

# Delta

MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$   $\pi=3,141592\ldots$

NR 9 (568) 2021

CENA 5,50 zł VAT 8%

MIESIĘCZNIK  
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

Samotne zwierzę  
na Arce Noego  
str. 5



Nakład: 3500 egz.



1-pb-65-10-18 7-3-M1592

## SPIS TREŚCI NUMERU 9 (568)

Pętla na pierwiastki

*Lukasz Rajkowski*

 Zadania

Samotne zwierzę na Arce Noego

*Tomasz Janiszewski*

O błędach pozycji gwiazd i prędkościach cząsteczek gazu

*Alex Schwarzenberg-Czerny*

Jak Leo uratował klasowe wybory

*Tomasz Wąs*

Adonis – świadek nagłej śmierci masywnej, pyłowej Astarte

*Mahmoud Hamed*

Jak się nie pomylić, czyli potęga matematycznego myślenia

Przez wieki z metodą Newtona

*Piotr Krzyżanowski,*

*Grzegorz Łukaszewicz*

Coraz bliżej kota

*Marcin Braun*

 Najstarsze drzewo hodowlane świata

*Magdalena Fikus*

Intuicja matematyczna w Raju?

*Mirosław Lachowicz*

Klub 44

Prosto z nieba: Radioastronomia w natarciu

Niebo we wrześniu

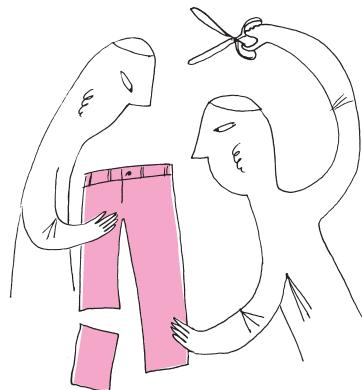
Aktualności

Gęsi i wczesny Wszechświat

 Zabawy na polu

*Bartłomiej Bzdęga*

**W następnym numerze:  
jak podzielić spadek według Talmudu.**



Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

str. 1 **Komitek Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczylo, dr Adam Gregosiewicz,

dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin,

prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz,

dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

str. 11 **Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nacz., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Lukasz Rajkowski – z-ca red. nacz., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sek. red.

str. 14 **Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okrętki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem TeX wykonała Redakcja.

Druk: Drukarnia Greg [www.greg-drukarnia.pl](http://www.greg-drukarnia.pl)

**Prenumerata:**

Garmond Press: [www.garmondpres.pl](http://www.garmondpres.pl)

Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)

RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

str. 22 Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł;  
wcześniejsze egzemplarze 3 zł

str. 24   
**Strona internetowa (w tym  
artykuły archiwalne, linki itd.):**  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)  
Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](http://facebook.com/Delta.czasopismo)

str. 25 Wydawca: Uniwersytet Warszawski

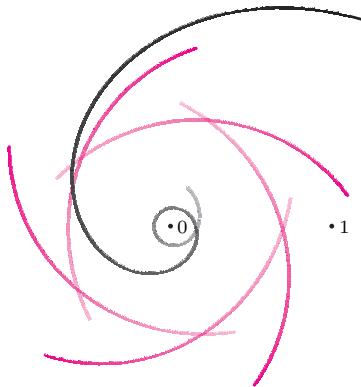
## Pętla na pierwiastki

Łukasz RAJKOWSKI

Jeśli  $a \neq 0$  i  $ax^2 + bx + c = 0$ , to

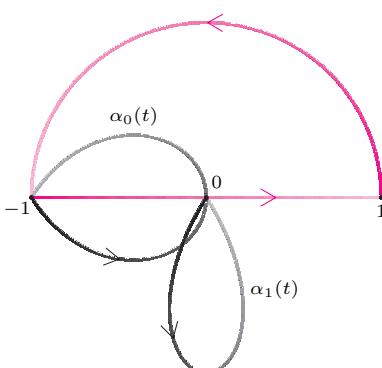
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Aby nie popaść w skrajność, przyjmijmy, że jeśli we wzorze występuje „ten sam” pierwiastek w różnych miejscach, to jego interpretacja jest wszędzie ta sama. Dla przykładu, uznajemy, że formula  $\sqrt{a} + b/\sqrt{a}$  ma dwie interpretacje, nie cztery.



Rys. 1. Pewna czarna ścieżka oraz jej pięć kolorowych ścieżek kwadratowych. Blaknięcie krzywych odpowiada upływowi czasu  $t$

W tym miejscu i dalej polecamy samodzielnie eksperymentować z zależnościami między pierwiastkami wielomianu a jego współczynnikami przy użyciu apletu stworzonego przez Leo C. Steina, udostępnionego na stronie [duetosymmetry.com/tool/polynomial-roots-toy](http://duetosymmetry.com/tool/polynomial-roots-toy)



Rys. 2. Na czarno oznaczono pętle  $\alpha_0(t)$  i  $\alpha_1(t)$ . Jeśli będziemy zmieniać wzdułż nich współczynniki trójmianu kwadratowego  $P_t(z)$ , to jego pierwiastki zamieniają się miejscami, tak jak pokazują kolorowe krzywe

Znakomita większość Czytelników *Delty* jest z pewnością dobrze zaznajomiona ze wzorami na rozwiązywanie kwadratowego (na marginesie). A duża część tej większości wie pewnie, że podobne wzory (używające standardowych operacji arytmetycznych oraz pierwiastkowania) można sformułować dla równań stopnia trzeciego i czwartego. Jednak dla równań piątego stopnia takie wzory nie istnieją. Twierdzenie to zostało udowodnione przez Nielsa Henrika Abela w roku 1824. W niniejszym artykule przybliżymy bardzo eleganckie rozumowanie przedstawione w 1963 roku przez Władimira Arnolda. Podamy je jednak w ograniczonym zakresie, o czym zaraz.

Cóż to bowiem oznacza, jeśli we „wzorze” występuje pierwiastkowanie? Okazuje się, że ta z pozoru niewinna operacja wymaga będzie poczynienia pewnych ustaleń. Co mam na myśli, pisząc  $\sqrt{-1}$ ? Może to być  $i$ , a może to być  $-i$ , wybór dość arbitralny. W związku z tym potraktujemy *wzory na rozwiązywanie* w możliwie najbardziej restrykcyjny sposób – wymagać będziemy, by *każda interpretacja* takiego wzoru dawała rozwiązanie. Taki wzór na rozwiązywanie istnieje dla równania kwadratowego, słynne  $(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$  – niezależnie od wartości przypisanej pierwiastkowi dostaniemy rozwiązanie równania  $az^2 + bz + c = 0$ . Formuły o tej własności można przedstawić dla równań stopnia 3 i 4 (podajemy je na końcu artykułu). Uzasadnimy, że taki uniwersalny wzór nie istnieje dla równania stopnia 5. Ale najpierw kilka definicji, z pozoru niezwiązanych z naszym problemem.

*Ścieżka* to każda funkcja ciągła  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , a *pętla* to ścieżka, która zaczyna się i kończy w tym samym miejscu (tzn.  $\gamma(0) = \gamma(1)$ ). Ścieżki (pętle) można dodawać, tzn. jeśli  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  są ścieżkami (pętlami), to  $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$  też jest ścieżką (pętlą). Podobnie z odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem (to ostatnie, jeśli ostrożnie omijamy zero), zresztą z każdym ciągłym przekształceniem na zbiorze liczb zespolonych. Pierwiastkowanie wymaga pewnej ostrożności. Każda niezerowa liczba zespolona ma dokładnie  $k$  pierwiastków  $k$ -tego stopnia; podobnie każda ścieżka  $\gamma$  nieprzechodząca przez 0 ma  $k$  „ścieżek-pierwiastków” (ścieżwiastków)  $k$ -tego stopnia, tzn. takich ścieżek  $\alpha$ , że  $\alpha(t)^k = \gamma(t)$  dla każdego  $t \in [0, 1]$ . Z pętlami jest jeszcze gorzej, gdyż nie każda pętla ma „pętlę-pierwiastek” (pętlastek). Dla przykładu, pętla  $\gamma(t) = e^{i2\pi t}$  ma dwa ścieżwiastki kwadratowe,  $\alpha_1(t) = e^{i\pi t}$  oraz  $\alpha_2(t) = -e^{i\pi t}$ , z których żaden nie jest pętlą. Są jednak pętle wyjątkowe, które pętlastki mają (np.  $e^{i4\pi t}$  ma pętlastek kwadratowy), i te będą dla nas dość istotne.

Spróbujmy wreszcie coś udowodnić. Rozpoczniemy od wykazania, że we wzorach na rozwiązywanie równania kwadratowego musi występować pierwiastkowanie. Nie jest to zbyt odkrywcze, ale przecież *nie od razu Kraków zbudowano*. Przypuśćmy, że istnieje taki „wzór”  $F(a_0, a_1)$ , złożony z dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, że  $F(a_0, a_1)$  zawsze jest pierwiastkiem równania  $z^2 + a_1 z + a_0$ . Rozważmy równanie  $z^2 - 1 = 0$ , którego pierwiastkami są liczby  $-1$  i  $1$ , więc któraś z tych liczb to wartość  $F(-1, 0)$ . Wyobraźmy sobie teraz, że w sposób ciągły modyfikujemy nasze wyjściowe równanie tak, by rozwiązania  $-1$  i  $1$  „zamieniły się miejscami”, jedno poruszając się po łuku okręgu, a drugie po prostej. Odpowiada to współczynnikom  $a_0, a_1$  zmieniającym się wzdułż pętli  $\alpha_0(t)$  i  $\alpha_1(t)$  określonych równaniem

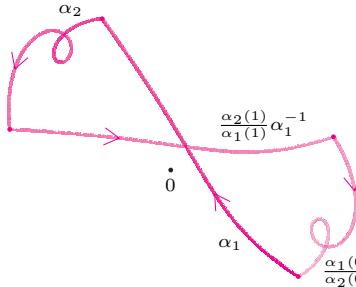
$$(1) \quad z^2 + \alpha_1(t)z + \alpha_0(t) = (z - e^{i\pi t})(z - (2t - 1)) =: P_t(z).$$

Ponieważ funkcja  $F$  jest ciągła, więc  $\gamma(t) = F(\alpha_0(t), \alpha_1(t))$  również jest ścieżką, a nawet pętlą, gdyż początkowa i końcowa postać wielomianu są tożsame,  $P_0 = P_1$ . Jednakże ta pętla powinna cały czas „sledzić” jeden z pierwiastków wielomianu  $P_t(z)$ , a te w sposób ciągły zamieniły się miejscami (nie spotykając się nigdzie po drodze). Zatem z jednej strony  $\gamma$  jest pętlą, a z drugiej dla  $t = 0$  i  $t = 1$  wskazuje na różne rozwiązania równania  $z^2 - 1 = 0$ . Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie istnieje ciągła funkcja współczynników wielomianu kwadratowego, która zawsze wskazuje na jeden z jego pierwiastków.

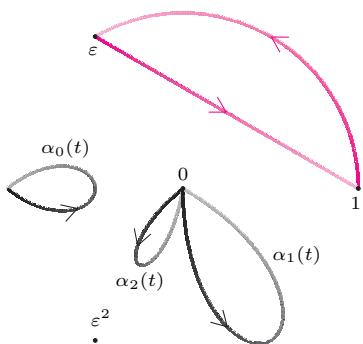
Zaznaczmy tutaj, że znany wzór na rozwiązywanie równania kwadratowego nie przeczy temu stwierdzeniu, gdyż pierwiastek kwadratowy nie może zostać w sposób ciągły określony na zbiorze liczb zespolonych (przypomnijmy przykład

braku pętlastka z pętlą  $e^{i2\pi t}$ ). Pojedyncza operacja pierwiastkowania wystarcza, aby naprawić sytuację z równaniami kwadratowymi. Pokażemy teraz, że to za mało, by poradzić sobie z równaniami stopnia 3, które wymagać będą pierwiastkowania zagnieżdzonego (czyli operacji w stylu  $\sqrt[3]{a_0 - \sqrt{a_1 + a_2}}$ ). W tym celu potrzebujemy systematycznego sposobu tworzenia pętli, które mają pętlastki. Temu poświęcony będzie kolejny akapit.

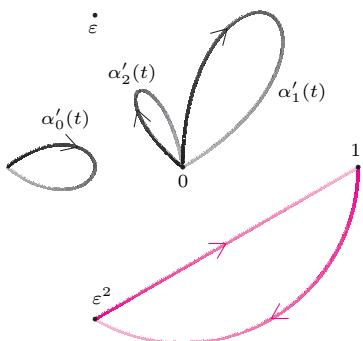
Pętle zaczynające się w tym samym punkcie możemy *składać*, czyli chodzić najpierw wzduż jednej, a potem wzduż drugiej. Formalnie, jeśli  $\gamma$  jest złożeniem  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ , to  $\gamma(t)$  jest równe  $\gamma_1(2t)$  dla  $t \leq \frac{1}{2}$  i  $\gamma_2(2t-1)$  dla  $t \geq \frac{1}{2}$ , co zapisujemy jako  $\gamma = \gamma_2\gamma_1$ . Podobnie, pętle można *odwracać* (tzn. obiegać je „w drugą stronę”); odwrotnością pętli  $\gamma$  to pętla  $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$ . To samo możemy robić ze ścieżkami, przy czym składając dwie ścieżki możemy tylko wtedy, gdy koniec jednej pokrywa się z początkiem drugiej. Jeśli  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  są pętlami zaczynającymi się w tym samym punkcie, to możemy utworzyć z nich pętlę  $\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_2\gamma_1$  zwaną *komutatorem*  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ , oznaczaną  $[\gamma_1, \gamma_2]$ . Komutowanie pętli to zatem pewna specyficzna instrukcja, postaci: „najpierw przebiegnij pierwszą pętlę, potem drugą, potem pierwszą w przeciwnym kierunku niż na początku, a potem tak samo z drugą”. Wynika stąd, że jeśli weźmiemy kilka komutatorów i je dodamy lub pomnożymy, lub przekształcimy w jakikolwiek ciągły sposób, to w efekcie też dostaniemy pewien komutator – pomimo dość nieprzyjemnego sformułowania fakt ten jest raczej oczywisty. Zwrócmy teraz uwagę, że jeśli  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  są pętlami zaczynającymi się w tym samym punkcie, to ich komutator  $[\gamma_1, \gamma_2]$  ma pętlastek (dowolnego stopnia). Istotnie, niech  $\alpha_1$  będzie ścieżwiastkiem z  $\gamma_1$  i niech  $\alpha_2$  będzie takim ścieżwiastkiem z  $\gamma_2$ , który zaczyna się w końcu  $\alpha_1$  (możemy taki wybrać, gdyż  $\gamma_1, \gamma_2$  zaczynają się w tym samym miejscu). Wówczas pętla  $\left(\frac{\alpha_1(0)}{\alpha_2(0)}\alpha_2^{-1}\right)\left(\frac{\alpha_2(1)}{\alpha_1(1)}\alpha_1^{-1}\right)\alpha_2\alpha_1$  jest pętlastkiem z  $[\gamma_1, \gamma_2]$ .



Rys. 3. Tak może wyglądać pętlastek z komutatorem



Rys. 4. Czarne pętle to  $\alpha_0(t)$ ,  $\alpha_1(t)$  i  $\alpha_2(t)$ ; odpowiadają im zamiana rozwiązań  $1$  i  $\varepsilon$ , oznaczona kolorem (rozwiązanie  $\varepsilon^2$  „stoi w miejscu”)



Rys. 5. Czarne pętle to  $\alpha_0'(t)$ ,  $\alpha_1'(t)$  i  $\alpha_2'(t)$  (nie powinno zaskakiwać, że są symetryczne do swoich nieprimowanych odpowiedników)

Udowodnimy teraz, że wzory na rozwiązywanie równań stopnia 3 muszą zawierać „zagnieżdżone pierwiastkowanie”. Niech  $F(a_0, a_1, a_2)$  będzie wzorem złożonym ze standardowych operacji arytmetycznych i „niezagnieżdzonego” pierwiastkowania (proponuję myśleć o pewnej konkretnej postaci, na przykład  $F(a_0, a_1, a_2) = \sqrt{a_0 + a_1} + \sqrt[3]{a_1 a_2}$ ). Przypuszcmy, że każda interpretacja  $F(a_0, a_1, a_2)$  daje pewien pierwiastek równania  $z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ . Rozważmy równanie  $z^3 - 1 = 0$ . Ma ono trzy pierwiastki,  $\varepsilon = e^{2i\pi/3}$ ,  $\varepsilon^2 = e^{4i\pi/3}$  oraz  $\varepsilon^3 = 1$ . Niech  $\alpha_0(t)$ ,  $\alpha_1(t)$  i  $\alpha_2(t)$  będą pętlami współczynników  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$  powstałymi przy ciągłej zamianie miejscami pierwiastków  $1$  i  $\varepsilon$  (przy czym zamiana ma przebiegać po rozłącznych ścieżkach), np.

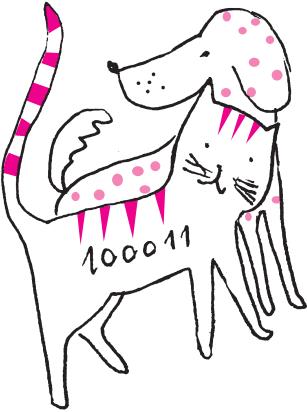
$$(2) \quad z^3 + \alpha_2(t)z^2 + \alpha_1(t)z + \alpha_0(t) = (z - e^{2it\pi/3})(z - t - (1-t)\varepsilon)(z - \varepsilon^2).$$

Podobnie zdefiniujmy pętle  $\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2$ , tym razem zamieniając pierwiastki  $1$  i  $\varepsilon^2$ .

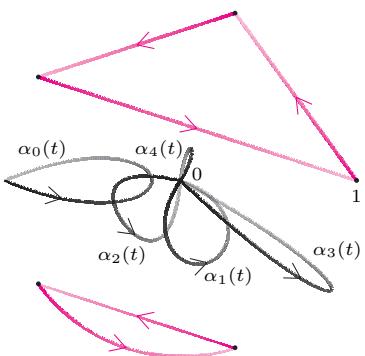
$$(3) \quad z^3 + \alpha'_2(t)z^2 + \alpha'_1(t)z + \alpha'_0(t) = (z - e^{-2it\pi/3})(z - \varepsilon)(z - t - (1-t)\varepsilon^2).$$

Niech teraz  $\beta_i = [\alpha_i, \alpha'_i]$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Przypomnijmy, że każda z pętli  $\beta_i$  ma pętlastek (gdyż jest komutatorem dwóch pętli). W tej sytuacji, ponieważ formuła  $F$  nie posiada zagnieżdżonych pierwiastków, to istnieje taka pętla  $\gamma(t)$ , która wszędzie jest pewną interpretacją  $F(\beta_0(t), \beta_1(t), \beta_2(t))$ . Z drugiej strony ta pętla musi cały czas „śledzić” ruch któregoś z pierwiastków  $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ . Czy tym pierwiastkiem może być  $1$ ? Niespecjalnie, gdyż najpierw  $1$  przechodzi na  $\varepsilon$ , potem  $\varepsilon$  stoi w miejscu, następnie przechodzi na  $1$ , a na koniec  $1$  przechodzi na  $\varepsilon^2$ , czyli inny od  $1$  pierwiastek. Podobnie dwa pozostałe pierwiastki nie wracają na swoje miejsca. Ich wędrówka wygląda tak:  $\varepsilon \rightarrow 1 \rightarrow \varepsilon^2 \rightarrow \varepsilon^2 \rightarrow 1 \rightarrow \varepsilon \rightarrow \varepsilon$ . Co dowodzi, że żaden z pierwiastków nie może być „śledzony”, stąd sprzeczność. Formuła  $F$  musi zatem korzystać z zagnieżdzonego pierwiastkowania.

Nasze rozumowanie możemy podsumować następująco: w sposób ciągły i „bezkolizyjny” przeprowadziliśmy pierwiastek  $\varepsilon^k$  na  $\varepsilon^{k-1}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) tak, że odpowiadające temu ruchowi pętle na współczynnikach dopuszczają taką interpretację wyrażenia  $F$ , która jest pętlą – jest to sprzeczność. Podobną strategię przyjmiemy, analizując równanie stopnia 5. Wykażemy, że dla dowolnego potencjalnego wzoru na rozwiązania możemy „przemieszać” rozwiązania wzduż takich ścieżek, że wynikające z tych ruchów pętle na



Pętlastek z komutatora komutatorów to komutator pętlastków z komutatorów.



Rys. 6. Czarne pętle odpowiadają takim zmianom współczynników równania  $z^5 - 1 = 0$ , że jego rozwiązania zamieniają się miejscami wzdłuż kolorowych ścieżek, tzn. rozwiązanie  $e^{k \cdot 2i\pi/5}$  przechodzi na  $e^{\sigma(k) \cdot 2i\pi/5}$ , gdzie  $\sigma = \langle 2, 5, 4, 3, 1 \rangle$

współczynnikiach dopuszczały „pętlową” interpretację wzoru, a jednak żadne z rozwiązań nie pozostało na swoim miejscu. Aby dokładniej opisać ten zamiar, wygodnie będzie powiedzieć wcześniej kilka słów o permutacjach.

Przypomnijmy, że permutacja zbioru to dowolne przemieszanie jego elementów. A bardziej fachowo, dowolna bijekcja z tego zbioru w siebie. Skoncentrujemy się tutaj na permutacjach zbiorów postaci  $\{1, 2, \dots, n\}$ , dzięki czemu wygodnie będzie je oznaczać – dla przykładu, przez permutację  $\langle 3, 1, 2 \rangle$  rozumiemy permutację  $\sigma$  zbioru  $\{1, 2, 3\}$  taką, że  $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1$  i  $\sigma(3) = 2$ . Skoro permutacje to bijekcje, to możemy je składać i odwracać. Podobnie jak w przypadku pętli, potrafimy zatem komutować dwie permutacje; jeśli  $\sigma$  i  $\tau$  są permutacjami, to  $[\sigma, \tau] = \tau^{-1}\sigma^{-1}\tau\sigma$ .

Wiemy już, że „żonglowanie” pierwiastkami wielomianu w sposób ciągły prowadzi do pętli na jego współczynnikach. Jest tu pewna oczywista odpowiedniość: jeśli pewne permutacje pierwiastków są realizowane przez pewne pętle na współczynnikach, to złożenie tych pętli prowadzi do złożenia permutacji. Podobnie odwrócenie pętli na współczynnikach prowadzi do odwrócenia związanej z nimi permutacji. W tej sytuacji, jeśli pętle  $\alpha_i$  są związane z permutacją  $\sigma$ , a pętle  $\beta_i$  są związane z permutacją  $\tau$ , to pętle  $[\alpha_i, \beta_i]$  są związane z permutacją  $[\sigma, \tau]$ .

Wykażemy teraz, że podwójne zagnieźdżenie pierwiastkowania to za mało, aby rozwiązywać równania stopnia 5. Powiedzmy, że mamy formułę  $F(a_0, \dots, a_4)$ , w której pierwiastkowanie jest zagęszczone co najwyżej dwukrotnie (dajmy na to  $\sqrt[3]{a_0 - \sqrt{a_1 + a_2} + \sqrt[5]{a_3 a_4}}$ ), a każda jej interpretacja daje pewien pierwiastek równania  $z^5 + \sum_{i=0}^4 a_i z^i = 0$ . Występujące w niej operacje pierwiastkowania podzielmy w naturalny sposób na „wewnętrzne” i „zewnętrzne” (w naszym przykładzie „wewnętrzny” pierwiastkowaniem jest  $\sqrt{a_1 + a_2}$ ). W duchu poprzednich rozumowań, chcielibyśmy wskazać takie pętle na współczynnikach, by pewna interpretacja „zewnętrznych” pierwiastkowań była pętlą. Wiemy, że w tym celu wystarcza, aby to, co znajduje się pod każdym „zewnętrznym” pierwiastkowaniem, było komutatorem pętli. Trudność polega na tym, że pod „zewnętrznym” pierwiastkowaniem jest pierwiastkowanie „wewnętrzne”. Czego nam potrzeba, aby pierwiastkowanie „wewnętrzne” interpretować jako komutator? Jeśli pod tym „wewnętrznym” pierwiastkowaniem jest komutator, to możemy wynik zinterpretować jako pętlę. Weźmy zatem jeszcze jeden, inny komutator i najpierw „spętlastkujmy” pierwszy, potem drugi, potem pierwszy odwrotnie, a potem drugi odwrotnie – w efekcie dostaniemy już porządkowy komutator. Wystarcza zatem, aby to, co znajduje się pod „zewnętrznym” pierwiastkowaniem, było komutatorem komutatorów – w skrócie *kokomutatorem*. Jeśli każdy z argumentów formuły  $F$  będzie zmieniał wartość wzdłuż kokomutatora, to wartość  $F$  będzie mogli interpretować jako pętlę. Przypomnijmy jednak, że te kokomutatory powinny mieć jeszcze jedną własność, aby był z nich dla nas pożytek – mają zmieniać położenie każdego rozwiązania naszego równania. Ze względu na przedstawioną wcześniej odpowiedniość między operacjami na pętlach i pierwiastkach równania, wystarczy odpowiedzieć sobie na pytanie, czy istnieje taka permutacja-kokomutator, która nie ma punktu stałego. Otóż istnieje, i aby się o tym przekonać, wystarczy wziąć  $\sigma_1 = \langle 1, 3, 4, 2, 5 \rangle, \sigma_2 = \langle 1, 2, 4, 5, 3 \rangle$  oraz  $\tau_1 = \langle 1, 3, 4, 2, 5 \rangle$  i  $\tau_2 = \langle 2, 3, 1, 4, 5 \rangle$ . Wówczas  $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2] = \langle 1, 5, 4, 3, 2 \rangle$  i  $\tau = [\tau_1, \tau_2] = \langle 4, 3, 2, 1, 5 \rangle$ , i w końcu  $[\sigma, \tau] = \langle 2, 3, 4, 5, 1 \rangle$ . Jak do tego doszliśmy? Przyznajmy szczerze, przy użyciu brutalnej, obliczeniowej siły. Cóż, wszystkich permutacji zbioru pięcioelementowego jest  $5! = 120$ , więc potencjalnych komutatorów jest „jedynie”  $120^2 = 14400$ . Jeśli odsiejemy (bądźmy uczciwi: nie my, tylko komputer) powtórzenia, zostaniemy z 60 możliwymi komutatorami. Potencjalnych kokomutatorów jest zatem  $60^2 = 3600$ , wśród których szczęśliwie znajdują się również permutacje pozbawione punktów stałych, jak na przykład  $\langle 2, 3, 4, 5, 1 \rangle$ .

No dobrze, a co dla formuł o jeszcze większym zagęszczeniu operacji pierwiastkowania? Wróćmy do zbioru potencjalnych 3600 kokomutatorów. Okazuje się, że po usunięciu powtórzeń dostaniemy... wcześniejszy zbiór 60 komutatorów. Kontynuując, wnioskujemy, że zbiór kokomutatorów też jest tożsamy ze zbiorem 60 komutatorów, tak samo ze zbiorem  $ko^4$ mutatorów

**Uniwersalne formuły dla równań 3 i 4 stopnia** podajemy dla postaci, które przy użyciu prostego, liniowego podstawienia zostały uproszczone (współczynnik wiodący = 1, kolejny współczynnik = 0). Uniwersalnym rozwiązańiem równania  $x^3 + px + q = 0$  jest

$$C - \frac{p}{3C},$$

gdzie

$$C = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Uniwersalnym rozwiązańiem równania  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$  jest

$$\frac{\sqrt{2m} + \sqrt{-\left(2p + 2m + \frac{2q}{\sqrt{2m}}\right)}}{2},$$

gdzie  $m$  jest rozwiązaniem równania

$$8m^3 + 8pm^2 + (2p^2 - 8r)m - q^2 = 0.$$

i tak dalej. W szczególności, permutacja  $\langle 2, 3, 4, 5, 1 \rangle$  jest  $ko^n$ mutatorem dla dowolnego  $n$ . Aby dowieść, że formula z  $n$ -krotnym zagęszczeniem operacji pierwiastkowania nie może działać, wystarczy powołać się na istnienie  $2^n$  permutacji, których  $ko^n$ mutacja daje permutację  $\langle 2, 3, 4, 5, 1 \rangle$ . Następnie  $ko^n$ mutujemy pętle na współczynnikach związanych z tymi permutacjami rozwiązań. Wiemy, że uzyskana w ten sposób pętla dopuszcza taką interpretację naszej formuły, która sama jest pętlą – a to już jest sprzeczność, bo każde rozwiązanie zmieniło swoje miejsce.

Uff... finisz był bardzo intensywny. Ideę tego rozumowania dużo łatwiej przyswoić, jeśli faktycznie możemy poobserwować zależności między ruchem pierwiastków wielomianu i jego współczynników. Możliwość taką daje filmik *Short proof of Abel's theorem that 5th degree polynomial equations cannot be solved* autorstwa Boaza Katza, do odnalezienia na YouTubie. Ponadto tym, którzy chcieliby zapoznać się z odrobinę bardziej formalnym przedstawieniem tematu, polecam artykuł Leo Goldmahera *Arnold's elementary proof of the insolvability of the quintic*, z którego ten tekst mocno korzysta. Czytelnicy Obyci w Temacie wiedzą, że obecnie studenci kierunków matematycznych poznają twierdzenie Abela jako przykład zastosowania teorii Galois. Dzięki niej możemy stwierdzić, że żadna liczba rzeczywista możliwa do uzyskania z liczb wymiernych przy użyciu standardowych operacji arytmetycznych oraz pierwiastkowania nie może być rozwiązaniem równania  $x^5 - x - 1 = 0$ . W tym względzie teoria Galois daje nam więcej – nie wymaga „ogólnego wzoru na rozwiązania”. Z drugiej strony, przedstawione podejście obejmuje pierwiastkowanie oraz *dowolne ciągłe przekształcenia* liczb zespolonych, nie tylko dodawanie, mnożenie i dzielenie, a to zawsze jakaś kokorzyść.



## Zadania

Przygotował Dominik BUREK

**M 1684.** Czy istnieje taki trójmian kwadratowy  $f(x)$  o współczynnikach całkowitych, że (a)  $f(f(\sqrt{2})) = 0$ ? (b)  $f(f(\sqrt{3})) = 0$ ? (c)  $f(f(\sqrt{5})) = 0$ ?  
Rozwiązanie na str. 7

**M 1685.** Ahmed pomnożył wszystkie dzielniki liczby naturalnej  $n$ . Hamza zwiększył każdy dzielnik o 1, a następnie pomnożył wyniki. Liczba Hamzy jest podzielna przez liczbę Ahmeda. Dla jakich  $n$  jest to możliwe?  
Rozwiązanie na str. 15

**M 1686.** W polu tablicy  $3 \times n$  wpisano liczby naturalne. Wiadomo, że każdy z trzech wierszy zawiera każdą z liczb  $1, 2, \dots, n$ . Okazało się jednak, że dla każdej kolumny suma iloczynów par trzech liczb w niej zawartych jest wielokrotnością  $n$ . Dla jakich  $n$  jest to możliwe?  
Rozwiązanie na str. 7

Przygotował Andrzej MAJHOFER

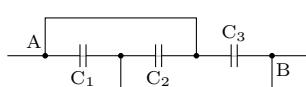
**F 1031.** Od 20 maja 2019 roku jednostki Układu SI zdefiniowane są poprzez przyjęcie jako znanych **dokładnie** wartości 7 stałych. Są to:

- częstotliwość nadsubtelnego przejścia w atomach cezu 133 w niezaburzonym stanie podstawowym,  $\Delta\nu_{Cs} = 9\,192\,631\,770$  Hz,
- prędkość światła w próżni,  $c = 299\,792\,458$  m/s,
- stała Plancka,  $h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$  J·s,
- ładunek elementarny,  $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$  C,
- stała Boltzmanna,  $k = 1,380\,649 \cdot 10^{-23}$  J/K,
- stała Avogadra,  $N_A = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$  1/mol,
- skuteczność świetlna promieniowania o częstotliwości  $540 \cdot 10^{12}$  Hz,  $K_{cd} = 683$  lm/W.

Oznacza to, że teraz, np.  $1\text{ m} = 30,663318988\dots c/\Delta\nu_{Cs}$ . Podaj obecnie obowiązujące definicje jednostek: 1 kg, 1 Ω.  
Rozwiązanie na str. 5

**F 1032.** Ile wynosi pojemność przedstawionego na rysunku układu kondensatorów między punktami A i B?

Rozwiązanie na str. 8



# Samotne zwierzę na Arce Noego

Tomasz JANISZEWSKI

Noe wybudował arkę. Wybrał pary zwierząt spośród wszystkich gatunków i każdemu gatunkowi przyporządkował liczbę naturalną. Przed zamknięciem arki nakazał jednemu z synów spisać numery gatunków wszystkich zwierząt. Niestety okazało się, że brakuje jednego zwierzęcia. Którego?

Powyższe pytanie odpowiada następującemu zadaniu: Mając daną tablicę  $A[1, n]$  zawierającą  $n$  liczb naturalnych, znajdź liczbę, która występuje dokładnie raz, wiedząc, że pozostałe liczby występują po dwa razy.

Zakładamy, że liczby w tablicy są „male” (np. mniejsze niż  $2^{32}$ ) i ich porównywanie oraz operacje bitowe (takie jak XOR, o czym za chwilę) mają stały koszt czasowy  $O(1)$ .



## Rozwiązywanie zadania F 1031.

Ze stałych wymienionych w definicji Układu SI należy zbudować wyrażenia o wymiarze 1 kg oraz 1 Ω. Kilogram występuje w wymiarze stałej  $h$  (zawarty jest w definicji dzula). Wymiar stałej  $k$  także zawiera 1 kg, ale poza tym występuje też 1 K, którego nie ma w wymiarze żadnej innej stałej. Będziemy potrzebowali poza  $h$  także stałych o wymiarach zawierających 1 m i 1 s. Zbadajmy wymiar iloczynu:

$$h^\alpha \cdot c^\beta \Delta\nu_{Cs}^\gamma$$

i dobierzmy wykładniki tak, żeby wymiar iloczynu zawierał wyłącznie kilogram w pierwszej potędze. Wymiar badanego iloczynu to:

$$J^\alpha s^\alpha \cdot \frac{m^\beta}{s^\beta} \cdot \frac{1}{s^\gamma} = \frac{kg^\alpha m^{2\alpha} s^\alpha m^\beta}{s^{2\alpha} s^\beta s^\gamma}.$$

Iloczyn ma wymiar kilograma, jeśli:

$\alpha = 1$ ,  $2\alpha + \beta = 0$  oraz  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ .

Otrzymujemy:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -2$ ,  $\gamma = 1$ . Po

podstawieniu wartości liczbowych:

$$h \cdot c^{-2} \Delta\nu_{Cs} = 6,777265 \dots 10^{-41} \text{ kg},$$

a więc 1 kg =

$$1,475521 \dots 10^{40} h \Delta\nu_{Cs} / c^2. W podobny$$

sposób sprawdzamy, że

$$h/e^2 = 25812,807459 \dots \Omega, \text{ czyli}$$

$$1 \Omega = 3,87404586 \dots 10^{-5} h/e^2.$$

Tablica prawdy XOR:

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

**function** SZUKAJ( $A$ )

```
posortuj A
if A[1] ≠ A[2] then
    return A[1]
for i := 2 to n - 1 do
    if A[i] ≠ A[i - 1] and A[i] ≠ A[i + 1] then
        return A[i]
return A[n]
```

Okazuje się, że można to zadanie rozwiązać w czasie liniowym. W tym celu należy skorzystać ze zbioru. Zbiór (*set*) to abstrakcyjna struktura zoptymalizowana pod kątem sprawdzania, czy dany element do niej należy, czy też nie. Podstawowe funkcje zbioru to dodawanie i usuwanie elementów, jak również sprawdzanie, czy element należy do zbioru. Zbiór może być realizowany za pomocą różnych struktur danych, takich jak tablica haszująca, drzewo czy nawet zwykła tablica. Każda implementacja ma swoje wady i zalety. Dla uproszczenia przyjmijmy, że operacje dodawania, usuwania i sprawdzania, czy element należy do zbioru, mają stały koszt czasowy  $O(1)$ . Jeśli dysponujemy zbiorem, to zadanie możemy rozwiązać w następujący sposób. Przechodząc po tablicy, sprawdzamy, czy dany element znajduje się w zbiorze; jeśli nie, to go dodajemy, a jeśli tak – usuwamy. Na końcu jedynym elementem zbioru powinien być szukany gatunek.

**function** SZUKAJ( $A$ )

```
S := ∅
for i := 1 to n do
    if A[i] ∈ S then
        S := S \ {A[i]}
    else
        S := S ∪ {A[i]}
return S
```

Rozwiązywanie to działa w czasie liniowym  $O(n)$ , ale wymaga dodatkowej pamięci, która w pesymistycznym przypadku również będzie liniowo zależna od tablicy wejściowej. Rodzi się pytanie: czy można to zrobić równie szybko i zużyć mniej pamięci? Okazuje się, że tak – wystarczy skorzystać z operacji XOR i z tego, jak w komputerze reprezentowane są liczby.

Jest wiele sposobów reprezentacji liczb. Nas interesują wyłącznie liczby naturalne, a to znacznie ułatwia zadanie, gdyż ich reprezentacja nie odbiega znacząco od tego, do czego jesteśmy przyzwyczajeni na co dzień. Jedyna różnica to podstawa systemu pozycyjnego – komputer w odróżnieniu od ludzi korzysta z systemu dwójkowego, a nie dziesiętnego. Dla przykładu 49 w systemie dziesiętnym to 110001 w systemie dwójkowym ( $49 = 2^5 + 2^4 + 0 + 0 + 0 + 2^0$ ).

XOR (z angielskiego *eXclusive OR*, oznaczane  $\oplus$ ) to bitowa wersja polskiego „albo”, czyli alternatywy wykluczającej: zwraca prawdę, kiedy jeden z argumentów jest prawdziwy, a drugi fałszywy. W binarnej reprezentacji liczb

XOR sprowadza się do sumy bez przeniesienia:

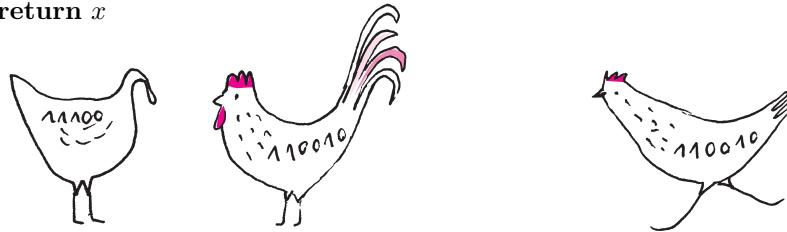
$$\begin{array}{r} 49_{10} \ 110001 \\ \oplus \ 3_{10} \ 000011 \\ \hline 50_{10} \ 110010 \end{array}$$

Na przykład:

$$\begin{array}{r} 10_{10} \ 01010 \\ 21_{10} \ 10101 \\ 19_{10} \ 10011 \\ 19_{10} \ 10011 \\ \oplus \ 10_{10} \ 01010 \\ \hline 21_{10} \ 10101 \end{array}$$

Widzimy, że operacja XOR jest przemienna ( $A \oplus B = B \oplus A$ ) i łączna ( $((A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C))$ ), a zatem wynik nie zależy od kolejności elementów. Oznacza to, że kiedy zastosujemy XOR do wszystkich elementów tablicy, to rezultat będzie taki sam, jak gdyby wszystkie pary takich samych elementów stały obok siebie. Ale przecież dla każdej liczby  $A$  zachodzi  $A \oplus A = 0$ . Wynikiem tej operacji będzie liczba, która występuje tylko raz! W ten sposób dostajemy rozwiążanie działające w czasie liniowym ( $O(n)$ ), które potrzebuje stalej ilości pamięci.

```
function SZUKAJ(A)
    x := 0
    for i := 1 to n do
        x := x ⊕ A[i]
    return x
```



## O błędach pozycji gwiazd i prędkościach cząsteczek gazu

*Alex SCHWARZENBERG-CZERNY\**

\* Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika w Warszawie

John Herschel (1792–1871) dokonał wielu pomiarów pozycji gwiazd na niebie, w tym po raz pierwszy na tak dużą skalę na półkuli południowej, prowadząc obserwacje z przyłądką Dobrej Nadziei. Przy okazji zainteresował się błędami swoich pomiarów i tym, jaki może być ich rozkład. Na podstawie sposobu pomiaru i charakteru obrazu gwiazdy w teleskopie uznał, że

- (a) prawdopodobieństwo błędu zależy od jego wielkości  $r$ , ale nie od kierunku na niebie, oraz że
- (b) błędy we współrzędnych  $x$  i  $y$  są niezależne.

Dodatkowo prawdopodobieństwo błędu winno zmieniać się płynnie z pozycją gwiazdy, to znaczy być ciągłą funkcją współrzędnych. Na podstawie obserwacji z podpunktu (a) prawdopodobieństwo  $dP$ , że pomiar wypadnie w kawałku nieba o powierzchni  $dS$  w odległości  $r$  od prawdziwej pozycji, możemy zapisać jako  $dP = g(r) dS$ . Natomiast na podstawie (a) i (b) prawdopodobieństwo, że pomiar wypadnie w kawałku nieba o powierzchni  $dS$ , będzie równe  $dP = f(x)f(y)dS$  dla pewnej funkcji ciągłej  $f$ . Mamy zatem

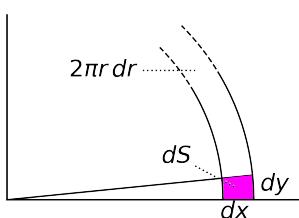
$$(1) \quad g(r) dS = dP = f(x)f(y) dS, \quad \text{co oznacza, że} \quad \ln g(r) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Jeśli za początek układu współrzędnych wybierzemy prawdziwą pozycję gwiazdy, to jak nauczał Pitagoras,  $r^2 = x^2 + y^2$ . Gdybyśmy funkcje  $\ln f(x)$ ,  $\ln g(r)$  mogli przedstawić w postaci szeregu („nieskończonego wielomianu”), czyli

$$\ln g(r) = -a - br - cr^2 - dr^3 - \dots,$$

to moglibyśmy zauważać, że tylko dwa wyrazy (pierwszy i trzeci) powyższego szeregu można przedstawić w postaci sumy funkcji  $x$  i  $y$ , a zatem

$\ln g(r) = -a - cr^2 = -a - c(x^2 + y^2)$ . Rozwijanie w szereg to chleb powszedni wielu naukowców, których powinno ucieśzyć to obrazowe uzasadnienie. Dla Czytelników, którym wydaje się ono niewystarczająco precyzyjne, przedstawimy też inne wyprowadzenie. Niech  $\alpha(t) = \ln g(\sqrt{t})$ ,  $\beta(x) = \ln f(x)$ . Wstawiając do (1)



Obszar wokół rzeczywistej pozycji gwiazdy



### Rozwiążanie zadania M 1686.

Jest to możliwe tylko dla nieparzystych  $n$ .

Załóżmy, że  $2 \mid n$ , i ustalmy kolumnę, w której wpisane są liczby kolejno  $a, b, c$ . Wówczas  $n \mid ab + bc + ca$ , więc w szczególności  $2 \mid ab + bc + ca$ , skąd wynika, że wśród liczb  $a, b, c$  jest co najwyżej jedna liczba nieparzysta. Wobec tego każda kolumna tablicy  $3 \times n$  zawiera co najwyżej jedną liczbę nieparzystą – więc w całej tablicy jest ich nie więcej niż  $n$ . Z drugiej strony, każdy z wierszy zawiera  $n/2$  liczb nieparzystych, więc łącznie w tablicy mamy  $3n/2 > n$  liczb nieparzystych – sprzeczność.

Załóżmy teraz, że  $2 \nmid n$ . W tablicę wpisujemy liczby w następujący sposób:

- I, II wiersz: w  $i$ -te pole wpisujemy  $2i \pmod{n}$ , natomiast resztę 0 w ostatnim polu zastępujemy przez  $n$ .
- III wiersz: w  $i$ -te pole wpisujemy  $n - i$ , natomiast liczbę 0 w ostatnim polu zastępujemy przez  $n$ .

Ponieważ  $2 \nmid n$ , to w każdym wierszu wpisane są różne liczby. Ponadto dla trzech liczb  $a, b, c$  w jednej kolumnie mamy:

$$\begin{aligned} ab + bc + ca &\equiv 2i \cdot 2i + 2i \cdot (-i) + 2i \cdot (-i) \equiv \\ &\equiv 0 \pmod{n}. \end{aligned}$$

W odróżnieniu od ówczesnych chemików wielu fizyków nadal nie wierzyło w atomy i rozkład prędkości ruchu cząstek w gazie doskonałym (rozkład Maxwella) pozostawał ciekawostką. Dopiero gdy Ludwig Boltzmann (1877) wyrowadził go niezależnie ze statystyki cząstek, znając po drodze wzór na entropię, XIX-wieczna fenomenologiczna termodynamika zaczęła ewoluować ku fizyce statystycznej.



### Rozwiążanie zadania M 1684.

Tak, istnieje, np.

(a)  $f(x) = x^2 - 1$ .

(b) i (c)  $f(x) = 2x^2 - 8$ .

wartość  $y = 0$ , dostajemy  $\alpha(x^2) = \beta(x) + \beta(0)$ , zatem  $\alpha(x^2 + y^2) = \alpha(x^2) + \alpha(y^2) - 2\beta(0)$ . Przyjmując  $\gamma(t) = \alpha(t) - 2\beta(0)$ ,  $u = x^2$ ,  $v = y^2$ , dostaniemy  $\gamma(u + v) = \gamma(u) + \gamma(v)$ . Jest to podstawowe równanie funkcyjne (tzw. równanie Cauchy'ego), którego jedynym ciągłym rozwiązaniem jest funkcja liniowa (więcej o tym równaniu można przeczytać np. w artykule Marka Kordosa w  $\Delta_{08}^8$ ). Niech zatem  $\gamma(t) = -ct$ , wówczas przyjmując  $a = 2\beta(0)$ , dostajemy znowu  $\ln g(r) = -a - cr^2$ . Zatem

$$(2) \quad dP = g(r)dS = Ce^{-cr^2} 2\pi r dr = -\frac{C\pi}{c} d(e^{-cr^2}),$$

gdzie  $C = e^{-a}$ . Ostatnia równość w (2) wynika z obliczenia przyrostu funkcji w nawiasie przy zmianie  $r$  o  $dr$ . Uzasadnimy to dokładniej na końcu artykułu, a na razie zajmijmy się jeszcze znalezieniem wartości  $C$ . Dodając do siebie wszystkie możliwe przyrosty prawdopodobieństwa z lewej strony równania (2), dostaniemy 1, a z prawej strony mamy

$$\Delta[-\frac{C\pi}{c} d(e^{-cr^2})] = -\frac{C\pi}{c} [e^{-cr^2}]_0^\infty = \frac{C\pi}{c}$$

(suma przyrostów funkcji na półprostej to po prostu różnica wartości funkcji na krańcach). Porównując, otrzymujemy  $C = \frac{c}{\pi}$ , skąd dostajemy

$$g(r) = \frac{c}{\pi} e^{-cr^2} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},$$

wprowadzając tradycyjne oznaczenie  $c = 1/(2\sigma^2)$ . Ostatecznie mamy

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Jest to podstawowy w statystyce rozkład prawdopodobieństwa, zwany rozkładem Gaussa lub rozkładem normalnym. Za sprawą de Moivre'a i następców pojawił się on jako graniczny przypadek paru innych znanych rozkładów prawdopodobieństwa. Gauss (1800) podał niezależne wyprowadzenie i pierwszy zastosował go do analizy błędów obserwacji. Laplace (1810, 1812) zauważył, że jeśli obserwowany wynik jest sumą wielu zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, to (przy rozsądnych założeniach) rozkład prawdopodobieństwa tej wielkości (odpowiednio unormowanej) dąży do rozkładu normalnego. Ta pierwsza wersja *Centralnego Twierdzenia Granicznego* do czasów obecnych została znacznie uogólniona na sumy zmiennych o różnych rozkładach. Fascynujące jest, że (poza czynnikiem normalizującym  $C$ ) Herschel wyprowadził rozkład normalny z tak prostych założeń. Dziesięć lat później to rozumowanie zainspirowało Maxwella do wyprowadzenia rozkładu prędkości cząsteczek gazu, przy założeniu (a) i (b). Dla  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  i dla przyrostu objętości  $dV = 4\pi v^2 dv$  w 3-wymiarowej przestrzeni prędkości  $v$  otrzymał on  $dP = g(v)dv = Ce^{-cv^2}v^2dv$ . Stałe  $C$  i  $c$  można obliczyć, wykorzystując sumowanie się przyrostów prawdopodobieństwa do 1 oraz proporcjonalności temperatury absolutnej do ważonej prawdopodobieństwem średniej energii kinetycznej cząsteczek  $\frac{3}{2}kT = \frac{\Sigma mv^2}{2} dP$ . Wynik końcowy to

$$(4) \quad dP = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv \quad \text{oraz} \quad f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}.$$

Pozostaje nam dokładniej uzasadnić ostatnią równość w (2). Dla Czytelników biegłych w rachunku różniczkowym jest ona oczywista, pozostały zaś prosimy o uwierzenie, że dla małych wartości przyrostu  $dr$  zachodzi  $\frac{e^{dr}-1}{dr} \approx 1$  (ponieważ rozwinięcie  $e^{dr}$  w szereg dla małego  $dr$  to w przybliżeniu  $e^{dr} \approx 1 + dr + \dots$ ).

Mnożąc obustronnie przez  $e^r$ , dostajemy  $\frac{e^{r+dr}-e^r}{dr} \approx e^r$ , zatem wyrażając to w naszej „przyrostowej notacji”, mamy  $d(e^r) = e^r dr$ . Ponadto dla małych wartości  $dr$  jest

$$\frac{(r + dr)^2 - r^2}{dr} = 2r + dr \approx 2r,$$

więc możemy napisać  $d(r^2) = 2rdr$ . Ostatecznie

$$d(e^{-cr^2}) = e^{-cr^2} d(-cr^2) = -ce^{-cr^2} d(r^2) = -2rc e^{-cr^2} dr.$$

Przedstawione tutaj rozumowanie może wydawać się miejscami nieścisłe, istnieją jednak matematyczne narzędzia pozwalające na sformalizowanie tych fragmentów, a poznanie choćby intuicji wydaje się w tym przypadku pouczające.

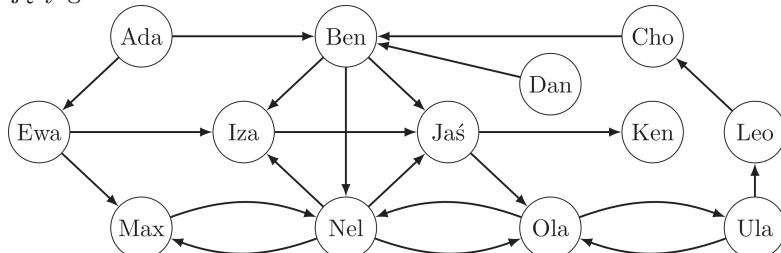
## Tomasz WĄS

Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

## Jak Leo uratował klasowe wybory

W klasie zapadła cisza. Dziś miały się odbyć wybory na przewodniczącego klasy, ale nikt nie zgłosił swojej kandydatury. W związku z tym wychowawca zaproponował następujące wyjście z tej patowej sytuacji: Każdy na kartce wypisze listę koleżanek i kolegów z klasy, którzy według niego byliby dobrymi przewodniczącymi; może wypisać ich dowolnie wiele. Następnie kartki zostaną zebrane, a głosy policzone. Osobie, która uzyska najwięcej głosów, zaproponuje się ten niezwykły prestiżowy urząd – gospodarza klasy.

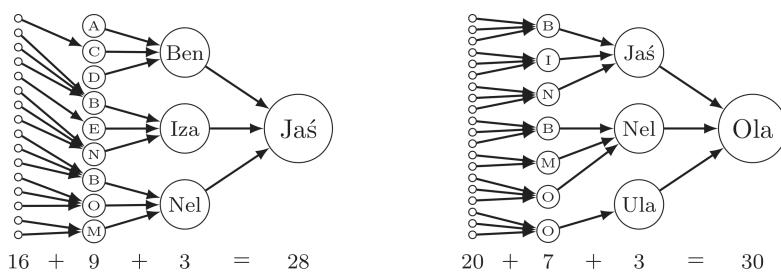
Klasa z chęcią przyjęła pomysł i sprawnie go zrealizowała. Jednak po podliczeniu głosów okazało się, że aż pięć osób dostało ich najwięcej, czyli trzy. Aby sprawdzić, czy obliczenia na pewno się zgadzają, postanowiono wypisać na tablicy wszystkie imiona i strzałkami zaznaczyć, kto na kogo głosował. Powstał następujący graf:



Jak widać na grafie obok, największą liczbę trzech głosów otrzymali Ben, Iza, Jaś, Nel i Ola.

„Głosujmy ponownie!”, „Zróbjmy dogrywkę!”, „Zagrajmy w marynarza!” – cała klasa zaczęła dyskutować, jak rozstrzygnąć wybory, kiedy nagle Jaś nieśmiało zauważył, że według niego to on wygrał. Argument był następujący: Skoro Ada, Cho i Dan głosowali na Bena, czyli byliby w stanie jemu powierzyć losy klasy, a sam Ben uznał, że to on, Jaś, byliby dobrym przewodniczącym, to można uznać, że Ada, Cho i Dan pośrednio popierają Jasia. Innymi słowy, Jaś zaproponował, aby popatrzeć na to, ile głosów zdobyły osoby, które na kogoś głosują. Tylko jego popierają trzy osoby, które same zdobyły po trzy głosy, więc Jaś ma najwięcej, bo aż 9, takich pośrednich głosów. Czyli to on powinien zostać przewodniczącym.

„Nie bądź taki cwany!”, „Przewodniczący Jaś!”, „Zagrajmy w marynarza!” – klasa nie była zgodna, czy przyjąć argumentację Jasia. Wtem Ola stwierdziła, że jeśli liczymy takie pośrednie głosy, to ona powinna wygrać, a nie Jaś. Bo skoro Ada pośrednio głosuje na Jasia, a Jaś zagłosował na nią, Olę, to zgodnie z tą logiką Ada również pośrednio popiera Olę. Ola chciałaby więc liczyć również, ile pośrednich głosów zdobyły osoby, które na kogoś głosują. Wyborcy Oli dostali 20 pośrednich i 7 bezpośrednich głosów (fakt, że niektóre pochodzą od samej Oli, strategicznie przemilczała), więc licząc wszystkie pośrednie i bezpośrednie głosy, Ola ma ich 30, a Jaś 28. „Czyli to ja powinnam zostać przewodniczącą” – zakończyła swój wywód.



Na rysunku po prawej rozrysowane są wszystkie scapery o długości co najwyżej trzy, kończące się w wierzchołkach „Jaś” i „Ola”, czyli, jak to nazwała Ola, wszystkie „podwójnie pośrednie głosy” oddane na tych kandydatów.



### Rozwiążanie zadania F 1032.

Do okladek każdego z kondensatorów przyłożone jest to samo napięcie równe różnicy potencjałów w punktach A i B. Układ jest więc równoważny połączeniu równoleglemu kondensatorów  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$ , a więc szukana pojemność  $C = C_1 + C_2 + C_3$ .

„Ola na prezydenta!”, „Nie! Przewodniczący Jaś!”, „Zagrajmy w ...” – klasa nawet nie zdążyła zacząć się kłócić, kiedy głos zabral Leo. Zauważył, że idąc dalej zgodnie z logiką Jasia i Oli, powinno się liczyć wszystkie pośrednie głosy niezależnie od liczby pośredników, a takich głosów byłoby nieskończonie wiele i nic by to nie dało. Lepiej założyć, że głos, który przechodzi przez pośrednika, jest mniej ważny, i liczyć go jak połowę albo jedną piątą głosu. Ogólnie można wybrać stałą  $a$  i głos, który przechodzi przez  $k$  pośredników, liczyć jako  $a^k$  głosu. Wynik każdej osoby będzie wtedy nieskończoną sumą uwzględniającą wszystkie pośrednie głosy. Na przykład dla Jasia będzie to  $K_J = 3 + 9a + 16a^2 + \dots$  a dla Oli  $K_O = 3 + 7a + 20a^2 + \dots$  Jeśli  $a$  będzie dostatecznie małe, to wszystkie takie

Okazuje się, że zaproponowane przez Leo sumy są zbieżne zawsze wtedy, gdy  $a$  jest mniejsze od  $1/\lambda$ , gdzie  $\lambda$  to największa wartość własna macierzy sąsiedztwa grafu.

sumy będą zbieżne (tak się przynajmniej Leo wydawało, bo nie umiał jeszcze tego udowodnić).

„Tylko jak je policzyć?” – dopytywała klasa. Leo uśmiechnął się, bo był najbardziej zadowolony z tej części swojego pomysłu. Można zauważać, że w każdym pośrednim głosie na Jasia ostatnim pośrednikiem będzie Ben, Iza lub Nel. Czyli każdy taki głos liczy się również jako głos na Bena albo Izę, albo Nel, ale z jednym pośrednikiem mniej (czyli jest przemnożony przez jedno  $a$  mniej). Zatem wynik Jasia to  $a$  razy suma wyników Bena, Izy i Nel plus trzy bezpośrednie głosy. Dostajemy zatem równanie rekurencyjne:  $K_J = 3 + a \cdot (K_B + K_I + K_N)$ . Możemy takie równanie napisać dla każdej osoby w klasie i otrzymamy układ równań, którego rozwiązaniem będą poszczególne sumy.

Leo o tym nie wiedział, ale jego metoda odpowiada *centralności Bonacicha–Katza*, zaproponowanej przez innego Leo – Leo Katza w 1953 roku. Miary centralności służą określeniu istotności wierzchołka w grafie (pisaliśmy już o nich w  $\Delta_{16}^{11}$ ). Centralność Bonacicha–Katza ocenia wierzchołek  $v$  w oparciu o ważność jego poprzedników:  $\mathcal{P}(v)$ . Formalnie jest to jedyna funkcja, która dla każdego wierzchołka  $v$  spełnia następujące równanie rekurencyjne:

$$K_v = \sum_{u \in \mathcal{P}(v)} (a \cdot K_u + 1).$$

Ranking dla miary Leo, czyli centralności Bonacicha–Katza:

poz.	$K_v$ ( $a = 1/2$ )	$K_v$ ( $a = 1/5$ )
1.	Ola (136,2)	Jaś (5,73)
2.	Nel (104,8)	Ola (5,66)
3.	Jaś (92,6)	Nel (5,44)
4.	Ula (69,1)	Iza (4,94)
5.	Iza (62,1)	Max (3,29)

Czytelnik może też pobawić się w liczenie centralności na poniższej stronie:

<http://centrality.mimuw.edu.pl/editor>  
Podany graf można wczytać, wybierając opcję „Import > Predefined graph”.

Klasa zabrała się do liczenia. Szybko okazało się (z pomocą komputera), że dla  $a = 1/2$  wygrywa Ola przed Nel i Jasiem. Z ciekawości spróbowano jeszcze obliczyć wyniki dla  $a = 1/5$ . Wtedy okazało się jednak, że przoduje Jaś, a za nim jest Ola i Nel. Po tym odkryciu w klasie na nowo wybuchła kłótnia.

„Najlepsze  $a$  to pół!”, „Jedna piąta albo śmierć!”, „Może zagramy w marynarza?” – dyskusja rozgorzała na dobre. Argumenty za mniejszymi i większymi stałymi padały z lewej i z prawej. Nagle głos zabrał Ben. „Ta cała dyskusja nie ma sensu. Według mnie wygrałem ja”. I przedstawił swoje rozumowanie: Niektóre osoby zagłosowały na kilka osób, ale niektóre, jak na przykład Cho, wybrały tylko jedną. Sprawiedliwie byłoby, żeby głos tych osób był zatem ważniejszy. W związku z tym Ben proponuje, aby wartość głosu każdej osoby głosującej podzielić przez liczbę osób, na którą ona głosowała. W ten sposób Ben dostałby 2 i pół głosu (pół od Ady, jeden od Cho i jeden od Dana), czyli najczęściej ze wszystkich.

Pomysł podchwycił Leo. „Tu również można liczyć głosy pośrednie!” – zauważył. Przykładowo, jeśli jeden z dwóch głosów Ady jest na Bena, który z kolei jeden z trzech swoich głosów oddał na Nel, to można powiedzieć, że pośrednio Ada oddała jedną szóstą głosu na Nel, i policzyć go jako  $a/6$  (mnożymy przez  $a$ , bo jest jeden pośrednik). Podobnie jak poprzednio, wynikiem jest suma wszystkich takich głosów. Na przykład dla Nel będzie to  $PR_N = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{6}a + \frac{1}{2}a + \frac{2}{4}a + \dots$ . Wartości można znowu wyliczyć z pomocą równania rekurencyjnego. Tym razem postaci  $PR_N = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} + a \cdot (\frac{1}{3}PR_B + PR_M + \frac{1}{2}PR_O)$ .

Ta propozycja odpowiada z kolei innej mierze centralności – o nazwie *PageRank*. PageRank w 1999 roku wymyślili Larry Page i Sergey Brin do oceny istotności stron internetowych w tworzonej wówczas przez nich wyszukiwarce *Google*. Jeśli przez  $\deg^{out}(u)$  oznaczmy stopień wychodzący wierzchołka  $u$ , czyli to, ile krawędzi z niego wychodzi (czyli ile głosów oddał), to PageRank wyrazić możemy wzorem

$$PR_v = \sum_{u \in \mathcal{P}(v)} \frac{a \cdot PR_u + 1}{\deg^{out}(u)}.$$

W tym momencie dyskusja w klasie stała się już niesłychanie chaotyczna. Wszyscy przekrzykiwali się między sobą, próbując ustalić, która z metod wyboru przewodniczącego jest najlepsza i kto powinien nim zostać. Co chwilę też pojawiały się kolejne metody i co chwilę ktoś wołał, że to on tak naprawdę wygrał. W końcu jednak zadzwonił dzwonek i trzeba było podjąć jakąś decyzję. Klasa zgodziła się więc, żeby ostatecznie wybory rozstrzygnąć, grając w marynarza.

# Adonis – świadek nagłej śmierci masywnej, pyłowej Astarte

\* Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Mahmoud HAMED\*

Wszechświat u początków swojego istnienia, niecałe 3 miliardy lat po Wielkim Wybuchu, był zupełnie inny niż ten, w którym żyjemy teraz. Próbujemy zrozumieć, w jaki sposób tworzyły się i umierały galaktyki w tym wczesnym Wszechświecie. Najciekawsze są te największe – ultramasywne galaktyki, bogate w pył i gwiazdy. Jak zdołały powstać w tak krótkim czasie? Czy procesy gwiazdotwórcze zachodziły w nich gwałtownie, czy też gwiazdy tworzyły się stopniowo, wykorzystując bogate w wodór środowisko?

Postęp technologiczny ostatnich dwóch dekad umożliwił powstanie instrumentów astronomicznych, które pozwalają obserwować nawet najdoleglejsze galaktyki. Do takich instrumentów należy interferometr ALMA, o którym piszemy w lipcowym numerze ( $\Delta_{21}^7$ ), czy radioinstrument LOFAR (zobacz  $\Delta_{21}^8$ ). Nie możemy zapomnieć też o wielkich teleskopach optycznych naziemnych (jak VLT czy Keck), jak również podczerwonych teleskopach umieszczonych na okrążających Ziemię satelitach (np. Herschel oraz Spitzer). Dzięki obserwacjom dowiedzieliśmy się, że galaktyki nie są niezmiennymi tworami, zastygłyimi w czasie i przestrzeni, ale przypominają żywe organizmy – rodzą się, starzeją i umierają. Za długość ich życia odpowiada prędkość procesów gwiazdotwórczych. W galaktyce gwiazdy mogą się tworzyć jedynie do wyczerpania wodoru – głównego budulca gwiazd. Gdy wodoru zaczyna brakować, nowe gwiazdy nie mogą powstawać i galaktyka umiera.

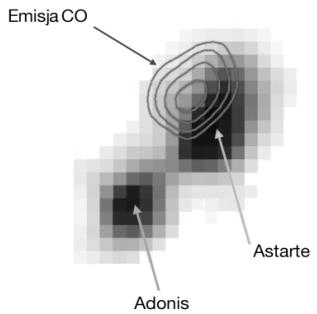
Z wieloletnich obserwacji wynika, że w dawnym Wszechświecie galaktyki tworzyły więcej gwiazd niż obecnie. Najwięcej gwiazd powstawało w czasach tzw. Kosmicznego Południa (*Cosmic Noon*), kiedy Wszechświat miał zaledwie 3 miliardy lat, czyli około 10 mld lat temu. Astronomów intryguje m.in. fakt, że niektóre z galaktyk żyjących w czasie Kosmicznego Południa były nawet kilkakrotnie bardziej masywne niż dzisiejsze znacznie starsze galaktyki, takie jak nasza Droga Mleczna. Są to tzw. galaktyki ultramasywne. Dzięki danym zebranym w szerokim zakresie pasma elektromagnetycznego w czasach Kosmicznego Południa możliwe stało się śledzenie losów takich ultramasywnych galaktyk. Możliwe stało się poszukiwanie odpowiedzi na nasuwające się pytanie, w jaki sposób ultramasywne galaktyki uzyskały swoją masę? Czy utworzyły swoje gwiazdy w krótkim okresie bardzo intensywnej aktywności gwiazdotwórczej, czy też w po prostu w dłuższym czasie bardziej wydajnie niż ich starsze koleżanki zamieniały wodór w gwiazdy?

Aby na te pytania odpowiedzieć i zbadać naturę ultramasywnych obiektów, należy dokładnie przeanalizować procesy fizyczne zachodzące w ośrodku międzygwiazdowym tych olbrzymów. Ponieważ informacje na temat galaktyki zawarte są w różnych długościach fal elektromagnetycznych, dlatego w przypadku dokładnej analizy obiektów astronomicznych takie globalne spojrzenie na właściwości fizyczne jest niezwykle istotne. W taki też sposób „przebadano” dwie ultramasywne galaktyki z epoki Kosmicznego Południa: Astarte i Adonisa. Okazało się, że Astarte jest nie tylko ultramasywna, ale też ultrapyłowa. Jest bardzo jasna w podczerwieni, czyli w zakresie promieniowania cieplnego emitowanego przez pył w ośrodku międzygwiazdowym. Astarte jest tak zapylona, że ledwo widać ją w świetle widzialnym! Jest to powszechna cecha pyłu w galaktykach – pochłania on fotony o krótszej długości fal i emituje ich energię w podczerwieni. Jest to tak zwane zjawisko tłumienia, o którym pisaliśmy już na łamach *Delty* ( $\Delta_{20}^6$ ). Adonis z kolei nie jest tak silnie zapylony i w przeciwnieństwie do Astarte widoczny jest w ultrafiolecie i świetle widzialnym, natomiast niknie w podczerwieni. Razem z Astarte tworzą interesujący układ przeciwnieństw, który może powiedzieć wiele o ich ewolucji i być może w niedalekiej przyszłości pomóc rozwiązać zagadkę, w jaki sposób rzadkie masywne galaktyki zdołały stać się bardziej masywne niż ich sąsiadki.

Polecamy serię trzech artykułów autorstwa Miguela Figueiry na temat wodoru i formowania się gwiazd w galaktykach:  $\Delta_{20}^4$ ,  $\Delta_{20}^{12}$  oraz  $\Delta_{21}^2$ .

Od Redakcji: to właśnie Autor tego artykułu nadał imiona obu galaktykom. Pochodzą one od imion greckich bogów i funkcjonują obecnie w świecie astrofizyki.

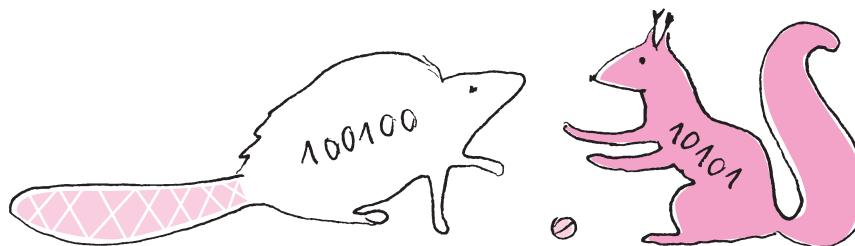
Nieodłącznym elementem kultu Astarte były akty seksualne spełniane pomiędzy wyznawcami odwiedzającymi świątynie a specjalnymi kapłankami zwanymi kedesza. Część oddawano również, paląc kadzidła, składając w ofierze produkty spożywcze, zwierzęta, a niekiedy także małe dzieci.



Astarte – wiek 3 miliardy lat, 40 razy cięższa od Drogi Mlecznej,  
Adonis – wiek 3 miliardy lat, 10 razy cięższa od Drogi Mlecznej

Ultramasywna Astarte została zaobserwowana za pomocą interferometru *Atacama Large Millimeter Array* (ALMA), który rejestruje zimny pył i emisję ze wzbudzonych cząsteczek w ośrodku międzygwiazdowym. Dzięki obserwacjom ALMA wykryto emisję pochodząą od tlenku węgla (CO) z obłoków molekularnych Astarte. Umożliwiło to oszacowanie masy wodoru w tej galaktyce. Okazało się, że poziom zawartości gazu w Astarte jest znacznie niższy niż w typowych galaktykach gwiazdotwórczych obserwowanych w okresie Kosmicznego Południa. Podstawowe parametry fizyczne tego interesującego układu: ilość obecnych w nich gwiazd i tempo powstawania nowych, są również ciekawe. Okazało się, że tempo powstawania gwiazd w Astarte jest znacznie wyższe, niż można wyjaśnić na podstawie jej zapasów wodoru. Jeśli Astarte nadal będzie tworzyć gwiazdy w tym tempie, to wyczerpie cały gaz w ciągu najbliższych 220 milionów lat. Okres 220 milionów lat dla galaktyki to bardzo niewiele w porównaniu do zwykłych skal czasowych, z jakimi mamy do czynienia w przypadku procesów zachodzących w galaktykach. Adonis jest również nietypowy: tworzy zbyt wiele gwiazd w stosunku do swojej masy – taki proces nazywamy silnym wybuchem gwiazdotwórczym.

Jednym z najważniejszych wniosków z tych obserwacji jest to, że ultramasywna Astarte, 40 razy bardziej masywna niż nasza o wiele starsza, ale wciąż młodo wyglądająca Droga Mleczna, umiera; Astarte nadal zmienia swój wodór w gwiazdy, kontynuując proces rozpoczęty w trakcie wybucha aktywności gwiazdotwórczej, jaki przechodzi właśnie jej sąsiad Adonis. Wynik ten motywuje do jeszcze dokładniejszych badań nad ewolucją galaktyk.



### Jak się nie pomylić, czyli potęga matematycznego myślenia

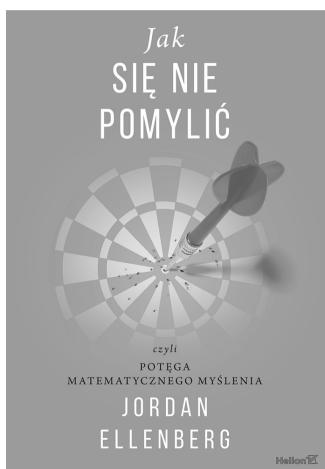
Jak się nie pomylić? Zapewne wszyscy zgadliśmy odpowiedź – należy sięgnąć po zdrowy rozsądek wzmacniony krytycznym myśleniem matematycznym. Ale i to nie zawsze wystarcza, o czym opowiada w swojej książce Jordan Ellenberg. Autor prowadzi nas od starożytnych początków matematyki przez peripetyje pionierów teorii prawdopodobieństwa w XVII wieku aż po kryzys replikacji we współczesnych naukach eksperymentalnych.

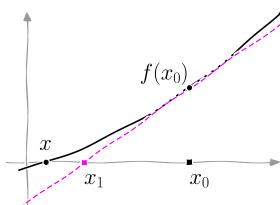
Atutem książki jest jej aktualność. Na co dzień jesteśmy bombardowani danymi liczbowymi, które pomimo swojej pozornej *ścisłości* (a może nawet dzięki niej) są w stanie wprowadzić nas w błąd. Ellenberg sięga po medialnie znane przykłady błędów w nauce i publicystyce, a następnie w prosty sposób pokazuje, jak się nie dać zwieść na manowce. Oprócz wnioskowania statystycznego znalazło się też miejsce na wycieczki w stronę filozofii matematyki, geometrii rzutowej, teorii informacji czy teorii liczb.

Przed jedną rzeczą muszę tylko przestrzec. O ile żywy język oryginału został dobrze oddany w polskim tłumaczeniu, to matematyczna precyzja autora niestety nie. W kwestiach rozróżnienia między sumą a iloczynem, ciągiem a szeregiem, cyfrą a liczbą Czytelnik musi więc miejscami liczyć sam na siebie.

A na koniec reklama: w maju ukazała się nowa książka Ellenga pt. *Shape* o geometrii ukrytej w problemach, w których byśmy się tego nie spodziewali. Jako geometra algebraicznego (człowiek widzący geometrię nawet w równaniach diofantycznych) autor z pewnością ma tu dużo do powiedzenia.

M. M.





Geometryczna interpretacja jednego kroku metody Newtona jako **metody stycznych**

Za to *metodą Simpsona* nazywamy pewien sposób przybliżonego obliczania całek (choć Bonaventura Cavalieri wpadł na ten sam pomysł już w 1639 r.). Skądinąd jest to szczególny przypadek ogólnej metody aproksymacji całek, wcześniej odkrytej przez... Newtona.

Wcześniej, zapewne około 1665 roku, do przybliżonego rozwiązywania podobnych równań wielomianowych Newton używał czegoś, co obecnie nazywamy **metodą siecznych** i traktujemy jako przybliżoną wersję metody... stycznych.

Ten algorytm dodatkowo komplikuje fakt, że na każdym kroku trzeba rozważyć nowy wielomian. To, że proces można iterować, podstawiając do *oryginalnego* wielomianu kolejno uzyskiwane przybliżenia, zauważył Joseph Raphson w 1690 roku – i dlatego metodę stycznych niektórzy nazywają *metodą Newtona-Raphsona*.

## Przez wieki z metodą Newtona

Piotr KRZYŻANOWSKI\*, Grzegorz ŁUKASZEWCZ\*

Tytułowa metoda służy do wyznaczania przybliżenia miejsca zerowego  $x$  zadanej funkcji  $f$ , czyli innymi słowy – przybliżonego rozwiązywania równań postaci

$$f(x) = 0.$$

Główną ideę najprościej przedstawić na rysunku. Zaczynamy od jakiegoś sensownego przybliżenia,  $x_0$ , poszukiwanego miejsca zerowego  $x$ . Jak wiadomo, gładką krzywą można w okolicy  $x_0$  dobrze aproksymować styczną do niej, wobec tego miejsce zerowe  $f$  powinno dawać się lepiej przybliżyć jako miejsce zerowe  $x_1$  prostej stycznej do  $f$  w punkcie  $x_0$  (zob. rysunek obok), a je przecież łatwo wyznaczyć:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Powyższy pomysł możemy powtarzać, dostając ciąg kolejnych przybliżeń  $x_0, x_1, x_2$  itd., zadanych wzorem rekurencyjnym

$$(1) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

– i właśnie ten algorytm nazywamy **metodą Newtona**. Może więc nas zdziwić, że powyższy wzór (i to od razu z bardzo ważnym uogólnieniem na przypadek *układów* równań nieliniowych z wieloma niewiadomymi!) został po raz pierwszy podany przez Thomasa Simpsona w 1740 roku – a więc wtedy, gdy Isaac Newton od kilkunastu lat spoczywał w grobowcu w Opactwie Westminsterskim... Co więcej, na jej geometryczny aspekt, od którego tu zaczeliśmy, zwróciły uwagę nawet jeszcze później.

### Metoda Newtona, jakiej używa Newton

Dlaczego zatem „metoda Newtona”? W traktacie *De analysis per aequationes numero terminorum infinitas*, pochodzący prawdopodobnie z 1669 roku, Newton przedstawia rozwiązywanie równań wielomianowych, posługując się takim oto przykładem:

$$(2) \quad x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Ponieważ na pierwszy rzut oka widać, że pierwiastkiem tego równania jest liczba około 2, to zapisując go w postaci  $x = 2 + p$  i podstawiając do równania (2), dostaniemy nowe równanie, tym razem na  $p$ :

$$(3) \quad p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0.$$

Skoro  $x \approx 2$ , to w konsekwencji  $p \approx 0$ . Nieznaną wartość  $p$  możemy więc wyznaczyć w *przybliżeniu*, pomijając w (3) wszystkie wyższe potęgi i dostając równanie uproszczone:  $10p - 1 = 0$ , skąd oczywiście  $p = \frac{1}{10}$ .

A dalej – wiadomo, powtóżmy schemat: teraz przecież chcemy rozwiązać równanie (3), dla którego znamy przybliżone rozwiązanie  $p \approx \frac{1}{10}$ . Zapisujemy więc dokładne  $p$  w postaci  $p = \frac{1}{10} + q$ , gdzie  $q \approx 0$ . Podstawiamy, dostajemy kolejny wielomian itd.

We współczesnym języku dostajemy ciąg kolejnych przybliżeń (ograniczamy się do podania wyniku do pierwszej niedokładnej cyfry):

$$\begin{aligned} x_0 &= 2, \\ x_1 &= x_0 + p = 2,1, \\ x_2 &= x_0 + p + q = 2,09456, \\ x_3 &= \dots = 2,0945514816, \\ x_4 &= \dots = 2,09455148154232659149, \\ x_5 &= \dots \text{ itd.} \end{aligned}$$

Jak łatwo zauważać, nieliniowe równanie na idealną poprawkę zastępujemy równaniem liniowym, które faktycznie odpowiada znalezieniu miejsca zerowego stycznej... a więc – to jest metoda Newtona, zastosowana do  $f(x) = x^3 - 2x - 5$ . Tyle że w algorytmie podanym przez Newtona nie występuje ani wzór (1), ani nawet pojęcie pochodnej – którego przecież Newton był współtwórcą!

Ścisłą odpowiedź na pytanie o to, jak szybko jest zbieżna metoda Newtona i przy jakich założeniach na funkcję  $f$ , podał dopiero Augustin Louis Cauchy w 1829 roku. Np. dla złożliwie dobranego wielomianu  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  metoda Newtona zmniejsza błąd dwukrotnie, co mniej więcej co trzy iteracje dodaje jedno nową cyfrę wyniku.

Z drugiej strony, musimy być świadomi przełomu, jakiego dokonał Newton: wcześniejsze metody przybliżonego rozwiązywania równań wielomianowych – na przykład metoda Viète'a z 1600 roku (której nie przedstawiamy tutaj, choć wiadomo, że Newton bardzo dokładnie ją przestudiował) – nie dość, że były bardziej złożone, to po każdej iteracji zwiększały dokładność wyniku tylko o jedną cyfrę. Tymczasem, jak mogliśmy zobaczyć w przykładzie powyżej, metoda Newtona w „typowym” przypadku po każdej iteracji z grubsza podwaja(!) liczbę dokładnych cyfr wyniku – i tego faktu Newton był w pełni świadom.

I choć w żadnym ze znanych rękopisów Newtona nie znaleziono wzoru (1), to jednak pamiętajmy, że zdarzyło mu się użyć dokładnie takiej metody do wyznaczenia miejsca zerowego funkcji nie będącej wielomianem (zob. G. Łukaszewicz: *Równanie Keplera w Principiach Newtona*,  $\Delta_{21}^{10}$ ).

### Metoda Newtona, zanim narodził się Newton

Czy Newton był pierwszym, który wskazał tak szybko zbieżną metodę rozwiązywania równań? Okazuje się, że w pewnych *bardzo szczególnych* przypadkach już starożytni korzystali z algorytmu, który dziś łatwo nam zinterpretować jako zastosowanie metody Newtona.

Na przykład Heron z Aleksandrii około 1600 lat przed Newtonem opisywał babilońską metodę – my znamy ją jako **metodę Herona** – wyznaczania przybliżonej wartości  $x = \sqrt{a}$ . Pomyśl był całkiem prosty: jeśli znamy jakieś przybliżenie  $x_0 > \sqrt{a}$ , to wtedy  $\frac{a}{x_0} < \sqrt{a}$  również jest przybliżeniem  $\sqrt{a}$ . Wobec tego ich średnia będzie przybliżeniem na pewno lepszym od  $x_0$  itd... W efekcie dostajemy iterację

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left( x_k + \frac{a}{x_k} \right)$$

– a to przecież nic innego, jak metoda Newtona zastosowana do równania

$$x^2 - a = 0.$$

Żyjący kilka wieków po Heronie Theon z Aleksandrii podawał takie otwierające geometryczne uzasadnienie tego procesu. Skoro zamiast dokładnej wartości  $x = \sqrt{a}$  znamy jej przybliżenie  $x_0 = x + p$  (i oczywiście  $p$  jest małe), to pole kwadratu o boku  $x_0$  jest równe

$$x_0^2 = (x + p)^2 = x^2 + 2xp + p^2 = a + 2(x_0 - p)p + p^2.$$

Zatem znów, dokładając malutki kwadracik  $p^2$  – czyli zaniedbując wyższe potęgi  $p$  (gdzieś to chyba już widzieliśmy?) – możemy zamiast powyższego równania kwadratowego rozwiązać prostsze, liniowe:

$$x_0^2 = a + 2x_0p,$$

skąd wyznaczamy przybliżenie idealnej poprawki  $p = \frac{x_0^2 - a}{2x_0}$  i w konsekwencji – lepsze przybliżenie rozwiązania:

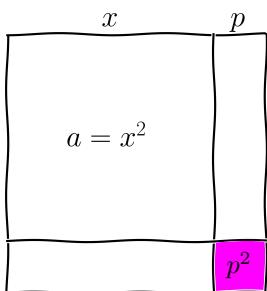
$$x_1 = x_0 - p = x_0 - \frac{x_0^2 - a}{2x_0} = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{a}{x_0} \right).$$

A dalej – wiadomo, powtarzamy całą operację z nowym przybliżeniem  $x_1$  itd.

Warto w tym momencie dodać, że Newton, a przed nim arabscy matematycy w XII wieku – zob. [Ypma, str. 539 i 541], podali analogiczne eleganckie metody przybliżania pierwiastków dowolnego stopnia  $n$ , równoważne wykorzystaniu metody stycznych do równania  $x^n - a = 0$ .

### Metoda Newtona dzisiaj

Omawiany algorytm (1), a zwłaszcza jego wielowymiarowy wariant opracowany przez Simpsona, nie jest bynajmniej historycznym zabytkiem: to jedna z powszechnie używanych w nauce i technice metod numerycznych. Sprowadzenie trudnego zadania nieliniowego o wielu milionach niewiadomych do sekwencji zadań liniowych pozwala użyć np. wyrafinowanych algorytmów algebry liniowej (o jakich pisaliśmy w *Delcie*  $\Delta_{18}^7$ ).



Geometriczne uzasadnienie metody Herona

Ale nie tylko! Na przykład w procesorze Intel Itanium operacja dzielenia dwóch liczb rzeczywistych  $b/a$  sprawdza się do pomnożenia  $b \cdot \frac{1}{a}$ . Aby zaś obliczyć  $x = \frac{1}{a}$ , projektanci zdecydowali się wykonać kilka iteracji algorytmu, w którym na szczęście *nie występuje* operacja dzielenia, a za to można skorzystać z instrukcji FMA (*fused multiply-add*) procesora:

$$r_k = 1 - ax_k,$$

$$x_{k+1} = x_k + x_k r_k.$$

Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że tak określony ciąg  $(x_k)$  jest po prostu ciągiem generowanym metodą Newtona dla  $f(x) = \frac{1}{x} - a$  oraz, że dla  $a > 0$  zachodzi

$$\left| x_{k+1} - \frac{1}{a} \right| = a \cdot \left| x_k - \frac{1}{a} \right|^2.$$

I właśnie na tym – że (w typowym przypadku) błąd w następnym kroku jest rzędu kwadratu błędu w bieżącym – polega nieprzemijający czar metody Newtona.

#### Źródła:

- J.-L. Chabert, *History of Algorithms*, Springer 1999.
- H. Goldstine, *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, Springer 1977.
- T. Ypma, *Historical Development of the Newton-Raphson Method*, SIAM Review 37 (4) 1995.

## Coraz bliżej kota

O kocie Schrödingera słyszeli wszyscy. Wróćmy do niego za chwilę, na razie jednak przypomnijmy dwa doświadczenia, które pozwoliły odpowiedzieć na powtarzane od wieków pytanie: czy światło to fala, czy strumień cząstek. Pierwsze z nich wykonał na początku XIX wieku Thomas Young i udowodnił, że światło ulega dyfrakcji i interferencji, co świadczy niezbicie o jego falowej naturze. Kilkadziesiąt lat później inne doświadczenia pozwoliły odkryć efekt fotolektryczny, który na początku XX wieku wyjaśnił Albert Einstein. Stwierdził on, że światło składa się z kwantów, czyli „porcji energii”, zwanych dziś fotonami. W naszych rozważaniach skupimy się jednak na tym, co było później.

### Fotony interferują między sobą?

Koncepcja Einsteina pozwoliła wyjaśnić efekt fotolektryczny, a także kilka innych zjawisk. Stworzyła jednak nowy problem: jak wyjaśnić interferencję światła? Może jest ona wynikiem oddziaływania

*Marcin BRAUN*

fotonów? Czy tam, gdzie powstaje ciemny prążek interferencyjny, fotony zderzają się tak nieszczęśliwie, że ulegają zniszczeniu? To można sprawdzić. Wykonajmy doświadczenie Younga jeszcze raz, ale tym razem weźmy źródło światła tak słabe, żeby wypuszczało z siebie po jednym fotonie co sekundę. Zamiast ekranu użyjemy kliszy fotograficznej, po każdym fotonie zostanie jedna kropka. Pojedynczy foton nie będzie miał z czym oddziaływać. Pewnie część fotonów przeleci przez jedną szczelinę, a część przez drugą. Nie zaobserwujemy więc prążków interferencyjnych, ale dwie plamy – po jednej za każdą szczeliną. Jeśli ekran znajduje się daleko od szczelin, plamy te nałożą się na siebie i wtedy także prążków nie będzie. Takie doświadczenie rzeczywiście zrobiono. Okazało się, że po każdym fotonie została jedna kropka. W miarę jednak, jak kropek przybywało, układły się one w dobrze znane prążki interferencyjne. Tak więc foton nie interferuje z innymi fotonami. On interferuje sam ze sobą! Najwyraźniej nie tylko strumień fotonów, ale nawet pojedynczy foton jest falą.

### De Broglie: wszystko jest falą

Sprawa skomplikowała się jeszcze bardziej, gdy francuski książę Louis Victor Pierre Raymond de Broglie<sup>†</sup> z księżycem iście rozmachem uznał, że skoro światło może być jednocześnie falą i strumieniem cząstek, to taką samą podwójną naturę powinny mieć wszystkie inne cząstki mikroświata. A jaką długość ma fala związana z cząstką? De Broglie skorzystał ze wzoru na pęd fotonu  $p = h/\lambda$ , czyli  $\text{pęd} = \frac{\text{stała Plancka}}{\text{długość fali}}$ . Zgodnie z tym wzorem foton o pędzie  $p$  ma długość fali  $\lambda = p/h$ . Uczony przyjął, że taki sam wzór obowiązuje również dla innych cząstek. W jaki sposób można sprawdzić doświadczalnie tę hipotezę? Użyjmy stosunkowo lekkich cząstek, aby przy rozsądnej prędkości miały w miarę mały pęd, a tym samym – w miarę dużą długość fali. Dobrym rozwiązaniem okazują się elektrony. Odpowiadająca im długość fali jest mniej więcej rozmiarów atomu. Co prawda trudno byłoby wyciąć dwie szczeliny oddalone o rozmiar atomu, a tym bardziej wykonać siatkę dyfrakcyjną zawierającą wiele rozmieszczonej tak szczelin, ale takie siatki Natura produkuje w wielkiej ilości. To kryształy. Już w 1927 roku, zaledwie cztery lata po pomyśle de Broglie'a, potwierdzono doświadczalnie dyfrakcję i interferencję elektronów. Później przeprowadzono to doświadczenie w nowej wersji. Dobrano prędkość elektronów i częstotliwość

<sup>†</sup>Wszyscy czytają to nazwisko /de broj/, tak też podaje francuska Wikipedia, cytując podręcznik fonetyki. Słownik Larousse'a podaje wymowę /de brogli/.

Stała Plancka wynosi:  

$$h = 6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$
.



### Rozwiążanie zadania M 1685.

$$n \in \{1, 2\}.$$

Niech liczba Ahmeda będzie miała dzielniiki  $1 = d_0 < d_1 < \dots < d_k = n$ . Zauważmy, że liczba  $n + 1$  jest względnie pierwsza ze wszystkimi tymi dzielnikami, stąd liczba

$$A := (d_0 + 1)(d_1 + 1) \cdot \dots \cdot (d_{k-1} + 1)$$

musi być podzielna przez

$$B := d_0 \cdot d_1 \cdot \dots \cdot d_k.$$

Ponadto

$$d_1 \geq d_0 + 1,$$

$$d_2 \geq d_1 + 1,$$

... ,

$$d_k \geq d_{k-1} + 1.$$

Mnożąc te nierówności, otrzymujemy, że  $A \leq B$ , a skoro  $B \mid A$ , to  $A = B$ , czyli wszystkie nierówności w (\*) stają się równościami. Ale wtedy

$n = d_k = d_{k-1} + 1$ , czyli  $n$  jest podzielne przez  $d_{k-1} = n - 1$ . Stąd albo  $n = 2$ , albo liczba  $d_{k-1}$  nie istnieje, czyli  $n = 1$ .

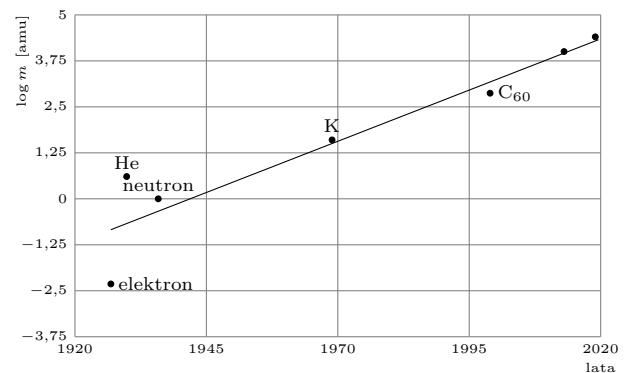
promieniowania rentgenowskiego w taki sposób, aby fala materii elektronów i fala rentgenowska miały tę samą długość. Okazało się, że uzyskane obrazy interferencyjne są identyczne. Sprawdzono też, że elektron interferuje sam ze sobą, a nie z innymi elektronami – podobnie jak to zrobiono dla fotonów. Teorię fizyczną uwzględniającą falowe własności materii nazwano mechaniką kwantową. Opisuje ona wiele niezwykłych własności – elektron biegnie dwiema drogami równocześnie, atom jednocześnie rozpada się i nie rozpada, a w dodatku nie można przewidzieć, co się wydarzy: można najwyżej obliczyć prawdopodobieństwo.

### Falowa natura mikroświata?

Im większa masa cząstki, tym większy jej pęd, a co za tym idzie – krótsza długość fali de Broglie'a. Dlatego nikt nie obserwuje falowej natury materii na co dzień. Podobnie jest z innymi efektami przewidywanymi przez mechanikę kwantową. Właśnie dlatego kot Schrödingera w stanie mieszanym, „jednocześnie żywy i martwy”, jest dla nas takim absurdem. Kolejna, ostatnia już linia obrony zdrowego rozsądku przed wnioskami z mechaniki kwantowej to stwierdzenie, że jest ona teorią mikroświata. Tam, na dole, mogą się działać dziwne rzeczy, ale nasz zwykły świat jest porządkowy, klasyczny. W rzeczywistości jednak nie istnieje żadne górne ograniczenie wielkości ciał, dla których obowiązują prawa fizyki kwantowej. Zgodnie z tą teorią kot może być w superpozycji stanów nie tylko dlatego, że w sprytny i okrutny sposób połączono go z atomem, ale po prostu dlatego, że sam jako obiekt materialny podlega mechanice kwantowej.

### Coraz większe, coraz cięższe

Ten brak górnej granicy obowiązywania praw mechaniki kwantowej najlepiej widać właśnie w przypadku interferencji. W ciągu stu lat, które minęły od czasu pierwszych doświadczeń z dyfrakcją i interferencją elektronów, takie same zjawiska obserwujemy dla coraz większych i cięższych obiektów. Po elektronach przyszły neutryny i lekkie atomy, potem zaś coraz cięższe atomy i cząsteczki. Postęp przedstawiono na wykresie.



rok	masa $m$ [amu]	$\log m$
1927	0,005	-2,3
1930	4	0,6
1936	1	0
1969	39	1,6
1999	720	2,9
2013	10 000	4
2019	25 000	4,4

Ostatnie dwie kropki na wykresie celowo nie zostały podpisane. Odpowiadające im cząsteczki nie mają nazwy zwyczajowej, a ich budowa jest dość skomplikowana.

Na skali pionowej przedstawiono logarytm masy wyrażonej w jednostkach masy atomowej, oznaczanej od skrótu angielskiego wyrażenia przez amu. Aktualny rekord, ustanowiony w 2019 roku, to około 25 000 amu, prawie 50 mln razy więcej od masy elektronu. Jeszcze większe wrażenie robi (przynajmniej na mnie) równoległa ścieżka badań – interferencja obiektów nie aż tak ciężkich, ale za to coraz bliższych chemii życia. Ostatnie (2020 r.) osiągnięcie to potwierdzenie falowych właściwości gramicydyny. Jest to naturalny polipeptyd. Jego cząsteczka składa się z 15 aminokwasów. Do białek już tylko jeden krok.

### Co dalej?

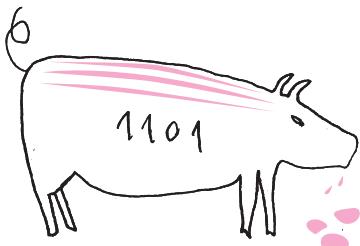
Jeśli dotychczasowy trend się utrzyma, młodsi z nas mają szansę dożyć interferencji wirusów, za jakieś 40 lat, a niektórzy może nawet interferencji bakterii, po kolejnych 40 latach. Około 2380 roku potwierdzimy interferencję kota, a kilkanaście lat później sami możemy być przedmiotem takich doświadczeń. Jeśli oczywiście tymczasem nie spełni się inna przepowiednia, oparta na podobnych wyliczeniach (zob. wycinek z pisma „Orędownik” z roku 1936).

## W r. 2139 będą na świecie sami warjaci

Jeden z Anglików obliczył, że w roku 2139 cały świat będzie składał się tylko z samych warjatów. Nie są to żadne przepowiednie, ani też jakieś dociekania, tylko ściśle matematyczne obliczenia. W roku 1859 wypadła 1 warjat na 535 zdrowych, w roku 1897 jeden warjat już tylko na 312 zdrowych; dalej rozwija się stosunek następujący: w r. 1926 — 1:150, w r. 1977 będzie 1:100, idąc za tym sposobem liczenia, dochodzi się do wniosku, że w roku 2139 cały świat będzie się składać z samych warjatów. Te obliczenia są dokonane ściśle matematycznie. Jak można więc nie wiezyć!

# życie na Żywo 125

Nigdzie w Biblii drzewo wiadomości nie jest nazwane, to my przypisaliśmy je rodzajowi... *Malus*.



Nazwa *arboretum* wywodzi się od łacińskiego słowa *arbor* – drzewo.

## Najstarsze drzewo hodowlane świata

Jaki to owoc – ważny dla uczniów zgłębiających fizykę klasyczną i dla czytelników Biblii (swoją drogą, ile razy czytaliście Biblię? Ja niewiele)? Kojarzy się z Adamem i Ewą, boginiami greckimi, Ateną, Afrodytą i Herą, i Newtonem leżącym w sadzie. Chodzi oczywiście ... o jabłko i jabłoń. Nic dziwnego – o czasach Edenu zapisów brak, ale pierwsze jabłonie (jadalny owoc, *Malus sieversii*) rosły zapewne ponad 10 tys. lat temu w Azji Południowej (dziś Kazachstan). Jako pożywienie – dla ptaków były za duże, ale upodobały je sobie brunatne górskie niedźwiedzie i sądzi się, że to one jabłka rozpowszechniły.

W Grecji i Rzymie znane były już jako smaczny owoc (w starożytnym Rzymie 30 odmian). Nie wiadomo dokładnie, ile jest dziś odmian jabłek na globie, podawane liczby wahają się między 10 a 20 tysięcy w bankach genów. Dostępnych na rynku około 2500. Znana jest na przykład oryginalna odmiana o czarnych owocach – Diament Tybetu. Drzewa te rosną na wysokości około 3000 m n.p.m., przy dużych wahaniach temperatury.

To, co możemy kupić, zależy od bieżącej mody – u nas modę na jabłka inicjował jeszcze w drugiej połowie XX wieku polski sadownik, profesor Szczepan Pieniążek (pamiętam odmianę *macintosh!*). Dziś szukamy jabłek chrupiących, soczystych, lekko kwaśnych, poprzednio modne były słodkie i mączyste (reneta). Zachowały się też polskie regionalne nazwy odmian: koraliki, wenetki, mnichy, burty, brzeczkki, żelazka, cytrynowki, grzechotki, kapuśniaki, wędliki... Tylko wyobraźni brak, czym się różniły. Do Polski jabłka sprowadzili Cystersi w XII wieku, dziś szczerzimy się mianem największego eksportera w Europie i na świecie, a przecież konkurujemy z najważniejszymi producentami jabłek – Ameryką i Chinami.

Jabłoń owocuje dzięki zapylению przez owady pyłkiem z obcego drzewa. Dlatego nowej odmiany nie rozmnaża się z nasion, tylko szczepiąc pędy (zrazy) na utrwalonych podłożach, pniach. Czyli... klonuje! Wprowadzenie nowej odmiany trwa ponad 10 lat (trzeba doczekać stabilnego owocowania), dlatego jest to zabieg dość kosztowny. Pierwszy patent na odmianę jabłoni przyznano w 1933 roku.

Z pewnością do wyhodowania nowej odmiany łatwiejsze by było zastosowanie techniki inżynierii genetycznej. Można by na przykład hodowanej komórce jabłoni (o smacznym owocu), której brak odporności na parch jabłoni, dołożyć gen nadający taką odporność. Jednak poza podobnymi pomysłami, które narodziły się w głowach akademików, żadna duża firma rolnicza nie podejmie się takich manipulacji – znając historię społecznych walk o wprowadzanie roślin GMO do obrotu. Owszem, jedną próbę uczyniono – w sprawie chyba dość błażej (o czym za chwilę). Było to możliwe, ponieważ od 2010 roku znany jest cały genom jabłoni zawarty w 17 chromosomach, zapisany 742 300 nukleotydami. Ciekawe: genom ten jest identyczny z gruszkowym w 96,35%. Dzisiejsze jabka, o czym świadczy genetyka, to hybryda 4 gatunków. Jabłoń jest uznawana za najstarsze drzewo hodowlane.

Wracając do wspomnianej próby – postanowiono zmienić niepożądaną przez konsumentów cechę – brązowienia miąższu przekrajanego lub zranionego jabłka. Podobno w USA marnuje się połowa zbiorów z tego powodu – Amerykanie takiego jabłka jeść nie chcą!!! Brązowienie jest skutkiem działania enzymu, oksydazy polifenolowej, na naturalne fenole i przekształcania ich w polifenole. W owocu oba składniki zamkniete są w różnych „przedziałach” – uszkodzenie miąższu te substraty miesza. Blokując gen enzymu, uzyskano oczekiwany efekt braku zmiany barwy po uszkodzeniu tkanki. Tę odmianę zatwierdziła do wprowadzenia na rynek amerykańska Agencja Żywności i Leków (FDA). Nad podobną procedurą zastanawia się Kanada...

Szukając informacji o jabłoniach, natknęłam się w Internecie na obszerny opis arboretum Bolestraszyce. Nie byłam tam, ale myślę, że mogę polecić wizytę w założonym w 1975 roku naukowym parku – położonym 7 km na północny wschód od Przemyśla. Obiekt obejmuje park i dwór (w połowie XIX w. mieszkał tu i tworzył znakomity malarz Piotr Michałowski), a także dziewiętnastowieczny fort dawnej Twierdzy Przemyśl. Rosną tam m.in. odmiany: boiken, antonówka, rapa zielona, kronselska, malinowa, kosztela, koksa, grafsztynek, jonatan oraz odmiany renet.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

# Intuicja matematyczna w Raju?

Mirosław LACHOWICZ\*

E quindi uscimmo a riveder le stelle – ostatni wers „Piekła”, Dante Alighieri

W miesiącu wydania tego numeru *Delta* mija 700 lat od śmierci Dantego Alighieri (1265–1321). Wielki poeta zmarł w Rawennie, wygnany z rodzinnej Florencji. Warto zobaczyć dekret skazujący Dantego na wygnanie, gdyż wygląda bardzo współcześnie (do pewnego momentu oczywiście, palenie na stosie bowiem wyszło z mody):

*Alighieri Dante jest osądzonej za baraterię, oszustwo, fałsz, umyślne wykroczenia, złośliwość, nieuczciwe nawoływanie, nielegalne dochody, pederastię i skazany na 500 florenów, wieczysty zakaz pełnienia funkcji publicznych, wieczyste wygnanie (zaocznie), a jeśli zostanie ujęty, ma być spalony na stosie, aż umrze (tłumaczenie – ML). Z Archiwum Miasta Florencji, 10 marca 1302 roku.*

No cóż, artystom nigdy nie było łatwo, szczególnie gdy wdali się w politykę. Kto miał słuszność? To okazuje się zazwyczaj po czasie. W przypadku Dantego jego postawa okazała się gruntownie niesłuszna za jego czasów. Z drugiej strony niewiele jest osób, które zrobiły dla Florencji tyle, ile zrobił Dante. Ciekawe, jak wyglądałby współczesny język włoski, gdyby Dante postanowił napisać swoje najważniejsze dzieło po łacinie albo w innym niż toskański, dokładniej florentyński, dialekcie, np. *romagnolo*: Romania przygarnęła biednego uchodźcę.

Za najważniejsze dzieło Dantego uznaje się *Komedię* – poemat napisany w dialekcie florentyńskim. W 1357 roku Giovanni Boccaccio (1313–1375), też związany z Florencją, nazwał *Komedię* *Boską Komedią*, i tak już zostało.

Co ma jednak poezja Dantego do naszych tematów? Otóż był to człowiek wszechstronnie wykształcony, nic więc dziwnego, że w jego dziele pojawiają się odniesienia do matematyki. Czasami dość zaskakujące i powodujące, że można zaryzykować tezę o intuicji matematycznej poety. Znajduje się w *Komedii* nie tylko odniesienia do liczb, ale i niebanalne struktury matematyczne. Owe odniesienia pojawiają się „nie wprost” – wymagają odkrycia. Odkrycia takie najczęściej są niejednoznaczne, więc wymagają interpretacji. Jednym słowem – jest ciekawie.

Najłatwiej wychwycić odniesienia do liczb – swoistą numerologię, popularną w tamtych czasach. Należy pamiętać, że był to okres przejścia od rzymskiego (addytywnego) sposobu zapisywania liczb – bardzo niewygodnego w rachunkach, a wręcz uniemożliwiającego operacje matematyczne – do systemu dziesiętnego i cyfr arabskich (a właściwie hinduskich). Dodatkowo liczby nie tylko wyrażały ilość (jak obecnie), ale były przede wszystkim symbolami. Podobnie jak u Mickiewicza pojawia się tajemnicza liczba 44, u Dantego (**Czyściec**, XXXIII, 40–45) pojawia się tajemniczy Mściciel 515, przedstawiony jednak jako 505 i 10. W systemie rzymskim byłoby to DV i X, a więc DUX, czyli książę (niektórzy badacze twierdzą, że chodziło o Henryka VII Luksemburskiego). Detektywistycznych umiejętności wymaga obliczenie wzrostu Lucyfera na podstawie informacji podanych przez Dantego (**Piekło**, XXXIV, krag IX). Wynika z nich, że Lucyfer, zdaniem Dantego, jest spory: w przybliżeniu ma 1128 m wzrostu, czyli tyle, ile góra Jesiennik (m n.p.m.) w Beskidzie Sądeckim. (Niektórym, w przybliżeniu,

wychodzi 1129 m, czyli wysokość zachodniego końca Gubałówki.)

Badacze Dantego, Dantyści, wychwytyują następujące znaczenia liczb:

- 1 – początek, symbol Boga (w sensie Starego Testamentu), doskonałość absolutna;
- 2 – połączenie, zespolenie;
- 3 – Trójca Święta (a więc w sensie Nowego Testamentu);
- 4 – podstawowe wymiary (wliczając w to czas), ale też pory roku;
- 7 – połączenie Nieba i Ziemi (3 + 4), dla pitagorejczyków – doskonałość człowieka, a więc symbol CZŁOWIEKA;
- 9:  $9 = 3^2$  – doskonałość najwyższa, dla Dantego symbol Beatrycze (BeatrIX po łacinie),
- 10:  $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ , ale też 1 – początek, 0 – koniec (chaos), Bóg (3) i człowiek (7), często symbol MIŁOSIERDZIA.

Franco Nembrini (włoski pedagog i publicysta) zwraca uwagę na liczby 7, 10 i 13, gdzie 13 symbolizuje zarówno Stary (1), jak i Nowy (3) Testament – zgodnie z rzymskim (addytywnym) systemem liczbowym, obowiązującym w zasadzie do końca średniowiecza. W rezultacie liczba 13 nabiera znaczenia boskiego, choć w Polsce (ale nie we Włoszech), jak wiadomo przynosi nieszczęście. We Włoszech natomiast w 13 osób nie należy zasiadać do stołu. Co kraj, to obyczaj. Zdaniem Nembriniego 13 to symbol Zbawiciela.

W rezultacie otrzymujemy tabelę wykazującą ciekawe interpretacyjne możliwości. Podaję tu tylko te najprostsze. Np. w **Piekle**:

- Pieśń 1: 136 wierszy:  $1 + 3 + 6 = 10$
- Pieśń 2: 142 wiersze:  $1 + 4 + 2 = 7$
- Pieśń 3: 136 wierszy:  $1 + 3 + 6 = 10$
- ...
- Pieśń 12: 139 wierszy:  $1 + 3 + 9 = 13$

Tabela 99 pieśni (oprócz wstęp) wykazuje w ten sposób w olbrzymiej większości liczby 7, 10 i 13. Nembrini poddał tę tabelę daleko idącym badaniom, otrzymując ciekawe zależności. Pytanie, czy Dante celowo opracował taką skomplikowaną strukturę, czy jest to przypadek, pozostaje otwarte.

Komedia ma dość ścisłą strukturę: składa się z 14 233 wersów ( $1 + 4 + 2 + 3 + 3 = 13$ ) po 11 sylab (tzw. tercyna – strofa trzywersowa). Obejmuje 100 pieśni (w tym wstęp):

- **Piekło** – 33 pieśni oraz wstęp,
- **Czyściec** – 33 pieśni,
- **Raj** – 33 pieśni.

Oczywiście liczba 33 nie jest przypadkowa.

**Piekło** składa się z 9 kregów i przedsonka (dla gnuśnych, którzy, uwaga, uwaga, nie dbali ani o dobro, ani o зло), razem 10 poziomów piekielnych.

**Czyściec** to brzeg (plaża), Przedczyściec, 7 tarasów (stopni) oraz Raj Ziemska (Ogród Eden, na szczycie), razem 10 poziomów czyśca.

**Raj** to 9 sfer niebieskich ( kolejne nieba, w tym np. 4. niebo dla uczonych oraz 9. niebo to tzw. *Primum Mobile* – Pierworuch) razem 10 poziomów rajskich.

**Beatrycze** ubrana jest w 3 kolorach: biały, czerwony i zielony – to symbol Trójcy Świętej, z czasem kolory flagi włoskiej.

W Komedii, zwłaszcza w opisie **Raju**, pojawiają się elementy astronomiczne i kosmologiczne, oczywiście zgodne z wiedzą kosmologiczną i wizją Kościoła w wersji średniowiecznej. W szczególności Wszechświat jest zorganizowany według Nieba, w wersji geocentrycznej pochodzącej od Arystotelesa (384–322 p.n.e.) i Ptolemeusza (100–170 n.e.). *Primum Mobile – Pierworuch* to pierwsza (najbardziej zewnętrzna) sfera kosmiczna poruszająca się wokół Ziemi. Według Arystotelesa jest źródłem czasu i przestrzeni. Średniowiecze dorzuciło do tego „Niebo duchowe”.

„Natura biegu, co w środku spoczywa,  
A wszystko rusza i ruchu użycza,  
Stąd się poczyna, z swego pogranicza.  
Duch boży zajął tej sfery przestrzenie,  
Od niego miłość zapala plomienie,  
Co ją porusza, i moc, co z niej spływa.  
Światło i miłość obeszły ją kołem,  
Jak ona inne opasuje społem;  
A taki okrąg, on co go buduje,  
Jak zbudowany sam jeden pojmuje.  
Nieoznaczony bieg jej kołowrotu,  
Choć sam jest miarą innych sfer obrotu,  
Równie jak stoi znak liczby dziesiątej  
Na swej połowie i swej części piątej.”

**Raj**, XXVII, 106–117 (JK).

Korzystałem z dostępnego w Internecie tłumaczenia Edwarda Porębowicza (1862–1937) oraz Juliana Korsaka (1807–1855). Te drugie oznaczone są (JK). Ciekawostką jest, że po włosku słowo tłumacz (traduttore) bliskie jest słówu zdrajca (traditore).

W *Komedii* znajdują się odniesienia do nauki i technologii, np. do grawitacji (Piekło, XXXII, 73–74), powstawania tęczy (Czyściec, XXV, 91–93), ruchu (Piekło XXXI, 136–141; Raj, XXIX, 25–27), zegarów (Raj, X, 142–144; XXIV, 13–15) oraz kompasu (Raj, XII, 28–30).

Każda z 3 części *Komedii* kończy się słowem „**gwiazdy**”:

„Tedyśmy na świat wyszli, witać **gwiazdy**...”  
**Piekło**, XXXIV, 139.

„Czysty i gotów wylecieć na **gwiazdy**.  
**Czyściec**, XXXIII, 145.

„Miłość, co wprawia w ruch słońce i **gwiazdy**.  
**Raj**, XXXIII, 145.

Taka ścisła struktura utworu może wydawać się sprzeczna z romantyczną wizją poety, który jest tylko „uzbrojony” w fantazję. Okazuje się, że narzucenie sobie ścisłych reguł, zadania pewnej struktury, daje efekt w postaci piękna utworu. Należy przypuszczać, że utwór bez tych ścisłych ram nie miałby swojej głębi i powabu. Zatem nie tylko fantazja, ale struktura tworzy dzieło. Pod tym względem matematyka niczym nie różni się od poezji.

Inne spojrzenie na związki matematyki i poezji można znaleźć np. w książce *Mathematics like Poetry*, Andrzeja Lasoty (1932–2006), pod redakcją H. Gackiego, Wydawnictwo UŚ, Katowice 2006. Jest też czasopismo *Journal of Mathematics and the Arts*, w którym można znaleźć artykuły na ten temat. Warto polecić również pracę M. Szurka *Liczby w kulturze, „Matematyka Stosowana”* 7, 2006 oraz inne pozycje tego autora.

W *Komedii* można doszukać się głębszych związków ze strukturami matematycznymi.

„Jak się z jednością pięć i sześć rozwija.”

**Raj**, XV, 55–57 (JK).

Przypomina to ideę aksjomatyki Giuseppe Peana (1858–1932)! Oczywiście jest od niej bardzo odległa (również czasowo, około 600 lat), ale traktując 5 i 6 jako przykłady  $n$  i  $n+1$ , można odkryć przypoczątek aksjomatyki Peana.

Dante próbuje oszacować liczbę aniołów. Św. Tomasz z Akwinu (1225–1274) był zdania, że „liczebność aniołów przekracza liczebność materii” – w związku z tym oszacował liczbę aniołów jako  $10^4 \times 10^5 = 10^9$ . Należy pamiętać, że w tamtych czasach 1000 to była liczba „bardzo duża”. Trudno wyobrazić sobie wówczas znaczną liczbę osób, które miałyby wtedy do czynienia z obiektami o liczebności tysiąca. Zapewne argument Św. Tomasza był taki: weźmy liczbę istotnie większą od 1000, które samo w sobie oznacza „bardzo dużo”.

Do dzisiaj mówi się we Włoszech *grazie mille* (tysięczne podziękowania) lub *grazie infinite* (nieskończone podziękowania), albo *mille bacci* (tysiąc pocałunków) i *bacci infinite* (nieskończone pocałunki), używając tych wyrażeń w zasadzie jako synonimy. Nawiasem mówiąc, symbol nieskończoności  $\infty$ , zaproponowany przez Johna Wallisa w traktacie *De sectionibus conicis* (1655), najprawdopodobniej pochodził od symbolu oznaczającego w systemie rzymskim 1000.

Dante, szacując liczbę aniołów, zainspirował się legendą o twórcy szachów (Sissa Nassir, Indie, Persja?), według której znudzony władca na widok tej wspaniałej gry zaproponował jej twórcy dowolną nagrodę. Twórca szachów poprosił o skromną, na pierwszy rzut oka, nagrodę w postaci ziaren ryżu (inne wersje mówią o pszenicy). Ich ilość określił w następujący sposób: tak, aby na pierwszym polu szachownicy położyć jedno ziarno, na drugim dwa, na trzecim  $2^2$  itd, aż do 64. pola z  $2^{63}$  ziarnami. Okazało się, że taka nagroda wcale nie jest skromna, i całej Ziemi by nie wystarczyło, żeby zgromadzić tyle ziaren:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1 \approx 10^{19}.$$

Niestety w wielu wersjach koniec legendy jest smutny: władca, typowo jak władca, który nie wie, co zrobić w trudnej sytuacji, poszedł na łatwiznę (bo mógł) i kazał się głowę twórcy szachów.

Powyższy rachunek, dzisiaj tak banalny, zdecydowanie bardziej wówczas do przeprowadzenia, szczególnie w rzymskim sposobie liczenia, pochodzi od Leonarda Pisana, znanego jako Fibonacci (1170–1242), z *Liber abbaci*.

Dante postanowił podnieść stawkę i użyć zamiast 2 – „bardzo dużo”, czyli 1000. W rezultacie otrzymał  $1 + 1000 + 1000^2 + 1000^3 + \dots + 1000^{63} = 1000^{64} - 1 \approx 10^{192}$ , a więc liczbę znacznie przekraczającą słynny googol, czyli  $10^{100}$ , termin wymyślony przez 9-letniego siostrzeńca Edwarda Kasnera (1878–1955) w 1938 roku, który to termin (przez pomyłkę) dał nazwę Googlowi. Przy okazji Dante wymyślił (bo mógł) czasownik *s'innillare*, czyli „utysiączać się”. Ciekawe, czy czasownik ten bywa czasami używany współcześnie.

Liczبę atomów we Wszechświecie szacuje się na  $10^{80}$ , a zatem Dantemu udało się zrealizować postulat Św. Tomasza: liczba aniołów podana przez autora *Komedii* przewyższa „liczbę materii”.

W **Czyścucu**, VI, 1–3, Dante wspomina grę w 3 kości, polegającą na liczeniu sumy oczek (po włosku ta gra nazywa się *il gioco della Zara*) – ponad 300 lat przed powstaniem rachunku prawdopodobieństwa w wersji dyskretnej. W grze tej okazuje się, że prawdopodobieństwo wypadnięcia sumy równej 10 lub 11 jest większe niż prawdopodobieństwo wypadnięcia 9 lub 12. Dzisiaj jest to proste zadanie z rachunku prawdopodobieństwa, wówczas wymagało dużej intuicji.

Skomplikowana struktura geometryczna **Piekła, Czyścoca i Raju** inspirowała uczonych, np.

- Galileo Galilei w *Due lezioni all'Accademia fiorentina circa la figura, sito e grandezza dell'inferno di Dante* (1588) zawarł opis geometrii **Piekła**.
- Mark A. Peterson w *Dante and the 3-sphere*, Amer. J. Physics (1979) przedstawił opis metody wizualizacji pokazujący, że Świat Dantego (w **Raju**) jest topologicznie  $S^3$  (3-hipersferą), czyli sferą w 4 wymiarach.

**Empireum** jest siedzibą Boga, samo jest nieruchome, ale powoduje ruch całego Wszechświata. Bóg jest świętlistym punktem w środku Empireum. Beatrycze tłumaczy, że w rzeczywistości ten punkt jest większą sferą i obejmuje wszystko, co, jak się wydawało, obejmowało Jego.

Może to wydać się sprzeczne, ale geometrycznie da się sprowadzić do idei 3-hipersfery, czyli sfery (brzegu kuli) w 4 wymiarach, a więc idei, która pojawiła się wiele lat po Dantem.

Można tę ideę przybliżyć, nawiązując do koncepcji Charlesa Hintona – *Co to jest 4 wymiar* (1880), i Edwina Abbotta – *Flatlandia* (1884). Na związki pomysłów Dantego ze współczesną geometrią wskazał Andreas Speiser w 1925 roku w *Oltre la spera*.

We *Flatlandii*, świecie 2-wymiarowym, bohaterem jest Kwadrat. Paniami w tym kraju są obiekty złożone z odcinków, więc trudno się dziwić, że Kwadrat pragnie nawiązać kontakt z 3-wymiarową Sferą, żyjącą w przestrzeni 3-wymiarowej. Problemem jest to, że trudno naszemu 2-wymiarowemu Kwadratowi wyobrazić sobie coś spoza jego 2-wymiarowego świata. Sfera postanawia więc przeniknąć przez *Flatlandię*, aby dać wyobrażenie Kwadratowi, jak wygląda. Kwadrat najpierw widzi punkt – to Sfera dotknęła *Flatlandii*. Następnie widzi okręgi (powiedzmy, że w płaskim świecie zmysł wzroku pozwala odróżnić okrąg od odcinka), które się powiększają (dokładniej: powiększa się ich promień), aż do maksimum (to „równik” odpowiadający sferze). Następnie okręgi się „zmniejszają” do punktu, aż znikają całkowicie, do następnego wymarzonego *rendez-vous*. Niestety ogólny wydźwięk *Flatlandii* jest raczej pesymistyczny: 2-wymiarowy niewolnik pozostanie 2-wymiarowym niewolnikiem. Ogólność tej zasady jest porażająco prosta i odnosi się nie tylko do epoki wiktoriańskiej (której krytyką była *Flatlandia*).

Taka gra z wymiarami może być przeniesiona na wyższe wymiary i wizytę 3-hipersfery (czyli obiektu ze świata 4-wymiarowego) w naszym biednym, tylko (jak się wydaje) 3-wymiarowym świecie. Daje to wyobrażenie intuicji Dantego, jakże wykraczających poza jego czas.

Niektórzy autorzy nadają podobnym geometrycznym koncepcjom zdecydowanie religijne podłożę – por. J. Kajfisz, *U wrót przestrzeni*, Vocatio, Warszawa 2010. Wydaje się jednak, że koncepcja 4-wymiarowego świata duchowego jest bardzo ograniczająca. Dlaczego

nie przyjąć, że świat duchowy jest  $\infty$ -wymiarowy, np. z jakiejś przestrzeni Banacha? Skoro prosty gaz (w opisie mikroskopowym) „potrzebuje” przestrzeni o wymiarze rzędu liczby Avogadra, a przestrzeń stanów w mechanice kwantowej jest zespolona przestrzeń Hilberta.

Zajmijmy się teraz logiką. Tę oddzieliłem od matematyki z powodów, które staną się wkrótce jasne.

„Jam w to uwierzył, co mi dobył ze dna  
Tajni tak pewnie, jak jest pewnym zgoła,  
Że wśród dwu sprzecznych prawda tylko jedna.”

Historia dotyczy franciszkanina Guido da Montefeltro. Papież Bonifacy VIII nakłania go do zdrady, odpuszczając ten grzech **przed** jego popełnieniem. Guido grzeszy i umiera. Święty Franciszek chce Guida przeprowadzić do **Raju**, ale pojawia się przybysz z **Piekła**...

„Gdym konał, Patron mój stanął przy ciele,  
Lecz głos się ożwał czarnego cheruba:  
»Nie czyń mi krzywdy, nie przeszkaďaj w dziele!  
Już on jest mój rab, już go czeka zguba

Jako zbrodniarza, co złą radą truje;  
Już dawno moja dłoń u jego czuba.  
Grzechu nie zmaže, kto żalu nie czuje,  
Ale żałować – pragnąc, to zamkya  
Sprzeczność, którą się ład logiczny psuje«.  
Jakże rubasznie potrząsł mnie, nędznika,  
Kiedy uchwycił, mówiąc drwiącym głosem:  
»A co? Możeś mieć nie miał za prawnika?»”

**Piekło**, XXVII, 112–123

Przybysz z piekiel wskazuje, że do zmazania grzechu potrzebny jest żal, a tego nie można wzbudzić **przed** popełnieniem grzechu.

Ettore Carruccio (1908–1980) przebadał zagadnienie i pokazał, że pod względem logiki przybysz z **Piekła** miał rację, i nieszczęsny Guido będzie musiał odbyć wieczną karę – za to, że sam nie przeprowadził takiego rozumowania.

W opowieści tej logika nabiera „cech diabolicznych”, gdyż nawet Św. Franciszek, ze swoją dobocią, nie jest w stanie się jej przeciwstawić.

Przebrnięcie przez *Boską Komedię* nie jest łatwe – szczególnie dla osoby, dla której włoski nie jest pierwszym językiem. Zwraca uwagę różnica języka w różnych częściach *Komedii*. W **Piekle** jest on rubasny, pospolity, ze słynnym zdaniem o trąbie z tylka (dotyczy diabła) *Ed elli avea del cul fatto trombetta*, koniec pieśni XXI. W **Raju** – dworski, z licznymi słowami łacińskimi.

Istnieje obszerna literatura dotycząca Dantego i jego *Komedii*. Również jej związki z matematyką. Liczne prezentacje można znaleźć w Internecie. W opracowaniu tego artykułu korzystałem m.in. z prezentacji następujących autorów: A. Levato, F. Nembrini, M. Nicolardi i G. Metelli, P.G. Odifreddi, E. Tenze, G. Trombetti. Ciekawe jest, jak różne spojrzenia prezentują osoby o różnych podejściach ideologicznych, np. Odifreddi (poglądy lewicowe) oraz Nembrini i Trombetti (poglądy prawicowe). Wierzę, że w tym artykule udało mi się przemknąć bezpiecznie pomiędzy owymi Skyllą i Charybdą, a Czytelnikowi (który dotarł do tego miejsca) wraz ze mną.

Na koniec przypomnę, że uczonych Dante umieścił w 4. Niebie (nie wiem, czy nie nazbyt pochopnie), oraz zwróci uwagę, że w przeciwnieństwie do logiki odniesienia do matematyki pojawiają się w *Komedii* głównie w **Raju**. Przypadek? Nie sądzę!

## Klub 44 M

$$\sqrt{\sum_{i=1}^k i!} = 44$$

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2021

### Zadania z matematyki nr 825, 826

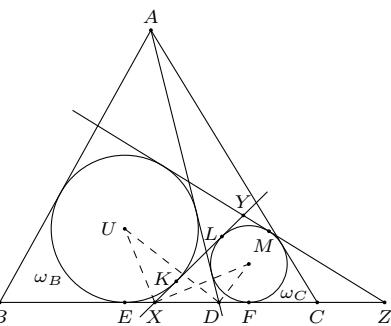
Redaguje Marcin E. KUCZMA

**825.** Dany jest graf ważony  $G$  mający  $n$  wierzchołków;  $n \geq 4$ . Każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź (niezorientowana). Każdej krawędzi przyporządkowana jest jej *waga*: liczba rzeczywista różna od zera. Określamy *mignięcie* wierzchołkiem jako jednocośną zmianę znaku wszystkich krawędzi wychodzących z tego wierzchołka.

Zakładamy, że zarówno w grafie  $G$ , jak i w każdym grafie ważonym, uzyskanym z  $G$  przez jednokrotne lub dwukrotne wykonanie operacji mignienia (na dowolnie wybranym wierzchołku/wierzchołkach) suma wag wszystkich krawędzi grafu jest liczbą o module 1. Wyznaczyć zbiór wartości, jakie może mieć iloczyn wag wszystkich krawędzi grafu  $G$ .

**826.** Pięciokąt  $ABCDE$  jest wpisany w okrąg o średnicy  $AB$ . Styczne do okręgu w punktach  $A$  i  $D$  przecinają się w punkcie  $F$ . Boki  $BC$  i  $CD$  są jednakowej długości; zaś przekątna  $CE$  połowi przekątną  $AD$ . Dowieść, że proste  $CE$  i  $EF$  są prostopadłe.

Zadanie 826 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.



### Rozwiązania zadań z numeru 5/2021

Przypominamy treść zadań:

**821.** Niech  $B$  będzie ustaloną liczbą naturalną;  $B \geq 3$ . Każdą liczbę naturalną można zapisać w układzie pozycyjnym przy podstawie  $B$  (cyframi zapisu są elementy zbioru  $\{0, \dots, B-1\}$ ; cyfra wiodąca różna od zera). Rozważamy liczby naturalne  $N$ , których cyfry zapisu tworzą ciąg ściśle rosnący (największa cyfra w rzędzie jedności). Obliczyć maksymalną wartość sumy cyfr ilocznemu  $(B-1)N$ , gdy  $N$  przebiega zbiór wszystkich liczb rozważanej postaci.

**822.** Dany jest trójkąt  $ABC$ . Dla dowolnego punktu  $D$  na boku  $BC$  (różnego od wierzchołków) określmy okrąg  $\omega_D$ , przechodzący przez  $D$  oraz środki okręgów wpisanych w trójkąty  $ABD$  i  $ACD$ . Udowodnić, że istnieje punkt wspólny wszystkich okręgów  $\omega_D$ .

**821.** Weźmy dowolną liczbę naturalną  $N$  z rozważanego zbioru i zapiszmy jej rozwinięcie:

$$N = \sum_{i=0}^k c_i B^i =: (c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1 c_0)_B; \quad 0 < c_k < \dots < c_1 < c_0 < B.$$

Przyjmijmy, że  $N \geq B$  (a więc  $k \geq 1$ ). Wykażemy, że

$$(1) \quad (B-1)N = \sum_{i=0}^{k+1} d_i B^i,$$

gdzie

$$(2) \quad d_0 = B - c_0, \quad d_1 = c_0 - 1 - c_1, \quad d_{k+1} = c_k,$$

$$(3) \quad d_i = c_{i-1} - c_i \quad \text{dla } i = 2, \dots, k$$

(gdy  $k = 1$ , wiersz (3) jest „pusty”). Wobec przyjętych założeń o cyfrach  $c_i$ , liczby  $d_0, \dots, d_{k+1}$  są nieujemne, mniejsze od  $B$  (przy czym  $d_{k+1} > 0$ ); a to znaczy, że są to dopuszczalne cyfry rozwinięcia pozycyjnego przy podstawie  $B$ .

Przekształcamy prawą stronę wzoru (1):

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} d_i B^i &= \\ &= (B - c_0) + (c_0 - 1 - c_1)B + \sum_{i=2}^k c_{i-1} B^i - \sum_{i=2}^k c_i B^i + c_k B^{k+1} = \\ &= -c_0 + (c_0 - c_1)B + \sum_{i=1}^{k-1} c_i B^{i+1} - \sum_{i=2}^k c_i B^i + c_k B^{k+1} = \\ &= \sum_{i=0}^k c_i B^{i+1} - \sum_{i=0}^k c_i B^i = B \cdot N - N; \end{aligned}$$

wyszła lewa strona wzoru (1). Zatem suma cyfr liczby  $(B-1)N$  wynosi

$$\begin{aligned} (B - c_0) + (c_0 - 1 - c_1) + \sum_{i=2}^k (c_{i-1} - c_i) + c_k &= \\ &= B - 1 - c_1 + (c_1 - c_k) + c_k = B - 1. \end{aligned}$$

(W przypadku, gdy  $N < B$ , czyli  $k = 0$ , wzory (2), (3) należy zastąpić przez  $d_0 = B - c_0$ ,  $d_1 = c_0 - 1$ ; znów  $d_0 + d_1 = B - 1$ ).

Tak więc badana suma  $d_0 + \dots + d_{k+1}$  stale wynosi  $B - 1$  i jest to jej wartość maksymalna (minimalna zresztą też). [Ilustracja dla  $B = 10$ ,  $N = 23578$ :  $9 \cdot N = 212202$ .]

**822.** Proste  $BC$  i  $AD$  to wspólne styczne (zewnętrzna i wewnętrzna) okręgów  $\omega_B$  i  $\omega_C$ , wpisanych w trójkąty  $ABD$  i  $ACD$ . Prowadzimy ich pozostałe dwie wspólne styczne (zewnętrzna i wewnętrzna). Jeśli styczne zewnętrzne nie są równoległe, przecinają się w pewnym punkcie  $Z$ . Przyjmijmy dalsze oznaczenia:  $E, F$  to punkty styczności prostej  $BC$  z  $\omega_B, \omega_C$ ;  $X, Y$  to punkty przecięcia drugiej stycznej wewnętrznej ze stycznymi zewnętrznyimi ( $X$  na odcinku  $EF$ ), zaś  $K, L$  to jej punkty styczności z  $\omega_B, \omega_C$ ; wreszcie  $M$  to punkt styczności prostej  $YZ$  z okręgiem  $\omega_C$ .

Jeden z okręgów  $\omega_B, \omega_C$  jest okręgiem wpisanym trójkąta  $XYZ$ , a drugi – dopisanym; stąd równość  $KX = LY$ . Przy tym  $KX = EX$ ,  $LY = MY$  (odcinki stycznych) oraz  $MY = DF$  (z symetrii względem prostej wyznaczonej przez środki  $U, V$  okręgów  $\omega_B, \omega_C$ ). Otrzymujemy równość:  $EX = DF$ . Zachodzi ona (co oczywiste) również w przypadku, gdy styczne zewnętrzne są równoległe.

Położenie punktów styczności na prostej  $BC$  jest opisane wzorami

$$BE = \frac{AB + BD - AD}{2}, \quad DF = \frac{AD + DC - AC}{2}.$$

Wobec tego

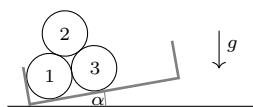
$$(4) \quad BX = BE + EX = BE + DF = \frac{AB + BC - AC}{2}.$$

Półproste  $DU$  i  $DV$  są dwusiecznymi kątów  $ADB$  i  $ADC$ , więc kąt  $UDV$  jest prosty. Analogicznie,  $XU$  i  $XV$  połowią kąty  $BXY$  i  $CXY$ , więc kąt  $UXV$  jest prosty. Zatem okrąg  $UDV$  (czyli  $\omega_D$ ) przechodzi przez punkt  $X$ , określony równością (4). Oznacza ona, że  $X$  to punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$  z bokiem  $BC$  i nie zależy od wyboru punktu  $D$ . Jest to szukany punkt wspólny wszystkich okręgów  $\omega_D$ .

# Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2021



## Zadania z fizyki nr 722, 723

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**722.** W skrzyni ciężarówka leżą trzy jednakowe bale (rysunek). Skrzynia nachylona jest do poziomu pod kątem  $\alpha$ . Dla jakich wartości kąta  $\alpha$  układ balii pozostaje w stanie równowagi? Tarcie zaniedbujemy.

**723.** Cząstka relatywistyczna o masie  $m$  i energii kinetycznej  $E_k$  zderza się niesprężyście z taką samą cząstką spoczywającą. Znaleźć maksymalną energię  $\Delta E$ , która może być wykorzystana do wytworzenia nowych cząstek. Rozważyć przybliżenie nierelatywistyczne, gdy  $E_k \ll mc^2$ , oraz ultrarelatywistyczne, gdy  $E_k \gg mc^2$ .

## Rozwiązania zadań z numeru 5/2021

Przypominamy treść zadań:

**718.** Samochód o masie  $m$  z napędem na przednie i tylne koła rusza z miejsca. Silnik samochodu pracuje ze stałą mocą  $P$ . Współczynnik tarcia kinetycznego kół o drogę jest równy  $\mu$ . Znaleźć zależność prędkości samochodu od czasu. Opór powietrza i opory w mechanizmach samochodu zaniedbać.

**719.** Z naczynia o objętości  $V = 10^{-3} \text{ m}^3$  odpompowano powietrze, wprowadzono do niego niewielką ilość wody i zmierzono ciśnienie dla trzech różnych wartości temperatury: przy  $t_1 = 60^\circ\text{C}$ ,  $p_1 = 1,92 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ , przy  $t_2 = 90^\circ\text{C}$ ,  $p_2 = 4,20 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ , przy  $t_3 = 120^\circ\text{C}$ ,  $p_3 = 4,55 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ . Jakie byłyby ciśnienia przy podanych temperaturach, gdyby masę wprowadzonej wody zmniejszono o 20%?

**718.** Ponieważ silnik pracuje ze stałą mocą, na początku występuje poślizg. Samochód porusza się pod wpływem siły  $F = \mu mg$ . Po pewnym czasie  $t_0$  poślizg ustaje i wtedy cała moc silnika zużywana jest na zmianę energii kinetycznej samochodu. Gdy rozpoczyna się ruch bez poślizgu, prędkość samochodu wynosi  $v_0 = \mu gt_0$  i jednocześnie spełnione jest równanie  $P = Fv_0$ . Stąd  $t_0 = P/m(\mu g)^2$ .

Dla  $t \leq t_0$  prędkość samochodu rośnie liniowo z czasem  $v = \mu gt$ .

Dla  $t \geq t_0$  spełnione jest równanie

$$m(v^2 - v_0^2)/2 = P(t - t_0).$$

Stąd  $v = \sqrt{\frac{P}{m}(2t - \frac{P}{m(\mu g)^2})}$ . Prędkość samochodu rośnie nieograniczenie, ponieważ nie uwzględniliśmy oporu powietrza oraz oporu w mechanizmach samochodu. Ponadto w zwykłym samochodzie silnik pracuje na początku z niezbyt dużą mocą i poślizg nie występuje.

**719.** Woda wrze w temperaturze  $t = 100^\circ\text{C}$  pod ciśnieniem normalnym, więc ciśnienie pary nasyconej w tej temperaturze wynosi  $p_n = 10,13 \cdot 10^4 \text{ Pa} > p_3$ . Ciśnienie pary nasyconej rośnie z temperaturą, zatem w temperaturze  $t_3$  para w naczyniu jest nienasycona.

Zachodzą związki:  $p_3/T_3 = p_2/T_2 > p_1/T_1$ , gdzie  $T_1, T_2, T_3$  są temperaturami w skali bezwzględnej. Wynika stąd, że w stanie trzecim i drugim w naczyniu znajduje się para nienasycona, a w stanie pierwszym nasycona.

Korzystając z równania Clapeyrona  $p_3V = mRT_3/\mu$ , gdzie  $\mu = 18 \text{ g/mol}$ , obliczamy, że masa wprowadzonej do naczynia wody  $m = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$ .

Po zmniejszeniu masy wprowadzonej wody do  $m_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$  para w stanach trzecim i drugim nadal jest nienasycona, a ciśnienia w tych stanach wynoszą

$$p_3' = m_1 p_3 / m = 3,64 \cdot 10^4 \text{ Pa}, \quad p_2' = m_1 p_2 / m = 3,36 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

Zakładając, że w stanie pierwszym para stała się nienasycona, otrzymujemy z równania Clapeyrona, że jej ciśnienie jest większe od  $p_1$ . Oznacza to, że para w temperaturze  $t_1$  nadal jest nasycona, a jej ciśnienie  $p_1' = p_1 = 1,92 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ .

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
712 ( $WT = 1,88$ ) i 713 ( $WT = 3,12$ )  
z numeru 1/2021

Michał Koźlik	Gliwice	5 – 44+1,01
Piotr Adamczyk	Warszawa	42,77
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Konrad Kapcia	Poznań	1 – 41,38
Paweł Perkowski	Ożarów	3 – 38,45
Sławomir Buć	Mystków	34,13

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 815 ( $WT = 3,01$ ) i 816 ( $WT = 1,56$ )  
z numeru 2/2021

Jerzy Cisło	Wrocław	45,68
Jakub Węgrecki	Kraków	43,32
Paweł Burdzy	Warszawa	43,18
Mikołaj Pater	Opole	42,27
Michał Adamaszek	Kopenhaga	40,45
Piotr Kumor	Olsztyn	36,10
Witold Bednarek	Lódź	34,60
Tomasz Czajka	Santa Clara	33,74
Lukasz Merta	Kraków	32,76

Pan Jerzy Cisło zgromadził 44 punkty  
po raz piątnasty - to już pięciokrotne  
saldo Weterana!

### Skrót regułaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązanie zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnich kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązań tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regułamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## Prosto z nieba: Radioastronomia w natarciu

Na okładce sierpiennego numeru *Delty* zaprezentowaliśmy czarno-białą mapę nieba obejmującą obszar 740 stopni<sup>2</sup>. Na pierwszy rzut oka wygląda zupełnie przeciennie – poza tym, że niemożliwe jest znalezienie na niej żadnej ze znanych konstelacji. Jest to jednak mapa niezwykła (można ją też obejrzeć na internetowych stronach *Delty* bądź na stronach projektu LOFAR LoLSS), bo wykonana w zakresie fal radiowych, a dokładniej fal o długości około sześciu metrów (42–66 MHz, tzw. Low Band Antenna). Właśnie taka długość fali niesie informacje o emisji gasnących strumieni plazmy z okolic supermasywnych czarnych dziur. Dlatego też ta czarno-biała mapa – opublikowana przez zespół LOFAR LBA Survey (LoLSS) kierowany przez Francesco de Gasperina z Uniwersytetu w Hamburgu – nie przedstawia rozbiegającego nieboskłonu, a rozmieszczenie czarnych dziur o masach przekraczających miliardy mas Słońca. Konkretnie – pokazuje aż 25 tysięcy supermasywnych czarnych dziur znajdujących się na niebie północnym.

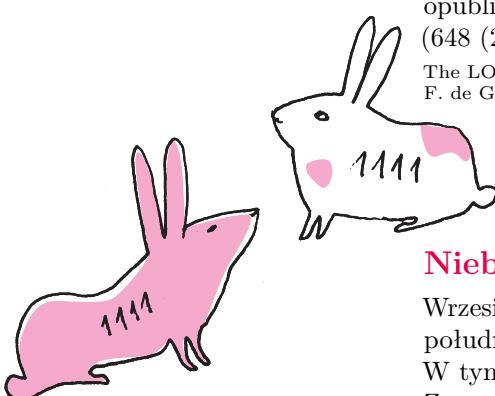
Bardzo dokładna mapa radiowa galaktyk aktywnych gwiazdotwórczo LoTSS obejmuje około 30 stopni kwadratowych nieba północnego (obserwowane były trzy głębokie pola tego nieba: ELAIS N1, Boötes i Lockman Hole). A to jedynie początek. Celem projektu LOFAR, zarówno przeglądu LoTSS, jak i LoLSS, jest obserwacja całego nieba północnego.

Na tym jednak nie koniec. Radioteleskop LOFAR obserwuje Wszechświat także w falach 2-metrowych (120–168 MHz, High Band Antenna). W niecałe dwa miesiące po publikacji radiowej mapy ultramasywnych czarnych dziur projekt LOFAR Two Meters Sky Survey (LoTSS) opublikował kolejną mapę radiową, tym razem przedstawiającą obszary powstawania nowych gwiazd w galaktykach. Obszary takie, nazywane czasem żłobkami czy też chmurami narodzin, zwykle są dość szczerle otoczone przez pył, który uniemożliwia bezpośrednie obserwacje zwykłymi teleskopami. Fale radiowe przenikają jednak przez pył, dzięki czemu LOFAR może bezpośrednio obserwować obszary narodzin gwiazd. Pozwoliło to między innymi na znalezienie zależności pomiędzy intensywnością promieniowania galaktyki w paśmie 150 MHz a tempem tworzenia się w niej gwiazd.

Ale i to nie wszystko. Niezwykły zbiór około 150 tysięcy radioźródeł dostarczonych przez radioteleskop LOFAR pozwolił na zbadanie populacji hiperjasnych galaktyk podczerwonych, natury strug pochodzących z masywnych czarnych dziur czy też na analizę emisji radiowej powstającej w wyniku zderzeń gromad galaktyk. Pierwszych 14 prac zespołu LoTSS, kierowanego przez Philipa Besta z Uniwersytetu w Edynburgu w Wielkiej Brytanii, zostało opublikowanych w numerze specjalnym czasopisma „*Astronomy & Astrophysics*” (648 (2021) A1).

The LOFAR LBA Sky Survey - I. survey description and preliminary data release.  
F. de Gasperin et al. Published in *Astronomy & Astrophysics*. arxiv.org/abs/2102.09238.

Katarzyna MAŁEK



## Niebo w wrześniu

Wrzesień jest miesiącem, w którym Słońce przecina równik niebieski w drodze na południe. W tym roku stanie się to 22 września o godzinie 21:21 naszego czasu. W tym momencie na północnej półkuli Ziemi zaczyna się astronomiczna jesień. Ze względu na refrakcję atmosferyczną, wskutek której wydaje się, że obiekty blisko horyzontu znajdują się wyżej niż w rzeczywistości, zrównanie dnia z nocą następuje kilka dni później. W związku z przecinaniem równika przez Słońce w tym okresie czas jego przebywania nad widnokrekiem zmienia się najszybciej. W środkowej Polsce od początku do końca września dzień skraca się prawie o 2 godziny.

Miesiąc zaczyna się dobrą widocznością Księżyca na niebie porannym. Jeszcze w sierpniu Srebrny Glob przeszedł przez ostatnią kwadrę i dąży do nowiu 7 września. O tej porze roku ekiptyka o świcie tworzy duży kąt z widnokrekiem, stąd naturalny satelita Ziemi pozostałe widoczny niemal do samego nowiu. Im bliżej spotkania Księżyca ze Słońcem, tym jaśniejsza staje się nocna część tarczy Srebrnego Globu, czyli tzw. światło popielate. Już na początku miesiąca dojdzie do trzech ciekawych zakryć gwiazd przez Księżyca. Za każdym razem efektowniejsze

będą odkrycia, gdyż gwiazdy zostaną zakryte przez jasny brzeg Księżyca i odkryte przez ciemny.

Pierwsze zakrycie zdarzy się w pierwszych godzinach września. Księżyca pojawi się na nieboskłonie 31 sierpnia niewiele przed północą, wędrując na pograniczu gwiazdozbiorów Byka i Bliźniąt w fazie 35%. Niecałe dwie godziny później dojdzie do zakrycia gwiazdy 5. wielkości 132 Tauri. Gwiazda zniknie za tarczą Księżyca około 1:20 i pojawi się ponownie godzinę później. Kolejnej nocy sierp Srebrnego Globu zwęzi się do 25% i zakryje Mebsutę, znacznie jaśniejszą gwiazdę 3. wielkości, oznaczaną na mapach nieba grecką literą  $\varepsilon$ . Do zakrycia dojdzie około godziny 2, a zjawisko potrwa około 50 minut. Do trzeciego zakrycia dojdzie w nocy z 2 na 3 września, przy fazie Księżyca zmniejszonej do 16%, a za księżycową tarczą zniknie świecąca blaskiem +3,6 $m$  gwiazda  $\kappa$  Gem. Łatwo ją dostrzec gołym okiem niecałe 4° na południe od Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt. Tym razem nasza część świata ma mniej szczęścia, gdyż do zakrycia dojdzie między godzinami 4:45 a 5:35, czyli na jaśniejącym już niebie. We wschodniej części Polski do okrycia dojdzie już po wschodzie Słońca. Dlatego obserwacji tego zjawiska nie da się wykonać bez teleskopu.

Pierwszej soboty września rano Księżyca zaprezentuje fazę 10%, wędrując przez środek gwiazdozbioru Raka. W odległości 1,5° na południe od niego znajdzie się trapez gwiazd otaczający widoczną gołym okiem gromadę otwartą gwiazd M44. Samą gromadę od Księżyca oddzieli dystans 3°.

W następne dwa poranki sierp Srebrnego Globu stanie się bardzo cienki (odpowiednio 4 i 1%). Księżyca dotrze do gwiazdozbioru Lwa i na 45 minut przed wschodem Słońca zdąży się wznieść na wysokość, odpowiednio, 15 i 4°. W tych dniach niedaleko tarczy Księżyca znajdzie się Regulus, najjaśniejsza gwiazda Lwa. Najpierw Regulus pokaże się 11° pod Księżycem, dobę później zaś – 5° na prawo od niego.

Po nowiu i przeniesieniu się na niebo wieczorne Srebrny Glob dobrze widoczny stanie się dopiero w drugiej dekadzie miesiąca. Niskie nachylenie eklipytyki przyczyni się też do słabej widoczności obu planet wewnętrznych. **Merkury** osiągnie maksymalną elongację wschodnią, wynoszącą 27°, 14 września. Niestety planeta zachodzi niecałe pół godziny po Słońcu i jest u nas niewidoczna. **Wenus** swoją maksymalną elongację wschodnią osiągnie pod koniec października, lecz obecnie zachodzi ledwie 0,5 godziny po Merkurym. Na koniec zmierzchu cywilnego planeta zajmuje pozycję na wysokości jedynie 4°, a zatem jest widoczna bardzo krótko i tylko przy odpowiednio odsłoniętym widnokrengu. We wrześniu jasność Wenus urosnie od –4 $m$  do –4,2 $m$ , a jej tarcza zwiększy średnicę od 15'' do 19''. Równocześnie zmniejszy swoją fazę od 73% do 62%. W dniach 9 i 10 września w odległości 7° planetę minie Księżyca w fazie odpowiednio 9% i 17%.

Trzy dni później Srebrny Glob zwiększy fazę do 37% i odwiedzi gwiazdozbiór Skorpiona, zajmując pozycję

3° na wschód od łuku gwiazd z północno-zachodniej części konstelacji i 6° na północny zachód od Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy w tym rejonie nieba. Dobę później Księżyca przejdzie przez I kwadrę w Wężowniku.

W dniach 16–18 września Księżyca pokaże fazę od 80% do 94% i minie dwie największe planety Układu Słonecznego. Pierwszego dnia Księżyca zbliży się na 7° do **Saturna**. Kolejnej doby, 17 września, Srebrny Glob dotrze do centralnej części Koziorożca, od obu planet oddzieli go dystans 9°. Dzień później Księżyca przejdzie do gwiazdozbioru Wodnika, pokazując się 7° od **Jowisza**. Obie planety we wrześniu są tuż po opozycji i są widoczne przez większą część nocy na tle gwiazdozbioru Koziorożca, w odległości 16° od siebie. Jowisz świeci z jasnością –2,8 $m$ , mając tarczę o średnicy 48''. Tarcza Saturna jest o 30'' mniejsza, a jej blask wynosi +0,5 $m$ .

We wtorek, 14 września, przypada opozycja **Neptuna**, stąd teraz jest najlepszy okres widoczności tej planety. Neptun kreśli swoją pętlę ponad 3° na północny wschód od gwiazdy 4. wielkości  $\varphi$  Aqr, przy granicy Wodnika z Rybami. W jego najbliższej okolicy tym razem nie ma jasnych gwiazd, ale w trakcie wędrówki minie on kilka gwiazd o jasnościach między 6 $m$  a 7 $m$ . Planeta **Uran** wędruje przez środkową część gwiazdozbioru Barana, niedaleko gwiazd o podobnej doinie jasności o,  $\pi$  i  $\sigma$  Ari. We wrześniu Uran świeci z jasnością +5,7 $m$ . Księżyca odwiedzi Neptuna 20 i 21 września w fazie 100%. Do Urana Srebrny Glob dotrze cztery noce później, zmniejszając do tego momentu fazę do 85%. Oczywiście bliskość tak jasnego Księżyca wyklucza obserwacje obu planet w tych dniach. Na próby odnalezienia Urana i Neptuna należy przeznaczyć początek miesiąca.

Do końca miesiąca warto odnotować przejście Księżyca w fazie 69% 6° na północ od Aldebarana w Byku – 27 września, ostatnią kwadrę w zachodniej części Bliźniąt dwa dni później oraz zbliżenie się Księżyca na 6° do Polluksa 30 września.

We wrześniu bardzo jasne są dwie długookresowe gwiazdy zmienne klasy miryd. W połowie ubiegłego miesiąca, 18 sierpnia, przez maksimum swojej jasności przeszła Mira Ceti, zaś na początku września maksimum jasności powinna osiągnąć R Leonis. Pierwsza z wymienionych gwiazd przecina południk lokalny około godziny 3 na wysokości 35° i jest widoczna bardzo dobrze, druga natomiast wschodzi po godzinie 4, już na jaśniejącym niebie, i o świcie zdąży się wznieść na wysokość zaledwie 5°. Jednak w związku ze skracającym się dniem jej widoczność szybko się poprawia i pod koniec miesiąca na koniec nocy astronomicznej osiągnie wysokość 15°. Mira może osiągnąć jasność nawet +2 $m$ , a zatem w okolicach maksimum jest łatwo widoczna gołym okiem. R Leo może przekroczyć jasność +5 $m$ , i do jej dostrzeżenia potrzebne jest ciemne niebo, a w gorszych warunkach lornetka lub teleskop. Gwiazda ta wyróżnia się ciemną wiśniową barwą i na tej podstawie jest łatwa do odnalezienia 5° na zachód od Regulusa.

Ariel MAJCHER

## Gęsi i wczesny Wszechświat

W niezliczonych pracach naukowych, popularnonaukowych, wykładach – adresowanych zarówno do fizyków-specjalistów, jak i do szerokiego grona słuchaczy – omawia się szczegółowo pojęcie inflacji kosmologicznej, czyli okresu bardzo szybkiego, przyspieszonego rozszerzania się wczesnego Wszechświata. Ponad cztery dekady po zaproponowaniu tego mechanizmu dyskusja na jego temat jest ciągle żywa i interesująca, pomimo że (lub zwłaszcza że) uważany za jednego z twórców teorii inflacji Paul Steinhardt obecnie wątpi w to, czy się w ogóle wydarzyła.

Jeśli jednak miała ona miejsce, to w jej wyniku Wszechświat schłodził się do temperatury niezwykle bliskiej零度 bezwzględnemu. Potrzebny był więc mechanizm, który pozwoliłby następnie przeprowadzić Wszechświat do zgodnej z modelem Wielkiego Wybuchu fazy, w której wypełniony był on gorącą i gęstą materią. Rozwiążanie nasuwało się samo. Kiedy kończy się inflacja, można sobie wyobrażać, że w przestrzeni kosmicznej „zawieszone” są cząstki inflatonu, czyli pewnego pola powodującego inflację. Jeżeli cząstki te są ciężkie i nietrwałe, a do tego rozpadają się

na znane cząstki, produkty rozpadu będą miały wysokie energie i w wyniku oddziaływań cząstek potomnych, zachodzących równolegle do rozpadów cząstek inflatonu, uformuje się ośrodek o określonej, bardzo wysokiej temperaturze.

Angielski termin na opisany wyżej proces stanowi koszmar dla każdego, kto chciałby opowiadać o nim po polsku. Brzmi on mianowicie *reheating*, co należałoby dosłownie tłumaczyć jako „odgrzanie” lub „ponowne podgrzanie”. Ale dlaczego ponowne? Otóż w początkowym okresie dyskusji o inflacji kosmologicznej uważano, że nie tylko poprzedzała ona gorącą fazę rozwoju Wszechświata, ale i sama była poprzedzona taką fazą. Dziś nie ma już zgodności w tej sprawie, ale słowo weszło do (angielskiego) języka naukowego. Niestety, drugie z polskich tłumaczeń, ze względu na swoją dwuczłonowość, kładzie bardzo duży nacisk na to, że proces podgrzania zdarzył się drugi raz. Ułomość pierwszego tłumaczenia łatwo naprawić, dopisując na początku literę „p”, czyli zmieniając przedrostek na fizycznie bardziej przekonujący. Dlatego sam używam raczej słowa „podgrzanie”, które dokładnie opisuje, o co chodzi, nawet za cenę niezgodności z oryginałem.

Wypłynąwszy z translatorskiej mielizny, wpadamy zaraz na rafę. Fizycy wymyślili bowiem inny, konkurencyjny do reheatingu proces, w którym gorąca materia powstaje nie w rozpadach cząstek inflatonu, ale w wyniku jakiejś innej, bardziej skomplikowanej dynamiki tego pola, powodującej gwałtowną (niektórzy mówią nawet „wybuchową”) produkcję cząstek. Bardzo krótka skala czasowa tego procesu powoduje, że standardowe podgrzanie nie jest istotnym czynnikiem podtrzymującym Wszechświat. Owa gwałtowna produkcja cząstek prowadzi do wytworzenia ich wielkiej liczby, ale muszą one ze sobą dalej oddziaływać, aby we Wszechświecie ustaliła się określona temperatura. Mamy tutaj zatem do czynienia z procesem dwuetapowym. Lev Kofman i Andrei Linde, którzy wraz ze współpracownikami jako pierwsi opisali ten proces, nadali jego wstępnej fazie angielską nazwę *preheating*. Słowo bardzo pomysłowe – do istniejącego wcześniej terminu przyczepia się na początku litera „p” (znówu?!), przekształcając przedrostek „re-” na „pre-”, i wszyscy wiedzą, że chodzi o „wstępne podgrzanie”! Przy okazji pozbywamy się odniesień do niepewnego pochodzenia Wszechświata.

Takie słowne igraszki fizyków są bardzo interesujące, dopóki nie trzeba ich przekładać na inne języki, próbując zachować jak najwięcej znaczeń i kontekstów oryginału. W rozważanym przypadku tłumaczenie *preheating* jako „wstępne podgrzanie” byłoby o tyle nieszczęśliwe, że sugerowałoby, iż jest to pierwsza część „podgrzania”, czyli tłumaczenia słowa *reheating*.

Nie umiem chyba bezpiecznie wyprowadzić statku tłumaczenia z tej rafy. Co jednak powiedzieć ludziom? Wybieram wariant najprostszy: niezależnie od tego, z którą sytuacją mam do czynienia, mówię zawsze „podgrzanie”. Zwykle trzeba przecież dodatkowo wytłumaczyć jakieś szczegóły omawianego mechanizmu, więc mimo topornego tłumaczenia żadna informacja, na szczęście, nie ginie.

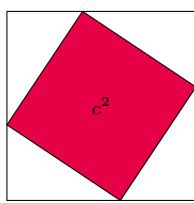
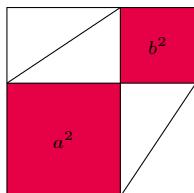
Ale to i tak mały problem w porównaniu z tym, że w wyniku ewolucji języka (angielskiego) niektóre z ukutych przed półwieczem nazw cząstek elementarnych kojarzą się dość jednoznacznie z konkretnymi preferencjami erotycznymi...

Krzysztof TURZYŃSKI

Dziękuję prof. Aleksandrowi Gomole z Uniwersytetu Jagiellońskiego za interesującą dyskusję, która dała początek tym zapiskom.



### Najprostszy dowód twierdzenia Pitagorasa



9. Wykorzystajsze czworokąta opisane do okręgu.  
własności czworokąta opisanego na okręgu.
8. Niech  $PQ$  będzie dowolnym odcinkiem  
wewnętrzny kąt na odcinku  $ABCD$ . Wykazać,  
że jeśli  $X$  leży na odcinku  $PQ$  i  $|PX| = x$ ,  
to wartości  $X$  dla różnych  $PQ$  i  $|PX| = x$ ,  
jestem wykazane. Wykazać, że jeśli  $x$  jest  
funkcją zmieniącą się zmienną  $[ABX] + [CDX]$  jest  
to wartości zmieniać się zmienną  $[BCX] + [DAX]$ .
7. Niech  $T$  będzie punktem przecięcia  
dwóch równoległych odcinków  $AB$  i  $CD$ .  
 $2P^2 = r^2L^2 \leq r^2L$ .  
Skorzystać z szacowania  
odpowiedni, o którym pole tego trapezu.
6. Niech  $L$ , oraz  $P$  oznaczają  
okrągów o 1 i  $r^2$ .  
 $|AP| = |BP|$ .  
Skorzystać z równości  $|AB| = |CD|$   
i twierdzenia Pitagorasa.
5. Podzielić trójkąt  $ABC$  na trapez  
i trzy trójkąty za pomocą środków  
i środkowych o 1 i  $r^2$ .  
odpowiedni, o którym pole tego trapezu.
4. Zamień te równoległyce na równości  
wpisane w trójkąt.  
 $|AP| = |AFP|$ .  
Skorzystać z równości  $|AEQ| = |AQD|$   
i twierdzenia Pitagorasa.
3. Te własności ma środk okregu  
odpowiedni, o którym pole tego trapezu.
2. Skorzystać z równości  $|APC| = |AEC|$   
odpowiedni, o którym pole tego trapezu.
1. Jeżeli  $a - x - a$ , a +  $x$  są długościami  
boków tego trójkąta, to długości
- Wskazówki do zadania

## Zabawy na polu

### Bartłomiej BZDEGA

Pole wielokąta to funkcja, która każdemu wielokątowi przypisuje pewną liczbę rzeczywistą nieujemną oraz spełnia następujące warunki:

- (1) pole prostokąta o bokach długości  $a$  i  $b$  jest równe  $ab$ ;
- (2) pola wielokątów przystających są równe;
- (3) jeśli pewien wielokąt podzielono na skończoną liczbę rozłącznych wielokątów, to suma ich pól jest równa polu tego wielokąta.

Czytelnikowi, który nigdy wcześniej tego nie zrobił, polecam, jako cenne ćwiczenie, wyprowadzenie wzorów na pole kolejno: trójkąta prostokątnego, trójkąta dowolnego, równoległoboku i trapezu, z wykorzystaniem jedynie powyższych trzech własności pola. Ogólniej – pozwalają one na obliczenie pola dowolnego wielokąta, ponieważ każdy wielokąt można podzielić na trójkąty.

Stosowanie pola w rozwijywaniu zadań często opiera się na wykorzystaniu warunków (1–3) do bezrachunkowego dowodzenia pewnych równości. Dobrym przykładem jest dowód twierdzenia Pitagorasa, który zamieściliśmy na marginesie. Niekiedy efekty przynosi liczenie pola tej samej figury kilkoma różnymi sposobami i porównywanie wyników. Oprócz tego podaję jeszcze kilka faktów, które warto znać; ich nietrudne dowody pozostawiam Czytelnikowi. Zapis  $[\mathcal{F}]$  oznaczać będzie pole figury  $\mathcal{F}$ .

**Pole trójkąta a równoległośc.** Niech  $A, B, C, D$  będą czterema różnymi punktami, przy czym punkty  $C$  i  $D$  leżą po tej samej stronie prostej  $AB$ . Wówczas  $AB \parallel CD$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $[ABC] = [ABD]$ .

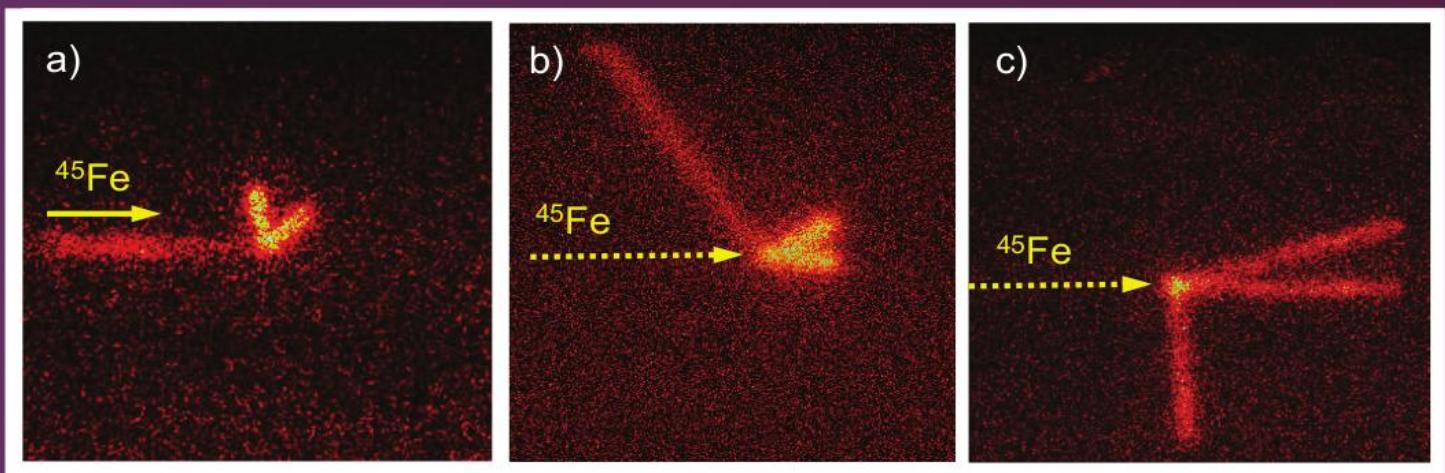
**Pole i proporcje.** Stosunek pól trójkątów o równych wysokościach jest równy stosunkowi długości ich podstawa. Stosunek pól wielokątów podobnych jest równy kwadratowi skali ich podobieństwa.

**Pole wielokąta opisanego.** Jeśli wielokąt  $\mathcal{W}$  o obwodzie  $L$  jest opisany na okręgu o promieniu  $r$ , to  $[\mathcal{W}] = \frac{1}{2}rL$ .

### Zadania

1. W pewnym trójkącie długość jednego z boków jest równa średniej arytmetycznej długości pozostałych boków. Analogicznie jest dla wysokości – długość jednej z nich jest średnią arytmetyczną długości dwóch pozostałych. Udowodnić, że ten trójkąt jest równoboczny (XII WLM, Wielkopolska Liga Matematyczna; [wlm.wmi.amu.edu.pl](http://wlm.wmi.amu.edu.pl)).
2. Dany jest równoległobok  $ABCD$ . Punkt  $E$  leży na odcinku  $AB$ , a punkt  $F$  na odcinku  $AD$ . Prosta  $EF$  przecina proste  $CB$  i  $CD$  w punktach, odpowiednio,  $P$  i  $Q$ . Wykazać, że  $[CEF] = [APQ]$  (I OMG).
3. Dowieść, że we wnętrzu każdego trójkąta  $ABC$  istnieje punkt  $P$  o następującej własności: każda prosta przechodząca przez punkt  $P$  dzieli obwód trójkąta  $ABC$  w takim samym stosunku, w jakim dzieli ona jego pole (LII OM).
4. Pięciokąt  $ABCDE$  jest wypukły i spełnia warunki  $AB \parallel CE, BC \parallel DA, CD \parallel EB, DE \parallel AC$ . Wykazać, że  $EA \parallel BD$  (IX WLM).
5. Wysokość opuszczona na bok  $BC$  trójkąta ostrokątnego  $ABC$  ma długość równą średniej arytmetycznej długości jego wszystkich boków. Okręgi  $o_1$  i  $o_2$  są styczne zewnętrznie i mają jednakowe promienie  $r$ . Ponadto okrąg  $o_1$  jest styczny do odcinków  $AB$  i  $BC$ , natomiast okrąg  $o_2$  jest styczny do odcinków  $BC$  i  $CA$ . Dowieść, że  $|BC| = 5r$  (V WLM).
6. Wielokąt opisany na okręgu o promieniu  $r$  rozcięto na  $n$  trójkątów, w które wpisano okręgi o promieniach  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Dowieść, że  $r \leq r_1 + r_2 + \dots + r_n$ .
7. Na bokach  $BC, CA$  i  $AB$  trójkąta  $ABC$  znajdują się punkty, odpowiednio,  $P, Q, R$ . Udosadnić, że odcinki  $AP, BQ, CR$  przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy  $\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1$  (twierdzenie Cevy).
8. Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$  niebędący równoległobokiem oraz punkt  $X$  w jego wnętrzu. Niech  $M$  i  $N$  będą środkami przekątnych  $AC$  i  $BD$  tego czworokąta. Udosadnić, że  $[ABX] + [CDX] = [BCX] + [DAX]$  wtedy i tylko wtedy, gdy punkt  $X$  leży na prostej  $MN$  (prosta Newtona; twierdzenie Annego).
9. Przy założeniach z poprzedniego zadania dowieść, że jeśli czworokąt  $ABCD$  opisany jest na okręgu o środku  $I$ , to punkt  $I$  leży na prostej  $MN$  (twierdzenie Newtona).

W artykule *Z kamerą wśród egzotycznych nuklidów* (Delta 6/2021) Marek Pfützner pisał o nowatorskim detektorze OTPC (Optical Time Projection Chamber). Fotografie z detektora OTPC, do których odwołuje się artykuł, a które przez pomyłkę redakcji nie ukazały się na tylnej okładce Deltę 6/2021, zamieszczamy poniżej. Autora i Czytelników przepraszamy.



Rys. 4

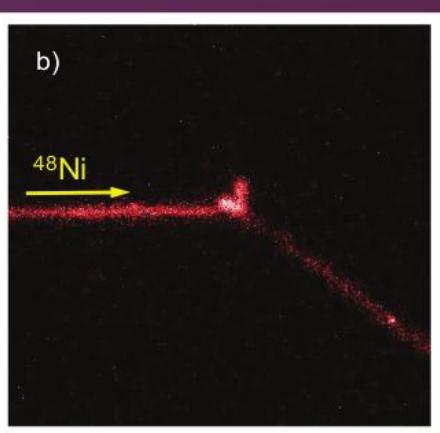
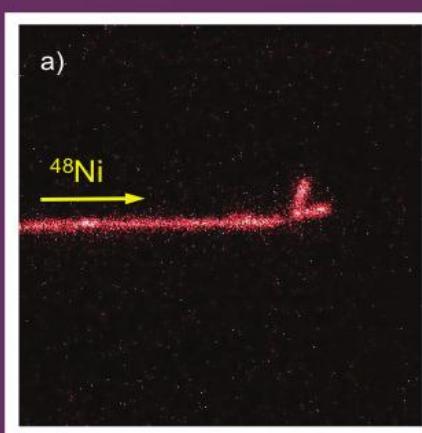
#### Rys. 4

Fotografie CCD rozpadów  $^{45}\text{Fe}$ . Tylko na pierwszym zdjęciu (a) widać tor jonu  $^{45}\text{Fe}$  wpadającego do detektora z lewej strony. Ekspozycję zdjęć b) i c) rozpoczęto już po zatrzymaniu jonu  $^{45}\text{Fe}$ .

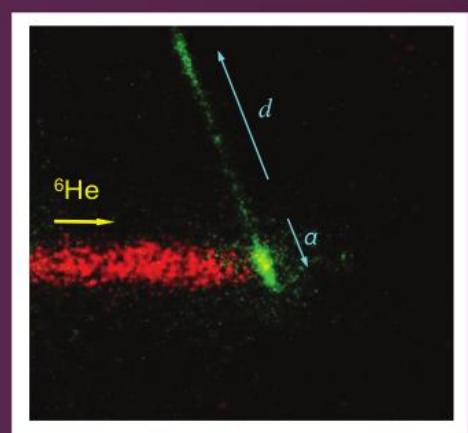
a) Widoczna emisja dwóch protonów z  $^{45}\text{Fe}$ ;

b) po emisji dwóch protonów z  $^{45}\text{Fe}$  powstał  $^{43}\text{Cr}$ , który później uległ przemianie  $\beta^+$  z emisją jednego protonu opóźnionego (widoczny długий tor w lewo do góry). Kolejność zdarzeń znamy dzięki zapisowi sygnałów z fotopowielacza;

c) widoczna emisja trzech protonów opóźnionych po przemianie  $\beta^+ 45\text{Fe}$



Rys. 5



Rys. 6

#### Rys. 5a

Fotografie CCD rozpadów  $^{48}\text{Ni}$ . Na obu zdjęciach widać tor jonu  $^{48}\text{Ni}$  wpadającego do detektora z lewej strony.

a) Widoczna emisja dwóch protonów z  $^{48}\text{Ni}$ ;

b) po emisji dwóch protonów z  $^{48}\text{Ni}$  powstał  $^{46}\text{Fe}$ , który następnie uległ przemianie  $\beta^+$  z emisją jednego protonu opóźnionego (widoczny długий tor w prawo, do dołu)

#### Rys. 6

Złożenie dwóch fotografii CCD. Kolor czerwony obrazuje paczkę około tysiąca jonów  $^6\text{He}$ , które wpadły do detektora z lewej strony. W kolorze zielonym widać rezultat przemiany  $\beta^-$  jednego z tych jonów do  $^6\text{Li}$ , który rozpada się na deuteron i cząstkę  $\alpha$