskrypt Kartezjusza nie był wersją do publikacji, a kopia Leibniza przypominała, przy pobicznym spojrzeniu, zbiór rozmaitych niepowiązanych ze sobą obserwacji i pomysłów. Dopiero dogłębne jej przestudiowanie przez kompetentnego matematyka mogło pozwolić na wyróżnienie w niej pewnego logicznego wątku. Jednym słowem, kopia Leibniza wymagała rozszыfrowania. Tak to w wielkim skrócie wyglądało aż do naszych czasów.

W 1982 roku ukazała się praca, w której Pasquale J. Federico (1902–1982) przedstawił własną wersję kopii *De solidorum elementis* wraz z jej przekładem na język angielski i szczegółowym komentarzem. Pięć lat później Pierre Costabel (1912–1989) – duchowny i historyk nauki badający spuściznę po Kartezjuszu, który poświęcił wiele czasu na odszyfrowanie kopii Leibniza – dokonał bardzo wnikliwej analizy tekstu łacińskiego, nadał mu zadowalającą formę i przełożył na język francuski; wersje te są omówione w [7]. Obecnie mamy więc dobry wgląd w to, jak rozumował Kartezjusz.

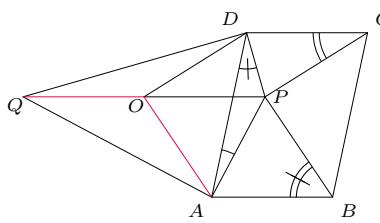
Manuskrypt Kartezjusza zawiera ważne twierdzenia, w tym pierwszy algebraiczny dowód, że może istnieć co najwyżej pięć foremnych wielościanów wypukłych; dowód wcześniejszy, geometryczny, znajduje się w księdze XIII *Elementów Euklidesa* (bez założenia wypukłości jest ich więcej [Zdzisław Pogoda, *Ile jest wielościanów foremnych?*, Δ_{16}^3]). Znajduje się w nim także rezultat, z którego przytoczone na początku artykułu twierdzenie Eulera o wielościanach może być otrzymywane jako prosty wniosek. W swoim kombinatorycznym podejściu do wielościanu Kartezjusz operował pojęciem „kąta płaskiego” w miejscu „krawędzi wielościanu”, otrzymując formułę

$$P = 2F + 2V - 4,$$

gdzie P oznacza liczbę kątów płaskich. Ponieważ w wielościanie liczba kątów płaskich jest dwa razy większa od liczby krawędzi wielościanu (o czym Kartezjusz dobrze wiedział), więc podstawiając $P = 2E$ w powyższym wzorze, otrzymujemy natychmiast formułę, którą Euler uzyskał w latach 1750–1751, a w 1758 roku opublikował w sprawozdaniach Akademii w Petersburgu pod tytułem *Elementa doctrinae solidorum*. Kartezjusz nie używał terminu „wielościan”, pisał o „bryle sztywnej”, pojęciu, które zawierało w sobie ważne założenie o wypukłości. Skądinąd założenie to zostało także milcząco przyjęte w pracy Eulera, gdy ten pisał: „w każdej bryle sztywnej...”.



Rozwiążanie zadania M 1741.



Niech O będzie takim punktem, że $PO \parallel AB$, $PO = AB = CD$ oraz PO przecina odcinek AD . Wtedy czworokąty $ABPO$ oraz $CDOP$ są równoległobokami. Niech Q będzie takim punktem na prostej PO , że $OQ = OA$ oraz punkty P i Q leżą po przeciwnych stronach punktu O . Wtedy

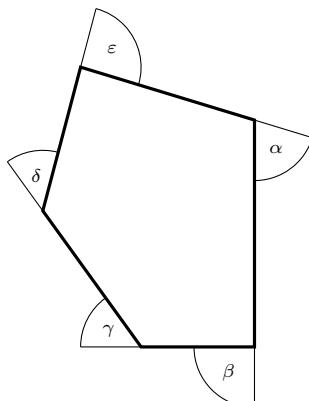
$$\begin{aligned}\angle OQA &= \angle OAQ = \frac{\angle AOP}{2} \\ &= \frac{\angle ABP}{2} = \angle ADP,\end{aligned}$$

więc punkty A , P , D i Q leżą na jednym okręgu Ω . Wobec tego

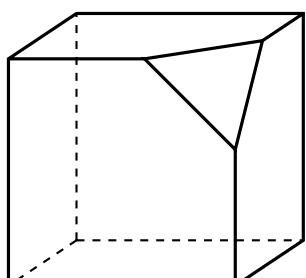
$$\begin{aligned}\angle ODQ &= \angle DOP - \angle DQO = \\ &= \angle DCP - \angle DAP = \\ &= \angle DAP = \angle DQO,\end{aligned}$$

skąd $OD = OQ = OA$, więc O jest środkiem okręgu Ω . Zatem

$$AB = OP = OA = OD = PB = PC.$$



Suma kątów zewnętrznych jest równa 2π



Wielościan sferyczny
 $F + V - E = 7 + 10 - 15 = 2$

Różnica w sformułowaniu obu twierdzeń jest niewielka. Widać gołym okiem, że formuły Kartezjusza i Eulera są logicznie równoważne. Pewne kontrowersje związane z tym, komu przypisać pierwszeństwo odkrycia, skupiają się na rozoważaniach o poziomie zrozumienia przez obu panów głębszego, topologicznego znaczenia wypracowanych przez nich formuł, tzn. na ile zdawali sobie sprawę z tego, co za nimi się kryje. W matematyce, ale nie tylko, zdarza się bowiem, że autor ważnego odkrycia nie wyciąga z niego, według późniejszych ocen, należytych – bywa, że rzeczywiście rewolucyjnych – wniosków. Zauważają je dopiero późniejsi uczeni i powstaje pytanie, komu przypisać odkrycie.

W interesującym nas przypadku opinie są podzielone. Wielu komentatorów uważa, że Euler był świadomym topologicznego znaczenia swojej formuły, natomiast Kartezjusz nie – zatem pierwszeństwo odkrycia należy się Eulerowi. Czy naprawdę było tak, że Kartezjusz znalazł diament, ale nie poznął się na jego wartości i odłożył go między inne zwykłe kamyczki, natomiast Euler zdawał sobie sprawę z tego, co znalazł? Inna opinia jest taka, że twierdzenie Kartezjusza należy do topologii tak samo jak twierdzenie Eulera, gdyż pojęcie kąta płaskiego jest pojęciem topologicznym w tym samym stopniu co pojęcie krawędzi, jednak obaj panowie nie rozumieli w pełni topologicznej natury swoich twierdzeń, nie zdawali sobie sprawy z tego, że pojęcia wierzchołka, krawędzi i ściany mają sens na dowolnej powierzchni, że krawędzie nie muszą być proste, a ściany płaskie [8]. Bardziej szczegółowo opinie wybranych komentatorów są przedstawione w [3].

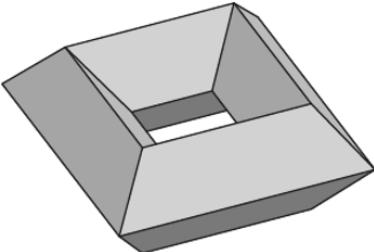
Dla Kartezjusza i Eulera rozważane wyżej formuły były wyrazem prób znalezienia „ogólnej teorii wielościanów”, w tym właściwych kryteriów ich klasyfikacji.

Rozważana formuła Kartezjusza jest kulminacją ciągu pięciu poprzedzających stwierdzeń, a metody jego rozumowania oparte są na analogii z wielobokami, a więc obiekty dwuwymiarowymi. Tymczasem Euler posłużył się metodą indukcji w zbiorze samych wielościanów, czyli obiektów trójwymiarowych (o metodach indukcji i analogii w matematyce można przeczytać w [5], gdzie rozdział III poświęcony jest metodzie indukcji w geometrii brył, z formułą Eulera jako koronnym przykładem).

Przybliźmy tu choć trochę metodę Kartezjusza. Wspomniany ciąg stwierdzeń, w którym Stwierdzenie 6 stanowi rozważaną formułę Kartezjusza, zaczyna się od kluczowego Stwierdzenia 1: *Suma zewnętrznych kątów bryłowych bryły jest równa ośmiu bryłowym kątom prostym (czyli 4π)*. W manuskrypcie nie ma dowodu tego stwierdzenia. Możemy jednak zauważać, że jest ono analogiczne do swego dwuwymiarowego odpowiednika, stwierdzającego, że *suma zewnętrznych kątów płaskich wieloboku jest równa czterem kątom prostym (czyli 2π)*. Dowód stwierdzenia dla wymiaru 2 jest elementarny (patrz rysunek na marginesie), a dowód stwierdzenia dla wymiaru 3 jest analogiczny [8].

Doniosłość Stwierdzenia 1 (nazywanego twierdzeniem Kartezjusza) została zauważona już w roku 1860, tuż po pierwszej publikacji kopii Leibniza, także już wtedy zauważone zostały jego relacje z twierdzeniem Gaussa–Bonna mówiącym o tym, że *Całka z krzywizny Gaussa po zamkniętej powierzchni genu 0 (deformowalnej do sfery) jest równa 4π* ([8], [Witold Sadowski, *Wzór Eulera i balony, Δ_{05}^9*]).

Należąca dziś do topologii formuła $F + V - E = 2$ zajmuje jedno z czołowych miejsc w rankingach na najpiękniejszą formułę matematyczną. Na przełomie XVIII i XIX wieku pojawiły się nowe jej dowody. W 1794 roku Adrien-Marie Legendre podał prosty dowód jej prawdziwości dla wszystkich wielościanów, które dziś nazywamy sferycznymi (tzn. takich, których powierzchnia jest homeomorficzna ze sferą), a w 1810 roku Louis Poinsot (1777–1859) zauważył, że do tego zbioru należą także niektóre wielościany, które nie są wypukłe. W 1847 roku Karl G.Ch. von Staudt (1798–1867) podał prosty, czysto topologiczny dowód formuły i wskazał topologiczny konieczny i wystarczający warunek, zapewniający jej prawdziwość. Dalsze badania wielościanów niewypukłych pokazały, że liczba $F + V - E$, zwana dziś charakterystyką



Wielościan toroidalny
 $F + V - E = 16 + 16 - 32 = 0$

Eulera, nie musi być równa 2. Tak jest na przykład z wielościanami toroidalnymi, homeomorficznymi z torusem. Posyapały się dalsze uogólnienia... [Michał Miśkiewicz, *Czy Ziemia jest płaska? A może jednak?*, Δ_{16}^{10} , oraz tekst na stronie 1].

I pomyśleć, że gdyby nie poszukiwania Leibniza, to nic nie wiedzielibyśmy o *De solidorum elementis*, ważnym dziele Kartezjusza o wielościanach, od którego to wszystko się zaczęło i w którym dojrzać można założki przyszłej całej nowej dziedziny matematyki [zobacz też: Grzegorz Łukaszewicz, *Leonardo da Vinci i topologia*, Δ_{22}^4].

Czytelnikowi niniejszego artykułu proponujemy przeprowadzenie własnego dochodzenia i na jego podstawie zdecydowanie (choćby tylko na własny użytek), jak powinno się nazywać rozważane twierdzenie $F + V - E = 2$ – twierdzeniem Kartezjusza–Eulera czy twierdzeniem Eulera, a może twierdzeniem Kartezjusza?

Bibliografia:

- [1] Amir D. Aczel, *Descartes' Secret Notebook*, New York, Broadway Books, 2005.
- [2] René Descartes, *Exercices pour les éléments des solides: Progymnasmata de solidorum elementis – Essai en complément d'Euclid*, Edition critique avec introduction, traduction, notes et commentaires par Pierre Costabel, Paris, 1987.
- [3] Pasquale J. Federico, *Descartes on Polyhedra: a study of the De Solidorum Elementis*, Springer-Verlag, 1982.
- [4] Imre Lakatos, *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, Tikkun, 2005.
- [5] George Polya, *Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton University Press, 1954.
- [6] David S. Richeson, *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princeton University Press, 2012.
- [7] Chikara Sasaki, *Descartes's Mathematical Thought*, Springer, 2003.
- [8] John Stillwell, *Mathematics and Its History*, 2nd ed., Springer, 2002.

Jak pan Marek wybierał gospodarza

Oskar SKIBSKI*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Te niefortunne wybory opisaliśmy w artykule „Jak Leo uratował klasowe wybory”, Δ_{21}^9 .



Rozwiążanie zadania F 1069.

Każdy z zakrętów zostanie pokonany ze stałą prędkością kątową ω – dla każdego zakrętu inną. Wykonanie zakrętu o kąt α wymaga czasu $t = \alpha/\omega$. Czas będzie minimalny, gdy ω będzie maksymalne. Maksymalną wartość ω otrzymamy, porównując siłę tarcia z wartością siły dośrodkowej potrzebnej do utrzymywania ruchu po okręgu o promieniu r : $\omega^2 r \leq f_g$. Otrzymujemy:

$$t = \frac{\alpha}{\omega} \geq \alpha \sqrt{\frac{r}{f_g}}.$$

Z powyższego wzoru wynika, że stosunek czasów wynosi:

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \sqrt{2} \approx 1,414,$$

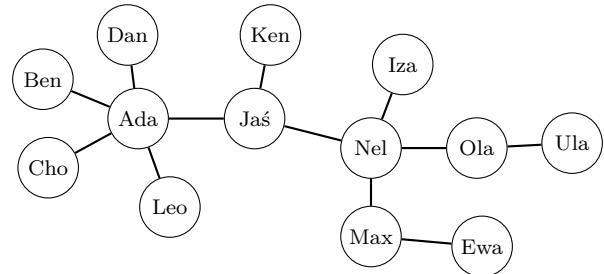
a więc pokonanie zakrętu o większym promieniu, mimo że pokonujemy go z większą maksymalną prędkością, zajmie nam więcej czasu. Dla zaspokojenia ciekawości obliczmy, ile wynoszą czasy t_1 i t_2 : $t_1 \approx 6,9$ s, $t_2 \approx 4,9$ s.

170 m to minimalny promień zakrętu, jaki można pokonać z maksymalną prędkością 140 km/h, dozwoloną na polskich autostradach (przy idealnych warunkach: sucha nawierzchnia nie pokryta piaskiem, lisimi itp.).

Pan Marek, nauczyciel informatyki i wychowawca klasy 2B, leżał na kanapie w kantorku przy sali informatycznej i oddawał się swojej ulubionej rozrywce – czytał *Deltę*. Po tym, jak rok temu wybory na przewodniczącego klasy doprowadziły do sporej awantury, pan Marek postanowił, że w tym roku to on zdecyduje, kto będzie przewodniczącym. I właśnie powinien to zrobić, jednak strasznie mu się nie chciało.

Wertował akurat stary numer *Deltę* i trafił na artykuł o tym, jak analizując sieć połączeń, można wskazać kluczowego terrorystę (Δ_{16}^{11}). „Szkoda, że moi uczniowie nie są terrorystami” – pomyślał. „Użyłbym jednej z tych metod i miałbym problem z głowy”. Ale w sumie... gdyby tak stworzyć sieć społeczną klasy? Wtedy moglibyśmy użyć jakiejś metody opisanej w artykule do wskazania osoby, która jest najbardziej centralna. Ona powinna być niezły gospodarzem!

Pan Marek narysował imiona 13 uczniów swojej klasy na kartce i podekscytowany popędził do komputera, gdzie uruchomił zapis monitoringu z ostatniego miesiąca (jak dobrze, że jego szkoła jest taka nowoczesna!). Każda para uczniów, którzy chociaż raz siedzieli w jednej ławce, połączył krawędzią. Powstał taki graf:



Pan Marek przejrzał metody opisane w pracy, ale okazało się, że trzy standardowe miary centralności (miary stopnia, bliskości i pośrednictwa) wskazują różne osoby (odpowiednio Adę, Jasię i Nel)! Po wczytaniu się w ich opis zdecydował się użyć miary bliskości (*closeness centrality*), która każdemu

Formalnie, dla grafu $G = (V, E)$, *bliskością* wierzchołka $v \in V$ nazwiemy wartość:

$$C_v(G) = 1 / \sum_{u \in V} d(u, v),$$

gdzie $d(u, v)$ to odległość pomiędzy wierzchołkami u i v , czyli długość najkrótszej ścieżki, która zaczyna się w u i kończy w v .

wierzchołkowi przypisuje odwrotność sumy odległości do innych. Odległość to po prostu liczba krawędzi, jaką musiałby pokonać uczeń, aby dojść do drugiego.

Najwyższą bliskość ma Jaś: ma on 3 sąsiadów, czyli osoby połączone z nim krawędzią (takiego określenia używa się w teorii grafów i u nas też pasuje ono bardzo dobrze), siedem osób w odległości 2 oraz dwie osoby w odległości 3. Jego bliskość to zatem $1/23$, czyli jest wyższa niż bliskość Nel ($1/24$) i Ady ($1/26$). Jaś zostanie gospodarzem!

Zadowolony z siebie pan Marek wrócił na kanapę i chwycił nowszy numer *Deltę*, z maja 2022 roku. Po chwili lektury (i krótkiej wycieczce do nauczyciela fizyki, aby przetestować, czy ogórek rzeczywiście świeci) wychowawca trafił na artykuł Grzegorza Pierczyńskiego „Jak liczyć głosy?” (Δ_{22}^5). W artykule opisano grupę studentów, którzy wybierają restaurację na wspólne wyjście, oraz parę metod wyborczych, które mogą im w tym pomóc. „Hmmm... może powiniensem jednak użyć którejś metody opisanej tutaj. Leo czyta *Deltę*, znowu może kwestionować mój wybór”.

Nauczyciel wczytał się więc w metodę Condorceta. Aha, dla każdej pary musimy obliczyć, kto dostałby więcej głosów, gdyby zorganizować wybory, w których tylko oni by startowali. Jeżeli jest ktoś, kto wygrywa w takich pojedynkach jeden na jeden z każdą inną osobą, to jest on nazywany zwycięzcą condorcetowskim i powinien zostać wybrany.

Tylko jak użyć tej metody w naszej sytuacji? Możemy podejrzewać, że każda osoba woli, aby to jej kolega został gospodarzem niż ktoś, z kim się nie przyjaźni. Jeżeli żaden kolega nie zostanie wybrany, to byłoby miło, gdyby przynajmniej kolega kolegi nim został. I tak dalej. Przymiemy więc, że spośród dwóch kandydatów uczniów wybierze tego, który jest bliżej do niego w grafie (jeżeli kandydaci będą równie daleko, to nie zagłosuje on w ogóle). Porównując dwie osoby, np. Jasę i Nela, musimy zatem obliczyć, ile osób jest bliżej Jasie niż Nelu (jest ich 7, licząc Jasę) i ile osób jest bliżej Nelu niż Jasie (jest ich 6); zwyciężca zostaje osoba, która ma więcej osób bliżej siebie, czyli Jaś.

Pan Marek szybko sprawdził, że Jaś nie tylko wygrywa z Nelu, ale też z Adą i wszystkimi innymi osobami! Czyli Jaś nie tylko ma najwyższą bliskość, ale także jest zwycięzcą condorcetowskim! Ufff... ale fart. Ale czy na pewno?

Okazuje się, że nie. W drzewach, czyli grafach, w których z każdego wierzchołka do każdego innego prowadzi dokładnie jedna ścieżka, tak jest zawsze.

Twierdzenie. *W drzewie zwycięzca condorcetowski ma zawsze najwyższą bliskość.*

Aby to zobaczyć, rozpatrzmy najpierw dwóch sąsiadów: A i B . W drzewie krawędź dzieli wszystkie osoby na dwie grupy: osoby po stronie A i osoby po stronie B . Osoba, po której stronie jest więcej osób, wygra: oczywiście osoby po stronie A zagłosują na A , a po stronie B na B .

Popatrzmy teraz na odległości obu osób. Osoba A ma o jeden dłuższą drogę do wszystkich osób po stronie B . Z kolei osoba B ma o jeden dłuższą drogę do wszystkich osób po stronie A . A zatem jeżeli porównamy sumy odległości obu osób, okaże się, że ich różnica jest równa dokładnie różnicy pomiędzy licznością stron i będzie mniejsza dla osoby, która ma po swojej stronie więcej osób. A skoro będzie dla niej mniejsza, to jej bliskość będzie wyższa!

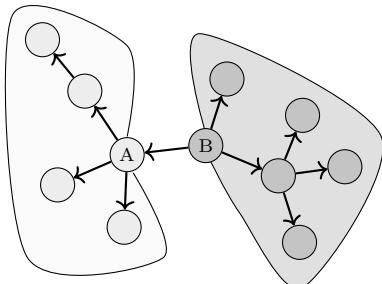
Widzimy więc, że spośród dowolnych dwóch sąsiadów ten, który wygrywa, ma też wyższą bliskość! Łatwo też zauważyć, że tylko jeden z sąsiadów może z nami wygrać, czyli jeżeli B ma dwóch sąsiadów A i C , to jeśli A wygrywa z B , to B wygrywa z C . Wynika to z tego, że jeżeli A wygrywa z B , to znaczy, że po jego stronie jest więcej niż połowa wierzchołków i po stronie C już tyle być nie może. Teraz jeżeli istnieje zwycięzca condorcetowski, to oczywiście wygrywa on ze swoimi sąsiadami, a oni wygrywają ze swoimi pozostałymi sąsiadami, którzy wygrywają ze swoimi i tak dalej. Oznacza to, że zwycięzca condorcetowski

Niech $\text{Net}(u, v)$ będzie liczbą wierzchołków, które są bliżej wierzchołka u niż wierzchołka v :

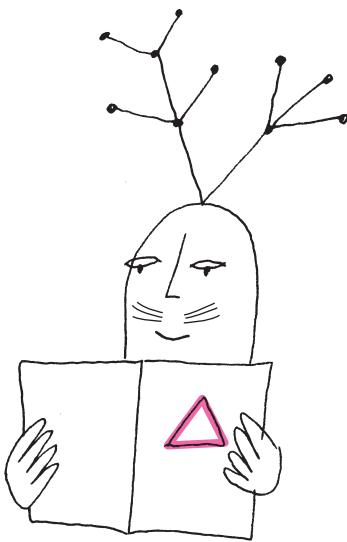
$$\text{Net}(u, v) = |\{w \in V : d(u, w) < d(v, w)\}|.$$

Powiemy, że u wygrywa z v , jeżeli zachodzi $\text{Net}(u, v) > \text{Net}(v, u)$.

Z artykułu o metodzie Condorceta wiemy, że zwycięzca condorcetowski może nie istnieć. Jeżeli mamy parzystą liczbę wierzchołków w drzewie, to rzeczywiście może się tak zdarzyć. Istnieją jednak wówczas dwa wierzchołki, które remisują ze sobą i wygrywają pojedynek z wszystkimi innymi; można pokazać, że mają one też najwyższą bliskość.

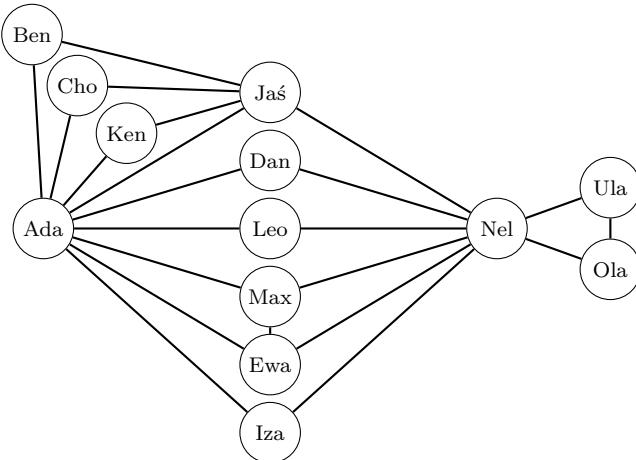


Przykładowe drzewo podzielone na dwie strony krawędzią AB . Krawędzie są skierowane w taki sposób, aby prowadziły od wierzchołka, który wygrywa do przegranego



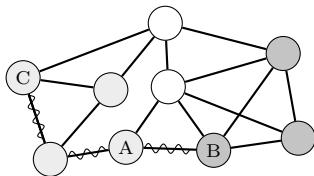
ma wyższą bliskość niż sąsiedzi, którzy mają wyższą bliskość niż pozostali sąsiedzi i tak dalej. A zatem zwycięzca condorcetowski ma najwyższą bliskość!

„Ciekawe...” – pomyślał pan Marek. – „Czy tak jest jednak w dowolnym grafie?”. Pan Marek pobiegł do komputera i zaczął przeglądać nagrania z korytarzy. Dla każdej pary, która ze sobą rozmawiała na korytarzu, dorysował krawędź. Kiedy poprzedstawiał trochę wierzchołki, powstał następujący, trochę dziwny, graf:



„Ile ta Ada gada!” – pomyślał pan Marek, po czym szybko sprawdził, że dzięki swojej gadatliwości w tym grafie Ada wygrywa z Nel i Jasiem, a także ze wszystkimi pozostałymi osobami. Jest więc zwyciężczą, a właściwie zwyciężczynią condorcetowską. Natomiast to Nel ma najwyższą bliskość. Obie metody w ogólnych grafach nie dają zatem tego samego wyniku!

Zastanówmy się, co się zmieniło. Weźmy najpierw dwie dowolne osoby, A i B , połączone krawędzią i niech C będzie dowolnym innym wierzchołkiem. Zauważmy, że odległości C do A i B mogą różnić się maksymalnie o 1: na przykład gdyby najkrótsza ścieżka z C do A była dłuższa o 2 od najkrótszej ścieżki z C do B , to przecież moglibyśmy ją zamienić na ścieżkę z C do B przedłużoną o krawędź AB – sprzeczność. Wszystkie wierzchołki w grafie możemy zatem podzielić na trzy grupy: wierzchołki równoodległe od A i B , bliższe o 1 do A oraz bliższe o 1 do B . Różnica sumy odległości to teraz różnica liczności tych dwóch ostatnich grup. A zatem w dowolnych grafach także jest prawdą, że spośród sąsiadów ten, który ma więcej wierzchołków bliżej i wygrywa pojedynek jeden na jeden, ma najwyższą bliskość.



Przykładowy graf. Wierzchołki białe są równoodległe od A i B . Jasnoszare wierzchołki są bliższe o 1 do A , a ciemne – bliższe o 1 do B . Falowana linia prezentuje (pewną) najkrótszą ścieżkę z C do B .

Czemu nie możemy więc pokazać, że zwycięzca condorcetowski ma najwyższą bliskość? O ile w drzewach prawdą jest, że tylko jeden z naszych sąsiadów może z nami wygrywać, o tyle w dowolnych grafach nie jest to już prawdą. Na przykład w grafie korytarzowych rozmów Jaś przegrywa zarówno z Adą,

jak i Nel. Prawdę jest zatem, że Ada, zwyciężczyni condorcetowska, ma wyższą bliskość niż jej sąsiedzi, ale jej sąsiedzi (np. Jaś) niekoniecznie mają wyższą bliskość niż ich pozostali sąsiedzi. Analogiczny argument zatem nie działa. Prawdę jest też, że Nel, osoba z najwyższą bliskością, wygrywa ze wszystkimi swoimi sąsiadami. Obie osoby nie muszą być jednak tą samą.

„Szkoła... Ale jest na to metoda – wystarczy, że nie pokażę tego grafu klasie” – stwierdził pan Marek i szybko wymazał powiększony graf. Ada nigdy się nie dowie, jak blisko była zwycięstwa.

* * * * *

Pan Marek poczynił wiele naukowych odkryć, które pokazują, że analizę sieci społecznych i teorię wyboru społecznego łączy więcej, niż można było podejrzewać. Wynotował sobie także na marginesie ciekawe pytania, na które jeszcze nie zna odpowiedzi. Może Ty, Czytelniku, pomóżesz mu znaleźć na nie odpowiedzi?

Pytanie 1. Czy dla dowolnych dwóch wierzchołków w drzewie ten, który wygrywa, ma najwyższą bliskość?

Pytanie 2. Czy jeżeli dwa wierzchołki w drzewie mają różną odległość od zwycięzcy condorcetowskiego, to ten będący bliżej wygrywa z drugim?

Pytanie 3. Czy w grafie może istnieć cykl Condorceta, czyli sytuacja, w której wierzchołek A wygrywa z B , B z C i C z A (czyli jest więcej wierzchołków bliżej A niż B , więcej bliżej B niż C i więcej bliżej C niż A)?

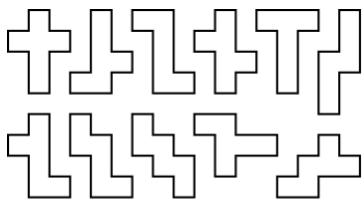
Pytanie 4. Czy zmieniając krawędzie tylko Ben i Nel w powyższym powiększonym grafie, da się skonstruować graf, w którym to Nel jest zwyciężczynią condorcetowską, ale Ada i Nel mają niezmienione zbiory odległości do innych (tzn. Ada ma 9 sąsiadów, 1 osobę w odległości 2 i 2 w odległości 3; z kolei Nel ma 8 sąsiadów i 4 osoby w odległości 2)?

Odpowiedzi na stronie 5.

Jak komputer „kubomino” układał

Piotr PIKUL*

* Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński



Komplet siatek sześcianu (kubomin)

W artykule *Kubomino* z Δ_{22}^8 opisałem układankę złożoną z kompletu siatek sześcianu. Wyznałem w nim, że w poszukiwaniach układu o minimalnym obwodzie posłużyłem się komputerem. Nadszedł moment, aby powiedzieć parę słów o technikach wykorzystanych w moim programie.

Obwód jest tym mniejszy, im więcej jest krawędzi wewnętrznych. Można więc próbować tak dokładać kolejne kształty, aby za każdym razem linia styku była jak najdłuższa. Oczywiście na danym etapie może być wiele „równorzędnych” możliwości, które do pewnego stopnia można sprawdzić w osobnych przebiegach rekurencji. (O tym, czy tak naiwny, zachłanny algorytm ma jakiekolwiek szanse okazać się użytecznym, pomówimy później). Pomyślałem, że mierzenie styku będzie wygodniejsze, gdy w centrum uwagi będą krawędzie, nie wierzchołki. Doprowadziło mnie to do rozważania *kraty krawędzi*.

Nazwa zapewne brzmi dziwnie. Prawdopodobnie Czytelnicy *Delta* zwykle spotykali się dotąd tylko z „krawędziami kraty”, czyli odcinkami łączącymi sąsiednie punkty kratowe (tj. punkty o całkowitych współrzędnych). W ogóle współrzędne całkowite kojarzymy albo z punktami, albo z kwadratowymi polami, które wprawdzie mają swoje boki, ale niekoniecznie traktujemy je jako pełnoprawne, niezależne obiekty. Otóż zaznaczając środki krawędzi kraty, łatwo się przekonać, że one również tworzą kratę, choć obróconą o 45° w stosunku do pól czy punktów. Ma ona także inny punkt początkowy.

Oczywiście można by przyjąć, że współrzędnymi krawędzi są współrzędne ich środków, ale chyba wygodniej operować na liczbach całkowitych. Przyjąłem, że współrzędne $[0, 0]$ (pisane w nawiasach kwadratowych dla odróżnienia od współrzędnych punktów) odpowiadają krawędzi $(0, 0) — (1, 0)$. To jeszcze nie determinuje całego układu współrzędnych. Ogólnie, krawędzi wychodzącej na prawo z punktu (x, y) przypisuję współrzędne $[x - y, x + y]$. Z kolei krawędź wychodząca z (x, y) w dół otrzymuje współrzędne $[x - y, x + y - 1]$. Czytelnik zainteresowany może samodzielnie wypisać odpowiednie wzory dla krawędzi wychodzących do góry lub na lewo. Może także poszukać wzorów przeliczających współrzędne krawędzi na współrzędne ich końców i środków (te ostatnie już nie są całkowite).

Co ciekawego ma w sobie „krata krawędzi”, czego zwyczajna nie ma? Na przykład „zwykłych” punktów kratowych raczej nie podzieliłybyśmy na *poziome* i *pionowe*, co dla nowej kraty jest naturalne. Kryterium „poziomości” krawędzi $[x, y]$ jest bardzo proste. Wystarczy sprawdzić, czy suma $x + y$ jest parzysta (lub, jak kto woli: $x \equiv y \pmod{2}$). Taki podział może się kojarzyć z dwubarwną szachownicą i jest to skojarzenie poniekąd właściwe.

Zwróciły jeszcze uwagę na przedłużenia krawędzi. Niestety, wzór na współrzędne przedłużenia zależy od kierunku. Krawędź pionową $[x, y]$ przedłużają $[x - 1, y + 1]$ oraz $[x + 1, y - 1]$. W przypadku poziomej w obu współrzędnych pojawia się ten sam znak. W zasadzie można zapisać uniwersalne wzory, posługując się resztą z dzielenia, ale czy będzie to aż tak eleganckie? Zagadnienie przedłużania krawędzi pokazuje różnicę pomiędzy omawianą kratą a zwykłą szachownicą. Otóż mając czarne pole na szachownicy, trudno pośród jego czterech czarnych sąsiadów naturalnie wyróżnić dwóch „przedłużających”. Oczywiście, zważywszy na umowność współrzędnych kraty krawędzi, możemy się równie dobrze umówić, które pola szachownicy „leżą na przedłużeniu danego”, niemniej jest to pewien dodatek. Czyli krata krawędzi to trochę więcej niż szachownica.

Powróćmy do problemu znalezienia kubominowej układanki o możliwie najmniejszym obwodzie. W programie każdą figurę reprezentuję tak, aby możliwe były dwie operacje: udostępnienie zbioru wszystkich krawędzi (także tych leżących we wnętrzu figury) oraz sprawdzenie, czy podana krawędź jest wewnętrzna (nie leży na brzegu figury) i czy należy ją zaznaczyć, tzn. czy jest brzegiem któregoś elementu układanki (krawędź leżącą na brzegu zawsze się zaznacza). Taki obiekt daje się bardzo elegancko narysować (także za pomocą samych znaków ASCII), ponieważ wystarczy odwiedzić wszystkie zaznaczone krawędzie w danym zakresie współrzędnych i rysować odpowiednio skierowane kreski. Gdy posługujemy się tylko znakami, daje to ukośny rysunek, ale jest



Rozwiążanie zadania M 1743.

Załóżmy, że $m = 4n^2 + 4r + 1$ nie jest równe 1 ani nie jest liczbą pierwszą. Wówczas ma nieparzysty dzielnik

pierwszy $p = 2k + 1$ taki, że $p \leq \sqrt{m}$. Mamy zatem dwa przypadki:

1) $p < \sqrt{m}$. Wtedy

$$n^2 + r - k(k+1) = \frac{m-p^2}{4}$$

jest liczbą całkowitą dodatnią podzielną przez p , zatem z warunków zadania jest ona równa p . Zatem

$$n^2 + r - k(k+1) = p = 2k + 1,$$

czyli

$$\begin{aligned} n^2 + r - (k+1)(k+2) &= \\ &= 2k + 1 - 2(k+1) = -1 \end{aligned}$$

— wbrew założeniu zadania.

2) $p = \sqrt{m}$. Wtedy

$$4n^2 + 4r + 1 = p^2 = (2k+1)^2,$$

skąd

$$n^2 + r - (k-1)k = 2k$$

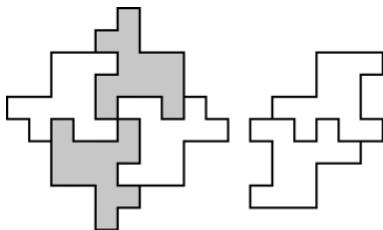
— sprzeczność z założeniem, o ile $k \neq 1$.

Zatem $k = 1$ i

$$4n^2 + 4r + 1 = 3^2 = 9.$$

Czytelnika Zainteresowanego tworzeniem algorytmów operujących na zbiorach krawędzi kraty muszę dodatkowo ostrzec przed pewnymi subtelnościami związanymi ze stosowaniem geometrycznych przekształceń. Zwykłe przesunięcia o wektor (których przy układaniu nie da się uniknąć) skrywają niespodzianki, ponieważ jeśli $\Delta x + \Delta y$ jest nieparzyste, po przesunięciu o wektor $[\Delta x, \Delta y]$ krawędzie pionowe przejdą na poziome, co jest dalece niewłaściwe. Na podobne „trudności” należy uważać przy obrotach i odbiciach symetrycznych.

W poprzednim artykule o kubominie, Δ_{22}^8 , naszkicowałem dowód faktu, że obwód 36 jest minimalny.



Przykład zestawu części (4 identyczne), których „zachłanne” układanie nie pozwala uzyskać minimalnego obwodu

Poliomino nazywamy *wypukłym*, gdy każdy jego wiersz i kolumna są „w jednym kawałku”. Nie należy tego mylić z klasycznym pojęciem wypukłości występującym w geometrii.

w przypadku programu układającego kubomino nie było to do niczego potrzebne (pole jest zawsze takie samo). Niestety, przedstawione *bezmyślne* obliczenia nie pozwalają wyznaczyć maksymalnej długości prostej krawędzi.

Teraz może odsunąćmy kraty na bok i pochyłmy się nad strategią poszukiwania kształtów minimalizujących obwód. Wspomniałem, że przy dopasowywaniu części można, wykorzystując wielokrotnie wywołania rekurencyjne, sprawdzić kilka optymalnych położen konkretnego elementu (sprawdzenie wszystkich jest dalece nierealne; Czytelnik Zaprawiony w Szacowaniach może zastać się, jak wielka jest liczba możliwych układów). Alternatywnie, można wykorzystać te wywołania do sprawdzania różnych kolejności dodawania elementów ($11!$ to dla komputera nie aż tak dużo), a wybór pomiędzy „równorzędnymi” ustawieniami danej części uczynić losowym. Gdy testowałem oba podejścia, to właśnie ta druga wersja programu znacznie częściej układała z kubomin coś o małym obwodzie.

Zachlanny i randomizowany algorytm poszukujący minimalnego obwodu zdołał wypełnić swoje zadanie, ponieważ znalazł układ o obwodzie 36. Po dłuższym czasie wyprodukował jeszcze trzy inne tego typu rozwiązania. Niemniej tutaj pojawiają się pytania teoretyczne: czy musiało mu się to udać?

Można znaleźć takie zestawy części, których obwodu nie da się zminimalizować poprzez dokładanie każdego kolejnego elementu tak, aby osiągnąć najdłuższy możliwy styk. W przykładzie zamieszczonym na marginesie ułożenie symetryczne daje łączną długość styków równą 24 (obwód 40). Gdy jednak zechcemy wykorzystać maksymalny styk pomiędzy dwoma elementami (ma długość 7), to osiągnięcie takiego rezultatu nie będzie możliwe. Zachęcam Czytelnika do poszukania własnego przykładu – może uda się znaleźć taki złożony zaledwie 3 części lub taki, dla którego łatwiej zauważać pożądane własności?

Może siatki sześcianu mają jakąś własność, która gwarantuje osiągalność minimalnego obwodu przy zachłannej strategii? W oczy rzuca się fakt, że wszystkie one są wypukłymi poliominoami. Czy ma to jakiś związek ze skutecznością algorytmu? Pytanie to może być bardzo trudne, ale Nauce to nie powinno przeszkadzać.

Rozwiązania zadań do artykułu „Oblicza dualności” ze strony 1

1. Rozważmy dwa ostrosłupy prawidłowe o wierzchołkach P, Q sklejone wspólną podstawą $A_1A_2A_3A_4A_5$. Jeśli punkt A_1 zamienimy na jakiś pobliski punkt A'_1 poza płaszczyzną podstawy, to w otrzymanym wielościanie wypukły $A'_1A_2A_3A_4A_5PQ$ środki odcinków $A'_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A'_1$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. W konsekwencji również środki ścian łączących te odcinki z P nie tworzą pięciokąta.

2. Czworościan: $4 - 6 + 4 = 2$. Sześciian: $8 - 12 + 6 = 2$. Ośmiościan: $6 - 12 + 8 = 2$. Dwunastościan: $20 - 30 + 12 = 2$. Dwudziestościan: $12 - 30 + 20 = 2$.

3. Wspomniany dowód w ukryty sposób korzysta z twierdzenia Jordana, które mówi rzeczą następującą: w grafie na sferze dowolny cykl prosty rozcina sferę na dwie części. Podobne stwierdzenie nie jest prawdziwe na torusie.

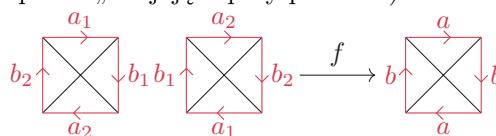
4. $k = 2$: Każda ściana (dwuwymiarowa) należy do dokładnie dwóch czworościanów. $k = 1$: Każda krawędź należy do pewnej liczby czworościanów kolejno połączonych ścianami. (Warunek dla wierzchołka trudno jest sformułować w podobny sposób).

5. Kolejne równości otrzymujemy, ustalając B odpowiedniego wymiaru $(1, 2, 3)$ i odnotowując, że:

- każda krawędź ma dwa końce;
- każdy trójkąt ma tyle samo wierzchołków co krawędzi (czyli 3);
- charakterystyka Eulera brzegu czworościanu to $4 - 6 + 4 = 2$;

a następnie sumując po wszystkich B .

6*. Poniżej lewy diagram przedstawia sferę \mathbb{S} (w sposób nawiązujący do zszywania poszewki na poduszkę), a prawy płaszczyznę rzutową \mathbb{P} . Funkcja f posyła każdy z punktów \mathbb{S} na odpowiedni punkt \mathbb{P} przez przesunięcie (w ten sposób „sklejając” pary punktów).



Jeśli teraz na \mathbb{P} mielibyśmy daną *dowolną* siatkę, to biorąc przeciwobrazy jej V wierzchołków przy funkcji f , uzyskalibyśmy $2V$ wierzchołków na \mathbb{S} ; czyniąc podobnie dla krawędzi i ścian, otrzymalibyśmy siatkę na \mathbb{S} o żądanej własności.

Człowiek na czipie

Dlaczego leki otrzymywane dzięki nowoczesnym procedurom biotechnologicznym są tak drogie? Nawet jeżeli udowodniono ich skuteczność w zwalczaniu dotychczas nieuleczalnych i śmiertelnych chorób – ceny leków i terapii niejednokrotnie przekraczają finansowe możliwości jednostki i społeczeństwa.

Szukając odpowiedzi na takie pytania, natrafiamy na przewidziane przez prawo procedury poprzedzające wprowadzenie leku na rynek. Należy realizować etapy badań sprawdzających działanie i bezpieczeństwo analitycznie opisanego preparatu: badanie wpływu na mikroorganizmy, na hodowle komórek i tkanek, na wybrane zwierzęta laboratoryjne, wreszcie na kolejno wzrastającą liczbę pacjentów, którzy świadomie wyrazili zgodę na eksperymentalną terapię. Rzykowne terapie dopuszcza się jedynie po wyczerpaniu dostępnych metod laboratoryjnych. Uważa się, że z 10 tysięcy badanych substancji, po przejściu wymaganych testów, do badań klinicznych z udziałem ludzi trafia 5 z nich, a zarejestrowana do leczenia zostaje jedna.

Przyjrzymy się, dla przykładu, jednemu z warunków legalizacji leku: konieczności jego przetestowania na zwierzętach. W tej dziedzinie ludzkość przeszła długą drogę, od czasów starożytnych. Dziś za kluczowe uznaje się poszukiwanie procedur o możliwie najniższym stopniu dokuczliwości – warto pamiętać, że każde prowadzenie zwierzęcia przez doświadczanie eliminuje jego przydatność do jakichkolwiek kolejnych procedur. Brutalnie mówiąc – zwierzę po eksperymencie jest zabijane. Lokalny przykład na rozmiar potrzeb: w 2019 roku w polskich laboratoriach do doświadczeń wykorzystano 143 103 zwierzęta, w tym 74 714 myszy, 23 334 szczury, 11 469 danio pręgowanych, 6 275 kur, 1 050 świń i 1 054 królików. Doświadczenia prowadzono również na 12 kotach, 9 psach, 387 owcach i 492 karpiach. Liczby światowe są znacznie wyższe. W przybliżeniu, dla wprowadzenia na rynek 45 nowych leków „zużywa się” 3 miliony zwierząt. Nie dziwi zatem fakt, że mimo stałego śledzenia sytuacji przez krajowe i globalne instytucje i organizacje problem zabijania zwierząt znajduje się na czele wymagających rozwiązania w przemyśle farmaceutycznym i kosmetycznym. Niestety pozytywne wyniki uzyskane w testach na zwierzętach w badaniach klinicznych potwierdzają się tylko w przypadku 10% sprawdzanych substancji.

Istnieje zatem nadal konieczność podejmowania badań i ustalania procedur, które zmniejszyłyby te zatrważające liczby. Wszystkie badania modelowe, łącznie z modelami informatycznymi, nie dostarczają danych o wpływie substancji leczniczej na cały organizm indywidualnego człowieka, współprzeźliwości reakcji na lek tkanek i narządów, znaczenia płci, wieku i środowiska życia pacjenta.

W końcu 2021 roku Kongres Stanów Zjednoczonych i Prezydent USA podjęli odpowiednie decyzje, a następnie Federalna Agencja ds. Żywności i Leków (FDA) postanowiła odstąpić od dotychczasowego wymogu dostarczenia wyników doświadczeń na gryzoniach, psach i małpach w procesie legalizacji leku. Uwaga: nie będzie się wymagać takich prób, co nie oznacza ich prawnego zakazu.

Nauka reaguje na wymagania polityczne i społeczne. Szeroko donosi się o postępach w konstrukcjach urządzeń „medialnie” nazywanych „Człowiek na czipie”. Są to niewielkie komory przepływowe wyłożone od wewnętrz warstwami żywych komórek (ludzkich) z różnych tkanek, omywanych ciecą podtrzymującą ich żywotność. Komórki mogą pochodzić od leczonego pacjenta. Można kolejno łączyć komory pokryte komórkami wątroby, nerwowymi, nerki, serca czy płuc, analizując obmywającą ciecz oraz zmiany w samych komórkach. Jeżeli w cieczy znajduje się badany „kandydat” na lek, to tworzymy dynamiczny układ kontroli jego działania na czipie.

Oczywiście takiemu czipowi daleko do ludzkiego organizmu, ale stanowi on postęp w porównaniu z badaniami dwuwymiarowymi w hodowlach stacjonarnych jednego typu komórek, jednocześnie będąc alternatywną metodą dla testów na zwierzętach.

Nie ulega wątpliwości, że całość zagadnienia, analizowanego z wielu stron, ma istotną, czasem o znaczeniu decyzyjnym, cechę filozoficzną i etyczną. Ale o tym... innym razem.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Modele Wszechświata dla początkujących

Część 4: Jak dawno? Jak daleko?

Szymon CHARZYŃSKI*

* Katedra Metod Matematycznych Fizyki,
Wydział Fizyki Uniwersytetu
Warszawskiego

Astronomowie regularnie zadziwiają nas kolejnymi fascynującymi odkryciami dotyczącymi obiektów znajdujących się w niewyobrażalnych odległościach od nas, liczących w miliardach lat świetlnych. Niejednokrotnie spotkałem się z pytaniem, co tak naprawdę znaczy ta odległość. Tego rodzaju dyskusja odbyła się także w redakcji *Delty* przy okazji omawiania *Aktualności* do Δ_{20}^{10} napisanych przez naszego człowieka w LIGO-Virgo-KAGRA, Michała Bejgera. Tekst dotyczył detekcji sygnału promieniowania grawitacyjnego pochodzącego ze źródła GW190521. Pojawiła się w nim informacja, że odległość do źródła sygnału wynosi 5,3 Gpc, czyli około 17 miliardów lat świetlnych, ale zdarzenie będące źródłem sygnału nastąpiło około 7 miliardów lat temu. Powstaje oczywiście wątpliwość, czy podane informacje nie są sprzeczne i czy nie została tu popełniona zwykła literówka. Okazuje się, że redagując teksty popularnonaukowe, należy zawsze zachować ostrożność... ponieważ o żadnej literówce ani sprzeczności nie ma tu mowy. Trzeba tylko dobrze zdefiniować, co to znaczy „jak daleko”.

O którą odległość chodzi? Informacje o odległych obiektach astronomicznych docierają do nas jako sygnały promieniowania elektromagnetycznego lub grawitacyjnego. Choć umiejętność rejestracji tego drugiego ludzkość opanowała stosunkowo niedawno, to informacje pozyskane dzięki detekcjom fal grawitacyjnych są bardzo istotne z punktu widzenia kosmologii. Oba te rodzaje promieniowania rozchodzą się w przestrzeni z tą samą skońzoną prędkością, zwanej *prędkością światła* i zwyczajowo oznaczaną c . Dlatego rejestrację sygnału od jego emisji dzieli nie tylko duża odległość, ale również długi czas. Ponieważ Wszechświat się zmienia, to jego stan w chwili detekcji jest inny, niż był w chwili emisji. W szczególności skala odległości we Wszechświecie uległa zmianie – Wszechświat się rozszerzył i odległości między Galaktykami wzrosły.

Kiedy więc ktoś podaje odległość do źródła sygnału, to możemy mieć wątpliwości, którą z następujących możliwości ma na myśli:

- A. odległość do źródła w chwili emisji sygnału,
- B. drogę, jaką pokonał sygnał,
- C. odległość do źródła w chwili rejestracji sygnału.

Odległość B jest jednoznacznie powiązana z czasem, jaki upłynął od emisji – stosunek drogi, jaką pokonał sygnał, do czasu to po prostu prędkość światła c . Zauważmy dalej, że z punktu widzenia fotonu lecącego przez rozszerzający się Wszechświat przestrzeń puchnie zarówno przed nim, jak i za nim. Oznacza to, że odległość B znajdzie się pomiędzy A i C. Czyli wymienione odległości w rozszerzającym się Wszechświecie będą uporządkowane rosnąco od A do C (w szczególności będą różne). W większości przypadków, gdy astronomowie mówią o odległości, to podają odległość C (jeżeli nie jest wprost powiedziane, że chodzi o coś innego).

Warto tutaj podkreślić, że do wyznaczenia relacji pomiędzy tymi trzema rodzajami odległości konieczne jest odwołanie się do modelu matematycznego. Model taki opisuje losy źródła po emisji sygnału, który odbieramy.

W przypadku sygnałów, które leciały do nas miliardy lat, oznacza to obliczanie na podstawie modelu, jak zmieni się odległość do źródła w czasie miliardów lat, które upłyną po akcie emisji. To, jaki model kosmologiczny przyjmiemy jako „obowiązujący” do opisu naszego Wszechświata, ma więc kluczowe znaczenie. Dlatego warto zastanowić się nad tym, co astronomowie mierzą, a co wyliczają z modelem.

Co mierzymy bezpośrednio? Fala elektromagnetyczna lub grawitacyjna docierająca do naszego detektora jest opisywana przez dwa parametry: częstotliwość i amplitudę. Obie te wielkości możemy mierzyć. Zwykle sygnał jest kombinacją fal o różnych częstotliwościach i amplitudach. Zależność amplitudy od częstotliwości nazywamy widmem sygnału – i to jest coś, co mierzymy.



Pewne własności takich modeli kosmologicznych omówiliśmy w poprzednich częściach tego cyklu, Δ_{23}^1 , Δ_{23}^2 i Δ_{23}^3 .



Rozwiążanie zadania F 1070.

Gdy źródło jest odległe, możemy założyć, że kierunki, z jakich dźwięk dociera do każdego z uszu, są równoległe. Wówczas różnica rejestrowanych czasów dotarcia do uszu będzie spełniała związek:

$$c\Delta t = d \sin \alpha,$$

α oznacza tu kąt, z jakiego dociera dźwięk. Kąt α mierzemy od prostopadłej do prostej łączącej uszy (od kierunku na wprost przed nami). Oznacza to, że jesteśmy w stanie rozpoznać kąt

$$\alpha = \arcsin \frac{c\Delta t}{d}.$$

Dla przyjętych w treści danych $\alpha \approx 0.9^\circ$. Taka jest minimalna wartość odchylenia, jaką jesteśmy w stanie rozpoznać w sytuacji, kiedy stojmy (prawie) przodem do źródła dźwięku, czyli o ile kierunek do źródła jest odchylony od kierunku na wprost.

Rozpatrzmy z kolei przypadek, gdy dźwięk dochodzi dokładnie z prawej lub lewej strony ($\alpha = \pm 90^\circ$), i jakie odchylenie od tego kierunku jesteśmy w stanie rozpoznać w tej sytuacji. Dla $\alpha = \pm 90^\circ$ różnica czasów wynosi $T = d/c \approx 650 \mu s$. Kierunek bliski $\alpha = 90^\circ$ będziemy w stanie rozpoznać, gdy różnica czasów wynosi $T - \Delta t$, czyli dla

$$\alpha_{max} = \arcsin \frac{c(T - \Delta t)}{d}.$$

Dla przyjętych danych $\alpha_{max} \approx 10^\circ$, i jest to dokładność rozpoznania kierunku dźwięku z lewej lub prawej strony, która jest znacznie gorsza niż dla dźwięków dochodzących z kierunku na wprost. Innym mechanizmem oceny kierunku jest przesunięcie fazowe sygnałów docierających do uszu oraz porównanie natężenia dźwięku odbieranego przez lewe i prawe ucho. Ale to już temat na inną zadanie.

Skrót FLRW pochodzi od nazwisk Friedman–Lemaître–Robertson–Walker.

W innych modelach, w szczególności modelach FLRW z niezerową krzywizną, odległość jasnościowa i właściwa odległość w chwili detekcji nie muszą być równe. W ogólniejszych modelach lista możliwych definicji odległości jest dłuższa niż ta podana w niniejszym artykule.

Jeżeli dysponujemy dodatkową wiedzą na temat amplitudy lub częstotliwości sygnału w chwili jego emisji, to porównując te parametry ze zmierzonymi wartościami, możemy obliczyć, ile razy zmalała amplituda sygnału lub o jaki czynnik zmieniła się częstotliwość.

W widmach promieniowania elektromagnetycznego obserwuje się charakterystyczne wzory linii emisyjnych lub absorpcyjnych, które odpowiadają przejściom pomiędzy poziomami elektronów w atomach. Częstości fal emitowanych lub pochłanianych w wyniku takich przejść w atomie znamy dokładnie z doświadczeń laboratoryjnych. Widma odległych obiektów są przesunięte (najczęściej w stronę niższych częstości). To przesunięcie, czyli różnicę częstości, jesteśmy w stanie zmierzyć.

Jeżeli znamy mechanizm stojący za emisją sygnału, to czasami możemy dysponować dodatkową wiedzą na temat amplitudy emitowanego sygnału. Na przykład na podstawie obserwacji ustalonego, że wszystkie supernowe tego typu osiągają podobną jasność maksymalną. Porównując tę wzorcową jasność ze zmierzoną jasnością, możemy obliczyć, jak zmalała amplituda fali elektromagnetycznej po drodze. Supernowe typu Ia są przykładem tzw. *świecy standardowej*, czyli obiektu, którego obserwacje wykorzystuje się do wyznaczania odległości.

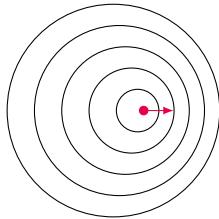
Przeanalizujmy teraz, jak zmienia się amplituda i częstotliwość fali rozchodzącej się w rozszerzającym się Wszechświecie. Przyjmijmy najprostszy model FLRW z zerową krzywizną, który omówiony był w poprzednich częściach w Δ_{23}^2 i Δ_{23}^3 .

Zmiana amplitudy. Zaczniemy od przypadku statycznego (niezmieniającego się w czasie) Wszechświata o zerowej krzywiznie (czyli takiego, w którym obowiązuje zwykła euklidesowa geometria), w którym nie mamy problemu ze zdefiniowaniem odległości od źródła do odbiorcy – jest ona stała i możemy ją oznaczyć jako r . Wiadomo, że energia fali jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy, i żeby znaleźć zależność amplitudy fali od r , możemy skorzystać z zasady zachowania energii. Całkowita energia przechodząca w jednostce czasu przez powierzchnię otaczającą źródło sfery o promieniu r musi być więc stała i niezależna od r . Z drugiej strony, wraz ze wzrostem r energia ta rozkłada się na coraz większą powierzchnię równą $4\pi r^2$. Oznacza to, że *natężenie* fali (energia przechodząca w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni) maleje proporcjonalnie do $1/r^2$, a amplituda fali maleje jak $1/r$.

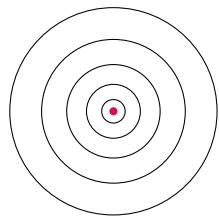
W rozszerzającym się Wszechświecie również obowiązuje zasada zachowania energii. Należy jednak dobrze się zastanowić, czym w tym wypadku jest odległość r . Ma to być promień sfery, na powierzchni której rozkłada się energia fali w chwili detekcji, czyli odległość typu C na naszej liście. W tym przypadku w chwili detekcji odległość od źródła do czoła sygnału jest taka sama we wszystkich kierunkach i jest właśnie odlegością C. Odległość wyznaczaną z zasady zachowania energii nazywa się *odlegością jasnościową* i jest ona równa odległości C w rozważanym przez nas Wszechświecie opisywanym modelem FLRW z zerową krzywizną. Oznacza to, że przyjmując taki model Wszechświata w pomiarach z wykorzystaniem świec standardowych, wyznacza się właściwą odległość, jaka dzieli nas od źródła w chwili wykonywania pomiaru (dla fal grawitacyjnych ich odpowiednikiem są tzw. *syreny standardowe*, o których więcej piszemy na marginesie na następnej stronie).

Zmiana częstotliwości. Kiedy mija nas karetka emitująca sygnał dźwiękowy, to wysokość dźwięku jest wyższa, gdy karetka się do nas zbliża niż wtedy, gdy się od nas oddala. Jest to znany ze szkoły *efekt Dopplera*. Czasami przesunięcie widm oddalających się od nas galaktyk tłumaczy się właśnie efektem Dopplera, nie do końca poprawnie. Taki efekt oczywiście występuje, ale oprócz standardowego efektu Dopplera występuje dodatkowo zmiana częstotliwości będąca skutkiem rozszerzania się przestrzeni.

Żeby lepiej zrozumieć różnicę między tymi dwoma zjawiskami, wykonajmy pewien eksperyment myślowy. Kiedy obserwujemy falę w jednym punkcie, to widzimy wahania jakiejś wielkości (np. natężenia pola elektrycznego) wokół zera



Rys. 1. Efekt Dopplera. Źródło sygnału (np. karetka na sygnale) porusza się w prawo. Środki okręgów (sfer w przestrzeni trójwymiarowej) odpowiadających frontom falowym znajdują się w różnych punktach. Środek danego okręgu znajduje się tam, gdzie źródło było w chwili emisji danego frontu falowego



Rys. 2. Fronty falowe w rozszerzającej się przestrzeni. Źródło emituje fale o stałej długości, jednak rozszerzanie się przestrzeni powoduje, że odległość między frontami rośnie wraz z upływem czasu, czyli rośnie również wraz z odległością od źródła

W rzeczywistości różne przyczyny przesunięcia się widma spektroskopowego mogą występować jednocześnie. Oprócz przesunięcia będącego skutkiem ruchu (efekt Dopplera) występuje jeszcze przesunięcie grawitacyjne. Jest ono związane z tym, że długość fali uciekającej z głębokiej studni potencjału grawitacyjnego rośnie. Mierząc samo przesunięcie widma, nie jesteśmy w stanie dokładnie określić, jaki wkład do całkowitego przesunięcia mają te trzy czynniki. Istnieją jednak metody pozwalające na odfiltrowanie interesującego nas czynnika związanego z rozszerzaniem Wszechświata. Wkład od prędkości własnych galaktyk można na przykład wyeliminować, obserwując wiele galaktyk w danym obszarze i mierząc średnie przesunięcie, przy założeniu, że prędkości własne są z grubsza losowe.



od pewnej minimalnej wartości do maksymalnej. Gdybyśmy zatrzymali czas i zaznaczyły w przestrzeni powierzchnie złożone z tych punktów, w których akurat jest maksimum, to na przykład dla źródła punktowego otrzymalibyśmy rodzinę koncentrycznych sfer. Jeżeli pozwolimy, aby czas znowu płynął, to zobaczymy, że te sfery puchną, podobnie jak kręgi na powierzchni wody rozchodzące się wokół miejsca, gdzie wrzucimy kamień. Takie powierzchnie nazywamy *frontami falowymi* albo *powierzchniami stałej fazy*. Odległość między dwoma kolejnymi frontami to długość fali.

W efekcie Dopplera, kiedy karetka jedzie na sygnale, kolejne fronty rozchodzą się koncentrycznie z różnych punktów, dlatego przed karetką fronty ulozone są gęściej, a za nią rzadziej (rys. 1). Czyli długość fali z przodu karetki jest mniejsza, a z tyłu większa. Częstotliwości są odwrotnie proporcjonalne do długości fali, więc z przodu rejestrujemy większą częstotliwość niż z tyłu.

A jak rozchodzą się fronty falowe w rozszerzającym się Wszechświecie? Wyobraźmy sobie, że obserwujemy fronty falowe wzdłuż jednej linii. Kolejne fronty są jak mrówki wędrujące po rozciągającej się nici (opisane w Δ_{23}^1). Źródło fali wysyła je w jednakowych odstępach czasu, a mrówki idą wszystkie z tą samą prędkością. Jednak nić pomiędzy mrówkami rozciąga się, więc odległości pomiędzy nimi rosną. Dzieje się tak równocześnie we wszystkich kierunkach (rys. 2). Odległość między frontami, czyli długość fali, rośnie, a zatem częstotliwość maleje, symetrycznie, tak samo we wszystkich kierunkach – inaczej niż dla efektu Dopplera, gdzie mieliśmy zagęszczenie frontów falowych z jednej strony i rozrzedzenie z drugiej. W rozszerzającym się Wszechświecie długość fali rośnie w miarę oddalania się od źródła, a zmiana długości fali jest ściśle związana z czynnikiem skali $a(t)$ opisywanym w poprzednich częściach tego cyklu.

z jak redshift. Ponieważ widma spektroskopowe galaktyk są najczęściej przesunięte w kierunku większych długości fali, a w widzialnej dla oka części widma kolor czerwony odpowiada największej widzialnej długości fali, to zjawisko to nazywa się *przesunięciem ku czerwieni* lub zapożyczonym z języka angielskiego *redshiftem* (bo krócej). Parametr, który opisuje to przesunięcie, to $z = \Delta\lambda/\lambda_e$, gdzie λ_e oznacza emitowaną przez źródło długość fali, a $\Delta\lambda = \lambda_o - \lambda_e$ jest różnicą między obserwowaną a emitowaną długością fali. Zależność $z = \Delta\lambda/\lambda_e$ można zapisać w równoważnej postaci $1 + z = \lambda_o/\lambda_e$. W modelach FLRW (czyli również w „obowiązującym” obecnie modelu Λ -CDM) stosunek długości fali jest po prostu równy stosunkowi czynników skali:

$$(*) \quad \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)},$$

gdzie t_e oznacza czas kosmologiczny, w którym nastąpiła emisja, a t_o oznacza chwilę obserwacji sygnału. Jest to efekt, który można przynajmniej intuicyjnie prosto uzasadnić. Skoro czynnik skali $a(t)$ mówi nam, jak zmieniają się odległości w czasie, to nie dziwne, że takie samo skalowanie dotyczy odległości między frontami falowymi, czyli długości fali. Dokładnie tak samo opisalibyśmy rosnącą odległość pomiędzy dwiema mrówkami poruszającymi się z tą samą prędkością po rozciągającej się nici. Mimo że ich prędkości są równe, to odległość między mrówkami rośnie proporcjonalnie do czynnika skali $a(t)$ opisującego rozciąganie nici. Oczywiście zmiana długości fali dotyczy tak samo fal elektromagnetycznych, jak i grawitacyjnych.

Co wyliczamy z modelu? W sytuacji, kiedy wiadomo, jak powinno wyglądać widmo promieniowania dalekiego obiektu, porównanie go z widmem obserwowanym pozwala wyznaczyć wartość redshiftu z . Tę wielkość mierzy się więc bezpośrednio w zdecydowanej większości obserwacji astronomicznych – dlatego astronomowie zwykle posługują się właśnie wartością redshiftu *zamiast* odlegością, której najczęściej nie mierzą bezpośrednio. Dopiero na podstawie zmierzonej wartości z i zależności (*) stwierdzamy, że od chwili emisji Wszechświat rozszerzył się tak, że średnio wszystkie odległości zwiększyły się $1 + z$ razy. W tym stwierdzeniu zawiera się już założenie, że Wszechświat opisujemy modelem FLRW. Dalej wybieramy konkretny model, np. Λ -CDM, charakteryzowany wartościami parametrów H_0 , Ω_m , Ω_Λ itp. (patrz poprzednia

W przypadku obserwacji promieniowania elektromagnetycznego na ogólny redshift z mierz się bezpośrednio, a odległość do źródła wyznacza bardziej pośrednimi metodami. W przypadku obserwacji fal grawitacyjnych może być dokładnie na odwrót. Jak pisał Michał Bejger w Δ_{19}^3 , proces zlewania się układu podwójnego czarnych dziur (lub gwiazd neutronowych) produkuje sygnał o znanej mocy. Poprzez analogię do *świec standardowych* w przypadku fal grawitacyjnych mówi się o *syrenach standardowych*. Porównując mierzoną w detektorze amplitudę sygnału z tą, jaką emituje źródło, możemy obliczyć odległość. Odległość wyznaczana na podstawie zmiany amplitudy fali to odległość jasnościowa, czyli w naszym prostym modelu odpowiadająca odległości typu 3 na liście. Natomiast redshift z sygnału grawitacyjnego wyznacza się metodami pośrednimi. Dlatego bardzo pożądane są zdarzenia, kiedy z tego samego źródła rejestrowane są jednocześnie sygnały grawitacyjne i elektromagnetyczne, czego przykładem jest GW170817 opisany w *Aktualnościach* w Δ_{17}^{12} . Sygnał elektromagnetyczny pozwala wyznaczyć redshift, a sygnał grawitacyjny odległość. Niestety takie obserwacje są bardzo rzadkie.

Szacuje się, że dla mikrofalowego promieniowania tła wartość redshiftu z jest rzędu 1100. Obliczono, że temperatura Wszechświata, w której nastąpiła rekombinacja, czyli kiedy protony połączyły się z elektronami, tworząc atomy wodoru, wynosiła około 3000 K. Promieniowanie tła, które wtedy zostało wyemitowane, obserwujemy teraz jako promieniowanie termiczne ciała o temperaturze 2,725 K. Widmo promieniowania termicznego ma maksimum dla pewnej długości fali, która jest odwrotnie proporcjonalna do temperatury (prawo Wiena). Stosunek tych temperatur, obliczonej 3000 K i zmierzonej 2,725 K, mówi nam więc, ile razy wzrosła długość fali odpowiadająca maksimum widma promieniowania termicznego. Stąd wiemy, że $z \approx 1100$ dla promieniowania tła, bo właśnie o taki czynnik wzrosły długości fali w jego widmie. Zostało więc ono wyemitowane, kiedy czynnik skali był 1100 razy mniejszy niż teraz, a zatem gęstość Wszechświata była wtedy około 10^9 razy większa. Fakt, że obserwujemy to promieniowanie, stanowi bezpośredni, obserwacyjny dowód, że Wszechświat był kiedyś bardzo gęsty i gorący.

O wyznaczaniu odległości kosmicznych pisał Tomasz Kwast w Δ_8^8 , a o redshiftie pisała Anna Durkalec w Δ_{19}^4 . Czytelnikom głodnym bardziej szczegółowego objaśnienia pozornych paradoksów kosmologicznych polecam artykuł Tamary M. Davis i Charlesa H. Lineweavera *Expanding Confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the Universe* arxiv.org/abs/astro-ph/0310808.

część, Δ_{23}^3). W ramach tego modelu obliczamy odległość do danego obiektu (zwykle podaje się odległość C z naszej listy) oraz kiedy sygnał został wyemitowany.

Parametry modeli oczywiście nie są brane z powietrza – wyznacza się je na podstawie obserwacji. Kluczowe znaczenie mają tutaj wspomniane już świece standardowe (dla promieniowania elektromagnetycznego) i syreny standardowe (dla promieniowania grawitacyjnego). Ich obserwacje pozwalają wyznaczać jednocześnie redshift i odległość jasnościową do danego obiektu.

Wszystko się zgadza. Rozważmy więc na zakończenie inny przykład – pozornie sprzeczny ze „zdrowym rozsądkiem” – niż ten przytoczony na początku. Galaktyka GN-z11 pojawiała się już kilka razy na łamach *Delta* (Δ_{16}^8 , Δ_{16}^{12} , Δ_{22}^{11}). Do niedawna była to galaktyka o największej zmierzonej wartości przesunięcia ku czerwieni $z = 11$ (pierwszeństwo oddała innej galaktyce, o której piszemy w *Prosto z nieba*). Taka wartość z jest wynikiem pomiaru. W artykule Francesco Pistisa (Δ_{22}^{11}) możemy przeczytać, że odległość do GN-z11 wynosi około 32,2 mld lat świetlnych. Jest to odległość C na naszej liście obliczona w ramach modelu Λ -CDM. Przeczytamy też, że emisja nastąpiła 13,4 mld lat temu (to czas tylko 400 mln lat krótszy niż szacowany obecnie wiek Wszechświata). Oznacza to, że odległość B to 13,4 mld lat świetlnych (to również wylicza się z modelu). Skoro wiemy, że $z = 11$, to możemy już łatwo sami obliczyć odległość A. Wystarczy 32,2 mld podzielić przez $z + 1$, bo taki jest stosunek współczynników skali w chwilach emisji i obserwacji sygnału. Odległość A wynosi więc 2,7 mld lat świetlnych. Tak więc rzeczywiście wszystko się zgadza: w chwili emisji od GN-z11 do miejsca, w którym się znajdujemy, było 2,7 mld lat świetlnych. W czasie, kiedy sygnał przemierzał przestrzeń, Wszechświat spuchł około 12 razy i odległość ta urosła do 32,2 mld, ale odległość, jaką przebyło światło, wyniosła 13,4 mld lat świetlnych (czyli coś pomiędzy 2,7 i 32,2). Długość fali światła również zwiększyła się dwunastokrotnie. GN-z11 oddala się aktualnie od nas z prędkością znacznie przekraczającą prędkość światła. Znacznie, to znaczy co najmniej dwa razy większą. Że nie stoi to w sprzeczności z OTW, wyjaśniałem w poprzednich częściach tego cyklu.

Nikogo nie powinno już dziwić, że wszystkie zgodne z obecnymi obserwacjami modele kosmologiczne przewidują, że odległości do obiektów o redshiftie z powyżej około 1,5 rosną w tempie szybszym niż prędkość światła. Na podstawie modeli wylicza się również promień i wiek Wszechświata. Obecnie szacuje się, że promień (odległość C na naszej liście) obserwowanego Wszechświata wynosi około 46 mld lat świetlnych, natomiast wiek szacowany jest na 13,8 mld lat. Piszący te słowa jednak przypomina sobie jak przez mgłę, że w szkole uczył się o 15 mld lat, ale to było w zamierzchłych czasach, przed odkryciem przyspieszenia ekspansji. Warto pamiętać, że tego typu wyliczenia zależą od przyjętego modelu i w miarę powiększania się naszej wiedzy o Kosmosie pewne oszacowania mogą podlegać drobnym modyfikacjom.

Podsumowanie. Wszechświat, w którym żyjemy, rozszerza się – od czasu, kiedy wyemitowane zostało mikrofalowe promieniowanie tła, spuchł już około 1100 razy. Obserwujemy galaktyki, których promieniowanie zostało „rozciągnięte” $z + 1$ razy, gdzie z jest rzędu kilku, a nawet kilkunastu ($z = 11$ zostało już przebite dzięki obserwacjom JWST, o czym piszemy w *Prosto z nieba*). Aby poprawnie opisać i zinterpretować obserwacje astronomiczne, musimy mieć *model* rozszerzającego się Wszechświata. Najczęściej stosowany obecnie model Λ -CDM opiera się na wielu upraszczających założeniach. Zakłada, że w odpowiednio dużej skali Wszechświat jest jednorodny i izotropowy. Pozwala to wprowadzić jeden uniwersalny czas kosmologiczny dla całego Wszechświata. O przestrzeniach odpowiadających ustalonym chwilom tego kosmologicznego czasu zakłada się, że mają zerową krzywiznę, czyli obowiązuje w nich zwykła geometria euklidesowa. Na ile słusne jest przyjmowanie tych wszystkich upraszczających założeń, mamy nadzieję dowiedzieć się z przyszłych coraz dokładniejszych obserwacji. Być może kiedyś będziemy mogli używać bardziej skomplikowanych modeli. Na razie jednak nasz sposób modelowania Wszechświata ma bardzo wiele wspólnego z modelowaniem mrówek chodzących po rozciągającej się nici.

Klub 44 M

$$\sqrt{\sum 4!} = 44$$

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2023

Regulamin Ligii znajduje się na naszej stronie: deltami.edu.pl

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
744 ($WT = 2,7$), 745 ($WT = 3,85$)
z numeru 10/2022

Paweł Perkowski Ożarów Maz. 4–38,33
Jan Zambrzycki Białystok 3–36,74
Jacek Konieczny Poznań 33,42
Marian Łupieżowiec Gliwice 2–33,14

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
845 ($WT = 2,41$) i 846 ($WT = 1,17$)
z numeru 9/2022

Stanisław Bednarek	Łódź	43,77
Tomasz Wietecha	Tarnów	42,81
Mikołaj Pater	Opole	41,88
Krzysztof Zygan	Lublin	41,84
Paweł Najman	Kraków	39,93
Janusz Olszewski	Warszawa	38,46
Marcin Kasperski	Warszawa	37,65
Norbert Porwol	Essen	37,50
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Radosław Kujawa	Wrocław	35,83

Wielkie zagęszczenie tuż przed linią mety!

Przedmiotem dociekań są trójki wierzchołków, w których dokładnie jedna para jest połączona krawędzią lub są dokładnie dwie takie pary. Niech t będzie liczbą trójków o tej własności. Zadanie Marcina to wyznaczenie najmniejszej możliwej wartości q przy ograniczeniu:

$$(2) \quad t \geq \frac{3}{4} \binom{n}{3}.$$

Każda taka trójka (nieuporządkowana) wyznacza dokładnie dwie uporządkowane trójki numerków (i, j, k) takie, że ij jest krawędzią grafu, zaś ik nie jest (to kluczowe spostrzeżenie). I na odwrót: każda uporządkowana trójka (i, j, k) o tych własnościach jest – po odrzuceniu uporządkowania – jedną z „trójkąt Marcina”. Dla ustalonego i liczba uporządkowanych par (j, k) , pasujących do tego schematu, wynosi $k_i(n - 1 - k_i)$. To pozwala na zliczenie wszystkich takich (nieuporządkowanych) trójków:

$$(3) \quad t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i(n - 1 - k_i) = (n - 1)q - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i^2.$$

Zestawienie zależności (3), (1), (2) daje nierówność:

$$(n - 1)q - \frac{2}{n} q^2 \geq \frac{3}{4} \binom{n}{3}.$$

Stąd:

$$(4) \quad q^2 - \frac{n(n-1)}{2} q + \frac{n^2(n-1)(n-2)}{16} \leq 0.$$

Pierwiastkami tego trójmianu kwadratowego są liczby $\frac{n}{4}(n-1 \pm \sqrt{n-1})$. Zatem spełnienie warunku (2) (więc i (4)) pociąga dolne oszacowanie:

$$(5) \quad q \geq \frac{n}{4}(n-1-\sqrt{n-1}).$$

Zadania z matematyki nr 859, 860

Redaguje Marcin E. KUCZMA

859. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geq 2$ wyznaczyć liczbę słów długości n , tworzonych z symboli A, B i mających następującą własność: w każdym spójnym odcinku słowa liczba wystąpień symbolu A różni się od liczby wystąpień symbolu B co najwyżej o 2.

860. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(xf(y)) = xf(y) + yf(x) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 860 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązań zadań z numeru 12/2022

Przypominamy treść zadań:

851. Marcin urządza spotkanie towarzyskie. Zamierza zaprosić 50 gości z szerokiego grona osób, w którym niektórzy znają się wzajemnie, inni nie. Marcin uważa trójkę ludzi za atrakcyjną towarzysko, gdy jest w niej jakaś para znajomych, a także jakaś para nieznajomych. Ma chęć, by ten „warunek atrakcyjności” spełniało co najmniej 75% spośród wszystkich $\binom{50}{3}$ trójk gości. Jaka jest najmniejsza liczba par znajomych (w owej pięćdziesiątce), przy której to nietypowe życzenie daje się zrealizować?

852. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$ oraz liczba rzeczywista a , przy czym $a \neq n - 1$. Niech z_1, \dots, z_n będą zespolonymi pierwiastkami wielomianu $z^n - nz + a$. Wykazać, że

$$\frac{1}{z_1 - 1} + \dots + \frac{1}{z_n - 1} = 0.$$

851. To oczywiście graf prosty o wierzchołkach $1, \dots, n$ (tu $n = 50$). Gdy z wierzchołka i wychodzi k_i krawędzi ($i = 1, \dots, n$), łączna liczba krawędzi wynosi $q = \frac{1}{2} \sum k_i$; stąd:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n k_i^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 = \frac{4}{n} q^2$$

(średnia kwadratowa i arytmetyczna).

Uzyskanie równości w (5) wymaga, by zachodziła równość w relacji (1), co ma miejsce, gdy $k_1 = \dots = k_n$. Dla $n = 50$ oszacowanie (5) przybiera postać $q \geq 525$ i staje się równością, gdy wspólna wartość stopni k_i wynosi $2q_{\min}/50 = 21$. Tylko czy taki graf istnieje?

Przykładowa realizacja: w grafie o wierzchołkach $1, \dots, 50$ przyjmijmy, że:

$$ij \text{ jest krawędzią} \iff \begin{cases} i, j \leq 28 \\ i \not\equiv j \pmod{4} \end{cases} \text{ lub } [i, j > 28].$$

Tu każdy wierzchołek o numerze ≤ 28 łączy się z pozostałymi 27 wierzchołkami o numerach ≤ 28 , z wyjątkiem sześciu; zaś wierzchołki o numerach > 28 tworzą klikę liczącą 22. Tak więc każdy wierzchołek ma stopień 21 (i $q = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 21 = 525$).

852. Oznaczmy: $w_j = 1/(z_j - 1)$ dla $j = 1, \dots, n$.

Ponieważ $a \neq n - 1$, liczba 1 nie jest pierwiastkiem wielomianu $P_n(z) = z^n - nz + a$, dzięki czemu liczby w_j są dobrze określone; należy wykazać, że ich suma jest równa zeru. Skoro $z_j = (w_j + 1)/w_j$, liczby w_1, \dots, w_n spełniają równanie $P_n((w+1)/w) = 0$, czyli (po pomnożeniu przez w^n) – równanie:

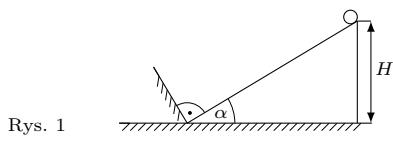
$$Q_n(w) = (w+1)^n - n(w+1)w^{n-1} + aw^n = 0.$$

Q_n jest wielomianem stopnia n , bowiem współczynnik przy w^n wynosi $1 - n + a \neq 0$. Liczby w_1, \dots, w_n są wszystkimi jego pierwiastkami. Ich suma, pomnożona przez $(1 - n + a)$, jest równa współczynnikowi przy w^{n-1} (w wielomianie Q_n); ten zaś współczynnik jest równy零, co dowodzi tezy zadania.

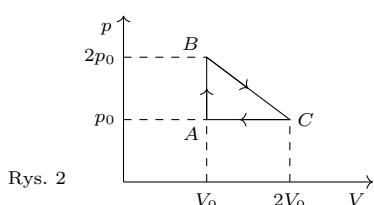
Klub 44 F



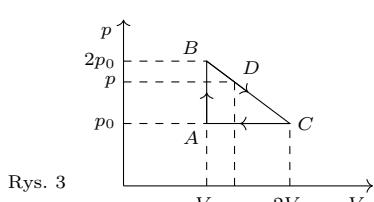
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2023



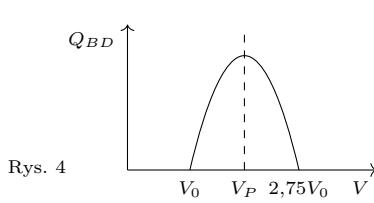
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

przez siłę tarcia $T = \mu mg \cos \alpha$, możemy napisać:

$$mr^2\omega = Trt_1, \quad \text{stąd } t_1 = v/\mu g \cos \alpha.$$

Czas t_2 , po którym obręcz wznieśnie się na maksymalną wysokość przy niezmienionym kierunku obrotu, wynika z równania:

$$mv = (mg \sin \alpha + T)t_2 \text{ i wynosi } t_2 = v/g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Ponieważ $t_2 < t_1$, w chwili osiągnięcia maksymalnej wysokości obręcz nadal będzie obracać się w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara. Droga przebyta przez obręcz do chwili osiągnięcia maksymalnej wysokości wynosi $l = vt_2/2$, a szukana maksymalna wysokość:

$$h = l \sin \alpha = H \sin \alpha / 2 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

749. Sprawność cyklu dana jest wzorem $\eta = W/Q$, gdzie $W = (p_0 V_0)/2$ jest pracą uzyskaną w cyklu, a Q to ilość ciepła pobrana przez gaz. Aby znaleźć Q , rozważmy kolejne odcinki cyklu. Na izochorze AB gaz pobiera ciepło:

$$(1) \quad Q_{AB} = nc_V(T_B - T_A) = 3p_0 V_0 / 2,$$

gdzie $c_V = 3R/2$ jest molowym ciepłem właściwym przy stałej objętości, a n oznacza liczbę moli. Na izobarze CA temperatura cały czas maleje, zatem gaz oddaje ciepło. Obliczymy teraz ciepło przekazane na odcinku BD, gdzie D jest dowolnym punktem wewnętrz BC (rys. 3), któremu odpowiada objętość V i ciśnienie $p = p_0(3V_0 - V)/V_0$:

$$(2) \quad Q_{BD} = \Delta U_{BD} + W_{BD},$$

Zadania z fizyki nr 756, 757

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

756. Komora Wilsona znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 10^{-2}$ T. Cząstka naładowana wpada do tej komory z prędkością prostopadłą do linii pola \vec{B} . Stosunek ładunku do masy cząstki wynosi $\alpha = q/m = 10^8$ C/kg. Po obrocie wektora prędkości o kąt $\pi/2$ względna zmiana promienia krzywizny toru cząstki wynosi $\varepsilon = 5\%$. W tym momencie pole magnetyczne zostaje wyłączone i cząstka do chwili zatrzymania przebywa jeszcze drogę $L = 30$ cm. Siła oporu podczas ruchu cząstki ma wartość proporcjonalną do jej prędkości. Znaleźć prędkość, z jaką cząstka wpadła do komory.

757. Ciało sztywne porusza się ruchem postępowym po szorstkiej powierzchni poziomej. W chwili $t_0 = 0$, gdy prędkość ciała wynosi v_0 , zaczyna działać na nie siła $F(t)$ rosnąca w czasie, działająca przez cały czas wzdłuż prostej przechodzącej przez środek masy ciała, o zwrocie zgodnym z wektorem v_0 . Po czasie t prędkość ciała ma wartość v_t , przy czym $v_t = 5$ m/s, gdy $v_0 = 1$ m/s, i $v_t = 13$ m/s, gdy $v_0 = 10$ m/s. Znaleźć zależność $v_t = f(v_0)$ dla dowolnych v_0 .

Rozwiązań zadań z numeru 12/2022

Przypominamy treść zadań:

748. Obręcz o promieniu r stacza się bez poślizgu z wysokością H ($r \ll H$) po równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem α i zderza się sprężyście z gładką ścianką, prostopadłą do powierzchni równi (rys. 1). Na jaką wysokość wznieśnie się obręcz po zderzeniu, jeśli współczynnik tarcia poślizgowego między obręczą a równią wynosi μ ?

749. Jednoatomowy gaz doskonaly podlega przemianom A-B-C-A przedstawionym na rysunku 2. Oblicz sprawność cyklu.

748. Energia kinetyczna obręczy o masie m tuż przed zderzeniem ze ścianką wynosi $mv^2/2$, gdzie v jest prędkością ruchu postępowego. Uwzględniając, że $r \ll H$, otrzymujemy z zasady zachowania energii:

$$mv^2 = mgH, \quad \text{stąd } v = \sqrt{gH}.$$

Po sprężystym zderzeniu z gładką ścianką ruch obręczy w góre równi będzie złożeniem ruchu postępowego z prędkością początkową v i ruchu obrotowego w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara z początkową prędkością kątową $\omega = v/r$. Oznaczając przez t_1 czas potrzebny do zatrzymania ruchu obrotowego

gdzie ΔU_{BD} jest zmianą energii wewnętrznej, a W_{BD} pracę wykonaną przez gaz.

$$(3) \quad \Delta U_{BD} = 3(pV - 2p_0 V_0)/2,$$

$$(4) \quad W_{BD} = (2p_0 + p)(V - V_0)/2.$$

Po podstawieniu (3) i (4) do (2) otrzymujemy wyrażenie na ciepło:

$$(5) \quad Q_{BD} = -(2p_0 V^2)/V_0 + 15(p_0 V)/2 - 11p_0 V_0/2,$$

które jest funkcją kwadratową objętości. Wykresem tej funkcji jest część paraboli przedstawionej na rysunku 4, która przecina oś objętości w punktach:

$$V_1 = V_0 \text{ i } V_2 = 2,75V_0,$$

a jej maksymalnej wartości odpowiada objętość:

$$V_P = (V_1 + V_2)/2 = 15V_0/8.$$

Zatem w procesie BC ciepło jest pobierane na odcinku BP, a na odcinku PC oddawane. Wartość ciepła pobranego na odcinku BP otrzymujemy, podstawiając w (5) $V = V_P$, i wynosi ono:

$$Q_{BP} = 49p_0 V_0/32.$$

Calkowite ciepło pobrane w cyklu:

$$Q = Q_{AB} + Q_{BP} = (97p_0 V_0)/32,$$

szukana sprawność cyklu

$$\eta = 16/97 = 16,5\%.$$

Prosto z nieba: Mamy nowe najodleglejsze galaktyki

Przed tzw. epoką rejonizacji Wszechświat wypełniony był głównie neutralnymi atomami (w większości wodoru). Uważa się, że silne promieniowanie młodych gwiazd powstających w pierwszych galaktykach zjonizowało te atomy, przez co stały się przezroczyste dla promieniowania ultrafioletowego.

O GN-z11 pisaliśmy wielokrotnie na łamach *Delta*, między innymi w numerach Δ_8^8 , Δ_{16}^{12} , Δ_{22}^{11} .

JWST Advanced Deep Extragalactic Survey (JADES) to przegląd skupiony na obszarze znajdującym się wokół Główkowego Pola Kosmicznego Teleskopu Hubble'a. Naukowcy wykorzystali instrument NIRCam do obserwacji tego pola w dwudzięciu różnych zakresach dлигости fal podczerwonych.

Przeprowadzili dodatkowe obserwacje (nie omawiane tutaj) za pomocą instrumentu NIRSpec, aby zmierzyć przesunięcie ku czerwieni wszystkich czterech galaktyk i zbadać właściwości gazu i gwiazd w tych galaktykach.

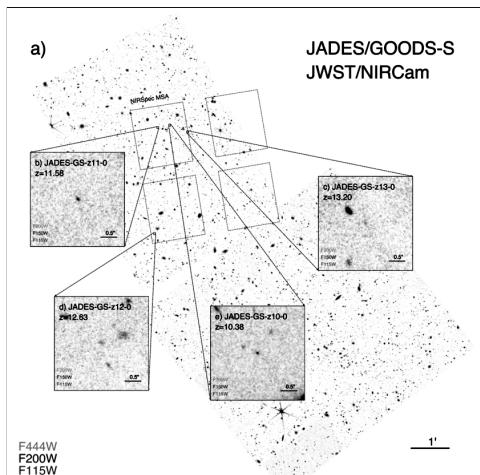
Artykuł ten pisany był w lutym 2023 r., możliwe, że w momencie, w którym go czytasz, Drogi Czytelniku, mamy już nowego rekordzistę.

Każdy Czytelnik *Delta* zapewne już wie, że galaktyki to duże struktury zbudowane z gwiazd, pyłu, gazu i ciemnej materii. W naszym współczesnym Wszechświecie występują w najróżniejszych kształtach i rozmiarach. Nadal jednak nie wiemy, kiedy dokładnie powstały pierwsze galaktyki, a jest to informacja bardzo istotna: poznanie własności najwcześniejszych galaktyk pozwoli nam uzupełnić wiedzę o tym, jak zmieniał się Wszechświat. W szczególności uważa się, że pierwsze galaktyki zjonizowały międzygalaktyczny wodór w początkowych miliardach lat istnienia kosmosu. Jednak nie wiemy, kiedy dokładnie ten proces się rozpoczął i jak długo trwał. Niewiedza ta motywuje nas do poszukiwania coraz odleglejszych galaktyk.

Od roku 2015 do 2022 tytuł najbardziej odległej galaktyki, jaką udało nam się zaobserwować, dzierżyła GN-z11. Znajdowała się w okolicach przesunięcia ku czerwieni $z = 10,957$, co oznacza, że światło z tej galaktyki zostało wyemitowane 13 miliardów lat temu.

Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba (JWST) z łatwością pobił ten rekord już w pierwszej turze obserwacji. W ramach przeglądu JWST Advanced Deep Extragalactic Survey (JADES) znaleziono nie jedną, ale aż cztery galaktyki – o przesunięciu ku czerwieni większym niż 10. Rysunek na marginesie pokazuje ich zdjęcia. Najbardziej odległa (a więc najwcześniej uformowana) jest galaktyka JADES-GS-z13-0 o przesunięciu ku czerwieni $z = 13,20$ (!). Obserwujemy ją więc taką, jaka była 200 milionów lat po Wielkim Wybuchu (około 13,6 miliarda lat temu).

Wszystkie te odległe galaktyki zostały zaobserwowane dzięki kamerze The Near Infrared Camera (NIRCam), a pomiary odległości potwierdzono spektroskopowo za pomocą instrumentu Near-Infrared Spectrograph (NIRSpec). Oba znajdujące się na pokładzie JWST instrumenty potwierdzają bezprecedensowe możliwości tego teleskopu. Mając pewny pomiar przesunięcia ku czerwieni, astronomowie mogli określić fizyczne właściwości naszej nowej najodleglejszej galaktyki.



Wyselekcjonowane kandydatki na najodleglejsze galaktyki potwierdzone w ramach programu JADES. Rysunek z publikacji arXiv:2212.04480

W szczególności stwierdzono, że JADES-GS-z13-0 tworzy gwiazdy w niezwykle szybkim tempie (dwudziestokrotnie szybciej niż Droga Mleczna), mimo że jej masa gwiazdowa jest porównywalna do masy Małego Obłoku Magellana (małej galaktyki w naszej grupie lokalnej). Ponadto gwiazdy w tej galaktyce są młode – mają od 16 do 71 milionów lat. Przy tak szybkim tempie tworzenia się gwiazd ponad połowa fotonów produkowanych w tej galaktyce ostatecznie ucieka w przestrzeń międzygalaktyczną. JADES-GS-z13-0 brała więc aktywny udział w kosmicznym procesie jonizacji.

Na razie to niestety wszystko, co wiemy o tej galaktyce. Jednak jest bardzo możliwe, że nie utrzyma ona tytułu najodleglejszej galaktyki przez długi czas. W ramach JADES zaplanowano bowiem aż 750 godzin obserwacji. Możemy się więc spodziewać kolejnych rekordowych odkryć!

Anna DURKALEC

Departament Badań Podstawowych (BP4),
Zakład Astrofizyki, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Na podstawie artykułu: B. E. Robertson, S. Tacchella, B. D. Johnson, et al. *Discovery and properties of the earliest galaxies with confirmed distances*, arXiv:2212.04480.

Niebo w kwietniu

Kwiecień jest kolejnym miesiącem, w którym Słońce wyraźnie wspina się po ekliptyce, zwiększąc swoją deklinację o 10° w ciągu 30 dni. Tym samym, w centralnej Polsce, długość dnia wydłuża się od niecałych 13 godzin do prawie 15. Czwarty miesiąc roku Słońce zaczyna w środkowej części gwiazdozbioru Ryb, który jest dość dużym gwiazdozbiorzem, i Słońce w okresie marca i kwietnia spędza w nim aż 38 dni. Tyle samo czasu nasza Gwiazda Dzienna spędza w Lwie pod koniec lata, a tylko

w gwiazdozbiorze Panny przebywa dłużej. W trzeciej dekadzie kwietnia natomiast Słońce przechodzi do Barana, gdzie gości do połowy maja.

Początek miesiąca wyróżni się dobrą widocznością Merkurego na niebie wieczornym. Pierwsza planeta od Słońca 11 kwietnia osiągnie swoją maksymalną elongację wschodnią. Niestety w marcu Merkury przeszedł przez perihelium swojej orbity, stąd jest to mała elongacja, wynosząca nieco ponad 19° . Mimo to planeta w pierwszej

połowie miesiąca jest łatwa do zidentyfikowania: widoczna jest o zmierzchu nisko nad zachodnią częścią nieboskłonu, ponieważ ekiptyka tworzy duży kąt z widnokrekiem, a dodatkowo Merkury przebywa na północ od niej. W tym rejonie nieba o tej porze doby nie ma innego obiektu o porównywalnej jasności, nie można zatem pomylić Merkurego z czymś innym.

W pierwszym okresie kwietnia Merkury godzinę po zachodzie Słońca zajmie pozycję na wysokości 4° , by w okolicach maksymalnej elongacji zwiększyć ją do 8° . Planeta pozostanie widoczna do trzeciej dekady kwietnia. Niestety, szczególnie po **15** dniu miesiąca Merkury stanie się trudny do dostrzeżenia bez lornetki, gdyż przez cały okres widoczności jego jasność spada od -1^m 1 kwietnia do $+2,2^m$ **21** kwietnia. W tym czasie jego tarcza urośnie z $6''$ do $10''$, faza zaś spadnie z 77% do 12%.

Na pożegnanie Merkury spotka się z powracającym na wieczorne niebo Księżycem. W nocy **21** kwietnia, około 36 godzin po nowiu, Srebrny Glob w fazie zaledwie 3% pokaże się 5° od planety.

Do odszukania Merkurego bardzo dobrze nadaje się znacznie lepiej widoczna planeta **Wenus**, która o tej samej porze wzrosi się na wysokość przekraczającą 20° . Wenus zacznie miesiąc w gwiazdozbiorze Barana, ale jeszcze w pierwszej dekadzie kwietnia zagości w Byku, gdzie pozostanie do końca miesiąca. Po drodze, **11** kwietnia, planeta przejdzie $2,5^\circ$ na południe od Plejad, 8 dni później minie w odległości ponad 7° na północ Aldebarana, najjaśniejszą gwiazdę Byka, by na koniec miesiąca dotrzeć do jego rogów. Ostatniej nocy kwietnia Wenus zbliży się na 3° do El Nath, czyli północnego rogu tego zodiakalnego zwierzęcia i jednocześnie drugiej co do jasności gwiazdy konstelacji. W tym czasie jasność planety zwiększy się do $-4,1^m$, a jej tarcza urośnie do $17''$, zmniejszając przy tym fazę do 66%. Księzyc w fazie 14% przejdzie w odległości $2,5^\circ$ od Wenus **23** kwietnia.

Po spotkaniu z Wenus Srebrny Glob podąży dalej i w dniach **25** i **26** kwietnia spotka się z planetą **Mars**, zbliżając się doń na mniej więcej 5° i prezentując tarczę w fazie, odpowiednio, 30% i 40%. Drugiego z tych dni Księzyc zbliży się też na 2° do Polluksa w Bliźniętach, na których tle Czerwona Planeta w kwietniu pokona jakieś 15° . Mars zacznie miesiąc $1,5^\circ$ od jasnej gromady otwartej M35, a **14** dnia miesiąca przejdzie zaledwie $9'$ od Mebsuty, jednej z jaśniejszych gwiazd konstelacji ($+3^m$), oznaczanej na mapach nieba grecką literą ε . Ostatniej nocy kwietnia Mars w odległości 2° minie świecącą z jasnością obserwowaną $+3,5^m$ gwiazdę Wasat (δ Gem) w centrum Bliźniąt.

Przed końcem kwietnia Księzyc przejdzie jeszcze przez I kwadrę **27** dnia miesiąca, wędrując wtedy przez gwiazdozbiór Raka, 4° na północ od jasnej gromady otwartej gwiazd M44. Dwa dni później zaś, z tarczą oświetloną w 68%, przejdzie niecałe 4° na północ od Regulusa w Lwie.

Srebrny Glob zdominuje niebo także w pierwszej połowie kwietnia, zaczynając miesiąc również od spotkania z Regulusem. Wieczorem **2** kwietnia, przy znacznie większej fazie – 89%, Księzyc pokaże się 5° od najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Pełnia Księzycza przypada **6** kwietnia rano naszego czasu, a tego samego dnia

wieczorem Księzyc wjezdzie $2,5^\circ$ od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny. Kolejną noc naturalny satelita Ziemi spędzi w Wadze, jakieś 6° na zachód od Zuben Elgenubi, drugiej co do jasności gwiazdy konstelacji.

Warto na Księzyc zwrócić uwagę w nocy z **9** na **10** kwietnia. Tej nocy pokaże się on nad widnokreiem około północy, wschodząc na tle gwiazdozbioru Skorpiona i prawie na środku przecinając linię łączącą Antaresa z Dschubbą, czyli dwie najjaśniejsze, dobrze widoczne z Polski gwiazdy tej konstelacji. Tej nocy faza księżycoowej tarczy spadnie poniżej 85%, a nad samym ranem zakryje ona świecącą jaśniej od 3^m gwiazdę Al Niyat (σ Sco). Zjawisko zajdzie na jaśniejącym już niestety niebie. Zakrycie zacznie się około godziny 5, skończy natomiast godzinę później, razem ze wschodem Słońca.

Srebrny Glob **12** kwietnia w fazie 65% wjezdzie w towarzystwie gwiazdy Kaus Meridianalis (δ Sgr), jednej z jaśniejszych gwiazd Strzelca, mijając ją w odległości mniejszej niż 1° , by kolejnej doby przejść przez ostatnią kwadrę. I to jest ostatnie ważne odnotowanie spotkanie Księzycza z innym ciałem niebieskim w kwietniu. W następnych dniach podąży on ku nowiu, przez który przejdzie **20** dnia miesiąca, ale ze względu na to, że przebywa wtedy głęboko pod ekiptyką, pokaże się na niebie niewiele przed Słońcem i zginie w zorzy porannej.

Sam nów jest ciekawy o tyle, że dojdzie wtedy do hybrydowego zaćmienia Słońca, widocznego na pograniczu Oceanów Indyjskiego i Spokojnego na północny zachód od Australii i w Indonezji. Na początku i na końcu zjawiska Księzyc znajdzie się za daleko od Ziemi, aby zakryć całą tarczę słoneczną, dlatego dojdzie wtedy do zaćmienia obrączkowego. Ze względu jednak na krzywiznę naszej planety jej powierzchnia w fazie maksymalnej zjawiska znajdzie się kilka tysięcy kilometrów bliżej Księzycza, i to wystarczy, aby zaszło zaćmienie całkowite, które potrwa co najwyżej 76 s.

Nadal bardzo dobrze widoczna jest planeta karłowata (1) Ceres, która pod koniec marca przeszła przez opozycję względem Słońca. W kwietniu Ceres pokona ruchem wstecznym ponad 4° na tle gwiazdozbioru Warkocza Bereniki, zaczynając miesiąc w połowie linii łączącej gwiazdy 5. wielkości 6 i 11 Com. Planetoida minie **11** kwietnia w odległości $0,5^\circ$ świecącą słabiej od 6^m gwiazdę 3 Com, by skończyć miesiąc na pograniczu Warkocza Bereniki i Lwa, mniej więcej 1° na wschód od gwiazdy 95 Leo. Ceres góruje przed północą na wysokości około 55° . Do końca miesiąca blask Ceres osłabnie z $+7,2$ do $+7,8^m$.

W kwietniu, jak co roku, promienią meteory ze znanego roju Lirydów, którego radiant tak naprawdę jest w sąsiednim gwiazdozbiorze Herkulesa, około 8° na południowy zachód od Wagi. Lirydy można obserwować od **14** do **30** kwietnia z maksimum **23** kwietnia. Dobrze się zatem składa, ponieważ w nocy maksimum Księzyc zniknie za widnokreiem jeszcze przed północą i nie przeszkodzi zbytnio w obserwacji Lirydów. Warunki obserwacyjne zatem będą bardzo dobre. O godzinie 3 radiant roju wznieśnie się na wysokość ponad 60° . Można się wtedy spodziewać około 23 zjawisk na godzinę.

Ariel MAJCHER

Z impetem w głąb

W fizyce cząstek elementarnych wiele badań doświadczalnych prowadzonych jest głęboko pod powierzchnią Ziemi. Na wiele pytań badawczych można bowiem odpowiedzieć jedynie za pomocą prób detekcji bardzo rzadkich procesów. Przykładami takich reakcji mogą być poszukiwania oddziaływania cząstek ciemnej materii ze zwykłą materią lub wykrywanie neutrin podlegających oscylacjom. Promieniowanie kosmiczne, w szczególności miony produkowane w górnych warstwach atmosfery, skutecznie przesłaniały takie procesy, gdyby detektory nie były chronione grubą warstwą skał. Całą tę branżę eksperymentalną określa się czasem, nieco przekornie, mianem fizyki podziemnej.

W przypadku badań sztucznie wytwarzanych neutrin lokalizacja podziemnych laboratoriów musi spełniać jeszcze jeden warunek. Odległość detektorów od źródła wiązki neutrin musi być tak dobrana, by można było zaobserwować efekty oscylacji tych cząstek zachodzące na dużych – kilkusetkilometrowych – odległościach.

Podziemne laboratoria badawcze fizyki cząstek znajdują się w kilku miejscach na świecie. W Europie najbardziej znany jest kompleks doświadczalny Gran Sasso we Włoszech, nazwany od góry, we wnętrzu której się znajduje.

W Ameryce Północnej ważnym miejscem na mapie takich eksperymentów jest laboratorium SNOLAB, znajdujące się ponad dwa kilometry pod ziemią w kopalni niklu w Sudbury w kanadyjskiej prowincji Ontario. W japońskiej kopalni Mozumi, we wnętrzu góry Ikeno, znajduje się zaś detektor Super-Kamiokande.

Niewiele osób wie, że od prawie dwudziestu lat prowadzone są prace, dzięki którym taki podziemny detektor neutrin mógłby znaleźć się także w Polsce. Nasz kraj znajduje się bowiem we właściwej odległości od wytwarzanej w CERN-ie wiązki tych cząstek, nie grożą nam trzęsienia ziemi, a ponadto mamy duże i preżne środowisko fizyków cząstek elementarnych.

Na początku XXI wieku dzięki staraniom wielu osób, w szczególności Agnieszki Zalewskiej, przewodniczącej Rady CERN w latach 2010–2012, rozpoczęły się konkretne działania mające na celu stworzenie centrum europejskiego programu badań doświadczalnych nad neutrinami właśnie w naszym kraju.

Jako lokalizację laboratorium wybrano w 2008 roku kopalnię miedzi Polkowice–Sieroszowice należącą do KGHM. Projekt nazwano SUNLab, od Sieroszowice Underground Neutrino Laboratory, i przystąpiono do prac koncepcyjnych oraz badań wstępnych.

Planowane laboratorium wymagało spełnienia wielu warunków. Jednym z najistotniejszych była możliwość wydrążenia w skale wielkiej komory, mogącej pomieścić ponadstutonowy detektor wraz z całym oprzyrządowaniem w warunkach niskiej naturalnej radioaktywności. W rozważanej lokalizacji odpowiednie warunki spełniała duża warstwa anhydrytu, która dodatkowo była dość łatwo dostępna dzięki istniejącym korytarzom kopalni. Wprawdzie znajdująca się tuż obok warstwa soli zapewniałaby jeszcze niższy poziom promieniowania tła, ale ze względu na to, że sól jest dość miękka, niemożliwe byłoby uzyskanie odpowiednio dużej przestrzeni do doświadczeń.

Początkowe badania wypadły pomyślnie i w 2011 roku projekt został wpisany na tzw. mapę drogową infrastruktury. Pod tą urzędniczo brzmiącą nazwą kryje się możliwość pozyskiwania środków publicznych na rozwój projektu, w tym kupno odpowiednich

urządzeń – pod warunkiem uzyskania dofinansowania w konkretnych konkursach. W 2018 roku na mapę wpisano kolejną, zmodyfikowaną wersję projektu, ale już rok później zmieniły się plany dotyczące przyszłości kopalni, i wyznaczone uprzednio miejsce na komorę doświadczalną nie było już dostępne do zagospodarowania. Naukowcy nie pozostawali jednak bezczynni i w 2021 roku przedstawili kolejny projekt budowy w Polsce podziemnego laboratorium, tym razem w kontekście prowadzonych przez europejską społeczność badaczy poszukiwań odpowiedniej lokalizacji w rejonie Morza Bałtyckiego. Mniej więcej rok temu gotowy projekt został zaprezentowany polskiemu rządowi.

Jasne jest, że to kosztowny pomysł, konkurencja międzynarodowa duża, a relacje naszego kraju z resztą Europy są ostatnimi laty napięte. Bez prób nie ma jednak nadziei na sukces, a gdyby się jednak udało, byłoby to osiągnięcie przyjmiewające tworzenie kolejnych akademii ku czci czy programy dofinansowania bardzo poczatkujących startupów. Trzymam kciuki!

Krzysztof TURZYŃSKI



Średnie Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

W arsenale każdego szanującego się olimpijczyka powinny znajdować się następujące nierówności, prawdziwe dla liczb dodatnich x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} &\stackrel{(1)}{\geq} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \stackrel{(2)}{\geq} \\ &\stackrel{(2)}{\geq} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \stackrel{(3)}{\geq} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}. \end{aligned}$$

Wartości wyrażeń nazywamy kolejno (od lewej do prawej) średnią: kwadratową, arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną. Będziemy je krótko oznaczać odpowiednio: K, A, G, H , o ile wiadomo, których liczb średnią mamy na myśli.

Aby wykazać powyższe nierówności, posłużymy się twierdzeniami z poprzedniego kącika (*Wszystko w porządku, Δ_{23}^3*): nierównością Czebyszowa oraz twierdzeniem o ciągach przeciwnie uporządkowanych.

(1) Ciąg (x) jest zgodny monotonicznie z samym sobą, więc z nierówności Czebyszowej otrzymujemy $\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^2$, co po obustronnym spierwiastkowaniu daje $K \geq A$.

(2) Najpierw wykażemy, że jeśli iloczyn n liczb dodatnich jest równy 1, to ich suma wynosi co najmniej n . Możemy oznaczyć te liczby przez $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_n}{a_1}$ dla pewnych $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Ciągi (a_1, a_2, \dots, a_n) i $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n})$ są uporządkowane przeciwnie, więc

$$\begin{aligned} n = a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2 \cdot \frac{1}{a_2} + \dots + a_n \cdot \frac{1}{a_n} &\leqslant \\ &\leqslant a_1 \cdot \frac{1}{a_2} + a_2 \cdot \frac{1}{a_3} + \dots + a_n \cdot \frac{1}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}. \end{aligned}$$

Możemy już przejść do dowodu nierówności $A \geq G$. Dla liczb dodatnich x_1, x_2, \dots, x_n mamy $\frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdots \frac{x_n}{G} = 1$, więc $\frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + \dots + \frac{x_n}{G} \geq n$, co po obustronnym pomnożeniu przez $\frac{G}{n}$ kończy dowód.

(3) Gdy w nierówności $A \geq G$ zastąpimy wszystkie liczby ich odwrotnościami, to otrzymamy $\frac{1}{H} \geq \frac{1}{G}$, czyli $G \geq H$.

Zadania

1. Udowodnić, że $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ dla $a, b, c > 0$.

2. Wykazać, że $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} > 1$ dla n całkowitych dodatnich.

3. Wykazać, że $(a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a})(a\sqrt{c} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b}) \geq 9abc$ dla $a, b, c > 0$.

4. Dowieść, że dla n całkowitych dodatnich oraz $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ i $y_1, y_2, \dots, y_n > 0$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} + \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n} \leq \sqrt[n]{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \dots (x_n + y_n)}$$

(nierówność Mahlera).

5. Wykazać, że $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$ dla a, b, c będących długościami boków trójkąta.

6. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a+b+c=1$. Udowodnić, że $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq 2$.

7. Niech $a, b, c > 0$ oraz $a+b+c=1$. Dowieść, że $\sqrt{a-bc} + \sqrt{b-ca} + \sqrt{c-ab} \leq \sqrt{2}$, o ile liczby pod pierwiastkami są nieujemne.

8. Dowieść, że $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > n(\sqrt[n]{n} - 1)$ dla naturalnych $n \geq 2$.

9. Wykazać, że $(1+x)^n \geq 1+nx$ dla naturalnych n oraz rzeczywistych $x > -\frac{1}{n}$ (nierówność Bernoulliego).

567 880 76 296 760 808 279 714 766 622 664 626 339 550 36 96 357 699 180 802 725 970 500 851 579
132 657 460 741 963 169 48 980 15 213 126 264 961 378 565 904 394 968 994 341 49 824 405 845 335
18 438 435 848 174 144 249 21 117 327 718 763 390 164 830 535 354 338 27 694 112 721 627 668 654
672 46 403 900 501 123 938 160 586 981 698 663 323 291 475 903 849 262 428 280 640 642 494 706 920
282 415 345 792 528 590 753 471 870 424 508 890 319 636 90 284 362 217 340 147 476 609 615 154 436
321 882 553 552 55 400 404 932 146 561 77 703 426 168 832 756 560 780 225 372 869 898 942 125 490
841 777 998 89 546 614 148 684 320 367 352 658 251 606 482 433 459 348 862 628 114 149 486 33 765
820 865 962 47 868 583 889 485 297 641 288 670 787 152 1 349 793 548 837 141 950 439 750 351 292
742 186 558 449 110 746 171 289 819 43 111 314 997 943 767 919 704 266 884 516 785 401 752 542 974
652 908 864 103 307 925 326 209 317 547 425 350 773 477 717 941 857 826 81 520 829 139 384 40 278
182 416 662 457 607 56 208 198 683 277 688 504 877 255 885 929 257 342 816 867 101 769 630 585 95
918 493 308 131 102 557 774 563 843 661 32 935 337 874 598 241 665 761 484 691 188 709 566 689 866
985 812 187 3 221 163 73 479 847 59 189 534 233 242 921 463 214 461 113 883 343 263 298 386 250
513 260 472 503 724 596 523 355 430 797 956 783 239 512 669 983 910 158 587 944 478 541 603 153 489
247 162 78 977 744 707 584 602 605 379 434 51 191 481 135 347 356 370 54 206 775 2 91 66 815
695 465 616 223 629 671 406 633 108 353 930 736 331 294 794 653 16 844 393 608 879 599 212 946 759
34 447 507 991 922 287 940 817 840 29 304 128 313 544 749 97 825 731 256 253 597 673 637 4 429
648 437 118 859 105 407 995 515 276 739 805 987 311 924 422 421 834 441 100 754 895 389 454 60 42
316 411 363 11 492 604 979 850 822 823 398 392 283 651 789 173 818 618 917 734 442 719 556 728 893
999 275 936 569 172 136 858 226 130 733 610 318 443 666 235 677 572 64 990 270 184 967 700 205 833
222 952 194 601 914 22 894 872 115 83 388 309 853 581 483 61 905 376 375 861 134 467 94 992 57
301 140 976 197 336 902 368 480 510 383 696 969 373 474 779 509 423 747 39 831 899 193 142 82 621
98 192 855 300 63 473 70 495 332 143 589 155 215 960 116 993 810 246 236 261 580 380 846 635 312
710 678 175 958 65 195 445 414 646 928 170 122 68 243 713 417 75 856 680 62 190 285 224 530 949
828 690 964 497 911 681 329 440 450 45 953 315 6 732 127 814 803 737 624 238 839 185 466 119 720
374 649 735 28 487 12 799 452 781 934 179 44 50 539 631 20 790 395 771 795 227 330 568 502 762
74 518 526 537 293 418 446 957 692 38 37 176 458 99 937 462 927 791 517 705 757 361 716 328 923
72 469 177 391 281 948 π 314 959 591 971 274 686 600 7 913 712 876 986 634 613 639 166 955 514
813 796 549 909 887 369 165 290 620 655 907 804 396 836 727 527 24 776 748 444 167 650 124 675 912
259 951 201 533 71 984 402 196 267 138 521 611 432 594 107 365 926 79 543 412 151 58 93 975 551
667 511 9 145 827 322 888 559 592 708 211 220 988 996 619 133 931 499 448 807 31 842 156 52 916
674 92 303 755 229 693 901 638 835 234 359 204 456 886 881 35 529 571 228 202 863 178 522 104 302
120 346 381 524 643 413 660 219 286 334 13 488 505 788 109 656 687 419 965 989 19 644 306 906 723
915 770 333 519 41 295 299 891 538 764 5 897 358 85 809 786 399 647 873 161 17 371 496 798 782
360 729 972 69 491 711 159 200 525 455 811 679 852 676 23 268 697 743 540 377 199 470 702 344 562
382 252 896 216 577 978 106 150 232 588 271 801 273 939 67 973 88 751 682 745 181 324 555 230 778
10 623 860 564 821 954 645 574 245 237 269 945 625 183 947 573 575 157 84 366 431 305 468 722 30
612 878 87 892 137 800 784 854 966 570 617 554 310 258 593 768 576 659 464 272 53 14 231 385 730
582 532 410 80 397 595 772 408 254 715 409 933 498 506 701 387 364 977 632 758 971 25 838 451 218
86 265 8 244 427 461 47 41 877 691 453 121 240 129 685 353 733 871 761 727 578 531 420 875 210
325 740 738 806 545 726 982 207 203 26 88 377 332 646 786 676 195 153 209 236 854 216 424 945 486
324 177 868 387 755 466 623 567 434 870 95 146 892 441 55 943 825 806 760 873 832 894 119 590 489
900 299 69 626 527 632 699 909 481 801 803 483 925 391 536 495 49 187 921 468 934 286 574 718 551
595 231  475 288 633 235 722 965 602 189 400 395 352 639 543 765 532 264 715 74 882
210 406 156 776 176 732 830 858 818 385 164 612 142 645 325 728 821 427 793 250
874 564 813 922 157 174 113 925 226 375 678 810 920 517 106 648
34 184 262 249 915 652 358 888 362 638 450 700 753 276 795 372 166 72 120 204 721
155 637 411 988 148 178 118 925 226 375 678 810 920 517 106 648
318 788 319 476 408 105 422 905 833 940 412 429 24 65 749 495 98 879 339 784 6
896 453 136 534 1 686 280 125 923 824 975 657 910 165 562 244 878 955 899 930 837
390 816 344 403 650 542 669 122 772 511 512 687 860 876 969 629 425 81 841 764 386 170 162 848 133
292 472 371 538 526 865 724 260 891 322 68 194 501 999 520 906 987 958 465 517 268 338 792 360 444
200 327 573 968 985 428 628 735 116 284 26 285 747 535 902 220 291 432 554 114 460 20 132 380 265

Dla tych, co potrafią
doszczec regularności