Stereometria

1. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól obu podstaw. Wykaż, że tangens kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany jest równy 3.

2. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 12, a jego wysokość jest równa 24. Wykaż, że pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną zawierającą krawędź boczną i krótszą podstawę jest równe $36\sqrt{51}$.

3. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 10cm i podstawie o długości 16cm. Wszystkie krawędzie boczne są równe 10cm. Wykaż, że objętość tego ostrosłupa jest równa $V = \frac{80\sqrt{11}}{3}\mathrm{cm}^2$.

4. Przekątna prostopadłościanu tworzy ze ścianami o wspólnym wierzchołku kąty α, β, γ. Wykaż, że $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

5. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym o krawędzi długości a poprowadzono płaszczyznę przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej. Kąt nachylenia płaszczyzny jest równy α, $\alpha \in (0°, 90°)$. Udowodnij, że objętość tego graniastosłupa jest równa $V = \frac{3a^3\mathrm{tg}\alpha}{4}$.

6. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól obu podstaw. Uzasadnij, że cosinus kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy jest równy $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu jest równa 120 . Uzasadnij, że pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest największe, gdy prostopadłościan jest sześcianem o krawędzi długości 10.

8. Podstawa ABC i ściana boczna BCD trójkątnego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi o boku a. Krawędź DA jest nachylona do podstawy ostrosłupa pod kątem α. Wykaż, że objętość tego ostrosłupa wynosi $V = \frac{a^3\mathrm{tg}\alpha}{12}$.

9. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, w którym r jest długością promienia okręgu wpisanego oraz R jest długością promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Wszystkie ściany boczne nachylone są do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem α. Wykaż, że objętość tego ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3}r^2\mathrm{tg}\alpha(2R + r)$.