Zadania dodatkowe

Termin: wrzesień

Zadanie 1. Mamy dany trójkąt równoboczny o boku 100. Z jednego z jego wierzchołków zakreślamy okrąg, który dzieli trójkąt na dwie części o równych polach. Oblicz promień tego okręgu.

Zadanie 2. Która liczba jest większa: 50^{99}, czy 99! ?

Zadanie 3. Udowodnić następujące twierdzenie:
Trójkąt jest równoboczny, wtedy i tylko wtedy gdy ma wszystkie kąty równe.

Zadanie 4. Udowodnić, że ułamek postaci $\frac{\text{l. nieparzysta}}{\text{l. parzysta}}$ nie może być liczbą całkowitą.

Zadanie 5. Wyobraźmy sobie sześcian. Chcemy go go pociąć na 27 małych jednakowych kostek, czyli na małe sześcianiki o trzykrotne krótszej krawędzi. Łatwo widać, że da się to zrobić sześcioma cięciami: cztery z nich prowadzimy z góry do dołu (równolegle do ścian bocznych) oraz dwa równolegle do podstaw. Powstaje pytanie: czy da się to zrobić mniejszą liczbą cięć (np. inaczej układając odcięte już części i przecinając je razem)? Okazuje się że 6 cięć to minimalna liczba i nie da się tego zrobić przy mniejszej liczbie cięć. Uzasadnić ten fakt, tzn, że 6 to najmniejsza możliwa liczba cięć.

Rozwiązanie 1. Przez P_1 oznaczmy pole wycinka koła, a przez P_2 pozostałą część trójkąta. Wtedy (Z równości odpowiednich pól):

$$\frac{60^\circ}{360^\circ}\cdot\pi r^2 = \frac{100^2\sqrt{3}}{4} - \frac{60^\circ}{360^\circ}\cdot\pi r^2$$
$$\frac{1}{3}\pi r^2 = 2500\sqrt{3}$$
$$r^2 = \frac{7500\sqrt{3}}{\pi}$$

A zatem

$$r = \sqrt{\frac{7500\sqrt{3}}{\pi}} = 50\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}} = \frac{50\sqrt[6]{27\pi^3}}{\pi}$$

Rozwiązanie 2. Rozpiszmy wyrażenie $\frac{50^{99}}{99!}$.

$$\frac{50^{99}}{99!} = \frac{\overbrace{50\cdot\ldots\cdot 50}^{49}\cdot 50\cdot\overbrace{50\cdot\ldots\cdot 50}^{49}}{99\cdot\ldots 51\cdot 50\cdot 49\cdot\ldots 1}$$

W liczniku i mianowniku mamy po 99 składników – będziemy je odpowiednio grupować. Dwie pięćdziesiątki z licznika[1] grupujemy z dwiema liczbami z mianownika symetrycznie położonymi względem liczby 50. Na przykład najpierw grupujemy 50 i 50 z 51 i 49. Następnie 50 i 50 z 52 i 48. Łatwo zauważyć, że $\frac{50\cdot 50}{51\cdot 49} > 1$, ponieważ w mianowniku jest wzór skróconego mnożenia $(50+1)(50-1) = (50^2-1)$. W każdym parowaniu licznik będzie większy od mianownika, więc ułamek będzie większy od 1. Środkowe wyróżnione liczby 50 skracają się, a każdy otrzymany ułamek jest większy od 1, a zatem wyjściowy ułamek też jest większy od 1, czyli $\frac{50^{99}}{99!} > 1$, a stąd już $50^{99} > 99!$.
Co ciekawe, można udowodnić[2], że prawdziwa jest ogólniejsza nierówność:
Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi

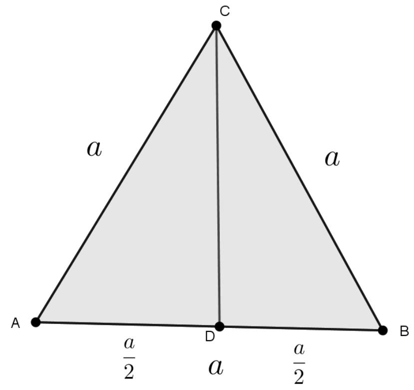
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!.$$

Podstawiając w powyższym twierdzeniu $n = 99$ od razu otrzymujemy wynik.

[1] Aby grupowanie było najbardziej oczywiste i widoczne, będziemy brać jedną pięćdziesiątkę z lewej strony i jedną z prawej strony wyróżnionej osobno liczby 50.

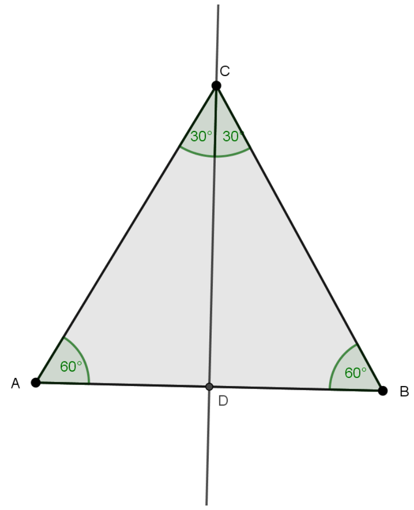
[2] proste ćwiczenie z indukcji

Rozwiązanie 3.
(⇒)



Prowadzimy środkową z wierzchołka C. Dwa boczne trójkąty są przystające z cechy *bbb*, bo $|AC| = |BC| = a$, CD to wspólny bok, zaś $|AD| = |BD|$. Zatem $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle B|$. Analogicznie pokazujemy równość $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle C|$, a zatem wszystkie kąty są sobie równe.

(⇐)



Prowadzimy dwusieczną z wierzchołka C. Dwa boczne trójkąty są przystające z cechy *kbk*, bo mają wspólny bok CD i kąty przy nim $90°$ oraz $30°$. Zatem $|AC| = |BC|$. Analogicznie pokazujemy równość $|AB| = |BC|$, a zatem wszystkie boki są sobie równe.

Rozwiązanie 4. Załóżmy odwrotnie, że ułamek ten jest liczbą całkowitą, tzn. $\frac{\text{l. nieparzysta}}{\text{l. parzysta}} = k$, dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Mnożąc obustronnie przez mianownik otrzymujemy (l. nieparzysta) = (l. parzysta) $\cdot\, k$. Prawa strona równości jest parzysta, a lewa nieparzysta. Sprzeczność, a zatem ułamek nie może być liczbą całkowitą.

Rozwiązanie 5. Pomalujmy ten sześcian farbą. Po rozcięciu go na mniejsze sześcianiki będzie jeden ze środka, który nie będzie pokolorowany na żadnej ze ścian. A to oznacza, że dużą kostkę trzeba było przeciąć minimum 6 razy, by odsłonić każdą ze ścian środkowego sześcianu.

Termin: październik

Zadanie 6. Czy istnieje liczba naturalna mniejsza od iloczynu swoich cyfr?

Zadanie 7. Dany jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $n \geqslant 5$. Udowodnić, że elementy powyższego zbioru można tak pokolorować na dwa kolory: czerwony i zielony, że suma liczb czerwonych jest równa iloczynowi liczb zielonych.

Zadanie 8. W kwadracie o boku 1 zawarty jest trójkąt. Wykaż, że pole tego trójkąta jest nie większe niż sinus dowolnego jego kąta.

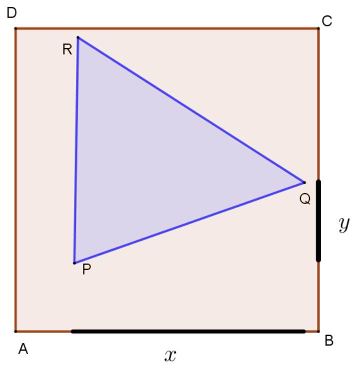
Zadanie 9. Rozwiąż równanie: $x^{19} + x^{95} = 2x^{19+95}$.

Zadanie 10. Rozważmy liczbę 2021!. Obliczamy sumę jej cyfr, a następnie sumę cyfr otrzymanej liczby i tak dalej, aż pozostanie nam liczba jednocyfrowa. Jaką liczbę otrzymamy na końcu?

Rozwiązanie 6. Rozważmy liczbę n, która ma $k+1$ cyfr. Oznaczmy pierwszą jej cyfrę przez a. Iloczyn cyfr liczby n jest mniejszy bądź równy $a \cdot \underbrace{9 \cdot \ldots \cdot 9}_{k} = a \cdot 9^k$. Z drugiej strony, liczba n jest większa bądź równa $a \cdot 10^k$. Tak więc taka liczba nie istnieje.

Rozwiązanie 7. Jeśli n jest nieparzyste, tzn. $n = 2k+1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 2$, to na zielono malujemy liczby $1, k, 2k$, a na czerwono pozostałe. Suma czerwonych wynosi wtedy:
$1 + 2 + \ldots + (2k+1) - (1 + k + 2k) = \dfrac{(2k+1)(2k+2)}{2} - 3k - 1 = 2k^2 + 2k + k + 1 - 3k - 1 = 2k^2$.
Tyle samo wynosi iloczyn liczb zielonych. Po drodze skorzystaliśmy ze wzoru na sumę kolejnych n liczb naturalnych tzn. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Jeśli natomiast n jest liczbą parzystą, czyli $n = 2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 3$, to na zielono malujemy liczby $1, k-1, 2k$, a na czerwono pozostałe. suma czerwonych wynosi wtedy:
$1 + 2 + \ldots + 2k - (1 + k - 1 + 2k) = \dfrac{2k(2k+1)}{2} - 3k = 2k^2 + 2k - 3k = 2k^2 - k = 2k(k-1)$. Tyle samo wynosi iloczyn liczb zielonych. A zatem takie kolorowanie istnieje.

Rozwiązanie 8. Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



Niech x i y to będą długości rzutów prostokątnych boku PQ odpowiednio na boki AB oraz BC. Wtedy oczywiście $x, y \leqslant 1$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $|PQ|^2 = x^2 + y^2 \leqslant 1 + 1 = 2$. Stad $|PQ| \leqslant \sqrt{2}$.
W analogiczny sposób pokazujemy $|QR| \leqslant \sqrt{2}$ oraz $|RP| \leqslant \sqrt{2}$.
Ze wzoru na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2}|PQ| \cdot |PR| \cdot \sin(\sphericalangle QPR) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\sphericalangle QPR) = \sin(\sphericalangle QPR)$.
A zatem $P \leqslant \sin(\sphericalangle QPR)$ Analogicznie postępujemy dla pozostałych dwóch kątów trójkąta.

Rozwiązanie 9. Mamy równanie $x^{19} + x^{95} = 2x^{114}$. Zróbmy proste podstawienie $a := x^{19}$. Wtedy uzyskujemy $a + a^5 = 2a^6$, co jest równoważne $2a^2 - a^5 - a = 0$. Widać, że jeśli a jest ujemne, to lewa strona jest dodatnia. Zatem nie ma rozwiązań ujemnych. Zajmiemy się przekształceniem lewej strony. Wyciągamy a przed nawias: $a(2a^5 - a^4 - 1) = a(a^5 + a^5 - a^4 - 1) = a(a^5 - 1 + a^5 - a^4) = a\left[(a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) + a^4(a-1)\right] = a(a-1)(2a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$.
Stąd $a = 0 \vee a = 1 \vee 2a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0$. Widzimy, że z ostatniego równania nie otrzymamy żadnego

nieujemnego rozwiązania. Wracając do postawienia otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 0$.
Uwaga: My sprytnie pogrupowaliśmy, ponieważ wymagało to jedynie znajomości wzorów skróconego mnożenia. Wyrażenie z zadania można oczywiście równie dobrze rozłożyć inną metodą, np. zgadując pierwiastek i stosując schemat Hornera.

Rozwiązanie 10. Cecha podzielności przez 9 mówi nam, że liczba jest podzielna przez 9 dokładnie wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9. Liczba 2021! to iloczyn liczb od 1 do 2021, a więc jest podzielna przez 9 (bo w rozkładzie występuje 9). Tak więc w każdym kroku otrzymana suma jest również podzielna przez 9. Czyli ostatnia otrzymana liczba jest podzielna przez 9. Mogłaby to więc być liczba 0 lub 9. Ale nie ma możliwości otrzymać 0 jako sumy cyfr innej liczby, więc jest to 9.

Termin: listopad

Zadanie 11. Ile wynosi suma cyfr liczby $10^{2021} - 2021$?

Zadanie 12. Na płaszczyźnie danych jest 25 różnych punktów. Przez D oznaczmy najdłuższą z odległości między dowolnymi dwoma punktami, a przez d najmniejszą z tych odległości. Uzasadnij, że $D > 2d$.

Zadanie 13. Prostopadłościan ma krawędzie długości $1, 2, 3$. Wyznacz najkrótszą drogę łączącą dwa jego przeciwległe wierzchołki, która biegnie po jego powierzchni.

Zadanie 14. Rozważmy trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej 10 i wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego równej 6. Ile wynosi pole takiego trójkąta?

Zadanie 15. Trójkąt równoboczny, kwadrat oraz sześciokąt foremny mają takie samo pole. Która z tych figur ma największy obwód?

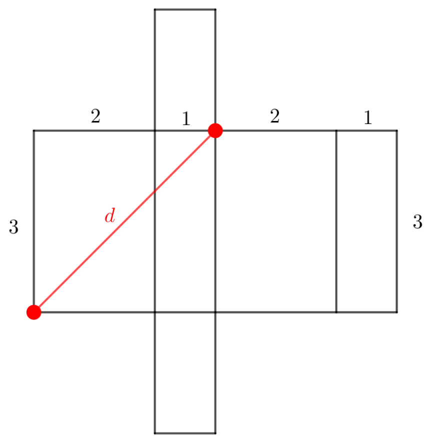
Rozwiązanie 11. Liczba 10^{2021} składa się z jedynki oraz 2021 zer. Odejmując 2021 otrzymujemy liczbę postaci $999\ldots997979$, gdzie na początku jest 2017 dziewiątek. Suma cyfr wynosi więc $2017 \cdot 9 + 7 + 9 + 7 + 9 = 18185$.

Rozwiązanie 12. Rozważmy dowolny z danych punktów. Narysujmy duży okrąg o środku w tym punkcie i promieniu $D + \frac{d}{2}$ oraz małe okręgi o promieniach $\frac{d}{2}$ i środkach w każdym z 25 punktów. Ponieważ D to największa z odległości między dwoma dowolnymi punktami, to duży okrąg zawiera w sobie wszystkie małe okręgi. Ponadto małe okręgi mają ze sobą parami co najwyżej jeden punkt wspólny ze względu na określenie d. Stąd wniosek, że pole dużego koła jest większe od sumy pól małych kół, czyli

$$\pi\left(D + \frac{d}{2}\right)^2 > 25\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

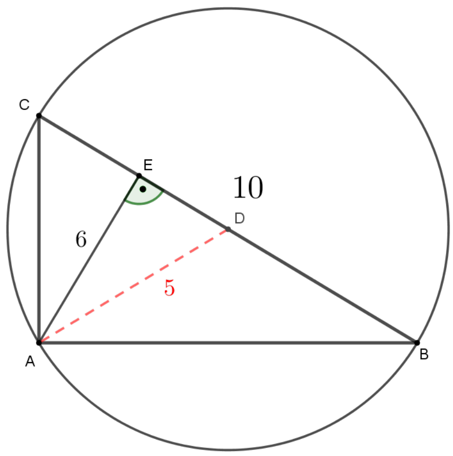
Po podzieleniu przez π i spierwiastkowaniu otrzymujemy $D + \frac{d}{2} > \frac{5d}{2}$, skąd $D > 2d$.

Rozwiązanie 13. Rozłóżmy prostopadłościan na siatkę względem krawędzi długości 3. Otrzymamy następujący rysunek.



Najkrótszą drogę między przeciwległymi wierzchołkami wyznacza przekątna prostokąta. Jest ona równa $\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$. Podobnie rozkładamy siatki względem krawędzi długości 2 oraz 1. Otrzymujemy wtedy przekątne długości $\sqrt{20}$ oraz $\sqrt{26}$. Najkrótszą z nich jest $\sqrt{18}$, więc to jest najkrótsza droga między szukanymi wierzchołkami.
Analogiczne rozumowanie na dowolnych liczbach a, b, c daje nam ogólny wzór na długość najkrótszej drogi: $d_{min} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}$, gdy c jest najdłuższą krawędzią.

Rozwiązanie 14. Jeśli opisalibyśmy na tym trójkącie okrąg, to jego środek leżałby na środku przeciwprostokątnej. Zatem promień okręgu wynosiłby 5. Odcinek między środkiem okręgu a wierzchołkiem kąta prostego miałby więc długość 5. Najkrótszym odcinkiem łączącym wierzchołek kąta prostego z przeciwprostokątną jest wysokość trójkąta, która wynosi 6. Otrzymujemy sprzeczność, bo odcinek ten ma długość większą niż odcinek AD, który wynosi 5. Taki trójkąt w ogóle więc nie istnieje.



Rozwiązanie 15. Oznaczmy wspólne pole przez P, bok trójkąta przez a, bok kwadratu przez b, a bok sześciokąta przez c. Pole trójkąta to $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, skąd $4P = a^2\sqrt{3}$. Po podzieleniu przez $\sqrt{3}$, usunięciu niewymierności z mianownika oraz spierwiastkowaniu mamy $a = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}\sqrt{P}$. Obwód trójkąta jest równy $6\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}\sqrt{P}$.
Pole kwadratu to $P = b^2$, skąd $b = \sqrt{P}$, Obwód kwadratu wynosi $4\sqrt{P}$.
Sześciokąt składa się z sześciu trójkątów równobocznych, więc jego pole jest równe $P = 6 \cdot \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$. Po skróceniu, podzieleniu przez $\sqrt{3}$, usunięciu niewymierności i spierwiastkowaniu mamy $c = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}\sqrt{P}$.
Obwód sześciokąta jest równy $2\sqrt{2\sqrt{3}}\sqrt{P}$.
Wystarczy zatem porównań liczby:

$$6\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}, \quad 4, \quad 2\sqrt{2\sqrt{3}}.$$

Po obliczeniu przybliżeń pierwsza z nich jest największa, a zatem największy obwód ma trójkąt.

Termin: grudzień

Zadanie 16. Na okręgu leży jeden punkt czerwony oraz 2021 niebieskich. Czy więcej jest wielokątów o wyłącznie niebieskich wierzchołkach, czy tych, które mają jeden wierzchołek czerwony, a resztę niebieskie?

Zadanie 17. Kwadrat o boku a podzielono liniami równoległymi do jego boków na dokładnie n^2 identycznych kwadratów, każdy o boku $\frac{a}{n}$. W każdy z tych kwadratów wpisujemy koło. Oblicz pole tej części kwadratu, które nie jest pokryte kołami. Co można o tym polu powiedzieć?

Zadanie 18. Liczbę naturalną nazywamy *wzrastającą*, gdy jej cyfry tworzą ciąg rosnący. Na przykład liczbami wzrastającymi są: 15, 369, 34579. Liczby jednocyfrowe również są wzrastające. Ile jest wszystkich liczb wzrastających?

Zadanie 19. Pewien matematyk w pewnym krakowskim liceum wymarzył sobie, aby uczniowie w jego klasie usiedli w ławkach w porządku alfabetycznym. Uczniowie jednak tego nie wiedzieli i po wejściu do sali wybrali miejsca na chybił trafił. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna osoba usiądzie na niewłaściwym miejscu? Zakładamy, że w klasie jest tyle miejsc co uczniów oraz że każdy uczeń mógł wybrać każde miejsce z takim samym prawdopodobieństwem.

Zadanie 20. Wielokrotnie spotykamy się na lekcjach z trójkątem egipskim, który jest trójkątem prostokątnym i ma boki długości $3, 4, 5$. Jakiej miary są jego kąty?

Rozwiązanie 16. Wystarczy każdy n-kąt o niebieskich wierzchołkach połączyć w parę z $(n+1)$-kątem o jednym wierzchołku czerwonym i tymi samymi wierzchołkami niebieskimi. Bez pary zostały jedynie trójkąty z czerwonym wierzchołkiem (bo bez niego dwa niebieskie wierzchołki nie tworzą wielokąta). Zatem więcej jest wielokątów z czerwonym wierzchołkiem.

Rozwiązanie 17. Pole jednego małego koła wynosi $P_{\text{małe koło}} = \pi\left(\frac{a}{2n}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4n^2}$. Takich kół jest dokładnie n^2. Pole niepokrytej części to:

$$P_{\text{kwadratu}} - n^2 \cdot P_{\text{małe koło}} = a^2 - n^2 \cdot \frac{\pi a^2}{4n^2} = a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Pole to nie zależy od liczby małych kwadratów, które powstały.

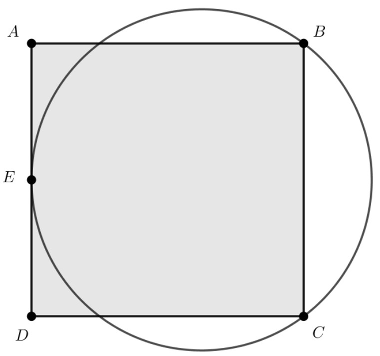
Rozwiązanie 18. Zauważmy, że poza liczbą 0, nie możemy użyć cyfry 0, bo musiałaby być na początku, a wtedy nie otrzymujemy „zwyczajnej” liczby, a coś w stylu 01245. Do dyspozycji mamy więc 9 cyfr. Wybranie cyfr jednoznacznie wyznacza dokładnie jedną liczbę wzrastającą – wystarczy więc wyliczyć, ile jest możliwości wyboru jakichś cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Zauważmy, że każdą cyfrę możemy, do naszego zbioru tworzącego liczbę, wybrać lub nie. Dla każdej cyfry jest więc 2 możliwości. Mamy zatem $\underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{9} = 2^9$ możliwości. Trzeba wyrzucić jeszcze przypadek, gdy nie wybierzemy żadnej cyfry, bo wtedy nie utworzy nam się liczba. Dodając jednak przypadek z początku zadania, czyli liczbę 0, mamy ostatecznie 2^9 możliwości.

Rozwiązanie 19. To prawdopodobieństwo wynosi 0. Nie ma znaczenia tutaj liczba uczniów. Gdyby wszyscy z wyjątkiem ostatniej osoby usiedli na odpowiednich miejscach, to ostatnia osoba też musi usiąść na właściwym miejscu, bo tylko jedno zostało.

Rozwiązanie 20. Z twierdzenia sinusów $\frac{3}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin 90^\circ}$. Stąd $\sin\alpha = \dfrac{3}{5} \cdot \sin 90^\circ = \dfrac{3}{5} = 0,6$. Zatem $\alpha \approx 37^\circ$, a więc $\beta \approx 53^\circ$. Trzeci kąt ma oczywiście 90°.

Termin: styczeń

Zadanie 21. Dany jest kwadrat $ABCD$ umieszczony względem okręgu tak jak na rysunku. Odcinek AD jest styczny do okręgu, a punkt E jest środkiem tego odcinka. Co ma większy obwód: okrąg, czy kwadrat?



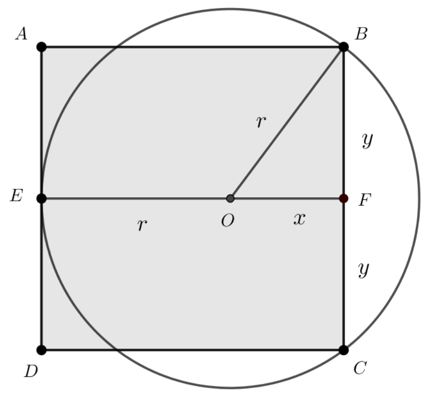
Zadanie 22. Udowodnij, że $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2020}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2021}\right)<1$.

Zadanie 23. Rozważmy sumę $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$. Czy można pozmieniać niektóre znaki $+$ na $-$, tak aby wynik był równy 0?

Zadanie 24. Czy istnieje trójkąt, którego iloczyn dwóch boków jest równy jego polu?

Zadanie 25. Czy istnieje trójkąt, którego iloczyn trzech boków jest równy jego polu?

Rozwiązanie 21. Wprowadźmy oznaczenia takie jak na rysunku (odcinek BF jest prostopadły do OF). Odcinki BF i CF są równe, ponieważ trójkąt COB jest równoramienny.



Z twierdzenia Pitagorasa mamy $x^2+y^2=r^2$. Ponadto, bok kwadratu to z jednej strony $r+x$, a z drugiej $2y$. Stąd $x=2y-r$. Dalej:

$$(2y-r)^2+y^2=r^2$$
$$4y^2-4yr+r^2+y^2=r^2$$
$$5y^2=4yr \quad |:4y$$
$$r=\frac{5}{4}y$$

Ostatecznie

$$\frac{L_{\text{okrąg}}}{L_{\text{kwadrat}}}=\frac{2\pi r}{8y}=\frac{2,5\pi y}{8y}=\frac{5\pi}{16}<1,$$

a zatem obwód kwadratu jest większy.

Rozwiązanie 22. (I sposób)

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2020}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2021}\right)<$$
$$<\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2020}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2020}\right)=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2020^2}\right)<1\cdot1\cdot\ldots\cdot1=1,$$

gdzie w pierwszym kroku zwiększyliśmy co drugi składnik zmniejszając mianowniki, a w drugim zastosowaliśmy wzór skróconego mnożenia.

(II sposób)

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2020}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2021}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2019}{2020}\cdot\frac{2022}{2021}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2022}{2021}=\frac{1011}{2021}<1,$$

gdzie w drugim kroku parami skracają się ułamki, bo są postaci $\frac{n+1}{n}$ oraz $\frac{n}{n+1}$, co uzasadnia rachunek:

$$1+\frac{1}{n}=\frac{n}{n}+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n} \quad \text{oraz} \quad 1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Rozwiązanie 23. Powyższa suma wynosi 55. Jest to liczba nieparzysta. Zauważmy, że zmiana plusa na minus zamienia liczbę k na liczbę $-k$, a więc cała suma zmaleje o $2k$, czyli liczbę parzystą. Nie da się więc nigdy otrzymać liczby parzystej – w szczególności zera.

Rozwiązanie 24. Załóżmy, że taki trójkąt istnieje. Wtedy $P = ab$, a z drugiej strony $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, gdzie a, b to boki trójkąta, a γ to kąt między tymi bokami. Otrzymujemy równość $ab = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, co po skróceniu daje $\sin\gamma = 2$. Sprzeczność, ponieważ w dowolnym trójkącie $\sin\gamma \in (0, 1]$. Zatem taki trójkąt nie istnieje.

Rozwiązanie 25. Tak. Rozważmy trójkąt równoboczny o boku a. Chcemy rozwiązać równanie $a^3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Po podzieleniu przez a^2 otrzymujemy $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Termin: luty

Zadanie 26. Udowodnij, że w grupie sześciu osób istnieje trzyosobowa podgrupa, w której każdy się zna, lub trzyosobowa podgrupa, w której nikt się nie zna. (Zakładamy oczywiście, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A).

Zadanie 27. Na płaszczyźnie dana jest parzysta liczba punktów. Połowę z nich malujemy losowo na czerwono, a drugą połowę na zielono. Udowodnić, że można tak parami połączyć te punkty, aby powstałe odcinki się nie przecinały.

Zadanie 28. Czy istnieje (a jeśli tak, to jaki) wielościan wypukły, w którym każda ściana ma inną liczbę boków?

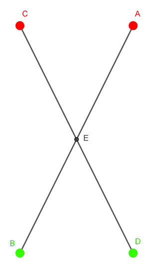
Zadanie 29. Niech $x > 0$. Rozwiąż równanie: $x^{x^x} = (x^x)^x$.

Zadanie 30. W miejscowości X jest 100 dzieci, a w miejscowości Y jest 50. W którym miejscu na drodze z X do Y należy wybudować szkołę, aby łącznie dzieci pokonywały jak najmniejszą liczbę kilometrów?

Rozwiązanie 26. Wybierzmy dowolną osobę i nazwijmy ją X. Oprócz niej jest 5 innych. Wśród tych pięciu na pewno są przynajmniej trzy, które osoba X zna lub przynajmniej 3, których X nie zna (bo X każdą osobę może znać lub nie – nie ma innych opcji). Załóżmy, że zaszła opcja pierwsza (drugą rozpatrujemy analogicznie), czyli osoba X zna trzy osoby – nazwijmy je A, B, C. Gdyby którekolwiek osoby z grupy A, B, C się znały, to razem z osobą X mielibyśmy trzyosobową grupę, która się zna, czyli koniec zadania. Jeśli zaś w tej grupie żadne dwie się nie znają, to mamy grupę trzyosobową, w której nikt się nie zna i też koniec zadania.

Zauważmy, że zadanie to możemy ubrać w różną formę beletrystyczną. Zamiast mówić o znajomych i nieznajomych można osoby traktować jako punkty na płaszczyźnie, a znajomość jako ich połączenie; znajomość można traktować jako rozegranie meczu między graczami w jakimś turnieju; połączenie między dwoma miastami itd. Wszystkie takie zadania to tak naprawdę jedno i to samo zadanie. W jednej z takich wersji (z połączeniem punktów odcinkami w dwóch kolorach) pojawiło się na XVII Olimpiadzie Matematycznej w drugim etapie.

Rozwiązanie 27. Punktów jest skończenie wiele, więc możemy rozważyć wszystkie możliwe połączenia i wybrać z nich to, w którym suma długości narysowanych odcinków jest najmniejsza. To połączenie jest dobre, bo gdyby jakieś dwa odcinki się w nim przecięły (np. AB i CD w punkcie E – patrz rysunek), to wtedy po zamianie ich na odcinki AB i BC z nierówności trójkąta ($|BC| < |BE| + |EC|$ i analogicznie z drugiej strony) otrzymane długości byłyby krótsze, co byłoby sprzeczne z wyborem takiego łączenia, w którym suma długości jest najmniejsza.



Rozwiązanie 28. Rozważmy ścianę o największej liczbie boków - powiedzmy n. Ściana ta ma dokładnie n sąsiadów. Każdy z tych sąsiadów może mieć liczbę boków należącą do zbioru $\{3, 4, 5, \ldots, n-1\}$. W tym zbiorze jest tylko $n-3$ elementów, a ścian jest n, a więc pewne dwie mają tyle samo boków. Nie istnieje więc wielościan taki, że każda ściana ma inną liczbę boków.

Rozwiązanie 29. Obkładamy równanie logarytmem naturalnym (możemy to zrobić, bo logarytm to funkcja różnowartościowa). Mamy:

$$\ln x^{x^x} = \ln\left(x^x\right)^x.$$

Z własności logarytmu możemy wykładnik wyciągnąć przed logarytm, a więc:

$$x^x \ln x = x \ln x^x$$

$$x^x \ln x = x^2 \ln x.$$

Przenosząc na jedną stronę i wyciągając przed nawias otrzymujemy:

$$\ln x\left(x^x - x^2\right) = 0$$

$$\ln x = 0 \vee x^x = x^2$$

$$x = 1 \vee x = 2 \vee x = 1.$$

Ostatecznie

$$x \in \{1, 2\}.$$

Rozwiązanie 30. Jeśli przez s oznaczymy odległość między miejscowościami, a przez x odległość szkoły od miejscowości x, to łączna trasa pokonana przez dzieci wynosi:

$$100x + 50(s-x) = 50x + 50s = 50(x+s),$$

a wyrażenie to przyjmuje wartość najmniejszą gdy $x = 0$. Tak więc szkołę należy wybudować w miejscowości X.

Termin: marzec

Zadanie 31. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieją dwa punkty takiego samego koloru odległe o 1.

Zadanie 32. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z trzech kolorów. Wykaż, że istnieją dwa punkty takiego samego koloru odległe o 1.

Zadanie 33. Pewną grupę uczniów zapytano, co to jest wartość bezwzględna. Otrzymano następujące odpowiedzi:

a) $|x| = \max(x, -x)$

b) wartość bezwzględna liczby, to większa spośród liczb: liczby danej i liczby do niej przeciwnej.

c) $|x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x > 0, \\ -x & \text{gdy } x \leqslant 0 \end{cases}$

d) $|x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x > 0, \\ -x & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$. Ponadto przyjmujemy $|0| = 0$.

e) $|x| = x \operatorname{sgn} x$

f) wartość bezwzględna liczby dodatniej jest tą samą liczbą, wartość bezwzględna liczby ujemnej, to liczba do niej przeciwna.

g) wartość bezwzględna to funkcja: tożsamościowa dla liczb nieujemnych, a zmieniająca liczbę na przeciwną dla liczb ujemnych.

h) wartością bezwzględną liczby nazywamy odległość punktu odpowiadającego tej liczbie na osi liczbowej od punktu odpowiadającego liczbie 0 mierzonej w odcinkach jednostkowych.

i) $f(x) = |x| \Leftrightarrow [(x \geqslant 0 \wedge f(x) = x) \vee (x < 0 \wedge f(x) = -x)]$

Oceń ich prawdziwość.

Zadanie 34. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a, b i przeciwprostokątnej c zachodzi nierówność: $a^3 + b^3 < c^3$.

Zadanie 35. Rozwiąż równanie: $\lfloor \operatorname{sgn} x \rfloor = \operatorname{sgn} \lfloor x \rfloor$.
