# Zadania uzupełniające do rozdziału 2.

**Zadanie 1.** Udowodnij metodą zero-jedynkową poniższe tautologie:
a) prawo podwójnego przeczenia
b) prawo zaprzeczenia implikacji
c) prawo kontrapozycji
d) prawo łączności alternatywy
e) dowolną z pozostałych w teorii tautologię

**Zadanie 2.** Niech $A, B, C$ będą dowolnymi zbiorami. Udowodnij przy pomocy logiki matematycznej poniższe prawa rachunku zbiorów:
a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
c) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

**Zadanie 3.** Na przykładzie dwóch poniższych zdań wyjaśnić, dlaczego nie można przestawiać kolejności różnych kwantyfikatorów:
Zdanie 1:
$$\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} : \; x < y.$$
Zdanie 2:
$$\exists y \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{N} : \; x < y.$$

**Zadanie 4.** Wymyślić przykład „z życia wzięty” pokazujący podobną różnicę jak w zadaniu powyższym, że zamiana kwantyfikatorów tworzy nowe, inne zdanie.

**Zadanie 5.** Oceń wartość logiczną poniższych zdań, a następnie napisz ich zaprzeczenia:
a) $\left(3^2 + 3^2 + 3^2 \neq 3^3 \Rightarrow 101 + 106 \in \mathbb{P}\right) \Rightarrow \left(3,(7) \leqslant 3,7(7) \wedge 43^2 + 44^2 \neq 45^2\right)$
b) $\left(8 \nmid 2 \wedge 4\sqrt{2} \leqslant \sqrt{30}\right) \vee \left(3 + \sqrt{2} \neq 7 - \sqrt{2} \vee 0 = 2^0\right)$
c) $\exists x \in \mathbb{N}\, \forall a \in \mathbb{R}_- : \; a^x - 1 = 0$
d) $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists b \in \mathbb{R} : \; a \cdot \frac{1}{b} = 1$

**Zadanie 6** (matura maj 2019)**.** Dla dowolnych liczb $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1$ oblicz $\left(\log_{\frac{1}{x}} y\right) \cdot \left(\log_{\frac{1}{y}} x\right)$.

**Zadanie 7** (matura maj 2015)**.** Wykaż, że la dowolnych liczb $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1$ zachodzi równość $\log_x xy \cdot \log_y \frac{y}{x} = \log_y xy \cdot \log_x \frac{y}{x}$.

**Zadanie 8.** Wiedząc, że $\log_{12} 4 = a$, oblicz:

a) $\log_{12} 48$
b) $\log_{12} 3$
c) $\log_{12} 27$
d) $\log_{12} \dfrac{1}{4\sqrt{3}}$

**Zadanie 9** (matura maj 2021)**.** Niech $\log_2 18 = c$. Oblicz $\log_3 4$

**Zadanie 10** (matura próbna 2015)**.** Niech $\log_{24} 6 = a$. Oblicz $\log_6 256$

**Zadanie 11.** Niech $\log 15 = c$ oraz $\log_{20} 50 = d$. Oblicz $\log_9 40$

**Zadanie 12.** Niech $\log_{30} 3 = c$ oraz $\log_{30} 5 = d$. Oblicz $\log_{30} 8$

## Nierówności między średnimi

Poniższe zadania w większości pochodzą ze zbioru Pazdro do klasy 3.

**Zadanie 13.** Wykaż twierdzenie o sumie liczby i jej odwrotności dwoma sposobami: przy użyciu wzorów skróconego mnożenia oraz przy użyciu nierówności między średnimi.

**Zadanie 14.** Wykaż, że jeśli suma dodatnich liczb $a, b$ jest równa 3, to $a \cdot b \leqslant 2\frac{1}{4}$.

**Zadanie 15.** Wykaż, że jeśli liczby $x, y, z$ są dodatnie oraz $9x + y + 3z = 18$, to $8 - xyz \geqslant 0$.

**Zadanie 16.** Wykaż, że jeśli dodatnie liczby $p, q, r$ spełniają nierówność $p+q+r > 2$, to $3(p^2+q^2+r^2) > 4$.

**Zadanie 17.** Wykaż, że jeśli $x$ i $y$ są liczbami dodatnimi oraz $xy = \dfrac{1}{4}$, to $4(1 + x)(1 + y) \geqslant 9$.

**Zadanie 18.** Wykaż, że jeśli liczby $x, y$ są dodatnie, to $\dfrac{2x^2 + 2y^2}{xy} + 3\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) \geqslant 10$.

**Zadanie 19.** Wykaż, że jeśli $x > 0$, to $x^3 + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{54}{x} \geqslant 18$.

**Zadanie 20.** Wykaż, że jeśli $a \neq 0$, to $a^4 + \dfrac{128}{a^2} \geqslant 48$.

**Zadanie 21.** Wykaż, że jeśli liczby $a, b$ są dodatnie oraz $a + b = 12$, to $(2 + a)(2 + b) \leqslant 64$.

**Zadanie 22.** Wykaż, że jeśli liczby $a, b, c, d$ są dodatnie, to $\dfrac{2a + c}{b} + \dfrac{b + 5d}{c} + \dfrac{2bd + 5ac}{ad} \geqslant 16$.

**Zadanie 23.** Wykaż, że jeśli liczby $a, b$ są dodatnie, to $5 \cdot \left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2}\right) + \dfrac{6(a + b)^2 - 12ab}{ab} \geqslant 22$.

**Zadanie 24.** Wykaż, że jeśli liczby $x, y, z$ są dodatnie, to:

$$xy(3x + 2y - 4z) + yz(y + 3z - 4x) + xz(x + 2z - 4y) \geqslant 0.$$

**Zadanie 25.** Wykaż, że jeśli liczby dodatnie $a, b$ spełniają nierówność $a + b \geqslant 1$, to $a^4 + b^4 \geqslant \dfrac{1}{8}$.

**Zadanie 26.** Wykaż, że jeśli liczby $a, b, c$ są dodatnie, to:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} \geqslant 2\left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c}\right).$$

**Zadanie 27.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a, b$ zachodzi nierówność $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

**Zadanie 28** (3 OM. I stopień)**.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb $u, v, w \geqslant 0$ zachodzi nierówność $u^3 + v^3 + w^3 \geqslant 3uvw$.

**Zadanie 29.** *Udowodnij następującą nierówność:

$$\forall n \geqslant 2: \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) + 1.$$