Zadania uzupełniające do rozdziału 2.

Logika

Zadanie 1. Udowodnij metodą zero-jedynkową poniższe tautologie:
a) prawo podwójnego przeczenia
b) prawo zaprzeczenia implikacji
c) prawo kontrapozycji ⊠
d) prawo łączności alternatywy
e) dowolną z pozostałych w teorii tautologię ⊠

Zadanie 2. Niech A, B, C będą dowolnymi zbiorami. Udowodnij przy pomocy logiki matematycznej poniższe prawa rachunku zbiorów:
a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ⊠
c) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
d) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Zadanie 3. Na przykładzie dwóch poniższych zdań wyjaśnić, dlaczego nie można przestawiać kolejności różnych kwantyfikatorów:
Zdanie 1:
$$\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} :\ x < y.$$
Zdanie 2:
$$\exists y \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{N} :\ x < y.$$

⊠ **Zadanie 4.** Wymyślić przykład „z życia wzięty” pokazujący podobną różnicę jak w zadaniu powyższym, że zamiana kwantyfikatorów tworzy nowe, inne zdanie.

Zadanie 5. Oceń wartość logiczną poniższych zdań, a następnie napisz ich zaprzeczenia:
a) $\left(3^2 + 3^2 + 3^2 \neq 3^3 \Rightarrow 101 + 106 \in \mathbb{P}\right) \Rightarrow \left(3,(7) \leqslant 3,7(7) \wedge 43^2 + 44^2 \neq 45^2\right)$
b) $\left(8 \nmid 2 \wedge 4\sqrt{2} \leqslant \sqrt{30}\right) \vee \left(3 + \sqrt{2} \neq 7 - \sqrt{2} \vee 0 = 2^0\right)$
c) $\exists x \in \mathbb{N}\, \forall a \in \mathbb{R}_- :\ a^x - 1 = 0$
d) $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists b \in \mathbb{R} :\ a \cdot \frac{1}{b} = 1$

Nierówności między średnimi

Poniższe zadania w większości pochodzą ze zbioru Pazdro.

Zadanie 6. Wykaż twierdzenie o sumie liczby i jej odwrotności dwoma sposobami: przy użyciu wzorów skróconego mnożenia oraz przy użyciu nierówności między średnimi.

Zadanie 7. Wykaż, że jeśli suma dodatnich liczb a, b jest równa 3, to $a \cdot b \leqslant 2\frac{1}{4}$.

☒ **Zadanie 8.** Wykaż, że jeśli liczby x, y, z są dodatnie oraz $9x + y + 3z = 18$, to $8 - xyz \geqslant 0$.

Zadanie 9. Wykaż, że jeśli dodatnie liczby p, q, r spełniają nierówność $p+q+r > 2$, to $3(p^2+q^2+r^2) > 4$.

Zadanie 10. Wykaż, że jeśli x i y są liczbami dodatnimi oraz $xy = \frac{1}{4}$, to $4(1+x)(1+y) \geqslant 9$.

☒ **Zadanie 11.** Wykaż, że jeśli liczby x, y są dodatnie, to $\frac{2x^2+2y^2}{xy} + 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geqslant 10$.

☒ **Zadanie 12.** Wykaż, że jeśli $x > 0$, to $x^3 + \frac{4}{x^2} + \frac{54}{x} \geqslant 18$.

Zadanie 13. Wykaż, że jeśli $a \neq 0$, to $a^4 + \frac{128}{a^2} \geqslant 48$.

Zadanie 14. Wykaż, że jeśli liczby a, b są dodatnie oraz $a + b = 12$, to $(2+a)(2+b) \leqslant 64$.

Zadanie 15. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c, d są dodatnie, to $\frac{2a+c}{b} + \frac{b+5d}{c} + \frac{2bd+5ac}{ad} \geqslant 16$.

Zadanie 16. Wykaż, że jeśli liczby a, b są dodatnie, to $5 \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \frac{6(a+b)^2 - 12ab}{ab} \geqslant 22$.

Zadanie 17. Wykaż, że jeśli liczby x, y, z są dodatnie, to:

$$xy(3x + 2y - 4z) + yz(y + 3z - 4x) + xz(x + 2z - 4y) \geqslant 0.$$

Zadanie 18. Wykaż, że jeśli liczby dodatnie a, b spełniają nierówność $a + b \geqslant 1$, to $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

Zadanie 19. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} \geqslant 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right).$$

Zadanie 20. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

Zadanie 21 (3 OM. I stopień)**.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb $u, v, w \geqslant 0$ zachodzi nierówność $u^3 + v^3 + w^3 \geqslant 3uvw$.

Zadanie 22. *Udowodnij następującą nierówność:

$$\forall n \geqslant 2: \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) + 1.$$

Kombinatoryka

Zadanie 23. Oblicz:

a) $\sum_{n=1}^{3} \frac{n}{n+2}$

b) $\sum_{n=2}^{5} \sqrt[n]{2}$

c) $\sum_{n=2}^{5} (2n-1)^3$ ⊠

Zadanie 24. Oblicz:

a) $7!$

b) $(n+1)! - n!$

c) $\frac{(n+5)!}{(n+3)!}$ ⊠

d) $\frac{(n+3)!(3n)!}{(3n+1)!(n+2)!}$

e) $\binom{7}{3}$

f) $\binom{13}{9}$ ⊠

g) $\binom{100}{98}$

h) $\binom{8}{2} - \binom{6}{4}$ ⊠

Zadanie 25. Oblicz korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona:

a) $(\sqrt{3}+3)^4$

b) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^5$

c) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^6$ ⊠

d) $(2x+y)^4$

e) $(x-y)^5$ ⊠

f) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4$

g) $(c-1)^7$

Zadanie 26. Wyznacz siódmy wyraz rozwinięcia $\left(2x-\frac{1}{4}\right)^{10}$.

⊠ **Zadanie 27.** Wyznacz ósmy wyraz rozwinięcia $\left(3x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{11}$.

Zadanie 28. Oblicz:

a) $\binom{2022}{0} + \binom{2022}{1} + \binom{2022}{2} + \ldots + \binom{2022}{2021} + \binom{2022}{2022}$

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots (-1)^n \binom{n}{12} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$

c) $\binom{9}{1} + \binom{9}{3} + \binom{9}{5} + \binom{9}{7} + \binom{9}{9}$

d) $\binom{12}{0} + \binom{12}{2} + \binom{12}{4} + \ldots + \binom{12}{12}$ ⊠

⊠ **Zadanie 29.** Wyprowadź wzór na $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Czym jest ta suma biorąc pod uwagę interpretację kombinatoryczną symbolu $\binom{n}{k}$?

Zadanie 30. Wyznacz współczynnik stojący przy wyrażeniu:

a) x^3y^4 dla $(x+2y)^7$

b) $a^{15}b$ dla $(a+3b)^{16}$ ⊠

c) a^5 dla $\left(a^3+\frac{1}{a^2}\right)^{15}$

Powtórzenie

Zadanie 31. Wiedząc, że $\log_{12} 4 = a$, oblicz:

a) $\log_{12} 48$

b) $\log_{12} 3$

c) $\log_{12} 27$

d) $\log_{12} \frac{1}{4\sqrt{3}}$

☒ **Zadanie 32** (matura maj 2021)**.** Niech $\log_2 18 = c$. Oblicz $\log_3 4$

Zadanie 33 (matura próbna 2015)**.** Niech $\log_{24} 6 = a$. Oblicz $\log_6 256$

Zadanie 34. Niech $\log 15 = c$ oraz $\log_{20} 50 = d$. Oblicz $\log_9 40$

☒ **Zadanie 35.** Niech $\log_{30} 3 = c$ oraz $\log_{30} 5 = d$. Oblicz $\log_{30} 8$

Zadanie 36 (matura maj 2018)**.** Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.