

Przyczynowe więzy na strukturę korelacji w formalizmie kwantowym

Politechnika Gdańska
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej

31 lipca 2017

Zarys

- 1 Porządek przyczynowy
 - Klasyczny porządek przyczynowy
 - Brak porządku przyczynowego
 - Formalnie
- 2 Macierz procesu
 - Instrumenty kwantowe
 - Macierz procesu
 - Klasyczne elementy
 - Gry przyczynowe
 - Świadek przyczynowości
 - Kwantowy przełącznik
- 3 Zapasowo

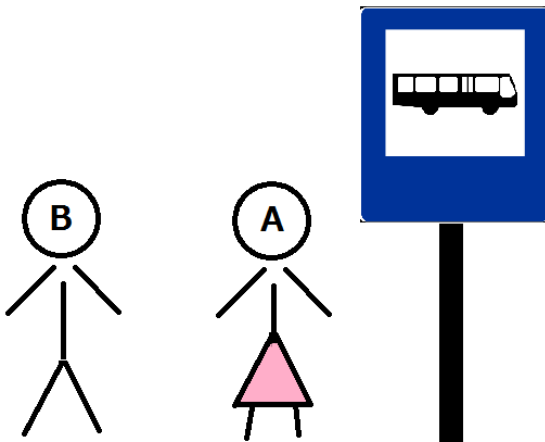
Zarys

- 1 Porządek przyczynowy
 - Klasyczny porządek przyczynowy
 - Brak porządku przyczynowego
 - Formalnie
- 2 Macierz procesu
 - Instrumenty kwantowe
 - Macierz procesu
 - Klasyczne elementy
 - Gry przyczynowe
 - Świadek przyczynowości
 - Kwantowy przełącznik
- 3 Zapasowo

Porządek przyczynowy
Macierz procesu
Zapasowo

Klasyczny porządek przyczynowy
Brak porządku przyczynowego
Formalnie

Wydarzenia uporządkowane przyczynowo t_1 .



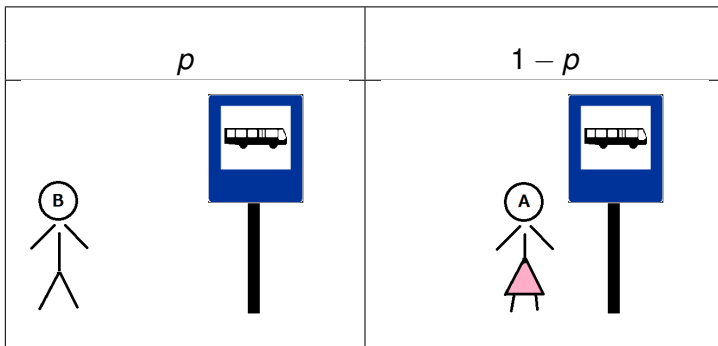
Porządek przyczynowy
Macierz procesu
Zapasowo

Klasyczny porządek przyczynowy
Brak porządku przyczynowego
Formalnie

Wydarzenia uporządkowane przyczynowo t_2 .



Wydarzenia uporządkowane przyczynowo t_2 .



Porządek przyczynowy
Macierz procesu
Zapasowo

Klasyczny porządek przyczynowy
Brak porządku przyczynowego
Formalnie

Wydarzenia uporządkowane przyczynowo t_3 .



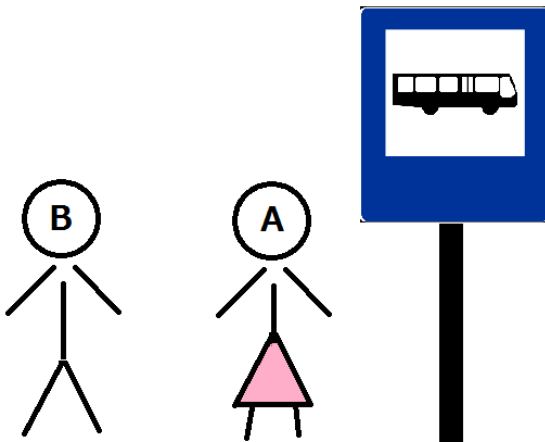
Zarys

- 1 Porządek przyczynowy
 - Klasyczny porządek przyczynowy
 - **Brak porządku przyczynowego**
 - Formalnie
- 2 Macierz procesu
 - Instrumenty kwantowe
 - Macierz procesu
 - Klasyczne elementy
 - Gry przyczynowe
 - Świadek przyczynowości
 - Kwantowy przełącznik
- 3 Zapasowo

Porządek przyczynowy
Macierz procesu
Zapasowo

Klasyczny porządek przyczynowy
Brak porządku przyczynowego
Formalnie

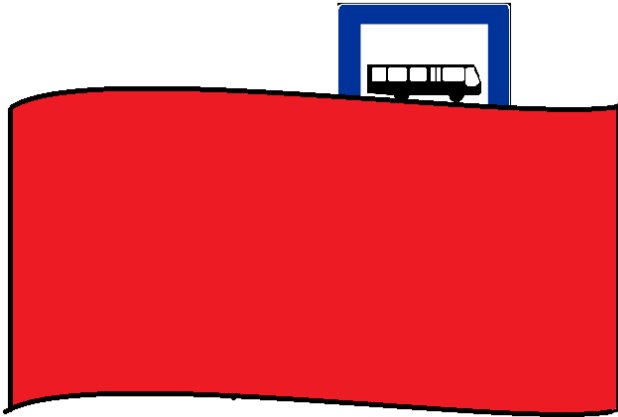
Porządek generowany przez macierze procesu t_P .



Porządek przyczynowy
Macierz procesu
Zapasowo

Klasyczny porządek przyczynowy
Brak porządku przyczynowego
Formalnie

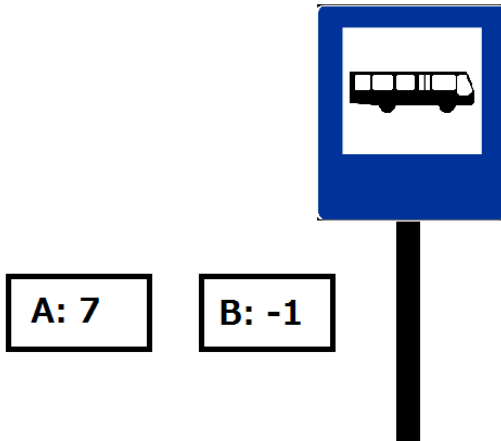
Porządek generowany przez macierze procesu t_W .



Porządek przyczynowy
Macierz procesu
Zapasowo

Klasyczny porządek przyczynowy
Brak porządku przyczynowego
Formalnie

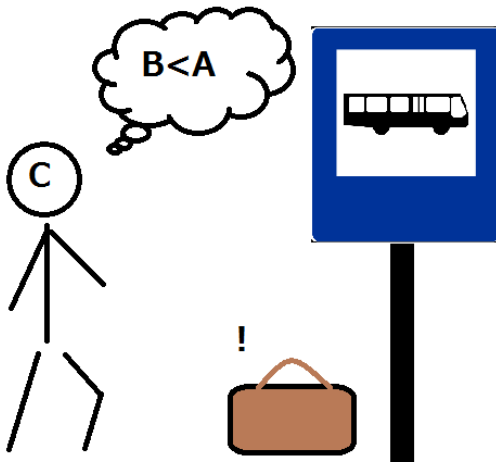
Porządek generowany przez macierze procesu t_F .



Porządek przyczynowy
Macierz procesu
Zapasowo

Klasyczny porządek przyczynowy
Brak porządku przyczynowego
Formalnie

Porządek generowany przez macierze procesu t_F .



Zarys

- 1 Porządek przyczynowy
 - Klasyczny porządek przyczynowy
 - Brak porządku przyczynowego
 - **Formalnie**
- 2 Macierz procesu
 - Instrumenty kwantowe
 - Macierz procesu
 - Klasyczne elementy
 - Gry przyczynowe
 - Świadek przyczynowości
 - Kwantowy przełącznik
- 3 Zapasowo

Brak komunikacji między Bobem, a Alicją

$$A \prec B$$

$$\forall x, y \sum_b \Pr(a, b|x, y) = \Pr(a|x, y) = \Pr(a|x) \quad (1)$$

Zarys

- 1 Porządek przyczynowy
 - Klasyczny porządek przyczynowy
 - Brak porządku przyczynowego
 - Formalnie
- 2 **Macierz procesu**
 - **Instrumenty kwantowe**
 - Macierz procesu
 - Klasyczne elementy
 - Gry przyczynowe
 - Świadek przyczynowości
 - Kwantowy przełącznik
- 3 Zapasowo

Instrumenty kwantowe

$$\{\mathcal{M}_i\}, \mathcal{M}_i : \mathcal{H}^{A_1} \mapsto \mathcal{H}^{A_2} \quad (2)$$

$$\Pr(i) = \text{Tr} [\mathcal{M}_i(\rho)] \quad (3)$$

$$\rho' = \frac{\mathcal{M}_i(\rho)}{\Pr(i)} \quad (4)$$

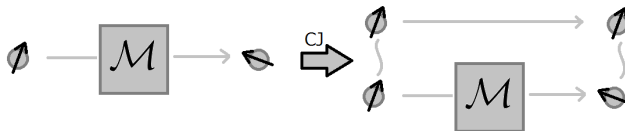
$$\text{Tr} \left[\sum_x \mathcal{M}_i(\rho) \right] = \text{Tr} [\rho] \quad (5)$$

$$\mathcal{M}_i(\rho) = \sum_{j=1}^m E_{ij}^\dagger \rho E_{ij} \quad (6)$$

Zarys

- 1 Porządek przyczynowy
 - Klasyczny porządek przyczynowy
 - Brak porządku przyczynowego
 - Formalnie
- 2 **Macierz procesu**
 - Instrumenty kwantowe
 - **Macierz procesu**
 - Klasyczne elementy
 - Gry przyczynowe
 - Świadek przyczynowości
 - Kwantowy przełącznik
- 3 Zapasowo

Izomorfizm CJ



$$\mathfrak{c}(\mathcal{M}_i) = \left[\sum_{ij} |i\rangle\langle j| \otimes \mathcal{M}_i(|i\rangle\langle j|) \right]^T \quad (7)$$

$$|A\rangle\rangle = \sum_i (|i\rangle \otimes A|i\rangle) \quad (8)$$

Warunki na macierz procesu

$$W \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2} \otimes \mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2}) \quad (9)$$

$$W \geq 0 \quad (10)$$

$$\text{Tr } W = d_{A_2 B_2} \quad (11)$$

$$\text{Pr}(i, j) = \text{Tr} [W (M_i \otimes M_j)] \quad (12)$$

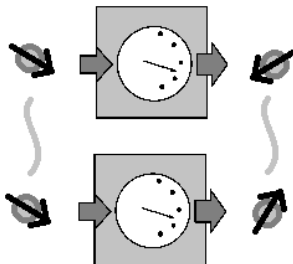
Warunki na macierz procesu c. d.

$$\begin{aligned}
 W^{A_1 A_2 B_1 B_2} &= \frac{1}{d_{A_1} d_{B_1}} (\mathbb{1} + \sigma^{B \preceq A} + \sigma^{A \preceq B} + \sigma^{A \not\preceq B}) \\
 \sigma^{A \preceq B} &:= \sum_{ij > 0} a_{ij} \sigma_i^{A_1} \sigma_j^{B_2} + \sum_{ijk > 0} b_{ijk} \sigma_i^{A_1} \sigma_j^{B_1} \sigma_k^{B_2} \\
 \sigma^{B \preceq A} &:= \sum_{ij > 0} c_{ij} \sigma_i^{A_2} \sigma_j^{B_1} + \sum_{ijk > 0} d_{ijk} \sigma_i^{A_1} \sigma_j^{A_2} \sigma_k^{B_1} \\
 \sigma^{A \not\preceq B} &:= \sum_{i > 0} e_i \sigma_i^{A_1} + \sum_{i > 0} f_i \sigma_i^{B_1} + \sum_{ij > 0} h_{ij} \sigma_i^{A_1} \sigma_j^{B_1} \\
 \forall ij \, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}, g_{ij}, h_{ij} &\in \mathbb{R},
 \end{aligned} \tag{13}$$

Zarys

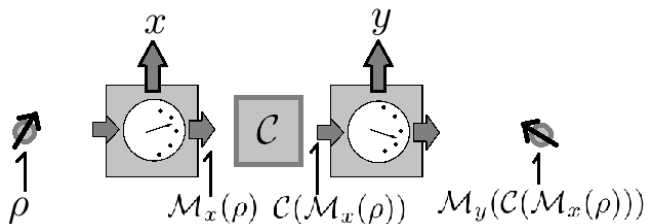
- 1 Porządek przyczynowy
 - Klasyczny porządek przyczynowy
 - Brak porządku przyczynowego
 - Formalnie
- 2 Macierz procesu
 - Instrumenty kwantowe
 - Macierz procesu
 - **Klasyczne elementy**
 - Gry przyczynowe
 - Świadek przyczynowości
 - Kwantowy przełącznik
- 3 Zapasowo

Stany



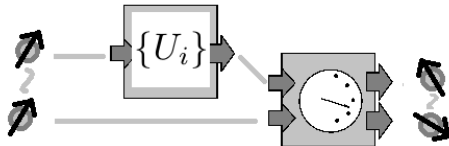
$$W = \rho^{A_1 B_1} \otimes \mathbb{1}^{A_2 B_2} \quad (14)$$

Kanały



$$W = \rho^{A_1} \otimes C^{A_2 B_1} \otimes \mathbb{1}^{B_2} \quad (15)$$

Kanały z pamięcią



Wyrazy typu $A_1 A_2 B_1$, $B_1 B_2 A_1$.

$$\frac{1}{2} |\mathbb{1}\rangle\rangle \langle\langle \mathbb{1} | A_1 B_{11} \otimes |\mathbb{1}\rangle\rangle \langle\langle \mathbb{1} | A_2 B_{12} \otimes \mathbb{1} B_{21} B_{22} \quad (16)$$

Zarys

- 1 Porządek przyczynowy
 - Klasyczny porządek przyczynowy
 - Brak porządku przyczynowego
 - Formalnie
- 2 Macierz procesu
 - Instrumenty kwantowe
 - Macierz procesu
 - Klasyczne elementy
 - **Gry przyczynowe**
 - Świadek przyczynowości
 - Kwantowy przełącznik
- 3 Zapasowo

Łamanie nierówności przyczynowych

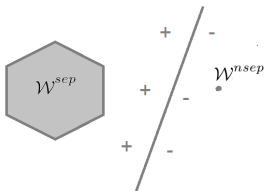
$$\frac{1}{4} \left[1111 + \frac{1}{\sqrt{2}} (1ZZ1 + Z1XZ) \right] \quad (17)$$

$$\Pr_{sukces} \geq \frac{3}{4} \quad (18)$$

Zarys

- 1 Porządek przyczynowy
 - Klasyczny porządek przyczynowy
 - Brak porządku przyczynowego
 - Formalnie
- 2 Macierz procesu
 - Instrumenty kwantowe
 - Macierz procesu
 - Klasyczne elementy
 - Gry przyczynowe
 - **Świadek przyczynowości**
 - Kwantowy przełącznik
- 3 Zapasowo

Świadek przyczynowości



$$\text{Tr} [W^{\text{sep}} S] \geq 0 \quad (19)$$

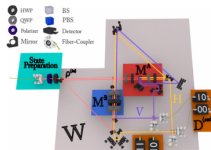
$$\min \text{Tr} [WS] \quad (20)$$

$$\text{tak, aby } S \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}}, \frac{\mathbb{1}}{d_O} - S \in \mathcal{W}_{\mathcal{V}}^*, \quad (21)$$

Zarys

- 1 Porządek przyczynowy
 - Klasyczny porządek przyczynowy
 - Brak porządku przyczynowego
 - Formalnie
- 2 **Macierz procesu**
 - Instrumenty kwantowe
 - Macierz procesu
 - Klasyczne elementy
 - Gry przyczynowe
 - Świadek przyczynowości
 - **Kwantowy przełącznik**
- 3 Zapasowo

Ważny przykład



Rysunek: Ilustracja kwantowego przełącznika, źródło: [1]

$$\begin{aligned}
 |w\rangle = & |\psi\rangle^{A_1} |1\rangle\rangle^{A_2 B_1} |1\rangle\rangle^{B_2 C_1 t} |0\rangle^{C_c} \\
 & + |\psi\rangle^{B_1} |1\rangle\rangle^{B_2 A_1} |1\rangle\rangle^{A_2 C_1 t} |1\rangle^{C_c}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$



Giulia Rubino, Lee A. Rozema, Adrien Feix, Mateus Araújo,
Jonas M. Zeuner, Lorenzo M. Procopio, Časlav Brukner,
and Philip Walther.

Experimental verification of an indefinite causal order,
2016.

Wektor Blocha

$$W = \sigma \Gamma. \quad (23)$$

np.

$$\{\Gamma_i\} = \{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}, \mathbb{1}\} \quad (24)$$

UMG

- $\frac{d(d-1)}{2}$ Symetrycznych UMG

$$\Gamma_{ij}^S = |i\rangle\langle j| + |j\rangle\langle i|, \quad 1 \leq i < j \leq d. \quad (25)$$

- $\frac{d(d-1)}{2}$ Antysymetrycznych UMG

$$\Gamma_{ij}^A = -i|i\rangle\langle j| + i|j\rangle\langle i|, \quad 1 \leq i < j \leq d. \quad (26)$$

- $(d-1)$ Diagonalnych UMG

$$\Gamma_l = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left(\sum_{j=1}^l |j\rangle\langle j| - l|i+1\rangle\langle i+1| \right), \quad 1 \leq l \leq d-1 \quad (27)$$