



l=5510°,ls 7=3,11592°

## SPIS TREŚCI NUMERU 1 (596) 2024

Jak dotąd jest dobrze

Bartłomiej Pawlik



Zadania

Wróć do Talmudu

Oskar Skibski

Jak żyć tak wysoko, jak?

Magdalena Fikus

Gotów? Start! Rozruch reaktora  
jądrowego

Jakub Kopyciński

Problemy z dowodem prawa pól  
w *Principiach Newtona*?

Grzegorz Łukaszewicz

Nie wiem, czy wiesz...

Paweł Rafał Bieliński

Ekstremalne kosmiczne laboratoria,  
część I

Karolina Rozko

Czy Newton wiedział? Statystyczna  
tajemnica skrzyni Pyx

Jan Mielniczuk

Klub 44

Prosto z nieba: Młode i energiczne  
czarne dziury wczesnego Wszechświata

Niebo w styczniu

Aktualności

Sytuacja w normie, nic nie działa

Wielomiany podziału koła – część 1

Bartłomiej Bzdęga

str. 1

str. 2

str. 3

str. 6

str. 7

str. 8

str. 12

str. 14

str. 16

str. 20

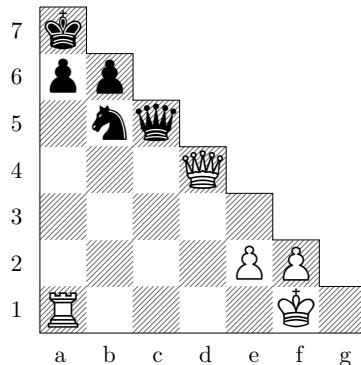
str. 22

str. 22

str. 24

str. 25

W następnym numerze: ruch białych



Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, dr Wojciech Czerwiński, dr hab. Sławomir Dinew, prof. UJ, dr Tomasz Greczyło, prof. UW, dr Adam Gregosiewicz, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Joanna Jaszuńska, dr hab. Artur Jeż, prof. UW, dr hab. Bartosz Klin, dr Piotr Kołaczek-Szymański, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Michał Bejger, Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nacz., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nacz., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sek. red.

**Adres do korespondencji:**

Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Ookładki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem LATEX wykonała Redakcja.

Druk: Poligrafia NOT [poligrafianot.pl](http://poligrafianot.pl)

**Prenumerata:**

Garmond Press: [www.garmondpres.pl](http://www.garmondpres.pl) (tylko instytucje)

Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)

Na stronie Empiku Deltę można zamówić co miesiąc (z dostawą do sklepu Empik za 0 zł):

[www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p](http://www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;  
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym  
artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

**Wydawca:** Uniwersytet Warszawski

# Jak dotąd jest dobrze

Bartłomiej PAWLICK\*

\* Wydział Matematyki Stosowanej,  
Politechnika Śląska

J. H. Conway, *The weird and wonderful chemistry of radioactive decay.*

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, ...

Czytelnikowi, który widzi powyższy ciąg po raz pierwszy, sugeruję na chwilę zatrzymać lekturę i zastanowić się, jaka powinna być następna liczba.

Nazwa *look-and-say* idealnie oddaje istotę ciągu – każdy kolejny wyraz powstaje przez opisanie tego, co widzimy, patrząc na wyraz poprzedni. Przykładowo, patrząc na piąty wyraz ciągu (111221), widzimy trzy (3) jedynki (1), dwie (2) dwójki (2) i jedną (1) jedynkę (1), więc kolejny wyraz to **312211**. Rzeczną autodeskrypcyjność stanowi największy urok ciągu Conwaya: wyznaczenie kolejnych wyrazów nie ma nic wspólnego z niedostępna dla niewtajemniczych matematyką wyższą. Można się nawet pokusić o przypuszczenie, że spostrzegawczy laik ma większe szanse na odgadnięcie reguły rządzącej ciągiem niż doświadczony matematyk. Moda na ciąg Conwaya nie ominęła *Delta*, na łamach której w ostatnich latach pojawiły się warte uwagi teksty traktujące o *look-and-say*: w  $\Delta_{21}^{11}$  o najważniejszych własnościach pisze Wojciech Czerwiński, a w  $\Delta_{23}^1$  można znaleźć bardziej szczegółowy tekst Karola Gryszyńskiego.

**Jak dotąd jest dobrze.** Bohaterem niniejszego artykułu jest pewien mniej znany ciąg autodeskrypcyjny, który zadebiutował w OEIS (*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* – bardzo przydatna baza ciągów) w 2005 roku jako wytwór Erica Angeliniego – belgijskiego pasjonata matematyki rekreacyjnej. Zanim przedstawimy sam ciąg, przyjmijmy następującą konwencję dekodowania liczb. Niech  $N \geq 10$ . Liczba powstała przez „odcięcie” ostatniej cyfry liczby  $N$  (czyli część całkowita liczby  $N/10$ ) będzie oznaczać *ilość*, a ostatnia cyfra liczby  $N$  (czyli reszta z dzielenia  $N$  przez 10) będzie oznaczała samą siebie, czyli – nomen omen – *cyfrę*. Liczbę  $N$  dekodujemy jako odpowiednią *ilość* tej *cyfry*.

Przykładowo 26 dekodujemy jako *dwie cyfry „6”*, a 8945 jako *osiemset dziewięćdziesiąt cztery cyfry „5”*.

Sekwencja *true-so-far* jest rosnącym ciągiem liczb całkowitych, którego pierwszym elementem jest liczba 10, a każdy kolejny to najmniejsza liczba, która po zdekodowaniu poprawnie opisuje liczbę wystąpień danej cyfry we wszystkich dotychczasowych elementach ciągu (łącznie z wprowadzonym). Zatem drugim elementem ciągu nie może być liczba 11 (11 dekodujemy jako *jedna „jedynka”*, podczas gdy ciąg (10, 11) zawiera trzy jedynki!), natomiast liczba 12 tak (ciąg (10, 12) faktycznie zawiera jedną cyfrę „2”). Sto początkowych elementów ciągu *true-so-far* to:

10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25,  
26, 27, 28, 29, 30, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 45,  
46, 47, 48, 49, 50, 56, 57, 58, 59, 60, 67, 68, 69,  
70, 78, 79, 80, 89, 90, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108,  
109, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 123, 124, 125, 126,  
127, 128, 129, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 145, 146, 147, 148,  
149, 156, 157, 158, 159, 167, 168, 169, 178, 179, 180, 189, 190,  
192, 193, 194, 195, 196, 197, 203, 204, 205.

Ostatnia z zapisanych powyżej liczb, 205, informuje, że w tabeli znajduje się dokładnie dwadzieścia cyfr „5”.

Czy rozpatrywany ciąg jest nieskończony? Odpowiedź uzyskamy, łącząc liczenie na palcach (komputerowych) z prostym rozumowaniem.

Jak się okazuje, po otrzymaniu **dwa tysiące dwudziestego czwartego** elementu ciągu *true-so-far* – 8945 – liczby wystąpień poszczególnych cyfr są następujące:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
624	822	834	864	874	894	779	697	697	617

Wieże znajdują się na polach  $(i, i)$  dla  $i \leq n$ ,  $(i, i+1)$  dla  $n < i \leq 2n-1$  oraz na polu  $(2n, n+1)$ .



Kolejny, dwa tysiące dwudziesty piąty element ciągu musi mieć zakodowaną liczność jednej z dziesięciu cyfr. Zauważmy, że nie może on odnosić się do cyfry „5”: liczba 8955 nie pasuje, gdyż zwiększa liczbę piątek o dwie, a nie o jedną; podobnym argumentem odrzucamy liczbę 8965 (oczywiście większych kandydatów nie ma sensu rozpatrywać).

Analogicznie można uzasadnić, że kolejny element nie może mieć na końcu cyfry 8. Pozostali kandydaci to:

6250, 8231, 8352, 8653, 8754, 7806, 6987, 6189 i 6199,

jednak odrzucamy każdą z tych propozycji ze względu na założenie, że rozpatrywany ciąg ma być rosnący – każda z dziewięciu powyższych liczb jest mniejsza od 8945. Ostatecznie ciąg *true-so-far* ma dokładnie **2024** elementy.

Pod koniec powyższego uzasadnienia skończoności powołaliśmy się na monotoniczność rozpatrywanego ciągu. Jak się okazuje, *true-so-far* ma skończoną liczbę elementów również w wariantie, w którym nie zakładamy, że jest rosnący. Jednak liczba elementów tej wersji ciągu przez długi czas nie da nam dobrego pretekstu do przedstawienia go na łamach *Delta* – zgodnie z informacją zamieszczoną w bazie OEIS wynosi ona 5 191 475.



## Zadania

Przygotował Dominik BUREK

**M 1768.** Liczba całkowita  $n$  jest taka, że równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = n$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych  $x, y$  i  $z$ . Udowodnić, że równanie

$$x^2 + y^2 - xy = n$$

ma rozwiązanie w postaci pary liczb całkowitych  $x, y$ .

Rozwiązanie na str. 7

**M 1769.** Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie  $n$ , dla których istnieją takie parami różne liczby całkowite dodatnie  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , że liczba

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}$$

jest całkowita.

Rozwiązanie na str. 4

**M 1770.** Dana jest liczba całkowita dodatnia  $n$ . Na szachownicy  $2n \times 2n$  w taki sposób rozmiastano  $2n$  wież, aby żadne dwie z nich nie znajdowały się w tym samym rzędzie lub w tej samej kolumnie. Następnie tablicę przecięto wzduż linii rozdziału pól na dwie spójne części symetryczne do siebie względem środka tablicy. Jaka jest maksymalna liczba wież, które mogą znajdować się w jednej z takich części?

Rozwiązanie na str. 1

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1087.** Kropla nieściśliwej cieczy została pobudzona do małych drgań polegających na zmianach kształtu względem kształtu sferycznego. Jak częstotliwość  $f$  tych drgań zależy od napięcia powierzchniowego cieczy  $\gamma$ , jej gęstości  $\rho$  oraz promienia kropli  $r$ ?

Rozwiązanie na str. 9

**F 1088.** W jaki sposób Newton, na podstawie znanych w jego czasach rozmiarów wielkich pól orbit i okresów obiegu Ziemi wokół Słońca, Księżyca wokół Ziemi oraz Callisto wokół Jowisza, mógł wyznaczyć stosunek masy Słońca  $M_S$  i masy Jowisza  $M_J$  do masy Ziemi  $M_Z$ ?

Potrzebne dane: okres obiegu Ziemi  $T_Z = 365,26$  dni, wielka półosь orbity  $a_Z = 149,598 \cdot 10^6$  km; okres obiegu Księżyca  $T_K = 27,32$  dni, wielka półosь  $a_K = 0,384 \cdot 10^6$  km; okres obiegu Callisto  $T_C = 16,69$  dni, półosią  $a_C = 1,883 \cdot 10^6$  km – wartości znane współcześnie.

Rozwiązanie na str. 20

# Powrót do Talmudu

Oskar SKIBSKI\*

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

W artykule *Problem bankructwa z Talmudu*  $\Delta_{21}^{10}$  opisaliśmy pewną tajemnicę, która tkwiła w Talmudzie Babilońskim przez setki lat. Historia była następująca. Mężczyzna, umierając, zostawił trzy żony, którym obiecał odpowiednio 100, 200 i 300 srebrnych monet. Jego majątek nie był jednak tak duży, aby spłacić te zobowiązania. Jak powinno się podzielić pozostawiony majątek między żony? Talmud rozstrzyga tę kwestię w konkretnych przypadkach: jeżeli majątek to 100 monet, to powinno się go podzielić po równo. Jeżeli 200 monet, to pierwsza żona powinna dostać 50 monet, a pozostałe po 75. Z kolei jeżeli majątek stanowi 300 monet, to powinno się go podzielić proporcjonalnie: każda żona dostanie wówczas połowę obiecanej kwoty. Skąd biorą się jednak te sposoby podziału?

Rozwiążanie tej zagadki znaleźli dopiero w 1985 roku Robert Aumann i Michael Maschler. Nie tylko przedstawili oni metodę podziału, która pasuje do wszystkich trzech scenariuszy, ale też podali kilka jej uzasadnień. O tej metodzie i uzasadnieniach pisaliśmy w poprzednim artykule, jednak nie powiedzieliśmy, skąd ta metoda w ogóle się wzięła. Autorzy sami przyznają, że metodę tę znaleźli, używając gier koalicyjnych. O tym, jak można to zrobić, opowiem w tym artykule.

*Problem bankructwa* matematycznie definiuje się jako ciąg nieujemnych liczb dodatnich  $(E; c_1, \dots, c_n)$ , gdzie  $E$  to majątek, a  $c_1 \leq \dots \leq c_n$  to roszczenia  $n$  osób, które (zgodnie z historią powyżej) będziemy nazywać żonami, przy czym majątek  $E$  nie przekracza sumy roszczeń  $C = \sum_{i=1}^n c_i$ .

Metodę podziału znalezioną przez Aumanna i Maschlera obrazowo opisać można systemem naczyń połączonych znajdujących się na rysunku obok. Jest w nim  $n$  naczyń o pojemności  $c_1, \dots, c_n$ , każde złożone z dwóch połów połączonych bardziej cienką rurką o pomijalnej objętości. U podstawy wszystkie naczynia łączy równie cienka rurka. Do tego systemu wlewamy  $E$  wody i każdej żonie przyznajemy tyle majątku, ile wody znajdzie się w jej naczyniu.

Z układu widzimy, że jeżeli majątek jest mniejszy niż połowa sumy roszczeń, czyli  $E \leq C/2$ , to pierwszych  $k$  żon (dla pewnego  $k$ ) dostanie połowę swojego roszczenia. Pozostałe żony podzielą się resztą po równo, przy czym  $k$  wyznaczamy tak, aby nie dostały mniej niż  $k$ -ta żona. Jeżeli  $E > C/2$ , to możemy myśleć o dzieleniu nie majątku, a jego brakującej części – pierwszym  $k$  żonom będzie brakowało po połowie ich roszczeń, a pozostałe tak podzielą się resztą, aby brakowało im po tyle samo.

Łatwo sprawdzić, że metoda ta zgadza się z wariantami problemu bankructwa opisanymi w Talmudzie.

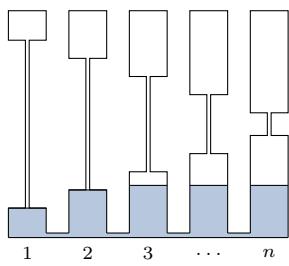
## Mało żon, mały kłopot

Zastanówmy się, gdzie możemy znaleźć tę rzekomą grę koalicyjną? Przypomnijmy, że gra koalicyjna to para  $(N, f)$ , gdzie  $N$  jest zbiorem graczy, a  $f : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  funkcją, która każdej grupie graczy, nazywanej koalicją, przypisuje pewną wartość (zakładamy  $f(\emptyset) = 0$ ).

Zacznijmy, tak jak w poprzednim artykule, od sytuacji, w której są tylko dwie żony:  $(E; c_1, c_2)$ . Jak argumentowali w swojej pracy Aumann i Maschler na podstawie innej historii z Talmudu (*sporu o ubiór*), podział powinien wyglądać następująco. Jeżeli majątek jest większy niż żądanie drugiej żony (czyli  $E > c_2$ ), to cała nadwyżka  $E - c_2$  powinna trafić do pierwszej żony. Analogicznie, jeżeli majątek jest większy niż żądanie pierwszej żony ( $E > c_1$ ), to  $E - c_1$  powinno trafić do drugiej żony. Całą resztę, czyli sporny kawałek, dzielimy po równo między żony. Używając notacji  $(x)_+ = \max\{0, x\}$ , otrzymujemy wypłatę żony  $i \in \{1, 2\}$ :

$$x_i = (E - c_j)_+ + \frac{1}{2} (E - (E - c_i)_+ - (E - c_j)_+), \text{ dla } j = \{1, 2\} \setminus \{i\}.$$

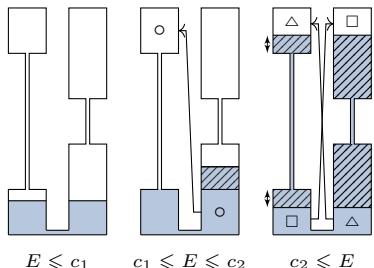
Podział ten zgadza się z metodą Aumanna i Maschlera, dowód obrazkowy znajduje się na marginesie.



Liczba  $k$  wyznaczamy jako największą  $j \in \{0, \dots, n\}$ , dla której zachodzi  $\sum_{i=1}^j c_i/2 + (n-j)c_j/2 \leq \min\{E, C-E\}$ .

Od pewnego czasu gry koalicyjne pojawiają się w *Delcie* regularnie raz do roku: pojawiły się w numerach  $\Delta_{20}^{11}, \Delta_{21}^{10}, \Delta_{22}^4$  i  $\Delta_{23}^2$ .

Na poniższych obrazkach zakreskowane pola odpowiadają wartościom  $(E - c_1)_+$  oraz  $(E - c_2)_+$ , czyli ilości wody, jaka zostanie żonie, jeżeli woda wypełni drugą połowę naczynia. Pola oznaczone tymi samymi symbolami ( $\circ$ ,  $\triangle$ ,  $\square$ ) są tej samej wielkości.





### Rozwiążanie zadania M 1769.

Odpowiedź:  $n = 1$  oraz  $n \geq 3$ .

Dla  $n = 1$ , biorąc dowolną liczbę całkowitą dodatnią  $a_1$ , mamy  $\frac{a_1}{a_1} = 1$ .

Dla  $n \geq 3$  rozważmy liczby

$$a_i = (n-1)^{i-1} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} &= \\ &= (n-1) \cdot \frac{1}{n-1} + (n-1)^{n-1} = \\ &= 1 + (n-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Załóżmy teraz, że istnieją dwie różne liczby całkowite dodatnie  $a_1$  i  $a_2$  takie, że suma  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}$  jest całkowita. Niech  $a_1 = kd$ ,  $a_2 = \ell d$ , gdzie  $d \geq 1$  oraz  $\text{nwd}(k, \ell) = 1$ . Wtedy

$$\frac{kd}{\ell d} + \frac{\ell d}{kd} = \frac{k^2 + \ell^2}{kl}$$

jest liczbą całkowitą, co oznacza, że  $kl | k^2 + \ell^2$ . W szczególności  $k | \ell^2$ , więc  $k = 1$ , gdyż  $\text{nwd}(k, \ell) = 1$ . Podobnie  $\ell = 1$ , skąd  $a_1 = a_2$  – sprzeczność.

Wartości Shapleya i Banzhafa to zasadniczo ważona średnia tak zwanych *wkładów marginalnych* – dla gracza  $i$  w grze  $(N, f)$  mamy:

$$\sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \omega_i(S)(f(S \cup \{i\}) - f(S))$$

dla pewnych wag  $\omega_i(S)$ . Wartość Shapleya daje podział  $(33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3})$ . Wartość Banzhafa daje podział  $(25, 75, 75)$ , co po znormalizowaniu, aby wartości sumowały się do 200, daje  $(28\frac{4}{7}, 85\frac{5}{7}, 85\frac{5}{7})$ .

Lista  $a = (a_1, \dots, a_n)$  jest większa leksykograficznie niż lista  $b = (b_1, \dots, b_n)$ , jeżeli na pierwszej pozycji, na której listy się różnią, wartość na liście  $a$  jest większa niż na liście  $b$ . Na przykład lista  $(1, 3, 4)$  jest większa niż  $(1, 2, 5)$ .

Przykładowo zysk koalicji  $\{2, 3\}$  to 50, bo według  $x$  otrzymuje ona  $75 + 75 = 150$ , a sama miałaby 100.

Wnikliwemu Czytelnikowi zostawiamy sprawdzenie, czy nukleolus dla pozostałych dwóch wariantów omawianych w Talmudzie, czyli problemów bankructwa  $(100; 100, 200, 300)$  oraz  $(300; 100, 200, 300)$  rzeczywiście daje podziały  $(33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3})$  i  $(50, 100, 150)$ .

Jak możemy zamodelować tę sytuację z użyciem gier koalicyjnych? Możemy przyjąć, że żony są graczami, i każdej grupie żon (czyli koalicji) przypisać kwotę, jaką może sobie ona zagwarantować. Pierwsza żona sama (bez żadnych negocjacji) potrafi osiągnąć wypłatę  $(E - c_2)_+$ , po prostu spłacając całe roszczenie drugiej żony. Analogicznie, druga żona sama może osiągnąć  $(E - c_1)_+$ . Razem żony mają do podziału  $E$ . Dostajemy więc następującą grę koalicyjną:

$S$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1, 2\}$
$f(S)$	0	$(E - c_2)_+$	$(E - c_1)_+$	$E$

Podstawowym zagadnieniem w grach koalicyjnych jest właśnie pytanie o to, jak podzielić się wspólnie uzyskaną wypłatą:  $f(N)$ . Praktycznie wszystkie (rozsadne) metody podziału dla tej gry dają dokładnie taki podział, jaki zdefiniowaliśmy powyżej: każdej żonie dajemy wartość, jaką może osiągnąć sama, a całą resztę dzielimy po równo. Świeśnie, tu podejście teoriogrowe daje to, co chcieliśmy uzyskać!

### Duża żona, duży kłopot

A co, kiedy żon jest więcej? Działajmy analogicznie i każdej grupie żon przypiszmy, ile mogłyby sobie zagwarantować, gdyby spłaciły roszczenia reszty. Dla ogólnego problemu bankructwa  $(E; c_1, \dots, c_n)$  funkcja  $f$  zdefiniowana jest więc następująco:

$$f(S) = (E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i)_+.$$

Popatrzmy na grę, jaka powstanie dla problemu bankructwa  $(200; 100, 200, 300)$ .

$S$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$f(S)$	0	0	0	0	0	0	100	200

Widzimy, że w tej grze druga i trzecia żona mają symetryczne role – tak jak w podziale  $(50, 75, 75)$  opisany w Talmudzie. Ponadto pierwsza żona ma mniejsze znaczenie, co także się zgadza. Dlatego też wszystkie sensowne metody podziału rozważane w grach koalicyjnych przypiszą pierwszej żonie mniej, a pozostałym dwóm żonom tyle samo. Jak jednak dostać konkretnie te wartości? Wartość Shapleya, która pojawiła się na łamach *Depty* już kilkakrotnie, przypisałaby pierwszej żonie  $1/6$  majątku. Wartość Banzhafa (po znormalizowaniu) dałaby pierwszej żonie  $1/7$  majątku. Okazuje się natomiast, że  $1/4$  majątku pierwszej żonie i dokładnie taki wynik jak w Talmudzie daje nukleolus!

O nukleolusie pisaliśmy w artykule *Jak podzielić lody...  $\Delta_{22}^4$* . Dla danego podziału  $x$ , zysk koalicji to jej wypłata pomniejszona o jej wartość w grze:  $e(S, x) = \sum_{i \in S} x_i - f(S)$ . Zyski wszystkich koalicji uporządkowane rosnąco tworzą listę zysków. Nukleolus to taki podział wypłaty, dla którego lista zysków jest maksymalna leksykograficznie. Nukleolus stara się zatem zmaksymalizować zysk koalicji, która zyskuje najmniej.

Popatrzmy na zyski koalicji przy podziale  $x = (50, 75, 75)$  (pomijamy koalicję pustą i koalicję wszystkich żon, bo one mają oczywiście zerowy zysk).

$S$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$
$e(S, x)$	50	75	75	125	125	50

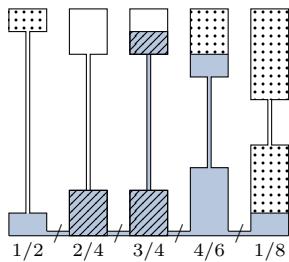
Widzimy, że lista zysków to  $L(x) = (50, 50, 75, 75, 125, 125)$ . Najmniejszy zysk mają koalicje  $\{1\}$  oraz  $\{2, 3\}$ . Czy istnieje podział wypłaty  $y$ , dla którego wektor będzie leksykograficznie większy? Nie, bo przecież jeżeli zmniejszymy wypłatę pierwszej żony  $y_1 < 50$ , to jej zysk spadnie poniżej 50:  $e(\{1\}, y) < 50$ . Z kolei jeżeli zwiększymy  $y_1 > 50$ , to poniżej 50 spadnie zysk koalicji  $\{2, 3\}$ :  $e(\{2, 3\}, y) < 50$ . Musi zatem być  $y_1 = 50$  oraz  $y_2 + y_3 = 150$ . Druga i trzecia żona uzyskane 150 muszą podzielić po równo, aby kolejny zysk, jaki pojawia się na liście zysków, nie był mniejszy niż 75.

Jak wygląda nukleolus dla dowolnej liczby żon i dowolnych roszczeń? Okazuje się, że dokładnie tak, jak podział z metody Aumannna i Maschlera. Czemu? To teraz pokażemy.

## Dowód hydroaerobowy

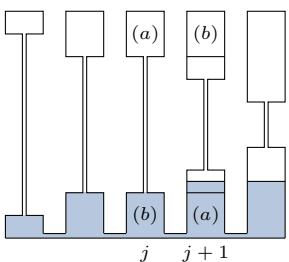
Precyzyjniej, jeżeli  $\hat{x}$  jest nukleolusem dla problemu odwrotnego, to  $(c_i - \hat{x}_i)_{i \in N}$  jest nukleolusem dla oryginalnego. Aby to pokazać, w poniższym dowodzie wystarczyłoby zamienić wodę z powietrzem.

Dla problemu bankructwa  $(10; 2, 4, 4, 6, 8)$  poniższy układ hydrauliczny prezentuje podział  $y = (1, 2, 3, 4, 1)$ . Zysk koalicji  $S = \{2, 3\}$  to  $e(S, y) = 5$ , jest to bowiem koalicja wodna: ilość wody w naczyniach żon z  $S$  (zakreskowany obszar) jest mniejsza niż ilość powietrza w pozostałych naczyniach (zakropkowany obszar). Koalicją powietrzną jest np.  $S = \{3, 4, 5\}$ .

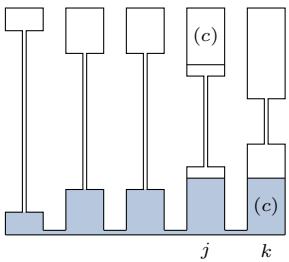


Wnioskiem z naszej analizy jest zatem fakt, że zysk koalicji jest mniejszą z wartości „ilość wody w naczyniach żon z koalicji” oraz „ilość powietrza w naczyniach pozostałych żon”:  $e(S, x) = \min\left\{\sum_{i \in S} x_i, \sum_{i \in N \setminus S} (c_i - x_i)\right\}$ .

Podział  $x$ , jaki dostaniemy z powyższego  $y$ , jeżeli odblokujemy rurki łączące naczynia. Pierwszą pozycję, na której podziały się różnią, jest  $j = 3$ . Obszary oznaczone (a) i (b) pokazują, że koalicje  $\{j\}$  oraz  $N \setminus \{j\}$  są odpowiednio wodne i powietrzne.



Gdyby podział  $y$  różnił się na kolejnej pozycji (np.  $y = (1, 2, 2, 2, 3)$ ), to kluczowy jest fakt, że wodną koalicją jest  $\{k\}$ , co pokazują obszary (c).



Dowód na podstawie artykułu:  
Benoit, Jean-Pierre, "The nucleolus is contested-garment-consistent: a direct proof", Journal of Economic Theory 77.1 (1997): 192–196.

Skupimy się na przypadku, kiedy  $E \leq C/2$ : jeżeli  $E > C/2$ , to łatwo można wykazać, że nukleolus dla problemu odwrotnego  $(C - E; c_1, \dots, c_n)$  jest dopełnieniem nukleolusa dla oryginalnego problemu.

Weźmy dowolny podział  $x$ . Zablokujmy rurki łączące naczynia w systemie hydraulicznym i wlejmy wodę tak, aby odpowiadała podziałowi  $x$ . Czym jest teraz zysk koalicji  $S$ ? Mamy dwa przypadki. Koalicję  $S$  nazwiemy *wodną*, jeżeli majątek nie przekracza roszczenia żon spoza  $S$ :  $E \leq \sum_{i \in N \setminus S} c_i$ . Mamy wówczas  $f(S) = 0$  i zysk tej koalicji jest równy ilości wody w naczyniach żon z  $S$ :  $e(S, x) = \sum_{i \in S} x_i$ . Koalicję nazwiemy *powietrzną*, jeżeli majątek jest nie mniejszy niż roszczenia pozostałych żon:  $E \geq \sum_{i \in N \setminus S} c_i$ . Jak pokazują poniższe obliczenia, zysk tej koalicji jest natomiast równy ilości powietrza w naczyniach pozostałych żon:

$$e(S, x) = \sum_{i \in S} x_i - f(S) = (E - \sum_{i \in N \setminus S} x_i) - (E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i) = \sum_{i \in N \setminus S} (c_i - x_i).$$

Jak poznać, jakiego typu jest koalicja  $S$ ? Musimy sprawdzić, czy cała woda zmieściłaby się w naczyniach żon spoza  $S$ . W tym celu dla dowolnego ułożenia wody w naczyniach wystarczy porównać ilość wody w naczyniach żon z  $S$  oraz ilość powietrza w pozostałych naczyniach. Jeżeli wody jest mniej niż powietrza, to woda się mieści, więc mamy koalicję wodną. Jeżeli powietrza jest mniej niż wody, to woda się nie mieści, i mamy koalicję powietrzną. Jeżeli jest tyle samo, to koalicja jest wodno-powietrzna (i wodna, i powietrzna).

Niech teraz  $x$  będzie podziałem z metody Aumannna i Maschlera, a  $y$  dowolnym innym podziałem. Udowodnimy, że lista zysków dla  $y$  jest leksykograficznie mniejsza niż dla  $x$ . Niech  $j$  będzie pierwszą pozycją, na której oba podziały się różnią. Zastanówmy się, które koalicje  $S$  przy podziale  $x$  mają zysk mniejszy niż  $x_j$ ?

- Jeżeli  $S$  jest koalicją wodną, to aby jej zysk był mniejszy niż  $x_j$ , nie może ona zawierać żony  $j$  ani żadnej kolejnej (bo  $x_k \geq x_j$  dla  $k > j$ ). Stąd wniosek, że  $S$  jest podzbiorem  $\{1, \dots, j-1\}$  i jej zysk według  $x$  i  $y$  jest taki sam.
- Jeżeli  $S$  jest koalicją powietrzną, to aby jej zysk był mniejszy niż  $x_j$ , to ani  $j$ , ani żadna kolejna żona nie może być poza  $S$ . Stąd wniosek, że  $S$  zawiera  $\{j, \dots, n\}$  oraz podzbiór  $\{1, \dots, j-1\}$  i też ma taki sam zysk według  $x$  i  $y$ .

Ta analiza pokazuje, że każda koalicja, która ma mniejszy zysk niż  $x_j$  według podziału  $x$ , ma identyczny zysk według podziału  $y$ . Aby wykazać, że lista zysków dla  $y$  jest leksykograficznie mniejsza niż dla  $x$ , wskażemy koalicję, która według  $y$  ma mniejszy zysk niż  $x_j$ , a według  $x$  nie.

- (a) Jeżeli  $x_j = c_j/2$  oraz  $y_j < x_j$ , to taką koalicją jest  $\{j\}$ . Jest to koalicja wodna, co łatwo zobaczyć, odblokowując rurki łączące naczynia, czyli w podziale  $x$ : ilość wody w jej naczyniu jest wówczas mniejsza bądź równa ilości powietrza w naczyniu kolejnej żony. Jej zysk to zatem  $y_j < x_j$ .
- (b) Jeżeli  $x_j = c_j/2$  oraz  $y_j > x_j$ , to taką koalicją jest  $N \setminus \{j\}$ . Ta koalicja na pewno jest bowiem koalicją powietrzną: ponownie odblokowując rurki, widzimy, że w podziale  $x$  kolejna żona sama ma co najmniej tyle wody, ile powietrza ma żona  $j$ . Jej zysk to zatem  $c_j - y_j < x_j$ .
- (c) W końcu jeżeli  $x_j < c_j/2$ , to  $j$ -ta żona i wszystkie kolejne dostają w  $x$  tyle samo:  $x_j$ . Skoro  $y$  różni się od  $x$  dopiero na pozycji  $j$ -tej, to  $j$  albo któraś z dalszych żon, powiedzmy  $k$ , musi dostawać mniej niż  $x_j$ . Wówczas szukaną koalicją jest  $\{k\}$ : jest to koalicja wodna, bo według podziału  $x$  woda z jej naczynia nawet nie dopełni naczynia  $j$ -tej żony (lub kolejnej, jeżeli  $j = k$ ). Jej zysk to zatem  $y_k < x_j$ .

To kończy dowód.

Czy autorzy Talmudu znali pojęcie gier koalicyjnych i nukleolusa? Jest to raczej mało prawdopodobne. Niewątpliwie udało im się jednak wpłynąć na rozwój teorii gier koalicyjnych, mimo że (zgodnie z dostępną aktualnie wiedzą) powstała ona dwa tysiące lat później.

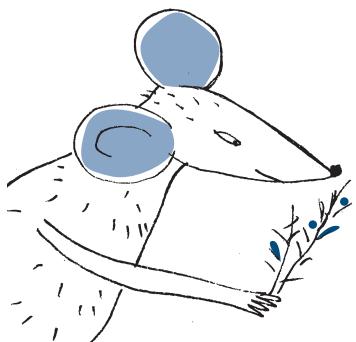
## Jak żyć tak wysoko, jak?

Jest zimno. Wieje wiatr. Pada śnieg. Trudno oddychać. Chce się jeść, a tu tylko porosty pod śniegiem. Jak żyć?

Życie na Ziemi może trwać w różnych warunkach. Najlepiej przystosowujące się do warunków skrajnych są mikroorganizmy zwane ekstremofilami. Znajdujemy je w skrajnych temperaturach (gejzerach i na biegunie zimna), pod wysokimi ciśnieniami (głębiny oceanów), w rejonach wysokiej radiacji, zasolenia, środowiskach kwaśnych i zasadowych, wykryto je nawet w asfaltowym jeziorze na wyspie Trynidad. Badania tych skrajnie dziwnych organizmów rozszerzają wiedzę o życiu, ale też umożliwiają wykorzystanie ich w różnych celach – od rekultywacji zanieczyszczonych terenów (pokopalniane hałdy, wylewy ropy naftowej na oceanach) do produkcji enzymów dla pralnictwa, a także pożytecznych i rzadkich odczynników. Być może początki życia na Ziemi należą lokalizować w ekstremalnych warunkach...

Dotychczasowa wiedza o ekstremofilnych organizmach i częsteczkach w nich zawartych nie pozwalała zrozumieć, jakim to sposobem skrajne warunki nie uszkadzają ważnych dla życia struktur i procesów. Dzięki badaniom molekularnym udało się, choć częściowo, zrozumieć niektóre z mechanizmów ochronnych. Przyjmuje się, że ewolucja doprowadziła do niewielkich mutacji w genach kodujących białka ekstremofili. Zmiany te poskutkowały istotnymi modyfikacjami przestrzennej struktury łańcuchów białkowych, które stały się odporne na skrajne warunki. Dane takie uzyskali biofizycy badający zjawisko zależności funkcji białka od przestrzennego zwinięcia jego łańcucha.

Wiemy już bardzo dużo o liczbie i rodzajach gatunków mikroorganizmów ekstremofilnych, natomiast od dawna mieliśmy przekonanie, że wśród ssaków takie skrajne formy gatunkowe nie występują (chyba że wierzyliśmy w yeti). Tymczasem trzy lata temu zdumieni naukowcy eksplorujący wysokie Andy zaobserwowali na zboczach wygasłego wulkanu, na wysokości 6700 m n.p.m. – mysz! Temperatura nigdy nie wzrasta tam powyżej temperatury topnienia lodu, a stężenie tlenu osiąga 40% stężenia na poziomie morza. Przypadek jednostkowy?



Sądzone, że najwyżej dziko żyjące ssaki to jaki (5000 m n.p.m.) i górskie króliki na zboczach Everestu (6200 m n.p.m.). Nieprzyjazne warunki nie pozwalają na wytwarzanie przez mały, stałocieplny organizm wystarczających zapasów energii. Co prawda od 50 lat znane były zmumifikowane przez mróz myszy znajdowane na wysokościach, w miejscach kultu religijnego Inków, sądzono jednak, że jako takie były wnoszone tam przez kapłanów i wiernych.

A jednak spotkania z żywymi wysokogórskimi myszami powtórzyły się, oznaczono ich gatunek jako *Phyllotis vaccarum*. Aby uzyskać więcej informacji, w 2020 roku w Andy wyruszyły ekspedycje badawcze obejmujące region 21 andyjskich szczytów. Powyżej 6000 m n.p.m. odnaleziono 13 zmumifikowanych myszy, pojmano także 500 żywych, reprezentujących 18 różnych gatunków. Ponieważ mieszkają one 650 m wyżej, niż przebiega granica roślinnego wzrostu, zbadano DNA pobrany z ich żołądków. Na podstawie tych analiz wyciągnięto wniosek, że jedynym źródłem pokarmu znalezionych w Andach „liściouchów” (*Phyllotis*) są porosty.

Naukowcy utworzyli także imitującą warunki wysokogórskie laboratoryjną hodowlę tajemniczych andyjskich gryzoni, co umożliwiło dalszą, dokładniejszą ich obserwację. Teraz do pracy zabrali się genetycy. Myszy posegregowano na grupy w zależności od wysokości, na jakiej zostały schwytane. Ku zdziwieniu ekologów, oczekujących odkrycia nawet nowych gatunków, genomy tak pogrupowanych myszy niewiele różniły się między sobą oraz od genomu myszy żyjącej na poziomie morza. Najwyżej mieszkające myszy różniły się genetycznie wewnętrz grupy mniej niż analizowane myszy z nizin. Takie fakty sugerują, iż ewolucja tej

grupy zwierząt zaczęła się raczej od ekstremofili żyjących wysoko, które stopniowo migrowały w doliny. Taka „odwrócona” ewolucja.

Czytając o tych zadziwiających myszach (mają uszka przypominające kształtem liście), pomyślałam także o przyszłych (?) podróżach międzyplanetarnych i możliwym pozytku płynącym z badań ekstremofilnych ssaków. Ale może już lepiej pozostać w warunkach standardu na Ziemi... i zadbać o jej (Ziemi) i nasz (ludzi) ekologiczny komfort?

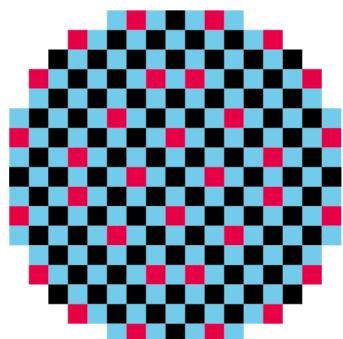
*Magdalena FIKUS* (magda.fikus@gmail.com)

# Gotów? Start! Rozruch reaktora jądrowego

\* Doktorant, Centrum Fizyki Teoretycznej  
PAN

Energetyka jądrowa przeżywa renesans, a jej główną misją jest zapewnienie takiej stabilności wytwarzania energii elektrycznej, jakiej nie dają odnawialne źródła energii. O roli energetyki jądrowej można przeczytać chociażby w: A. Strupczewski, *Energetyka jądrowa koniecznym elementem elektroenergetyki polskiej*, „ACADEMIA. Magazyn Polskiej Akademii Nauk” nr 1(65), 2021.

Szerzej o konstrukcji reaktora pisał Przemysław Olbratowski w  $\Delta_{12}^3$ .



Schemat rdzenia reaktora jądrowego na przykładzie reaktora EPR projektu francusko-amerykańskiego, widok z góry. Niebieskie i czerwone pola to miejsca na pręty paliwowe. W każdym takim polu znajduje się 265 prętów o długości około 4,5 m, zawierających łącznie ponad 150 kg dwutlenku uranu. Czarne pola to miejsca na 24 pręty regulacyjne. Na podstawie Framatome ANP, Inc., *EPR Design Description*, 2005.

Jakub KOPYCIŃSKI\*

Wsiadam do auta, zapinam pasy, wciskam przycisk START/STOP (lub przekręcam kluczyk w stacyjce). W tym czasie rozrusznik pobiera energię elektryczną z akumulatora i przekształca ją w mechaniczną, m.in. obraca wał korbowy i rozpoczyna pracę silnika spalinowego. (Tak w dużym uproszczeniu). A co się dzieje, kiedy chcemy uruchomić nie stukonny silnik w aucie, ale reaktor jądrowy o dziesiątki tysięcy razy większej mocy?

Tylko w latach 2023 i 2024 na całym świecie przyłączono do sieci elektroenergetycznej (lub trwają przygotowania do takiego przyłączenia) prawie piętnaście nowych bloków jądrowych. Powstały one m.in. w Chinach, Stanach Zjednoczonych, a trochę bliżej Polski – we Francji (Flamanville 3), Finlandii (Olkiluoto 3) i na Białorusi (Ostrowiec 2). Wygląda na to, że coraz częściej nagłówki artykułów będą informowały: „Nowy blok jądrowy ruszył!”.

Żeby odpowiedzieć na pytanie, jak wygląda rozruch reaktora, przypomnijmy pokrótko, jak to urządzenie jest skonstruowane. Otóż typowy rdzeń reaktora (patrz rysunek) składa się z prętów paliwowych zawierających zazwyczaj dwutlenek uranu. Pomiędzy nimi ułożone są pręty regulacyjne. Całość z kolei znajduje się w zbiorniku wypełnionym wodą.

Kiedy reaktor pracuje, neutron uderza w jądro uranu-235, powodując rozszczepienie tego jądra i produkcję kolejnych dwóch albo trzech neutronów oraz dużej ilości energii, miliony razy większej niż otrzymana w wyniku spalenia jednego atomu węgla. Takich reakcji następuje mnóstwo, a w ich wyniku woda zamienia się w parę, para napędza turbiny, a te z kolei generator produkujący energię elektryczną. Neutrony wyprodukowane w wyniku rozszczepienia mogą trafić w kolejne jądra i w ten sposób podtrzymywana jest reakcja łańcuchowa. Żeby reakcja ta nie była zbyt gwałtowna, część neutronów pochłaniana jest przez pręty regulacyjne. Im głębiej do reaktora wpuszczamy te pręty, tym więcej neutronów jest w nich zatrzymywanych. Pozostaje pytanie – skąd bierze się pierwszy neutron, pierwsze ogniwo tego łańcucha?

Wyobraźmy sobie, że mamy ważący kilkaset ton rdzeń załadowany świeżymi prętami paliwowymi. Czy nie wystarczy podnieść prętów regulacyjnych, by reakcja łańcuchowa zaszła samoczynnie? Przecież uran jest naturalnie promieniotwórczy. Otóż potrzeba czegoś na kształt rozrusznika, silniejszego źródła, które wpompuje duży strumień neutronów do środka. Do tego służy na przykład kaliforn-252.

Czemu akurat ten izotop? Po pierwsze uran rozpada się samorzutnie dużo rzadziej niż kaliforn. Po wtóre zaś, w wyniku rozpadu jądra uranu powstaje średnio mniej neutronów niż w przypadku kalifornu. Sam uran produkuje zbyt mało neutronów, by rozpocząć i podtrzymać reakcję łańcuchową. Ta stosunkowo mała aktywność uranu ma swoje dobre strony. Dzięki niej pracownicy zakładów produkujących paliwo jądrowe mogą bezpiecznie operować nawet całymi prętami paliwowymi.

W ten sposób możemy uruchomić reaktor i doprowadzić go do stanu krytycznego. Jest to, wbrew swej nazwie, stan bardzo pożądany, w którym reakcja przebiega stabilnie, ani nie przyspiesza (co może prowadzić do utraty kontroli), ani nie spowalnia (co z kolei spowodowałoby potencjalnie jego wygaśnięcie). Raz załadowany reaktor jest w stanie pracować od półtora roku do dwóch lat. Po tym okresie reaktor wyłącza się, a około 1/3 prętów paliwowych wymienia na nowe. Warto dodać, że przy ponownym włączeniu nasz kalifornowy rozrusznik nie jest niezbędny. W używanym paliwie odkładają się atomy chociażby ameryku, neptunu czy plutonu, które mają już potencjał rozpoczęcia kolejnego cyklu reaktora.



## Rozwiążanie zadania M 1768.

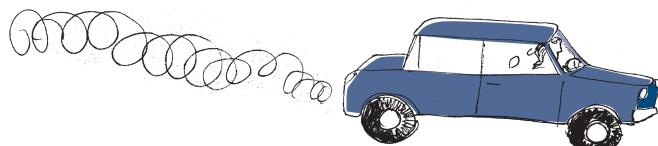
Wystarczy zauważyc, że

$$\begin{aligned} n &= x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \\ &= (x-z)^2 + (y-z)^2 - (x-z)(y-z). \end{aligned}$$

Nie wspomniałem jeszcze o bardzo ważnym zagadnieniu, ba, w dzisiejszym przemyśle jądrowym absolutnie priorytetowym – o bezpieczeństwie. Zanim reaktor w ogóle zostanie uruchomiony, podlega rygorystycznym testom. Sprawdza się zachowanie reaktora w przypadkach takich, jak awaria turbiny, utrata zewnętrznego zasilania czy problem z obiegiem wody chłodzącej – właściwie we wszystkich istotnych sytuacjach związanych zarówno z normalną eksploatacją, jak i awariami elektrowni.

Przy okazji opowiadamy, jak dokonać wyłączenia reaktora. Dokonuje się tego poprzez użycie prętów regulacyjnych. Opuszczając je, wygaszamy powoli reakcję łańcuchową. W przypadku awarii reaktor powinien wyłączyć się automatycznie. Należy pamiętać, że nawet wygaszony reaktor nadal wydziela energię zwaną ciepłem powyłączniowym. Musi być ono odprowadzane za pomocą układów chłodzenia, mimo że po wyłączeniu moc reaktora spada do ułamków procenta mocy, z którą na co dzień pracuje.

Świeżo wybudowane bloki jądrowe będą mogły pracować przez ponad pół wieku, dając ludziom i przemysłowi dostęp do energii elektrycznej nieprzypłacanej emisjami gazów cieplarnianych. Część z nich zastąpi stopniowo już wyłączone reaktory poprzedniej generacji, a inne – tak jak w przypadku Polski – będą pierwszymi tego typu obiektami w historii swojego kraju.



## Problemy z dowodem prawa pól w *Principiach Newtona*?

*Grzegorz ŁUKASZEWICZ\**

*Artykuł ten poświęcam pamięci profesora Tadeusza Nadziei, bliskiego kolegi, fascynata historii matematyki.*

Twierdzeniem, od którego zaczynają się *Principia*, jest następujący fundamentalny rezultat.

**Teza I. Twierdzenie I. Księga I** (prawo pól). *Powierzchnie zakreślone przez pociągnięte do nieruchomych centrów sił promienie wodzące krążących ciał leżą we wspólnych płaszczyznach i są proporcjonalne do czasów, w których są zakreślone.* [Newton, 2015]

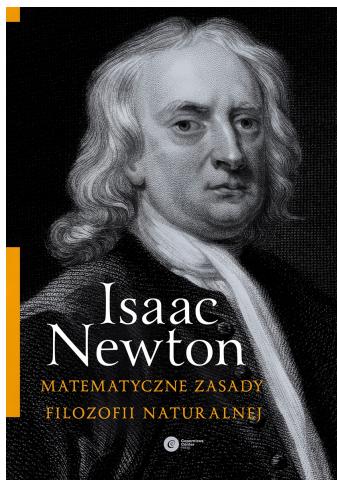
Chodzi tu o *centralne pole sił*, a więc układ, w którym siła działająca na ciało  $P$  jest proporcjonalna do wektora  $\vec{OP}$  (wektora *wodzącego*), gdzie  $O$  jest ustalonym punktem (*centrum siły*). Wówczas w równych odstępach czasu wektor wodzący zakreśla figurę o równym polu. Możemy rozsądnie przyjąć, że Newtonowi chodziło o dowolne ciągłe pola sił i gładkie orbity. Celem *Principiów* było bowiem badanie realnego świata fizycznego, w szczególności Układu Słonecznego, a nie budowanie abstrakcyjnej teorii matematycznej. Przykładem opisanej tu sytuacji jest drugie prawo Keplera, w którym centrum siły jest umieszczone w nieruchomym Słońcu, a ciałami przyciąganyimi przez nie są planety poruszające się po orbitach eliptycznych (rys. 1).

Michael Nauenberg w [Nauenberg, 2003] napisał, że „Słusznie uważa się tę tezę za kamień węgielny *Principiów*, ponieważ proporcjonalność między obszarem omiatanym przez wektor promienia orbity a upływającym czasem umożliwiła Newtonowi rozwiązywanie problemów dynamicznych metodami czysto geometrycznymi, uzupełnionymi przez argumenty ciągłego przejścia do granicy, które sam rozwinał”.

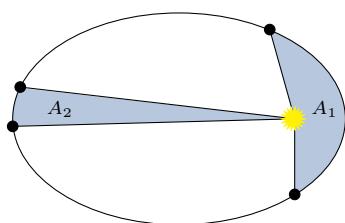
Odnosząc się do drugiego prawa Keplera, twierdzimy:

*Własność 1.* ruch odbywa się w nieruchomej płaszczyźnie;

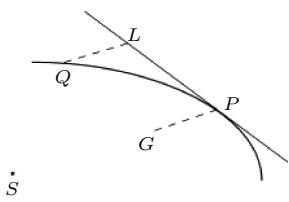
*Własność 2.* pola powierzchni zakreślonych przez promień wodzący są proporcjonalne do czasów, w których są zakreślone.



Isaac Newton, *Matematyczne Zasady Filozofii Naturalnej*, Copernicus Center Press, 2015



Rys. 1. Drugie prawo Keplera to szczególny przypadek prawa pól



Rys. 2. Ruch po trajektorii  $PQ$  to odchylenie ruchu bezwładnego w kierunku  $PL$  spowodowane ciągłą siłą działającą w kierunku centrum  $S$ . Po pewnej chwili  $h$  ciało znajduje się w punkcie  $Q$  (zamiast w punkcie  $L$ ). Miarą tej siły w punkcie  $P$  jest granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\vec{L} \vec{Q} / h^2).$$

Odchylenie wzdłuż przekątnej  $PQ$  równoległoboku  $PGQL$  odpowiadałoby hipotetycznej sile *impulsowej* w punkcie  $P$ , dla której powyższa granica jest nieskończona.



#### Rozwiążanie zadania F 1087.

Posłużymy się analizą wymiarową, zakładając, że poszukiwana zależność ma postać:

$$f = A \rho^a \gamma r^c.$$

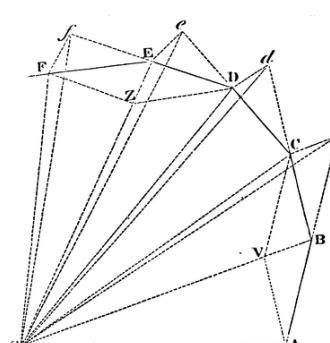
Uzgodnijmy wymiary lewej i prawej strony równania na  $f$ .  $A$  jest bezwymiarową stałą. W układzie SI  $f$  ma wymiar  $1/s$ ,  $\rho$  ma wymiar  $kg/m^3$ , a  $\gamma$  wymiar  $N/m = kg/s^2$ . Przyrównując potęgi, w jakich jednostki  $s$ ,  $kg$  i  $m$  występują po obu stronach zależności, otrzymujemy układ równań:

$2b = 1$ ;  $a + b = 0$ ;  $c - 3a = 0$ , którego rozwiązaniem są:  $b = -a = 1/2$  oraz  $c = 3a = -3/2$ . Ostatecznie:

$$f = A \sqrt{\frac{\gamma}{\rho r^3}}.$$

Analiza wymiarowa nie pozwala wyznaczyć współczynnika  $A$ . Jego wartość zależy od rodzaju drgania (odkształcenia względem powierzchni sferycznej). Odpowiednie wzory podał Lord Rayleigh (*Proceedings of the Royal Society of London* **29**, 1129 (1879)). Dla drgania „podstawowego” (tj. o najniższej częstotliwości)  $A = \sqrt{8}/(2\pi) \approx 0,45$ .

Metoda „drżącej kropli” jest stosowana do wyznaczania współczynnika napięcia powierzchniowego cieczy, np. ciekłych metali. Pomiar szybkości tłumienia drgań pozwala dodatkowo, w tym samym pomiarze, wyznaczyć także lepkość cieczy.



Rys. 3. Aproxymacja orbity

## Analityczny dowód prawa pól

Współczesny dowód Twierdzenia I, standardowo przytaczany w podręcznikach fizyki, opiera się na pokazaniu, że wektor momentu pędu  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  ciała o masie  $m$  poruszającego się w centralnym polu sił  $\vec{f}$  nie zmienia się w czasie; jest to równoważne tezie Twierdzenia I.

Dowód jest następujący. Różniczkując  $\vec{L}$  względem czasu, otrzymujemy:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0,$$

gdzie  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$  oraz  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$ , a iloczyn wektorowy wektorów współliniowych jest równy zeru. To oznacza, że wektor  $\vec{L}$  jest niezmienny w czasie. Stałość jego zwrotu dowodzi *własności 1*, a stałość jego długości – *własności 2*.

## Trudności interpretacyjne Principiów

Wobec nieostrości określeń w Twierdzeniu I, w jego dowodzie przedstawionym poniżej, a także w całych *Principiach*, Czytelnikowi należą się pewne wyjaśnienia. Otóż w swoim *opus magnum* Newton określa podstawowe pojęcia nie zawsze w tych miejscach, w których powinny być precyzyjnie zdefiniowane, według naszych standardów. Robi to jakby przy okazji, przeważnie tam, gdzie ich używa w subtelniejszych dowodach. Nierazdrożna trzeba rozszerzać, jakie znaczenie danego określenia miał na myśli. Na przykład komentatorzy nie są zgodni, czy w podstawowym dla całej teorii drugim prawie ruchu siła jest *impulsowa*, czy *ciągła* [Pourciau, 2016]. Należy się wielu rzeczy doszukiwać z kontekstów rozrzuconych po całych *Principiach*. Dotyczy to też pojęcia siły użytego w powyższym twierdzeniu. Stąd właśnie, paradoksalnie, *Principia* są dziełem aktualnym, żywym i inspirującym, dziełem *otwartym*. Inspirują one każdą kolejną generację w nieco odmienny sposób, właśnie dzięki obecnym w nich możliwościach interpretacyjnych, „dziurach” czy pozornych sprzecznościach, oczywiście w połączeniu z rewolucyjnym charakterem samego dzieła. Notabene opisane wyżej właściwości *Principiów*, przełomowego dzieła naukowego, są wspólne także dla wielu najwybitniejszych dzieł religii, filozofii i literatury.

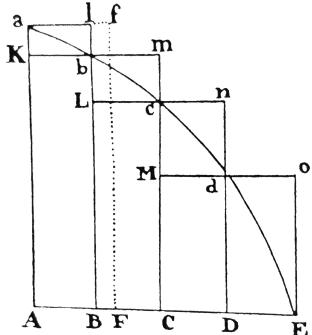
Na potwierdzenie faktu, że deszyfracja, bo tak trzeba nazwać odczytywanie *Principiów*, jest bardzo trudna nawet dla znawców przedmiotu, podajemy dwa konkretne przykłady. W artykule [Nauenberg, 1994] przedstawione są (wraz z obszernym komentarzem) dwie różne opinie dotyczące kwestii podstawowej: czy w *Principiach* znajduje się dowód, że prawo grawitacji Newtona implikuje orbity stożkowe? Natomiast w artykule autora z  $\Delta_{20}^{10}$  zarysowana jest historia słynnego Lematu XXVIII w *Principiach*, dotyczącego niewspółmierności pola wycinka owalu i opisującej ten wycinek prostej, gdzie trwające ponad trzy stulecia zarzuty wobec jego dowodu znikają dopiero po zrozumieniu, co Newton uważa za oval.

W tym artykule skupimy się głównie na rozważaniach dotyczących *Własności 1*.

## Dowód prawa pól w Principiach

Poniższy dowód Twierdzenia I, przedstawiony przez Newtona w *Principiach*, jest opatrzony rysunkiem 3.

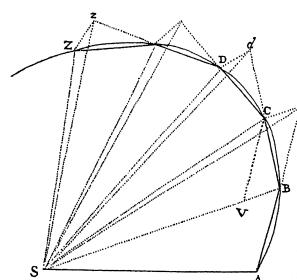
Załóżmy, że czas podzielono na jednakowe części i niech w pierwszej części tego czasu ciało – pod działaniem bezwładności (*vis insita*) – porusza się po odcinku  $AB$ . W drugiej części tego czasu, przy braku bodźca, ruch zostalby, na podstawie pierwszego prawa Newtona, podobnie przedłużony prosto do  $c$  wzdłuż odcinka  $Bc$ , równego odcinkowi  $AB$ , tak więc promienie  $AS$ ,  $BS$ ,  $cS$ , pociągnięte do centrum, wyznaczyłyby jednakowe powierzchnie  $ASB$  i  $BSc$ . Założymy jednakże, że gdy ciało pojawia się w  $B$ , działa na nie nagle mocny impuls siły dośrodkowej, który odchylając ciało z prostej linii  $Bc$ , zmusza je do kontynuowania ruchu wzdłuż prostej linii  $BC$ . Narysujmy odcinek  $cC$  równoległy do  $BS$  i przecinający się z  $BC$  w punkcie  $C$ . [Na mocy Wniosku 1 z Praw], na



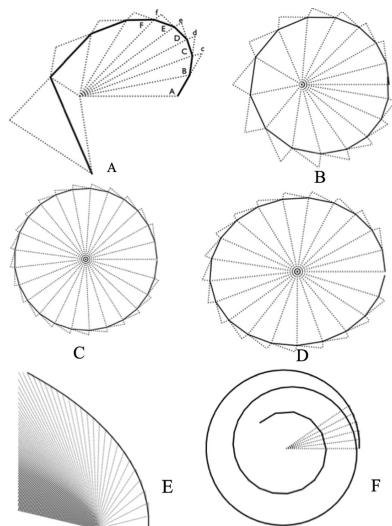
Rys. 4. Rysunek do Lematu III, Księgi I, pokazujący aproksymację pola pod ciągłą krzywą przez sumę pól prostokątów w nią wpisanych i na niej opisanych.

W Lemacie III Newton dowodzi, że gdy podstawy tych prostokątów są coraz mniejsze, to obie sumy dążą (z dolu i z góry, odpowiednio) do pola pod krzywą  $a, c, E$ .

końcu drugiej części czasu ciało znajdzie się w  $C$ , we wspólnej płaszczyźnie z trójkątem  $ASB$ . Połączmy  $S$  i  $C$  i zauważmy, że skoro  $SB$  i  $Cc$  są równoległe, to powierzchnia trójkąta  $SBC$  będzie równa powierzchni trójkąta  $SCb$  i stąd równa też powierzchni trójkąta  $SAB$ . Z podobnych przyczyn, jeżeli siła dośrodkowa działa kolejno w punktach  $C, D, E$  itd. i zmusza ciało w każdej pojedynczej chwili czasu do zakreślania prostych odcinków  $CD, DE, EF$  itd., wszystkie one będą leżały w tej samej płaszczyźnie, a powierzchnia trójkąta  $SCD$  będzie równa powierzchni trójkąta  $SBC$ , powierzchnia  $SDE$  równa powierzchni  $SCD$ , powierzchnia  $SEF$  równa powierzchni  $SDE$ . I dlatego w jednakowych czasach są zakreślone jednakowe powierzchnie leżące w jednej nieruchomej płaszczyźnie i – na zasadzie łączenia – wszelkie sumy tych powierzchni, takie jak  $SADS, SAFS$ , mają się do siebie tak, jak czasy, w których są zakreślone. Niech teraz liczba tych trójkątów będzie zwiększena, a ich szerokość zmniejszona *in infinitum*. [Na podstawie Wniosku 4 z Lematu III] ich ostateczna zewnętrzna granica  $ADF$  będzie linią krzywą i dlatego siła dośrodkowa, przez którą ciało jest ustawnicze odciągane od stycznej do tej krzywej, będzie działała w sposób ciągły, a każda z zakreślonych powierzchni  $SADS, SAFS$ , które są zawsze proporcjonalne do czasów zakreślania, będzie – również w tym przypadku – proporcjonalna do tych czasów. Q.E.D. [Newton, 2015].



Rys. 5. Orbita i jej aproksymacja



Rys. 6. Aproksymacje orbit w polu siły centralnej proporcjonalnej.

(1) do  $\frac{1}{r^2}$ : (A) – diagram z *De Motu* Newtona, rozszerzony o 4 dodatkowe impulsy, (B), (E) – orbita eliptyczna i hiperboliczna z centrum siły w ich ogniskach, (2) do  $\frac{1}{r^3}$ : (F) – orbita spiralna ( $\ln r = a\theta$ ), (3) do  $r$ : (C) – orbita kołowa z centrum siły w środku okręgu, (D) – orbita eliptyczna z centrum siły w środku elipsy. [Nauenberg, 2018]

Od czasu publikacji *Principiów* dowód ten był i nadal jest komentowany, krytykowany lub broniony przez kolejnych autorów. Pierwsze zarzuty, jakie sformułowano wobec dowodu Twierdzenia I – poczynając od samego Edmonda Halleya, promotora *Principiów* – dotyczyły argumentu przejścia do granicy w jego końcowym fragmencie, rozpoczynającym się od słów *Niech teraz liczba tych trójkątów będzie zwiększena, a ich szerokość zmniejszona in infinitum*. Rzeczywiście, argumentacja Newtona jest tu dość enigmatyczna. Pewne uzupełnienie tego fragmentu dowodu zaproponowane jest w [Nauenberg, 2003].

### Zastrzeżenia wobec dowodu *Własności 1*

Całkiem niedawno Bruce Pourciau [Pourciau, 2016] stwierdził, że w dowodzie jest luka natury logicznej i dotyczy własności „ruch odbywa się w nieruchomej płaszczyźnie”. Natomiast po przesunięciu tej własności z tezy do założeń Twierdzenia I dowód Newtona można już przedstawić precyzyjnie, dokonując niewielkich zmian i uzupełnień. Taka modyfikacja prawa pól oczywiście je osłabia. Gdybyśmy mogli poprosić Sir Isaaca o uzupełnienie jego własnego dowodu, może by nam pomógł, gdyż luka wygląda na istotną.

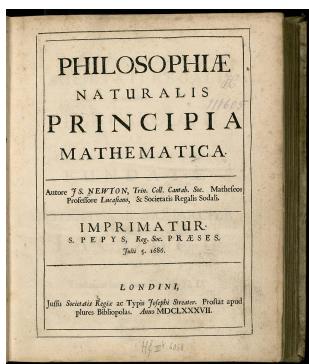
Zauważmy bowiem, że *nawet gdybyśmy nie wyrażali ewentualnych zastrzeżeń wobec argumentu przejścia do granicy*, to na podstawie odniesienia do Wniosku 4 z Lematu III w dowodzie Twierdzenia 1 oraz samego Lematu III opatrzonego rysunkiem 4 możemy wnioskować, iż Newton *milcząco założył*, że wielokąt  $A, B, C, D, E, F, \dots$  jest wpisany w ciągłą orbitę poruszającą się ciała. W takim razie sama orbita jest płaska, ale to właśnie należy pokazać. *Konstrukcja Newtona dotyczyłaby zatem tylko orbit płaskich dających się aproksymować, w sensie pola, wielokątami w nie wpisanymi.*

Czy Newton mógłby popełnić tak elementarny błąd? Wydaje się to mało prawdopodobne.

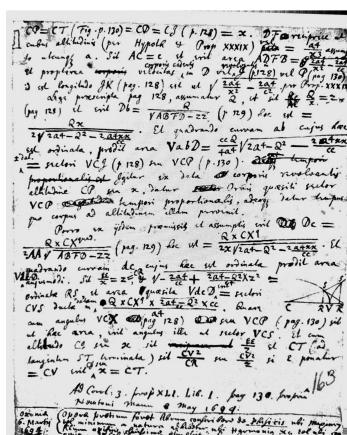
### Szkic dowodu prawa pól w wersji osłabionej

Jak można doprecyzować powyższy dowód prawa pól przy założeniu, że orbity leżą w nieruchomych płaszczyznach? Pourciau zaproponował odpowiednie przeformułowanie dowodu [Pourciau, 2016], które tutaj zarysujemy.

Należy zacząć od orbity. Niech pierwsze ciało porusza się w polu centralnym wokół punktu  $S$ , po płaskiej orbicie. Założymy, że w czasie od  $0$  do  $\Delta t$  pokonuje ono łuk  $AB$  (patrz rys. 5). Przymijmy teraz, że drugie ciało, identyczne z pierwszym, pokonuje w tym samym czasie drogę z  $A$  do  $B$  ruchem jednostajnym po odcinku. Gdyby pozostało bezwładne, w odstępie  $\Delta t$  pokonałoby odcinek  $Bc$  takiej samej długości. Założymy jednak, że w chwili  $\Delta t$



Rys. 7. Strona tytułowa pierwszego wydania *Principiów*, Londyn 1687



Rys. 8. Część listu Newtona napisanego do Davida Gregory'ego w 1694 r., wyjaśniającego, jak postępować w przypadku odwrotnego sześcianu użytego we Wniosku III

działa na nie impuls siły dośrodkowej, zmieniając jego prędkość o wektor równoległy do  $SB$  w taki sposób, że odcinek  $BC$  pokonany w odstępie  $\Delta t$  kończy się ponownie na docelowej orbicie. Równość pól trójkątów  $SAB$ ,  $SBc$ ,  $SBC$  wynika wtedy z przystawania  $AB \equiv Bc$  i równoległości  $cC \parallel SB$ . Podobnie każdy kolejny trójkąt zakreślony w odstępie  $\Delta t$  ma to samo pole.

Oczywiście i w tym przypadku konieczny jest odpowiedni argument przy przejściu do granicy  $\Delta t \rightarrow 0$ . Obszerne rozważania dotyczące tego punktu można znaleźć w [Pourciau, 2016], patrz także [Nauenberg, 2003, 2018].

### Domysły dotyczące brakującej części dowodu Twierdzenia I

Wobec naszego przekonania, że Newton nie mógł popełnić opisanego wyżej elementarnego błędu logicznego, oraz wobec prostoty argumentów dowodu analitycznego narzuca się wręcz konstatacja, że być może brakująca część dowodu Twierdzenia I znalazła się w manuskrypcie *Principiów*, lecz Newton wykreślił stosowne uzasadnienia w momencie przekazywania dzieła do druku, uznawszy je ostatecznie za łatwe do uzupełnienia przez czytelników pokroju Huygensa i Leibniza. Należy tu zaznaczyć, że koszty druku tak obszernego dzieła były wysokie. Pokrył je osobiście Edmond Halley, gdyż Towarzystwo Królewskie było spłukane i mogło dać tylko swoje *imprimatur*, udzielone latem 1886 roku przez przewodniczącego Samuela Pepysa; jego nazwisko znajduje się dzięki temu na karcie tytułowej (rys. 7). To jednak tylko domysły, bowiem kluczowe arkusze manuskryptu *Principiów* nie zostały odnalezione. Należy też wziąć pod uwagę fakt, że w *Principiach* Newton stosował politykę ukrywania dowodów analitycznych stojących za konstrukcjami geometrycznymi. Koronnym przykładem jest jego dowód Wniosku III do Tezy XLI Zadania XXVIII.

**Teza XLI. Zadanie XXVIII.** *Zakładając siłę dośrodkową dowolnego rodzaju i przyjmując kwadratury figur krzywoliniowych, należy znaleźć zarówno krzywe, po których ciała będą się poruszać, jak i czasy ich ruchów po tak znalezionych krzywych* [Newton, 2015].

Ogólne relacje dotyczące krzywych i czasów, które otrzymał Newton, są równoważne reprezentacjom całkowym z współczesnych podręczników. Uwaga o kwadraturach dotyczy możliwości obliczenia całek. Po podstawieniu pod całkę danych dla newtonowskiego pola grawitacyjnego otrzymujemy krzywe stożkowe. We Wniosku III do tego twierdzenia Newton opisał też – w syntetycznej, geometrycznej formie – krzywe dla siły proporcionalnej do odwrotności sześcianu odległości od centrum. Wymagało to obliczenia trudnych całek, których jednakże Newton nie uznał za stosowne przytoczyć. Zakończył za to swój dowód uwagą, która mogła sfrustrować każdego czytelnika.

*„Wszystko to wynika z poprzedniej Tezy XLI na drodze kwadratury odpowiedniej krzywej, opis wyznaczania której, jako dostatecznie łatwy, dla zwięzości opuszczać”*. [Pask, 2013]

Collin Pask dodaje: *Nic dziwnego, że Newtonowi udało się zdenerwować tak wielu ludzi! Jedną z osób, które poprosiły Newtona o pomoc, był David Gregory, i w 1694 roku Newton napisał do niego, wyjaśniając, jak to działa. O dziwo, list przetrwał i widać* (rys. 8), *że Newton używa do przeprowadzania całkowania formy rachunku różniczkowego, która jest nam dzisiaj dobrze znana*.

### Bibliografia

- G. Łukaszewicz, M. Sierżega, *Drugie prawo Keplera i owale Newtona. Kontrowersje wokół Lematu XXVIII w Principiach*, Delta 10, 2020.
- M. Nauenberg, *Newton's Principia and Inverse-Square Orbits*, The College Mathematical Journal, vol. 25, 1994, 212–222.
- M. Nauenberg, *Kepler's Area Law in the Principia: Filling in some details in Newton's proof of Proposition 1*, Historia Mathematica, Vol. 30, Issue 4, November 2003, 441–456.
- M. Nauenberg, *Newton's graphical method for central force orbits*, Am. J. Phys., Vol. 86, No. 10, October 2018.
- Isaac Newton, *Matematyczne zasady filozofii naturalnej*, Copernicus Center Press, 2015.
- Colin Pask, *Magnificent Principia*, Prometheus Books, 2013.
- B. Pourciau, *Instantaneous impulse and continuous force: the foundations of Newton's Principia*, 93–186, in *The Cambridge Companion to Newton*, wyd. 2, 2016.

# Nie wiem, czy wiesz...

Paweł Rafał BIELIŃSKI\*

\* Nauczyciel, Warszawa

W niniejszym tekście zapoznamy się z sytuacjami, w których interesującą rolę odgrywa wiedza lub niewiedza pojawiających się postaci. Istotna może być też ich wiedza o niewiedzy innych itd. Prezentowane scenariusze to właściwie zagadki, w związku z tym najwięcej radości można uzyskać, próbując rozwiązać je samodzielnie przed przeczytaniem wyjaśnienia.

## Geniusze

Dwóm geniuszom wręczono – w wielkiej tajemnicy – po jednej liczbie naturalnej, przy czym wiadomo było, że są to liczby różniące się dokładnie o 1. Geniusze siedzą naprzeciwko siebie i na zmianę zadają sobie nawzajem pytanie: „Czy znasz moją liczbę?”. Uzasadnij, że przedzej czy później padnie odpowiedź twierdząca.

*Wyjaśnienie.* Geniusza, który jako pierwszy zadaje pytanie, nazwijmy Alojzem, a drugiego – Bernardem. Gdyby Bernard miał liczbę 0, to znałby liczbę Alojza. Istotnie, jedną liczbą naturalną sąsiadującą z zerem jest 1. Zatem, odpowiadając negatywnie, Bernard podaje do publicznej informacji, że jego liczbą nie jest 0. Podobnie zapytany wówczas Alojz, jeśli nie odpowie twierdząco, to ujawnia informację, iż jego liczba nie jest równa 0. Analogicznie, kolejne dwie negatywne odpowiedzi wykluczają u obu geniuszy liczbę 1, a jeszcze kolejne – liczbę 2 itd. Ogólnie, po  $2n$  pytanach jest wiadomo, że nie jest możliwa żadna liczba mniejsza niż  $n$ . Jeżeli więc geniuszom wręczono liczby  $n$  oraz  $n + 1$ , to nie później niż w tym momencie geniusz z mniejszą liczbą musi odpowiedzieć twierdząco. Istotnie, od początku wiedział, że drugi geniusz ma albo liczbę  $n - 1$ , albo  $n + 1$ , a pierwsza z nich została już wykluczona.

## Niedzielní Wikingowie

Na odległej wyspie mieszkało dwustu Wikingów, o których powszechnie wiadomo, co następuje.

- 1) Każdy Wiking jest mistrzem logiki.
- 2) Każdy z nich jest bohaterem albo tchórzem. Te dwa rodzaje Wikingów będziemy określać *typami*, a samą cechę – *dzielnością*.
- 3) Żaden z nich nie zna swojego typu. (Z własnej perspektywy nawet paniczna ucieczka może przypominać błyskotliwe natarcie, a zeznania kolegów nie muszą być wiarygodne).
- 4) Każdy zna typ każdego z pozostałych. (Patrząc trzeźwo, da się odróżnić paniczną ucieczkę od błyskotliwego natarcia).
- 5) Wiking, który w jakiś sposób wywnioskuje, że jest tchórzem, przy najbliższym zachodzie słońca odpływie samotnie, by zdobywać chwałę w nieznanych krainach.

Pewnego dnia, kiedy wszyscy Wikingowie przebywali w sali biesiadnej, ukazał się tam Godny Zaufania Odyn, który oznajmił im, że nie wszyscy są bohaterami. Przez pewien czas skutki objawienia nie ujawniały się, dopiero setnego dnia grupa zhańbionych Wikingów odpłynęła w siną dal. Ilu bohaterów mieszkało na wyspie?

*Wyjaśnienie.* Rozwiązywanie tej zagadki okazuje się zaskakująco podobne do poprzedniego.

Przypuśćmy, że na wyspie żył tylko jeden tchórz. Taki Wiking wiedziałby, że wszyscy pozostali są bohaterami, a więc z informacji od Odyna wywnioskowałby swój typ i odpłynął. W takim razie już drugiego dnia (tzn. nazajutrz od objawienia) staje się powszechnie wiadomym, że tchórzy na wyspie jest co najmniej dwóch. Ogólnie, jeżeli dnia  $n$ -tego było wiadomo, że tchórzy jest co najmniej  $n$ , to musi zdarzyć się jedna z dwóch rzeczy.

- A) Jeśli tchórzy jest dokładnie  $n$ , to każdy z nich wie o  $n - 1$  tchórzach wśród pozostałych Wikingów. Potrafi więc wywnioskować, że sam jest tchórzem, i uda się na wyprawę. Dotyczy to każdego Wikinga tchórzliwego typu, skąd wynika, że numer dnia jest równy liczbie tchórzy.
- B) Jeżeli tchórzy jest więcej niż  $n$ , to nikt nie może ustalić swojego typu, więc nie wyrusza na wyprawę. Wobec A) oznacza to jednak, że dnia  $n + 1$  wszyscy już wiedzą, że liczba tchórzy wynosi co najmniej  $n + 1$ .



W wyniku omawianych zdarzeń żaden z Wikingów nie doznał uszczerbku na zdrowiu. Każdy przedko wrócił ze swojej wyprawy, bo czegoś się tam przestraszył.

Również bohaterowie mogą odetchnąć z ulgą dopiero w dniu masowego wypłygnięcia mniej dzielnych Wikingów.

Widzimy więc, że na wyspie musiało żyć dokładnie stu tchórzy, a więc także stu bohaterów... oczywiście zakładając, że informacja przekazana przez Odyna była zgodna z prawdą. Uzupełnienie tej luki stanowi treść jednego z zadań.

Historia ta jest o tyle intrzygująca, że Odyn na pozór nie podał Wikingom żadnej nowej informacji. Każdy przecież dobrze wiedział, że w ich gronie są tchórze. Jest to pewien paradoks, który, zdaniem autora, można jednak rozwiązać.

Żeby lepiej zrozumieć istotę tego niecodziennego zjawiska, wyobraźmy sobie wyspę, na której mieszkało tylko dwóch tchórzy.

[Omówiona tu sytuacja jest nieco zawilą, ale wierzymy w Czytelnika.](#)

Wówczas rzeczywiście każdy wie o obecności tchórzy, ale pierwszy tchórz nie wie, że drugi wie! I właśnie tego dowiedziałby się dzięki objawieniu. Jeżeli tchórzy byłyby trzech, powiedzmy Alaf, Belaf i Celaf, to np. Alaf wie, że Belaf wie o obecności tchórzy, ale nie ma podstaw sądzić, że Belaf wie, że Celaf wie. Istotnie, Alaf, nie znając swojego typu, musi się liczyć z możliwością, że jedynymi tchórzami są Belaf i Celaf (a wówczas Belaf nie wiedziałby, że Celaf wie). Analogicznie uzasadniamy, że choć początkowo każdy wiedział o obecności tchórzliwych Wikingów, to dopiero po objawieniu stało się to *wiedzą powszechną*. To znaczy, że nie tylko każdy o tym wie, ale też każdy wie, że każdy wie, oraz każdy wie, że każdy wie, że każdy wie, i tak dalej... Ponadto każdy wie, w której chwili się ta wiedza upowszechniła. Dzięki temu możliwe jest przeprowadzenie przez mieszkańców wyspy całego opisanego powyżej rozumowania.

Zauważmy jeszcze, że do uruchomienia przedstawionej reakcji lańcuchowej wystarczyłoby podanie do publicznej wiadomości prostego wniosku ze stwierdzenia „są wśród nas tchórze i od teraz powszechnie o tym wiadomo”, mianowicie: „jeśli wśród nas jest tylko jeden tchórz, to odpłynie dziś”. Jest on wart wypowiedzenia, bo eksponuje znaczenie czasu i rozumowania nie wprost.

## Córki

Rozmowa dawnych przyjaciół w autobusie:

- Kiedy ostatnio się widzieliśmy, byłeś krótko po ślubie. Doczekaleś się już dzieci?
- Owszem, mam trzy córki.
- Wspaniale! W jakim wieku?
- Iloczyn ich wieków, w latach, wynosi 36, a suma ich wieków jest równa liczbie pasażerów tego autobusu.
- Rozumiem, ale nadal nie wiem, ile mają lat.
- Najstarsza gra na pianinie.
- OK, teraz już wiem!

Ile lat mają rzeczone córki?

*Wyjaśnienie.* Liczba 36 jest iloczynem trzech liczb naturalnych na zaledwie kilka sposobów. Wypiszmy je, notując od razu sumy owych czynników.

$$\begin{aligned}36 &= 1 \cdot 1 \cdot 36, \text{ suma } 38 \\36 &= 1 \cdot 2 \cdot 18, \text{ suma } 21 \\36 &= 1 \cdot 3 \cdot 12, \text{ suma } 16 \\36 &= 1 \cdot 4 \cdot 9, \text{ suma } 14 \\36 &= 1 \cdot 6 \cdot 6, \text{ suma } 13 \\36 &= 2 \cdot 2 \cdot 9, \text{ suma } 13 \\36 &= 2 \cdot 3 \cdot 6, \text{ suma } 11 \\36 &= 3 \cdot 3 \cdot 4, \text{ suma } 10\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla uczestników rozmowy liczba pasażerów jest znana. Mimo to ustalenie wieków córek nie było od razu możliwe. Oznacza to, że pasażerów musiało być 13, ponieważ każda inna suma odpowiada tylko jednemu rozkładowi liczby 36 na czynniki.

[Przy okazji, kiedy ci dwaj przyjaciele widzieli się poprzednim razem?](#)

Biorąc to pod uwagę, rozumiemy już, w jaki sposób wtrąt dotyczący gry na pianinie pozwolił ustalić wiek każdej z córek: istnienie *najstarszej* wyklucza rozkład  $1 \cdot 6 \cdot 6$ , pozostawiając tylko  $2 \cdot 2 \cdot 9$ .

**A ty wiesz?** (rozwiązania części zadań na str. 19)

**1.** Popraw rozumowanie przedstawione w wyjaśnieniu zadania „Geniusze”, aby uzasadnić, że twierdząca odpowiedź musi paść nie później niż w  $(n+2)$ -gim pytaniu ( $n$  nadal jest mniejszą z tajemniczych liczb).

[Dziękuję Wojciechowi Przybyszewskiemu za zwrócenie mojej uwagi na fakt opisany w zadaniu 1.](#)

**2.** Dwóm geniuszom wręczono – w wielkiej tajemnicy – po jednej liczbie naturalnej, przy czym wiadomo, że są to liczby różniące się o: a) co najwyżej 3; b) dokładnie 3. Geniusze siedzą naprzeciwko siebie i na zmianę zadają sobie nawzajem pytanie: „Czy znasz moją liczbę?”. Czy jest pewne, że w końcu padnie twierdząca odpowiedź?

**3.** Przypomnijmy sobie scenariusz zadania „Niedzielni Wikingowie”. Nadal jawnie obowiązują zasady 1)–5), a ponadto wiadomo, że grupa Wikingów wypłynęła setnego dnia po objawieniu. Uzasadnij, że deklaracja Odyna była zgodna z prawdą.

**4.** Przypomnijmy sobie scenariusz zadania „Niedzielni Wikingowie”. Jak zmieniłby się przebieg wydarzeń, gdyby któregoś dnia trzech Wikingów wybrało się na niezwiązana z hańbą wyprawę trwającą trzy tygodnie? Ustal, jak odpowiedź zależy od numeru dnia i liczby tchórzy w owej trójce.

**5.** Podaj przykład liczby, którą można by zastąpić 36 w zadaniu „Córki”.

**6.** Na niewielkiej wyspie mieszka  $n =$  wiele racjonalnych i genialnych lwów. Lew nigdy nie zje innego lwa i jest w stanie przeżyć, jedząc drobne wyspiarskie zwierzęta. Najsłynniejsza jest jednak zaczarowana koza, która jako stworzenie bezbronne i pozbawione instynktu samozachowawczego znakomicie nadaje się na przystawkę. Kłopot w tym, że lew, który pożarłby zaczarowaną kożę, sam się w nią zamieni. Lwy nie mają nic przeciwko byciu kozą, natomiast bycie szybko zjadzoną kozą nie jest perspektywą ani trochę atrakcyjną. Znajdź wszystkie wartości liczby  $n$ , dla których koza zostanie zjadzona.

**7.** Lolek i Tola napisali na karteczkach po liczbie naturalnej, po czym przekazali je w tajemnicy Bolkowi. Bolek wziął dwie karteczki, na jednej z nich napisał sumę, a na drugiej – iloczyn otrzymanych liczb. Następnie zjadł obie otrzymane karteczki i jedną

ze swoich, a pozostałą pokazał Lolkowi i Toli. Widniała na niej liczba 1282. „Nie wiem, jaką liczbę przekazałeś Bolkowi” – powiedziała Tola do Lolkę. „Nie wiem, jaką liczbę przekazała Bolkowi” – powiedział Lolek do Toli. Jaką liczbę przekazał Bolkowi Lolek?

## Ekstremalne kosmiczne laboratoria, część I Karolina ROŻKO\*

\*Instytut Astronomii im. Prof. J. Gilę,  
Uniwersytet Zielonogórski

Autorka tego tekstu pragnie podziękować dr. hab. Wojciechowi Lewandowskiemu, prof. UZ za cenne uwagi do artykułu.

Pisząc *wkrótce*, mamy na myśli czas około jednego dnia, gdyż tyle potrzeba, aby zelazowe jądro osiągnęło masę krytyczną. Dla porównania: czas syntezy helu wynosi około kilkadesięciu milionów lat, czas syntezy węgla – od kilkuset tysięcy do miliona lat, czas syntezy neonu – kilka tysięcy lat, a czas syntezy krzemu – kilka lat.

Średnicę 20 km mają zimne gwiazdy neutronowe, natomiast protogwiazdy mogą mieć około 50 km.

Średnia gęstość gwiazd neutronowych wynosi około  $4 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$ , co stanowi  $10^{14}$  gęstości Słońca.

Zasada zachowania momentu pędu głosi, że dla dowolnego izolowanego układu punktów materialnych całkowita suma ich momentów pędu jest stała.

W pierwszym przybliżeniu możemy przyjąć moment bezwładności dla jednorodnej kuli:  $\frac{2}{5}Mr^2$ , gdzie  $M$  – masa gwiazdy,  $r$  – promień gwiazdy.

1 Tesla to  $10^4$  Gaussów.

Ewolucja bardzo masywnych gwiazd, czyli takich, których masa przekracza około 8 mas Słońca, kończy się w znacznie bardziej spektakularny sposób niż ewolucja obiektów mniej masywnych (pisał już o nich Miguel Figueira w artykule *Gwiezdne przedszkola w  $\Delta_{20}^4$* ).

W końcowym etapie ewolucji bardzo masywne gwiazdy są w stanie rozpoczęć syntezę żelaza w swoim wnętrzu. Jest to ostatni proces syntezy termojądrowej, który może zachodzić we wnętrzu gwiazdy, ponieważ synteza cięższych pierwiastków nie uwalnia energii, a wręcz przeciwnie – wymaga, aby dostarczyć ją z zewnątrz. Dlatego też wkrótce po powstaniu żelaza w jądrze gwiazdy całkowicie ustają reakcje termojądrowe, a to z kolei sprawia, że znika ciśnienie, które chroniło jądro gwiazdy przed zapadnięciem się, tzw. *kolapsem*, czyli *zapaścią* pod wpływem siły grawitacji. W wyniku tej zapaści grawitacyjnej materia ulega silnemu zagęszczeniu: elektrony są dosłownie wciskane do protonów, tworząc w ten sposób neutrony. W efekcie jądro gwiazdy kurczy się do momentu, gdy ciśnienie zdegenerowanej neutronowej materii oraz pewne efekty kwantowe są w stanie powstrzymać dalszą zapaść, co z reguły dzieje się, gdy zapadające się jądro osiągnie rozmiar kuli o średnicy około 20 km. Ze względu na swoją budowę obiekty takie nazywamy gwiazdami neutronowymi. Gdy swoją ewolucję kończą najbardziej masywne gwiazdy (czyli te przekraczające około 20 mas Słońca), nic nie jest w stanie powstrzymać kolapsu grawitacyjnego i wówczas powstają czarne dziury (trzeba jednak zaznaczyć, że naukowcy wciąż nie są do końca pewni, czy ten podział jest tak prosty). W obu przypadkach zewnętrzne warstwy gwiazdy zostają rozrzucone w wyniku wybuchu supernowej będącej jednym z najbardziej energetycznych zjawisk we Wszechświecie.

### Gwiazdy neutronowe – ciąg ekstremalnych cech fizycznych

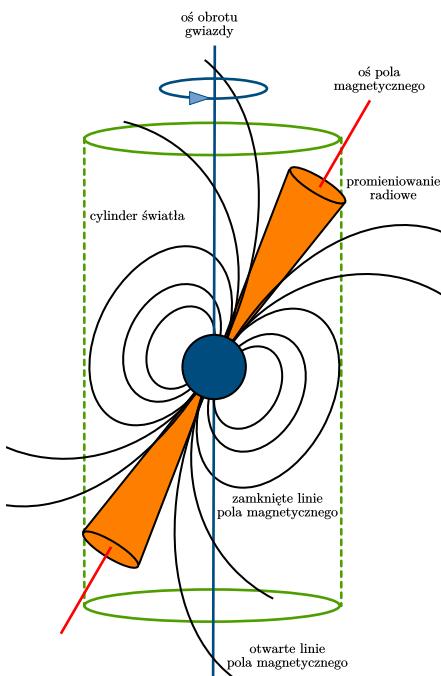
Gwiazdy neutronowe mają średnicę zaledwie 20 km, ale ich masa zawiera się zazwyczaj w przedziale między 1 a 2 masami Słońca! Łatwo zgadnąć, że takie obiekty mają ekstremalną gęstość. Ale co to właściwie znaczy? Aby to zrozumieć, zróbmy małe porównanie: 1 łyżeczka (czyli 5 ml) takiej materii ważyłaby  $5,5 \times 10^{12}$  kg. Jeśli założymy, że słoń waży przeciętnie 5,5 tony, to możemy powiedzieć, że jedna łyżeczka materii z gwiazdy neutronowej waży tyle co miliard słoni.

Ogromna gęstość nie jest jedyną niezwykłą cechą gwiazd neutronowych. Ze względu na zasadę zachowania momentu pędu nowo powstałe gwiazdy będą obracać się bardzo szybko: typowy okres rotacji wynosi zaledwie 10 milisekund (tzn. że obracają się 100 razy na sekundę). Dla porównania okres rotacji Słońca wynosi aż 27 dni! Ponieważ moment jest iloczynem momentu bezwładności i prędkości kątowej, gdy moment bezwładności gwałtownie maleje po zapaści jądra, prędkość kątowa musi tak samo gwałtownie wzrosnąć.

Również znaczący efekt wywiera prawo zachowania strumienia magnetycznego: kompresji ulega pole magnetyczne jądra gwiazdy. W rezultacie gwiazdy neutronowe mają ekstremalnie silne pola magnetyczne. Dla porównania pole magnetyczne Słońca wynosi około 0,3 Tesli. Gdybyśmy zmniejszyli promień Słońca z około 700 000 km do 10 km, to pole magnetyczne Słońca osiągnęłoby wartość  $1,5 \times 10^9$  Tesli, czyli porównywalną z typową wartością siły pola magnetycznego gwiazd neutronowych.

Aby dopełnić ten obraz, dodajmy, że pole grawitacyjne gwiazdy neutronowej również jest bardzo silne: z tego powodu najwyższa góra, jaka mogłaby

Tak naprawdę z powodu silnego pola grawitacyjnego niemożliwe jest stanie na powierzchni gwiazdy neutronowej.



Obiekty takie jak te opisane obok nazywamy pulsarami zasilanymi energią rotacyjną. Istnieją też gwiazdy neutronowe zasilane energią akrecyjną, o których jednak nie piszemy w tym artykule.

powstać na jej powierzchni, miałaby zaledwie 3 mm wysokości. Średnia wartość przyspieszenia grawitacyjnego przy powierzchni gwiazdy neutronowej wynosi między  $10^{12}$  a  $10^{13}$  m/s<sup>2</sup>. Oznacza to, że gdybyśmy mogli stanąć na powierzchni gwiazdy neutronowej i zrzucilibyśmy monetę z wysokości 1 m, to spadłaby ona w ciągu zaledwie 12  $\mu$ s, a przy dotarciu do powierzchni gwiazdy osiągnęłaby prędkość 2/3 prędkości światła.

Podsumowując, typowe gwiazdy neutronowe to obiekty o średnicy około 20 km, charakteryzujące się ekstremalnie dużą gęstością, silnym polem magnetycznym oraz silnym polem grawitacyjnym i obracające się częściej niż raz na sekundę.

### Gwiazda neutronowa jak latarnia morska

Gdy oś pola magnetycznego nie pokrywa się z osią obrotu gwiazdy neutronowej, obiekty te wysyłają promieniowanie w zakresie radiowym w podobny sposób, w jaki świeci latarnia morska. Aby to zrozumieć, spojrzyjmy na chwilę na schemat pokazujący tzw. model latarni morskiej. W samym środku znajduje się gwiazda neutronowa. Plazma, czyli naładowane cząsteczki wyrywane z powierzchni gwiazdy, uwiezione jest w obszarze wypełnionym zamkniętymi liniami pola magnetycznego. W pewnej odległości od powierzchni gwiazdy prędkość liniowa rotującej plazmy zbliża się do osiągnięcia prędkości światła. Umownie obszar, gdzie prędkość liniowa cząstek w magnetosferze osiągnęłaby dokładnie prędkość światła (co oczywiście jest niemożliwe), nazywamy tzw. cylindrem światła. Obszar ten dzieli magnetosferę gwiazdy neutronowej na dwie części: zamkniętych linii pola magnetycznego (które w całości mieszczą się wewnątrz cylindra światła) oraz otwartych linii pola magnetycznego. To właśnie wzdłuż otwartych linii pola powstaje promieniowanie radiowe, które omija Wszechświat niczym światło latarni morskiej.

W jaki sposób to promieniowanie powstaje? W pierwszym przybliżeniu pole magnetyczne pulsara może być traktowane jako dipol, a zgodnie z klasyczną elektrodynamiką rotujący dipol magnetyczny powinien wypromieniowywać energię w postaci fali elektromagnetycznej. Mówiąc trochę bardziej szczegółowo: wyobraźmy sobie, że z powierzchni gwiazdy w miejscu, gdzie wychodzą otwarte linie pola magnetycznego (jest to tzw. obszar czapy polarnej), na skutek różnicy potencjału elektrycznego między powierzchnią czapy polarnej a Wszechświatem wyrywane są naładowane cząsteczki (elektrony i protony). Ulegają one przyspieszeniu do ultra-relatywistycznych prędkości wzdłuż linii pola i w efekcie mogą tworzyć fotony  $\gamma$ , które z kolei z powodu obecności silnego pola magnetycznego rozpadają się na pary elektron–pozyton. Proces ten ma charakter lawinowy i doprowadza do powstania kaskady elektronów.

Gdy wtórne elektrony poruszają się wzdłuż krzywizny otwartych linii pola magnetycznego, ulegają przyspieszeniu dośrodkowemu. Zgodnie z zasadami elektrodynamiki przyspieszane naładowane cząstki emitują promieniowanie, które dociera na Ziemię w postaci regularnych błysków. To właśnie ta cecha gwiazd neutronowych pozwoliła na ich odkrycie.

Hewish, A.; Bell, S. J.; Pilkington, J. D. H.; Scott, P. F.; Collins, R. A., 1968, „Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source”, *Nature*, 217: 709–713.

W 1967 roku Jocelyn Bell pomogła zbudować radioteleskop, który służył m.in. do poszukiwania kwazarów. Jocelyn była wówczas studentką na Uniwersytecie w Cambridge. Podczas analizowania zebranych danych zauważała dziwny sygnał, który powtarzał się z niezwykłą regularnością. Początkowo wraz ze swoim promotorem – Antonym Hewishem – przypuszczali, że są to zakłócenia pochodzące z Ziemi. Sygnał ten powtarzał się jednak wyłącznie w konkretnym miejscu na sferze niebieskiej. W roku 1968 w *Nature* ukazał się artykuł, w którym zaproponowano, że obserwowany sygnał może pochodzić od gwiazd neutronowych, zaś ze względu na niezwykłą regularność, z jaką powracał, obiekty te nazwano pulsarami. Do roku 1967 istnienie gwiazd neutronowych było jedynie przewidywane teoretycznie, dlatego było to bardzo znaczące odkrycie naukowe, za które w 1974 roku Antony Hewish (a nie Jocelyn Bell) otrzymała Nagrodę Nobla. Obecnie pulsary traktowane są przez większość astrofizyków jako kosmiczne laboratoria, to jednak temat na kolejną opowieść o tych fascynujących obiektach...

# Czy Newton wiedział? Statystyczna tajemnica skrzyni Pyx

Jan MIELNICZUK\*

\*Instytut Podstaw Informatyki PAN,  
Wydział Matematyki i Nauk  
Informacyjnych, Politechnika  
Warszawska

Sam proces bicia (tłoczenia) monet był skomplikowany technologicznie i wymagał od tłoczących dużej umiejętności i wprawy. Jak pisze John Craig [1], *niewielu z nich było tak rzęcznych, żeby zachować wszystkie swoje palce w nieskończoność.*

Pyxem (*the Pyx*) nazwano w średniowiecznej Anglii skrzynię, do której odkładano egzemplarze monet wytłoczonych przez londyńską Mennicę (*The Mint*) w celu późniejszej ich inspekcji (*Trial of the Pyx*). Nazwa wywodzi się od greckiego słowa *pyxus*, oznaczającego właśnie skrzynię. Pierwsza publiczna inspekcja skrzyni odbyła się w 1248 roku, a z 1279 roku pochodzi zachowany edykt Edwarda I opisujący całą procedurę. Do połowy XIX wieku Mennica była instytucją niezależną od Korony i funkcjonowała na podstawie kontraktu z monarchą (*Mint Indenture*). Kontrakt specyfikował zobowiązania Mennicy i wynagrodzenie jej pracowników za bicie monet. Przewidywał on tłoczenie monet o określonej jakości i wadze z kruszcu dostarczanego przez króla.

Co ciekawe i ważne dla tej historii, prawo dostarczania złota w celu bicia monet przysługiwało, za opłatą, kupcom będącym importerami złota lub złotych monet (np. francuskich luidorów czy niderlandzkich guldenów). W celu weryfikacji jakości monet codziennie jeden losowo wybrany z produkcji egzemplarz trafiał do Pyxa. Zbiorcza inspekcja monet zgromadzonych w skrzyni była przeprowadzana w nieregularnych odstępach czasowych, co 2–4 lata, a często dopiero wtedy, gdy skrzynia była pełna. Sama inspekcja była dokonywana przez reprezentantów niezależnych od króla gildii złotników, w obecności monarchy lub jego przedstawiciela. Jeśli zakończyła się pomyślnie, całą kontrolę wieńczyła, przypuszczalnie daleka od wegetariańskiej, ucztą.

**Sprawdzanie jakości monet.** Proces kontroli jakości monet obejmował kontrolę próby złota (procentowej zawartości kruszcu w monecie) oraz kontrolę ich wagi. Kontrola wagi polegała na sprawdzeniu, czy łączna waga monet w skrzyni mieści się w dopuszczalnych granicach dla takiej ich liczby. Jakie były te dopuszczalne granice? Omówimy to na przykładzie złotych gwinei, które były emitowane od XVII wieku do początku XIX. Na potrzeby tego artykułu określmy tolerancję jako maksymalną dopuszczalną odchyłkę (w góre lub w dół) od nominalnej wagi. Nominalna waga jednej gwinei wynosiła 129 ziaren (*grains*). Dopuszczalna tolerancja na złotych gwineach o łącznej nominalnej wadze 1 funta (chodzi tu o tzw. funt jubilerski, *troy pound*) wynosiła 40 ziaren, to znaczy ich faktyczna waga nie mogła być większa od 5800 ziaren i mniejsza od 5720 ziaren. Tolerancja zwiększała się *liniowo* w zależności od łącznej nominalnej wagi monet w skrzyni, tak więc jeśli w skrzyni były monety o nominalnej wadze 87 funtów, to tolerancja dla tej wagi wynosiła  $87 \times 40 = 3480$  ziaren.

W początkowym okresie kontroli skrzyni Pyx wynik pozytywny nie oznaczał bynajmniej końca całego procesu. Mianowicie, w przypadku pozytywnego wyniku kontroli, ale wskazującego na to, że średni ciężar monety był poniżej ustalonej wagi, różnica w wadze dla części produkcji mennicy od poprzedniej kontroli musiała być zwrócona do skarbca królewskiego. Później tej praktyki zaniechano (być może dlatego, żeby posada kierującego Mennicą była jeszcze bardziej intratna). Jak się dalej okaże, była to dla Korony bardzo zła decyzja. Aby dokładnie uzasadnić, dlaczego, przydadzą nam się pewne podstawowe pojęcia i fakty z rachunku prawdopodobieństwa. Czytelnicy, którzy są zaznajomieni z tą dziedziną – lub nie są szczególnie zainteresowani częścią techniczną – mogą śmiało kontynuować lekturę za wzorem (\*).

**Jak powinna zmieniać się tolerancja?** Przypomnijmy kluczową dla odpowiedzi na to pytanie koncepcję statystycznej niezależności. Mówimy, że dwa zdarzenia losowe  $A$  i  $B$  mające niezerowe prawdopodobieństwa wystąpienia są niezależne, jeśli zaobserwowanie jednego z tych zdarzeń nie zmienia oceny prawdopodobieństwa zajścia drugiego. W terminach prawdopodobieństwa warunkowego  $\mathbb{P}(A|B) := \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$  wyraża się to jako

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Po przemnożeniu obu stron drugiej równości przez  $\mathbb{P}(B) > 0$  jest to równoważne równości  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ . Ciąg zdarzeń losowych składa się ze zdarzeń *parami* niezależnych, jeśli dowolne dwa zdarzenia w tym ciągu są niezależne.



Pojęcie niezależności parami jest nieco słabsze od własności, że wszystkie te zdarzenia są niezależne.

Dla zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  ich niezależność oznacza, że zdarzenia polegające na przyjęciu wartości z dowolnie określonych zbiorów są niezależne, to znaczy  $\mathbb{P}(X \in C, Y \in D) = \mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{P}(Y \in D)$ . Można się teraz domyślić, jak zdefiniujemy niezależność *parami* ciągu zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_n$ : oznacza to po prostu, że dowolne dwie zmienne losowe w tym ciągu są niezależne.

Przypomnijmy teraz dwie podstawowe charakterystyki zmiennych losowych. Pierwsza z nich to *wartość oczekiwana*: dla zmiennych, które mogą przyjąć skończenie wiele wartości  $a_1, \dots, a_N$ , jest to suma tych wartości przemnożonych przez prawdopodobieństwo ich uzyskania, tzn.

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(X = a_i) \cdot a_i.$$

Zgodnie z *prawem wielkich liczb* średnia wartość ciągu niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa zbiega do wartości oczekiwanej pojedynczej zmiennej – temu wartość oczekiwana zawdzięcza swoją nazwę.

Druga z istotnych dla nas wielkości to *wariancja*, czyli wartość oczekiwana kwadratu odstępstwa od wartości oczekiwanej:

$$\text{Var } X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2.$$

Zgodnie z *nierównością Markowa* dla zmiennej losowej  $X$  przyjmującej wartości nieujemne i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej  $a$  zachodzi  $\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}$  (krótki dowód poniżej).

$$a\mathbb{P}(X > a) = \sum_{i: a_i > a} a \cdot \mathbb{P}(X = a_i) < \sum_{i: a_i > a} a_i \cdot \mathbb{P}(X = a_i) \leq \mathbb{E}X$$

Podstawiając pod  $X$  zmienną  $(X - \mathbb{E}X)^2$ , dostajemy *nierówność Czebyszewa*:  $\mathbb{P}((X - \mathbb{E}X)^2 > a) \leq \frac{\text{Var } X}{a}$ , którą możemy przepisać (podstawiając  $\sigma_X = \sqrt{\text{Var } X}$  i  $c = \sqrt{a}/\sigma_X$ ) w postaci:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > c \cdot \sigma_X) < \frac{1}{c^2}.$$

To oszacowanie jest *bardzo* zgrubne, stanowi jednak proste uzasadnienie tego, że  $\sigma_X$  (nazywane *odchyleniem standardowym*) jest dobrą „jednostką” tolerancji – widzimy, że prawdopodobieństwo odstępstwa zmiennej od jej wartości oczekiwanej o wielokrotność  $\sigma_X$  maleje co najmniej tak, jak kwadrat współczynnika wielokrotności.

Przyjrzymy się teraz, co można powiedzieć o wariancji sumy zmiennych losowych. Zauważmy, że jeśli  $X$  i  $Y$  są niezależne i przyjmują odpowiednio wartości  $a_i$  ( $i \leq N$ ) oraz  $b_j$  ( $j \leq M$ ), to

$$\begin{aligned} \mathbb{E}XY &= \sum_{i,j} \mathbb{P}(X = a_i, Y = b_j) a_i b_j = \\ &= \sum_{i,j} \mathbb{P}(X = a_i) \mathbb{P}(Y = b_j) a_i b_j = \\ &= \sum_i \mathbb{P}(X = a_i) a_i \cdot \sum_j \mathbb{P}(Y = b_j) b_j = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y. \end{aligned}$$

Z powyższej własności wynika ważna własność wartości oczekiwanej iloczynu scentrowanych (czyli pomniejszonych o ich wartość oczekiwana) zmiennych losowych  $X - \mathbb{E}X$  i  $Y - \mathbb{E}Y$ . Scentrowanie sprawia, że zmienna, jaką w rezultacie otrzymamy, ma zerową wartość oczekiwana. Ponadto (łatwy dowód pozostawiamy do samodzielnego przeprowadzenia) niezależność zmiennych losowych pociąga za sobą niezależność ich scentrowanych wersji. Stosując teraz ostatnią równość do zmiennych scentrowanych  $X - \mathbb{E}X$  i  $Y - \mathbb{E}Y$ , dostaniemy:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X) \cdot \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}Y) = \\ &= 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie dla niezależnych zmiennych losowych  $X, Y$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) + (Y - \mathbb{E}Y))^2 = \\ &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}Y)^2 + 2\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y) = \\ &= \text{Var } X + \text{Var } Y \end{aligned}$$

(niejawnie skorzystaliśmy z prostego, acz wielce pozytywnego faktu, że wartość oczekiwana sumy zmiennych losowych to suma wartości oczekiwanych tych zmiennych). Podobnie możemy uzasadnić analogiczną równość dla sumy większej liczby niezależnych składników.

W naszej historii zmienna  $X_i$  oznaczać będzie wagę (z dokładnością do jednego ziarna)  $i$ -tej monety w skrzyni Pyx. Rozsądnym założeniem jest przyjęcie, że waga  $i$ -tej monety nie zależy od wagi żadnej innej monety w skrzyni, czyli że wagi monet są parami niezależne.

Obliczmy teraz wariancję łącznej wagi monet w Pyxie. Niech  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  będzie łączną wagą monet w skrzyni. Jak wcześniej pokazaliśmy,

$$\text{Var } S_n = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i).$$

Niech  $\sigma_n^2 = \text{Var } S_n$ . Jeśli przyjmiemy założenie, że rozkłady wag monet się nie różnią, to z ostatniej równości wynika, że

$$(*) \quad \sigma_n^2 = n\sigma_1^2, \quad \text{czyli} \quad \sigma_n = \sqrt{n}\sigma_1.$$

Czytelnicy bardziej obyci z rachunkiem prawdopodobieństwa doskonale zdają sobie sprawę z tego, że w kontekście sumy niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie odchylenie standardowe staje się idealną miarą tolerancji w tym sensie, że na mocy Centralnego Twierdzenia Granicznego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}S_n| > c \cdot \sigma_n) = 2(1 - \Phi(c)),$$

gdzie  $\Phi$  jest *dystrybuantą rozkładu normalnego*. Zachodzi ponadto:

$$1 - \Phi(c) \leq \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2}{2}},$$

co pokazuje, jak bardzo zgrubne jest w tej sytuacji wcześniejsze oszacowanie wykorzystujące nierówność Czebyszewa.

Uzasadniliśmy zatem istotną dla naszych rozważań własność: jeśli za miarę zmienności zmiennej losowej przyjmiemy jej odchylenie standardowe, to odchylenie standardowe sumy  $n$  parami niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie jest równe odchyleniu standardowemu pojedynczej zmiennej przemnożonemu przez *pierwiastek* z liczby zmiennych.

## Co z tego wynika?

Konsekwencje naszych rozważyń dla tolerancji obowiązujących Mennicę trudno przeoczyć. Granice tolerancji w procedurze kontroli Pyxa były ustawiane za bardzo liberalnie, co powodowało w szczególności, że konsekwentnie wybijając monety o tej samej, mniejszej niż nominalna wadze, można było i tak zmieścić się w granicach tolerancji; przejść przez inspekcję i zachować posadę. Dla przykładu założmy, że dopuszczalna tolerancja na wadze jednej hipotetycznej monety wynosi 1 ziarno. Wtedy na partii 100 monet dopuszczalna tolerancja (zgodnie z wytycznymi kontroli Pyx) wynosi 100 ziaren. Jednak zgodnie z naszymi ustaleniami ta tolerancja powinna być rzędu  $\sqrt{100} = 10$  ziaren! Zmniejszając wagę pojedynczej monety o  $9/10$  ziarna, mieścimy się ciągle w granicach tolerancji, gdyż strata na wadze wynosiła  $(9/10) \times 100 = 90$  ziaren, co nawet po dodaniu  $\sqrt{100} = 10$  ziaren, czyli „właściwej” tolerancji, nie przekracza zadanego pułapu 100 ziaren.

Dlaczego ustalenie zbyt liberalnych granic tolerancji było groźne? Jeśli monety były zbyt lekkie i wchodziły do obiegu, to po pierwsze, korzystała na tym Mennica (przypomnijmy: Mennica była niezależna od Korony), a po drugie obniżało to zaufanie do pieniądza – gwinea powinna być tyle warta, ile kruszec, z którego została wybita. Jeśli monety były zbyt ciężkie, co było wychwytywane przez złotników, to traciła na tym Korona, a zyskiwali złotnicy. Monety były pozabawiane nadmiarowej części kruszcu przez spiławianie, następnie po przetopieniu wracały do Mennicy do ponownego wybicia z nich monet. O tym, że proceder ten był dosyć powszechny, świadczy fakt, że zbyt ciężkie monety poddane temu procesowi doczekały się swojej własnej nazwy: „powracające gwinee” (*come-again-guineas*). Jeśli zestawimy to z faktem, że inspekcja skrzyni dotycząca wagi tylko dwukrotnie (i to w obu przypadkach przed 1550 r.) zakończyła się werdyktkiem negatywnym, możemy wnioskować, że monety w obiegu „nie trzymające wagi” mogły być zjawiskiem powszechnym, w każdym razie do momentu, gdy kierowanie Mennicą objął Izaak Newton. Jednakże umyślne zaniżanie wagi złotych monet przez trzymanie się dolnej granicy tolerancji wytykano w parlamencie brytyjskim – co może nie jest zaskakujące – Francuzom...

**Izaak Newton jako kierujący Mennicą.** Newton był związany z Mennicą przez ponad 30 lat, najpierw piastując funkcję nadzorcy (*Warden*), a później, od roku 1699 aż do śmierci w roku 1727, kierującego Mennicą (*Master of the Mint*). W odróżnieniu od wielu swoich poprzedników, którzy traktowali to stanowisko wyłącznie jako źródło dodatkowych dochodów, Newton bardzo zaangażował się w działalność Mennicy i doprowadził do znacznego poprawienia efektywności procesu tłoczenia monet.

W kontraktie Newton miał również wpisane ściganie i wszczynanie postępowań wobec falszerzy monet. Tego obyczaju Newton bardzo nie lubił i prosił króla o zwolnienie go z niego.

W rezultacie zjawisko przetapiania zbyt ciężkich monet i powtórnego ich bicia z uzyskanego kruszcu zostało bardzo ograniczone. Nas interesuje jednak pytanie, czy Newton zdawał sobie sprawę, że tolerancja wagi monet sprawdzana podczas kontroli Pyxa i wynosząca za jego czasów 40 ziaren na funt jest zbyt liberalna?

Mimo ogromnej dbałości o jakość bitych monet Newton nie uniknął oskarżenia o zaniżanie próby złota. Stało się to podczas kontroli Pyxa w 1710 roku. Newton przekonując argumentował, że powodem tego była zbyt wysoka zawartość złota w referencyjnym stopie (*trial plate*), która wynosiła 91,71 procenta zamiast wymaganych 91,66 procenta.

Dwa fakty są interesujące w tym kontekście. Fakt pierwszy: Newton, choć sam zbytnio nie interesował się losowością, znał dobrze Abrahama de Moivre'a, jednego z „ojców” rachunku prawdopodobieństwa, i mógł z nim rozmawiać o tej kwestii. Wynik Jakuba Bernoulliego, opublikowany w jego *Ars Conjectandi*, mówiący o tym, jak prawdopodobne jest odchylenie frakcji orłów od  $1/2$  w wielokrotnym rzucie monetą, podane w terminach odchylenia standardowego dla frakcji, był de Moivre'owi, jeśli nie Newtonowi, doskonale znany. Drugi fakt to informacja, że w chwili śmierci Newton był bogatym człowiekiem, choć nie zaliczał się do takich przed zostaniem kierującym Mennicą, co nasuwa pytanie, czy wzbogacenie Newtona nie było związane z wykorzystaniem jego wiedzy o zbyt liberalnej tolerancji dla wagi monet. Należy tu jednocześnie podkreślić, że jako kierujący Mennicą pobierał sowe wynagrodzenie.

Historycy statystyki są zgodni co do twierdzącej odpowiedzi na postawione pytanie: Newton musiał sobie zdawać sprawę, że tolerancje wyznaczone w inspekcji Pyxa nie wymuszają pożądanej wagi pojedynczej monety i dlatego przedstawił działania mające na celu ulepszenie procesu bicia monet. Niestety, nie ma jednak żadnych konkretnych dowodów na to, że Newton wiedział, że zmienność sumy skaluje się proporcjonalnie do pierwiastka z liczby składników. Pośrednim argumentem w tych rozważaniach, który przytaczamy za S. Stiglerem [2], może być jedynie przeprowadzona przez Newtona analiza średniej długości trwania rządów monarchów poczyniona na podstawie analizy 12 dynastii, od czasów Judei do współczesnej mu Francji. Doprowadziła ona do konkluzji, że przeciętna długość rządów wynosiła od 18 do 20 lat [3]. Co ciekawe, Newton podaje przedziałową ocenę długości rządów, a nie średnią wyliczoną z danych (wynoszącą 19,1 roku). Co więcej, wynosząca jeden rok odchyłka od średniej i prowadząca w przybliżeniu do uzyskanego przez Newtona przedziału zgadza się niemal dokładnie z odchyleniem standardowym policzonym z danych, podzielonym przez pierwiastek z liczby obserwacji. Niestety samego wyliczenia prowadzącego do wartości odchyłki Newton nie podaje.

Jeśli Newton wiedział, to dlaczego nie starał się zmienić kryteriów kontroli skrzyni Pyx? Powód jest oczywisty – nie było to w jego interesie. Przypuszczalnie nie było to również w interesie króla, któremu zależało na podtrzymaniu zaufania do znajdujących się w obiegu monet.

## Jeszcze o tolerancji

Istotną kwestią jest również to, jak ustalono tolerancję dla partii o ciężarze 1 funta. W 1850 roku na polecenie Izby Gmin zważono 10 tysięcy złotych suwerenów.

Złoty suweren to złota moneta o wartości jednego funta będąca w obiegu od 1817 roku.

Okazało się, że rozkład wagi tych monet był w przybliżeniu normalny, a dokładnie 454 z nich były nienormatywne, to znaczy za lekkie lub za ciężkie względem tolerancji dla 1 funta monet (w 1848 roku zmniejszonej do 12 ziaren na funt) po jej *liniowej* transformacji na dopuszczalny ciężar jednej monety. Tak więc frakcja nienormatywnych monet wynosiła  $454/10\,000 \approx 0,05$ . Oznacza to, że tolerancja dla jednej monety była wyznaczona bardzo rozsądnie: odpowiadała małemu prawdopodobieństwu jej przekroczenia przez jedną, losowo wybraną, monetę. Natomiast problem pojawią się, gdy prawidłową tolerancję dla jednej monety liniowo przekształcimy na tolerancję dla partii monet o wadze jednego funta.

## Rozwiązania zadań z artykułu *Nie wiem, czy wiesz...* (str. 12)

**1.** Przyjrzymy się dokładniej wnioskom z drugiej negatywnej odpowiedzi. Otóż skoro Bernard nie ma liczby 0 (i już wie, że Alojz już o tym wie), to po odpowiedzi Alojza może wywnioskować nie tylko, że ten nie ma liczby 0, ale też 1. Istotnie, gdyby Alojz miał 1, to Bernard musiałby mieć 2. Rozumując analogicznie dla kolejnych etapów zabawy, dochodzimy do wniosku, że jeśli w pytaniu  $k$ -tym padła odpowiedź negatywna, to żaden z geniuszy nie może mieć liczby  $k - 2$  ani mniejszej; w szczególności gdyby padło  $k = n + 2$  przeczących odpowiedzi, to żaden nie mógłby mieć liczby  $k - 2 = n$ .

**2.** a) Nie. Ponieważ każda liczba (w tym 0, co kluczowe) może być sparowana z więcej niż jedną, więc pierwsza negatywna odpowiedź nie dostarcza żadnej nowej informacji. Wobec tego stan wiedzy każdego geniusza po pierwszym pytaniu jest dokładnie taki jak przed nim. Ten sam argument można więc zastosować do drugiego, trzeciego i każdego kolejnego pytania.

b) Tak! Odpowiedzi twierdzącej należy spodziewać się nawet wcześniej niż w oryginalnym scenariuszu. Bernard znałby liczbę Alojza, gdyby sam miał 0, 1 lub 2. Zatem jeśli odpowie „nie”, to wiadomo już, że ma co najmniej 3. Dalszy ciąg argumentu jest analogiczny jak w głównym tekście artykułu.

**3.** Otóż gdyby Odyn kłamał, znaczyłoby to, że na wyspie są sami bohaterowie. Każdy z nich widziałby poza sobą tylko bohaterów, zatem ufając Odynowi musiałby uznać siebie samego za tchórza. To oznacza, że gdyby Odyn kłamał, to wszyscy Wikingowie odpłynęliby już w dniu objawienia, a nie setnego dnia.

**5.** Naiwne poszukiwania nie są tu, niestety, zbyt owocne. Autor bezpośrednio (choć z pomocą komputera) sprawdził, że wśród liczb poniżej 100 dwa rozkłady na trzy czynniki o równej sumie mają jedynie  $40 = 1 \cdot 5 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 10$ ,  $90 = 1 \cdot 9 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 15$  oraz  $96 = 1 \cdot 8 \cdot 12 = 2 \cdot 3 \cdot 16$ . Można także zauważyc, że szukana liczba nie może być pierwsza, nie może być też potęgą liczby pierwszej ani iloczynem dokładnie dwóch liczb pierwszych. Uzasadnienie tych wniosków nie jest trudne i zostawiamy je Czytelnikowi.

## Zamiast podsumowania

Wiedza, że tolerancja w inspekcji Pyxa jest zbyt liberalna, była przypuszczalnie dostępna zarówno większości kierujących Mennicą, jak i zlecających kontrolę monarchom. Paradoksalnie, mogło to być na rękę jednym i drugim. Kierującemu Mennicą pozwalała spać spokojnie – bez strachu, że zostanie odwołany i, by móc, dawała możliwość uzyskiwania korzyści finansowych w wyniku bicia nieco lżejszej monety. Królowi, bo zapewniała bardzo potrzebne zaufanie społeczne do pieniądza. Być może, na co jednak nie ma żadnych dowodów, monarcha mógł wpływać na kierującego Mennicą, żeby bił nieco lżejszą monetę.

Na koniec warto dodać, że sam proces kontroli skrzyni Pyx jest jednym z pierwszych, jeśli nie pierwszym, w historii przykładem dokonywanej systematycznie statystycznej kontroli jakości.

### Literatura

- [1] Craig J., *Newton at the Mint*, Cambridge, 1946.
- [2] Stigler S., *Statistics on the table*, Harvard University Press, 1999.
- [3] Newton I., *Chronology of Ancient Kingdoms Amended*, 1728.

Spróbujmy więc dokładniej odtworzyć sytuację, która wystąpiła w zadaniu. (Nie twierdząc, że inna jest niemożliwa). Okazało się tam, że  $1 \cdot 6 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 9$  oraz  $1 + 6 + 6 = 2 + 2 + 9$ . Spróbujmy więc znaleźć takie liczby  $a, b$ , że  $1 + ab + ab = a + a + b^2$  (równość  $1 \cdot ab \cdot ab = a \cdot a \cdot b^2$  jest oczywista). Przekształcając, otrzymujemy  $2a(b-1) = b^2 - 1$  i w konsekwencji  $2a = b + 1$ . Przykład w zadaniu otrzymujemy, kładąc  $a = 2$ . Natomiast  $a = 3$  prowadzi do liczby 225. Bezpośrednio można sprawdzić, że z liczbą 225 w miejscu 36 zadanie „Córki” nadal jest sensowne, a jego rozwiązanie przebiega analogicznie do przedstawionego w artykule. Otrzymane wyniki są też w granicach wiarygodności jako wiek człowieka.

**6.** Gdyby na wyspie nie było lwów, koza byłaby bezpieczna. Oznacza to, że samotny lew może ją zjeść bez obawy o swój los (bo stanie się wtedy samotną, a więc bezpieczną, kozą). Jeśli więc na wyspie żyją dwa lwy, to koza jest bezpieczna: lew, który ją zjadł, zostałby kozą na wyspie z jednym lweniem, czyli kozą zjadzoną. Rozumując tak dalej, wnioskujemy, że koza jest bezpieczna, gdy liczba lwów  $n$  jest parzysta, a zjadzona, gdy  $n$  jest liczbą nieparzystą.

**7.** Oznaczmy liczbę Toli literą  $t$ , a Lolka –  $l$ . Skoro Tola nie znała  $l$ , to znaczy, że  $t$  jest dzielnikiem liczby 1282. Istotnie, w przeciwnym razie nie mogłaby zachodzić równość  $1282 = t \cdot l$ , zatem mielibyśmy  $1282 = t + l$  i stąd  $l = 1282 - t$  – o czym wiedziała Tola. Podobnie jak  $t$ , także  $l$  musi być dzielnikiem liczby 1282. Ponadto  $t \geq 1282/2$ , gdyż gdyby było  $t < 1282/2$  i  $t + l = 1282$ , to  $l > 1282/2$ . Jedynym dzielnikiem liczby naturalnej większym od jej połowy jest ona sama, zatem Lolek wiedziałby, że  $t = 1282$ . Nie może też mieć liczby 1282, bo wówczas wiedziałby, że  $t = 1$ . Liczba Lolka musi więc być równa  $1282/2 = 641$ . W tym zadaniu kuszące jest wypisanie dzielników liczby 1282. Okazuje się jednak, że nie jest to czynność niezbędna; istotnie, powyższy argument pozostaje skuteczny po zastąpieniu liczby 1282 dowolną inną liczbą parzystą, niezależnie od jej dzielników.

## Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2024

### Zadania z fizyki nr 770, 771

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**770.** Z izolowanego cieplnie naczynia o objętości wewnętrznej  $V$  odpompowano wypełniający je gaz, osiągając wysoką próżnię. Otaczające powietrze ma temperaturę  $T_0$  i ciśnienie  $p_0$ . W pewnym momencie otworzono kran zamykający naczynie, i nastąpiło jego szybkie napełnienie powietrzem atmosferycznym. Jaka temperaturę  $T$  miało powietrze w naczyniu po jego napełnieniu i zamknięciu kranu? Powietrze traktujemy jako gaz doskonały, którego wykładnik adiabaty  $\gamma = c_p/c_V$  jest dany, pojemności cieplnej ścianek naczynia nie uwzględniamy.

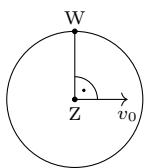
**771.** Cząstkę punktową o masie  $m$  i ładunku  $Q$  umieszczono w odległości  $R$  od nieskończonej płaszczyzny przewodzącej i puszczone swobodnie. Po jakim czasie cząstka doleci do płaszczyzny? Siły ciężkości nie uwzględniamy.

### Rozwiązania zadań z numeru 9/2023

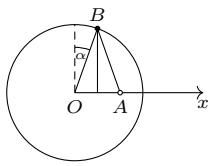
Przypominamy treść zadań:

**762.** Przekształcenie fotonu w parę elektron–pozyton w próżni jest niemożliwe, ze względu na zasadę zachowania pędu. Znaleźć minimalną energię, jaką powinien posiadać foton, aby mogła powstać para elektron–pozyton w pobliżu spoczywającego elektronu.

**763.** Na poziomej powierzchni lodu narysowany jest okrąg o promieniu  $R = 10$  m. W chwili początkowej zajęc  $Z$  znajduje się w środku okręgu, a wilk  $W$  na okręgu, jak na rysunku 1. Zajęc porusza się po prostej z prędkością  $v_0 = 2$  m/s. Wilk powinien poruszać się po okręgu tak, aby odległość między nim a zajęcem nie zmieniała się. Do jakiego punktu na okręgu uda mu się w ten sposób dotrzeć? Współczynnik tarcia wilka o lód:  $\mu = 0,05$ . Wilk nie podskakuje.



Rys. 1



Rys. 2

**762.** Rozważmy układ odniesienia, w którym spoczywa środek masy wszystkich trzech cząstek – wyjściowego elektronu i tworzącej się pary elektron–pozyton. W tym układzie energia całkowita będzie najmniejsza, jeśli wszystkie te cząstki będą spoczywały. W układzie laboratoryjnym odpowiada to sytuacji, gdy wszystkie cząstki po utworzeniu się pary mają jednakowe wektory prędkości. Masy cząstek są jednakowe, zatem jednakowe są też ich wektory pędu. Pęd fotonu przed powstaniem pary zostaje rozdzielony równo pomiędzy trzy cząstki w stanie końcowym:  $p_f = 3p$ , gdzie  $p$  jest pędem każdej z nich. Z zasad zachowania energii:

$$p_f c + mc^2 = \sqrt{p_f^2 c^2 / 9 + m^2 c^4},$$

gdzie  $m$  jest masą elektronu. Stąd szukana energia progowa fotonu wynosi  $4mc^2$ .

**763.** Założymy, że w pewnej chwili zajęc znajdują się w punkcie  $A$  (rys. 2). Zgodnie z treścią zadania wilk powinien znajdować się w tej chwili w punkcie  $B$  – wierzchołku trójkąta równoramiennego  $OAB$ . Wilk przemieszcza się w kierunku osi  $OX$  ze stałą prędkością  $v_0/2$ , zatem jego przyspieszenie  $a$  ma kierunek wysokości trójkąta  $OAB$ , a jego prędkość wypadkowa jest styczna do okręgu i wynosi  $V = (v_0/2) \cos \alpha$ . Przyspieszenie dośrodkowe  $a_d = V^2/R = a \cos \alpha$ , stąd  $a = v_0^2/4R \cos^3 \alpha$ . Z drugiej strony  $a = T/M \leq \mu g$ , gdzie  $M$  jest masą wilka, a  $T$  siła tarcia statycznego. Maksymalny kąt opisujący punkt na okręgu, do którego może dotrzeć wilk, określa równanie  $\cos \alpha_0 = \sqrt[3]{v_0^2/4R\mu g} \approx 0,59$ , stąd  $\alpha_0 \approx 54^\circ$ .

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
760 ( $WT = 2,6$ ), 761 ( $WT = 1,83$ )  
z numeru 6/2023

Tomasz Rudny	Poznań	43,41
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2-40,56
Jacek Konieczny	Poznań	38,28
Tomasz Wietecha	Tarnów	16-37,54
Konrad Kapcia	Poznań	2-35,60
Ryszard Baniewicz	Włocławek	1-29,40
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3-20,97
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5-20,95



**Rozwiązanie zadania F 1088.** Dla układu dwóch ciał o masach  $m$  i  $M$  trzecie prawo Keplera podaje związek okresu  $T$  ich wzajemnego obiegu z wielką osią orbity  $a$  oraz stałą grawitacji  $G$ :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2}.$$

Gdy  $m \ll M$ , to w powyższym wzorze może zostać pominięte. Otrzymujemy wtedy związek:

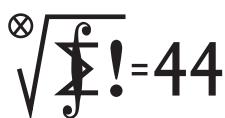
$$M = A \frac{a^3}{T^2},$$

w którym  $A = 4\pi^2/G$  jest „uniwersalną” stałą. Możemy teraz łatwo wyznaczyć poszukiwane stosunki mas:

$$\frac{M_S}{M_Z} = \frac{a_Z^3 T_K^2}{a_K^3 T_Z^2} \approx 331\,000, \quad \frac{M_J}{M_Z} = \frac{a_C^3 T_K^2}{a_K^3 T_C^2} \approx 316.$$

W każdym z wymienionych układów obserwowane rozmiary satelity są znacznie mniejsze od rozmiarów ciała centralnego. Można więc przyjąć, że także masy satelitów są znacznie mniejsze od mas obieganych ciał centralnych.

# Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2024

## Zadania z matematyki nr 873, 874

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**873.** Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ . Niech  $\ell$  będzie dowolną prostą przecinającą boki  $AB$  i  $AC$  odpowiednio w takich punktach  $P$  i  $Q$ , że  $\angle ACP + \angle APQ = 90^\circ$ , i niech  $X$  będzie rzutem prostokątnym punktu  $C$  na prostą  $\ell$ . Udowodnić, że (dla ustalonego trójkąta  $ABC$ ) wszystkie punkty  $X$ , uzyskane w ten sposób przy różnych dopuszczalnych położeniach prostej  $\ell$ , leżą na jednej prostej.

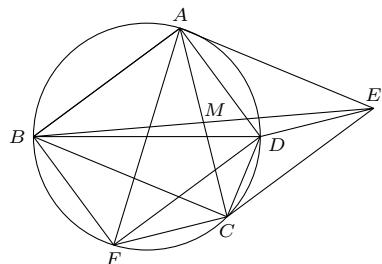
**874.** Liczba  $\sqrt{7}$  została zapisana w systemie dwójkowym jako  $1, c_1 c_2 c_3 \dots$ ; to znaczy  $\sqrt{7} = 2^1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i 2^{-i}$ ,  $c_i \in \{0, 1\}$ . Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  suma  $\sum_{i=n}^{2n} c_i$  jest dodatnia.

Zadanie 874 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

## Rozwiązań zadań z numeru 9/2023

Przypominamy treść zadań:

**865.** W czworokącie wypukłym  $ABCD$  kąty przy wierzchołkach  $A$  i  $C$  są proste (ale nie przy wierzchołkach  $B$  i  $D$ ). Punkt  $M$  jest środkiem przekątnej  $AC$ . Punkt  $E$  jest symetryczny do  $B$  względem  $M$ . Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach  $ABC$  i  $ADE$  są przystające.



**866.** Dane są dwie różne liczby pierwsze  $p, q$  takie, że  $2^p - 1$  oraz  $2^q - 1$  też są liczbami pierwszymi, a ponadto każda z liczb  $2^{p-1} - 1$  oraz  $2^{q-1} - 1$  dzieli się przez iloczyn  $pq$ . Udowodnić, że jeżeli liczba całkowita dodatnia  $d$  jest dzielnikiem liczby  $2^{pq} - 1$ , to liczba  $d - 1$  dzieli się przez  $pq$ .

**865.** Punkty  $A$  i  $C$  leżą na okręgu o średnicy  $BD$ . Niech  $F$  będzie punktem antypodalnym do  $A$  na tym okręgu; odcinek  $AF$  też jest jego średnicą, więc czworokąt  $ABFD$  jest prostokątem. Odcinki  $AC$  i  $BE$  mają wspólny środek  $M$ , co oznacza, że czworokąt  $ABCE$  jest równoległobokiem. Zatem  $AE = BC$ ,  $AD = BF$ ; dostajemy też związki równoległości  $AE \parallel BC$  oraz  $AD \parallel BF$ . Wynika z nich, że  $\angle DAE = \angle FBC$  (punkty  $C$  i  $F$  nie pokrywają się, bowiem – z założenia – kąty  $ABC$  i  $CDA$  nie są proste; z tego samego powodu nie pokrywają się punkty  $D$  i  $E$ ).

Z uzyskanych zależności wniosimy, że trójkąty  $DAE$  i  $FBC$  są przystające; zatem i okręgi na nich opisane są przystające. Pozostaje zauważać, że okrąg  $FBC$  jest też opisany na trójkącie  $ABC$ .

**866.** Rozważmy najpierw przypadek, gdy  $d$  jest liczbą pierwszą (nieparzystą, skoro dzieli liczby  $2^p - 1$ ). Niech  $t$  będzie najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, dla której  $2^t \equiv 1 \pmod{d}$ . Ponieważ (z założenia)  $2^{pq} \equiv 1 \pmod{d}$ , zatem  $pq$  dzieli się przez  $t$ .

Możliwe są trzy podprzypadki:  $t = pq$  lub  $t = p$  lub  $t = q$ . W myśl małego twierdzenia Fermata  $2^{d-1} \equiv 1 \pmod{d}$ , zatem także wykładnik  $d - 1$  dzieli się przez  $t$ . W podprzypadku  $t = pq$  jest to teza zadania.

W podprzypadku  $t = p$  liczba  $d$  jest dzielnikiem liczby  $2^p - 1$  (która z założenia jest pierwsza); to znaczy, że  $d = 2^p - 1$ . Stąd  $d - 1 = 2(2^{p-1} - 1)$ . To znów daje tezę, bo czynnik w nawiasie jest (z założenia) podzielny przez  $pq$ . Dla  $t = q$  rozumowanie biegnie tak samo.

Pozostaje przypadek ogólny – gdy  $d = d_1 \dots d_n$  (iloczyn liczb pierwszych, niekoniecznie różnych). Założenie  $d \mid 2^{pq} - 1$  implikuje, że  $d_i \mid 2^{pq} - 1$  dla wszystkich  $i$ . Na mocy przypadku już rozpatzonego:  $d_i \equiv 1 \pmod{pq}$  dla wszystkich  $i$ . Stąd  $d \equiv 1 \pmod{pq}$  – czyli teza w przypadku ogólnym.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 863 ( $WT = 2,33$ ) i 864 ( $WT = 2,40$ ) z numeru 6/2023

Krzysztof Maziarz	Londyn	44,68
Radosław Kujawa	Wrocław	43,57
Paweł Najman	Kraków	43,16
Adam Woryna	Ruda Śl.	40,91
Marek Spychała	Warszawa	40,20
Janusz Fiett	Warszawa	39,62
Jerzy Cisło	Wrocław	37,70
Paweł Kubit	Kraków	36,11
Szymon Tur		35,35
Piotr Kumor	Olsztyn	35,26

Pan Krzysztof Maziarz (niegdyś z Jasła, potem z Krakowa, teraz z Londynu) zgromadził do końca roku 2021 saldo 40,67p., po czym się chwilowo z nami rozstał; jego nazwisko wkrótce zniknęło z publikowanej czołówki. Ale oto wrócił – i od razu z grabnym ruchem przeskoczył 44 p., dołączając tym samym do matematycznego Klubu 44.

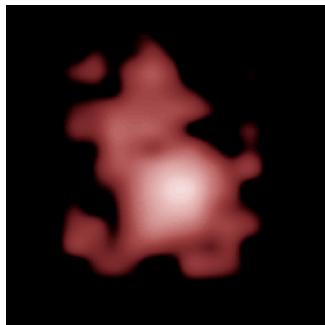
### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązań tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## Prosto z nieba: Młode i energiczne czarne dziury wczesnego Wszechświata

GN-z11 przez długi czas (od 2016 r.) była absolutnie najodleglejszą galaktyką zaobserwowaną przez ludzi (pisaliśmy o niej wielokrotnie na łamach *Depty*). Została zdetonizowana dopiero po pojawienniu się Kosmicznego Teleskopu Jamesa Webba, który zaobserwował 8 jeszcze odleglejszych galaktyk (stan na listopad 2023).



Galaktyka GN-z11. Zdjęcie wykonane przez Teleskop Kosmiczny Hubble'a. Źródło: NASA, ESA , P. Oesch (Yale University), G. Brammer (STScI), P. van Dokkum (Yale University), and G. Illingworth (University of California, Santa Cruz)

Grupa naukowców pod kierunkiem prof. Roberto Maiolino zidentyfikowała w widmie GN-z11 parę położonych blisko siebie linii emisyjnych (zwanych dubletami) związanych z potrójnie zjonizowanym neonem. Zjonizowanie neonu wymaga fotonów o bardzo wysokiej energii, które mogły zostać wyprodukowane tylko przez AGN. Więc bingo! – GN-z11 posiada młodą czarną dziurę o masie około miliona razy większej od masy naszego Słońca. Pozostaje więc odpowiedzieć na pytanie: jak taka bardzo masywna czarna dziura powstała?

Rozpatrzone dwa scenariusze. Pierwszy scenariusz zakładał, że młoda czarna dziura od swoich narodzin rosła przez akrecję materii na tzw. granicy Eddingtona (teoretycznym maksymalnym tempie akrecji). W tym scenariuszu czarna dziura w centrum GN-z11 powstałaby, mając masę około tysiąca razy większą niż masa Słońca (jako tzw. ciężkie ziarno, ang. *heavy seed*). Uważa się, że takie czarne dziury powstają w wyniku bezpośredniego zapadnięcia się masywnej chmury gazu, w przeciwieństwie do typowej czarnej dziury, która rodzi się, gdy masywna gwiazda osiąga koniec swojego życia i zapada się pod wpływem własnej grawitacji. Z drugiej strony, w drugim scenariuszu, założono, że czarna dziura w centrum GN-z11 powstała właśnie w taki typowy sposób, w wyniku zapadnięcia się masywnej gwiazdy o masie około 10–100 razy większej od masy Słońca. Wówczas okazało się,

Supermasywne czarne dziury, o masach przekraczających kilka miliardów mas Słońca, zostały zaobserwowane we Wszechświecie liczącym sobie mniej niż 1 miliard lat (na przesunięciach ku czerwieni 6–7). Ich istnienie tak krótko po Wielkim Wybuchu stanowi nie lada wyzwanie dla modeli teoretycznych opisujących powstanie i ewolucję struktur Wszechświata. Problem stanowi czas, a konkretnie jego brak. Astronomowie zadają sobie pytanie, jak tak masywne obiekty mogły powstać w tak krótkim (w rozumieniu kosmicznym) czasie? Jakie były ich początki? Jakie procesy były odpowiedzialne za dramatyczne zwiększenie ich masy? A może ich masa była tak duża już w momencie powstania?

Większość z tych pytań pozostaje do dziś otwarta, a otwarte pytania to jest to, co astrofizycy lubią najbardziej. Na warsztat wzięli więc oni jedną z najodleglejszych zaobserwowanych galaktyk – GN-z11. Jest to niezwykle jasna galaktyka. Szacuje się, że masa gwiazd tej galaktyki jest równoważna masie około miliarda Słońca – co czyni ją wyjątkowo masywną, biorąc pod uwagę jej wiek (obserwujemy ją taką, jaką była, gdy Wszechświat liczył sobie zaledwie 400 milionów lat). Jednym z możliwych wyjaśnień jej niesamowitej jasności jest to, że duża część światła tej galaktyki jest wytwarzana nie przez gwiazdy, a przez aktywnie akrencyjną (pochłaniającą) materię supermasywną czarną dziurą w jej centrum (tak zwane aktywne jądro galaktyki, AGN). Obecność AGN pomogłaby rozładować napięcie związane z wykryciem GN-z11 i innych „zbyt” jasnych galaktyk obserwowanych coraz częściej we wczesnym Wszechświecie. Chociaż jest to obiecujący pomysł, to jego potwierdzenie wymaga precyzyjnego wykrycia linii emisyjnych w widmie galaktyki – i tutaj wkracza oczywiście Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba (JWST)!

że aby osiągnąć swoją obserwowaną masę, musiała pochłaniać materię w tempie znacznie przekraczającym teoretyczny limit Eddingtona.

Oba scenariusze są prawdopodobne, ale co ciekawe, można wykluczyć drugi scenariusz, przewidując, co się stanie z czarną dziurą w GN-z11, gdy dorosnie. Śledząc historię wzrostu czarnych dziur w czasie, naukowcy odkryli, że ograniczona limitem Eddingtona ewolucja czarnej dziury z tzw. ciężkiego ziarna pozwala przewidzieć zarówno obserwowaną masę czarnej dziury GN-z11, jak i masy obserwowanych populacji masywnych czarnych dziur na niższych przesunięciach ku czerwieni, podczas gdy drugi scenariusz tego nie potrafi.

Oczywiście zanim ogłosimy sukces i potwierdzimy istnienie populacji czarnych dziur powstałych z „ciężkiego ziarna” oraz ustalimy ich związek z supermasywnymi czarnymi dziurami późniejszego Wszechświata, trzeba przeprowadzić jeszcze wiele badań. Cóż, szczerze mamy teleskop, który umożliwia nam te poszukiwania!

Oparte na publikacji Roberto Maiolino et al. (2023), “A small and vigorous black hole in the early universe”, arXiv:2305.12492.

Anna DURKALEC

Departament Badań Podstawowych (BP4),  
Zakład Astrofizyki, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

## Niebo w styczniu

Początek roku zawsze oznacza największe zbliżenie Ziemi do Słońca i maksimum obfitego roju meteorów Kwadrantydów. Nasza planeta przechodzi przez peryhelium swojej orbity 3 stycznia. Kwadrantydy zaś promienią od 28 grudnia do 12 stycznia, z bardzo krótkim maksimum 4. dnia miesiąca. Są to meteory średnio szybkie, ich prędkość zderzenia z atmosferą Ziemi wynosi

około 41 km/s, a w okresie największej aktywności można się spodziewać około 100 zjawisk na godzinę. Zdarzają się jednak lata, że jest ich nawet 2 razy więcej. Radian roju znajduje się na północ od głównej figury gwiazdozbioru Wolarza i nad położonym bliżej bieguna fragmentem północnej półkuli Ziemi nigdy nie zachodzi. Kwadrantydy najlepiej obserwować rano. U nas o godzinie 5 radiant

wznosi się na wysokość ponad  $60^{\circ}$  nad wschodnią częścią nieboskłonu. Szkoda, że w tym roku w ich obserwacjach przeszkodzi Księżyce w ostatniej kwadrze.

Sam Srebrny Glob zdeterminuje swoim blaskiem poranne niebo na początku stycznia, zaczynając miesiąc w fazie 77% mniej więcej  $8^{\circ}$  na wschód od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Trzy dni później nastąpi wspomniana już ostatnia kwadra, podczas której towarzystwa Księżycom dotrzyma Porrima, jedna z jaśniejszych gwiazd Panny, znana z tego, że jest ciekawym układem podwójnym, gdzie dwie gwiazdy o jasnościach obserwowanych około  $3,5^m$  obiegają się co 169 lat, oddalając się od siebie na nawet  $6''$ . Niestety obecnie ta odległość jest znacznie mniejsza. Księżyce pokaże się jakieś  $4^{\circ}$  pod tym układem gwiazd. 5 stycznia natomiast Księżyce wzajemnie  $1,5^{\circ}$  na wschód od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy konstelacji.

Naturalny satelita Ziemi podąży ku nowiu, przez który przejdzie 11 stycznia. Ze względu jednak na to, że wędruje wtedy głęboko pod ekiptyką, jego cienki sierp da się łatwo dostrzec jeszcze tylko 7. i 8. dnia miesiąca. Najpierw jego tarcza zaprezentuje fazę 20% na tle południowej części gwiazdozbioru Wagi. Dobę później jego sierp dostrzeżemy do gwiazdozbioru Skorpiona, zmniejszając przy tym fazę do 13%. O świcie Księżyce zdąży się wznieść na wysokość  $9^{\circ}$ , a wokół niego znajdzie się dużo jasnych ciał niebieskich. W bezpośredniej bliskości po jego prawej stronie pokaże się łuk gwiazd z północno-zachodniej części konstelacji z Graffias i Dschubbą; na godzinie 8 względem niego pokaże się Antares; trochę dalej ( $9^{\circ}$ ) na godzinie 10 pokaże się planeta Wenus; całkiem daleko już natomiast (ok.  $20^{\circ}$ ) na godzinie 8:30 da się odnaleźć planetę Merkury. Księżyce w fazie 7% można próbować dostrzec też 9 stycznia, ale o tej samej porze zajmie on pozycję na wysokości niewiele ponad  $2^{\circ}$  między Wenus a Merkurem.

Obie planety wewnętrzne są w tym miesiącu widoczne niezbyt dobrze, ponieważ wędrują przez okolice najbardziej na południe wysuniętej części ekiptyki. Na szczęście dla nas są na północ od niej. Wenus dąży do koniunkcji górnej ze Słońcem na początku czerwca, ale ze względu na niekorzystne nachylenie ekiptyki do porannego widnokregu na przełomie zimy i wiosny zniknie z nieboskłonu już w lutym. Planeta nie jest atrakcyjnym celem dla posiadaczy teleskopów, gdyż jej tarcza o jasności  $-4^m$  pokaże malejącą średniicę od  $14''$  do  $12''$  z rosnącą fazą od 77% do 84%.

Merkury natomiast 12 stycznia osiągnie swoją maksymalną elongację zachodnią, wynoszącą tym razem całkiem spore  $23^{\circ}$ . Niestety nie oznacza to jego dobrej widoczności. Największą wysokość nad horyzontem planeta osiągnie już 6 stycznia, wznosząc się godzinę przed wschodem Słońca na wysokość zaledwie  $5^{\circ}$ , a zniknie w zorzy porannej jeszcze w drugiej dekadzie miesiąca. W tym czasie jasność planety wzrośnie od  $+0,1^m$  do  $-0,2^m$ , jej średnica kątowa spadnie od  $8''$  do  $6''$ , faza zaś zwiększy się od około 35% do 75%. Tuż przed końcem widoczności Merkurego zbliży się doń Wenus na odległość  $11^{\circ}$ . Zdecydowanie jaśniejszą Wenus można wykorzystywać do odnalezienia słabiej widocznego Merkurego. Pierwszej planety od Słońca należy szukać kilkanaście stopni od drugiej, patrząc w kierunku godziny 7.

W styczniu zaczyna wyraźnie poprawiać się nachylenie ekiptyki do wieczornego horyzontu, dlatego Księżyce po nowiu stanie się ozdobą nieba po zmierzchu. Zwłaszcza w pierwszych dniach, gdy zaprezentuje tzw. światło popielate. Już 13. dnia miesiąca jego sierp w fazie 6% można łatwo odnaleźć jakieś  $12^{\circ}$  pod Saturnem, względnie  $20^{\circ}$  na prawo od Fomalhauta, najjaśniejszej gwiazdy Ryby Południowej. Dobę później tarcza Księżyca w fazie  $13^{\circ}$  zbliży się na  $3,5^{\circ}$  do planety z pierścieniami. Sam Saturn dąży do spotkania ze Słońcem 28 lutego i jego warunki obserwacyjne pogarszają się właściwie z nocą na noc, gdyż planeta zbliża się szybko do linii widnokregu, i tak samo szybko skraca czas przebywania na niebie po zmierzchu. Saturn świeci blaskiem  $+1^m$ , mając tarczę o średnicy  $16''$ .

15 stycznia Srebrny Glob w fazie 23% spotka się z Neptunem, zbliżając się doń na odległość  $3,5^{\circ}$ . Do końca miesiąca planeta dostrzeżemy na  $43'$  do gwiazdy 5. wielkości 20 Psc, 22 stycznia mijając w odległości  $9'$  gwiazdę 7. wielkości HD 222878. Neptun świeci znacznie słabiej od Saturna, z jasnością  $+7,9^m$ , stąd choć jego koniunkcja ze Słońcem przypada 3 tygodnie po Saturnie, to zniknie on w zorzy wieczornej nawet wcześniej.

18 stycznia rano Srebrny Glob przejdzie przez I kwadrę, a wieczorem spotka się z Jowiszem. Około godziny 21 oba ciała przedzieli  $2^{\circ}$ , a do tego czasu faza Księżyca urosnie do 57%. Dobę później, przy fazie o  $10^{\circ}$  większej, czeka Księżyce spotkanie z Uranem w odległości  $2,5^{\circ}$ . Jowisz przecina południk lokalny około godziny 18, Uran zrobi to samo niecałą godzinę później, wznosząc się przy tym na ponad  $50^{\circ}$ . Obie planety powoli zbliżają się do swoich koniunkcji ze Słońcem, stąd ich jasności i średnice kątowe maleją. Szczególnie widoczne jest to w przypadku Jowisza, który kraży bliżej nas, a średnica orbity naszej planety stanowi większą część średnicy orbity jowiszoowej. Stąd do końca stycznia jego blask zmniejszy się od  $-2,6^m$  do  $-2,4^m$ , a tarcza skurczy się od  $44''$  do  $40''$ . Uran utrzyma blask  $+5,7^m$  i średnicę tarczy niecałe  $4''$ . Zmniejsza się też stopniowo dystans na niebie między samymi planetami. Ostatniego dnia miesiąca wyniesie on  $11^{\circ}$ . W kwietniu natomiast planety zbliżą się do siebie na zaledwie  $40'$ . Niestety wtedy już prawie dogoni je Słońce, i szczególnie Uran zacznie ginąć w jego blasku.

W dniach 20–22 stycznia Księżyce odwiedzi gwiazdozbiór Byka, zwiększając fazę od 77% do 92%. Pierwszej z wymienionych nocy jego tarcza dostrzeżemy na pozycję  $2^{\circ}$  od Plejad, a następnie minie gwiazdę El Nath, czyli drugą co do jasności mieszkankę tej konstelacji. 24. dnia miesiąca Księżyce prawie w pełni znajdzie się  $2^{\circ}$  od Polluxa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt, by następnie doby przejść przez pełnię w Raku. Silny blask Srebrnego Globu uniemożliwi wtedy obserwację słynnej gromady gwiazd M44.

Na ostatnie kilka dni naturalny satelita Ziemi przeniesie się na niebo poranne, wizytując ponownie obszar nieba z początku miesiąca. 27 stycznia zaprezentuje tarczę oświetloną w 95%, mijając Regulusa w odległości mniejszej niż  $3^{\circ}$ , ostatniej zaś nocy miesiąca zdąży dostrzeżć do Spiki, świecąc niecałe  $4^{\circ}$  od niej.

Ariel MAJCHER

## Sytuacja w normie, nic nie działa

Dziewięćdziesiąt lat temu Robert J. Van de Graaff zbudował 12-metrowy generator elektrostatyczny w laboratorium Round Hill należącym do Massachussets Institute of Technology. Generator nie działał poprawnie, gdyż gnieźdżące się w hangarze eksperymentalnym gołębie pozostawiały niejednorodności natury organicznej na zewnętrznej elektrodzie, co powodowało częste lecz niepożądane przebicia do dachu.

Po śmierci Roberta J. Van de Graffa związane z nią doniesienia prasowe zainspirowały trzech studentów Uniwersytetu w Manchesterze do stworzenia zespołu rockowego *Van der Graaf Generator*. Nie dość, że zrobili literówki w nazwisku uczonego, to jeszcze ich pierwszy publiczny występ zakończył się po pięciu minutach przepaleniem wzmacniaczy.

Benjamin Franklin znany jest fizykom jako niestrudzony eksperymentator. Podczas pobytu w Paryżu ponoć popularyzował on wiedzę o elektryczności, piekając indyki na elektrycznym roźnie zasilanym ogromnym kondensatorem. Przygotowując te pokazy, Franklin został wielokrotnie porażony prądem, co spowodowało u niego brak czucia w rękach.

Pierwszy elektromagnes został stworzony przez Williama Sturgeona. Badacz ten założył również czasopismo naukowe pt. *The Annals of Philosophical Discovery and Monthly Reporter of the Progress of Practical Science*, które zostało zamknięte zaledwie po pierwszym roku wydawania.

Urodzony w Oslo Lars Onsager otrzymał Nagrodę Nobla za sformułowanie relacji wzajemności w termodynamice nierównowagowej, zwanych czasem czwartą zasadą termodynamiki. Jego wykłady z fizyki statystycznej na Uniwersytecie Yale były określane przez studentów jako „Norweski dla zaawansowanych”, ze względu na ich niezrozumiałosć.

Michael Faraday rozpoczął swoją karierę naukową jako asystent Humphry'ego Davy'ego. Ten potrzebował bowiem wsparcia w laboratorium, doznawszy uszkodzeń wzroku po tym, jak wybuchła trichloramina, z którą eksperymentował. Wkrótce także Faraday został ranny w wybuchu trichloraminy.

François Arago był entuzjastą falowej teorii światła w czasach, kiedy nie była ona powszechnie przyjmowana. Aby potwierdzić tę teorię, zaproponował rozstrzygający eksperyment pomiaru prędkości światła. Niestety postępująca cukrzyca z komplikacjami niekorzystnie wpływającymi na wzrok sprawiła, że nie był on w stanie wykonać takiego doświadczenia. Dziś te klasyczne eksperymenty nazywa się doświadczeniami Fizeau i Foucaulta.

Równanie łączące współczynnik załamania substancji z jej polaryzalnością zostało po raz pierwszy zaproponowane przez duńskiego fizyka Ludwiga Lorenza. Dziewięć lat później na ten sam pomysł wpadł bardziej znany holenderski fizyk Hendrik Lorentz. Relacja ta jest obecnie znana jako równanie Lorenza–Lorentza. Ludwig Lorenz jest także twórcą tzw. warunku cechowania Lorenza w elektrodynamice. Warunek ten jest często wykorzystywany przez teoretyków, gdyż ma taką samą postać w dowolnym inercjalnym układzie odniesienia z uwagi na swą niezmienniczość względem

transformacji Lorentza szczególnej teorii względności. Większość fizyków nie jest w stanie poradzić sobie z tym galimatiasem i przypisuje osiągnięcia temu sławniejszemu.

Współczesna astronomia wiele zawdzięcza Arthurowi Eddingtonowi, pionierowi zastosowań teorii względności i fizyki jądrowej do opisu ciał niebieskich. W jednej ze swych prac Eddington dowodził, że odwrotność tzw. stałej struktury subtelnej  $\alpha$  w widmie atomu wodoru, wynosząca w przybliżeniu 137, daje się w mechanice kwantowej zrozumieć jako liczba niezależnych elementów symetrycznej tablicy  $16 \times 16$  plus 1 na ruch orbitalny elektronu. Praca Eddingtona doczekała się nawet parodii, opublikowanej przez Becka, Bethego i Riezlera w renomowanym czasopiśmie *Die Naturwissenschaften*, w której autorzy ze śmiertelną powagą dowodzą, że wartość liczbową temperatury zera absolutnego wyrażoną w stopniach Celsjusza to  $-273 = -(2/\alpha - 1)$ .

Uprawianie nauki bywa żmudne i frustrujące, bo wiele prób odkrycia czegoś nowego po prostu się nie udaje, a czasem nawet to, co wychodzi, nie jest odpowiednio doceniane. Warto pamiętać i doceniać ten codzienny i trochę niewdzięczny trud pracy badawczej.

Krzysztof TURZYŃSKI



# Wielomiany podziału koła – część 1

## Bartłomiej BZDĘGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Poniższe twierdzenia są podstawą tego kącika. Dla完备ności podaję ich dowody, w których wykorzystuje się liczby zespolone. Czytelnik nieznający liczb zespolonych może je bez obaw pominać i przejść od razu do zadań.

**Twierdzenie 1.** Istnieją (i są określone jednoznacznie) takie wielomiany unormowane (tzn. mające współczynnik 1 przy najwyższej potędze zmiennej)  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$  o współczynnikach całkowitych, że dla każdego całkowitego dodatniego  $n$  zachodzi równość:

$$(1) \quad x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x).$$

Wielomiany  $\Phi_d(x)$  nazywamy *wielomianami podziału koła* (lub *cyklotomicznymi*).

**Twierdzenie 2.** Niech  $\varphi$  oznacza funkcję Eulera (zobacz kącik nr 45 w  $\Delta_{22}^9$ ). Dla  $x \geq 1$  zachodzą nierówności:

$$(2) \quad (x-1)^{\varphi(n)} \leq \Phi_n(x) \leq (x+1)^{\varphi(n)},$$

przy czym pierwsza z nich jest ostra dla  $n \geq 2$ , a druga dla  $n \geq 3$ . W szczególności dla  $n \geq 2$  i  $x \geq 2$  mamy  $\Phi_n(x) > 1$ .

Liczبę zespoloną  $\zeta$  nazywamy *pierwiastkiem n-tego stopnia z 1*, jeśli  $\zeta^n = 1$ .

Jeżeli ponadto  $\zeta^m \neq 1$  dla  $1 \leq m < n$ , to liczbę  $\zeta$  nazywamy *pierwotnym pierwiastkiem stopnia n z 1*. Niech  $\zeta_n = e^{2\pi i/n} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ . Wówczas zbiór  $\mu_n = \{\zeta_n, \zeta_n^2, \zeta_n^3, \dots, \zeta_n^n\}$  stanowi wszystkie pierwiastki stopnia  $n$  z jedności, a zbiór  $\mu_n^* = \{\zeta_n^k : 1 \leq k \leq n, \text{NWD}(k, n) = 1\}$  stanowi wszystkie pierwiastki pierwotne.

**Lemat.** Wielomiany  $\Phi_n(x) = \prod_{\zeta \in \mu_n^*} (x - \zeta)$  spełniają równość (1).

*Dowód.* Wykażemy najpierw równość  $\mu_n = \bigcup_{d|n} \mu_d^*$ . Ułamek  $a/n$  dla  $a = 1, 2, \dots, n$  możemy w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci  $k/d$ , w której  $d | n$ ,  $1 \leq k \leq d$  oraz  $\text{NWD}(k, d) = 1$ . Na odwrót, każdy taki ułamek  $k/d$  możemy jednoznacznie rozszerzyć do ułamka  $a/n$ . Na tej podstawie tworzymy bijekcję zbiorów  $\mu_n$  i  $\bigcup_{d|n} \mu_d^*$  określzoną

przez  $\zeta_n^a \mapsto \zeta_d^k$  ( $k/d$  jest postacią nieskracalną ułamka  $a/n$ ). Pozostaje jeszcze zauważyć, że wówczas  $\zeta_n^a = e^{2a\pi/n} = e^{2k\pi/d} = \zeta_d^k$ , więc ta bijekcja jest identycznością.

Z udowodnionej równości wynika, że

$$x^n - 1 = \prod_{\zeta \in \mu_n} (x - \zeta) = \prod_{d|n} \prod_{\zeta \in \mu_d^*} (x - \zeta),$$

co kończy dowód lematu.

*Dowód twierdzenia 1.* Oczywiście wielomiany  $\Phi_m(x)$  z lematu są unormowane.

Wybierzmy dowolne  $n > 1$  i założmy indukcyjnie, że wielomiany  $\Phi_m$  mają wszystkie współczynniki całkowite dla każdego  $m < n$ . Niech  $\Psi_n(x) = \prod_{d|n, d < n} \Phi_d(x)$ . Z lematu wynika, że  $\Phi_n(x)\Psi_n(x) = (x^n - 1)$ . Na mocy założenia indukcyjnego  $\Psi_n(x)$  to unormowany wielomian o współczynnikach całkowitych, skąd (i z poprzedniej równości)  $\Phi_n(x)$  też ma współczynniki całkowite, co kończy dowód indukcyjny i uzasadnienie istnienia postulowanych w twierdzeniu 1 wielomianów. Analogiczną indukcję dowodzimy jednoznaczności (wielomiany  $\Phi_d$  opisane w twierdzeniu dla  $d < n$ ,  $d | n$  oraz równość (1) jednoznacznie wyznaczają wartości wielomianu  $\Phi_n$ ).

*Dowód twierdzenia 2.* Ponieważ  $\Phi_1(x) = x - 1$  i  $\Phi_2(x) = x + 1$ , teza jest oczywista dla  $n \leq 2$ . Dalej niech  $n \geq 3$ . Jeśli  $\zeta \in \mu_n^*$ , to  $|\zeta| = 1$  i  $\zeta \neq \pm 1$ . Wobec tego  $x - 1 < |x - \zeta| < x + 1$ . Stopień wielomianu  $\Phi_n(x)$  jest równy  $|\mu_n^*| = \varphi(n)$ . Wynika z tego, że  $(x-1)^{\varphi(n)} < |\Phi_n(x)| < (x+1)^{\varphi(n)}$ . Pozostaje zauważyć, że dla  $n \geq 3$  wielomian  $\Phi_n(x)$  jest unormowany i nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc  $\Phi_n(x) > 0$  dla wszystkich rzeczywistych  $x$ , czyli  $|\Phi_n(x)| = \Phi_n(x)$ .

### Zadania

- Udowodnić, że istnieją liczby naturalne  $a_1, a_2, \dots, a_{15} > 1$  spełniające równość  $a_1 a_2 \dots a_{15} = 2^{2024} - 1$ .
- Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne  $n$ , dla których liczba  $n^{10} + n^5 + 1$  jest pierwsza.
- Niech  $p$  i  $q$  będą dwiema różnymi liczbami pierwszymi i niech  $n \geq 2$  będzie liczbą naturalną. Dowieść, że liczby  $1 + n^p + n^{2p} + \dots + n^{(q-1)p}$  i  $1 + n^q + n^{2q} + \dots + n^{(p-1)q}$  mają wspólny dzielnik większy niż 1.
- Niech  $a > 1$  będzie liczbą naturalną. Dowieść, że jeśli  $a^{(k-1)n} + \dots + a^{2n} + a^n + 1$  jest liczbą pierwszą, to  $k$  jest liczbą pierwszą, a  $n$  jest jej potęgą.
- Niech  $p$  będzie dzielnikiem pierwszym liczby  $2^{n!} - 1$ . Udowodnić, że  $p^{H_n} \leq 3^{n!}$ , przy czym  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ .
- Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych  $a$  o następującej własności: każdy dzielnik pierwszy liczby  $a^2 + a + 1$  jest mniejszy od  $\sqrt{a}$ .