
Zadania dodatkowe

Termin: wrzesień

Zadanie 1. Za pomocą cyfr 2, 0, 2, 4 w podanej kolejności połączonych znakami i symbolami matematycznymi utworzyć liczby od 1 do 20 (chętni mogą ciągnąć tę listę dalej... np. do 50).

Na przykład: $0 = 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 4$, $5 = 2^{0 \cdot 2} + 4$, $31 = -2^0 + \log \sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}$.

Zadanie 2. Rozważmy bardzo cienką powierzchnię np. chusteczkę¹ o grubości 0,1 mm. Składamy ją na pół (ma grubość 0,2 mm), znowu na pół (ma grubość 0,4 mm), i tak składamy ją na pół łącznie 40 razy. Jakiej wysokości (grubości) będzie ten stosik?

Zadanie 3. Rozważmy nieskończoną sumę $\frac{C_1}{\pi} + \frac{C_2}{\pi^2} + \frac{C_3}{\pi^3} + \frac{C_4}{\pi^4} + \dots$, gdzie C_n oznacza n -tą cyfrę po przecinku² liczby π . Wykaż, że suma ta jest skończona (tzn. jest równa pewnej liczbie rzeczywistej).

Zadanie 4. Oblicz najmniejszą wartość wyrażenia: $x^{2024} + \frac{2024}{x}$ dla $x \in \mathbb{R}_+$.

Zadanie 5. Niech dane będzie równanie $x^3 + 2ax + b = 0$ (a, b – dane). Wykaż, że jeśli x_0 spełnia to równanie, to $x_0 b \leq a^2$.

Termin: październik

Zadanie 6. Udowodnij, że istnieje tylko jeden zbiór pusty.

Zadanie 7. Rozważmy listę, która zawiera 2024 ponumerowane kolejno zdania. Zdanie n -te ma postać:
„Dokładnie n zdań na tej liście jest fałszywych.”

Ile zdań jest prawdziwych i które?

Zadanie 8. Niech dany będzie zbiór $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$. Które liczby ze zbioru A spełniają implikację:

Jeżeli n jest parzysta, to n jest podzielna przez 4.

Zadanie 9. Znajdź wszystkie liczby **niewymierne** a , dla których $a^2 - 44a$ oraz $a^3 - 2015a$ są **wymierne**.

Zadanie 10. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniające warunki: $a + b + c + d > 0$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd > 0$, $abc + abd + acd + bcd > 0$, $abcd > 0$. Wykaż, że każda z liczb a, b, c, d jest dodatnia.

Termin: listopad

Zadanie 11. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = z^7 \\ y^4 + z^4 = x^7 \\ x^4 + z^4 = y^7 \end{cases}$$

Zadanie 12. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$ jest nieparzysta.

Zadanie 13. Rozważmy kwadrat o boku 2, który dzielimy na cztery przystające kwadraty o boku 1. W każdy z tych małych kwadratów wpisujemy koło. Oblicz promień koła, którego środek jest środkiem dużego kwadratu i które jest styczne zewnętrznie do czterech małych kół.

¹Jeśli ktoś uważa, że chusteczka jest za mała, by złożyć ją aż 40 razy, może wyobrazić sobie ogromną płachtę rozłożoną na bardzo dużym polu.

²Mowa oczywiście o standardowym rozwinięciu w systemie dziesiętnym tzn. $\pi = 3,1415926\dots$

Zadanie 14. Rozważmy analogiczną sytuację w 3D, tzn. sześcián o krawędzi 2, który dzielimy na osiem przystających sześciánów o krawędzi 1. W każdy z tych małych sześciánów wpisujemy kulę. Oblicz promień kuli, której środek jest środkiem dużego sześciánu i która jest styczna zewnętrznie do małych kul.

Zadanie 15. Rozważmy analogiczną sytuację w dowolnym n -tym wymiarze, tzn. hipersześcián o krawędzi 2, który dzielimy na 2^n przystających sześciánów o krawędzi 1. W każdy z nich wpisujemy hiperkulę. Oblicz promień hiperkuli, której środek jest środkiem dużego hipersześciánu i która jest styczna zewnętrznie do małych hiperkul.

Termin: grudzień

Zadanie 16. Żona zawarła z mężem kontrakt, że jeśli danego dnia obiad gotuje ona, to następnego dnia za przygotowanie obiadu odpowiedzialny jest mąż. Jeśli zaś w jakimś dniu obiad gotował mąż, to o wyborze następnego dnia decyduje rzut monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A_n – w n -tym dniu kontraktu obiad gotuje mąż. Czy istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$? Jeśli tak, to ją obliczyć.
Uwaga: Można przyjąć, że $P(A_1) = \frac{1}{2}$.

Zadanie 17. Rozważmy następującą sytuację z sądu. Podczas rozprawy prokurator mówi: „Jeśli oskarżony zabił swoją żonę, to z pewnością miał współnika”. Obrońca zakrzyknął: „To kłamstwo!”. Dlaczego słowa obrońcy są niekorzystne dla oskarżonego?

Zadanie 18. Oblicz $\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2}$.

Zadanie 19. Rozważmy dowolny wielokąt wypukły, w który można wpisać okrąg. Na każdym boku wielokąta wpisujemy liczbę 0 lub 1, w taki sposób, że na dwóch sąsiednich bokach (tzn. z wspólnym wierzchołkiem) nie znajdują się te same liczby. Udowodnij, że suma długości boków z liczbami 0 jest równa sumie długości boków z liczbą 1.

Zadanie 20. Rozważmy dowolny wielościan wypukły, w który można wpisać kulę. Na każdej ścianie wielościanu wpisujemy liczbę 0 lub 1, w taki sposób, że na dwóch sąsiednich ścianach (tzn. ze wspólną krawędzią) nie znajdują się te same liczby. Udowodnij, że suma pól ścian z liczbami 0 jest równa sumie pól ścian z liczbą 1.

Rozwiązanie 1.	$1 = (2 + 0 + 2) : 4$	$12 = (2^0 + 2) \cdot 4$	$23 = 2^0 - 2 + 4!$
	$2 = -2 + 0 + 2 + \sqrt{4}$	$13 = -2 - 0! + 2^4$	$24 = 2 \cdot 0 \cdot 2 + 4!$
	$3 = -2^0 + 2 + \sqrt{4}$	$14 = -2 + 0 + \log \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} 4$	$25 = -2^0 + 2 + 4!$
	$4 = 2 + 0 + \log_2 4$	$15 = -2^0 + 2^4$	$26 = 2 \cdot 0 + 2 + 4!$
	$5 = 2^0 + 2 + \sqrt{4}$	$16 = (2^{0+2})^{\sqrt{4}}$	$27 = 2^0 + 2 + 4!$
	$6 = 2 + 0^2 + 4$	$17 = 2^0 + 2^4$	$28 = 2 + 0 + 2 + 4!$
	$7 = -2^0 + 2 \cdot 4$	$18 = 2 + 0 + 2^4$	$29 = 2 + 0! + 2 + 4!$
	$8 = 2 + 0 + 2 + 4$	$19 = -(2 + 0! + 2) + 4!$	$30 = -2 + 0 + \log \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} 4$
	$9 = 2^0 + 2 \cdot 4$	$20 = -2 + 0 - 2 + 4!$	$31 = -2^0 + \log \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} 4$
	$10 = 2 + 0 + 2 \cdot 4$	$21 = -2^0 - 2 + 4!$	$32 = (2 + 0) \cdot 2^4$
	$11 = 2 + 0! + 2 \cdot 4$	$22 = 2 \cdot 0 - 2 + 4!$	

Rozwiązanie 2. Początkowa grubość to 0,2 mm. Każde złożenie na pół podwaja grubość stosiku. Czynność tę wykonujemy 40 razy, więc końcowa wysokość to $0,1 \cdot 2^{40}$ mm = 109 951 162 777,6 mm \approx 110 tys. km (!). Jest to prawie trzykrotnie więcej niż obwód Ziemi.

Osoby znające ciągi odnajdą w tym zadaniu ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 0,1$ i ilorazie $q = 2$.

Rozwiązanie 3. Skoro C_n , to n -ta cyfra, to maksymalnie wynosi ona 9. Zachodzi więc poniższe oszacowanie:

$$\frac{C_1}{\pi} + \frac{C_2}{\pi^2} + \frac{C_3}{\pi^3} + \frac{C_4}{\pi^4} + \dots < \frac{9}{\pi} + \frac{9}{\pi^2} + \frac{9}{\pi^3} + \frac{9}{\pi^4} + \dots$$

Ale tę sumę umiemy policzyć – jest to suma szeregu geometrycznego $\left(a_1 = \frac{9}{\pi}, q = \frac{1}{\pi}\right)$. Wynosi zatem

$$S = \frac{\frac{9}{\pi}}{1 - \frac{1}{\pi}} = \frac{9}{\pi - 1} (\approx 4,2). \text{ Szukana suma jest mniejsza niż } S, \text{ a więc skończona.}$$

Rozwiązanie 4.

Sposób I

Pod koniec klasy 3 poznaje się rachunek różniczkowy (pochodne) i wtedy można to zadanie rozwiązać „schematycznie” jako jedno z wielu zadań typu: „Oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji f w podanym przedziale”.

Szkic: Szukamy za pomocą pochodnych ekstremów lokalnych wewnątrz przedziału, liczymy granice na krańcach przedziału, podajemy wartość największą i najmniejszą (jeśli istnieją).

Sposób II

Zauważmy, że $x^{2024} + \frac{2024}{x} = x^{2024} + \overbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}^{2024}$, a więc z nierówności między średnimi ($A - G$):

$$\frac{x^{2024} + \frac{2024}{x}}{2025} \geq \sqrt[2025]{x^{2024} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{2024}} = 1,$$

czyli omawiane wyrażenie jest ≥ 2025 . Równość zachodzi, gdy wszystkie składniki są równe tzn. $x^{2024} = \frac{1}{x}$, czyli gdy $x = 1$. Wtedy wartość wyrażenia wynosi $1^{2024} + \frac{2024}{1} = 2025$.

Rozwiązanie 5.

Sposób I - pomysły

Skoro x_0 spełnia równanie, to: $x_0^3 + 2ax_0 + b = 0$, co możemy „sprytnie” zapisać $x_0x_0^2 + 2ax_0 + b = 0$ (*).

- Jeśli $x_0 = 0$, to $b = 0$, a więc nierówność $x_0b \leq a^2$ jest prawdziwa.
- Jeśli $x_0 \neq 0$, to równanie (*) oznacza, że liczba x_0 jest pierwiastkiem równania kwadratowego $x_0x^2 + 2ax + b = 0$, w szczególności $\Delta \geq 0$. A więc $4a^2 - 4x_0b \geq 0$, co po przekształceniu daje $x_0b \leq a^2$.

Zadanie to pochodzi z 17. Olimpiady Matematycznej, z pierwszego etapu.

Sposób II

Skoro x_0 spełnia równanie, to: $x_0^3 + 2ax_0 + b = 0$, skąd $b = -x_0^3 - 2ax_0$.

Przekształcając równoważnie tęzę mamy:

$$x_0b \leq a^2$$

$$\begin{aligned} -x_0^4 - 2ax_0 &\leq a^2 \\ x_0^4 + 2ax_0^2 + a^2 &\geq 0 \\ (a + x_0^2) &\leq 0 \end{aligned}$$

co jest prawdą, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Rozwiązanie 6. Załóżmy nie wprost, że istnieją dwa różne zbiory puste: \emptyset_1, \emptyset_2 . Wiemy, że zbiór pusty zawiera się w każdym zbiorze, więc w szczególności $\emptyset_1 \subset \emptyset_2$ oraz $\emptyset_2 \subset \emptyset_1$. Ale jeśli $A \subset B$ oraz $B \subset A$ to oznacza, że $A = B$, więc $\emptyset_1 = \emptyset_2$. Istnieje zatem tylko jeden zbiór pusty.

Rozwiązanie 7. Na liście nie może być więcej niż jedno zdanie prawdziwe, bo wtedy koniunkcja dwóch różnych zdań byłaby fałszywa. Gdyby wszystkie 2024 zdania były fałszywe, to w szczególności ostatnie zdanie też, czyli nieprawdą jest, że 2024 zdania są fałszywe. Sprzeczność. Liczba zdań prawdziwych jest więc ≥ 1 oraz ≤ 1 . Jest zatem dokładnie jedno zdanie prawdziwe, czyli 2023 fałszywe. Prawdziwe jest więc zdanie o numerze 2023.

Rozwiązanie 8. Implikacja jest fałszywa tylko w przypadku, gdy z prawdy wynika fałsz. Zatem liczby 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 spełniają implikację, bo poprzednik jest fałszywy. Ponadto spełniają ją też liczby 0, 4, 8, 12, 16, 20 – dla nich poprzednik i następnik są prawdziwe. Implikacja nie jest spełniona tylko dla liczb: 2, 6, 10, 14, 18, bo są to liczby parzyste, ale niepodzielne przez 4.

Rozwiązanie 9. Chcemy, aby $a^2 - 44a$ oraz $a^3 - 2015a$ były wymierne. Rozpiszmy $a(a^2 - 44a) = a^3 - 44a^2 = a^3 - 2015a + 2015a - 44(a^2 - 44a + 44a) = (a^3 - 2015a) - 44(a^2 - 44a) + 2015a - 1936a = (a^3 - 2015a) - 44(a^2 - 44a) + 79a$. Stąd $a(a^2 - 44a) = (a^3 - 2015a) - 44(a^2 - 44a) + 79a$, czyli $a(a^2 - 44a) - 79a = (a^3 - 2015a) - 44(a^2 - 44a)$ i dalej $a[(a^2 - 44a) - 79] = (a^3 - 2015a) - 44(a^2 - 44a)$. Prawa strona jest wymierna, ponieważ różnica i iloczyn liczb wymiernych jest wymierny. Zatem lewa też. Ale lewa to iloczyn liczby niewymiernej oraz wymiernej. Taki iloczyn jest wymierny tylko gdy liczba wymierna jest równa 0, tj. $a^2 - 44a = 79$. Rozwiązaniem tego równania są: $a_1 = 22 + \sqrt{563} \vee a_2 = 22 - \sqrt{563}$. Obie te liczby spełniają warunki zadania, bo $a^2 - 44a = 79 \in \mathbb{Q}$ oraz $a^3 - 2015a = a(a^2 - 44a + 44a - 2015) = a(79 + 44a - 2015) = a(44a - 1936) = 44a(a - 44) = 44(a^3 - 44a) = 44 \cdot 79 \in \mathbb{Q}$.

Rozwiązanie 10. Warunki w zadaniu kojarzą nam się z wzorami Viete'a stopnia 4. Rozważmy wielomian o pierwiastkach a, b, c, d , tj. $W(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$, który po wymnożeniu przyjmuje postać ogólną $W(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Ze wzorów Viete'a (i założeń):

- $-a_3 = a + b + c + d > 0 \Rightarrow a_3 < 0$
- $a_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd > 0 \Rightarrow a_2 > 0$
- $-a_1 = abc + abd + acd + bcd > 0 \Rightarrow a_1 < 0$
- $a_0 = abcd > 0 \Rightarrow a_0 > 0$

Zatem dla $x \leq 0$ jest $W(x) > 0$, a więc wielomian $W(x)$ ma tylko dodatnie pierwiastki. Stąd $a, b, c, d > 0$.

Rozwiązanie 11. Lewe strony są nieujemne, więc prawe też. Stąd $x, y, z \geq 0$. Możemy bez straty ogólności założyć, że $x \leq y \leq z$. Wtedy prawe strony są uporządkowane słabo rosnąco, a lewe słabo malejąco. Tak więc wszystkie liczby muszą być równe: $x = y = z$. Zatem $2x^4 = x^7$, skąd $x^4(x^3 - 2) = 0$, czyli $x = 0 \vee x = \sqrt[3]{2}$.

Rozwiązanie 12. Rozwińmy przy pomocy dwumianu Newtona wyrażenia $(2 + \sqrt{3})^n$ oraz $(2 - \sqrt{3})^n$:

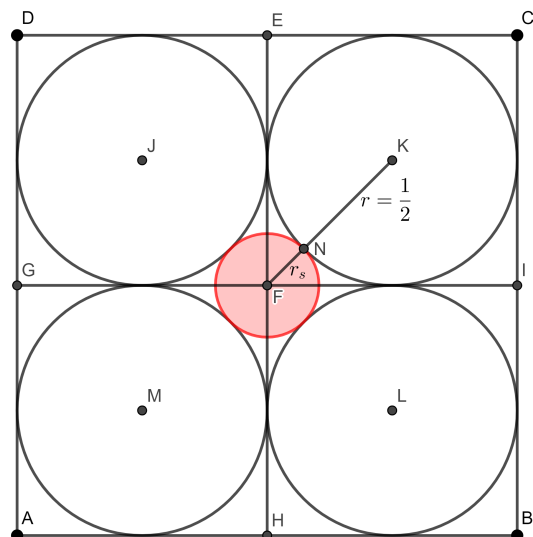
$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot \sqrt{3}^k = \binom{n}{0} 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} \cdot \sqrt{3} + \binom{n}{2} 2^{n-2} \sqrt{3}^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot \sqrt{3}^n =: a + b\sqrt{3} \\ (2 - \sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot (-\sqrt{3})^k = \binom{n}{0} 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} \cdot (-\sqrt{3}) + \binom{n}{2} 2^{n-2} \cdot (-\sqrt{3})^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot (-\sqrt{3})^n = \\ &= \binom{n}{0} 2^n - \binom{n}{1} 2^{n-1} \cdot \sqrt{3} + \binom{n}{2} 2^{n-2} \cdot \sqrt{3}^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot (-1)^n \sqrt{3}^n = \\ &= a - b\sqrt{3}, \end{aligned}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{N}$.

Zatem $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = 2a$, czyli jest to liczba parzysta. Ponadto $(2 - \sqrt{3})^n \in (0, 1)$. Otrzymujemy więc

$$\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor = \lfloor (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \rfloor = \lfloor 2a - (2 - \sqrt{3})^n \rfloor = 2a - 1 \in 2\mathbb{N} + 1.$$

Rozwiązanie 13.



Niech r_s to długość szukanego promienia, zaś N to punkt styczności okręgów. Przekątna kwadratu $FICE$ ma długość $\sqrt{2}$. Zatem $\sqrt{2} = 1 + 2r_s$, skąd $r_s = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

Rozwiązanie 14. Analogicznie do zadania poprzedniego średnica każdej „małej” kuli wynosi 1, zaś przekątna „małego” sześcianu $\sqrt{3}$. Zatem $\sqrt{3} = 1 + 2r_2$, skąd $r_s = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

Rozwiązanie 15. Analogicznie do zadań poprzednich średnica każdej „małej” kuli wynosi 1, zaś przekątna „małego” hipersześcianu \sqrt{n} . Zatem $\sqrt{n} = 1 + 2r_2$, skąd $r_s = \frac{\sqrt{n} - 1}{2}$.

Można dokonać bardzo ciekawych obserwacji: dla $n = 5$ mamy $r_s = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,62 > \frac{1}{2}$, co oznacza, że „mała” kula jest większa od każdej z „dużych” kul (!). Dla $n = 10$ jest $r_s = \frac{\sqrt{10} - 1}{2} \approx 1,08 > 1$, co oznacza, że „mała” kula wychodzi poza hipersześcian (!).