Zadania uzupełniające do rozdziału 2.

Zadanie 1. Udowodnij metodą zero-jedynkową poniższe tautologie:
a) prawo podwójnego przeczenia
b) prawo zaprzeczenia implikacji
c) prawo kontrapozycji
d) prawo łączności alternatywy
e) dowolną z pozostałych w teorii tautologię

Zadanie 2. Niech A, B, C będą dowolnymi zbiorami. Udowodnij przy pomocy logiki matematycznej poniższe prawa rachunku zbiorów:
a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
c) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Zadanie 3 (matura maj 2019)**.** Dla dowolnych liczb $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1$ oblicz $\left(\log_{\frac{1}{x}} y\right) \cdot \left(\log_{\frac{1}{y}} x\right)$.

Zadanie 4 (matura maj 2015)**.** Wykaż, że la dowolnych liczb $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1$ zachodzi równość $\log_x xy \cdot \log_y \frac{y}{x} = \log_y xy \cdot \log_x \frac{y}{x}$.

Zadanie 5. Wiedząc, że $\log_{12} 4 = a$, oblicz:

a) $\log_{12} 48$
b) $\log_{12} 3$
c) $\log_{12} 27$
d) $\log_{12} \dfrac{1}{4\sqrt{3}}$

Zadanie 6 (matura maj 2021)**.** Niech $\log_2 18 = c$. Oblicz $\log_3 4$

Zadanie 7 (matura próbna 2015)**.** Niech $\log_{24} 6 = a$. Oblicz $\log_6 256$

Zadanie 8. Niech $\log 15 = c$ oraz $\log_{20} 50 = d$. Oblicz $\log_9 40$

Zadanie 9. Niech $\log_{30} 3 = c$ oraz $\log_{30} 5 = d$. Oblicz $\log_{30} 8$

Nierówności między średnimi

Poniższe zadania w większości pochodzą ze zbioru Pazdro do klasy 3.

Zadanie 10. Wykaż twierdzenie o sumie liczby i jej odwrotności dwoma sposobami: przy użyciu wzorów skróconego mnożenia oraz przy użyciu nierówności między średnimi.

Zadanie 11. Wykaż, że jeśli suma dodatnich liczb a, b jest równa 3, to $a \cdot b \leqslant 2\frac{1}{4}$.

Zadanie 12. Wykaż, że jeśli liczby x, y, z są dodatnie oraz $9x + y + 3z = 18$, to $8 - xyz \geqslant 0$.

Zadanie 13. Wykaż, że jeśli dodatnie liczby p, q, r spełniają nierówność $p+q+r > 2$, to $3(p^2+q^2+r^2) > 4$.

Zadanie 14. Wykaż, że jeśli x i y są liczbami dodatnimi oraz $xy = \dfrac{1}{4}$, to $4(1 + x)(1 + y) \geqslant 9$.

Zadanie 15. Wykaż, że jeśli liczby x, y są dodatnie, to $\dfrac{2x^2 + 2y^2}{xy} + 3\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) \geqslant 10$.

Zadanie 16. Wykaż, że jeśli $x > 0$, to $x^3 + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{54}{x} \geqslant 18$.

Zadanie 17. Wykaż, że jeśli $a \neq 0$, to $a^4 + \dfrac{128}{a^2} \geqslant 48$.

Zadanie 18. Wykaż, że jeśli liczby a, b są dodatnie oraz $a + b = 12$, to $(2 + a)(2 + b) \leqslant 64$.

Zadanie 19. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c, d są dodatnie, to $\dfrac{2a + c}{b} + \dfrac{b + 5d}{c} + \dfrac{2bd + 5ac}{ad} \geqslant 16$.

Zadanie 20. Wykaż, że jeśli liczby a, b są dodatnie, to $5 \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \frac{6(a+b)^2 - 12ab}{ab} \geqslant 22$.

Zadanie 21. Wykaż, że jeśli liczby x, y, z są dodatnie, to:

$$xy(3x + 2y - 4z) + yz(y + 3z - 4x) + xz(x + 2z - 4y) \geqslant 0.$$

Zadanie 22. Wykaż, że jeśli liczby dodatnie a, b spełniają nierówność $a + b \geqslant 1$, to $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

Zadanie 23. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} \geqslant 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right).$$

Zadanie 24. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

Zadanie 25 (3 OM. I stopień)**.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb $u, v, w \geqslant 0$ zachodzi nierówność $u^3 + v^3 + w^3 \geqslant 3uvw$.

Zadanie 26. *Udowodnij następującą nierówność:

$$\forall n \geqslant 2 : \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) + 1.$$