

ZGODNE Z  
USZCZUPLONĄ  
PODSTAWĄ  
PROGRAMOWĄ

## ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH



# Nowa teraz matura

## MATEMATYKA

● Poziom rozszerzony

- nowe typy zadań maturalnych
- optymalna liczba zadań
- zadania CKE
- odpowiedzi do zadań
- zestaw wzorów





# Spis treści

Co znajdziesz w Zbiorze zadań maturalnych? .....	4
--	---

## Powtórzenie dział po dziale

1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne .....	8
2. Funkcje. Funkcja liniowa .....	17
3. Funkcja kwadratowa .....	25
4. Wielomiany .....	35
5. Funkcja wymierna .....	43
6. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna .....	52
7. Trygonometria .....	61
8. Ciągi .....	70
9. Planimetria .....	83
10. Geometria analityczna .....	97
11. Stereometria .....	108
12. Rachunek różniczkowy .....	118
13. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka .....	128

## Odpowiedzi

Powtórzenie dział po dziale .....	144
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych .....	174
Zestaw wzorów .....	175

SPRAWDŹ  
AKTUALNOŚCI CKE



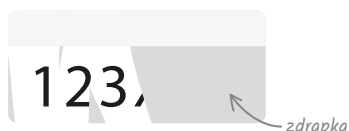
Kod:  
4ZGYEL

[app.nowaterazmatura.pl](http://app.nowaterazmatura.pl)

## Co znajdziesz w Zbiorze zadań maturalnych?

Zbiór zadań maturalnych „NOWA Teraz matura” do matematyki na poziomie rozszerzonym gwarantuje bardzo dobre przygotowanie do egzaminu z matematyki na obu poziomach. Zapewnia optymalny dobór i liczbę zadań. Dzięki zbiorowi zapoznasz się z różnymi typami poleceń zadań egzaminacyjnych. Rozwiązania do wszystkich zadań umieszczamy pod kodami QR – pozwolą one szybko sprawdzić, jak poradzić sobie z zadaniem, które sprawia ci problem. Część rozwiązań prezentujemy w postaci filmowej. Możesz skorzystać też z modeli rozwiązań zadań otwartych – znajdziesz je również pod kodami QR. Liczne odsyłacze zarówno do odpowiednich elementów zbioru oraz związanych z nim zasobów cyfrowych, jak i do innych publikacji, ułatwiają poruszanie się po zbiorze oraz korzystanie z dodatkowych pomocy.

Poniżej przedstawiamy poszczególne elementy układu treści w zbiorze, a także stosowane w nim oznaczenia.



Na początku publikacji znajdziesz kod dostępu do aplikacji [app.nowaterazmatura.pl](http://app.nowaterazmatura.pl). Zarejestruj się tam, aktywuj kod i korzystaj z zasobów cyfrowych do serii „NOWA Teraz matura”. Skanuj kody QR podczas pracy na urządzeniach mobilnych lub wpisuj kody literowo-cyfrowe do aplikacji podczas pracy przy komputerze.

### 3. Funkcja kwadratowa

Funkcją kwadratową lub trójmianem kwadratowym  

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Każdy dział pierwszej części zbioru zaczyna się od **zwięzłego wstępu** teoretycznego. Wyróżniliśmy go niebieskim tłem.

#### Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

Zadania w dziale są podzielone na trzy zestawy. W zestawie A znajdują się zadania ćwiczeniowe, często z kilkoma podpunktami, umożliwiające **powtórzenie materiału**.

#### Zestaw B. Przed maturą na poziomie podstawowym

Zestaw B zawiera zadania zamknięte i otwarte. Przy każdym zadaniu podano liczbę punktów przyznawaną za poprawne rozwiązanie. Egzamin w nowej formule przewiduje dużą **różnorodność zadań zamkniętych**. Oprócz zadań wielokrotnego wyboru znajdują się tam zadania typu prawda/fałsz, zadania na dobieranie, na uzasadnianie oraz wiązki zadaniowe.

#### Zestaw C. Przed maturą na poziomie rozszerzonym

Zestaw C to **wyłącznie zadania otwarte**. Na egzaminie na poziomie rozszerzonym wystąpi tylko taki rodzaj zadań. Ich rozwiązanie często wymaga złożonych i kilkietapowych działań. W tym zestawie umieszczamy także zadania typu wiązka – jest to grupa zadań powiązanych ze sobą tematycznie.

CKE maj 2021 PP

CKE maj 2021 PR

Wzory  
matematyczne CKEKod: GZ4ZYN  
app.nowaterazmatura.pl

Oznaczenie zadania, które wystąpiło na maturze w poprzednich latach lub w materiałach CKE i pasuje także do obecnych wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego (PP) lub dla poziomu rozszerzonego (PR).

Odnosnik do publikacji CKE „Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki”, z której można korzystać podczas egzaminów na obu poziomach. Warto tę publikację wydrukować i zaglądać do niej systematycznie, aby przyzwyczaić się do układu i zakresu prezentowanych w niej treści.

Film –  
rozwiązanie  
zadania

3 min

Kod: 33BTMB  
app.nowaterazmatura.pl

34.

Niebieskim zakreslaczem zostały wyróżnione numery wybranych zadań, reprezentatywnych dla działu. Za nie zabierz się w pierwszej kolejności, jeśli zdecydujesz się na szybką powtórkę. Do każdego takiego zadania jest dołączone **rozwiązanie w postaci filmu**.

Youtuber MiedzianyFsor prezentuje rozwiązania zadań z poziomu podstawowego.

Rozwiązania zadań z poziomu rozszerzonego prezentuje youtuber Marcin, prowadzący kanał Matma z pasją.

Z lewej strony kodu QR jest umieszczony orientacyjny czas trwania filmu.

Film –  
rozwiązanie  
zadania

7 min

Kod: CTYN15  
app.nowaterazmatura.pl

16.

→ Odpowiedzi  
s. 144

Odsyłacz do krótkich **odpowiedzi**, które znajdują się w drugiej części zbioru.

**Zestaw A – odpowiedzi****Zestaw B – odpowiedzi****Zestaw C – odpowiedzi**

Druga część zbioru to *Odpowiedzi*. Dzięki krótkim odpowiedziom można szybko sprawdzić końcowy wynik każdego zadania.

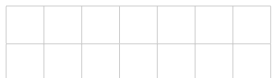
Rozwiązania  
zadań –  
zestaw AKod: EKWUPP  
app.nowaterazmatura.pl

Oznaczenie kodu QR umieszczonego w części *Odpowiedzi* kierującego do plików PDF z **pełnymi rozwiązaniami wszystkich zadań**.

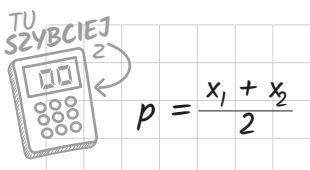


**Zestawy B i C – Modele rozwiązań zadań otwartych**  
**Kod: PHY9V8**  
 app.nowaterazmatura.pl

Oznaczenie kodu QR umieszczonego w części *Odpowiedzi* kierującego do **modeli rozwiązań zadań otwartych z zestawów B i C**. Modele rozwiązań to skrótowe rozwiązania zadań podzielone na etapy, zgodnie z punktacją danego zadania. Możesz je porównać z własnymi pomysłami lub wykorzystać jako wskazówki.



Kratka na marginesie **zachęca do robienia własnych notatek**, dzięki którym zbiór nabierze indywidualnego charakteru.



Na marginesach znajdują się dopiski, które sugerują, że do rozwiązania zadania warto użyć kalkulatora (na maturze z matematyki można używać kalkulatora prostego) lub skorzystać z podanego wzoru matematycznego, rysunku czy pomysłu na rozwiązanie.



**Więcej –  
Vademecum PR**

Aby pogłębić wiadomości teoretyczne i znaleźć przykładowe zadania związane z danym zagadnieniem, warto sięgnąć po vademecum z matematyki na poziomie rozszerzonym z serii „NOWA Teraz matura”. Układy treści zbioru zadań maturalnych i vademecum są ze sobą ściśle skorelowane.



**Więcej –  
Arkusze  
maturalne PR**

Osiągnięcie najwyższej formy przed egzaminem zapewnią arkusze maturalne z matematyki na poziomie rozszerzonym z serii „NOWA Teraz matura”. Pracę z arkuszami polecamy na zakończenie przygotowań do matury, gdy całość powtórzenia będziesz mieć już za sobą.

# **Powtórzenie dział po dziale**

# 1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne

Wzory  
matematyczne CKE



Kod: GZ4ZYN  
app.nowaterazmatura.pl

## Potęga o wykładniku całkowitym

$$a^0 = 1 \text{ dla } a \neq 0$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \text{ dla } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ dla } a \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

## Działania na potęgach

Dla dowolnych liczb  $a, b > 0$  i  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

## Pierwiastek $n$ -tego stopnia

Dla parzystej liczby  $n \in \mathbb{N}_+$  i  $a \geq 0$ :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Dla nieparzystej liczby  $n \in \mathbb{N}, n > 1$  i  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

## Działania na pierwiastkach

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ dla } a, b \geq 0$$

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \text{ dla } a, b \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ dla } a \geq 0, b > 0$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \text{ dla } a \in \mathbb{R}, b \neq 0$$

## Wzory skróconego mnożenia

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

## Różnica $n$ -tych potęg

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

## Silnia

$$0! = 1 \text{ oraz } n! = (n-1)! \cdot n \text{ dla } n \in \mathbb{N}_+$$

## Symbol Newtona

Dla  $n, k \in \mathbb{N}$  takich, że  $k \leq n$ :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

w szczególności:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

## Wzór dwumianowy Newtona

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$



**Wartość bezwzględna**Dla  $a \in \mathbb{R}$ :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

**Własności wartości bezwzględnej**Dla  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$|-a| = |a|$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$|a - b| = |b - a|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{dla } b \neq 0$$

Więcej –  
Vademecum PRWięcej –  
Arkusze  
maturalne PR**Zestaw A. Zadania powtórzeniowe**→ Odpowiedzi  
s. 144**1. Oblicz.**

$$\text{a) } \left( \sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}} \right)^2$$

$$\text{c) } \left[ (2\sqrt{2} - \sqrt{7})^{\frac{1}{2}} + (2\sqrt{2} + \sqrt{7})^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

$$\text{b) } \sqrt{2(2 - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{2(2 + 2\sqrt{2})^2}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{2} - 7}{5\sqrt{2} + 7}}$$

**2. Wykaż, że zachodzi równość.**

$$\text{a) } \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{4(7 - 4\sqrt{3})} = 3$$

$$\text{c) } \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + 2(\sqrt[4]{5} + 1) = (1 + \sqrt[4]{5})^2$$

$$\text{b) } \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} + 1 = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\text{d) } \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = 6$$

**3. Wykaż, że podana liczba jest wymierna.**

$$\text{a) } \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$$

$$\text{c) } \sqrt{13 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}$$

$$\text{b) } \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$\text{d) } \sqrt{33 + 20\sqrt{2}} - \sqrt{8\frac{1}{4} + 2\sqrt{2}}$$

**4. Usuń niewymierność z mianownika.**

$$\text{a) } \frac{6}{3 - 2\sqrt{3}}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$\text{c) } \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}$$

$$\text{d) } \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2}$$

**5. Usuń niewymierność z mianownika.**

$$\text{a) } \frac{3}{1 + \sqrt[3]{2}}$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt[3]{3} - 1}$$

$$\text{c) } \frac{2}{2 + \sqrt[3]{3}}$$

$$\text{d) } \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$$

**6. Uprość wyrażenie.**

$$\text{a) } \frac{x + y}{\sqrt{x^4 + 2x^3y + x^2y^2}}, \quad x, y > 0$$

$$\text{c) } \frac{x - y}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}, \quad x \neq y$$

$$\text{b) } \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}, \quad x, y > 0$$

$$\text{d) } \sqrt{2x + 2\sqrt{2x - 1}} - \sqrt{2x - 2\sqrt{2x - 1}}, \quad x > 1$$

$$\text{d) } 11 - 6\sqrt{2} = 3^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

Film –  
rozwiązanie  
zadania

5 min

Kod: 6AK6TC  
app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



2 min



Kod: PFSSXA  
app.nowaterazmatura.pl

7. Wykaż, że dla  $x > 0$  i  $y > 0$  prawdziwa jest podana nierówność.

a)  $2xy \leq x^2 + y^2$

b)  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

c)  $\frac{2x}{y} + \frac{y}{2x} \geq 2$

8. Oblicz.

a)  $(1 + \sqrt{3})^3$

b)  $(2 + \sqrt{3})^3$

c)  $(3 - \sqrt{2})^3$

d)  $(1 - 2\sqrt{3})^3$

9. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a)  $(x+1)^3 + (x+2)^3$

c)  $(2x-1)^3 - (2x+1)^3$

b)  $(x-2)^3 + (x-3)^3$

d)  $(3x+2)^3 - (3x-1)^3$

10. Oblicz wartość wyrażenia dla  $x = \sqrt[3]{3}$  i  $y = 2\sqrt[3]{2}$ .

a)  $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

c)  $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

b)  $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

d)  $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

11. Wykaż prawdziwość wzoru.

a)  $a^6 - 1 = (a-1)(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$

b)  $a^6 - 1 = (a-1)(a+1)(a^4 + a^2 + 1)$

12. Z sześcianu o krawędzi  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  odcięto osiem narożników, które są sześcianami o krawędzi  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ . Oblicz:

a) objętość otrzymanej bryły,

b) pole powierzchni całkowitej otrzymanej bryły.

13. Oblicz.

a)  $\binom{7}{0}$

c)  $\binom{7}{2}$

e)  $\binom{7}{4}$

g)  $\binom{7}{6}$

b)  $\binom{7}{1}$

d)  $\binom{7}{3}$

f)  $\binom{7}{5}$

h)  $\binom{7}{7}$

14. Udowodnij wzór dla  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ .

a)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b)  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

15. W pewnym wierszu trójkąta Pascala występują kolejno liczby:

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Zapisz dwa kolejne wiersze trójkąta Pascala.

16. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a)  $(a+b)^4$

c)  $(a+b)^5$

e)  $(a+b)^6$

g)  $(a+b)^7$

b)  $(a-b)^4$

d)  $(a-b)^5$

f)  $(a-b)^6$

h)  $(a-b)^7$

17. Oblicz.

a)  $(\sqrt{2}+1)^5$

b)  $(\sqrt{2}-1)^5$

c)  $(\sqrt{3}+2)^5$

d)  $(\sqrt{3}-2)^5$

Trójkąt Pascala

```

      1
     1 1
    1 2 1
   1 3 3 1
  1 4 6 4 1
 1 5 10 10 5 1
.....

```

18. Podaj współczynnik wielomianu  $w$  przy  $x^4$ .

a)  $w(x) = (2x + 1)^5$

b)  $w(x) = (2x + 3)^6$

c)  $w(x) = (2x - 1)^7$

19. Podaj współczynnik wielomianu  $w$  przy  $x^{10}$ .

a)  $w(x) = (x^3 - x)^4$

b)  $w(x) = (x^3 + 2x^2)^5$

c)  $w(x) = (x^2 + 2x)^6$

20. Udowodnij, że suma:

a) trzech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 3,

b) czterech kolejnych liczb podzielnych przez 4 jest podzielna przez 8,

c) pięciu kolejnych liczb podzielnych przez 3 jest podzielna przez 15.

21. Wykaż, że:

a) suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą,

b) sześćian sumy dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielny przez 64.

22. a) Udowodnij, że jeśli reszta z dzielenia liczby  $n$  przez 3 jest równa 2, to reszta z dzielenia liczby  $n^3$  przez 9 jest równa 8.

b) Udowodnij, że jeśli reszta z dzielenia liczby  $n$  przez 5 jest równa 3, to reszta z dzielenia liczby  $n^3$  przez 5 jest równa 2.

23. Dana jest liczba trzycyfrowa  $x$ . Liczba  $y$  powstaje z liczby  $x$  przez zamianę jej cyfry jedności z cyfrą setek. Wykaż, że różnica liczb  $x$  i  $y$  jest podzielna przez 9 oraz przez 11.

24. a) Przez jaką największą liczbę należy podzielić liczby 331 i 459, aby w obu przypadkach otrzymać resztę z dzielenia równą 11?

b) Przez jaką liczbę należy podzielić liczby 589 i 667, aby otrzymać reszty z dzielenia równe odpowiednio 1 i 7?

25. Wyznacz wszystkie pary liczb:

a) naturalnych  $a$  i  $b$ , dla których  $a^2 - b^2 = 36$ ,

b) całkowitych  $a$  i  $b$ , dla których  $a^2 - b^2 = 15$ .

26. Wyznacz zbiory  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ .

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| = 1 - x\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| = 2x - 1\}$$

27. Wyznacz zbiór  $A \setminus B$ , jeżeli  $A = [-\sqrt{2} \cdot 0,5^{-\frac{3}{2}}; 6]$  i  $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| > 4\}$ .

28. Wykaż, że dla danych wartości  $x$  prawdziwa jest podana równość.

a)  $\frac{\sqrt{4x^2 + 16x + 16}}{x + 2} = 2$  dla  $x > -2$

b)  $\frac{\sqrt{36 - 24x + 4x^2} + |x - 3|}{\sqrt{9 - 6x + x^2}} = 3$  dla  $x \neq 3$

29. Rozwiąż równanie.

a)  $||x| - 1| = 3$

b)  $||x| + 3| = 1$

c)  $||x + 1| - 3| = 2$

30. Rozwiąż nierówność.

a)  $|2x - 4| \leq 6$

b)  $|x - 3| > 4$

c)  $|5 - |x|| > 3$



Film –  
rozwiązanie  
zadania



2 min



Kod: HV4SJD  
app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



7 min



Kod: 4CS39V  
app.nowaterazmatura.pl

→ Odpowiedzi  
s. 144

### Zestaw B. Przed maturą na poziomie podstawowym

W zadaniach 31–39 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

31. (0–1)

Dana jest piętnastocyfrowa liczba  $211\,111\,111\,111\,1x2$ . Jeśli jest ona podzielna przez 12, to cyfrą  $x$  jest

- A. 7                      B. 5                      C. 3                      D. 1

32. (0–1)

Dane są liczby  $x = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7^2$  i  $y = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$ . Jeśli  $a$  jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb  $x$  i  $y$ ,  $b$  zaś – ich największym wspólnym dzielnikiem, to iloraz  $\frac{a}{b}$  wynosi

- A. 360                      B. 180                      C. 90                      D. 45

33. (0–1)

CKE Informator 2021 PP

Wartość wyrażenia  $2021 : \left(1 - \frac{1}{2022}\right) - \left(1 - \frac{2022}{2021}\right) : \frac{1}{2021}$  jest równa

- A. 0                      B. 1                      C. 2021                      D. 2023

34. (0–1)

Liczba  $\frac{0,4^2 : \left(1\frac{1}{4}\right)^{-1} - \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}}{(3^{-1} + 2^{-1}) \cdot 1,2^2}$  jest równa

- A.  $-\frac{2}{15}$                       B.  $-\frac{3}{5}$                       C.  $\frac{2}{5}$                       D.  $\frac{4}{15}$

35. (0–1)

Równość  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-7} = 3^m$  jest prawdziwa dla

- A.  $m = -6$                       B.  $m = -4$                       C.  $m = -2$                       D.  $m = 4$

36. (0–1)

Liczba  $(3\sqrt{40} - 3\sqrt{160} + 2\sqrt{810}) : 2\sqrt{5}$  jest równa

- A.  $12\sqrt{2}$                       B.  $9\sqrt{2}$                       C.  $6\sqrt{2}$                       D.  $3\sqrt{2}$

37. (0–1)

Wartość wyrażenia  $x^2 - 4y^2$  dla  $x = 2\sqrt{3} - 1$  i  $y = \sqrt{3} - 1$  jest równa

- A.  $4\sqrt{3} - 3$                       B.  $3\sqrt{3} - 3$                       C.  $-3$                       D.  $-6$

38. (0–1)

Zaokrąglenie liczby  $\sqrt[3]{1\frac{4}{5}} : \sqrt[3]{8\frac{1}{3}}$  do całości jest równe

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

39. (0–1)

Ile procent liczby 6 stanowi 30% liczby 5?

- A. 20%                      B. 25%                      C. 36%                      D. 40%

NWD i NWD



Film –  
rozwiązanie  
zadania



6 min



Kod: X9LCJ5  
app.nowaterazmatura.pl

$$a^x = a^y, \text{ gdy } x = y$$



Film –  
rozwiązanie  
zadania



3 min



Kod: QAM41Y  
app.nowaterazmatura.pl

## 40. (0–2) CKE Informator 2021 PP

Dana jest liczba  $x = a - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ , gdzie  $a$  należy do zbioru liczb rzeczywistych. W rozwiązaniu zadania uwzględnij fakt, że liczby  $\sqrt{3}$  oraz  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$  są niewymierne.

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczba  $x$  jest wymierna dla

A.  $a = 5$

B.  $a = -\sqrt{3} + \sqrt{2}$

C.  $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 0,3$

D.  $a = 6$

E.  $a = -2\sqrt{6} + 12,5$

F.  $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}$

G.  $a = -\sqrt{6}$

## 41. (0–1)

Dane jest wyrażenie  $W = (a + 2b)^2 - (a - 2b)^2$  określone dla dwóch dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wyrażenie $W$ można zapisać jako $W = 8ab$ .	P	F
Dla $a = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ i $b = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$ wyrażenie $W$ ma wartość równą 8.	P	F

## 42. (0–1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Wyrażenie  $\sqrt{x^2 - 10x + 25} - |5 - x|$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  przyjmuje wartość

$$|-x| = |x|$$

A.	nieujemną,	ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej $x$	1.	$\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 5 - x$ .
			2.	$\sqrt{x^2 - 10x + 25} =  5 - x $ .
B.	ujemną,		3.	$\sqrt{x^2 - 10x + 25} = x - 5$ .

## 43. (0–2) CKE Informator 2021 PP

Dane są liczby  $a = \sqrt{5} - 2$  oraz  $b = \sqrt{5} + 2$ . Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{ab}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

dla podanych  $a$  i  $b$ .

## 44. (0–2)

Wiadomo, że  $\frac{1}{a} + a = 14$ . Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}$ .

## 45. (0–2) CKE czerwiec 2019 PP

Wykaż, że dla każdej liczby  $a > 0$  i każdej liczby  $b > 0$  prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

## POWTÓRZENIE DZIAŁ PO DZIALE

Film –  
rozwiązanie  
zadania

4 min

Kod: D6NZ6J  
app.nowaterazmatura.pl

46. (0–2)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  prawdziwa jest nierówność:

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x + 6y + 13 > 0$$

47. (0–2)

CKE czerwiec 2021 PP

Wykaż, że dla wszystkich liczb rzeczywistych  $a, b$  i  $c$  takich, że  $\frac{a+b}{2} > c$  i  $\frac{b+c}{2} > a$ , prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{a+c}{2} < b$$

48. (0–2)

Wykaż, że dla dowolnej nieparzystej liczby naturalnej  $x$  liczba  $2x^2 + 4x + 10$  jest podzielna przez 8.

49. (0–2)

CKE Informator 2021 PP

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba  $20n^2 + 30n + 7$  przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

50. (0–3)

Wyrażenie  $(x+3y)^2 - (x+3y)(3y-x) - (x-3y)^2 - y(6x-9y)$  doprowadź do prostszej postaci, a następnie sprawdź, czy jego wartość dla  $x = -\sqrt{2}$  i  $y = \frac{1}{3}$  jest liczbą ujemną.

51. (0–3)

Dane są liczby  $x = \frac{3^{11} + 27^4}{4 \cdot 9^4}$  i  $y = \sqrt{\sqrt{4\sqrt{81}} + \sqrt{25\sqrt{16}} + \sqrt[3]{\sqrt{64}}}$ . Porównaj ze sobą liczby  $2x^{-1}$  i  $y^{-2}$ .

52. (0–3)

Uporządkuj podane liczby w kolejności rosnącej.

$$a = \sqrt[3]{2\frac{10}{27} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}}, \quad b = -0,5^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, \quad c = \sqrt[3]{-\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2}, \quad d = \frac{0,3^{-1} \cdot 0,4^2}{2,5^{-1}}$$

53. (0–4)

Dwa równoległe boki kwadratu wydłużono o 25%, a pozostałe dwa – skrócono o  $p\%$ . Powstał prostokąt, którego pole jest o 20% większe od pola kwadratu. Oblicz  $p$ .

54. (0–3)

Dane są zbiory  $A = (-\infty; -2) \cup [3; \infty)$  oraz  $B = [-5; 3]$ . Wyznacz zbiory: $C$  – będący częścią wspólną zbiorów  $A$  i  $B$ , $D$  – będący różnicą zbiorów  $B$  i  $A$ .Ile liczb postaci  $\frac{k}{2}$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą, należy do zbioru  $D$ ?

55. (0–4)

Ile rozwiązań ma równanie  $|x| + \sqrt{2} = 2 - m$  dla  $m = \sqrt{2}$ , a ile – dla  $m = \frac{1}{2}$ ? Odpowiedź uzasadnij.Film –  
rozwiązanie  
zadania

3 min

Kod: AYCCYQ  
app.nowaterazmatura.plFilm –  
rozwiązanie  
zadania

2 min

Kod: MGFPTY  
app.nowaterazmatura.pl

## Zestaw C. Przed maturą na poziomie rozszerzonym

56. (0–4)

Wykaż, że liczba  $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$  jest całkowita.

57. (0–5)

Wiadomo, że  $|1+3a| + \sqrt{2} \leq \frac{2}{\sqrt{2}}$ ,  $b = \sqrt{12-8\sqrt{2}} - \frac{1}{2}|5-4\sqrt{2}|$ ,  $c = \sin 390^\circ + \cos 540^\circ$ ,  $d = \sqrt{2}^{\log_2 \frac{1}{9}}$ . Uporządkuj liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  w kolejności rosnącej.

58. Dane jest równanie  $|mx| + |m| = 4$ , w którym  $x$  jest niewiadomą i  $m$  jest różne od 0.

58.1. (0–2)

Udowodnij, że dla  $m = 2 - \sqrt{2}$  suma kwadratów rozwiązań tego równania jest równa  $34 + 24\sqrt{2}$ .

58.2. (0–2)

Dla jakich wartości parametru  $m$  podane równanie ma dwa rozwiązania?

59. (0–2)

Wykaż, że dla dowolnej liczby  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  zachodzi nierówność  $\frac{9x^4+1}{x^2} \geq 6$ .

60. (0–3)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$  prawdziwa jest nierówność:

$$(x+1)(x+2) + (y+1)(y+2) + 1 \geq (x+2)(y+2)$$

61. (0–3) CKE maj 2023 PR

Liczby rzeczywiste  $x$  oraz  $y$  spełniają jednocześnie równanie  $x + y = 4$  i nierówność  $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$ . Wykaż, że  $x = 2$  oraz  $y = 2$ .

62. (0–2)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$ ,  $y$  prawdziwa jest nierówność:

$$13x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$$

63. (0–4)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a$ ,  $b$  zachodzi nierówność:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

64. (0–3) CKE maj 2019 PR

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$ , takich że  $x < y$ , i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej  $a$  prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$$

→ Odpowiedzi  
s. 144Film –  
rozwiązanie  
zadania

7 min

Kod: 3FLSSL  
app.nowaterazmatura.plFilm –  
rozwiązanie  
zadania

4 min

Kod: A8CLYX  
app.nowaterazmatura.plFilm –  
rozwiązanie  
zadania

6 min

Kod: AT8W32  
app.nowaterazmatura.pl

## POWTÓRZENIE DZIAŁ PO DZIALE

65. Wyrażenie  $a^4 + 4b^4$  można rozłożyć na czynniki w następujący sposób:

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2) \end{aligned}$$

- 65.1. (0–2)

Skorzystaj z powyższej procedury i rozłóż na czynniki wyrażenie  $a^4 + b^4$ .

- 65.2. (0–2)

Wykorzystaj rozkład wyrażenia  $a^4 + 4b^4$  na czynniki i udowodnij, że liczba  $3^{16} + 2^{18}$  jest liczbą złożoną.

66. (0–3)

Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej  $k$  liczba  $(k^2 - 1)(k^2 + 2k)$  jest podzielna przez 24.

67. (0–3)

Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej  $k$  liczba  $(k^3 + k^2)(k^2 + 3k + 2)(k + 2)$  jest podzielna przez 36.

68. (0–3)

Liczby  $a$  i  $b$  są dwiema kolejnymi liczbami naturalnymi, niepodzielnymi przez 3. Wykaż, że reszta z dzielenia przez 3 liczby  $a^3 + b^2$  wynosi 2.

69. (0–3)

Liczby  $x$  i  $y$  są naturalne, parzyste oraz niepodzielne przez 4. Udowodnij, że liczba  $x^3 + y^3$  jest podzielna przez 4.

70. (0–3)

Udowodnij, że jeżeli liczba naturalna  $n$  przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, to liczba postaci  $n^3 + 2n^2 + 2n + 6$  przy dzieleniu przez 3 również daje resztę 2.

71. (0–3)

Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 7 jest liczbą podzielną przez 2058.

72. (0–3) CKE maj 2018 PR

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej  $k$  i dla każdej liczby całkowitej  $m$  liczba  $k^3m - km^3$  jest podzielna przez 6.

73. (0–2)

Rozwiąż nierówność  $\binom{n}{3} - 2\binom{n-1}{2} \leq 0$ .

74. (0–2)

Rozwiąż równanie  $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = 64$ .

75. (0–3) CKE Zbiór zadań PR

W rozwinięciu wyrażenia  $(a + b)^n$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$  suma współczynników przy wyrazach  $a^{n-2}b^2$  oraz  $a^{n-1}b$  jest równa 66. Oblicz  $n$ .



Film –  
rozwiązanie  
zadania



3 min



Kod: 4XA3ZE

app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



4 min



Kod: 47535C

app.nowaterazmatura.pl



## 2. Funkcje. Funkcja liniowa

**Funkcją**  $f$  ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$  ( $f: X \rightarrow Y$ ) nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi  $x \in X$  dokładnie jednego elementu  $y \in Y$ .

Zbiór  $X$  nazywamy **dziedziną** funkcji  $f$ , a jego elementy – **argumentami** funkcji  $f$ .

**Zbiór wartości** funkcji  $f: X \rightarrow Y$  to zbiór tych wszystkich  $y \in Y$ , dla których istnieje taki argument  $x \in X$ , że  $f(x) = y$ .

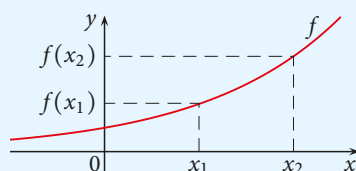
Dziedzinę funkcji  $f$  oznaczamy przez  $D$  lub  $D_f$ , a zbiór wartości funkcji  $f$  – przez  $f(D)$  lub  $f(D_f)$ .

**Miejsce zerowe** funkcji  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy taki argument  $x$ , dla którego  $f(x) = 0$ .

Niech  $X \subset \mathbb{R}$ . Funkcję  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy:

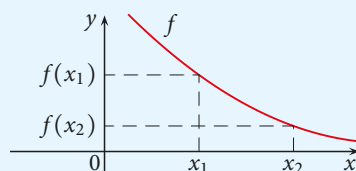
- **rosnącą** w zbiorze  $X$ , jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in X$  spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$



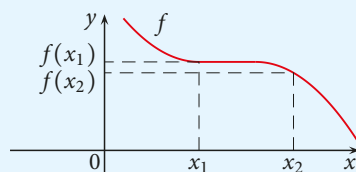
- **malejącą** w zbiorze  $X$ , jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in X$  spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$



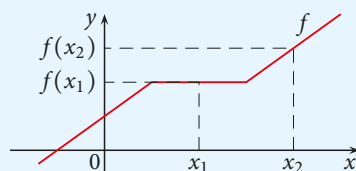
- **nierosnącą** w zbiorze  $X$ , jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in X$  spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \geq f(x_2)$$



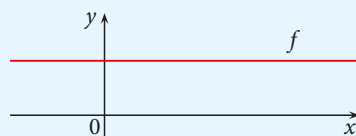
- **niemalejącą** w zbiorze  $X$ , jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in X$  spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \leq f(x_2)$$



- **stałą** w zbiorze  $X$ , jeśli istnieje taka liczba  $c$ , że dla dowolnego  $x \in X$  zachodzi równość:

$$f(x) = c$$



Funkcję  $f$  nazywamy rosnącą (odpowiednio: malejącą, nierosnącą, niemalejącą, stałą), gdy jest ona rosnąca (odpowiednio: malejąca, nierosnąca, niemalejąca, stała) w swojej dziedzinie.

Funkcję, która jest rosnącą, malejącą, nierosnącą, niemalejącą lub stałą, nazywamy **funkcją monotoniczną**.

Wzory  
matematyczne CKE



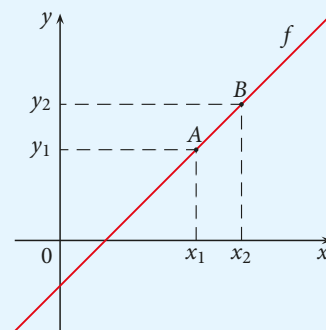
Kod: GZ4ZYN  
app.nowaterazmatura.pl

**Funkcją liniową** nazywamy funkcję określoną wzorem  $f(x) = ax + b$  dla  $x \in \mathbb{R}$ , gdzie  $a$  i  $b$  są stałymi.

**Wykresem funkcji liniowej** jest prosta. Liczbę  $a$  nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej  $y = ax + b$ .

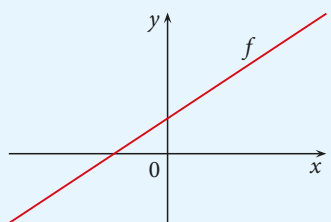
Współczynnik kierunkowy prostej  $y = ax + b$  przechodzącej przez dwa różne punkty  $A = (x_1, y_1)$  i  $B = (x_2, y_2)$  takie, że  $x_1 \neq x_2$ , jest równy:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

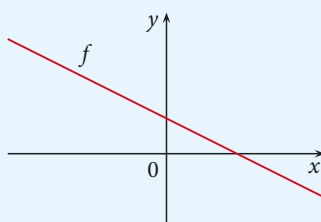


Funkcja liniowa określona wzorem  $f(x) = ax + b$  jest:

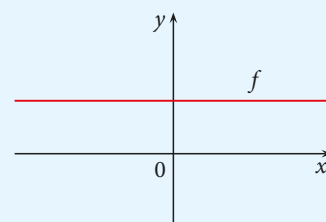
• **rosnąca** dla  $a > 0$



• **malejąca** dla  $a < 0$



• **stała** dla  $a = 0$



Proste  $y = a_1x + b_1$  i  $y = a_2x + b_2$  są:

• **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 = a_2$

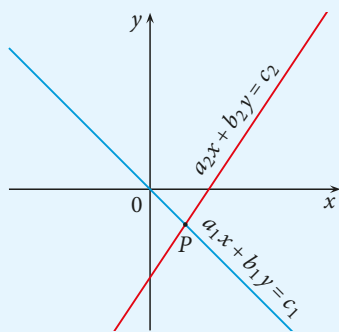
• **prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 \cdot a_2 = -1$

**Układ równań liniowych**

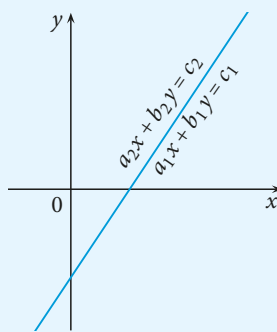
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

nazywamy:

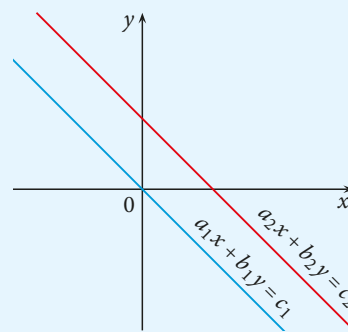
- **oznaczonym**, gdy ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- **nieoznaczonym**, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- **sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązań.



**Układ oznaczony** – proste opisane równaniami tego układu przecinają się w jednym punkcie.



**Układ nieoznaczony** – oba równania opisują tę samą prostą.



**Układ spreczny** – proste opisane równaniami tego układu są równoległe i się nie pokrywają.



Więcej –  
Vademecum PR



Więcej –  
Arkusze  
maturalne PR

## Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

1. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a)  $f(x) = \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{x+1}$

b)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2} + \frac{1}{x^2-9}$

c)  $f(x) = \sqrt{-x} - \sqrt{2-x}$

d)  $f(x) = \frac{\sqrt{3-0,5x}}{\sqrt{4+x}} - \frac{3}{|x|-3}$

2. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji.

a)  $f(x) = \sqrt{3-x} - 3\sqrt{x+1}$

b)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}\sqrt{2x+8}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$

3. Dana jest funkcja  $f(x) = x - |x|$ . Zapisz wzór funkcji  $g$  i naszkicuj jej wykres.

a)  $g(x) = f(x+1)$

c)  $g(x) = -f(x) + 2$

e)  $g(x) = |f(x)|$

b)  $g(x) = f(-x)$

d)  $g(x) = -f(-x)$

f)  $g(x) = f(|x|)$

4. Funkcja  $f$  określona w przedziale  $[-6; 6]$  dana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in [-6; -3] \\ 1-x & \text{dla } x \in (-3; 3) \\ x-5 & \text{dla } x \in [3; 6] \end{cases}$$

Narysuj wykres funkcji  $h(x) = f(1-x)$  i określ jej dziedzinę.

$$f(1-x) = f(-(x-1))$$

5. Narysuj wykresy funkcji  $f$  oraz  $g(x) = f(x-2)$ .

a)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$

b)  $f(x) = x - 2\sqrt{x^2}$

c)  $f(x) = ||x| - 2|$

6. Wyznacz wzór funkcji liniowej  $f$ , która dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  spełnia warunek:

a)  $f(x+1) = 2x-3$ ,

b)  $f(-x+3) = x+5$ ,

c)  $f(2x-4) = x-3$ .

7. Dla jakich wartości parametru  $m$  rozwiązaniem układu równań jest para liczb  $(x, y)$  spełniająca nierówność  $x + y \geq 1$ ?

a)  $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx - y = 4 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + y = m + 1 \\ 6x - 3y = m - 2 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} my - 9x = -4 \\ mx - y = m \end{cases}$

8. a) Miejsca zerowe dwóch funkcji liniowych są liczbami przeciwnymi. Wykresy tych funkcji przecinają się w punkcie  $(2, 4)$  i wraz z osią  $x$  ograniczają trójkąt o polu 12. Wyznacz wzory tych funkcji.b) Miejsca zerowe dwóch funkcji liniowych są liczbami odwrotnymi. Wykresy tych funkcji przecinają się w punkcie  $(0, 3)$  i wraz z osią  $x$  ograniczają trójkąt o polu 4. Wyznacz wzory tych funkcji.9. Wyznacz zbiór wartości funkcji  $f(x) = 2x + 1$ , jeśli jej dziedziną jest zbiór tych liczb rzeczywistych  $x$ , które spełniają podaną nierówność.

a)  $(2x-3)(3+2x) \leq (2x-1)^2$

c)  $(3x+5)^2 < 9(x-2)^2$

b)  $(2\sqrt{3}-x)^2 \geq (x-3\sqrt{3})^2$

d)  $3 < -4(3-x)^2 - (2x+3)(3-2x)$

→ Odpowiedzi  
s. 145Film –  
rozwiązanie  
zadania

4 min

Kod: LPYY1T  
app.nowaterazmatura.plFilm –  
rozwiązanie  
zadania

2 min

Kod: QGF9C9  
app.nowaterazmatura.pl

## POWTÓRZENIE DZIAŁ PO DZIALE

10. Wyznacz miejsce zerowe funkcji  $f(x) = -2x + b$ , jeśli liczba  $b$  spełnia podane równanie.

a)  $(\sqrt{2} - b)^2 - (b - 2\sqrt{2})^2 = -6$

b)  $(\frac{1}{2}b + 2)(2 - \frac{1}{2}b) + (1 + \frac{1}{2}b)^2 = 0$

11. Wyznacz liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru  $a$ .

a)  $1 + 4x = 6a - x$

c)  $(4x - 1)a = 3a + xa$

e)  $2x - a = ax + 1$

b)  $3x - 1 = a + 2 - ax$

d)  $3x + 2a = 3 + 6ax$

f)  $a^2x - 2 = 4x + a$

12. Rozwiąż układ równań.

a) 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ y + x = \frac{3(1-x) + 4}{2} \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} \frac{x-y-2}{2} - \frac{x+y}{4} = 1 \\ \frac{2x+y-1}{3} - \frac{x+y}{2} = 0 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} \frac{y+6}{3} + \frac{x}{4} = 5 - 2x \\ \frac{2y-3x}{4} = \frac{2}{3}y - 1 \end{cases}$$

13. Rozwiąż równanie.

a)  $||x - 2| + x| = 4$

b)  $|x - 1| + |x| = 2$

c)  $|2x + 2| + 3x = |x| + 2$

14. Rozwiąż nierówność.

a)  $|x - |x|| > 3$

c)  $|x - 2| - |x| < 4$

e)  $|x + 3| - |x - 1| > 1$

b)  $||x + 1| - x| \leq 2$

d)  $|x + 5| - |x - 2| \leq 3$

f)  $|x - 2| - |x + 3| \geq 1 + x$

15. Rozwiąż równanie.

a)  $3\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 10x + 25} = 10$

b)  $3\sqrt{x^2 + 8x + 16} + \sqrt{36 - 36x + 9x^2} = 18$

16. Rozwiąż nierówność.

a)  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1} < 4 - x$

b)  $2\sqrt{x^2 + 2x + 1} > x + 4$

17. Narysuj wykres funkcji  $f$  i określ liczbę rozwiązań równania  $f(x) = m$  w zależności od parametru  $m$ .

a)  $f(x) = |x| - |x - 1|$

c)  $f(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

b)  $f(x) = |x + 2| + |x - 2|$

d)  $f(x) = ||x - 1| - 3|$

18. Boki trójkąta są zawarte w prostych  $4x - 3y + 6 = 0$ ,  $3x + 4y - 8 = 0$  oraz  $7x + y - 27 = 0$ . Wykaż, że trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz współrzędne jego wierzchołków.



Film –  
rozwiązanie  
zadania



7 min



Kod: B48A6Q

app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



7 min



Kod: 3H8ZMS

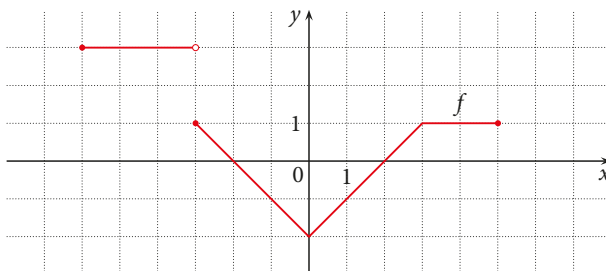
app.nowaterazmatura.pl

## Zestaw B. Przed maturą na poziomie podstawowym

→ Odpowiedzi  
s. 146

W zadaniach 19–27 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

19. (0–1) CKE maj 2021 PP

Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f$  określonej w zbiorze  $[-6; 5]$ .Funkcja  $g$  jest określona wzorem  $g(x) = f(x) - 2$  dla  $x \in [-6; 5]$ . Wskaż zdanie prawdziwe.

- A. Liczba  $f(2) + g(2)$  jest równa  $-2$ .
- B. Zbiory wartości funkcji  $f$  i  $g$  są równe.
- C. Funkcje  $f$  i  $g$  mają te same miejsca zerowe.
- D. Punkt  $P = (0, -2)$  należy do wykresów funkcji  $f$  i  $g$ .

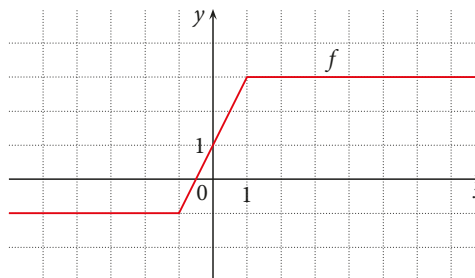
20. (0–1)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f$ . Funkcja  $g$  dana jest wzorem:

$$g(x) = f(x) + b$$

dla pewnego parametru  $b$ . Zbiorem wartości funkcji  $g$  jest przedział  $[-12; -8]$ , jeśli

- A.  $b = -8$
- B.  $b = -10$
- C.  $b = -11$
- D.  $b = -12$



21. (0–1)

Jeśli funkcja  $f$  jest malejąca, to spełniona jest nierówność

- A.  $f(1 - \sqrt{3}) < f(\sqrt{2} - 2)$
- B.  $f(2 - \sqrt{2}) > f(\sqrt{2} - 2)$
- C.  $f(2 - \sqrt{2}) > f(1 - \sqrt{3})$
- D.  $f(2 - \sqrt{2}) > f(\sqrt{3} - 1)$

22. (0–1)

Funkcja  $f$  przyjmuje wartości ujemne w przedziale  $(-3; 1)$ . Wynika stąd, że funkcja  $g(x) = f(x - 5)$  przyjmuje wartość ujemną dla

- A.  $x = -5$
- B.  $x = -3$
- C.  $x = 1$
- D.  $x = 4$

23. (0–1) CKE maj 2022 PP

Miejscem zerowym funkcji liniowej  $f$  określonej wzorem  $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 3) + 5$  jest liczba

- A.  $-3$
- B.  $\frac{9}{2}$
- C.  $5$
- D.  $12$

## POWTÓRZENIE DZIAŁ PO DZIALE

## 24. (0–1) CKE czerwiec 2019 PP

Funkcja  $f$  jest określona dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  wzorem  $f(x) = (m\sqrt{5} - 1)x + 3$ . Ta funkcja jest rosnąca dla każdej liczby  $m$  spełniającej warunek

- A.  $m > \frac{1}{\sqrt{5}}$       B.  $m > 1 - \sqrt{5}$       C.  $m < \sqrt{5} - 1$       D.  $m < \frac{1}{\sqrt{5}}$

## 25. (0–1) CKE maj 2021 PP

Proste o równaniach  $y = 3x - 5$  oraz  $y = \frac{m-3}{2}x + \frac{9}{2}$  są równoległe, gdy

- A.  $m = 1$       B.  $m = 3$       C.  $m = 6$       D.  $m = 9$

## 26. (0–1) CKE maj 2019 PP

Para liczb  $x = 2$  i  $y = 2$  jest rozwiązaniem układu równań  $\begin{cases} ax + y = 4 \\ -2x + 3y = 2a \end{cases}$  dla

- A.  $a = -1$       B.  $a = 1$       C.  $a = -2$       D.  $a = 2$

## 27. (0–1)

Wykres funkcji  $f(x) = x^2$  przesunięto o 2 jednostki w prawo, a następnie otrzymany wykres przesunięto o 3 jednostki do góry. Uzyskano w ten sposób wykres funkcji  $g$ , której wzór to

- A.  $g(x) = x^2 - 4x + 7$       C.  $g(x) = x^2 + 4x + 1$   
B.  $g(x) = x^2 - 4x + 1$       D.  $g(x) = x^2 + 4x + 7$

## 28. (0–2) CKE maj 2023 PP

Dany jest prostokąt o bokach długości  $a$  i  $b$ , gdzie  $a > b$ . Obwód tego prostokąta jest równy 30. Jeden z boków prostokąta jest o 5 krótszy od drugiego.

Uzupełnij zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród oznaczonych literami A–F i wpisz te litery w wy kropkowanych miejscach.

Zależności między długościami boków tego prostokąta zapisano w układach równań oznaczonych literami: ..... oraz .....

- A.  $\begin{cases} 2ab = 30 \\ a - b = 5 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} 2(a + b) = 30 \\ b = a - 5 \end{cases}$       E.  $\begin{cases} 2a + 2b = 30 \\ a - b = 5 \end{cases}$   
B.  $\begin{cases} 2a + b = 30 \\ a = 5b \end{cases}$       D.  $\begin{cases} 2a + 2b = 30 \\ b = 5a \end{cases}$       F.  $\begin{cases} a + b = 30 \\ a = b + 5 \end{cases}$

## 29. (0–1)

Dane są funkcje liniowe  $f(x) = 2x - 1$  oraz  $g(x) = -2x - 2$ .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wykresy funkcji $f$ i $g$ przecinają się w punkcie leżącym w III ćwiartce układu współrzędnych.	P	F
Wykresy funkcji $f$ i $g$ są prostymi prostopadłymi.	P	F

30. (0–1)

Dana jest funkcja liniowa  $f(x) = (2m - 2)x - (m + 1)x + 6$ .

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

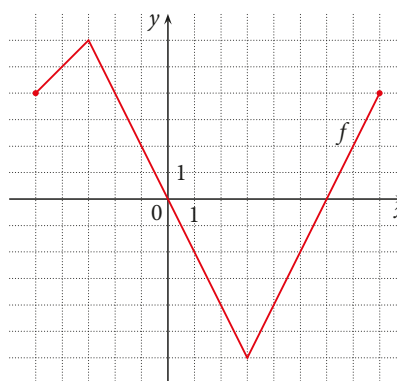
Funkcja  $f$  jest stała dla

A.	$m = -1$ ,	ponieważ	1.	wartość wyrażenia $2m - 2$ wynosi 0.
B.	$m = 1$ ,		2.	wartość wyrażenia $m - 3$ wynosi 0.
C.	$m = 3$ ,		3.	wartość wyrażenia $m + 1$ wynosi 0.

31. CKE Informator 2021 PP

Dana jest funkcja  $y = f(x)$ , której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  na rysunku obok.

Ta funkcja jest określona dla każdej liczby rzeczywistej  $x \in [-5; 8]$ .



31.1. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) > 2$ .

.....

31.2. (0–1)

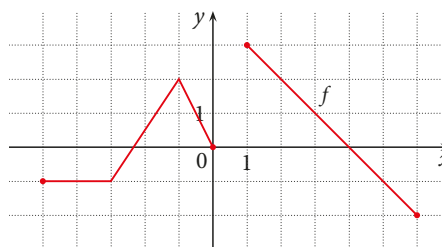
Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej maksymalny przedział lub maksymalne przedziały, w których funkcja  $f$  jest malejąca.

.....

32. (0–4)

Z wykresu funkcji  $f$  na rysunku obok odczytaj:

- dziedzinę tej funkcji,
- zbiór wartości funkcji,
- rozwiązanie równania  $f(x) = 2$ ,
- zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) \geq -1$ .



33. (0–4)

Dane są proste  $k: y = -\frac{4}{3}x + 5$ ,  $l: y = \frac{4}{3}x + 5$ . Napisz równanie prostej  $m$  przechodzącej przez punkt  $(0, -3)$ , równoległej do prostej  $k$ . Oblicz pole figury ograniczonej prostymi  $l$  i  $m$  oraz osią  $y$ .

34. (0–4)

Dana jest funkcja  $f(x) = (2 - a)x + 4$ . Wyznacz  $a$ , jeśli wiadomo, że:

- punkt  $A = (-2, 6)$  należy do wykresu funkcji  $f$ ,
- wykresy funkcji  $f$  oraz  $g(x) = -2x + 2$  przecinają oś  $x$  w tym samym punkcie.



Film –  
rozwiązanie  
zadania



2 min



Kod: 3RPEUM  
app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



3 min



Kod: H7D1D7  
app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



5 min



Kod: WTYV7M  
app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



3 min



Kod: J7Q4UH  
app.nowaterazmatura.pl

→ Odpowiedzi  
s. 147

### Zestaw C. Przed maturą na poziomie rozszerzonym

35. (0–3)

Dla jakiej wartości parametru  $m$  rozwiązaniem równania  $|x - 1| = m + 2$  jest para liczb o przeciwnych znakach?

36. (0–3)

Naszkicuj wykresy dwóch funkcji:  $f$  oraz  $g(x) = f(x - 1)$ , jeżeli wiadomo, że:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & \text{dla } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

Z wykresu odczytaj rozwiązanie nierówności  $g(x) \geq 0$ .

37. (0–4)

Dla jakich wartości parametru  $m$  proste  $(m + 1)x - my - 4 = 0$  i  $3x + (2 - m)y - 6m = 0$  przecinają się w punkcie leżącym na osi  $x$ ?

38. (0–4)

Dana jest funkcja  $f(x) = |x + 4| - |x - 2|$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Narysuj wykres tej funkcji i podaj jej miejsca zerowe.

b) Określ liczbę rozwiązań równania  $f(x) = m$  w zależności od parametru  $m$ .

39. (0–4)

Dane są funkcje liniowe  $f(x) = 2x + m$  oraz  $g(x) = \frac{1}{3}x - 2$ . Oblicz, dla jakich wartości parametru  $m$  wykresy funkcji  $f$  i  $g$  mają dokładnie jeden punkt wspólny o pierwszej współrzędnej dodatniej, a drugiej ujemnej.

40. (0–5)

Rozwiąż nierówność  $|x - 2| + \sqrt{x^2 + 2x + 1} < 5$ .

41. (0–5)

Rozwiąż nierówność  $|x + \cos 60^\circ| + |x - \operatorname{tg} 45^\circ| \geq 4$ .

42. (0–4)

CKE maj 2023 PR

Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

Wskazówka: skorzystaj z tego, że  $\sqrt{a^2} = |a|$  dla każdej liczby rzeczywistej  $a$ .

$$m \neq -1$$



Film –  
rozwiązanie  
zadania



5 min



Kod: XDGZWM

app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



6 min



Kod: QYCKJ4

app.nowaterazmatura.pl



# Odpowiedzi

## Powtórzenie dział po dziale

## 1. Liczby rzeczywiste i wyrażenie algebraiczne

Rozwiązania  
zadań –  
zestaw A



Kod: PGGMYW  
app.nowaterazmatura.pl

## Zestaw A – odpowiedzi

1. a) 6 b) 8 c)  $4\sqrt{2} + 2$  d) 0
4. a)  $-2(3 + 2\sqrt{3})$  b)  $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{5}$   
c)  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2}{2}$  d)  $\frac{2 + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{6}}{23}$
5. a)  $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$  b)  $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1)$   
c)  $\frac{2}{11}(4 - 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})$   
d)  $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$
6. a)  $\frac{1}{x}$  b)  $\sqrt{x} - \sqrt{y}$   
c)  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$  d) 2
8. a)  $10 + 6\sqrt{3}$  b)  $26 + 15\sqrt{3}$   
c)  $45 - 29\sqrt{2}$  d)  $37 - 30\sqrt{3}$
9. a)  $2x^3 + 9x^2 + 15x + 9$   
b)  $2x^3 - 15x^2 + 39x - 35$   
c)  $-24x^2 - 2$   
d)  $81x^2 + 27x + 9$
10. a) -13 b) 8 c) 209 d) 456
12. a)  $99\sqrt{2} - 63\sqrt{3}$  b)  $30 + 12\sqrt{6}$
13. a) 1 b) 7 c) 21 d) 35  
e) 35 f) 21 g) 7 h) 1
15. 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1  
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
16. a)  $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$   
b)  $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$   
c)  $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$   
d)  $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$   
e)  $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$   
f)  $a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$   
g)  $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$   
h)  $a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$
17. a)  $29\sqrt{2} + 41$  b)  $29\sqrt{2} - 41$   
c)  $209\sqrt{3} + 362$  d)  $209\sqrt{3} - 362$
18. a) 80 b) 2160 c) -560
19. a) -4 b) 32 c) 60
24. a) 64 b) 12
25. a)  $a = 6, b = 0$  lub  $a = 10, b = 8$   
b)  $a = -8, b = -7$  lub  $a = -8, b = 7$  lub  
 $a = -4, b = -1$  lub  $a = -4, b = 1$  lub  
 $a = 4, b = -1$  lub  $a = 4, b = 1$  lub  
 $a = 8, b = -7$  lub  $a = 8, b = 7$
26.  $A \cup B = \mathbb{R}, A \cap B = [\frac{1}{2}; 1]$
27.  $A \setminus B = [-3; 5]$
29. a)  $x \in \{-4, 4\}$  b) brak rozwiązań  
c)  $x \in \{-6, -2, 0, 4\}$
30. a)  $x \in [-1; 5]$   
b)  $x \in (-\infty; -1) \cup (7; \infty)$   
c)  $x \in (-\infty; -8) \cup (-2; 2) \cup (8; \infty)$

Rozwiązania  
zadań –  
zestaw B



Kod: QR6646  
app.nowaterazmatura.pl

## Zestaw B – odpowiedzi

31. B 32. B 33. D 34. A 35. C 36. C 37. A  
38. A 39. B 40. CE 41. PP 42. A2  
43. 1  
44. 4

50. jest liczbą ujemną
51.  $2x^{-1} > y^{-2}$
52.  $c < b < a < d$
53.  $p = 4$
54.  $C = [-5; -2) \cup \{3\}$ ,  
 $D = [-2; 3)$ ; dziesięć liczb
55. 0 rozwiązań dla  $m = \sqrt{2}$ ,  
2 rozwiązania dla  $m = \frac{1}{2}$

## Zestaw C – odpowiedzi

57.  $c < a < d < b$
- 58.2.  $m \in (-4; 4) \setminus \{0\}$
- 65.1.  $(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)$
73.  $n \in \{3, 4, 5, 6\}$
74.  $n = 8$
75.  $n = 11$

Rozwiązania  
zadań –  
zestaw C



Kod: YXR35Y  
app.nowaterazmatura.pl



Zestawy B i C – Modele  
rozwiązań zadań otwartych  
Kod: PHY9V8  
app.nowaterazmatura.pl

## 2. Funkcje. Funkcja liniowa

### Zestaw A – odpowiedzi

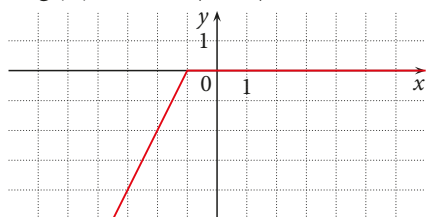
1. a)  $[-1; 4]$  b)  $[1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 3) \cup (3; \infty)$

c)  $(-\infty; 0]$  d)  $(-4; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; 6]$

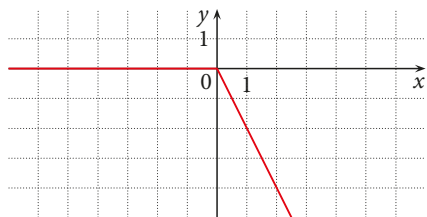
2. a)  $D = [-1; 3], x = -\frac{3}{5}$

b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\sqrt{2}\}, x = 0, x = 4\sqrt{2}$

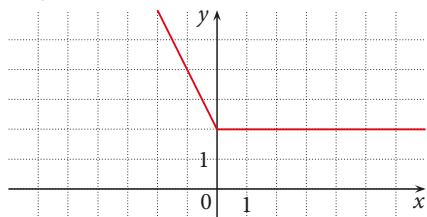
3. a)  $g(x) = x + 1 - |x + 1|$



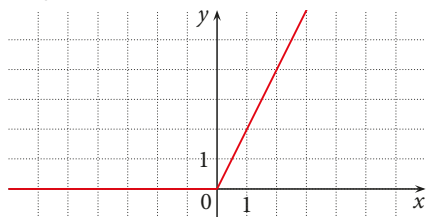
b)  $g(x) = -x - |x|$



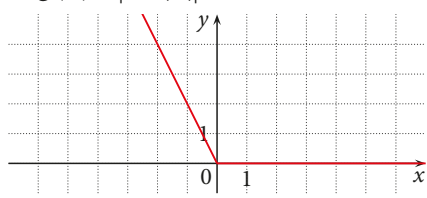
c)  $g(x) = |x| - x + 2$



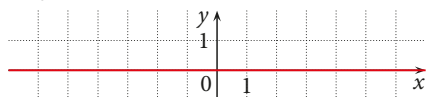
d)  $g(x) = |x| + x$



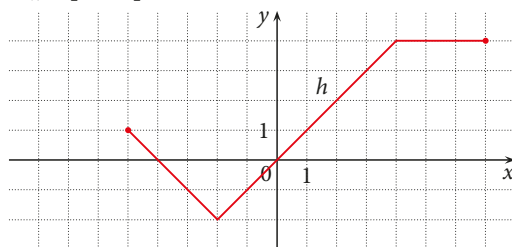
e)  $g(x) = |x - |x||$



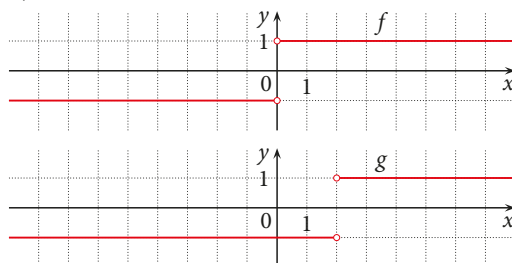
f)  $g(x) = 0$



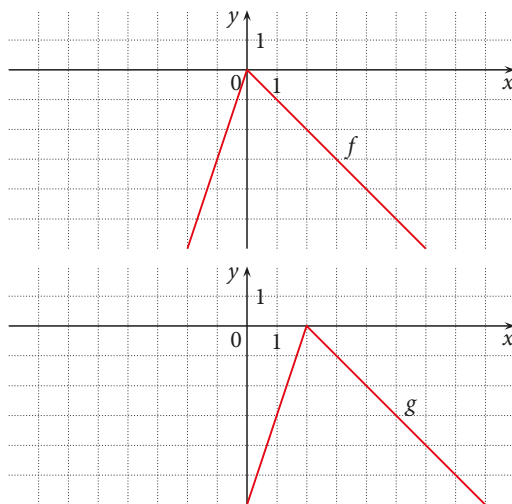
4.  $D_h = [-5; 7]$



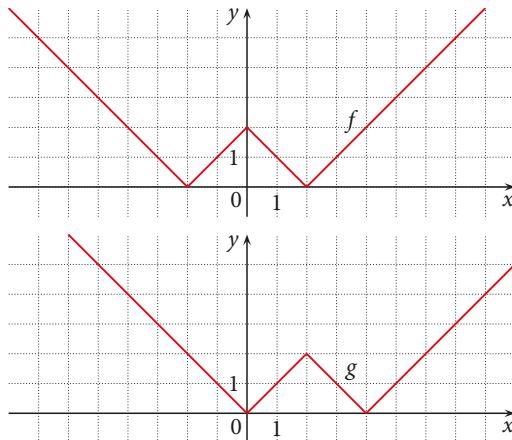
5. a)



b)



c)



Rozwiązania  
zadań –  
zestaw A



Kod: 5MYUH8  
app.nowaterazmatura.pl

6. a)  $f(x) = 2x - 5$

b)  $f(x) = -x + 8$

c)  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

7. a)  $m \in [3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6}]$

b)  $m \in [\frac{1}{8}; \infty)$

c)  $m \in (-3; -1] \cup (3; \infty)$

8. a)  $y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$ ,  $y = -4x + 12$

b)  $y = x + 3$  i  $y = 9x + 3$

lub  $y = -x + 3$  i  $y = -9x + 3$

9. a)  $(-\infty; 6]$  b)  $[5\sqrt{3} + 1; \infty)$

c)  $(-\infty; \frac{4}{3})$  d)  $(5; \infty)$

10. a) 0 b) -2,5

11. a) 1 rozwiązanie dla  $a \in \mathbb{R}$

b) 1 rozwiązanie dla  $a \neq -3$ ,  
nieskończenie wiele rozwiązań dla  $a = -3$

c) 1 rozwiązanie dla  $a \neq 0$ ,  
nieskończenie wiele rozwiązań dla  $a = 0$

d) 0 rozwiązań dla  $a = \frac{1}{2}$ ,  
1 rozwiązanie dla  $a \neq \frac{1}{2}$

e) 0 rozwiązań dla  $a = 2$ ,  
1 rozwiązanie dla  $a \neq 2$

f) 0 rozwiązań dla  $a = 2$ ,  
1 rozwiązanie dla  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ ,  
nieskończenie wiele rozwiązań dla  $a = -2$

12. a)  $x = 2$ ,  $y = -\frac{3}{2}$

b)  $x = -1$ ,  $y = -3$

c)  $x = \frac{4}{3}$ ,  $y = 0$

13. a)  $x = 3$  b)  $x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$  c)  $x = 0$

14. a)  $x \in (-\infty; -\frac{3}{2})$  b)  $x \in [-\frac{3}{2}; \infty)$

c)  $x \in \mathbb{R}$

d)  $x \in (-\infty; 0]$

e)  $x \in (-\frac{1}{2}; \infty)$  f)  $x \in (-\infty; -\frac{2}{3}]$

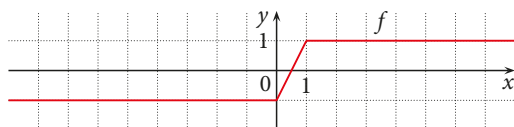
15. a)  $x = 2$ ,  $x = \frac{7}{2}$

b)  $x \in [-4; 2]$

16. a)  $x \in (-\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$

b)  $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

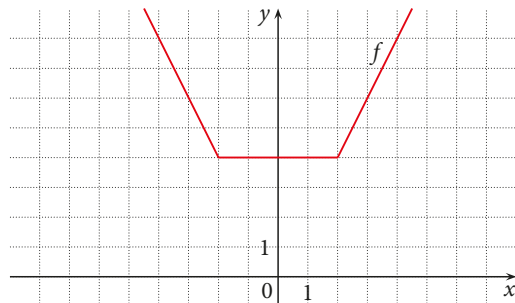
17. a) 0 rozwiązań dla  $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ ,  
1 rozwiązanie dla  $m \in (-1; 1)$ ,  
nieskończenie wiele rozwiązań dla  $m \in \{-1, 1\}$



b) 0 rozwiązań dla  $m \in (-\infty; 4)$ ,

2 rozwiązania dla  $m \in (4; \infty)$ ,

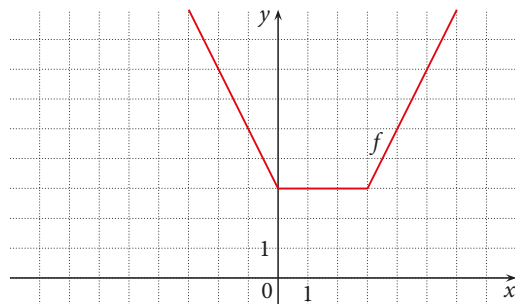
nieskończenie wiele rozwiązań dla  $m = 4$



c) 0 rozwiązań dla  $m \in (-\infty; 3)$ ,

2 rozwiązania dla  $m \in (3; \infty)$ ,

nieskończenie wiele rozwiązań dla  $m = 3$

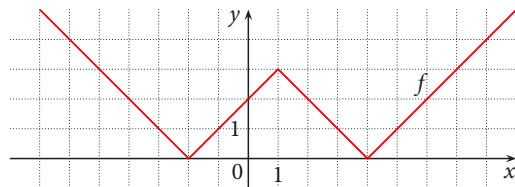


d) 0 rozwiązań dla  $m \in (-\infty; 0)$ ,

2 rozwiązania dla  $m \in \{0\} \cup (3; \infty)$ ,

3 rozwiązania dla  $m = 3$ ,

4 rozwiązania dla  $m \in (0; 3)$



18.  $(0, 2)$ ,  $(4, -1)$ ,  $(3, 6)$

**Zestaw B – odpowiedzi**

19. A 20. C 21. D 22. D 23. D 24. A 25. D

26. B 27. A 28. CE 29. PF 30. C2

31.1.  $x \in [-5; -1) \cup (7; 8]$

31.2.  $[-3; 3]$

32. a)  $[-5; 0] \cup [1; 6]$

b)  $[-2; 3]$

c)  $x = -1$ ,  $x = 2$

d)  $[-5; 0] \cup [1; 5]$

33.  $y = -\frac{4}{3}x - 3$ ,  $P = 12$

34. a)  $a = 3$  b)  $a = 6$

Rozwiązania  
zadań –  
zestaw B

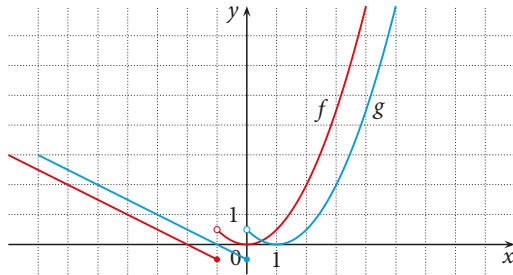


Kod: RJFCAW  
app.nowaterazmatura.pl

**Zestaw C – odpowiedzi**

35.  $m \in (-1; \infty)$

36.  $x \in (-\infty; -1] \cup (0; \infty)$



37.  $m = -2$  lub  $m = 1$

38. a)  $x = -1$

b) 0 rozwiązań dla  $m \in (-\infty; -6) \cup (6; \infty)$ ,

1 rozwiązanie dla  $m \in (-6; 6)$ ,

nieskończenie wiele rozwiązań dla

$m \in \{-6, 6\}$

39.  $m \in (-12; -2)$

40.  $x \in (-2; 3)$

41.  $x \in (-\infty; -1\frac{3}{4}] \cup [2\frac{1}{4}; \infty)$

42.  $x \in (-\frac{11}{3}; \frac{14}{3})$

Rozwiązania  
zadań –  
zestaw CKod: UUDTAR  
app.nowaterazmatura.plZestaw B i C – Modele  
rozwiązań zadań otwartych

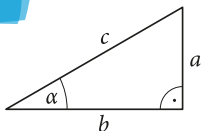
Kod: E37X5S

app.nowaterazmatura.pl



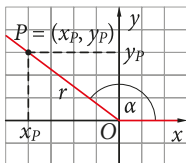
## Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



## Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

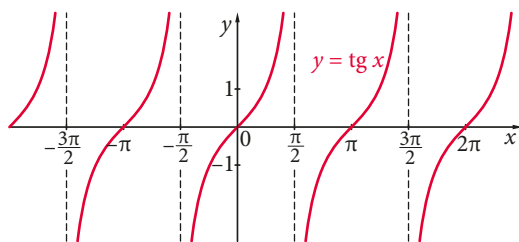
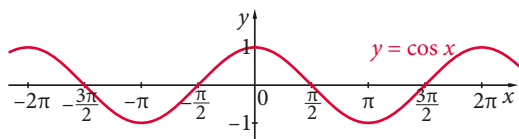
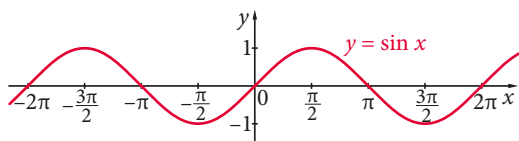
- $r = |OP| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$   
 $\sin \alpha = \frac{y_p}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x_p}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_p}{x_p}$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



## Wartości funkcji trygonometrycznych dla niektórych kątów

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

## Wykresy funkcji trygonometrycznych



## Wybrane wzory redukcyjne

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
- $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

## Wzory trygonometryczne

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

## Ciąg arytmetyczny

- $a_{n+1} = a_n + r$
- $a_n = a_1 + (n-1)r, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$
- $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$

## Ciąg geometryczny

- $a_{n+1} = a_n \cdot q$
- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 2$
- $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \text{gdy } q \neq 1, \quad S_n = n \cdot a_1, \quad \text{gdy } q = 1$
- Jeśli  $|q| < 1$ , to suma szeregu geometrycznego:  $S = \frac{a_1}{1 - q}$ .

## Pochodne niektórych funkcji

$$f(x) = c$$

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad D' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad D = [0; \infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad D' = (0; \infty)$$

$$f(x) = x^k, \quad k \neq 0, k \neq 1$$

$$f'(x) = kx^{k-1}$$

## Działania na pochodnych

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad \text{dla } c \in \mathbb{R}$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{dla } g(x) \neq 0$
- $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

## Równanie stycznej

Jeśli funkcja  $f$  ma pochodną w  $x_0$ , to styczna do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $(x_0, f(x_0))$  ma równanie:  
 $y = ax + b$ , gdzie  $a = f'(x_0)$

## Silnia. Symbol Newtona. Dwumian Newtona

- $0! = 1, n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  dla  $n \in \mathbb{N}_+$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  dla  $n, k \in \mathbb{N}$  i  $k \leq n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n$

## Kombinatoryka

- Liczba  $k$ -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru  $n$ -elementowego:  $n^k$
- Liczba  $k$ -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru  $n$ -elementowego ( $1 \leq k \leq n$ ):  $\frac{n!}{(n-k)!}$
- Liczba permutacji zbioru  $n$ -elementowego:  $n!$
- Liczba  $k$ -elementowych kombinacji (podzbiorów) zbioru  $n$ -elementowego ( $0 \leq k \leq n$ ):  $\binom{n}{k}$

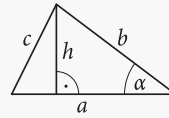
## Rachunek prawdopodobieństwa

- Klasyczna definicja prawdopodobieństwa**  
Niech  $A \subset \Omega$ . Jeśli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .
- Własności prawdopodobieństwa**  
Dla  $A, B \subset \Omega$ :  $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1, 0 \leq P(A) \leq 1$ ,  
 $P(A') = 1 - P(A), P(A) \leq P(B)$  dla  $A \subset B$ ,  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Prawdopodobieństwo warunkowe**  
Dla  $A, B \subset \Omega, P(B) > 0$ :  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Prawdopodobieństwo całkowite**  
Niech  $A, B_1, \dots, B_n \subset \Omega$ . Jeśli  $B_i \cap B_j = \emptyset$  dla  $i \neq j$ ,  
 $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$  oraz  $P(B_i) > 0$  dla  $1 \leq i \leq n$ , to  
 $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$ .
- Wzór Bayesa**  
Jeżeli zdarzenia  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n \subset \Omega$  tworzą układ zupełny,  
 $A \subset \Omega$  i  $A \neq \emptyset$ , to dla dowolnego  $1 \leq i \leq n$  prawdziwa jest  
zależność:  $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}$
- Schemat Bernoulliego**  
Prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  sukcesów w schemacie  $n$  prób Bernoulliego:  
 $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$  dla  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  
gdzie  $p$  jest prawdopodobieństwem sukcesu, a  $q = 1 - p$  jest prawdopodobieństwem porażki w pojedynczej próbie.

## Parametry statystyczne

- Dominanta** zestawu danych to wartość występująca najczęściej, ale więcej niż raz.
- Mediana** uporządkowanego zestawu  $n$  liczb to wyraz środkowy (dla  $n$  nieparzystych) lub średnia arytmetyczna dwóch wyrazów środkowych (dla  $n$  parzystych).

## Trójkąty i czworokąty



$p$  – połowa obwodu  
 $R$  – promień okręgu opisanego na trójkącie  
 $r$  – promień okręgu wpisanego w trójkąt

### Trójkąt

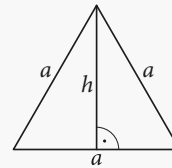
$$P = \frac{1}{2} ah$$

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = pr$$

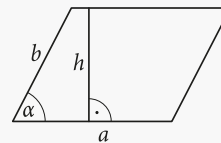
$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



### Trójkąt równoboczny

$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad h = \frac{a \sqrt{3}}{2}$$

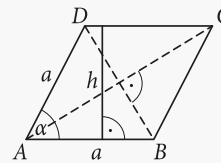
$$R = \frac{2}{3} h \quad r = \frac{1}{3} h$$



### Równoległobok

$$P = ah$$

$$P = ab \sin \alpha$$

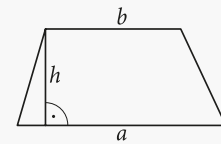


### Romb

$$P = ah$$

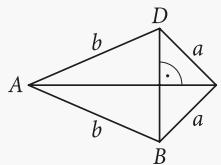
$$P = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$$

$$P = a^2 \sin \alpha$$



### Trapez

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

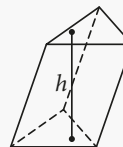


### Deltoid

$$P = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$$

## Graniastóp i ostrostóp

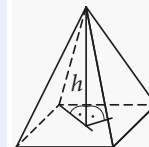
### Graniastóp



$$P_c = P_b + 2P_p$$

$$V = P_p \cdot h$$

### Ostrostóp



$$P_c = P_b + P_p$$

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

### Bryły podobne

Jeżeli bryła  $F_1$  o polu powierzchni całkowitej  $P_1$  i objętości  $V_1$  jest podobna w skali  $k$  do bryły  $F_2$  o polu powierzchni całkowitej  $P_2$  i objętości  $V_2$ , to:

$$\frac{P_1}{P_2} = k^2 \quad \text{oraz} \quad \frac{V_1}{V_2} = k^3$$



# Nowa teraz matura



nowa  
era

Twoje mocne strony

I wiesz, jak zdać maturę

## ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

ćwiczenie rozwiązywania zadań maturalnych oraz zadań CKE



## VADEMECUM

powtarzanie wiadomości  
połączone z rozwiązywaniem  
zadań różnego typu

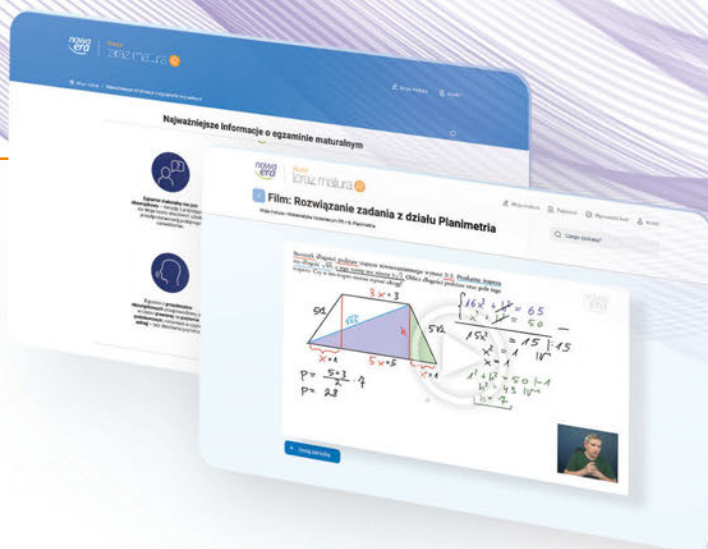


## ARKUSZE MATURALNE

rozwiązywanie arkuszy  
maturalnych dopasowanych  
do nowej matury

## CYFROWE WSPOMAGANIE NAUKI

- **APLIKACJA** – materiały cyfrowe zintegrowane z Vademecum, Zbiorem zadań maturalnych i Arkuszami maturalnymi, ułatwiające przygotowania do egzaminu  
[app.nowaterazmatura.pl](http://app.nowaterazmatura.pl)
- **SERWIS MATURALNY** – wszystkie niezbędne informacje o maturze  
[nowaterazmatura.pl](http://nowaterazmatura.pl)



Nowa Era Sp. z o.o.

[www.nowaera.pl](http://www.nowaera.pl) [nowaera@nowaera.pl](mailto:nowaera@nowaera.pl)

Centrum Kontakt: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-5145-5



9 788326 751455