Zadania uzupełniające - Rachunek prawdopodobieństwa

Zadanie 1. Rozpatrujemy rodziny o dwóch dzieciach. Oblicz prawdopodobieństwo, że rodzina ma dwóch synów, jeśli:

a) starsze dziecko jest synem
b) co najmniej jedno dziecko jest synem.

☒ **Zadanie 2.** Z pełnej talii kart wybieramy losowo dwie. Oblicz prawdopodobieństwo, że będą to dwa asy jeśli:

a) wybrano co najmniej jednego asa,
b) wybrano asa karo.

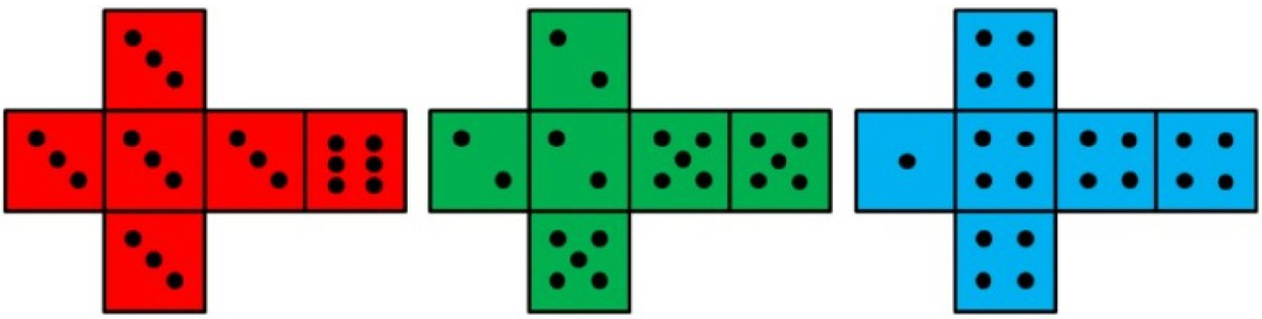
Zadanie 3. W urnie znajdują się dwie białe i trzy czarne kule. Dwaj gracze, po kolei, wyciągają z urny po jednej kuli ze zwracaniem. Wygra ten, który pierwszy wyciągnie kulę białą. Obliczyć prawdopodobieństwo wygrania gracza pierwszego.

Zadanie 4 (problem roztargnionej sekretarki)**.** Mamy n listów i n zaadresowanych kopert. Każdemu listowi odpowiada dokładnie jedna koperta. Na ile sposobów można umieścić listy w kopertach, aby każdy był w złej kopercie? jakie jest prawdopodobieństwo tego zdarzenia? Do jakiej liczby dąży to prawdopodobieństwo ze wzrostem n?

☒ **Zadanie 5.** Z potasowanej talii kart wykładamy po kolei po jednej i kładziemy na stole mówiąc jednocześnie do siebie po kolei: dwójka trefl, trójka trefl, czwórka trefl, ..., as trefl, dwójka karo, trójka karo, itd. aż do pięćdziesiątej drugiej karty (asa pik). Wygrywamy, jeśli choć raz wypowiedziana karta zgadza się z tą wyłożoną na stole. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej.
Wskazówka: Problem roztargnionej sekretarki.

Zadanie 6 (paradoks urodzin)**.** Załóżmy, że rok ma 365 dni. Ile osób musi liczyć grupa, aby prawdopodobieństwo, że wśród nich co najmniej dwie obchodzą urodziny tego samego dnia było większe niż 50%?

Zadanie 7 (kości nieprzechodnie)**.** Rozważmy trzy kostki do gry o następujących ściankach:



W grze bierze udział dwóch graczy i polega ona na wybraniu przez nich po jednej kostce (różnej) i rzuceniu kostkami. Wygrywa ten, kto wyrzuci większą liczbę oczek. Wykazać, że nie ma najlepszej kostki. Czy warto wybrać kostkę jako pierwszy, czy drugi gracz?

Zadanie 8 (paradoks Monty'ego Halla)**.** Rozważmy grę, w której mamy dwie puste urny oraz jedną z nagrodą. Wybieramy jedną z nich. Następnie prowadzący z pozostałych dwóch odsłania jedną, która jest pusta[1]. Następnie mamy wybór: pozostawić wybraną urnę lub zmienić na drugą nieodsłoniętą. Udowodnić, że zawsze warto zmienić bramkę i obliczyć prawdopodobieństwo wygrania przy zmianie bramki.

Zadanie 9 (Diamentowy Indeks AGH 2022)**.** Niech S będzie zbiorem wszystkich ciągów (a, b, c, d, e) o wyrazach należących do zbioru liczb $\{0, 1, \ldots, , 9\}$. Ile jest w zbiorze S ciągów:

a) malejących?
b) których iloczyn $abcde$ jest liczbą parzystą?

[1] Uzasadnić, że taka zawsze istnieje.

Zadanie 10. Pacjent dostał pozytywny wynik testu zakażenia wirusem. W całej populacji choroba dotyka 1 na 10 000 pacjentów. Wśród pacjentów chorych 999 na 1000 otrzymuje wynik pozytywny (skuteczność testu $99,9\%$), a wśród pacjentów zdrowych 1 na 10 000 otrzymuje wynik pozytywny (skuteczność również $99,9\%$). Jakie jest prawdopodobieństwo, że pacjent jest rzeczywiście chory? Jak zmieni się odpowiedź, gdy pacjent otrzyma dwa wyniki pozytywne?