

Nakład: 2800 egz.

$\eta = 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot J \cdot s$   $\pi = 3,141592...$

MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA

NR 9 (604) 2024

CENA 8,21 VAT 8%  
PL ISSN 0137-3005 NR IND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

Matematyka  
starożytnych  
Chin  
str. 1



17-65-10-31-15-77-31-15-92

## SPIS TREŚCI NUMERU 9 (604) 2024

Kilka problemów z matematyki starożytnych Chin

*Krzysztof R. Apt*

str. 1



Zadania

str. 3

Jak wygląda pozaskończona rzeczywistość?

*Julia Ścisłowska*

str. 4

Szerokość ścieżkowa

*Jadwiga Czyżewska*

str. 6



*Marta Fikus-Kryńska*

str. 10

William Rowan Hamilton i hodograf

*Grzegorz Łukaszewicz*

str. 12

Problem Flawiusza

*Dagna Czubla, Marcin Wierzbniński*

str. 16



Aktualności

Ciemna materia na deskach

str. 19

Klub 44

str. 20



Prosto z nieba: Uwaga na szczeleinę

str. 22



Niebo we wrześniu

str. 23



Skojarzenia – część 1

str. 25

**W kolejnym numerze:**  
**Mały krok dla wyborcy,**  
**ogromny skok**  
**dla demokracji.**



Miesiącznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej; dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, prof. UW; dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący; dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW; dr hab. Sławomir Dinew, prof. UJ; dr Tomasz Greczyło, prof. UWr; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UWr; prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański; prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący; dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński; dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak; dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN; prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

**Redaguje collegium w składzie:** Michał Bejger, Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nacz., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nacz., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sek. red.

**Adres do korespondencji:**

Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
e-mail: [deltam@imuw.edu.pl](mailto:deltam@imuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Odkłady i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem LATEX wykonała Redakcja.  
Druk: Poligrafia NOT, [www.poligrafianot.pl](http://www.poligrafianot.pl)

**Prenumerata:**

Garmond Press: [www.garmondpres.pl](http://www.garmondpres.pl) (tylko instytucje)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
Na stronie Empiku *Delta* można zamówić co miesiąc:  
[www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p](http://www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;  
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym  
artykuly archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



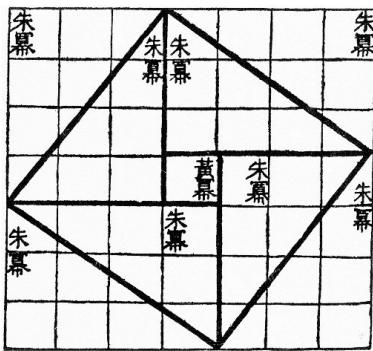
Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

**Wydawca:** Uniwersytet Warszawski

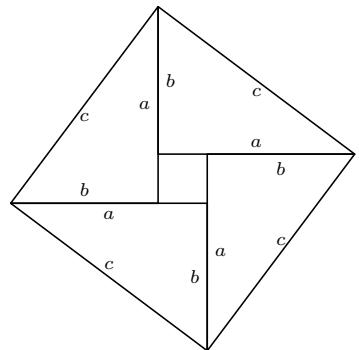
# Kilka problemów z matematyki starożytnych Chin

\* CWI, Amsterdam i Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

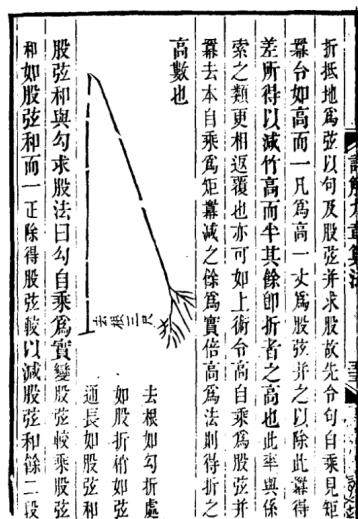
Zobacz: G.G. Joseph, *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*, wydanie trzecie, Princeton University Press, s. 191, 2011.



Rys. 1. Rysunek z *Zhou Bi Suan Jing*. Źródło: domena publiczna, Wikipedia Commons



Rys. 2. Dowód twierdzenia Pitagorasa



Rys. 3. Problem złamaneego bambusa.  
Reprodukcia z książki "A Brief History of Mathematics for Curious Minds"  
autorstwa Krzysztofa R. Apt, za zgodą wydawcy. © 2024 World Scientific Publishing Company,  
<https://doi.org/10.1142/13518>

Krzysztof R. APT\*

W tym artykule przybliżymy nieco Czytelnikowi matematykę starożytnych Chin i pokażemy kilka ciekawych zagadek i problemów, które ukazały się w chińskich teksthach w okresie od 500 roku p.n.e. do XIII wieku.

W starożytnych Chinach matematycy nie byli zainteresowani podążaniem za abstrakcyjnymi pojęciami matematycznymi dla własnej satysfakcji. Kładli nacisk wyłącznie na naukę empiryczną. Stworzyli inne podejście do matematyki niż to prezentowane przez Greków, którzy byli zainteresowani także czysto teoretycznymi pytaniami (na przykład dowiedzeniem, że istnieje nieskończoność wiele liczb pierwszych lub ustaleniem liczby brył platońskich). Dlatego aby zrozumieć osiągnięcia starożytnych matematyków chińskich, trzeba skupić się na konkretnych problemach, które rozważali.

Jednym z najstarszych zachowanych chińskich tekstów matematycznych jest *Zhou Bi Suan Jing* (Klasyczna Matematyka Zhou Gnomona), poświęcony astronomii i matematyce. Szacuje się, że został napisany w latach 500–200 p.n.e. Tekst zawiera interesujący rysunek (zobacz rys. 1).

Sugeruje on elegancki dowód twierdzenia Pitagorasa. Mianowicie: rozważmy rysunek 2, gdzie oznaczamy istotne odcinki przez  $a$ ,  $b$  i  $c$ .

Pole dużego kwadratu wynosi  $c^2$ . Składa się on z czterech trójkątów prostokątnych, każdy o bokach  $a$ ,  $b$  i  $c$ , oraz kwadratu o boku  $a - b$ . Stąd otrzymujemy

$$4 \frac{ab}{2} + (a - b)^2 = c^2$$

lub

$$2ab + a^2 - 2ab + b^2 = c^2,$$

co prowadzi do pożąданej konkluzji.

Najbardziej wpływowym tekstem w historii chińskiej matematyki jest anonimowa książka *Jiu Zhang Suan Shu* (Dziewięć Rozdziałów o Sztuce Matematycznej), napisana w latach 500 p.n.e. – 200 n.e. (za: G.G. Joseph, s. 191). Jest to właściwie komplikacja dzieł kilku pokoleń chińskich matematyków, prawdopodobnie począwszy od X wieku p.n.e. Dostępna wersja pochodzi z III wieku.

Tekst wpłynął na chińską matematykę, podobnie jak *Elementy* Euklidesa wpłynęły na matematykę europejską, i przez kilka wieków był używany do szkolenia urzędników administracji cesarskiej. Książka jest zorganizowana jako seria 246 problemów z rozwiązaniami, ułożonymi tematycznie w dziewięć rozdziałów.

Ostatni rozdział zawiera dowód twierdzenia Pitagorasa. Był on w szczególności wykorzystany do rozwiązywania następującego pięknego problemu.

## Problem złamaneego bambusa

Poniższe sformułowanie pochodzi z XIII wieku, użyte w nim *chi* to jednostka długości.

*Bambus o wysokości 10 chi złamał się, i jego wierzchołek dotycza ziemi 3 chi od podstawy pnia. Na jakiej wysokości się złamał?*

Problem pojawiał się ponownie w pracach hinduskich matematyków, od IX do XII wieku, a ostatecznie także w niektórych teksthach w Europie. Sugeruje to migrację na zachód różnych pomysłów matematycznych ze starożytnych Chin (za: G.G. Joseph, s. 257).

Rozwiązywanie problemu jest bardzo proste. Oznaczmy długość złamanej części przez  $x$ . Z twierdzenia Pitagorasa  $x^2 + 3^2 = (10 - x)^2$ , czyli  $x^2 + 9 = 100 - 20x + x^2$ , co daje  $x = \frac{91}{20} = 4,55$ . A więc bambus złamał się na wysokości 4,55 chi.

## Chińskie twierdzenie o reszcie

Wyrafinowanie chińskiej matematyki w IV wieku n.e. można docenić poprzez rozważenie następującego problemu z tekstu *Sun Zu Suan Jing* (Matematyczny podręcznik mistrza Suna):

*Istnieje pewna nieznana liczba obiektów. Gdy liczymy je „po trzy” [tj. dzielimy przez 3], reszta wynosi 2, gdy liczymy je „po pięć”, reszta wynosi 3, a gdy liczymy je „po siedem”, reszta wynosi 2. Ile jest obiektów?*

Najmniejszą odpowiedzią jest 23.  
Faktycznie, 23 podzielone przez 3 daje resztę 2, 23 podzielone przez 5 daje resztę 3, a 23 podzielone przez 7 daje resztę 2.

Problem stu ptaków może być sformalizowany za pomocą następujących dwóch równań:

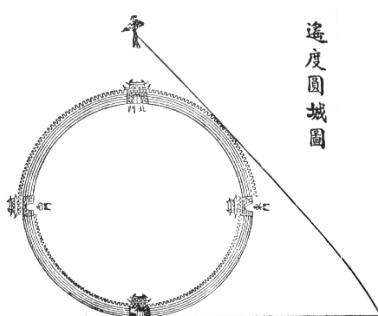
$$\begin{aligned}5x + 3y + \frac{1}{3}z &= 100, \\x + y + z &= 100,\end{aligned}$$

gdzie  $x, y$  i  $z$  oznaczają, odpowiednio, liczbę kogutów, kur i kurczaków.

Rozwiązań przyjmują postać:

$$\begin{aligned}x &= 4t, \\y &= 25 - 7t, \\z &= 75 + 3t,\end{aligned}$$

$t$  jest tu całkowitym parametrem. Wszystkie wartości, w szczególności  $y$ , muszą być nieujemne. Wynika z tego, że  $t$  musi być równe 0, 1, 2 lub 3. To prowadzi do czterech rozwiązań  $(x, y, z)$  w liczbach naturalnych:  $(0, 25, 75)$ ,  $(4, 18, 78)$ ,  $(8, 11, 81)$  i  $(12, 4, 84)$ . Autor pomija pierwsze z nich.



Rys. 4. Problem miasta otoczonego murem. Źródło: domena publiczna, Wikipedia Commons

Zobacz: rozdział 5 w książce C. Smoryńskiego *History of Mathematics: A Supplement*, Springer, 2008.

Autor tej książki podał zarówno odpowiedź, jak i wyjaśnienie swojej metody rozwiązywania problemu. Rozwiążanie, gdy uogólnione do dowolnej liczby założenie postaci „gdy liczymy w  $x$ , reszta wynosi  $y$ ”, przy założeniu, że użyte dzielniki  $y$  są względnie pierwsze, jest nazywane *chińskim twierdzeniem o reszcie*. Jest to ważny wynik w teorii liczb.

## Problem stu ptaków

Inny słynny problem pojawił się w tekście z V wieku. Jest on sformułowany następująco (*qian* to miedziany pieniądz [za: G.G. Joseph, s. 288]):

*Jeśli koguty kosztują 5 qianów każdy, kury kosztują 3 qiany każda i 3 kurczaki kosztują 1 qian, i jeśli 100 ptaków dostaje się za 100 qianów, ile jest kogutów, kur i kurczaków?*

Tekst oferuje trzy rozwiązania tego problemu, chociaż nie podano wyjaśnienia, jak zostały one otrzymane. Matematycznie ten problem jest interesujący, ponieważ wymaga rozwiązywania równań liniowych w liczbach naturalnych, czyli tak zwanych równań diofantycznych, rozważanych w Starożytnej Grecji przez **Diofantosa** (ok. 250 roku). Co więcej, sformalizowanie problemu jako dwóch równań z trzema zmiennymi prowadzi do koncepcji *parametryzowanych rozwiązań*. Co ciekawe, warianty tego problemu pojawiły się kilka wieków później w Indiach, Egipcie i średniowiecznej Europie.

## Problem miasta otoczonego murem

Zakończmy tę krótką prezentację omówieniem następującego intrygującego problemu z okresu średniowiecza. Pochodzi on z imponującego tekstu *Shu Shu Jiu Zhang* (Traktat matematyczny w dziewięciu sekcjach), napisanego w XIII wieku przez Chińskiego matematyka **Qin Jiushao** (ok. 1202 – ok. 1261). Książka zawiera 81 problemów matematycznych dotyczących różnych zagadnień praktycznych, w tym astronomii i spraw wojskowych. W zadaniu poniżej *li* jest jednostką odległości.

*Miasto jest otoczone okrągłym murem o nieznanej średnicy, z czterema bramami. Drzewo leży 3 li na północ od północnej bramy. Jeśli idziemy 9 li na wschód od południowej bramy, drzewo staje się widoczne. Znajdź średnicę miasta.*

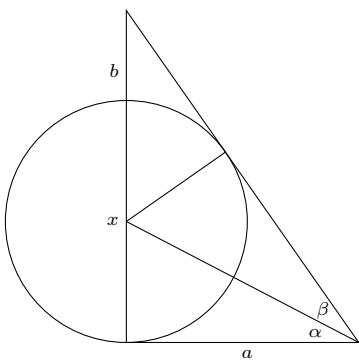
Ten problem został szczegółowo omówiony w książce C. Smoryńskiego. Przedstawimy tu alternatywne rozwiązanie, które wykorzystuje tożsamość trygonometryczną dotyczącą funkcji tangens,  $\operatorname{tg}$ .

Rozważmy uogólnienie, w którym używamy dowolnych wartości  $a$  i  $b$  zamiast 9 i 3. Zadanie sprowadza się więc do obliczenia średnicy  $x$  okręgu, gdy mamy dane  $a$  i  $b$ . Dodajmy do początkowego rysunku dodatkowy promień okręgu, jak w rysunku 5.

Rozważmy trójkąty prostokątne o kątach  $\alpha$  i  $\beta$ . Mają one wspólny jeden bok  $i$  w każdym z nich drugi bok jest równy promieniowi okręgu. Wobec tego z twierdzenia Pitagorasa trzecie boki są sobie równe.

A więc te trójkąty są przystające, zatem  $\alpha = \beta$ . Mamy  $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{x+b}{a}$  oraz  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{b}{a}$ , więc

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = 2\operatorname{tg}(\alpha) + \frac{b}{a}.$$



Rys. 5. Problem okrągłego miasta otoczonego murem w ogólnej wersji

Korzystamy teraz z tożsamości trygonometrycznej

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha)}.$$

Ostatnie dwie równości prowadzą do równania

$$2y + \frac{b}{a} = \frac{2y}{1 - y^2},$$

gdzie  $y = \operatorname{tg}(\alpha)$ .

Mnożąc obie strony przez  $a(1 - y^2)$  i upraszczając, otrzymujemy równanie trzeciego stopnia w  $y$ :

$$2ay^3 + by^2 - b = 0.$$

Ale  $y = \frac{x}{a}$ , więc podstawiając, otrzymujemy po uproszczeniu następujące równanie trzeciego stopnia w  $x$ :

$$x^3 + bx^2 - 4a^2b = 0.$$

Dla  $a = 9$  i  $b = 3$  za pomocą *WolframAlpha*, <https://www.wolframalpha.com>, otrzymujemy trzy rozwiązania: dwa w liczbach zespolonych i jedno w liczbach rzeczywistych,  $x = 9$ , co jest poszukiwaną odpowiedzią.

Fakt, że rozwiązanie tak prostego problemu wymaga rozważenia równania trzeciego stopnia, jest zaskakujący. Drogi Czytelniku, jeżeli uda Ci się rozwiązać ten problem przy użyciu tylko równania drugiego stopnia, to daj, proszę, znać na adres [apt@cwii.nl](mailto:apt@cwii.nl).

Tekst oparty na rozdziale 3 i załącznikach 3 i 17 z książkami: Krzysztof R. Apt, „A Brief History of Mathematics for Curious Minds”, World Scientific, 2024.



## Zadania

Przygotowała Dominik BUREK

**M 1792.** Dane są parami różne liczby rzeczywiste dodatnie  $a, b, c$ , dla których

$$a^{2024} = ac - 1 \quad \text{oraz} \quad b^{2024} = bc - 1.$$

Udowodnić, że

$$2023^2(ab)^{2024} < 1.$$

**M 1793.** Dodatnie liczby całkowite są pokolorowane na biało lub czerwono tak, że jeśli  $a, b$  mają ten sam kolor, a  $a - 10b$  jest dodatnią liczbą całkowitą, to  $a - 10b$  i  $a$  również mają ten sam kolor. Ile istnieje takich kolorowań?

**M 1794.** Liczbę całkowitą dodatnią nazywamy *dobrą*, jeśli można ją przedstawić jako sumę dwóch względnie pierwszych liczb naturalnych, z których pierwsza jest iloczynem nieparzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych), a druga – parzystej. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich  $k$  takich, że  $k^4$  jest liczbą dobrą.

Przygotowała Andrzej MAJHOFER

**F 1103.** Cegła spada na piłkę tenisową spoczywającą na twardym, poziomym podłożu (np. betonie). Po odbiciu cegła odskakuje na wysokość  $H$  nad piłką. Oszacuj, na jaką wysokość podskoczy piłka? Zakładamy, że cegła uderza w piłkę środkiem poziomej powierzchni znajdującym się dokładnie nad środkiem piłki. Oporы ruchu można pominąć.

**F 1104.** Na podstawie doświadczenia wiemy, że kurze jajo zanurzone we wrzątku po 5 minutach jest „ugotowane” tak, jak lubimy. Jajo strusia ma podobny kształt (i skład), ale jego wymiary są około trzy razy większe niż jaja kurzego. Ile czasu powinniśmy gotować jajo strusia?

Oba zadania zostały zaczerpnięte ze zbioru *Physics at your feet: Berkeley Graduate Exam Questions or Ninety Minutes of Shame but a PhD for the Rest of Your Life* pod redakcją D. Budkera i A. O. Sushkova.

# Jak wygląda pozaskończona rzeczywistość?

\* Studentka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Formalnie ta *nierozróżnialność* polega na wyodrębnieniu rozłącznych podzbiorów trójkę, w ramach których każde dwie trójkę spełniają (1). Tak określone podzbiory traktujemy jako elementy nowej przestrzeni.

$$\begin{aligned}(n_1, m_1, k_1) + (n_2, m_2, k_2) &= \\&= (n_1 k_2 + n_2 k_1, m_1 k_2 + m_2 k_1, k_1 k_2) \\(n_1, m_1, k_1) \cdot (n_2, m_2, k_2) &= \\&= (n_1 n_2 + m_1 m_2, n_1 m_2 + m_1 n_2, k_1 k_2) \\(n_1, m_1, k_1) \leqslant (n_2, m_2, k_2) &\equiv \\&\equiv n_1 k_2 + m_2 k_1 \leqslant n_2 k_1 + m_1 k_2\end{aligned}$$

Czytelnikowi Dociekliewemu polecamy upewnienie się, że powyższe operacje odpowiadają adekwatnym działaniom/relacjom (dodawania, mnożenia, mniejszości) na zbiorze zakodowanych przez nasze trójkę „szkolnych” liczb wymiernych.

Julia ŚCISŁOWSKA \*

Pewnego razu liczby naturalne (czyli zbiór  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ) przechadzały się malowniczą ścieżynką w teoriomogościowym lesie. Nagle porwała je pewna rusalka, która najpierw zamieniła je na zbiór wszystkich trójkę liczb:  $n, m \in \mathbb{N}$  oraz  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , a na te trójkę rzuciła urok relacji równoważności. Zaklęcie to sprawiło, że dowolne dwie trójkę  $(n_1, m_1, k_1)$  oraz  $(n_2, m_2, k_2)$  spełniające

$$(1) \quad n_1 \cdot k_2 + m_2 \cdot k_1 = n_2 \cdot k_1 + m_1 \cdot k_2$$

stały się nierozróżnialne. Na pierwszy rzut oka powyższa równość wygląda dość egzotycznie, jednak po prostych przekształceniach daje  $\frac{n_1 - m_1}{k_1} = \frac{n_2 - m_2}{k_2}$ . Gdyby zatem każdej trójce liczb  $(n, m, k)$  przypisać liczbę wymierną  $\frac{n-m}{k}$ , to równość (1) pozwalałaby stwierdzić, którym trójkom przypiszemy to samo. Rusalka mogłaby jednak nie znać (lub po prostu nie lubić) działań odejmowania oraz dzielenia, gdyż potrafią one z liczb naturalnych zrobić nienaturalne – i stąd taka, a nie inna postać (1).

Utożsamionym trójkom odpowiadają zatem te same liczby, znane nam ze szkoły pod nazwą wymiernych (których zbiór oznaczamy przez  $\mathbb{Q}$ ). Dla przykładu, w wyniku działań rusalki nierozróżnialne stały się trójkę  $(2, 5, 6)$  oraz  $(5, 7, 4)$ , obie kodujące liczbę wymierną  $-\frac{1}{2}$ . Zaznaczmy jednak ponownie, że rusalka nie musiała znać wcześniej liczb wymiernych – ona właśnie je sobie wyczarowała!

Na zbiorze utożsamionych w ten sposób trójkę liczb naturalnych rusalka zadała działania dodawania, mnożenia oraz porządek liniowy (patrz margines). Następnie rusalka stworzyła z nich przekroje Dedekinda. A oto, jak je zdefiniowała.

Podzbiór liczb wymiernych  $A \subseteq \mathbb{Q}$  nazwiemy przekrojem Dedekinda, jeśli spełnia następujące trzy warunki:

1.  $A \neq \emptyset$  oraz  $A \neq \mathbb{Q}$ ;
2. Jeśli  $x \in A$  oraz  $y < x$ , to  $y \in A$ ;
3. Dla każdego  $x \in A$  istnieje element  $y \in A$  taki, że  $x < y$ .

Tak narodziły się liczby rzeczywiste, które rusalka zdefiniowała jako:

$$\mathbb{R} = \{A \subseteq \mathbb{Q} : A \text{ jest przekrojem Dedekinda}\}.$$

Pojawiło się wówczas dość naturalne pytanie: co by się stało (tzn. jaka powstałyby przestrzenie), gdyby rusalka zastosowała te same operacje na „trocę większym” zbiorze niż liczby naturalne?

Aby znaleźć odpowiedź na to pytanie, trzeba zapoznać się nieco z pewnymi bardzo znanymi obywatełkami matematycznego świata – czyli z liczbami porządkowymi, które uogólniają liczby naturalne. Teoriomogościowiec definiuje liczbę porządkową jako zbiór z porządkiem, który spełnia dwa warunki – po pierwsze dowolne dwa elementy można ze sobą porównać (czyli jeden jest mniejszy od drugiego lub mu równy, np.  $10 > 7$ ), a po drugie dowolny element jest zbiorem wszystkich elementów od niego mniejszych w tym porządku. Przykładowo:

$$3 = \{0, 1, 2\} = \left\{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\right\}.$$

Oznaczamy również  $\omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Zauważmy, że liczbę porządkową jest też  $\{\mathbb{N}, \omega\}$ .

Liczba porządkowa jest liczbą kardynalną, jeśli nie jest ona równoliczna z żadną liczbą porządkową od siebie mniejszą (czyli jeśli nie da się jej elementów połączyć w pary z elementami żadnej mniejszej od niej liczby porządkowej). Jeśli  $\kappa$  jest liczbą kardynalną, to można o niej myśleć jak o zbiorze złożonym z wszystkich liczb porządkowych mocy mniejszej od  $\kappa$ . Przykładowo wprowadzona wcześniej liczba porządkowa  $\omega$  jest liczbą kardynalną. Jest to najmniejsza nieskończona liczba porządkowa.



O liczbach porządkowych można myśleć jako o uogólnieniu liczb naturalnych, kodującym intuicję ustawiania pewnych bytów w odpowiedniej kolejności, a liczby kardynalne uogólniają pojęcie liczby elementów w danym zbiorze, nazywane mocą danego zbioru.

Kiedy rusałka zapragnie włożyć do worka pewien nieskończony zbiór, chwyta po kolei jego elementy i mówi: „ty będziesz pierwszym elementem w worku, ty będziesz drugim elementem w worku, ty będziesz trzecim...” i tak dalej. Chcąc na przykład powiedzieć, jaki jest liczebnik porządkowy przypisany ostatniemu włożonemu elementowi do worka, rusałka użyje pojęcia liczby porządkowej.

Kiedy jednak rusałka chce zbadać, ile elementów jest już w worku, to nie jest dla niej ważne, w jakiej kolejności wkładała te elementy do worka – wtedy ważna jest dla niej jedynie liczba (być może nieskończona) elementów w worku – i odpowiedzią na to pytanie jest pewna liczba kardynalna.

Wspomnieliśmy już, że liczby porządkowe stanowią uogólnienie liczb naturalnych. Jak się okazuje, można na nich wprowadzić działania dodawania i mnożenia, uogólniające te operacje stosowane do liczb naturalnych. Chwyćmy teraz liczbę kardynalną  $\kappa$  i spójrzmy na nią w nadzwyczaj teoriomnogościowy sposób, tzn. rozważmy zbiór złożony z wszystkich liczb porządkowych mniejszych od  $\kappa$ . Następnie podarujmy ten zbiór naszej znajomej rusałce z teoriomnogościowego lasu. Co widzimy? Otóż rusałka zaczyna wykonywać na tym zbiorze dokładnie tę samą operację, która z  $\mathbb{N}$  uczyniła  $\mathbb{Q}$  – teraz jednak zbiór  $\kappa$ , na którym zadawała relację równoważności określona przez (1), może być znacznie większy od liczby kardynalnej  $\omega$ , z którą rusałka bawiła się na początku tej opowieści.

Otrzymane przez rusałkę w pierwszym kroku zbiory będziemy nazywać liczbami  $\kappa$ -wymiernymi i oznaczać przez  $\kappa\text{-}\mathbb{Q}$ , natomiast to, co z nich dalej dostaniemy przez wykorzystanie przekrojów Dedekinda, będzie nazywane liczbami  $\kappa$ -rzeczywistymi (ozn.  $\kappa\text{-}\mathbb{R}$ ). Możemy więc napisać:

$$\mathbb{Q} = \omega\text{-}\mathbb{Q} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{R} = \omega\text{-}\mathbb{R}.$$

Liczby  $\kappa$ -rzeczywiste noszą różne imiona – czasem zwą się po prostu *długimi liczbami*, a innym razem, gdy chcemy podkreślić ich ponadnaturalne (to jest:  $\kappa$ -fantastyczne) pochodzenie, nazywamy je *pozaskończonymi liczbami rzeczywistymi*.

Pozaskończone liczby rzeczywiste, jak na liczby przystało, mogą być używane do różnych rodzajów obliczeń. Żeby móc jednak wykonywać te obliczenia, trzeba zdefiniować pewne działania. Można dosyć naturalnie wprowadzić na tych liczbach działanie dodawania oraz mnożenia. Gdy się to zrobi zgodnie ze sztuką oraz wyróżni się zero i jedynkę, to uzyskuje się byt matematyczny, który otrzymałby od algebraików zaszczytne miano *ciała uporządkowanego*. Co prawda takie ciało miałyby pozaskończoną długość, ale tak już w matematycznej przyrodzie bywa.

Przy tych rozważaniach pamiętajmy jednak, że dobry matematyk to uważny matematyk! Wiemy przecież, że liczby  $\kappa$ -rzeczywiste powstały w dzikim teoriomnogościowym lesie wskutek rusałkowej roboty, więc mogły zostać skąpane w czarnej matematycznej magii, która nie zachowuje przywoitych własności.

Zastanówmy się chociażby, jak wygląda przestrzeń  $\kappa\text{-}\mathbb{R}$  dla  $\kappa > \omega$ ? No cóż – robi się trochę upiornie, bo świat  $\kappa\text{-}\mathbb{R}$  dla nieprzeliczalnych liczb kardynalnych  $\kappa$  nie zawiera pierwiastków znanych z rzeczywistego świata, takich jak np.  $\sqrt{2}$ . Innymi słowy, nie istnieje liczba  $\kappa$ -rzeczywista, która pomnożona przez siebie da w wyniku 2 (rozumiane jako liczba  $\kappa$ -rzeczywista). A więc  $\kappa\text{-}\mathbb{R}$  w ogólności potrafi być bardzo nieprzyjazne z czysto ontologicznego punktu widzenia. Niedobrze. Zwłaszcza, że oznacza to, iż  $\mathbb{R} = \omega\text{-}\mathbb{R} \not\subseteq \kappa\text{-}\mathbb{R}$  dla  $\kappa > \omega$ , czyli istnieją zwyczajne liczby rzeczywiste, które nie są liczbami  $\kappa$ -rzeczywistymi. Z drugiej strony, w  $\kappa\text{-}\mathbb{R}$  istnieją nowe elementy, których nie ma w świecie zwykłych liczb rzeczywistych, takie jak liczby *nieskończenie duże*, np.  $\omega$ ,  $\omega + 2023$ ,  $\omega \cdot 9$  oraz *nieskończenie małe*, np.  $\frac{1}{\omega}$ .



Ciekawe rzeczy się dzieją, gdy liczby  $\kappa$ -rzeczywiste wpadają do rąk topologów, czyli matematyków zgłębiających te własności przestrzeni, które potrafią przetrwać w bardzo abstrakcyjnych warunkach. Najpierw topolog wyczuwa, że liczby  $\kappa$ -rzeczywiste nieco dziwnie „pachną”... no właśnie, okazuje się, że dla  $\kappa > \omega$  liczby  $\kappa$ -rzeczywiste są niespójne, czyli „dziurawe” (o czym świadczy np. brak  $\sqrt{2}$ ), więc niektóre klasyczne fakty o  $\mathbb{R}$  (np. twierdzenie o wartości średniej) przestają być prawdziwe w  $\kappa\text{-}\mathbb{R}$  dla  $\kappa > \omega$ . Można więc uprawiać w pozaskończonych liczbach rzeczywistych rachunek różniczkowo-całkowy, lecz trzeba liczyć się z tym, że będzie on nieco dziwaczny i niejeden analityk mógłby być nieco sceptyczny wobec pozaskończonych fenomenów tej teorii.

Nie ma jednak co marudzić: niektóre fundamentalne własności zwykłych liczb rzeczywistych  $\mathbb{R} = \omega\text{-}\mathbb{R}$  są prawdziwe również w świecie liczb  $\kappa$ -rzeczywistych dla  $\kappa > \omega$ . Na przykład gęstość – powszechnie wiadomo, że  $\mathbb{Q}$  jest gęste w  $\mathbb{R}$ , czyli między dowolnymi liczbami rzeczywistymi można znaleźć liczbę wymierną. Okazuje się, że  $\kappa\text{-}\mathbb{Q}$  jest gęste w  $\kappa\text{-}\mathbb{R}$ , czyli między dowolnymi liczbami  $\kappa$ -rzeczywistymi można znaleźć liczbę  $\kappa$ -wymierną. Istnieją różne twierdzenia z zakresu teorii opisywania pewnych eleganckich przestrzeni topologicznych (zwanej deskryptywną teorią mnogości), które pokazują, że liczby  $\kappa$ -rzeczywiste, z pewnego punktu widzenia, są bardzo sensownym uogólnieniem klasycznych liczb rzeczywistych  $\omega\text{-}\mathbb{R}$ .

Zainteresowanym zgłębianiem tajemnic liczb  $\kappa$ -rzeczywistych polecam artykuł *Long reals*, Davida Aspero oraz Konstantina Tsaprounis, z którego korzystałam, pisząc ten tekst.

A co to znaczy: sensowne uogólnienie? O tym już traktują inne historie. Można snuć wiele pozaskończonych baśni – zarówno topologiczno-teoriomnogościowych, jak i teoriomnogościowo-logicznych. By je poznać, należy zapoznać się lepiej z teorią mnogości, do czego serdecznie zachęcam – bo potem jest się gotowym na podróż do teoriomnogościowego lasu. Do tego samego lasu, w którym pewna rusalka wykreowała przestrzeń liczb  $\kappa$ -rzeczywistych.

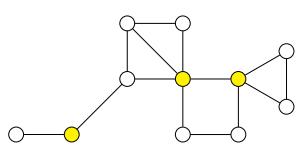
## Szerokość ścieżkowa

*Jadwiga CZYŻEWSKA \**

Rewolucja! W królestwie Bajtoci wynaleziono telefon, i młody król, który właśnie zasiadł na tronie, chce wykorzystać ten wspaniały wynalazek do usprawnienia komunikacji w swoim królestwie. Dawniej każdą wiadomość przenosił gołąb pocztowy, a jak powszechnie wiadomo, jest to system dość wolny i zawodny. Król zarządził zatem zainstalowanie telefonu w każdym mieście. Kiedy jednak jego doradcy pokazali mu kosztorys projektu, król złapał się za głowę i zdecydował na inne rozwiązanie: aparaty mają być zainstalowane w taki sposób, by wszyscy poddani mieli dostęp do telefonu w swoim mieście lub w pewnym innym mieście połączonym bezpośrednio drogą z ich miastem. Doradcy króla głowią się teraz, w których miastach je zainstalować, tak aby był ich jak najmniej i tym samym koszt projektu był jak najniższy.

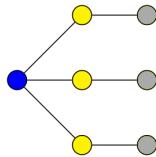
Przedstawmy nasz problem w języku teorii grafów. Rozważmy graf  $G = (V, E)$ , w którym zbiór wierzchołków  $V$  reprezentuje miasta w królestwie, a zbiór krawędzi  $E$  odpowiada istniejącym połączeniom drogowym. Chcemy znaleźć taki podzbiór wierzchołków  $D$ , by każdy wierzchołek grafu albo sam należał do zbioru  $D$ , albo miał sąsiada w zbiorze  $D$ . Każdy wierzchołek o takiej własności nazwiemy zdominowanym. W opisanej sytuacji zdominowane są wszystkie wierzchołki, podzbiór  $D$  nazwiemy więc **zbiorem dominującym**. Oczywiście, wybierając  $D = V$ , wskażemy poprawny zbiór dominujący, ale, podobnie jak króla, interesuje nas zbiór o możliwie najmniejszej liczbie wierzchołków.

Opisany problem w teorii grafów nosi nazwę problemu **minimalnego zbioru dominującego**. Możemy także rozważyć wariant, gdy koszty wybudowania telefonu w poszczególnych miastach się różnią – każdemu miastu  $v_i$  przypisujemy koszt  $c(v_i)$ , który będziemy też nazywać wagą. Naszym zadaniem jest wtedy wskazanie zbioru dominującego o minimalnej sumarycznej wadze. Jest to wówczas problem **zbioru dominującego o minimalnej wadze**.



Na rysunku zaznaczono żółtym kolorem wierzchołki należące do zbioru dominującego

Naturalnym pomysłem w przypadku tego typu problemów jest podejście zachłanne, w którym zaczynamy od pustego zbioru  $D$  i kolejno dodajemy do niego wierzchołki, które wydają się najbardziej przybliżać nas do celu. Powiedzmy, że jesteśmy w trakcie takiej procedury, i przez  $Z$  oznaczmy zbiór wierzchołków zdominowanych, czyli należących w danym momencie do zbioru  $D$  (który na koniec tej procedury będzie zbiorem dominującym), lub posiadających sąsiada w zbiorze  $D$ . Początkowo zbiór  $Z$  jest pusty. W każdym kroku wybieramy wierzchołek, który nie należy do zbioru  $Z$  i ma największą liczbę sąsiadów nienależących do zbioru  $Z$ . Taki wierzchołek dodajemy do zbioru  $D$  – wtedy on i wszyscy jego sąsiedzi trafiają do zbioru  $Z$ . Postępujemy w ten sposób, dopóki wszystkie wierzchołki  $G$  nie zostaną włączone do  $Z$ . Wydawałoby się, że takie podejście to dobry pomysł, jako że w każdym kroku zwiększamy  $Z$  o maksymalną w tym momencie liczbę wierzchołków. Istnieją jednak grafy, dla których to podejście nie jest optymalne:



W powyższym przykładzie najpierw włączymy do grafu niebieski wierzchołek. Wtedy żółte wierzchołki zostaną zdominowane. W kolejnych krokach nasz algorytm włoży wszystkie trzy szare wierzchołki do zbioru dominującego. W ten sposób otrzymamy zbiór dominujący o mocy 4. Zauważmy jednak, że zbiór żółtych wierzchołków jest poprawnym zbiorem dominującym o mocy 3.

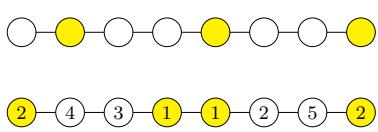
Obydwa opisane problemy możemy rozwiązać, rozważając wszystkie możliwe podzbiory wierzchołków grafu, sprawdzając, które z nich są zbiorami dominującymi, i wybierając najmniejszy z nich. Złożoność czasowa tego algorytmu to  $\mathcal{O}(2^{|V|} \cdot |E|)$ , co zdecydowanie nie jest satysfakcyjne (dla grafu o zaledwie 20 wierzchołkach  $2^{|V|} \cdot |E|$  może być równe prawie 200 milionów!). Czy jesteśmy w stanie zaproponować zatem szybsze, tj. wielomianowe rozwiązanie? Nie spodziewamy się, by odpowiedź była pozytywna – obydwa te problemy są NP-trudne. Z drugiej strony potrzebujemy umieć szybko i efektywnie rozwiązywać to zadanie, ponieważ występuje w wielu rzeczywistych scenariuszach związanych z dystrybucją zasobów.

Jednym ze sposobów radzenia sobie z NP-trudnymi problemami grafowymi jest uważne przyjrzenie się grafom, dla których potrzebujemy znaleźć rozwiązanie – być może mają one dodatkowe przydatne własności. Przykładowo wiemy, że w grafie miast połączonych drogami bez mostów, tuneli ani skrzyżowań nie można znaleźć pięciu miast połączonych każde z każdym (korzystamy tutaj z twierdzenia Kuratowskiego charakteryzującego grafy planarne).

Znając lepiej własności grafów, dla których mamy rozwiązywać nasz problem, możemy projektować algorytmy korzystające z tych własności i działające szybciej niż algorytm rozwiązuje nasz problem dla dowolnego grafu.

### Przypadek ścieżki

Rozważmy graf, który jest ścieżką (patrz rysunek na marginesie). Oznaczmy jego kolejne wierzchołki przez  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Jak rozwiązać zagadnienie minimalnego zbioru dominującego dla ścieżek? Jeżeli wierzchołki nie mają wag, możemy po prostu wybrać co trzeci wierzchołek, zaczynając od drugiego wierzchołka ścieżki.



Na żółto zaznaczono wierzchołki należące do minimalnego zbioru dominującego

W przypadku ważonym nasze zadanie się nieco komplikuje, ale nadal istnieje algorytm liniowy znajdujący optymalne rozwiązanie. Dla każdego  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  rozważmy optymalny zbiór dominujący dla ścieżki złożonej z wierzchołków  $v_1 - v_2 - \dots - v_i$  w każdym z trzech scenariuszy:

- wierzchołek  $v_i$  należy do zbioru dominującego;
- $v_i$  nie należy do zbioru dominującego, ale jego sąsiad  $v_{i-1}$  już tak;
- zarówno  $v_i$ , jak i  $v_{i-1}$  nie należą do zbioru dominującego (zauważmy, że w tym przypadku wierzchołek  $v_i$  nie jest zdominowany).

Oznaczmy optymalny zbiór dominujący dla ścieżki  $v_1 - v_2 - \dots - v_i$  dla każdego z trzech wyżej opisanych przypadków jako, odpowiednio,  $D_i^1, D_i^2, D_i^3$ , a przez  $k(D_i^j)$  oznaczmy sumaryczny koszt wierzchołków w zbiorze  $D_i^j$ . Zauważmy, że jeśli mamy już znalezione optymalne zbiory dla  $i$  w każdym scenariuszu, możemy łatwo znaleźć wyniki dla  $i + 1$ .

- Niech  $j = \arg \min_{j=1,2,3} k(D_i^j)$ . Wtedy  $D_{i+1}^1 = D_i^j \cup \{v_{i+1}\}$ .
- Z definicji zachodzi  $D_{i+1}^2 = D_i^1$ .
- W ostatnim scenariuszu wierzchołki  $v_i$  i  $v_{i+1}$  nie należą do zbioru dominującego, zatem wierzchołek  $v_i$  musi być zdominowany przez wierzchołek  $v_{i-1}$ . Zatem zachodzi  $D_{i+1}^3 = D_i^2$ .

Aby znaleźć najlepsze rozwiązań dla całej ścieżki, wybieramy rozwiązanie o mniejszej sumarycznej wadze dla  $i = n$  spośród pierwszych dwóch scenariuszy (w ostatnim wierzchołek  $v_n$  nie byłby dominowany). Dopracowanie szczegółów i dowód poprawności algorytmu pozostawiamy Czytelnikowi.

### Szerokość ścieżkowa

Dla ogólnych grafów nie możemy niestety skorzystać z tego algorytmu, bo wierzchołki mogą być ze sobą połączone w znacznie bardziej skomplikowany sposób. Rodzi się jednak pytanie, co w przypadku, gdy rozważany graf jest podobny do ścieżki (np. tak jak grafy przedstawione na obrazkach na marginesie). Może potrafiliśmy wykorzystać nasze zrozumienie problemu dla ścieżek do skonstruowania algorytmu dla grafów przypominających ścieżki?

Zanim pójdziemy dalej, musimy sformalizować pojęcie podobieństwa do ścieżki.

**Dekompozycją ścieżkową** (ang. *path decomposition*) grafu  $G$  nazywamy parę  $(P, \{\beta(u)\}_{u \in V(P)})$ , gdzie  $P$  jest ścieżką, a każdemu wierzchołkowi  $u$  przyporządkowany jest zbiór  $\beta(u) \subseteq V(G)$  (zwany *workiem*) tak, że spełnione są następujące dwa warunki:

- dla każdych dwóch wierzchołków  $v_1$  i  $v_2$  połączonych krawędzią w grafie  $G$  istnieje wierzchołek  $u \in V(P)$ , którego workiem zawiera  $v_1$  i  $v_2$ ;
- dla każdego wierzchołka  $v$  w grafie  $G$  zbiór wierzchołków  $P$ , których worki zawierają  $v$ , tworzy niepusty, spójny podgraf  $P$  (czyli w tym przypadku ścieżkę).

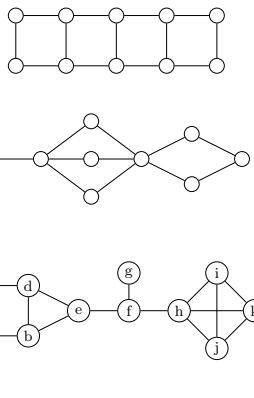
**Szerokość dekompozycji ścieżkowej**  $(P, \{\beta(u)\}_{u \in V(P)})$  to  $\max_{u \in V(P)} |\beta(u)| - 1$ . **Szerokością ścieżkową** (ang. *pathwidth*) grafu  $G$  nazywamy minimalną możliwą szerokość dekompozycji ścieżkowej grafu  $G$ . W definicji odejmujemy 1, by ścieżki miały szerokość ścieżkową równą 1, a nie 2.

Okazuje się, że szerokość ścieżkowa wielu grafów rozważanych w rzeczywistych scenariuszach jest mała (czyli ograniczona przez pewną stałą). Jest to bardzo wygodne, gdyż możemy wykorzystać tę własność do projektowania szybkich algorytmów.

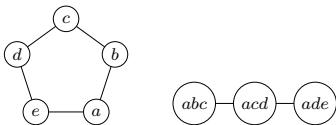
W dalszej części artykułu skoncentrujemy się na problemie najmniejszego zbioru dominującego w grafie bez wag. Algorytm, który podamy, można łatwo zmodyfikować, aby działał również w przypadku grafów z wagami, jednak pominiemy te szczegóły, aby idea algorytmu była bardziej przejrzysta.

Gdy konstruowaliśmy zbiór dominujący o minimalnej wadze dla ścieżki, w momencie  $i + 1$  nie potrzebowaliśmy wiedzieć, jak wyglądały cały optymalny zbiór dominujący dla ścieżki złożonej z pierwszych  $i$  wierzchołków – korzystaliśmy jedynie z wiedzy o wierzchołkach  $v_{i-1}$  oraz  $v_i$ . Wykorzystamy teraz podobną intuicję, konstrując algorytm dynamiczny, który będzie działać dla grafów o ustalonej szerokości ścieżkowej – będziemy pamiętać minimalny koszt zbioru dominującego dla różnych możliwych stanów wierzchołków należących do obecnie rozważanego worka.

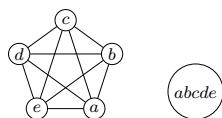
Rozważmy graf  $G$  i jego dekompozycję ścieżkową  $(P, \{\beta(u)\}_{u \in V(P)})$ , gdzie  $P$  jest ścieżką  $u_1 - u_2 - \dots - u_p$ . Przez  $k_i$  oznaczmy  $|\beta(u_i)|$ , a przez  $k = \max_{i=1, \dots, n} k_i$  oznaczmy szerokość ścieżkową  $P$  powiększoną o 1. Dla każdego wierzchołka  $v$  w grafie  $G$  rozróżniamy jeden z trzech możliwych stanów:



Graf i jego dekompozycja ścieżkowa o szerokości 3



Każdy cykl ma szerokość ścieżkową równą 2 – dla każdego możemy zaproponować dekompozycję analogiczną do tej na obrazku (tutaj dla cyklu o długości 5). Z drugiej strony jedynie ścieżki mają szerokość ścieżkową równą 1



Można udowodnić, że dla grafu będącego kliką musi istnieć work zawierający wszystkie wierzchołki. Zatem klika o  $n$  wierzchołkach ma szerokość ścieżkową równą  $n - 1$

Czytelnikowi pozostawiamy jako zadanie pokazanie, że dowolną dekompozycję ścieżkową grafu o  $n$  wierzchołkach, która ma więcej niż  $2n$  worków, da się prosto skrócić do długości  $2n$  bez zwiększenia jej szerokości, a więc możemy zakładać  $p \leq 2n$ .

1.  $v$  należy do zbioru dominującego;
2.  $v$  nie należy do zbioru dominującego, ale jest zdominowany przez co najmniej jednego ze swoich sąsiadów;
3.  $v$  nie należy do zbioru dominującego i nie jest zdominowany przez żadnego ze swoich sąsiadów.

Będziemy konstruować najmniejszy zbiór dominujący, tak jak poprzednio, rozważając kolejne wierzchołki  $P$  wraz z przypisanyimi im workami. Dla worka  $i$  rozważamy wszystkie możliwe konfiguracje stanów jego wierzchołków. Jest ich  $3^{k_i}$  – każdą konfigurację możemy reprezentować przez wektor  $\alpha = (s_1, s_2, \dots, s_{k_i})$ , gdzie  $s_j \in \{1, 2, 3\}$  dla  $j \in \{1, \dots, k_i\}$ . Rodzinę wszystkich możliwych wektorów stanów worka  $\beta(u_i)$  oznaczymy jako  $\mathcal{S}_i$ .

Najpierw generujemy (czyli rozpatrujemy) wszystkie możliwe stany dla pierwszego worka  $\beta(u_1)$ . Przez  $c(\alpha)$  dla  $\alpha \in \mathcal{S}_1$  oznaczmy liczbę wierzchołków, które przy stanie  $\alpha$  należą do zbioru dominującego. Może się jednak zdarzyć, że wektor  $\alpha$  reprezentuje niepoprawną konfigurację, np. gdy istnieje wierzchołek w stanie 2, którego żaden sąsiad nie należy do zbioru dominującego (żaden nie jest w stanie 1). Niepoprawnym wektorom  $\alpha$  przypisujemy  $c(\alpha) = \infty$ . To pozwala nam zainicjować algorytm programowania dynamicznego.

Załóżmy teraz, że dla każdego wektora  $\alpha \in \mathcal{S}_i$  mamy obliczony  $c(\alpha)$  – rozmiar minimalnego zbioru dominującego w grafie indukowanym przez wierzchołki należące do  $\beta(u_1) \cup \beta(u_2) \cup \dots \cup \beta(u_i)$ , który zgadza się ze stanami opisanymi wektorem  $\alpha$  (jeśli taki zbiór dominujący nie istnieje albo gdy konfiguracja jest niepoprawna, to bierzemy  $c(\alpha) = \infty$ ).

Chcielibyśmy teraz obliczyć wyniki dla stanów należących do  $\mathcal{S}_{i+1}$ . Przedtem przejrzymy jednak jeszcze raz nasze wyniki dla  $\mathcal{S}_i$ . Popatrzmy na wierzchołki należące do  $\beta(u_i)$ , ale nienależące do  $\beta(u_{i+1})$ . Z własności dekompozycji ścieżkowej wiemy, że nie mają one sąsiadów w  $\beta(u_{i+1}) \cup \beta(u_{i+2}) \cup \dots \cup \beta(u_p)$  poza tymi znajdującymi się już w  $\beta(u_1) \cup \beta(u_2) \cup \dots \cup \beta(u_i)$ . W związku z tym każdy taki wierzchołek musi już należeć do zbioru dominującego albo być zdominowany, jako że w kolejnych krokach nie będziemy rozważali ich żadnych „nowych” sąsiadów. Zatem każdemu wektorowi  $\alpha$ , w którym jeden z wierzchołków ze zbioru  $\beta(u_i) \setminus \beta(u_{i+1})$  jest w stanie 3, przypisujemy  $c(\alpha) = \infty$ .

Teraz możemy w końcu dodać nowe wierzchołki. Rozważmy wszystkie możliwe konfiguracje wierzchołków należących do  $\beta(u_i)$  poszerzone o konfiguracje wierzchołków z  $\beta(u_{i+1}) \setminus \beta(u_i)$ . Możemy wtedy obliczyć wartość  $c$  dla takich rozszerzonych konfiguracji: w przypadku konfiguracji poprawnych zwiększąc wartość o liczbę wierzchołków, którym przypisano stan 1, a w przypadku konfiguracji niepoprawnych utrzymując przypisanie  $\infty$ . Zauważmy teraz, że jeśli zapomnimy we wszystkich konfiguracjach o wierzchołkach należących do  $\beta(u_i)$ , ale nienależących do  $\beta(u_{i+1})$ , to otrzymamy zbiór wszystkich konfiguracji  $\mathcal{S}_{i+1}$  wraz z obliczonymi dla nich wartościami funkcji  $c$ .

Obliczamy w ten sposób wyniki dla kolejnych  $i = 2, 3, \dots, p$ . Aby znaleźć minimalny wynik dla całego grafu  $G$ , rozważamy wszystkie poprawne konfiguracje dla  $\beta(u_p)$ , w których każdy wierzchołek jest w stanie 1

lub 2, i wybieramy tę, dla której wartość funkcji  $c$  jest najmniejsza. Znaleźliśmy zatem licznosć minimalnego zbioru dominującego. Jaka jest złożoność czasowa naszego algorytmu? Każdy krok, czyli wygenerowanie wszystkich stanów dla worka oraz sprawdzenie ich poprawności, wykonujemy w czasie  $\mathcal{O}(3^k)$ . Wykonamy  $p \leq 2n$  kroków – tyle, ile wynosi długość ścieżki  $P$ . Nasz algorytm działa zatem w czasie  $\mathcal{O}(n \cdot 3^k)$ . Dla grafów o małej szerokości ścieżkowej jest to zatem znacznie lepszy czas niż opisany na początku algorytm działający w czasie  $\mathcal{O}(2^{|V|} |E|)$  (dla grafów o 20 wierzchołkach i gdy  $k = 5$ , liczba  $n \cdot 3^k$  nie przekracza 5 tysięcy).

Opisana tutaj metoda ma też zastosowanie dla innych problemów NP-trudnych, w których szukamy algorytmów dynamicznych na dekompozycji ścieżkowej. W połączeniu z algorytmem obliczającym prawie optymalną dekompozycję ścieżkową (jest niestety dość skomplikowany, przez co musimy go pominąć) jesteśmy w stanie skonstruować algorytmy działające w czasie wielomianowym dla grafów o szerokości ścieżkowej ograniczonej przez stałą.

Okazuje się również, że grafy o małej szerokości ścieżkowej pojawiają się w prawdziwym życiu. Przykładowo, w przetwarzaniu języka naturalnego zdania można modelować jako grafy, gdzie wierzchołki odpowiadają pojedynczym słowom, zaś krawędź oznacza jakiś rodzaj zależności między słowami (np. przymiotnik modyfikujący znaczenie rzeczownika). Eksperymenty pokazują, że takie grafy mają na ogół niską szerokość ścieżkową – lingwiści twierdzą, że gdyby przekraczała ona 6, to ludzie mieliby problem z rozumieniem mowy.

Na koniec dodajmy, że szerokość ścieżkowa została zaproponowana przez Neila Robertsona i Paula Seymoura w ich słynnym cyklu artykułów zatytułowanych *Graph Minors*. Prawdziwą rewolucję na salonach okazał się jednak inny, wprowadzony przez nich parametr uogólniający szerokość ścieżkową: szerokość drzewiasta. To jednak temat na kolejny artykuł.



## Zamach na bulwę

Udając się na wakacje, oczyściłem mieszkanie z resztek jedzenia i śmieci oraz znalazłem dom zastępczy dla czworonoga. Podlałem rośliny i zamknąłem okna. Po powrocie jasne było jednak, że w czasie ekstremalnych upałów gdzieś coś umarło, i wydziela paskudny zapach. Przeszukałem szafki śmiertnikowe, obwąchałem pojemniki na śmieci, zajrzałem pod szafki, na szafki, do lodówki i do piekarnika. Czysto. Wreszcie, uzupełniając zapasy w szafce, odkryłem „zwłoki”. Dno stojącego w niej koszyka pokrywała brunatna glutowata breja, która przeciekła przez sploty wikliny i wylała się na półkę. Oto pozostałość po jednym ziemniaku, który nieopatrznie zostawiłem bez opieki.

*Solanum tuberosum*, gatunek sprowadzony do Europy jako roślina ozdobna, znacząco wpłynął na dzieje Europy. Niewymagający w uprawie, plenny, łatwy do przechowywania i rozmnażania. Bulwy pełne pozywnej skrobi, białek i składników odżywczych okazały się smaczne i stały się pokarmem większości ludzi na naszym kontynencie. O bulwy ziemniaka walczą jednak przedstawiciele innych królestw tego świata. Wikipedia wylicza 98 chorób tej rośliny, a nie są wliczeni w to konsumenci tacy, jak owady, ptaki czy ssaki. Walka o to, żeby bulwy trafiły na nasz stół, jest zatem zacieklą.

Na przykład bakterie, których ofiarą padł mój ziemniak. Kilka gatunków z rzędu *Enterobacteriales* (z tej samej grupy pochodzą patogeny jelitowe człowieka, takie jak *Salmonella* i *Shigella*) powodują chorobę roślin o wdzięcznej nazwie czarna nóżka. Komórki bakterii mogą w postaci uśpionej trwać w bulwach zakażonych ziemniaków, czekając na sprzyjające warunki, aby spowodować to, co zobaczyłam w koszyku, mokrą zgniliznę bulw. Warunki takie jak w moim (niechcący stworzonym) inkubatorze: wilgoć, słaby przepływ powietrza i temperatura około 30°C.

Czarna nóżka powoduje znaczące straty w rolnictwie. Cuchnący glut to strawione tkanki ziemniaka pełne komórek bakteryjnych. Rozlewając się, atakują inne bulwy lub części roślin, przemieszczają się skutecznie w wilgotnej glebie (na szczęście dla mnie nie rozwijają się na płycie wiórowej). Charakterystyczny zapach sprawia, że analiza wydzielanych przez zmacerowane tkanki substancji jest obecnie podstawą opracowania „elektronicznego nosa”, który alarmowałby hodowców przy rosnących stężeniach mieszanek charakterystycznych substancji lotnych.

Oczywiście nie wiem, który z gatunków bakterii zmienił mojego ziemniaka w cuchnącą breję, ale podejrzenie pada na *Pectobacterium carotovorum*. Nazwa mówi sama za siebie: *Pectobacterium* to bakteria produkująca enzymy trawiące pektynę, stanowiącą ważny składnik tzw. blaszki śródkowej, warstwy spajającej komórki roślinne. *Carotovorum* dosłownie oznacza „pożerający marchewkę”, choć gatunek oprócz marchwi i ziemniaków pożera inne warzywa, m.in. dynie, cebule, paprykę czy buraki. Rozwijające się bakterie wydzielają, oprócz pektynaz, inne działające na tkankę gospodarza enzymy: celulazy, ksylanazy, lipazy, proteinazy i nukleazy, trawiące (odpowiednio) składniki ściany komórkowej – celulozę i ksylozę, a także tłuszcze, białka i kwasy nukleinowe.

Rośliny w dobrej formie są dość odporne na bakterie czarnej nóżki. Jednak różne rodzaje stresu oraz wysoka wilgotność powodują osłabienie gospodarza, umożliwiają wniknięcie bakterii do tkanek rośliny i szybki rozwój. Takim stresem może być wysoka temperatura, działanie światła słonecznego albo fizyczne uszkodzenia, które w przypadku ziemniaków są w zasadzie nieuniknione w trakcie wykopków. Stąd długa lista zaleceń, jak chronić swoje zbiory przed zgnilizną, to m.in. unikanie sadzenia ziemniaków w temperaturze powyżej 20°C i w deszczowe dni, uprawy w wysokich kopczykach, które zapobiegają nadmiernemu zbieraniu się wody, minimalne nawożenie (zbyt wybujałe rośliny utrzymują więcej wilgoci), ostrożne okopywanie i zbieranie plonów. Dodatkowo sprzęt, ręce, ubrania pracowników rolnych, skrzynki, miejsca przechowywania powinny być dokładnie dezynfekowane.

Przy okazji nie sposób pominąć inną zmorę rolników – *Phytophthora Infestans*, która powoduje tzw. zarazę ziemniaczaną. Po raz pierwszy do Europy, a ścisłe do Belgii, została zawleczona z Ameryki Północnej, z transportem nasion ziemniaków w 1845 roku. Rozprzestrzeniła się błyskawicznie, powodując dotkliwe, 70–80%, straty w uprawach. W latach 1845–1852 patogen zniszczył większość upraw ziemniaków w Irlandii – ze względu na dominację w uprawie jednej odmiany ziemniaka (Irish Lumper), która dobrze rosła na wilgotnych i ubogich glebach. Zaraza spowodowała śmierć głodową miliona osób na wyspie i zmusiła dwa miliony Irlandczyków do emigracji. Od tego czasu patogen świetnie się trzymał na całym świecie. Większe klęski spowodował w następnych latach np. brak miedzi używanej do zwalczania *Phytophthora*, wynikający z produkcji bronii w czasie I wojny światowej. To spowodowało klęskę głodu w Niemczech. Zjadliwość patogenu sprawiła, że w latach 40. XX wieku gatunek rozważany był jako broń biologiczna.

Z wielu powodów *Phytophthora* jest fascynująca, jednym z nich jest dynamika postępu porażenia rośliny. Znają to doskonale hodowcy-amatorzy pomidorów, które również porażają. Dorodne, obsypane owocami rośliny od pierwszej małej ciemnej plamki na łodydze w ciągu kilku dni zamieniają się w czarne zgnieione kikuty, wraz z przeżartymi pasożytem owocami. Skuteczność w rozprzestrzenianiu się *Phytophthora infestans* jest godna podziwu. Większość środków chemicznych ma słabą skuteczność w zwalczaniu patogenu, co nie dziwi, bo to dziwny organizm. W swoim złożonym cyklu rozwojowym organizm ma kilka form: przemieszczające

się na duże odległości z wiatrem zarodniki, formę wielojadrzastych strzępek wrastających przez aparaty szparkowe w głąb tkanki rośliny, sprawnie pływającą postać komórki z dwiema wiciami. Jeśli ktoś ciekawy, gdzie znajduje się on w klasyfikacji, musi uzbroić się w cierpliwość, niełatwo przebrnąć przez językowe zagadki w opisach. Zatem: *Phytophthora* należy do „grzybopodobnych legniowców”, wiosną na strzępkach i oosporach (*Pythophthora*) wyrastają sporangiofory wytwarzające w wyniku konidiogenezy zarodniki zwane sporangioporami. Stworzenie to ma dwa cykle życiowe, wegetatywny oraz płciowy, przy czym płcie są dwie: A1 i A2. Jeszcze niedawno uważano, że *Phytophthora* jest grzybem. Później przepisano do *Protista*, definiowanych jako grupę eukariontów, które NIE są ani rośliną, ani grzybem, ani zwierzęciem. Według kolejnego podziału świata żywego, zaproponowanego w 1981 roku, *Phytophthora* należy do *Chromista*. Zwane bardziej z polską grzybopławkami, Chromisty w większości prowadzą fotosyntezę i w większości są jednokomórkowe. W większości, bo np. *Phytophthora* nie spełnia żadnego z tych warunków...

Kiedyś wszystko było proste. Świat dzielił się na Bakterie, Rośliny i Zwierzęta, a człowiek w środku ciepłego lata mógł zjeść ziemniaka ze zsiadłym mlekiem i wyhodowanym w ogródzie pomidorem. Cóż, kiedy zsekwestrowano geny i zrobiono porządki w klasyfikacji organizmów żywych oraz zlikwidowano mleko od krowy i piwnice z przepływem chłodnego powietrza... Teraz już tylko zgnilizna i zamieszanie.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

## Piąta edycja konkursu na opowiadanie fantastycznonaukowe Polskiej Fundacji Fantastyki Naukowej

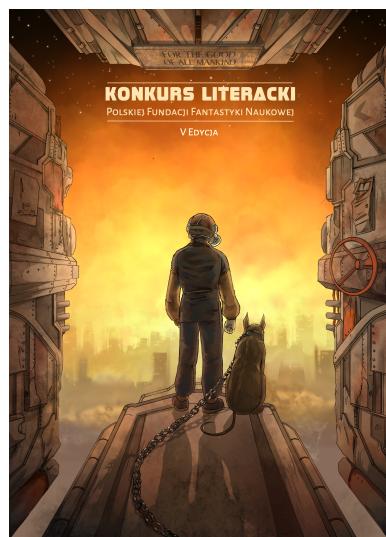
Jednym z celów Polskiej Fundacji Fantastyki Naukowej jest poszukiwanie nieodkrytych talentów, które odpowiednio wspierane rozwinią skrzydła. Dlatego każdego roku Fundacja organizuje konkurs literacki dla debiutantów piszących w gatunku *science fiction*, a zwycięskie opowiadania wraz z Wydawnictwem IX publikuje w corocznej Antologii Polskiej Fantastyki Naukowej.

Poprzednie edycje cieszyły się bardzo dużym zainteresowaniem, każdego roku w konkursie zgłaszanych było ponad sto opowiadań.

Każdy autor, który ukończył 16 lat i nie wydał jeszcze żadnej książki lub wydał co najwyżej jedną książkę drogą self-publishingu, może nadsyłać jeden nigdzie dotąd niepublikowany utwór prozatorski o objętości 15 000–50 000 znaków ze spacjami, w terminie do 30 września 2024 roku na adres mailowy podany w regulaminie. Nadesłane teksty muszą opierać się w znaczącym stopniu na fundamencie obowiązujących praw, teorii albo prognoz naukowych bądź na ich licznym rozwinięciu, zgodnym ze współczesną wiedzą naukową. Organizatorzy uczulają, by uczestnicy uważnie zapoznali się z regulaminem, ponieważ utwory, które nie spełnią wymogów formalnych lub też będą niepoprawnie zgłoszone, nie zostaną dopuszczone do konkursu.

Konkurs objęty został honorowym patronatem Polskiego Towarzystwa Astrobiologicznego oraz patronatem medialnym czasopism *Delta* i *Młody Technik*.

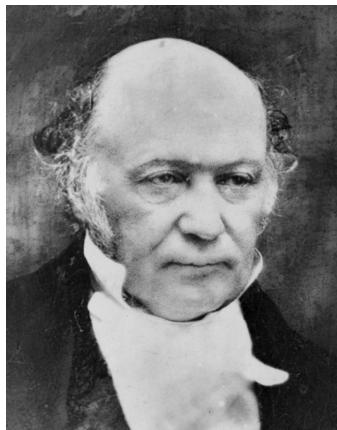
Regulamin konkursu znaleźć można na stronie: <https://pffn.org.pl/konkurs/>



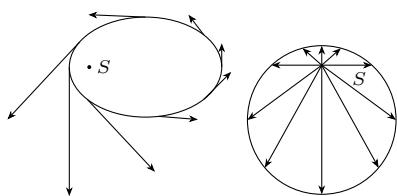
# William Rowan Hamilton i hodograf

Grzegorz ŁUKASZEWICZ\*

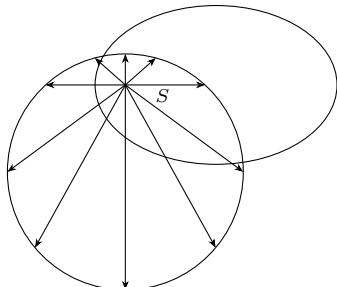
\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



William Rowan Hamilton (1805–1865)



Rys. 1. Idea hodografu prędkości.  
Po lewej stronie orbita ciała, po prawej hodograf jego prędkości



Rys. 2. Położenie hodografu dla orbity eliptycznej i orientacji ruchu z rys. 1

Niniejszy artykuł ma na celu przybliżenie Czytelnikowi pojęcia hodografu prędkości, przedstawienie kilku jego własności i zastosowań oraz pokazanie, na przykładzie hodografu, prostoty, siły i piękna metod geometrii klasycznej w mechanice Newtona.

**Historia hodografu.** 23 września 1846 roku Johann Gottfried Galle i Heinrich Louis d'Arrest z Obserwatorium Berlińskiego ujrzały nową planetę, Neptuna, której istnienie przewidział oraz precyzyjne położenie obliczył nieco wcześniej, w tym samym roku, francuski astronom Urbain Jean Joseph Le Verrier (więcej o tej historii w  $\Delta_{23}^9$ ,  $\Delta_{23}^{10}$ ,  $\Delta_{23}^{11}$ ). Odkrycie to spowodowało, że William Rowan Hamilton, Królewski Astronom Irlandii, który dwanaście lat wcześniej pracował nad teorią zaburzeń ruchu planet, oderwał się od swojej głównej pracy nad kwaternionami i wybrał to zagadnienie jako temat swoich wykładów na 1846 rok. Podczas ich przygotowywania wpadł na pomysł nowej geometrycznej reprezentacji ruchu planet, którą nazwał hodografem. Napisał o nim trzy artykuły, z których pierwszy [Hamilton, 1846] przedstawił na zebraniu Królewskiej Akademii Irlandzkiej jeszcze w grudniu tego samego roku. Nieco wcześniej idea hodografu pojawiła się w artykule Augusta Ferdynanda Möbiusa z 1843 roku, co Hamilton później odkrył i o czym napisał w swoich *Lectures on Quaternions* w 1853 roku [Hankins, 1980].

Hodograf (dokładniej *hodograf prędkości*) to krzywa opisana przez końce wektorów prędkości ruchu ciała w centralnym polu sił, ale zaczepionych w jednym punkcie, w centrum pola  $S$ .

Ideę hodografu ilustruje rysunek 1, a położenie hodografu dla ruchu po elipsie przedstawione jest na rysunku 2. Wektory prędkości styczne do trajektorii ruchu przesunięte są równolegle i zaczepione w centrum pola. Pomyśl jest bardzo ogólny, ale, co ciekawe, dla wszystkich ruchów w Newtonowskim centralnym polu sił końce tych wektorów tworzą okrąg.

**Hodograf prędkości w Newtonowskim polu centralnym.** Zakładamy, że mamy ustalone Newtonowskie pole centralne oraz poruszające się w nim ciało o danej masie. Wiemy, że wszystkie zakrzywione trajektorie ruchu są stożkowymi leżącymi w płaszczyźnie zawierającej centrum pola.

**Twierdzenie 1.** *Hodograf każdej zakrzywionej trajektorii ciała w Newtonowskim polu centralnym jest okręgiem.*

*W przypadku elipsy, paraboli lub hiperboli centrum siły znajduje się, odpowiednio, wewnątrz okręgu lub poza okręgiem hodografu.*

**Dowód.** Bardzo klarowny *analytyczny dowód* pierwszej części twierdzenia, który tu przytaczamy, pochodzi z *Treatise on Natural Philosophy* (1879) W. Thompsona (późniejszego lorda Kelvina) i P. G. Taita.

Składowe przyspieszenia ciała są równe:

$$(2) \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu}{r^2} \frac{x}{r}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\mu}{r^2} \frac{y}{r},$$

gdzie  $r^2 = x^2 + y^2$  oraz  $\mu < 0$  ( $\mu = -g/m$ ,  $g$  – natężenie pola sił,  $m$  – masa ciała). Stąd

$$y \frac{d^2x}{dt^2} = x \frac{d^2y}{dt^2},$$

a po scalkowaniu otrzymujemy

$$(3) \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = h,$$

co można łatwo sprawdzić, różniczkując ostatnie równanie względem  $t$ .

Zauważmy, że  $|h| = |\vec{l}|/m$ , gdzie  $\vec{l}$  jest (trójwymiarowym) wektorem momentu pędu ciała.

Z pierwszego równania w (2) oraz z równania (3) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\mu x}{hr^3} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \\ &= \frac{\mu}{hr^3} (x^2 + y^2) \frac{dy}{dt} - y \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right),\end{aligned}$$

co możemy zapisać jako:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu}{hr^3} \left( r^2 \frac{dy}{dt} - y \left( r \frac{dr}{dt} \right) \right).$$

Po scałkowaniu otrzymujemy równanie na pierwszą składową wektora prędkości,  $v_x$ :

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\mu y}{h r} + A = v_x$$

dla pewnej stałej  $A$ . Postępując zupełnie podobnie, z drugiego równania w (2) oraz z równania (3), otrzymujemy równanie na drugą składową wektora prędkości,  $v_y$ :

$$(5) \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\mu x}{h r} + B = v_y$$

Teraz zadanie staje się łatwe. Przedstawimy *czysto geometryczny dowód*. Na rysunku 3 pokazane są dane do obliczeń.  $S$  jest centrum siły i ogniskiem stożkowej,  $P$  jest peryhelium w przypadku elipsy i wierzchołkiem w przypadku paraboli i hiperboli,  $QS$  jest równe połowie *latus rectum*  $L$  stożkowej, a  $DS$  jest odlegością kierownicy od jej ogniska. Mamy  $e = \frac{PS}{PD} = \frac{PS}{DS-PS}$ , skąd

$$(6) \quad PS = \frac{e}{1+e} DS = \frac{QS}{1+e} = \frac{\frac{1}{2}L}{1+e}.$$

Oznaczmy przez  $v_P$  prędkość ciała w punkcie  $P$  w ruchu po stożkowej, a przez  $v_0$  prędkość ciała w ruchu po okręgu o promieniu  $PS$ . Zauważmy, że prosta prostopadła spuszczona ze wspólnego centrum na styczną do stożkowej w punkcie  $P$  pokrywa się z promieniem wodzącym. Dla okręgu, z równości  $v_0 = \frac{|\mu|}{h} = \frac{|\mu|}{PS \cdot v_0}$ , mamy  $v_0 = \sqrt{\frac{|\mu|}{PS}}$ . Zatem na podstawie powyższego rezultatu z *Principiów* oraz (6):

$$(7) \quad v_P = v_0 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}L \cdot PS}{PS}} = \frac{\sqrt{|\mu| \frac{1}{2}L}}{PS} = \sqrt{\frac{|\mu|}{\frac{1}{2}L}} \cdot (1+e).$$

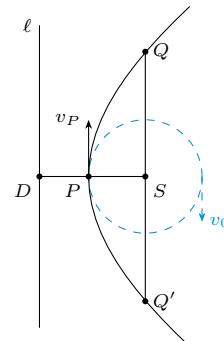
Przymając, że w punkcie  $S(x, y) = (0, 0)$  i podstawiając  $x = -PS$ ,  $y = 0$ ,  $r = PS$ ,  $v_x = 0$ ,  $v_y = v_P$  z (7),  $h = -PS \cdot v_P$  do równań (4) i (5), otrzymujemy natychmiast  $A = 0$  oraz

$$B = \sqrt{\frac{|\mu|}{\frac{1}{2}L}} (1+e) - \sqrt{\frac{|\mu|}{\frac{1}{2}L}} = Re,$$

gdzie  $R = \frac{|\mu|}{PS \cdot v_P} = \frac{|\mu|}{PS} \frac{v_0}{v_P} \frac{1}{v_0} = \sqrt{\frac{|\mu|}{\frac{1}{2}L}}$  jest promieniem hodografu dla rozważanej stożkowej. Zauważmy, że przyjmując  $v_y = v_P$ , rozważamy ruch po stożkowych zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Środek okręgu hodografu znajduje się wtedy w punkcie  $(A, B) = (0, Re)$  leżącym na jej *latus rectum*, w odległości  $Re$  od jej ogniska w punkcie  $S$ , a równanie okręgu hodografu jest następujące:

$$(8) \quad v_x^2 + (v_y - Re)^2 = R^2.$$

Ponieważ dla elipsy, paraboli i hiperboli mamy, odpowiednio,  $e < 1$ ,  $e = 1$  i  $e > 1$ , to tym samym ogniska tych stożkowych znajdują się, odpowiednio, wewnątrz okręgu, na okręgu i poza okręgiem hodografu, co chcieliśmy wykazać. To kończy dowód Twierdzenia 1.  $\square$



Rys. 3. Stożkowa o ognisku  $S$  i kierownicy  $\ell$  jest zdefiniowana jako zbiór tych punktów, dla których stosunek odległości od  $S$  i od prostej  $\ell$  wynosi  $e$  (na rysunku  $e \approx 1,15$ ). Wierzchołkiem stożkowej jest punkt  $P$ , a jej *latus rectum* odcinek  $QQ'$ .

Kolorową linią zaznaczono hipotetyczną trajektorię ciała krążącego wokół  $S$  ze stałą prędkością  $v_0$ .

Proponujemy Czytelnikowi naszkicowanie położenia hodografu dla ruchu po paraboli i hiperboli względem tych krzywych, podobnie jak to pokazuje rys. 2 dla orbity eliptycznej (na rysunku 2 kierunek ruchu ciała po orbicie jest przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara).

dla pewnej stałej  $B$ . Teraz już łatwo zauważać, że

$$(v_x - A)^2 + (v_y - B)^2 = \frac{\mu^2}{h^2 r^2} (x^2 + y^2) = \frac{\mu^2}{h^2},$$

co kończy dowód tego, że hodografy ruchów w Newtonowskim polu centralnym są okręgami (o środkach w nieokreślonych na razie punktach o współrzędnych  $(A, B)$  i promieniu  $R = \frac{|\mu|}{h}$ ).

Pozostaje nam wykazać *drugą część twierdzenia*. Jest widoczne, że wystarczy znaleźć położenie środków hodografów dla każdej z rozważanych stożkowych. W tym celu wykorzystamy równania (4) i (5) dla punktu  $P$ , jak na rysunku 3. Dla obliczenia prędkości ciała w tym punkcie skorzystamy z następującego pięknego twierdzenia z *Principiów Newtona*.

*Prędkość ciała krążącego po stożkowej będzie tak się miała do prędkości ciała krążącego po okręgu w tej samej odległości, jak średnia geometryczna z tej wspólnej odległości i połowy głównego latus rectum stożkowej ma się do prostopadłej spuszczonej ze wspólnego centrum na styczną do stożkowej.*

(Księga I, Teza XV, Twierdzenie VIII, Wniosek IX)

Teraz zadanie staje się łatwe. Przedstawimy *czysto geometryczny dowód*.

Na rysunku 3 pokazane są dane do obliczeń.  $S$  jest centrum siły i ogniskiem stożkowej,  $P$  jest peryhelium w przypadku elipsy i wierzchołkiem w przypadku paraboli i hiperboli,  $QS$  jest równe połowie *latus rectum*  $L$  stożkowej, a  $DS$  jest odlegością kierownicy od jej ogniska. Mamy  $e = \frac{PS}{PD} = \frac{PS}{DS-PS}$ , skąd

$$(6) \quad PS = \frac{e}{1+e} DS = \frac{QS}{1+e} = \frac{\frac{1}{2}L}{1+e}.$$

Oznaczmy przez  $v_P$  prędkość ciała w punkcie  $P$  w ruchu po stożkowej, a przez  $v_0$  prędkość ciała w ruchu po okręgu o promieniu  $PS$ . Zauważmy, że prosta prostopadła spuszczona ze wspólnego centrum na styczną do stożkowej w punkcie  $P$  pokrywa się z promieniem wodzącym. Dla okręgu, z równości  $v_0 = \frac{|\mu|}{h} = \frac{|\mu|}{PS \cdot v_0}$ , mamy  $v_0 = \sqrt{\frac{|\mu|}{PS}}$ . Zatem na podstawie powyższego rezultatu z *Principiów* oraz (6):

$$(7) \quad v_P = v_0 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}L \cdot PS}{PS}} = \frac{\sqrt{|\mu| \frac{1}{2}L}}{PS} = \sqrt{\frac{|\mu|}{\frac{1}{2}L}} \cdot (1+e).$$

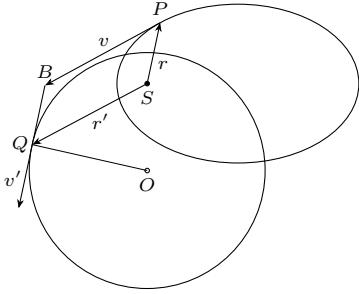
Przymając, że w punkcie  $S(x, y) = (0, 0)$  i podstawiając  $x = -PS$ ,  $y = 0$ ,  $r = PS$ ,  $v_x = 0$ ,  $v_y = v_P$  z (7),  $h = -PS \cdot v_P$  do równań (4) i (5), otrzymujemy natychmiast  $A = 0$  oraz

$$B = \sqrt{\frac{|\mu|}{\frac{1}{2}L}} (1+e) - \sqrt{\frac{|\mu|}{\frac{1}{2}L}} = Re,$$

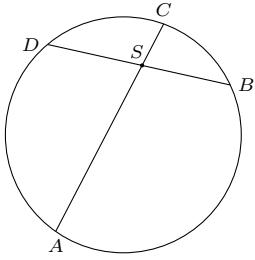
gdzie  $R = \frac{|\mu|}{PS \cdot v_P} = \frac{|\mu|}{PS} \frac{v_0}{v_P} \frac{1}{v_0} = \sqrt{\frac{|\mu|}{\frac{1}{2}L}}$  jest promieniem hodografu dla rozważanej stożkowej. Zauważmy, że przyjmując  $v_y = v_P$ , rozważamy ruch po stożkowych zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Środek okręgu hodografu znajduje się wtedy w punkcie  $(A, B) = (0, Re)$  leżącym na jej *latus rectum*, w odległości  $Re$  od jej ogniska w punkcie  $S$ , a równanie okręgu hodografu jest następujące:

$$(8) \quad v_x^2 + (v_y - Re)^2 = R^2.$$

Ponieważ dla elipsy, paraboli i hiperboli mamy, odpowiednio,  $e < 1$ ,  $e = 1$  i  $e > 1$ , to tym samym ogniska tych stożkowych znajdują się, odpowiednio, wewnątrz okręgu, na okręgu i poza okręgiem hodografu, co chcieliśmy wykazać. To kończy dowód Twierdzenia 1.  $\square$

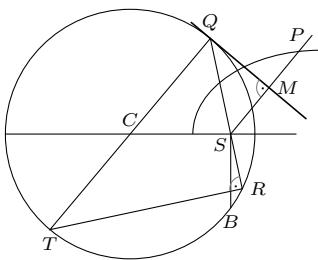


Rys. 4. Podczas ruchu ciała  $P$  po orbicie równoległobok  $SPBQ$  będzie zmieniał swój kształt, ale nie pole



Rys. 5. Twierdzenie Euklidesa o siecznych:  
 $AS \cdot SC = DS \cdot SB$

Dowód powyższego twierdzenia w *Elementach* polega na pomysłowym wykorzystaniu twierdzenia Pitagorasa.



Rys. 6. Geometryczna metoda obliczania prędkości ciała w dowolnym punkcie  $P$  na orbicie eliptycznej. Hodograf jest tu obrócony o kąt  $90^\circ$  wokół punktu  $S$

**Hodograf i drugie prawo Keplera.** Zauważmy, że wektor prędkości  $v'$  w punkcie  $C$  na hodografie (patrz rys. 4) jest równy wektorowi przyspieszenia poruszającego się ciała w punkcie  $A$  na orbicie, ponieważ  $r' = v$ , a zatem  $\frac{dr'}{dt} = \frac{dv}{dt}$ . Hodograf ma też tę własność, że *podczas ruchu ciała  $P$  po orbicie równoległobok  $SPBQ$  może zmieniać swój kształt, ale nie pole*. Właść ta jest innym sformułowaniem *drugiego prawa Keplera*.

**Hodograf i trzecie prawo Keplera.** W szczególnym przypadku, gdy elipsa jest okręgiem o promieniu  $r$  (czyli mamy  $e = 0$ ), promień hodografu jest równy  $R = \sqrt{\frac{|\mu|}{r}}$ . Oba okręgi, orbita ciała i hodograf, są współśrodkowe, ze środkiem w centrum siły. Okres  $T$  obiegu ciała po orbicie możemy obliczyć ze wzoru  $Tv = 2\pi r$  przy uwzględnieniu  $v = R$ . Otrzymujemy  $T = (2\pi/\sqrt{|\mu|})r^{3/2}$ . Wzór ten wyraża *trzecie prawo Keplera dla ruchu ciała po okręgu* i z centrum siły w jego środku.

**Hodograf i równanie energii.** Korzystając z pojęcia hodografu, przedstawimy geometryczny dowód równania energii w ruchu po elipsie. W naszym rozumowaniu kluczowymi elementami są twierdzenie Euklidesa o siecznych, rysunek 5 oraz prawo zachowania momentu pędu.

**Twierdzenie 2.** (Euklides, *Elementy*, Księga 3, Teza 35). *Jeżeli w okręgu dwie proste przecinają się, to prostokąt zawarty w odcinkach jednej jest równy [co do pola] prostokątowi zawartemu w odcinkach drugiej.*

**Twierdzenie 3.** *Prędkość ciała  $v_P$  w dowolnym punkcie  $P$  na orbicie eliptycznej spełnia równanie:*

$$(9) \quad v_P^2 = |\mu| \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

gdzie  $r$  jest promieniem wodzącym ciała w punkcie  $P$  na orbicie oraz  $a$  jest wielką półosią elipsy.

**Dowód.** Obliczymy najpierw prędkość  $v_b$  ciała w punktach styczności małej półosi elipsy z nią samą. Z równania hodografu (8) mamy:

$$v_b = \frac{|\mu|}{|h|} \sqrt{1 - e^2} = \frac{|\mu|}{v_b \sqrt{a^2(1 - e^2)}} \sqrt{1 - e^2} = \frac{|\mu|}{v_b a},$$

skąd  $v_b^2 = \frac{|\mu|}{a}$ . Weźmy teraz (por. [Child,1915]) dowolny punkt  $P$  na orbicie eliptycznej. Przypatrzmy się diagramowi na rysunku 6. Z Twierdzenia 3 mamy  $SR \cdot SQ = SB \cdot SB$ . Ponieważ teraz, po obróceniu hodografu z rysunku 4 o  $90^\circ$  wokół punktu  $S$ ,  $CQ \parallel SP$ , więc z podobieństwa trójkątów  $TQR$  i  $SQM$  mamy dalej:  $QT \cdot SM = RQ \cdot SQ = SR \cdot SQ + SQ^2 = SB \cdot SB + SQ^2$ . Stąd

$$(10) \quad SQ^2 = QT \cdot SM - SB^2.$$

Ponieważ  $SQ^2 = v_P^2$ ,  $QT = 2\frac{|\mu|}{|h|}$ ,  $SM = \frac{|h|}{r}$  oraz  $SB^2 = v_b^2 = \frac{|\mu|}{a}$ , więc równanie (10) jest równoważne równaniu (9).  $\square$

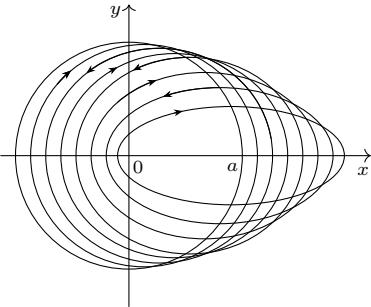
Zapiszmy teraz równanie (9) w znajomej postaci *równania energii*:

$$(11) \quad E = \frac{v_P^2}{2} + \left( -\frac{|\mu|}{r} \right) = -\frac{|\mu|}{2a},$$

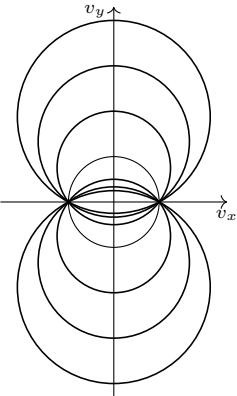
gdzie  $E$  jest energią całkowitą na jednostkę masy ciała poruszającego się po elipsie (równą sumie energii kinetycznej i potencjalnej, liczonych także na jednostkę masy). Dla elipsy  $E < 0$ . Powyższy wzór jest oczywiście również prawdziwy dla hiperboli i paraboli, należy tylko powiedzieć, czym jest wtedy stała  $a$ . Dla hiperboli mamy  $E > 0$  i analogicznie jak dla elipsy  $-a$  jest odlegością wierzchołka hiperboli od jej środka, czyli od punktu przecięcia się jej asymptot. Dla paraboli  $E = 0$  i  $a = \infty$ . Można użyć analitycznego określenia zarówno elipsy, jak i hiperboli, z jednym z ognisk w punkcie  $(0, 0)$ ,

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1,$$

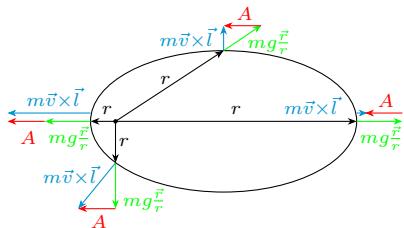
do naszkicowania tych krzywych i sprawdzenia, jak to wygląda w układzie współrzędnych  $(x, y)$ .  $\square$



Rys. 7. Rodzina elips o tej samej energii (tej samej osi wielkiej) i różnych momentach pędu



Rys. 8. Hodografy prędkości (dla ruchów po elipsach) o tej samej energii  $E$ . Ruchy po orbitach odpowiadających hodografom ze środkami powyżej osi  $v_x$  są skierowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara



Rys. 9. Wektor Laplace'a–Rungego–Lenza i jego położenia w różnych punktach orbity

Rozważmy teraz rodzinę elips o długości wielkiej półosi równej  $a$  (rys. 7). Z równania energii (11) wynika, że dla każdej elipsy tej rodziny prędkość  $v_b$  ciała w punktach jej styczności z jej małą półosią jest równa  $v_b = \sqrt{\frac{|\mu|}{a}} = \sqrt{-2E}$ . Okręgi hodografów tej rodziny elips (rys. 8) przecinają oś  $v_y = 0$  w tych samych punktach,  $-\sqrt{-2E}$  i  $\sqrt{-2E}$ , a  $\cos \eta = e$ , gdzie  $e$  jest mimośrodkiem elipsy, a  $\eta$  jest kątem między odcinkami łączącymi centrum pola sił ze środkiem okręgu hodografu oraz tenże środek z punktem przecięcia okręgu hodografu z osią  $v_y = 0$ .

Weźmy teraz sfery  $v_x^2 + v_y^2 + z^2 = (\sqrt{-2E})^2$  w układzie współrzędnych kartezjańskich  $v_x, v_y, z$  oraz rodzinę okręgów wielkich na niej, przecinających płaszczyznę  $z = 0$  w punktach  $v_x = -\sqrt{-2E}$  i  $v_x = \sqrt{-2E}$ . Łatwo zauważyc, że każdy okrąg hodografu (patrz rys. 8) jest rzutem stereograficznym pewnego okręgu tej rodziny. W ten sposób przeskoczyliśmy, poprzez hodograf, z pewnym obrotem sfery w przestrzeni trójwymiarowej. Ciekawe rozwinięcie tego tematu można znaleźć w [Baez, 2022].

Podstawiając w równaniu okręgu hodografu (8)  $v_x = v_b = \sqrt{|\mu|/a}$ ,  $v_y = 0$  oraz  $R = |\mu|/|h|$ , otrzymujemy  $|h| = \sqrt{|\mu|a(1-e^2)}$ .

Zauważmy, że energia  $E$  określa długość wielkiej osi elipsy  $a$ , a wektor momentu pędu  $\vec{l}$  określa płaszczyznę, w której ta elipsa się znajduje oraz poprzez  $e$  jej kształt. Mając te dwa niezmienne, nie możemy jeszcze określić jednoznacznie położenia elipsy względem centrum siły. Istnieje jednak niezmienik, który je określa jednoznacznie, o czym poniżej.

**Hodograf i pierwsze prawo Keplera.** Mając hodograf, można łatwo otrzymać równanie trajektorii ruchu we współrzędnych promień wodzący i kąt. Z równania energii (11) mamy  $r = \frac{2|\mu|}{v^2-2E}$ , a z prawa cosinusów  $v^2 = R^2 + (Re)^2 - 2R \cdot Re \cos \Theta$ , gdzie  $\Theta$  jest kątem zawartym między  $CQ$  i  $CS$  (rys. 6). Podstawiając tak obliczoną prędkość do pierwszego równania, otrzymujemy *równanie elipsy*:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos \Theta}.$$

**Hodograf i ukryty niezmienik ruchu.** Na koniec wspomnijmy o związku hodografu z wektorem Laplace'a–Rungego–Lenza,  $\vec{A} = m\vec{K}$  [Goldstein, 1975], gdzie

$$(12) \quad \vec{K} = \vec{v} \times \vec{l} - g\frac{\vec{r}}{r},$$

który, wraz z wektorem momentu pędu  $\vec{l}$  i energią całkowitą  $E$ , jest także niezmienikiem ruchu po elipsie (rys. 9). Jego niezmienniczość wynika z równań Newtona (2), co łatwo sprawdzić, różniczkując równanie (12) względem czasu. Jest on równoległy do wielkiej osi elipsy i skierowany w stronę peryhelium.

Długość wektora  $\vec{K}$  spełnia równania:  $K^2 = g^2 + 2El^2$ ,  $\frac{K}{l} = Re$ , gdzie, jak wiemy,  $Re$  jest drugą współrzędną środka okręgu hodografu prędkości. Obliczając iloczyn skalarny  $\vec{K} \cdot \vec{K}$ , otrzymujemy ponownie równanie hodografu:

$$v_x^2 + \left(v_y - \frac{K}{l}\right)^2 = \left(\frac{g}{l}\right)^2. \quad \square$$

Isaac Newton w założeniu traktował swoją mechanikę jako teorię aksjomatyczną. Do aksjomatów geometrii Euklidesa dołączył postulaty odnoszące się do ruchu, a w zakresie metody włączył swoją syntetyczną metodę fluksjii [Guicciardini, 2011]. Była ona wolna od wszelkich układów współrzędnych. Jednakże w praktyce za konstrukcjami Newtona czasami kryły się „niedozwolone” metody geometrii analitycznej czy analizy, podobnie jak 1900 lat wcześniej za konstrukcjami Archimedesa kryły się niekiedy także „niedozwolone” metody mechaniki.

W powyższych rozważaniach widoczne jest połączenie metod geometrii klasycznej, geometrii analitycznej i analizy, o czym dziś już nikt nie powie, że jest niedozwolone, a dzięki czemu mogliśmy nie tylko kilka faktów udowodnić, ale także zobaczyć je z różnych stron.

- [Baez,2022] J.Baez, *Mysteries of the gravitational 2-body problem*, [math.ucr.edu/home/baez/gravitational.html](http://math.ucr.edu/home/baez/gravitational.html)
- [Child,1915] J.M. Child, *Hamilton's hodograph*, The Monist, vol. 25, 615–624, 1915.
- [Goldstein,1975] H. Goldstein, *Prehistory of the 'Runge–Lenz' vector*, Am. J. Phys. vol. 43 (8), 737–738 1975.
- [Guicciardini,2011] N. Guicciardini, *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*, The MIT Press, 2011.
- [Hamilton,1846] W.R. Hamilton, *The hodograph, or a new method of expressing in symbolical language the newtonian law of attraction*, Proc. R. Irish Acad. III, 344–53, 1847.
- [Hankins,1980] T.L. Hankins, *Sir William Rowan Hamilton*, The John Hopkins University Press, Baltimore and London 1980.

# Problem Flawiusza

Dagna CZUBLA\*, Marcin WIERZBINSKI\*\*

\* Uczennica, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

\*\* Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Niektóre zagadnienia z dziedziny informatyki dają się rozwiązać za pomocą algorytmów symulujących określone procesy. Dostajemy w ten sposób poprawne odpowiedzi, ale złożoność programu zależy od stopnia skomplikowania symulacji. Jeśli czas działania programu nie jest dla nas satysfakcjonujący (na przykład dla dużych danych wejściowych), to szukamy rozwiązania bardziej eleganckiego, choćby dla pewnych szczególnych przypadków. W tym artykule skupimy się na tego typu problemie, pojawił się on już w *Delcie cztery lata temu*, w artykule „Raz, dwa, trzy, wchodź ty!” Piotra Zarzyckiego ( $\Delta_{20}^1$ ) i został przedstawiony od strony matematycznej. Tym razem skupimy się na jego informatycznym aspekcie.

## Ostatnia osoba przy stole

W 2012 roku na Przedmiotowym Konkursie Informatycznym LOGIA pojawiło się następujące zadanie:

Przy okrągłym stole  $n$  uczestników spotkania siedzi na krzesłach ponumerowanych od 1 do  $n$ . Kolejno co  $k$ -ta osoba wstaje i opuszcza spotkanie. Zadaniem Antka jest wskazanie osoby, która pozostanie przy stole jako ostatnia.

Naszym celem jest więc napisanie funkcji, która jako wejście przyjmuje liczby  $n$  i  $k$ , a zwraca numer krzesła, które zostanie opuszczane jako ostatnie. Jest to znane zadanie kombinatoryczne nazywane *problemem Józefa Flawiusza*.

Uczestnicy konkursu mogli rozwiązać to zadanie na kilka sposobów; standardowe podejście to wykorzystanie symulacji wypraszania kolejnych osób ze spotkania, co można zapisać następująco (w poniższym algorytmie przyjmujemy, że listę indeksujemy od 0):

```
function OSTATNI(n, k)
    stol ← lista liczb od 1 do n
    osoba ← k - 1
    while długość(stol) > 1 do
        Usuń element na pozycji osoba z listy stol
        osoba ← (osoba + k) mod długość(stol)
    return ostatni element stol
```

W tym podejściu przechowujemy numery osób na liście, którą w kolejnych krokach skracamy, co odpowiada wypraszaniu kolejnych osób. Takie rozwiązanie, działające w złożoności czasowej  $\mathcal{O}(n^2)$  (pojedyncze usunięcie elementu z listy ma pesymistyczną złożoność  $\mathcal{O}(n)$ ), wystarczało do uzyskania maksymalnej liczby punktów. Rozwiązanie to można nieco poprawić, uzyskując złożoność  $\mathcal{O}(nk)$  – zamiast usuwać elementy ze środka listy, przenosimy  $k - 1$  początkowych elementów listy na jej koniec, a potem usuwamy element, który aktualnie znajduje się na początku. Warto się jednak zastanowić, czy zadania nie można rozwiązać zupełnie inaczej. Idealnie byłoby, gdyby istniał taki wzór na pozycję ostatniej osoby, który można wyliczyć za pomocą prostych operacji arytmetycznych. Okazuje się, że nie jest to takie proste. Dla  $k = 2$  istnieje jawnny wzór, który za chwilę uzasadnimy, jednak dla  $k > 2$  sprawia się komplikuje.

## Przypadek $k = 2$

Skupimy się teraz na przypadku  $k = 2$  – to znaczy, że co druga osoba wstaje i opuszcza spotkanie. Niech  $J(n)$  oznacza pozycję (numer krzesła) osoby, która zostanie przy stole jako ostatnia. Można zauważyc, że jeśli na początku przy stole siedzi parzysta liczba osób, którą oznaczmy przez  $2n$ , to po wyproszeniu pierwszych  $n$  z nich przy stole zostanie  $n$  osób z kolejnymi numerami nieparzystymi. Jest to taka sama sytuacja, jakby na początku przy



stole było  $n$  osób, tylko że ich numery są podwojone i pomniejszone o jeden. Tę obserwację można zapisać w następujący sposób:

$$J(2n) = 2J(n) - 1.$$

Kiedy na początku przy stole siedzi nieparzysta liczba osób ( $2n + 1$ ), po wyproszeniu  $n$  z nich przy stole zostanie  $n + 1$  osób ponumerowanych kolejnymi liczbami nieparzystymi. Kolejną osobą, która zostanie wyproszona, będzie ta na pozycji 1. Wtedy przy stole będzie  $n$  osób o kolejnych numerach nieparzystych, zaczynając od 3 – ponownie będzie to taka sama sytuacja, jakby na początku było  $n$  osób, tyle że tym razem ich numery są podwojone i powiększone o jeden:

$$J(2n + 1) = 2J(n) + 1.$$

Korzystając ze wzorów (1) i (2), można zapisać wzór rekurencyjny:

$$(*) \quad J(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1, \\ 2J\left(\frac{n}{2}\right) - 1 & \text{dla } n \text{ parzystego,} \\ 2J\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 & \text{dla } n > 1 \text{ nieparzystego.} \end{cases}$$

Dla pierwszych szesnastu liczb całkowitych dodatnich wartości  $J(n)$  zostały zapisane w tabelce.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

W powyższej tabelce podzieliliśmy wartości funkcji  $J$  na grupy o rozmiarach będących kolejnymi potęgami dwójki. W obrębie każdej grupy wartości funkcji są kolejnymi liczbami nieparzystymi. Ta obserwacja sugeruje następującą hipotezę:

$$(13) \quad J(2^m + l) = 2l + 1 \quad \text{dla } m, l \in \mathbb{N} \text{ takich, że } 0 \leq l < 2^m.$$

Prawdziwość tej hipotezy udowodnimy za pomocą indukcji względem  $m$ .

W przypadku bazowym, czyli dla  $m = 0$ , jedyną możliwą wartością  $l$  jest zero – wystarczy więc sprawdzić tylko jeden przypadek:  $J(1) = J(2^0 + 0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ . Weźmy teraz dowolne  $m$ . Zakładając prawdziwość tezy dla  $m$ , udowodnimy ją dla  $m + 1$ . Najpierw zauważmy, że dla  $0 \leq l < 2^{m+1}$  nieparzystego możemy skorzystać z założenia indukcyjnego, otrzymując:

$$\begin{aligned} J(2^{m+1} + l) &= 2J\left(\frac{2^{m+1} + l - 1}{2}\right) + 1 = 2J\left(2^m + \frac{l-1}{2}\right) + 1 = \\ &= 2\left(2 \cdot \frac{l-1}{2} + 1\right) + 1 = 2l + 1. \end{aligned}$$

Jeżeli natomiast  $l$  jest parzyste, to analogicznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} J(2^{m+1} + l) &= 2J\left(\frac{2^{m+1} + l}{2}\right) - 1 = 2J\left(2^m + \frac{l}{2}\right) - 1 = \\ &= 2\left(2 \cdot \frac{l}{2} + 1\right) - 1 = 2l + 1. \end{aligned}$$

To kończy dowód naszej hipotezy. Zauważmy, że po przekształceniu wzoru (\*) dostajemy wzór jawnego:

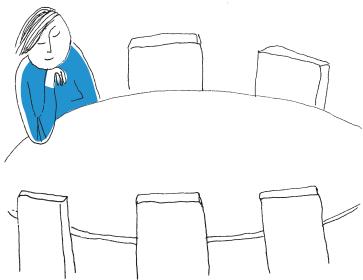
$$J(n) = 2(n - 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}) + 1,$$

który pozwala nam obliczać  $J(n)$  szybciej, niż wykonując symulację wypraszania kolejnych osób, bo w czasie  $\mathcal{O}(1)$ . Możemy się więc teraz skupić na przypadku  $k > 2$ .

### Przypadek $k > 2$

Przez  $J(n, k)$  będziemy oznaczać pozycję ostatniej osoby w problemie Flawiusza dla  $n$  osób i eliminacji co  $k$ -tej osoby. Kiedy wyeliminowana zostanie  $k$ -ta osoba, w kręgu pozostało  $n - 1$  osób. Możemy teraz zamienić ich numery w ten sposób, że numeracja zaczynać się będzie od osoby na pozycji  $(k \bmod n) + 1$  (o jeden w prawo od wyeliminowanej). Jeśli obliczymy pozycję ostatniej osoby dla mniejszego problemu  $J(n - 1, k)$ , to możemy łatwo otrzymać  $J(n, k)$ , sprawdzając, której osobie odpowiada  $J(n - 1, k)$  przed zmianą numeracji. Skoro zmiana





numeracji polegała na przesunięciu numerów o  $k$  pozycji przy jednoczesnym usunięciu pozycji  $k$ , to wzór rekurencyjny przyjmuje postać:

$$J(n, k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1, \\ ((J(n-1, k) + k - 1) \bmod n) + 1 & \text{dla } n > 1. \end{cases}$$

Konieczność odejmowania i późniejszego dodawania 1 wynika z tego, że chcemy uniknąć wyodrębniania szczególnego przypadku, kiedy  $(J(n-1, k) + k) \bmod n = 0$ . Przy numeracji od zera wzór jest lekko zmodyfikowany i ma postać:

$$J(n, k) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 1, \\ (J(n-1, k) + k) \bmod n & \text{dla } n > 1. \end{cases}$$

Zainteresowany Czytelnik zapewne zapyta, czy istnieje jawný wzór, gdy  $k > 2$ . Okazuje się, że odpowiedź jest twierdząca dla  $k = 3$ , co pokazali w 1997 roku Lorenz Halbeisen i Norbert Hungerbühler. W celu obliczenia  $J(n, 3)$  musimy najpierw znaleźć największą naturalną liczbę  $m$ , dla której  $\text{round}(\alpha \cdot (\frac{3}{2})^m) \leq n$ , gdzie  $\alpha$  jest pewną obliczalną stałą w przybliżeniu równą  $\alpha \approx 0,8111\dots$ , zaś  $\text{round}$  oznacza standardowe zaokrąglanie do najbliższej liczby całkowitej. Następnie definiujemy  $e = \alpha \cdot (\frac{3}{2})^m$  oraz  $c = \text{round}(\alpha \cdot (\frac{3}{2})^m)$ . Ponadto musimy zdefiniować jeszcze jedną stałą  $d$ : jeśli  $e < c$  (czyli zaokrąglaliśmy w góre), to kładziemy  $d = 1$ , a w przeciwnym przypadku przyjmujemy  $d = 0$ . Ostateczny wzór na szukaną funkcję to  $J(n, 3) = 3(n - c) + d$ . Dowód wyniku Halbeisena i Hungerbühlera jest dość skomplikowany. Co więcej, jeśli chcielibyśmy zaimplementować ich wzór tak, aby działał dla dowolnego  $n$ , to musimy umieć wyliczać wartość  $\alpha$  z dowolną dokładnością. Niestety stała  $\alpha$  jest zdefiniowana jako granica pewnego ciągu zbieżnego, a autorzy nie badają problemu złożoności jej obliczania. Nadmieńmy również, że dla  $k > 3$  odpowiedź na pytanie o istnienie wzoru jawnego nie jest nam wciąż znana.

Sam wzór rekurencyjny jednak jest już bardzo cenny, gdyż można go wykorzystać do obliczania  $J(n, k)$ , używając programowania dynamicznego. Podejście to przedstawia poniższy algorytm:

```
function OSTATNI( $n, k$ )
    ostatnia_pozycja  $\leftarrow 0$ 
    for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
        ostatnia_pozycja  $\leftarrow (\text{ostatnia\_pozycja} + k) \bmod i$ 
    return ostatnia_pozycja + 1
```

Skorzystaliśmy tutaj ze wzoru rekurencyjnego dla numeracji od 0, więc na koniec musieliśmy dodać 1. Zauważmy, że algorytm programowania dynamicznego ma złożoność  $\mathcal{O}(n)$ .

Okazuje się, że zadania z konkursów programistycznych mogą prowadzić do zagadnień o złożonym charakterze kombinatorycznym. To ilustruje, jak różnorodny i nieoczywisty może być obszar nauki, który ukrywa się za pozornie prostymi problemami.

Studenckie Koło Matematyków AGH serdecznie zaprasza na III Studencką Konferencję Naukową „Elements” poświęconą tematom *Data Science*, *Machine Learning* i rachunkowi prawdopodobieństwa. Odbędzie się ona 25–27 października 2024, w Krakowie na terenie Akademii Górnictwo-Hutniczej. Szczegóły oraz program pojawią się będą na stronie: <http://elements.agh.edu.pl> oraz na Facebooku Studenckiego Koła Matematyków AGH: [facebook.com/SKM.AGH](https://facebook.com/SKM.AGH). Do zobaczenia!

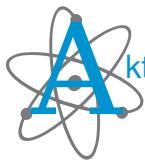
**III Studencka Konferencja Naukowa**

**elements X**

**25-27 października 2024, Kraków**

STATYSTYKA | RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA | MACHINE LEARNING | ANALIZA DANYCH

[www.elements.agh.edu.pl](http://www.elements.agh.edu.pl)



### Ciemna materia na deskach

*Komu jak komu, ale polskiej społeczności naukowej nie trzeba tłumaczyć, na czym polega destylacja* – powiedziała kiedyś Elena Aprile, szefowa zespołu badawczego XENON, podczas omawiania na Uniwersytecie Warszawskim kolejnych etapów pozyskiwania do swojego eksperymentu gazów szlachetnych jako produktów ubocznych hutnictwa stali. Polska społeczność naukowa zgodziła się o tyle chętnie, że wolała posłuchać o nowych możliwościach detekcji cząstek ciemnej materii w budowanym przez prelegentkę urządzeniu.

Zasada działania detektora XENON jest dość prosta. Wypełniony jest on prawie całkowicie ciekłym ksenonem, tylko na samej górze znajduje się warstwa tego szlachetnego pierwiastka w stanie gazowym. Wpadająca do detektora cząstka wzbudza atomy ksenonu, które emitują światło o długości fali 178 nm, a więc w zakresie ultrafioletu, oraz ulegają jonizacji. Światło rejestrowane jest przez fotopowielacze w dolnej części detektora, co pozwala na określenie położenia miejsca oddziaływanego w płaszczyźnie poziomej. Powstałe wskutek jonizacji elektrony poddane są działaniu silnego, stałego i jednorodnego pola elektrycznego, podróżują więc pionowo w górę, aż dotrą do powierzchni ciekłego ksenonu. Wyżej pole elektryczne jest jeszcze silniejsze, elektrony rozpędzają się zatem jeszcze bardziej, do chwili gdy wreszcie mają tyle energii, że mogą pobudzać do świecenia kolejne atomy ksenonu. To światło jest rejestrowane przez fotopowielacze w górnej części detektora. Różnica w czasie rejestracji tych sygnałów pozwala określić, na jakiej głębokości nastąpiło pierwsze oddziaływanie.



Ale jaka cząstka może oddziaływać z ksenonem wypełniającym detektor? Jeśli umieścić go głęboko pod ziemią, w tym przypadku pod kilometrową warstwą skał w laboratorium Gran Sasso we Włoszech, to żadne cząstki promieniowania kosmicznego obecne przy powierzchni Ziemi nie przejdą przez taką osłonę. Pozostają zatem produkty naturalnej promieniotwórczości skał i detektora – albo cząstki, dla których skała nie stanowi specjalnej przeszkody. Taką własność mają hipotetyczne cząstki ciemnej materii. Dlatego właśnie na świecie zbudowano wiele detektorów ciemnej materii w postaci sporego zbiornika w głębokiej jaskini. Wydawało się, że schwytywanie cząstek ciemnej materii, jeśli tylko występują w zakresie czułości detektora, będzie tylko kwestią czasu.

Do czasu. Mamy bowiem w naszym kosmicznym sąsiedztwie potężne źródło przenikliwych cząstek. Mowa tu o Słońcu, w którego wnętrzu zachodzi szereg reakcji jądrowych dostarczających naszej gwiazdzie energii – i produkujących dużo neutrin. Wprawdzie prawdopodobieństwo oddziaływania neutrin z materią jest bardzo małe, ale gdy poszukujemy bardzo rzadkich procesów, takich jak oddziaływanie cząstek ciemnej materii ze zwykłą materią, niskie prawdopodobieństwa stają się chlebem powszednim badaczy.

W przypadku badań prowadzonych przez zespół XENON chodzi tu przede wszystkim o neutrina pochodzące z rozpadu beta produkowanego w Słońcu radioaktywnego izotopu boru  $^{8}B$ . Procesy, w których produkowany jest ten pierwiastek, nie mają znaczącego wkładu do emisji energii przez naszą gwiazdę, ale rozpad boru dostarcza wysokoenergetycznych neutrin, które mogą zostać zaobserwowane w detektorach ciemnej materii. Rzeczywiście, na 15. Międzynarodowych Warsztatach Identyfikacji Ciemnej Materii (IDM 2024), które odbyły się w lipcu

tego roku we włoskiej miejscowości L’Aquila, pokazano po raz pierwszy przekonujące argumenty, że zespół XENON wykrył te właśnie neutriny.

Nie jest to dobra wiadomość dla poszukiwaczy ciemnej materii. Skoro widzimy neutrina, to istnieje możliwość, że oddziaływanie cząstek ciemnej materii z ksenonem zostaną zagubione wśród licznych oddziaływań neutrin słonecznych. W środowisku fizyków cząstek elementarnych efekt ten nazywany jest od lat „podłoga” lub „dnem” neutrinowym (ang. *neutrino floor*). Jednak wraz z odkryciem problematycznych neutrin badacze próbują nieco zmękczyć negatywne przesłanie tej nazwy i zaczynają mówić raczej o „mgie” neutrinowej (ang. *neutrino fog*).

Optymiści mogą przekonywać, że taka pierwsza detekcja nowej klasy neutrin słonecznych otwiera nowe perspektywy badawcze. Można się jednak obawiać, że znacząco utrudni ona odkrycie cząstek ciemnej materii, jeśli ich oddziaływanie okaże się zanadto podobne do oddziaływań neutrin.

*Krzysztof TURZYŃSKI*

## Klub 44 M

$$\sqrt{\sum f!} = 44$$

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2024

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 875 ( $WT = 2,62$ ) i 876 ( $WT = 1,48$ ) z numeru 2/2024

Łukasz Merta	Kraków	42,56
Piotr Kumor	Olsztyn	41,92
Szymon Kitowski		41,11
Adam Woryna	Ruda Śl.	40,91
Witold Bednarek	Lódź	37,29
Krzysztof Zygan	Lubin	34,43
Michał Adamaszek	Kopenhaga	31,25
Jędrzej Biedrzycki		31,02
Andrzej Kurach	Ryjewo	30,66

### Rozwiązania zadań z numeru 5/2024

Przypominamy treść zadań:

**881.** Ciąg  $a_0, a_1, a_2, \dots$  jest określony wzorami:  $a_0 = 3$ ,  $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ . Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \prod_{i=0}^{n-1} a_i$$

lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

**882.** Na bokach  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  równolegloboku  $ABCD$  wybrano, odpowiednio, punkty  $K, L, M, N$ , różne od wierzchołków. Weźmy pod uwagę trójkąty  $ANK$ ,  $BKL$ ,  $CLM$ ,  $DMN$ . Udowodnić, że każda z następujących czwórek punktów stanowi czwórkę wierzchołków pewnego równolegloboku:

- (a) ortocentra tych trójkątów;
- (b) środki ciężkości tych trójkątów;
- (c) środki okręgów opisanych na tych trójkątach.

**881.** Należy zbadać granicę ciągu  $(b_n/a_n)$ , gdzie  $b_n = a_0 \dots a_{n-1}$  (przyjmujemy  $b_0 = 1$ ). Widać, że  $b_{n+1} = a_n b_n$ . Wykażemy indukcyjnie, że dla  $n = 0, 1, 2, \dots$  zachodzi równość

$$a_n^2 - 5b_n^2 = 4.$$

Dla  $n = 0$  zgadza się. Przyjmijmy słuszność wzoru dla  $n$  i przejdźmy do  $n + 1$ :

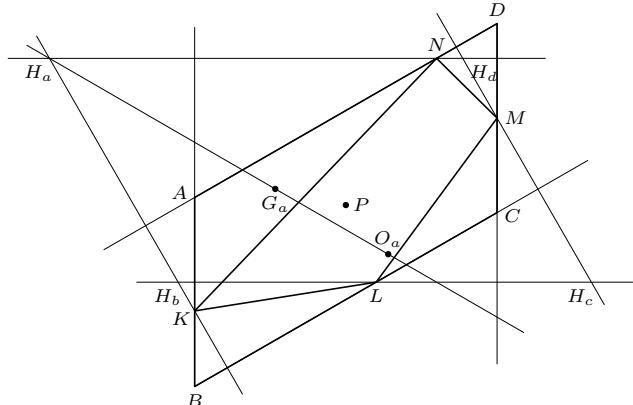
$$a_{n+1}^2 - 5b_{n+1}^2 = (a_n^2 - 2)^2 - 5(a_n b_n)^2 = a_n^2(a_n^2 - 4 - 5b_n^2) + 4 = 4;$$

w ostatnim kroku użyte zostało założenie indukcyjne (wyrażenie w nawiasie zeruje się). Dowodzona równość zachodzi więc dla wszystkich  $n \geq 0$ . Wynika z niej, że

$$\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = \frac{a_n^2 - 4}{5a_n^2} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{4}{a_n^2}\right).$$

Jasne, że  $a_n \rightarrow \infty$ . Stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{5}, \quad \text{zatem} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$



### Zadania z matematyki nr 885, 886

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**885.** Niech  $p$  będzie ustaloną liczbą pierwszą nieparzystą i niech  $M = \{1, 2, \dots, p-1\}$ . Wyznaczyć liczbę funkcji  $f: M \rightarrow M$  takich, że dla każdego  $x \in M$  liczba  $xf(f(x)) - 1$  dzieli się przez  $p$ .

**886.** W trójkącie ostrokątnym o bokach długości  $a, b, c$  kąty wewnętrzne przy przeciwnielego wierzchołkach mają miary (odpowiednio)  $\alpha, \beta, \gamma$ . Wykazać, że wartość ilorazu

$$\frac{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}{a + b + c}$$

wyraża się przez długości promieni okręgów opisanego i wpisanego. Wyjaśnić, czy uzyskany wzór jest słuszny również dla trójkątów rozwartokątnych.

Zadanie 886 zaproponował pan Marian Łupieżowiec z Gliwic.

**882.** Oznaczmy ortocentra tych czterech trójkątów, w podanej kolejności, przez  $H_a, H_b, H_c, H_d$ ; ich środki ciężkości – przez  $G_a, G_b, G_c, G_d$ ; zaś środki okręgów na nich opisanych – przez  $O_a, O_b, O_c, O_d$ .

(a) Punkty  $H_a$  i  $H_b$  leżą na prostej przechodzącej przez  $K$  (wspólny wierzchołek trójkątów  $ANK, BKL$ ), prostopadłej do prostych  $DA$  i  $BC$ . Punkty  $H_c$  i  $H_d$  leżą na prostej przechodzącej przez  $M$  i także prostopadłej do  $DA$  i  $BC$ . Zatem  $H_a H_b \parallel H_c H_d$ . Analogicznie pokazujemy, że  $H_b H_c \parallel H_d H_a$ : czworokąt  $H_a H_b H_c H_d$  jest równoleglobokiem.

(b) Rachujemy na wektorach. Niech  $P$  będzie punktem przecięcia przekątnych  $AC$  i  $BD$ ; a więc  $\vec{PA} + \vec{PC} = \vec{0} = \vec{PB} + \vec{PD}$ . Stąd

$$\begin{aligned} \vec{PG}_a + \vec{PG}_c &= \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PN} + \vec{PK}) + \frac{1}{3}(\vec{PC} + \vec{PL} + \vec{PM}) = \\ &= \frac{1}{3}(\vec{PN} + \vec{PK} + \vec{PL} + \vec{PM}), \\ \vec{PG}_b + \vec{PG}_d &= \frac{1}{3}(\vec{PB} + \vec{PK} + \vec{PL}) + \frac{1}{3}(\vec{PD} + \vec{PM} + \vec{PN}) = \\ &= \frac{1}{3}(\vec{PK} + \vec{PL} + \vec{PM} + \vec{PN}). \end{aligned}$$

Uzyskana równość

$$(1) \quad \vec{PG}_a + \vec{PG}_c = \vec{PG}_b + \vec{PG}_d$$

oznacza, że środki odcinków  $G_a G_c$  i  $G_b G_d$  pokrywają się: czworokąt  $G_a G_b G_c G_d$  jest równoleglobokiem.

(c) W trójkącie  $ANK$  (jak w każdym trójkącie) rozważane punkty charakterystyczne  $O_a, G_a, H_a$  leżą w tej kolejności na jednej prostej (*Eulera*), tworząc proporcję  $O_a G_a : G_a H_a = 1 : 2$ . Stąd  $\vec{PG}_a = \frac{2}{3}\vec{PO}_a + \frac{1}{3}\vec{PH}_a$ , czyli  $\vec{PO}_a = \frac{3}{2}\vec{PG}_a - \frac{1}{2}\vec{PH}_a$ . Analogicznie wyrażają się wektory  $\vec{PO}_b, \vec{PO}_c, \vec{PO}_d$ .

Z konkluzji części (a) wynika, że odcinki  $H_a H_c$  i  $H_b H_d$  mają wspólny środek, czyli że

$$(2) \quad \vec{PH}_a + \vec{PH}_c = \vec{PH}_b + \vec{PH}_d.$$

Skoro zaś (dla  $x = a, b, c, d$ ) wektory  $\vec{PO}_x$  wyrażają się jednolitym wzorem jako kombinacja liniowa wektorów  $\vec{PG}_x, \vec{PH}_x$ , z równości (1) i (2) wynika taka sama równość dla wektorów  $\vec{PO}_x$ :

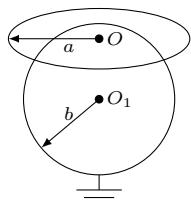
$$\vec{PO}_a + \vec{PO}_c = \vec{PO}_b + \vec{PO}_d.$$

Oznacza ona, że odcinki  $O_a O_c$  i  $O_b O_d$  mają wspólny środek: czworokąt  $O_a O_b O_c O_d$  jest równoleglobokiem.

# Klub 44 F



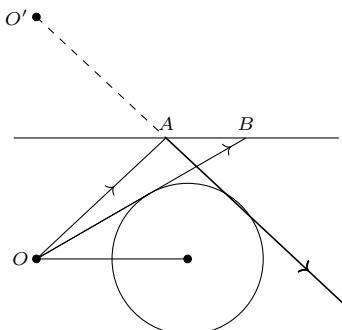
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2024



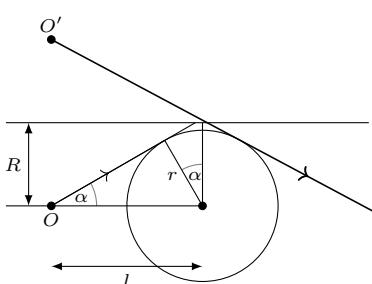
Rys. 1

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
772 ( $WT = 1,64$ ), 773 ( $WT = 2,71$ )  
z numeru 1/2024

Ryszard Baniewicz Włocławek	2-44+0,43
Jacek Konieczny Poznań	40,41
Konrad Kapcia Poznań	2-39,58
Paweł Perkowski Ożarów Maz.	5-35,07
Andrzej Nowogrodzki Chociągowo	3-23,69
Jan Zambrzycki Białystok	4-22,38
Tomasz Wietecha Tarnów	17-20,53
Paweł Kubit Kraków	17,21



Rys. 2



Rys. 3

## Zadania z fizyki nr 782, 783

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**782.** Potencjał w środku odosobnionego, naładowanego, drucianego pierścienia o promieniu  $a$  wynosi  $\varphi_a$ . Pierścień ten zbliżono do uziemionej przewodzącej sfery o promieniu  $b$  tak, że tylko środek pierścienia znajduje się na powierzchni sfery (rys. 1). Znaleźć ładunek indukowany na sferze.

**783.** Mała kulkę o masie  $m$  naładowana ładunkiem  $q$  zawieszona jest na nieważkiej i nierociągliwej nici w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B_0$  skierowanej pionowo. Kulkę odchylono o mały kąt z położenia równowagi i puszczone swobodnie. Po jakim czasie płaszczyzna wahadła obróci się o kąt  $2\pi$ ? Maksymalna siła Lorentza działająca na kulkę jest mała w porównaniu z maksymalną siłą zwracającą. Nie uwzględniamy efektów związanych z obrotem Ziemi.

### Rozwiązania zadań z numeru 5/2024

Przypominamy treść zadań:

**778.** Na osi długiej rury o lustrzanej powierzchni wewnętrznej znajduje się punktowe, izotropowe źródło światła oraz całkowicie pochłaniająca światło kula o promieniu  $r = 1$  cm. Środek kuli znajduje się w odległości  $l = 2$  cm od źródła. Jaki powinien być promień wewnętrzny rury, aby kula pochłaniała połowę energii emitowanej przez źródło?

**779.** W pionowo ustawionym naczyniu, pod ciężkim tłem znajduje się niewielka ilość helu. Nie ma ciśnienia atmosferycznego, tło „wisie” na wysokości  $H$  nad dnem naczynia, a jego tarcie o ścianki naczynia jest zaniedbywalne. Tło bardziej szybko podniesiono na wysokość  $10H$  względem dna naczynia (tak, że podczas podnoszenia nie dochodziło do zderzeń z cząsteczkami gazu) i po ustaleniu się równowagi puszczone swobodnie. Na jakiej wysokości nad dnem naczynia tło zatrzymał się, gdy ustaliły jego organy? Naczynie nie przewodzi ciepła, pojemność cieplna ścianek i tła można zaniedbać, hel traktujemy jako gaz doskonąły.

**778.** Rysunek 2 przedstawia bieg promieni wychodzących ze źródła  $O$ , w płaszczyźnie przekroju rury. Promienie w obszarze  $OAB$  nie spełniają warunków zadania. Zmniejszając promień rury, zmniejszamy powierzchnię tego obszaru. Przypadek graniczny, gdy wszystkie promienie biegnące ze źródła na prawo od prostej  $OO'$ , wyznaczonej przez źródło i jego obraz, trafiają na kulę bezpośrednio albo po odbiciach od powierzchni wewnętrznej rury, przedstawia rysunek 3. Promienie biegnące w lewo od prostej  $OO'$  wychodzą z rury albo bezpośrednio, albo po wielokrotnych odbiciach.

Maksymalny promień rury, dla którego spełnione są warunki zadania, dany jest wzorem:

$$R = r/\cos \alpha = r/\sqrt{1 - r^2/l^2} \approx 1,15 \text{ cm.}$$

**779.** Podczas podnoszenia tła nie jest wykonywana praca nad gazem, nie ma wymiany ciepła z otoczeniem i gaz jest doskonaly, zatem zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki energia wewnętrzna gazu nie zmienia się:

$$\Delta U = nc_V(T_1 - T_0) = 0,$$

a tym samym w wyniku podniesienia tła nie zmienia się jego temperatura:  $T_1 = T_0$ .

Podczas opadania tła praca wykonana nad gazem wynosi  $W = Mg(10H - x)$ , gdzie  $M$  jest masą tła, a  $x$  szukaną wysokością końcową. Zasada zachowania energii ma postać:

$$(1) \quad Mg(10H - x) = 3nR(T_2 - T_0)/2.$$

Ciśnienia w stanach początkowym i końcowym są jednakowe:

$$p_2 = Mg/S = p_0,$$

gdzie  $S$  jest przekrojem naczynia. Z równań Clapeyrona:  $p_0SH = nRT_0$ ,  $p_2Sx = nRT_2$ , otrzymujemy:

$$(2)$$

$$T_2 = T_0x/H.$$

Wstawiając (2) do (1), dostajemy:

$$x = 4,6H.$$

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązań zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnich kopertach, umieszczać na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).



## Prosto z nieba: Uwaga na szczelinę

W  $\Delta_{24}^5$  pisaliśmy o obserwacjach narodzin gwiazd neutronowych i czarnych dziur. Standardowa teoria ewolucji gwiazd przewiduje, że odpowiednio masywne gwiazdy eksplodują pod koniec swojego życia jako gwiazdy supernowe, pozostawiając najczęściej relatywistyczny obiekt zwarty. W zależności od (niestety słabo poznanych i zrozumianych) detali budowy masywnych gwiazd oraz przebiegu implozji, a później eksplozji gwiazdy supernowej, pozostałością jest obiekt materialny albo czarna dziura. W tym pierwszym przypadku jest to gwiazda neutronowa o masie od  $M_{\min} \approx 1 M_{\odot}$  do  $M_{\max} \sim 2,2 M_{\odot}$  (przy czym górna granica jest określona w bardzo przybliżony sposób, ponieważ zależy od stanu materii w bardzo dużych gęstościach, o których niewiele wiemy). Dotychczasowe obserwacje czarnych dziur w układach podwójnych, w których można przeprowadzić pomiar mas składników, wykazują ciekawą zależność: czarne dziury nie mają mas mniejszych niż około  $5 M_{\odot}$ , przy czym znów należy podkreślić, że wartość ta jest oszacowaniem wynikającym z dostępnych obserwacji.

Jeśli z jakichś powodów gwiazda neutronowa przekroczy  $M_{\max}$ , zyskując masę np. w procesie akrecji w układzie podwójnym, podczas katastroficznej akrecji w procesie supernowej albo w wyniku zderzenia z drugą gwiazdą neutronową (zjawisko to już kilkakrotnie zarejestrowały detektory fal grawitacyjnych LIGO i Virgo), staje się niestabilna grawitacyjnie i zapada się, tworząc czarną dziurę.

Pytanie, które nurtuje astronomów, jest następujące: czy „szczelina masowa” (ang. *mass gap*) – obserwowany brak obiektów o masach pomiędzy  $M_{\max}$  a  $\approx 5 M_{\odot}$  – jest faktem z powodów fundamentalnych, związanych z własnościami supernowych, czy jest złudzeniem wywołanym brakiem odpowiedniej liczby obserwacji, czy też problem jest bardziej skomplikowany. Postęp, czyli wspomniane wcześniej detekcje fal grawitacyjnych, pozwolił na rozwiązywanie części zagadki: produkty końcowe zderzeń gwiazd neutronowych w układach podwójnych mają masy dużo powyżej  $M_{\max}$  ( $\leq 2,8 M_{\odot}$  w przypadku GW170817 lub  $3,3 M_{\odot}$  w przypadku GW190425), zatem najprawdopodobniej są czarnymi dziurami w „szczelinie masowej”, która nie może być zupełnie pusta, ponieważ znajdują się w niej obiekty stworzone w ten sposób. Kolejne pytania to: ile ich jest i co się z nimi dzieje później.

Pulsar, czyli precyzyjnie tykający „zegarek” na orbicie, jest prawdziwym skarbem, ponieważ detekcja opóźnienia bądź przyspieszenia nadchodzących kolejnych pulsów umożliwiają modelowanie układu i m.in. pomiar masy składników układu.

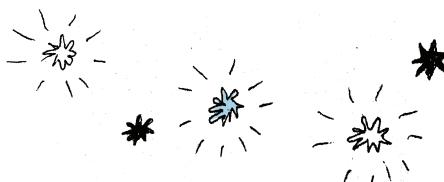
Obserwacje międzynarodowego zespołu korzystającego z sieci radioteleskopów Karoo Array Telescope (MeerKAT, 64 anteny w Parku Narodowym Meerkat na Przylądku Północnym Afryki Południowej) dostarczają dowody na istnienie obiektu w układzie podwójnym z radio-pulsarem milisekundowym w znajdującej się 40 000 lat świetlnych od Układu Słonecznego gromadzie kulistej NGC 1851. Pulsar PSR J0514-4002E obraca się niezwykle regularnie z częstotliwością 170 Hz. Radioastronomowie stwierdzają, że całkowita masa układu to  $3,887 \pm 0,004 M_{\odot}$ , a obserwacje w wielu długościach fali pokazują, że towarzyszą pulsara jest również obiektem zwartym. Jego masa zawiera się w przedziale od 2,09 do  $2,71 M_{\odot}$  (na poziomie ufności 95%), czyli jest bardzo prawdopodobne, że jest albo masywną gwiazdą neutronową blisko  $M_{\max}$ , co cieszy fizyków jądrowych zainteresowanych egzotyczną materią znajdującą się w jej wnętrzu, albo kolejnym przedstawicielem populacji „szczeliny masowej” jako niespodziewanie lekka czarna dziura, która być może jest wynikiem wcześniejszego zderzenia się gwiazd neutronowych.

Oprócz istotnego dla ewolucji gwiazd pierwszego dowodu na istnienie układu pulsar-czarna dziura, PSR J0514-4002E stwarza zupełnie nowe możliwości testów ogólnej teorii względności Einsteina oraz badania cech czarnych dziur.

Ewan D. Barr i in., „A pulsar in a binary with a compact object in the mass gap between neutron stars and black holes”, *Science* (2024)

Michał BEJGER

Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN,  
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), Sezione di Ferrara, Włochy





## Niebo we wrześniu

Słońce kontynuuje szybką wędrówkę na południe, zmniejszając wyraźnie czas swojego przebywania nad horyzontem. Na szerokości geograficznej Łodzi dnia ubywa w tempie około 4 minut na dobę. Może się to wydawać niewiele, ale w ciągu tygodnia sumuje się to do prawie pół godziny, a przez cały miesiąc – do prawie dwóch. 23 września Słońce przetnie równik niebieski w drodze na południe i na naszej półkuli Ziemi zacznie się astronomiczna jesień.

Miesiąc zacznie się dobrą widocznością Merkurego na niebie porannym. Planeta 5 września osiągnie maksymalną elongację zachodnią. Niestety, jak zawsze na naszych szerokościach geograficznych podczas korzystnej elongacji, planeta oddali się od Słońca na mniej więcej  $18^\circ$ . Mimo to o świcie zdąży się ona wznieść wyżej niż  $8^\circ$  ponad wschodni widnokrąg. Merkury pozostanie ozdobą porannego nieba do końca drugiej dekady września.

Przez cały okres widoczności jasność planety zwiększy się od  $+0,6^m$  do  $-1,3^m$ , faza jej tarczy urośnie od 28% do 94%, średnica kątowa zmniejszy się zaś z  $8''$  do  $5''$ . Pierwszego i drugiego dnia miesiąca Merkurego odwiedzi zbliżający się do nowiu Księżyc. Najpierw zwędzony do 3% sierp Srebrnego Globu pokaże się  $6^\circ$  nad planetą, następnego ranka zaś węższy od 1% przemieści się na odległość  $8^\circ$  na godzinę 8 względem planety. 9 września Merkury przejdzie  $0,5^\circ$  na północ od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa.

Po nowiu Księżyc przeniesie się na niebo wieczorne, ale w pierwszej połowie miesiąca zajmie niskie położenie na niebie, gdyż przejdzie przez najbardziej na południe wysuniętą część zodiaku i jednocześnie skieruje się pod eklipytkę. Do przypadającej 11 września rano naszego czasu I kwadry warto wspomnieć jedynie o mającym miejsce 10 godzin wcześniej spotkaniu naturalnego satelity Ziemi z Antaresem, najjaśniejszą gwiazdą Skorpiona. Wieczorem 10 września oba ciała niebieskie pokażą się w odległości  $3^\circ$  od siebie. Niestety zanim Antares wyłoni się z zorzy wieczornej, zbliży się do widnokręgu na odległość  $5^\circ$ , by schować się zań godzinę później.

18 września rano naszego czasu Srebrny Glob przejdzie przez pełnię i jednocześnie spotka się z parą planet Saturn-Neptun. 17 września wieczorem Księżyc wzajemnie mniej więcej w połowie drogi między tymi planetami. Oczywiście sąsiedztwo Księżyca w pełni oznacza, że obie planety są bliskie opozycji. W istocie Saturn znalazł się po przeciwniej stronie Ziemi niż Słońce 8. dnia miesiąca, Neptun zaś przyjmie podobną konfigurację 21 września. Saturn jest łatwo widoczny gołym okiem i jest najjaśniejszym po Księżyco źródłem światła w swojej okolicy, świecąc z jasnością  $+0,6^m$ , a średnica jego tarczy przekracza  $19''$ . Blask Neptuna wynosi  $+7,8^m$ , i do jego dostrzeżenia trzeba dysponować co najmniej lornetką. Jego odnalezienie ułatwia charakterystyczny układ gwiazd 5. wielkości na pograniczu Ryb i Wodnika, przypominający miniaturowy Mały Wóz. Planeta wędruje niecałe  $2^\circ$  na północny zachód od gwiazdy 27 Psc, kierując się ku 20 Psc.

Ta pełnia jest szczególna o tyle, że podczas niej Księżyca zahaczy o cień Ziemi, chowając weń niecałe 9% swojej

średnicy. Całe zjawisko da się obejrzeć po obu stronach Atlantyku, od zachodnich granic Polski do środkowych Stanów Zjednoczonych i Kanady. U nas zjawisko zacznie się o godzinie 2:41 od zaćmienia półcieniowego, zaćmienie częściowe zacznie się o 4:12, faza maksymalna o 4:45, koniec zaćmienia częściowego o 5:15 i koniec zaćmienia półcieniowego o godzinie 6:47.

Po pełni ciekawe spotkania z innymi ciałami niebieskimi czekają Księżyca w okolicach ostatniej kwadry, przez którą przejdzie 24 września na tle gwiazdozbioru Byka. W nocy z 23 na 24 września Srebrny Glob odwiedzi Jowisza, wędrując  $5^\circ$  na północ od niego. Kilka godzin później Księżyca zbliży się na niewiele ponad  $0,5^\circ$  do gwiazdy El Nath, drugiej co do jasności w Byku. Dobę później naturalny satelita Ziemi zbliży się na  $6^\circ$  do Marsa, a jeszcze następnego ranka dotrze na mniej niż  $4^\circ$  do Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt. Do tego czasu jego faza spadnie do 36%.

We wrześniu dystans między Marsem a Jowiszem zwiększy się od  $8^\circ$  do  $24^\circ$ . W tym czasie Mars 9 września przejdzie  $1^\circ$  od gromady otwartej gwiazd M35, w podobnej odległości minie gwiazdy Tejat Prior i Tejat Posterior (e i m Gem) czy przejdzie 100' od Mebsuty (e Gem), jednej z jaśniejszych gwiazd Bliźniąt. Przez cały miesiąc tarcza Jowisza urośnie od  $39''$  do  $42''$ , zwiększając jasność od  $-2,1^m$  do  $-2,3^m$ . Mars w tym czasie zwiększy jasność od  $+0,7^m$  do  $+0,5^m$ , zwiększając średnicę kątową od  $6''$  do  $8''$ .

Eklipytyka rano tworzy bardzo duży kąt z widnokrengiem, a zatem Księżyca pozostanie ozdobą porannego nieba do końca miesiąca. 27 września jego faza spadnie do 27%, a pokaże się on wtedy  $6^\circ$  nad znaną gromadą otwartą gwiazd M44 w Raku. Dwa dni później Srebrny Glob dotrze do gwiazdozbioru Lwa, wędrując  $4^\circ$  od Regulusa, a jego sierp zwędzi się do 11%. 30 września tarcza Księżyca pokaże fazę zaledwie 6%, mimo to około godziny 5:45 zdąży się wznieść na wysokość  $15^\circ$ . Srebrny Glob da się dostrzec nawet jeszcze następnego ranka, gdy o tej samej porze jego tarcza w fazie 2% pokaże się na wysokości  $5^\circ$  dokładnie nad punktem kardynalnym E widnokregu.

Ariel MAJCHER

# Rozwiązania zadań ze strony 3



## Rozwiązań zadania M 1792.

Z warunków zadania dostajemy równość

$$\frac{a^{2024} + 1}{a} = \frac{b^{2024} + 1}{b},$$

która po przekształceniach przyjmuje postać

$$ab(a^{2023} - b^{2023}) = (a - b).$$

Skoro  $a \neq b$ , to dzieląc powyższą równość stronami przez  $a - b$ , dostajemy

$$ab(a^{2022} + a^{2021}b + \dots + b^{2022}) = 1.$$

Korzystając teraz z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną, mamy

$$\begin{aligned} 1 &= ab(a^{2022} + a^{2021}b + \dots + b^{2022}) \geqslant \\ &\geqslant ab \cdot 2023 \sqrt[2023]{a^{2022} \cdot a^{2021}b \cdot \dots \cdot b^{2022}} = \\ &= ab \cdot 2023 \sqrt[2023]{(ab)^{\frac{2022+2023}{2}}} = 2023 \cdot (ab)^{\frac{2024}{2}}, \end{aligned}$$

skąd

$$2023^2(ab)^{2024} \leqslant 1.$$

Ponieważ  $a \neq b$ , więc oczywiście równość nie może zachodzić.

Ponadto  $(x^2 - 2)^2$  i  $4(x^2 - 1)$  są względnie pierwsze ( $2 \nmid x^2 - 2$  oraz  $x^2 - 1 = x^2 - 2 + 1$ ), a także mają różne parzystości liczb czynników pierwszych (dla  $(x^2 - 2)^2$  jest to oczywiście liczba parzysta, a dla  $4(x^2 - 1) = 2^2(x - 1)(x + 1)$  jest to liczba nieparzysta, na podstawie określenia  $x$ ).



## Rozwiązań zadania F 1103.

Podczas zderzenia z cegłą piłka jest ściskana, po czym wraca do swojego początkowego kształtu, zmieniając przy tym kierunek ruchu cegły. Po całkowitym „rozprężeniu” piłki cegła odrywa się od jej powierzchni i porusza z prędkością  $v$  pozwalającą jej wznieść się na wysokość  $H$  nad powierzchnię piłki w polu grawitacyjnym o przyspieszeniu  $g$ . Oznacza to, że  $v = \sqrt{2gH}$ . W momencie oderwania cegły środek ciężkości piłki porusza się z prędkością  $v/2$ , a więc po zderzeniu piłka „podskoczy” na wysokość  $h$  spełniającą równanie:

$$gh = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{2}\right)^2,$$

czyli  $h = H/4$ .



## Rozwiązań zadania M 1793.

Odpowiedź: Istnieją dokładnie 1024 takie kolorowania.

Na początku podamy konstrukcje 1024 kolorowań. Dla każdej liczby naturalnej  $k \leqslant 10$  wszystkie liczby przystające do  $k$  (mod 10) kolorujemy tym samym kolorem. Takie kolorowanie oczywiście spełnia warunki zadania, a jest ich dokładnie  $2^{10}$ .

Udowodnimy teraz, że innych kolorowań nie ma. Bez utraty ogólności możemy założyć, że liczba 1 jest biała. Zgodnie z założeniami zadania, jeśli liczba  $t > 10$  jest biała, to liczba  $t - 10$  również jest biała. Przypuśćmy, że dla pewnego  $k \leqslant 10$  wśród liczb przystających do  $k$  modulo 10 występują oba kolory. Zgodnie z wcześniejszą obserwacją wszystkie liczby mniejsze od pewnej liczby całkowitej dodatniej  $\ell$  przystające do  $k$  (mod 10) (w szczególności też  $k$ ) muszą być białe, a liczba  $\ell$  i wszystkie liczby większe od niej są czerwone. Ale wtedy, zgodnie z warunkami zadania, liczba  $(10\ell + k) - 10\ell = k$  jest pokolorowana na czerwono – sprzeczność.



## Rozwiązań zadania M 1794.

Ustalmy dowolnie liczbę naturalną  $n$ . Zauważmy, że w przedziale  $[2^n, 2^{n+1}]$  istnieje liczba nieparzysta  $x$  taka, że liczby (parzyste)  $x - 1$  i  $x + 1$  mają różne parzystości liczb czynników pierwszych (liczone z uwzględnieniem ich krotności). Istotnie, gdyby taka liczba  $x$  nie istniała, to liczby w ciągu

$$2^n, 2^n + 2, 2^n + 4, \dots, 2^n + 2^n$$

miałyby taką samą parzystość liczb czynników pierwszych, jednakże liczby czynników pierwszych liczb  $2^n$  i  $2^n + 2^n = 2^{n+1}$  różnią się o 1 – sprzeczność.

Pokażemy, że  $x^4$  jest liczbą dobrą, co z dowolnością  $n$  dowiedzie tezę zadania. Zauważmy, że

$$x^4 = (x^2 - 2)^2 + 4(x^2 - 1).$$



## Rozwiązań zadania F 1104.

O stopniu „ugotowania” zawartości jaja decyduje rozkład temperatury w jego wnętrzu i sposób, w jaki ten rozkład zmienia się w czasie. Jajo zanurzone jest w wodzie o temperaturze  $T = 100^\circ\text{C}$  i poprzez jego skorupkę ciepło przepływa do wnętrza. Proces zmiany temperatury w jego wnętrzu z upływem czasu,  $t$ , opisywany jest równaniem przewodnictwa cieplnego  $(x, y, z)$  oznaczającą współrzędne kartezjańskie):

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

w którym  $c$  to ciepło właściwe,  $\rho$  gęstość, a  $k$  współczynnik przewodnictwa cieplnego wnętrza jaja. Parametry  $\rho$ ,  $c$  i  $k$  mają te same wartości w jaju kurzym i strusim, a więc jedyną różnicą są rozmiary jaj (kształty są podobne). Niech  $T(t, x, y, z)$  będzie rozwiązaniem równania dla jaja kurzego, z warunkiem stałej temperatury na powierzchni:  $T(t, \text{brzeg jaja}) = 100^\circ\text{C}$ . Jeśli w tym rozwiązaniu podzielimy wszystkie współrzędne przez ten sam czynnik  $a$ , a czas przez czynnik  $b$ , przyjmując  $\Theta(t, x, y, z) = T(t/b, x/a, y/a, z/a)$ , to otrzymamy, że:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= \frac{1}{b} \frac{\partial T}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Po porównaniu z postacią równania spełnianego przez  $T$  wnioskujemy, że funkcja  $\Theta$  spełnia równanie:

$$c\rho \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{ka^2}{b} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right),$$

czyli dla  $b = a^2$  funkcja  $\Theta$  spełnia równanie przewodnictwa dla materiału jaja z warunkiem  $\Theta = 100^\circ\text{C}$  na powierzchni „rozcięgnietej” a razy w stosunku do przypadku dla  $T$ . Przyjmując  $a = 3$ , otrzymujemy, że jajo strusia należy gotować  $a^2 = 9$  razy dłużej niż jajo kury, czyli 45 minut.



# Skojarzenia – część 1

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

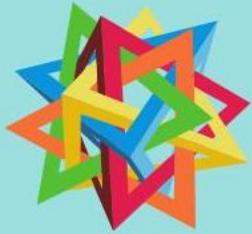
Zachęcam Czytelnika, który jeszcze tego nie zrobił, do zapoznania się z poprzednim kącikiem – są tam wprowadzone podstawowe definicje i oznaczenia, których będę tu używał. Ponadto, jeśli wierzchołki  $v$  i  $w$  danego grafu są połączone krawędzią, będziemy pisać  $v \sim w$ . Graf nazwiemy *d-regularnym*, jeśli wszystkie jego wierzchołki mają stopień  $d$ .

*Skojarzeniem* nazywamy każdy 1-regularny podgraf danego grafu. Mówiąc prościej – skojarzenie tworzy kilka par wierzchołków, przy czym każda para jest połączona krawędzią. Jeśli do skojarzenia należą wszystkie wierzchołki danego grafu, to nazywamy je *pełnym* albo *doskonałym*.

Pokolorujmy każdą krawędź grafu na jakiś kolor, przy czym krawędzie mające wspólny wierzchołek muszą mieć inne kolory. Takie kolorowanie nazywamy *właściwym*. Krawędzie każdego z kolorów tworzą skojarzenie. Jeśli każdemu kolorowi odpowiada skojarzenie pełne, to mówimy, że te skojarzenia tworzą *faktoryzację grafu*.

## Zadania

- W każdym z wielościanów foremnych znajdź skojarzenie pełne albo wykaż, że takiego nie ma.
- Klasa licząca  $n$  osób otrzymała zestaw  $n$  zadań domowych. Chcemy zorganizować lekcję w taki sposób, by każdy uczeń pokazał przy tablicy rozwiązanie jednego zadania, które zrobil w domu, ale każdy uczeń ma zaprezentować rozwiązanie innego zadania. Rozstrzygnąć, czy zawsze jest to możliwe, jeśli:
  - każdy uczeń rozwiązał dokładnie dwa zadania, a każde zadanie zostało rozwiązane przez dokładnie dwóch uczniów;
  - każdy uczeń rozwiązał co najmniej dwa zadania, a każde zadanie zostało rozwiązane przez co najmniej dwóch uczniów.
- Wykazać, że graf bez cykli ma co najwyżej jedno skojarzenie pełne.
- Udowodnić, że dla każdego  $c$  istnieje graf, który ma dokładnie jedno skojarzenie pełne oraz co najmniej  $c$  cykli.
- Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że następujące grafy mają faktoryzację:
  - $K_{2n}$  – każdy z  $2n$  wierzchołków jest połączony z każdym innym (graf *pełny*);
  - $K_{n,n}$  – taki, w którym można zapisać  $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n\}$  oraz  $E = \{a_i b_j : i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  (graf *dwudzielny pełny*).
- Niech  $n$  będzie całkowite dodatnie. Dany jest  $(2n)$ -elementowy zbiór liczb rzeczywistych o nieujemnej sumie elementów. Udowodnić, że ma on co najmniej  $2n - 1$  dwuelementowych podzbiorów o nieujemnej sumie elementów.
- W klasie maturalnej jest  $n$  chłopców i  $n$  dziewcząt, niektórzy się przyjaźnią i wszystkie przyjaźnie są odwzajemnione. Wiadomo, że każdy ma co najmniej  $n/2$  przyjaciół płci przeciwej. Dowieść, że ta klasa może zatańczyć na studniówce poloneza w taki sposób, żeby w każdej z  $n$  par tańczyli zaprzyjaźnieni dziewczyna i chłopak.
- Do grupy przedszkolnej uczęszczają  $2n$  dzieci. Każde dziecko ma w tej grupie co najmniej  $n$  przyjaciół, przy czym relacja bycia przyjacielem jest symetryczna. Udowodnić, że grupa ta może pójść na wycieczkę parami tak, żeby każdy siedział w parze ze swoim przyjacielem.



# VIII DZIEŃ POPULARYZACJI MATEMATYKI



26 września 2024

9.30 - 16.30 | Koszykowa 75  
Gmach Wydziału MiNI  
Politechnika Warszawska



Wydział Matematyki  
i Nauk Informacyjnych  
Politechnika Warszawska

**dpm mini pw.edu.pl**



25 lat Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych