Przyczynowe więzy na strukturę korelacji w formalizmie kwantowym

Piotr Krasuń

1 maja 2017

Streszczenie

W pracy w sposób przeglądowy został zaprezentowany formalizm macierzy procesu, który opisuje regułę obliczania prawdopodobieństw otrzymania danych wyników w lokalnych laboratoriach przy wykorzystaniu potencjalnie nieprzyczynowych zasobów. Następnie przedstawiono zadanie komunikacyjne, w którym zasób o nieokreślonej przyczynowości może osiągać lepsze wyniki niż zasób klasyczny. Pokazano klasę procesów, która ilustruje fakt, że niewystarczająca jest nieseparowalność do złamania nierówności przyczynowych. Dalej zaprezentowano tak zwanego świadka przyczynowości (*causal witness*), który służy do stwierdzenia, czy dany zasób można rozłożyć na probabilistyczną kombinację zasobów o ściśle określonej przyczynowości. Za ich pomocą zostało pokazane w literaturze, że występowanie nieokreślonego porządku przyczynowego w naturze ma podstawy empiryczne. Zaprezentowano również miarę nieseparowalności. Następnie przedstawiono postulat, który ma wskazywać jakie procesy mogą być implementowalne fizycznie.

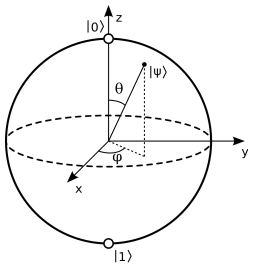
Abstract

In this work the review of process matrix formalism is presented. It can be considered a way to calculate probabilities of obtaining certain results in local laboratories using possibly not causal resources. Next a communication task is shown. In this task a resource that is not causal can do better than a classic one. Following it a tool that can discriminate processes with indefinite causal order is described. A class of inseparable processes unable to violate any causal inequallity was also illustrated. The so called causal witness was used to experimentally show that indefinite causal order is, in fact, a naturally occuring phenomena. An inseparability measure was also shown. Following it a purification postulate is characterized. It is a tool that is theorized to imply whether a following resource may be implemented physically.

1 Wstęp

1.1 Historia

Mechanika kwantowa od samego początku jej badania budziła wiele kontrowersji. Wielu badaczy miało trudności z zaakceptowaniem faktu, iż na fundamentalnym poziomie rzeczywistość nie jest deterministyczna, jak nam się wydawało. Zarówno losowa natura tej teorii, jak i wiele zadziwiających cech mechaniki kwantowej były początkowo źródłem wielu zaciekłych dyskusji. Rok po opublikowaniu pracy Schrödingera, Einstein w swojej pracy zamieścił zdanie, które częściowo wyznaczało nurt badań w tamtym czasie, zaś dziś jest wraz z innymi popularnymi powiedzeniami kwantowymi zakorzenione w kulturze, a mianowicie, że "Bóg nie gra w kości". Ta teza później okazała się być nieprawdziwa - przynajmniej nie w takim stopniu, w jakim autor by sobie życzył. Sam formalizm doczekał się wielu interpretacji, często z wieloma elementami filozoficznymi. Dzisiaj najpopularniejszymi są interpretacja kopenhaska, teoria wielu światów, czy idea inkorporująca kwantową grawitację w mechanizmie pomiaru. Ostatnia przytoczona pozycja wciąż oczekuje na sformułowanie, które jest zgodne z eksperymentami. Mimo tego pozostaje ideą ciekawą dla wielu badaczy. Mechanika kwantowa jest matematycznie bardzo elegancką teorią, którą można nazwać jednym z największych osiągnięć współczesnej fizyki. Wielokrotnie jej zaskakujące przewidywania zostały potwierdzone eksperymentalnie z niemal idealną dokładnością (w przeciwieństwie do np. stałej kosmologicznej, której niedokładność przekracza wiele dziesiątek rzędów wielkości).



Rysunek 1: Sfera Blocha. Punkty na tej sferze opisują wszystkie możliwe stany z dokładnością do czynnika fazowego $|\psi\rangle$.

1.2 Podstawowe informacje

Stany systemów w mechanice kwantowej opisuje się jako elementy przestrzeni Hilberta $\psi \in \mathcal{H}$, a tak zwane obserwable - jako samosprzężone [1] operatory $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, które opisują fizyczne wielkości obserwowalne, jakie można zmierzyć na danym systemie. W przypadku skończenie wymiarowym bądź policzalnym można powiedzieć, że $\mathcal{H}^A = \mathbb{C}^N, N \in \mathbb{N}$ i obserwable są po prostu macierzami hermitowskimi odpowiedniego wymiaru. Przez znak równości skrótowo określono, że jest to przestrzeń wektorowa nad ciałem tych liczb z iloczynem skalarnym wynikającym z mnożenia macierzy. Dosyć standardowym i wygodnym jest wykorzystywanie tak zwanej notacji Diraca, a mianowicie przedstawianie $\psi = |\psi\rangle$ i $\psi^\dagger = \langle\psi|$. Przykładowo elementy $\psi \in \mathbb{C}^3$:

$$\psi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} := |\psi\rangle \qquad \psi^\dagger = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & a_3^* \end{pmatrix} := \langle\psi| \tag{1}$$

Szeroko stosowanym zapisem w celu opisania wektorów bazowych tzw. bazy obliczeniowej (*computational basis*, CB), czyli wektorów posiadającym jedyny niezerowy element o wartości jeden na i-tej pozycji, jest $|i\rangle$. Przykładowo w $\mathbb{C}^3$

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Sposób iterowania często różni się między pozycjami w literaturze. Tutaj przyjęto iterowanie od zera. Wygodnie narzucić warunek normalizacji stanów, a mianowicie $\langle\psi||\psi\rangle := \langle\psi|\psi\rangle = 1$, wtedy wartość oczekiwaną obserwabli w danym stanie $|\psi\rangle$ oblicza się tak: $\langle A\rangle := \langle\psi|A|\psi\rangle$. Warto zauważyć, że skoro obserwable opisywane są przez macierze hermitowskie, można skorzystać z twierdzenia spektralnego i zapisać $A = \sum_i^N \lambda_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$, gdzie λ_i opisuje i-tą wartość własną zaś $|\lambda_i\rangle$ to i-ty wektor własny, który dobrano tak, że $\langle\lambda_i|\lambda_j\rangle = \delta_{ij}$. Wektory $\{|\lambda_i\rangle\}$ tworzą ortonormalną bazę w $\mathcal{H}$. Jednym z postulatów mechaniki kwantowej jest tzw. postulat pomiaru von Neumanna. Mówi on, że wykonując pomiar obserwablą A na systemie w stanie $|\psi\rangle$ i otrzymując wartość λ_i odpowiadająca wektorowi własnemu $|\lambda_i\rangle$ powoduje się przejście w stan $|\lambda_i\rangle$. Można, zakładając brak zdegenerowania niezerowych wartości własnych, zapisać w następujący sposób warunkową ewolucję po pomiarze

$$|\psi\rangle \mapsto \frac{\Pi_i|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\Pi_i|\psi\rangle}}, \tag{3}$$

[1] Operatorem sprzężonym do ograniczonego liniowego operatora $T : \mathcal{H}^A \mapsto \mathcal{H}^B$ jest taki operator $T^* : \mathcal{H}^B \mapsto \mathcal{H}^A$, który spełnia następujący warunek: $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$, gdzie przez $\langle\circ,\circ\rangle$ rozumie się iloczyn skalarny, zaś $x \in \mathcal{H}^A, y \in \mathcal{H}^B$. Operatorem samosprzężonym jest taki operator, gdzie $T^* = T$. W przypadku macierzy kwadratowych i iloczynu skalarnego wynikającego z mnożenia macierzy jest to warunek, że $A^\dagger = A$, gdzie $A^\dagger = (A^*)^T$. Takie macierze nazywa się hermitowskimi.

gdzie Π_i jest projektorem[2] odpowiadającym $|\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$. Zapisując $|\psi\rangle = \sum_i^N a_i|\lambda_i\rangle, \sum_i^N |a_i|^2 = 1$, prawdopodobieństwo zaobserwowania wyniku λ_i jest równe $|a_i|^2$, lub równoważnie

$$\Pr(\lambda_i) = \langle\psi|\Pi_i|\psi\rangle, \tag{4}$$

co znane jest jako reguła Borna. Fakt, że obserwable są opisywane przez macierze hermitowskie zapewnia, że $\sum_i^N |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i| = \mathbb{1}$, co dalej implikuje, że $\sum_i^N \Pr(\lambda_i) = \sum_i^N \langle\psi|\Pi_i|\psi\rangle = \langle\psi|\sum_i^N \Pi_i|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1$. Stan całego systemu składającego się z pewnej ilości systemów opisuje element z

$$\mathcal{H}^{AB\ldots Z} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \otimes \ldots \mathcal{H}^Z, \tag{5}$$

gdzie $\otimes$ to iloczyn tensorowy. Wraz ze wzrostem podsystemów składających się na system liczba wektorów bazowych rośnie eksponencjalnie, co jest fundamentem tzw. "kwantowego przyśpieszenia", które pozwala heurystycznie/przybliżenie rozwiązać na komputerach kwantowych niektóre klasyczne problemy z eksponencjalnym przyśpieszeniem, np. faktoryzacja liczb [1], rozwiązywanie układów liniowych [2] czy odpowiednio sformułowane problemy uczenia maszynowego [3, 4]. Ważną rzeczą do zaobserwowania jest fakt, że istnieją takie systemy, których nie można zapisać jako iloczyn stanów w poszczególnych podsystemach. Klasycznym przykładem tego jest

$$\mathcal{H}^{AB} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$
$$|\psi\rangle = |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B := |1\rangle|1\rangle + |0\rangle|0\rangle := |11\rangle + |00\rangle$$
$$a_0|0\rangle + a_1|1\rangle \otimes b_0|0\rangle + b_1|1\rangle = a_0b_0|00\rangle + a_0b_1|01\rangle + a_1b_0|10\rangle + a_1b_1|11\rangle$$
$$a_0b_1 = 0 \implies a_0 = 0 \vee b_1 = 0$$
$$a_1b_0 = 0 \implies a_1 = 0 \vee b_0 = 0$$

Powyższe implikuje, że $a_0b_0 \neq 1 \vee a_1b_1 \neq 1$.

Takie systemy, których nie da się zapisać w postaci $|\psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\xi\rangle_B$, nazywa się splątanymi. Splątanie kwantowe jest zasobem, który znalazł zastosowanie w wielu nowatorskich aplikacjach, jak np. kryptografia kwantowa [5], certyfikowana losowość [6], teleportacja kwantowa [7] czy wcześniej przytoczone "kwantowe przyśpieszenie". Często w rozważaniach ogranicza się do skończonych przestrzeni Hilberta o wybranych rozmiarach. Najmniejszą i niepodzielną jednostką informacji jest kubit ($\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$), fizycznie reprezentujący np. cząstkę ze spinem-$\frac{1}{2}$ (elektron), lub polaryzację fotonu. W wielu dziedzinach informatyki kwantowej ogranicza się praktycznie wyłącznie do analizy systemów złożonych z kubitów ze względu na pewną prostotę i wygodę badania takich systemów. Ciekawą interpretacją kubitów prezentuje Sfera Blocha (rysunek 1). Punkty na tej sferze opisują wszystkie prawidłowe znormalizowane $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$. Okazuje się jednak, że formalizm stanów jest niewystarczający do opisu zespołów statystycznych (system znajduje się w jakimś z stanów z pewnym prawdopodobieństwem) wynikających z braku pełnej wiedzy o systemie bądź sposobie jego przygotowania. Do opisu takich sytuacji używa się macierzy gęstości. Macierz gęstości odpowiadająca systemowi w pewnym stanie $|\psi\rangle$ to $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. W przypadku, gdy stan znajduje się w jakimś stanie $|\psi_i\rangle$ z prawdopodobieństwem p_i macierz gęstości to

$$\rho = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \tag{6}$$

[2]Przez projektor rozumie się taką macierz A, że $A^2 = A$ i $A^\dagger = A$. W przypadku obserwabli projektory z twierdzenia spektralnego sumują się do identyczności i spełniają własność $\Pi_i\Pi_j = 0$. Założenie, że wartości własne są niezdegenerowane, które skutkuje tym, że projektory są niezdegenerowane, nie jest konieczne. Projektory nie muszą być jednowymiarowe, sumując n liniowo niezależnych projektorów jednowymiarowych otrzymuje się projektor n-wymiarowy, który spełnia poprzednie relacje względem pozostałych macierzy, co łatwo sprawdzić. Wielowymiarowe projektory mogą odpowiadać pomiarowi, który przypisuje taki sam wynik wielu ortogonalnym stanom, czy pomiar, który jest wykonywany na pewnej części systemu złożonego.

Powyższy rozkład nie jest unikatowy, dana macierz gęstości reprezentuje wiele różnych zespołów statystycznych, które generują jednakowe prawdopodobieństwa. W celu narzucenia generowania prawidłowego prawdopodobieństwa regułą opisaną dalej narzuca się na macierz ρ następujące warunki

$$\rho \geqslant 0^3 \tag{7}$$

$$\operatorname{Tr}\rho = 1 \tag{8}$$

Wielkości i działania, analogiczne do tych opisanych w stosunku do stanów, w przypadku macierzy gęstości wyglądają następująco:

$$\langle A\rangle = \operatorname{Tr}(A\rho) \tag{9}$$

$$\Pr(\lambda_i) = \operatorname{Tr}(\Pi_i\rho) \tag{10}$$

$$\rho \mapsto \frac{\Pi_i\rho\Pi_i}{\operatorname{Tr}(\Pi_i\rho)} \tag{11}$$

Prócz warunkowej ewolucji podczas pomiaru, systemy kwantowe podlegają również ewolucji czasowej. W obrazie Schrödingera ewoluują stany. Wygląda to następująco:

$$U(t)|\psi(0)\rangle = |\psi(t)\rangle \tag{12}$$

$$U(t)^\dagger|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle \tag{13}$$

W obrazie Heisenberga ewoluują zaś obserwable

$$A(t) = U^\dagger A(0)U, \tag{14}$$

gdzie $U(t)$ jest pewnym unitarnym operatorem ($U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}$) działającym na $\mathcal{H}$. Pomiar rzutujący nie jest jedynym pomiarem, który można wykonać. Najogólniejszym pomiarem, który można wykonać w mechanice kwantowej jest *positive valued measurement* (POVM). Opisywany jest on przez zbiór takich operatorów $\{E_i\}$, że $E_i > 0$, $\sum_i E_i = \mathbb{1}$. Poprzednie reguły przechodzą w

$$\Pr(x_i) = \langle\psi|E_i|\psi\rangle \tag{15}$$

$$\Pr(x_i) = \operatorname{Tr}(E_i\rho) \tag{16}$$

$$E_i = \sum_j A_{ij}^\dagger A_{ij} \tag{17}$$

$$\rho \mapsto \frac{\sum_j A_{ij}\rho A_{ij}^\dagger}{\operatorname{Tr}(\sum_j A_{ij}\rho A_{ij}^\dagger)}. \tag{18}$$

Pomiary takie realizuje się korzystając z pomocniczego systemu (*ancilla*), ewoluując złożony system odpowiednio dobranym operatorem unitarnym, następnie dokonując pomiaru rzutującego na *ancillę* i po odnotowaniu wyniku odrzuceniu jej. Ważnym narzędziem w formalizmie kwantowym są tak zwane kanały kwantowe (*quantum channel*), opisujące fizyczne połączenia, ich działania na fizyczny system. Klasycznym analogiem może być np. linia telefoniczna czy światłowód transmitujący internet. Przykładem fizycznej implementacji może znów być światłowód, który transmituje fotony, opisywane jako kubity. Kanały kwantowe opisują odwzorowania $\mathcal{M} : \mathcal{L}(\mathcal{H}^A) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}^B)$, gdzie $\mathcal{L}(\mathcal{H}^A)$ jest przestrzenią macierzy na $\mathcal{H}^A$ w przypadku skończenie wymiarowym, odwzorowujące liniowe operatory w przestrzeni wejściowej na liniowe operatory w przestrzeni wyjściowej, gdzie $\mathcal{M}$ jest całkowicie dodatnią (*completely positive*, CP)[4], $\mathcal{M}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Najogólniej kanały idealne, czyli takie, z których możemy otrzymać pełną informację o przychodzącym systemie, opisuje się $\mathcal{M}(\rho) = U^\dagger\rho U$, gdzie U jest pewną macierzą unitarną. W rzeczywistych

[4]Odwzorowanie jest CP, gdy $\phi\otimes\mathcal{I}_n$ również jest dodatnie $\forall n \in \mathbb{N}$. W przypadku odwzorowań o skończonych wymiarach każde dodatnie jest CP.

sytuacjach jednakże nie da się uniknąć oddziaływania z otoczeniem, które posiada dodatkowe niemierzalne stopnie swobody. Takie zaszumione kanały opisuje ogólnie $\mathcal{M}(\rho) = \mathrm{Tr}_{otoczenie}(U^\dagger \rho \otimes \rho_0 U)$, gdzie $\mathrm{Tr}_{otoczenie}$ opisuje operację śladu częściowego [5], po stopniach swobody otoczenia, zaś operator unitarny U opisuje ewolucję czasową systemu i otoczenia, a ρ_0 jest stanem początkowym otoczenia [8]. Jasnym jest, że posiadając wyłącznie wiedzę na temat systemu ρ nie jest możliwe w ogólności odtworzenie informacji wysłanych. Typowym przykładem takiego zaszumionego kanału może być kanał depolaryzujący, który z prawdopodobieństwem η idealnie transmituje system, zaś z prawdopodobieństwem $1-\eta$ depolaryzuje system, $\mathcal{M}(\rho) = \eta\rho + (1-\eta)\mathbb{1}$. Najogólniejszym modelem kanałów kwantowych jest tzw. *quantum channel with memory* (kwantowy kanał z pamięcią) opisany np. w [9].

2 Macierz Procesu

Jednym z podejść do szukania korelacji nie zachowujących przyczynowego porządku jest rozwinięty w [10] formalizm macierzy procesu. Ewidentną zaletą tego podejścia jest zgodność z mechanika kwantową na poziomie lokalnych eksperymentów. Jest to niejakie rozszerzenie łączące ideę POVM i regułę Borna. Podejście to porzuca założenie globalnej struktury czasoprzestrzeni. Opisuje się następującą sytuację: dwa odległe zamknięte laboratoria (tradycyjnie nazywane Alicja i Bob) wykonują pewne pomiary na zasobie kwantowym i otrzymują pewne wyniki. W przypadku tego formalizmu starano się zbudować taką strukturę, która przewiduje prawdopodobieństwa otrzymania danych wyników przy wykorzystaniu zasobu, który może nie mieć ściśle określonego porządku w czasie. W celu zachowania zgodności z mechaniką kwantową na poziomie lokalnym formalizm opiera się na następującym założeniu: operacje wykonywane przez poszczególną stronę są opisywane przez mechanikę kwantową w standardowym przyczynowym sformułowaniu, które można opisywać przy pomocy zbioru instrumentów kwantowych (*quantum instruments*) [11].

Definicja 1. *(por. [11]). Kwantowy instrument jest to zbiór odwzorowań CP* $\{\mathcal{M}_x\}$, $\mathcal{M}_x : \mathcal{H}^{A_1} \mapsto \mathcal{H}^{A_2}$, *które opisują zarówno prawdopodobieństwa zaobserwowania danego rezultatu x, jak i stan, w którym znajduje się system po zaobserwowaniu danego rezultatu. Prawdopodobieństwo otrzymania danego rezultatu x na stanie* ρ *dane jest następująco:*

$$\Pr(x) = \mathrm{Tr}\left[\mathcal{M}_x(\rho)\right], \tag{19}$$

zaś po zaobserwowaniu wyniku x stan systemu to:

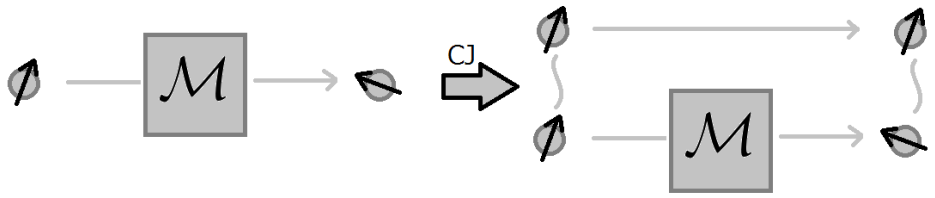
$$\rho' = \frac{\mathcal{M}_x(\rho)}{\Pr(x)}. \tag{20}$$

Suma odwzorowań po wszystkich możliwych wynikach zachowuje ślad, czyli:

$$\mathrm{Tr}\left[\sum_x \mathcal{M}_x(\rho)\right] = \mathrm{Tr}\left[\rho\right]. \tag{21}$$

Najogólniej można je realizować poprzez zadziałanie unitarną transformacją na system wejściowy i system pomocniczy (*ancillę*), następnie wykonanie rzutującego pomiaru na części systemu pozostawiając pozostałą część systemu jako wyjście. Alicja wykorzystując dany instrument otrzymuje jeden z możliwych

[5] Operację śladu pewnej macierzy A definiuje się następująco $\mathrm{Tr}\, A = \sum_i \langle e_i|A|e_i\rangle$, gdzie $\{e_i\}$ to dowolna ortonormalna baza. W przypadku systemów złożonych można zdefiniować operację śladu częściowego. Zapisując pewną macierz $C = \sum_i \alpha_i A_i \otimes B_i$ ślad częściowy (po systemie B) oblicza się następująco $\mathrm{Tr}_B\, C = \sum_i \alpha_i A_i \otimes \mathrm{Tr}(B_i) = \sum_{ij} \alpha_i A_i \otimes \langle e_j|B_i|e_j\rangle = \sum_j (\mathbb{1} \otimes \langle e_j|) C (\mathbb{1} \otimes |e_j\rangle)$.



Rysunek 2: Rysunek ilustruje działanie izomorfizmu CJ. Zamiast działać odwzorowaniem na pewien stan izomorfizm CJ pokazuje działanie na maksymalnie splątane cząstki. Z powodu izomorfizmu w drugą stronę, konwencjonalnie interpretuje się izomorfizm CJ jako teleportacje bramek kwantowych.

wyników x_i, który indukuje transformację $\mathcal{M}_i^A$ z wejścia na wyjście. Odwzorowanie to odpowiada odwzorowaniu w pełni dodatniemu (*completetly positive*, CP)

$$\mathcal{M}_i^A : \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1}) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_2}), \tag{22}$$

gdzie $\mathcal{L}(\mathcal{H}^X)$ jest przestrzenią macierzy na $\mathcal{H}^X$, której wymiar to d_X. Jej działanie na macierz gęstości ρ opisuje następująca formuła:

$$\mathcal{M}_i^A(\rho) = \sum_{j=1}^{m} E_{ij}^\dagger \rho E_{ij}, \tag{23}$$

gdzie macierze E_{ij} spełniają następujące własności:

$$\sum_{j=0}^{m} E_{ij}^\dagger E_{ij} \leqslant \mathbb{1}^{A_1} \tag{24}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} E_{ij}^\dagger E_{ij} = \mathbb{1}^{A_1} \tag{25}$$

O odwzorowaniach, które spełniają (24) z równością, mówimy, że zachowują ślad (*trace preserving*, TP). Prawdopodobieństwo zaobserwowania wyniku realizowanego przez odwzorowanie $\mathcal{M}_i^A$ to

$$\Pr(\mathcal{M}_i^A) = \mathrm{Tr}(\mathcal{M}_i^A(\rho)) \tag{26}$$

Widać od razu, że równanie (25) narzuca, by możliwość zaobserwowania dowolnego wyniku była równa 1, co łatwo pokazać w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\sum_i \Pr(\mathcal{M}_i^A) &= \sum_i \mathrm{Tr}(\mathcal{M}_i^A(\rho)) = \sum_{ij} \mathrm{Tr}\left[E_{ij}^\dagger \rho E_{ij}\right] \\ &= \sum_{ij} \mathrm{Tr}\left[\rho E_{ij}^\dagger E_{ij}\right] = \mathrm{Tr}\left[\rho \sum_{ij} E_{ij}^\dagger E_{ij}\right] = \mathrm{Tr}\left[\rho\right] = 1\end{aligned} \tag{27}$$

W przypadku, gdy ma się do czynienia z więcej niż jedną stroną, *procesem* nazywa się listę $\Pr(\mathcal{M}_i^A, \mathcal{M}_j^B, \dots)$ dla wszystkich możliwych lokalnych wyników. Dalej w tym rozdziale będzie opisywany wyłącznie przypadek dwustronny, jednakże rozszerzenie formalizmu na przypadek wielostronny jest trywialne. Wygodnym sposobem przedstawiania odwzorowań $\mathcal{M}_i^A$ jest izomorfizm Choi-Jamiołkowskiego (CJ) [12, 13], który pozwala przedstawiać transformacje liniowe przy pomocy macierzy.

Definicja 2. *(por. [12, 13]). Macierz CJ* $M_i^{A_1A_2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2}) \geqslant 0$ *odwzorowania CP* $\mathcal{M} : \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1}) \mapsto$

$\mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_2})$ *definiuje się następująco:*

$$\mathfrak{C}(\mathcal{M}^{\mathcal{A}}{}_i) = M_i^{A_1A_2} := [\mathcal{I} \otimes \mathcal{M}_i^A(|\mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}\rangle\rangle\langle\langle\mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}|)]^T = \left[\sum_{i,j=0}^{d_{A_1}-1} |i\rangle\langle j| \otimes \mathcal{M}_i^A(|i\rangle\langle j|)\right]^T, \tag{28}$$

$$|\mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}\rangle\rangle = \sum_{i=0}^{d_{A_1}-1} |ii\rangle, \tag{29}$$

gdzie $\{|j\rangle\}^{d_{A_1}}$ *tworzy ortonormalna bazę w* $\mathcal{H}^{A_1}$*.*

Często wygodnie jest korzystać z odpowiednika (24) i (25) dla postaci CJ odwzorowań, który wygląda następująco:

$$\mathrm{Tr}_{A_2}\left[M_i^{A_1A_2}\right] \leqslant \mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}^{A_1},\ \forall i \tag{30}$$

$$\sum_i \mathrm{Tr}_{A_2}\left[M_i^{A_1A_2}\right] = \mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}^{A_1} \tag{31}$$

Definicja 3. *(por. [12, 13]). Drugi izomorfizm CJ pozwala przedstawiać macierze przy pomocy wektorów, tzw. "podwójnych ketów". Wektor CJ macierzy A zdefiniowany jest jako*

$$|A\rangle\rangle := \mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1} \otimes A|\mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}\rangle\rangle = \sum_{i=0}^{d_{A_1}-1} |i\rangle A|i\rangle \tag{32}$$

Znajomość izomorfizmów CJ pozwala na wprowadzenie macierzy procesu.

Definicja 4. *(por. [10]). Dwustronną macierzą procesu nazywa się taką macierz* $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2} \otimes \mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2})$*, która spełnia warunki*

$$W^{A_1A_2B_1B_2} \geqslant 0. \tag{33}$$

$$\mathrm{Tr}\, W^{A_1A_2B_1B_2} = d_{A_2B_2} \tag{34}$$

$$\mathrm{Tr}\left[W^{A_1A_2B_1B_2}\left(M^{A_1A_2} \otimes M^{B_1B_2}\right)\right] = 1. \tag{35}$$

$$\forall M^{A_1A_2}, M^{B_1B_2} \geqslant 0, \mathrm{Tr}_{A_2} M^{A_1A_2} = \mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}^{A_1}, \mathrm{Tr}_{B_2} M^{B_1B_2} = \mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}^{B_1}, \tag{36}$$

gdzie $M^{A_1A_2} = \sum_i M_i^{A_1A_2}$*. W celu wyliczenia prawdopodobieństw zawartych w macierzy procesu korzysta się z następującej formuły:*

$$\Pr(\mathcal{M}_i^A, \mathcal{M}_j^B) = \mathrm{Tr}(W^{A_1A_2B_1B_2}(M_i^{A_1A_2} \otimes M_j^{B_1B_2})). \tag{37}$$

Warunek (33) zapewnia, że prawdopodobieństwa nie będą ujemne, a (35) i (36) - pewność zaobserwowania dowolnej pary odwzorowań.

W celu dalszej analizy macierzy procesu wygodne jest wprowadzenie bazy Hilberta-Schmidta.

Definicja 5. *Baza Hilberta-Schmidta dla* $\mathcal{L}(\mathcal{H}^X)$ *dana jest przez zbiór macierzy* $\{\sigma_\mu^X\}_{\mu=0}^{d_X^2-1}$*, gdzie* $\sigma_0^X = \mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}, \mathrm{Tr}(\sigma_\mu^X \sigma_\nu^X) = d_x\delta_{\mu\nu}, \mathrm{Tr}(\sigma_{\mu>0}^X) = 0$*. Ogólny element przestrzeni* $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2} \otimes \mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2})$ *można zapisać, jako*

$$W^{A_1A_2B_1B_2} = \sum_{\mu\nu\lambda\gamma} w_{\mu\nu\lambda\gamma}\sigma_\mu^{A_1} \otimes \sigma_\nu^{A_2} \otimes \sigma_\lambda^{B_1} \otimes \sigma_\gamma^{B_2} \tag{38}$$

$$w_{\mu\nu\lambda\gamma} \in \mathbb{C}.$$

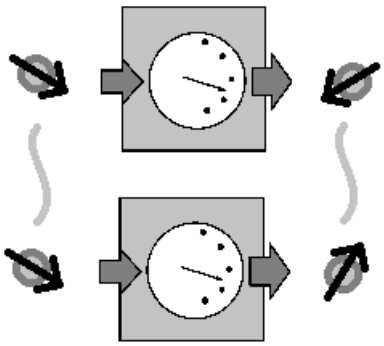
Wyrażenia zawierające wyłącznie wyrazy $\sigma_i^{A_1} \otimes \mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}^{reszta}$, $(i > 0)$ nazywa się wyrażeniami typu A_1, wyrażenia zawierające $\sigma_i^{A_1} \otimes \sigma_j^{A_2} \otimes \mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}^{reszta}$, $(i, j > 0)$ nazywa się wyrażeniami typu A_1A_2 etc.

Najogólniejsza macierz procesu generująca prawidłowe prawdopodobieństwa, tak długo jak jest dodatnia, dla odwzorowań zgodnych z (33) i (35), to:

$$
\begin{aligned}
W^{A_1A_2B_1B_2} &= \frac{1}{d_{A_1}d_{B_1}}(\not\perp + \sigma^{B\preceq A} + \sigma^{A\preceq B} + \sigma^{A\not\preceq\not\succeq B}) \\
\sigma^{A\preceq B} &:= \sum_{ij>0} a_{ij}\sigma_i^{A_1}\sigma_j^{B_2} + \sum_{ijk>0} b_{ijk}\sigma_i^{A_1}\sigma_j^{B_1}\sigma_k^{B_2} \\
\sigma^{B\preceq A} &:= \sum_{ij>0} c_{ij}\sigma_i^{A_2}\sigma_j^{B_1} + \sum_{ijk>0} d_{ijk}\sigma_i^{A_1}\sigma_j^{A_2}\sigma_k^{B_1} \\
\sigma^{A\not\prec\not\succ B} &:= \sum_{i>0} e_i\sigma^{A_1} + \sum_{i>0} f_i\sigma^{B_1} + \sum_{ij>0} h_{ij}\sigma_i^{A_1}\sigma_j^{B_1} \\
&\forall_{ij} a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}, g_{ij}, h_{ij} \in \mathbb{R},
\end{aligned}
\tag{39}
$$

gdzie $\sigma^{A\preceq B}$ można uznać za zasób, w którym Alicja znajduje się w przeszłości Boba, $\sigma^{B\preceq A}$ za zasób, w którym Bob jest w przeszłości Alicji, zaś $\sigma^{A\not\prec\not\succ B}$ za zasób, w którym Alicja i Bob nie komunikują się ze sobą. Słuszność takiej interpretacji utwierdzają interpretacje poszczególnych wyrazów, które składają się na poszczególne zasoby. Zostały one opisane dalej. Wyróżnia się trzy rodzaje wyrażeń należących do rodziny macierzy przedstawionych powyżej.

2.1 Stany



Rysunek 3: Schematyczne przedstawienie stanów. Laboratoria wykonują pewne wybrane pomiary na systemach po czym wysyłają je ze swoich laboratoriów. Każde z laboratoriów otrzymuje różne, potencjalnie splątane, systemy.

Prawidłowe macierze procesu zawierające wyłącznie wyrazy typu A_1B_1, A_1, B_1 produkują takie same statystyki jak macierze gęstości wraz z reguła Borna. Można więc intuicyjnie związać wyrazy typu A_1B_1, A_1, B_1 z sposobem na opis stanów. Do potwierdzenia powyższego twierdzenia w przypadku pomiarów rzutujących wykorzystuje się poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 1. *(por. [10]). Macierz CJ, która opisuje zaobserwowanie pewnego stanu $|\psi\rangle\langle\psi|$ i przygotowanie innego stanu $|\phi\rangle\langle\phi|$ wygląda następująco:*

$$
\mathfrak{C}(\mathcal{M}) = |\psi\rangle\langle\psi| \otimes |\phi\rangle\langle\phi|^T. \tag{40}
$$

W celu dowiedzenia powyższego twierdzenia zacząć można od przeanalizowania w jaki sposób wygląda postać mapy, która opisuje pomiar danego stanu $|\psi\rangle$. Dobierając wektory $\{|\psi_i\rangle\}$ tak, by tworzyły

bazę ortonormalną i $|\psi_0\rangle = |\psi\rangle$ z wcześniej podanej definicji działania mapy można zapisać:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\rho) &= \mathcal{M}\left(\sum_{ij}\alpha_{ij}|\psi_i\rangle\langle\psi_j|\right) = \sum_{ijm}\left[\alpha_{ij}E_m^\dagger|\psi_i\rangle\langle\psi_j|E_m\right] \\ &= \sum_{ijklefm}\left(e_{klm}e_{ef}{}^*_m\alpha_{ij}|\psi_k\rangle\langle\psi_l||\psi_i\rangle\langle\psi_j||\psi_e\rangle\langle\psi_f|\right).\end{aligned} \tag{41}$$

Fakt, że otrzymana macierz po zadziałaniu mapą powinna być wielokrotnością $|\psi\rangle$ (stan obserwowany jest z pewnym prawdopodobieństwem), narzuca warunek, że $k = 0$ i $f = 0$. Następnie zapisując regułę prawdopodobieństwa:

$$\mathrm{Tr}\left[\mathcal{M}(\rho)\right] = \sum_{ijlk}\mathrm{Tr}\left[e_{0lm}e_{0k}{}^*_m\alpha_{ij}|\psi\rangle\langle\psi_l||\psi_i\rangle\langle\psi_j||\psi_k\rangle\langle\psi|\right] = \sum_{ijlkm}\mathrm{Tr}\left[e_{0lm}e_{0k}{}^*_m\alpha_{ij}\delta_{jk}\delta_{jl}|\psi\rangle\langle\psi|\right] = \sum_{im}|e_{0im}|^2\alpha_{ii}. \tag{42}$$

Powyższy wynik musi się zgadzać z prawdopodobieństwem wynikającym z standardowej reguły prawdopodobieństwa, czyli:

$$\sum_{ij}\mathrm{Tr}\left[\alpha_{ij}|\psi\rangle\langle\psi||\psi_i\rangle\langle\psi_j|\right] = \sum_j\mathrm{Tr}\left[\alpha_{0j}|\psi\rangle\langle\psi_j|\right] = \alpha_{00}. \tag{43}$$

Co narzuca warunek, że $\sum_m |e_{0im}|^2 = 0$ dla $i \neq 0$. Rozpisując równanie (42) otrzymuje się:

$$\sum_{im}|e_{0im}|^2\alpha_{ii} = \sum_i\alpha_{ii}\sum_m|e_{0im}|^2 = \alpha_{00}\sum_m|e_{00m}|^2 = \alpha_{00}e_{00} = \alpha_{00}. \tag{44}$$

Korzystając ponownie z (43) widać, że $|e_{00}| = 1$. Korzystając z definicji, postać CJ tego odwzorowania to:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}(\mathcal{M}) &= \sum_{ij}|i\rangle\langle j|\otimes\left(|\psi\rangle\langle\psi|^\dagger|j\rangle\langle i||\psi\rangle\langle\psi|\right)^T = \sum_{ij}|i\rangle\langle j|\otimes\left(|\psi\rangle\left(\sum_l\beta_l^*\langle l||j\rangle\right)\left(\sum_k\beta_k\langle i||k\rangle\right)\langle\psi|\right)^T \\ &= \sum_{ij}\beta_i\beta_j^*|i\rangle\langle i|\otimes|\psi\rangle\langle\psi|^T = |\psi\rangle\langle\psi|\otimes|\psi\rangle\langle\psi|^T.\end{aligned} \tag{45}$$

Dalej zauważając, że ewolucja unitarna jest już zapisana w odpowiedniej formie oraz wybierając macierz unitarną jako $U = \sum_i|\phi_i\rangle\langle\psi_i|$, gdzie wektory $\{|\phi_i\rangle\}$ tworzą bazę ortonormalną, a $|\phi_0\rangle$ jest wybranym stanem, który chce się przygotować, złożenie pomiaru $\mathcal{M}_\psi$ z późniejszą unitarną transformacją $\mathcal{M}_U$ zapisuje się następująco:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}(\mathcal{M}_U\circ\mathcal{M}_\psi) &= \left[|\mathbb{1}\rangle\rangle\langle\langle\mathbb{1}|\otimes\mathcal{M}_U\circ\mathcal{M}_p\left(|\mathbb{1}\rangle\rangle\langle\langle\mathbb{1}|\right)\right]^T = \left[|\psi\rangle\langle\psi|^T\otimes U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger\right]^T \\ &= \left[|\psi\rangle\langle\psi|^T\otimes|\phi\rangle\langle\phi|\right]^T = |\psi\rangle\langle\psi|\otimes|\phi\rangle\langle\phi|^T.\end{aligned} \tag{46}$$

Co pokazuje, że rzeczywiście tak wygląda odwzorowanie CJ dla pomiaru i przygotowania stanu. Powyższe rozważania można poszerzyć na stany mieszane. Wybierając pewną transformację unitarną U_i z prawdopodobieństwem p_i otrzymuje się macierz CJ postaci:

$$|\psi\rangle\langle\psi|\otimes\sum_i p_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|^T = |\psi\rangle\langle\psi|\otimes\rho^T, \tag{47}$$

gdzie $|\phi_i\rangle$ oznacza stan otrzymany po i-tej unitarnej transformacji. Słuszność zapisania powyższej macierzy wynika wprost z liniowości izomorfizmu CJ oraz reguły prawdopodobieństwa, co można potwierdzić jawnym rachunkiem:

$$\begin{aligned}\Pr(x,y) &= \mathrm{Tr}\left[W\left(|\psi\rangle\langle\psi|\otimes\sum_i p_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|^T\otimes M_y\right)\right] \\ &= \sum_i p_i\,\mathrm{Tr}\left[W\left(|\psi\rangle\langle\psi|\otimes|\phi_i\rangle\langle\phi_i|^T\otimes M_y\right)\right] = \sum p_i\Pr(x,y|i)\end{aligned} \tag{48}$$

Przyjmując teraz następująco postać macierzy procesu:

$$W = \rho^{A_1B_1} \otimes \mathbb{1}\!\!\mathbb{1}^{A_2} \otimes \mathbb{1}\!\!\mathbb{1}^{B_2}, \tag{49}$$

która opisuje każdą macierz procesu zawierającą wyłącznie wybrane w tym rozdziale wyrazy, i zapisując regułę prawdopodobieństwa otrzymuje się

$$\begin{aligned}
\Pr(x,y) &= \operatorname{Tr}\left[(\rho^{A_1B_1} \otimes \mathbb{1}\!\!\mathbb{1}^{A_2} \otimes \mathbb{1}\!\!\mathbb{1}^{B_2})(|\psi_x\rangle\langle\psi_x|^{A_1} \otimes |\psi_y\rangle\langle\psi_y|^{B_1} \otimes |\phi_x\rangle\langle\phi_x|^{A_2} \otimes |\phi_y\rangle\langle\phi_y|^{B_2})\right] \\
&= \operatorname{Tr}\left[\rho|\psi_x\rangle\langle\psi_x| \otimes |\psi_y\rangle\langle\psi_y| \otimes |\phi_x\rangle\langle\phi_x| \otimes |\phi_y\rangle\langle\phi_y|\right] \\
&= \operatorname{Tr}\left[\rho|\psi_x\rangle\langle\psi_x| \otimes |\psi_y\rangle\langle\psi_y|\right] \operatorname{Tr}\left[|\phi_x\rangle\langle\phi_x|\right] \operatorname{Tr}\left[|\phi_y\rangle\langle\phi_y|\right] \\
&= \operatorname{Tr}\left[\rho|\psi_x\rangle\langle\psi_x| \otimes |\psi_y\rangle\langle\psi_y|\right].
\end{aligned} \tag{50}$$

Powyższe wyprowadzenie pokazuje, że dla pomiarów von Neumanna tak zdefiniowana macierz procesu generuje takie same statystyki jak formalizm macierzy gęstości. Warto jeszcze zaznaczyć, że iloczynowa postać tej macierzy procesu zapewnia, że $\rho^{A_1B_1}$ również jest dodatnie, czyli spełnia wszystkie warunki narzucone przez formalizm macierzy gęstości. Jednym ze sposobów na pokazanie, że generowane są identyczne statystyki dla dowolnych POVM jest wykonanie jawnego rachunku:

$$\begin{aligned}
\Pr(x,y) &= \operatorname{Tr}\left[\rho^{A_1B_1} \otimes \mathbb{1}\!\!\mathbb{1}^{A_2B_2}(M_x^{A_1A_2} \otimes M_y^{B_1B_2})\right] \\
&= \sum_{ijkl} \operatorname{Tr}\left[(\alpha_{ijkl}|i\rangle\langle j|^{A_1} \otimes \mathbb{1}\!\!\mathbb{1}^{A_2} \otimes |k\rangle\langle l|^{B_1} \otimes \mathbb{1}\!\!\mathbb{1}^{B_2})M_x^{A_1A_2} \otimes M_y^{B_1B_2}\right] \\
&= \sum_{ijklmnef} \operatorname{Tr}\left[\alpha_{ijkl}|i\rangle\langle j| \otimes \mathbb{1}\!\!\mathbb{1} \otimes |k\rangle\langle l| \otimes \mathbb{1}\!\!\mathbb{1})(|m\rangle\langle n| \otimes \mathcal{M}_x(|n\rangle\langle m|)^T \otimes |e\rangle\langle f| \otimes \mathcal{M}_y(|f\rangle\langle e|)^T\right] \\
&= \sum_{ijklmnef} \operatorname{Tr}\left[\alpha_{ijkl}|i\rangle\langle j||m\rangle\langle n|^{A_1} \otimes |k\rangle\langle l||e\rangle\langle f|^{B_1}\right] \operatorname{Tr}\left[\mathcal{M}_x(|n\rangle\langle m|)^{{A_2}^T} \otimes \mathcal{M}_y(|f\rangle\langle e|)^{{B_2}^T}\right] \\
&= \sum_{mnef} \operatorname{Tr}\left[\alpha_{ijkl}\langle n||i\rangle\langle j||m\rangle \otimes \langle f||k\rangle\langle l||e\rangle\right] \operatorname{Tr}\left[\mathcal{M}_x(|n\rangle\langle m|)^{{A_2}^T} \otimes \mathcal{M}_y(|f\rangle\langle e|)^{{B_2}^T}\right] \\
&= \sum_{mnef} \operatorname{Tr}\left[\alpha_{nmfe}\right] \operatorname{Tr}\left[\mathcal{M}_x(|n\rangle\langle m|)^{{A_2}^T} \otimes \mathcal{M}_y(|f\rangle\langle e|)^{{B_2}^T}\right] \\
&= \sum_{mnef} \operatorname{Tr}\left[\alpha_{nmfe}\mathcal{M}_x(|n\rangle\langle m|)^{{A_2}^T} \otimes \mathcal{M}_y(|f\rangle\langle e|)^{{B_2}^T}\right] \\
&= \operatorname{Tr}\left[\mathcal{M}_x \otimes \mathcal{M}_y(\sum_{nmfe} \alpha_{nmfe}|n\rangle\langle m| \otimes |f\rangle\langle e|)^T\right] \\
&= \operatorname{Tr}\left[\mathcal{M}_x \otimes \mathcal{M}_y(\rho)^T\right] \\
&= \operatorname{Tr}\left[\mathcal{M}_x \otimes \mathcal{M}_y(\rho)\right].
\end{aligned} \tag{51}$$

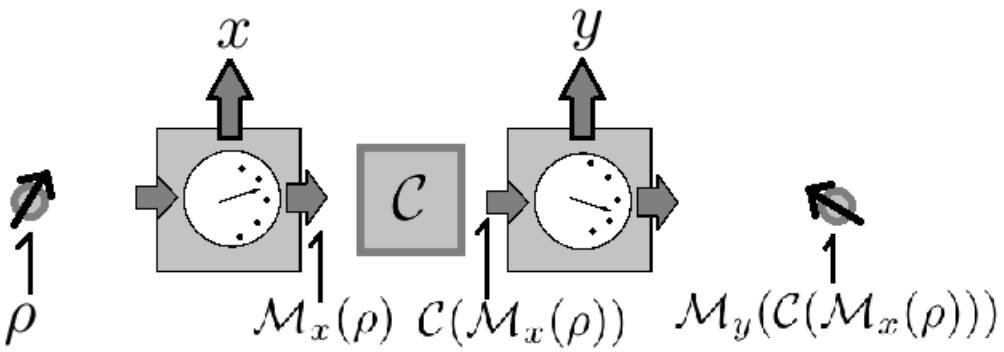
Ostateczna postać po przekształceniach zgadza się z tą, która opisuje statystyki pomiarów na systemie złożonym opisywanym przez równanie (26). Przykładowo macierz procesu, która opisuje sytuację, gdzie laboratoria dzielą maksymalnie splątane [6] cząsteczki, zapisuje się następująco:

$$W = \frac{1}{d}|\mathbb{1}\!\!\mathbb{1}\rangle\rangle\langle\langle\mathbb{1}\!\!\mathbb{1}|^{A_1B_1} \otimes \mathbb{1}\!\!\mathbb{1}^{A_2} \otimes \mathbb{1}\!\!\mathbb{1}^{B_2}. \tag{52}$$

W powyższym równaniu założono, iż każdy system ma wymiar d. W przypadku różnych wymiarów poprawna stała normalizacyjna to $\frac{d_{A_2B_2}}{\operatorname{Tr} W}$.

[6] Do sprecyzowania, co rozumiane jest pod pojęciem maksymalnego splątania, konieczne jest wprowadzenie miary splątania. Przez miarę splątania rozumie się taką funkcję, która jest monotoniczna, gdy laboratoria mogą wykonywać lokalne operacje i komunikować się klasycznie (np. telefonem). Konieczne również jest, by zbiegała do zera dla stanów niesplątanych. Przykładem takiej miary jest entropia von Neumanna definiowana przez $S(\rho) = -\operatorname{Tr}[\rho \log \rho]$. Okazuje się, że jest ona maksymalna dla $\frac{1}{d}|\mathbb{1}\!\!\mathbb{1}\rangle\rangle\langle\langle\mathbb{1}\!\!\mathbb{1}|$ [14].

2.2 Kanały



Rysunek 4: Schematyczna reprezentacja kanału CPTP. Alicja wykonuje wybrane operacje na systemie po czym wysyła go do Boba. W trakcie przesyłania systemu zostaje zaaplikowana unitarna transformacja U.

Wyrazy typu A_2B_1, B_2A_1 identyfikuje się jako sposób opisywania kanałów, ze względu na występowanie tych wyrazów w macierzach CJ kanałów. Łatwo zaobserwować, że formuła

$$\mathrm{Tr}\left[\mathcal{M}_y^B \circ \mathbb{C} \circ \mathcal{M}_x^A(\rho)\right] \tag{53}$$

opisuje statystyki pomiarowe eksperymentu, w którym Alicja wykonuje pewne pomiary, przesyła system kanałem CPTP $\mathbb{C}$, po czym Bob wykonuje swoje pomiary na otrzymanym systemie. Jej nieoczywista równoważność z

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\rho^{A_1} \otimes C^{A_2B_1{}^T} \otimes \mathbb{1}^{B_2}\right)\left(M_x^{A_1A_2} \otimes M_y^{B_1B_2}\right)\right]. \tag{54}$$

może być pokazana następująco:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[\left(\rho^{A_1} \otimes C^{A_2B_1} \otimes \mathbb{1}\right)\left(M_x^{A_1A_2} \otimes M_y^{B_1B_2}\right)\right] \\
&= \sum_{ijklmn} \mathrm{Tr}\left[(\rho \otimes |i\rangle\langle j| \otimes \mathbb{C}(|i\rangle\langle j|) \otimes \mathbb{1})\left(|k\rangle\langle l| \otimes \mathcal{M}_x(|l\rangle\langle k|)^T \otimes |m\rangle\langle n| \otimes \mathcal{M}_y(|n\rangle\langle m|)^T\right)\right] \\
&= \sum_{ijklmn} \mathrm{Tr}\left[\rho|k\rangle\langle l| \otimes |i\rangle\langle j|\mathcal{M}_x(|l\rangle\langle k|)^T \otimes \mathbb{C}(|i\rangle\langle j|)|m\rangle\langle n| \otimes \mathcal{M}_y(|n\rangle\langle m|)^T\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[\rho|k\rangle\langle l|\right]\mathrm{Tr}\left[|i\rangle\langle j|\mathcal{M}_x(|l\rangle\langle k|)\right]\mathrm{Tr}\left[\mathbb{C}(|i\rangle\langle j|)|m\rangle\langle n|\right]\mathrm{Tr}\left[\mathcal{M}_y(|m\rangle\langle n|)\right] \\
&= \sum_{ijmn} \mathrm{Tr}\left[|i\rangle\langle j|\mathcal{M}_x(\sum_{lk}\rho_{lk}|l\rangle\langle k|)^T\right]\mathrm{Tr}\left[\mathbb{C}(|i\rangle\langle j|)|m\rangle\langle n|\right]\mathrm{Tr}\left[\mathcal{M}_y(|n\rangle\langle m|)^T\right] \\
&= \sum_{ijmn} \mathrm{Tr}\left[|i\rangle\langle j|\mathcal{M}_x(\rho)^T\right]\mathrm{Tr}\left[\mathbb{C}(|i\rangle\langle j|)|m\rangle\langle n|\right]\mathrm{Tr}\left[\mathcal{M}_y(|n\rangle\langle m|)^T\right] \\
&= \sum_{mn} \mathrm{Tr}\left[\mathbb{C}(\mathcal{M}_x(\rho))|m\rangle\langle n|\right]\mathrm{Tr}\left[\mathcal{M}_y(|n\rangle\langle m|)^T\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[\mathcal{M}_y(\mathbb{C}(\mathcal{M}_x(\rho)))^T\right] = \mathrm{Tr}\left[\mathcal{M}_y(\mathbb{C}(\mathcal{M}_x(\rho)))\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[\mathcal{M}_y^B \circ \mathbb{C} \circ \mathcal{M}_x^A(\rho)\right]
\end{aligned} \tag{55}$$

Przykładowo macierz opisująca odwracalny kanał, który wysyła cząstkę z A_2 do B_1 i wykonuje pewną operację unitarną U, to $|U\rangle\rangle\langle\langle U|^{A_2B_1}$. Korzystając z wcześniej opisanej detekcji stanu i przygotowania innego stanu eksperyment, w którym Alicja wysyła system zakodowany w bazie z, Bob wykonuje pomiar w bazie z, następnie Alicja przesyła dalej swój system, a Bob przygotowuje na wyjście dowolny stan (nie

ma znaczenia, jaki stan przygotuje Bob, gdyż wyjście z jego laboratorium nie jest z niczym połączone), np. maksymalnie zmieszany ($\frac{1}{2}\mathbb{1}$), można opisać następującymi odwzorowaniami

$$\xi(i) = |i\rangle\langle i| \otimes |i\rangle\langle i| \tag{56}$$

$$\eta(j) = |j\rangle\langle j| \otimes \frac{1}{2}\mathbb{1}. \tag{57}$$

W celu skrócenia zapisu pominięto indeksy górne, które pozostaną dalej niejawne, gdy ich brak nie będzie wprowadzał niejasności. Można się spodziewać, że gdy laboratoria będzie łączył kanał z A_2 do B_1, który zamienia $|i\rangle \mapsto |i \oplus 1\rangle$, kanał ten opisuje postać CJ macierzy unitarnej $\sum_i |i\rangle\langle i \oplus 1|$, a Alicja na wejściu dostaje stan maksymalnie zmieszany, to prawdopodobieństwo zaobserwowania stanu $|j\rangle$ u Boba będzie równe 1, gdy Alicja wyśle mu stan $|j \oplus 1\rangle$, i zerowe w przeciwnym wypadku. Podejrzenia te potwierdza jawny rachunek:

$$\begin{aligned} W &= \rho^{A_1} \otimes C^{A_2B_1} \otimes \mathbb{1}^{B_2} \\ &= \sum_{ijkl} \frac{1}{2}\mathbb{1}^{A_1} \otimes (|i\rangle\langle j| \otimes |k \oplus 1\rangle\langle k||i\rangle\langle j||l\rangle\langle l \oplus 1|)^{A_2B_1} \otimes \mathbb{1}^{B_2} \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} \Pr(i,j) &= \frac{4}{\operatorname{Tr} W} \operatorname{Tr}\left[W(\xi(i) \otimes \eta(j))\right] \\ &= C \sum_{efkl} \operatorname{Tr}[\mathbb{1} \otimes |e\rangle\langle f| \otimes |k \oplus 1\rangle\langle k||e\rangle\langle f||l\rangle\langle l \oplus 1| \otimes \mathbb{1})(|i\rangle\langle i| \otimes |i\rangle\langle i| \otimes |j\rangle\langle j| \otimes \mathbb{1})] \\ &= \frac{2}{8} \sum_{efkl} \delta_{if}\delta_{j(l\oplus 1)} \operatorname{Tr}\left[|i\rangle\langle i| \otimes |e\rangle\langle i| \otimes |k \oplus 1\rangle\langle k||e\rangle\langle f||l\rangle\langle j| \otimes \mathbb{1}\right] \\ &= \frac{2}{8} \sum_{efkl} \delta_{if}\delta_{ke}\delta_{fl}\delta_{j(l\oplus 1)} \operatorname{Tr}\left[|i\rangle\langle i| \otimes |e\rangle\langle i| \otimes |k \oplus 1\rangle\langle j| \otimes \mathbb{1}\right] \\ &= \frac{2}{8} \sum_{k} \delta_{i(j\oplus 1)} \operatorname{Tr}\left[|i\rangle\langle i| \otimes |k\rangle\langle i| \otimes |k \oplus 1\rangle\langle j| \otimes \mathbb{1}\right] \\ &= \frac{2}{8} \sum_{k} \delta_{i(j\oplus 1)} \operatorname{Tr}\left[|i\rangle\langle i| \otimes |k\rangle\langle i| \otimes |k \oplus 1\rangle\langle i \oplus 1| \otimes \mathbb{1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\delta_{i(j\oplus 1)}. \end{aligned} \tag{59}$$

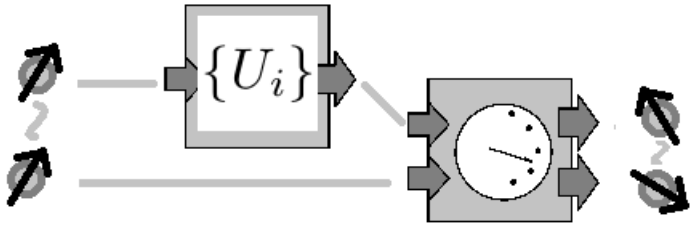
Co potwierdza podejrzenia, że powyższy zasób jest kanałem od Alicji do Boba.

2.3 Kanały z pamięcią

Do opisywania kanałów z pamięcią wykorzystuje się wyrazy typu $B_1B_2A_1$, $A_1A_2B_1$. Są one najogólniejszym wyrazem zgodnym z wymaganiami narzuconymi na macierze procesu. Ciekawym przykładem kanału z pamięcią może być zasób wykorzystywany przy implementacji kodowania supergęstego (*superdense coding*). Jest to protokół, który wykorzystuje się do przesłania dwóch bitów informacji od Alicji do Boba. Początkowo produkowana jest para maksymalnie splątanych cząsteczek, z których jedna jest wysłana do Alicji, a druga do Boba. Następnie Alicja wykonuje jedną z czterech lokalnych unitarnych transformacji na swoim systemie, po czym wysyła swój system do Boba. Macierze, którymi działa Alicja, to $\{U_i\} = \{\mathbb{1}, \mathbb{X}, \mathbb{Z}, -i\mathbb{Y}\}$, gdzie $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ to macierze Pauliego:

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Okazuje się, że po wykonaniu lokalnej transformacji system złożony znajduje się w jednym z czterech ortogonalnych stanów, co pozwala Bobowi, po otrzymaniu systemu od Alicji, określić, jaką transformację



Rysunek 5: Schematyczna reprezentacja kanału z pamięcią na przykładzie zasobu wykorzystywanego do implementacji kodowania supergęstego. Alicja z Bobem dzielą maksymalnie splątane cząstki. Alicja wykonuje pewną unitarną transformację i wysyła swój system dalej do Boba.

wykonała Alicja, czyli otrzymać wiadomość od Alicji zakodowaną w wykonanej przez nią transformacji. Wyjątkowość tego protokołu polega na fakcie, że Bob może otrzymać pierwszą cząstkę arbitralnie wcześniej, niż cząstkę, którą otrzyma od Alicji, co więcej może on otrzymać tę cząstkę zanim Alicja zdecyduje, jakie 2 bity chce mu przesłać. Może to błędnie sugerować, że Alicja wysłała dwa klasyczne bity przy pomocy jednego kubitu. Sytuacja taka jest zabroniona przez granicę Holevo (*Holevo bound*) [7]. Mimo wszystko w całym procesie dwa kubity są wysyłane do Boba w celu przesłania dwóch klasycznych bitów co nie wprowadza sprzeczności. W celu wykonania tego protokołu potrzebne są dwie maksymalnie splątane cząsteczki i kanał od Alicji do Boba. Korzystając z wiedzy z poprzednich dwóch podrozdziałów zapisuje się ten zasób następująco:

$$\begin{aligned} W &= \rho^{A_1B_{11}} \otimes C^{A_2B_{12}} \otimes \text{Ж}^{B_{21}B_{22}} \\ &= \frac{1}{2}|\text{Ж}\rangle\rangle\langle\langle\text{Ж}|^{A_1B_{11}} \otimes |\text{Ж}\rangle\rangle\langle\langle\text{Ж}|^{A_2B_{12}} \otimes \text{Ж}^{B_{21}B_{22}}, \end{aligned} \tag{61}$$

gdzie w tym przypadku Bob operuje na dwóch cząstkach. W przypadku Boba pierwsza cyfra indeksów dolnych systemów Boba wskazuje, czy dany system jest wejściowy czy wyjściowy, zaś druga cyfra jest porządkowa. Warto podkreślić, iż powyższy proces różni się od zwykłego kanału faktem, że Alicja i Bob dzielą stan splątany ($|\text{Ж}\rangle\rangle\langle\langle\text{Ж}|^{A_1B_{11}}$) i kanał od Alicji do Boba ($|\text{Ж}\rangle\rangle\langle\langle\text{Ж}|^{A_2B_{12}}$). Stany po wykonaniu kolejnych unitarnych transformacji z dokładnością do stałej to $\{|\psi_i\rangle\} = \{\text{Ж} \otimes U_i|\text{Ж}\rangle\rangle\} = \{|00\rangle + |11\rangle, |10\rangle +$

[7] Ilość informacji, która można zdobyć na temat stanu ρ znając wynik wybranego POVM, ograniczona jest z góry przez granicę Holevo. Granica Holevo dana jest następująco:

$$-\operatorname{Tr}\left[\rho \log \rho\right] - \sum_i \left(-p_i \operatorname{Tr}\left[\rho_i \log \rho_i\right]\right),$$

dla pewnego stanu zmieszanego $\rho = \sum_i p_i \rho_i$. Ważną konsekwencją powyższej nierówności jest fakt, że dokonując pomiaru na systemie złożonym z n-kubitów można otrzymać co najwyżej n bitów informacji.

$|01\rangle, |00\rangle - |11\rangle, |10\rangle - |01\rangle\}$. Zależność tę można przepisać jako:

$$\begin{aligned}\{\mathbb{1} \otimes U_i|\mathbb{1}\rangle\rangle\}_{i=0}^{3} &= \{|00\rangle + |11\rangle, |10\rangle + |01\rangle, |00\rangle - |11\rangle, |10\rangle - |01\rangle\} \\ &= \left\{\sum_n |nn\rangle, \sum_n |n, n\oplus 1\rangle, \sum_n (-1)^n |nn\rangle, \sum_n (-1)^n |n, n\oplus 1\rangle\right\} \\ &= \Bigg\{\sum_n (-1)^{n\cdot(0\div 2)} |nn\rangle, \sum_n (-1)^{n\cdot(1\div 2)} |n, n\oplus 1\rangle, \\ &\sum_n (-1)^{n\cdot(2\div 2)} |nn\rangle, \sum_n (-1)^{n\cdot(3\div 2)} |n, n\oplus 1\rangle\Bigg\} \\ &= \left\{\sum_n (-1)^{n\cdot(i\div 2)} |n, n\oplus((i\oplus 1)\oplus 1)\rangle\right\}_{i=0}^{3},\end{aligned} \tag{62}$$

gdzie powyżej $x \oplus y$ traktowano jako $x + y \mod 2$, zaś $\div$ to dzielenie bez reszty ($x \div y = \frac{x-(x \mod y)}{y}$) Powyższe obliczenia okażą się przydatne przy wykonywaniu późniejszych rachunków. Postać CJ operacji wykonywanych przez poszczególne strony to:

$$\xi(i) = \sum_{ef} |e\rangle\langle f| \otimes U_i |e\rangle\langle f| U_i^\dagger \tag{63}$$

$$\eta(j) = \frac{1}{8} \sum_{ef} |e\rangle U_j |e\rangle\langle f| U_j^\dagger \langle f| \otimes \mathbb{1}. \tag{64}$$

Uwaga: w ostatnim odwzorowaniu macierz jednostkowa symbolizuje fakt, że z laboratorium Boba wychodzi biały szum. Jego wymiar może być dowolny, lecz dla symetryczności można przyjąć, że jest równy 4. Korzystając z reguły prawdopodobieństwa i zapisując systemy w kolejności $A_1 A_2 B_{11} B_{12} B_{21} B_{22}$ wykonuje się następujące obliczenia:

$$\begin{aligned}\Pr(j|i) &= \mathrm{Tr}\left[W(\xi(i) \otimes \eta(j)\right] \\ &= \frac{1}{16} \sum_{efklmnqp} \mathrm{Tr}\Big[|e\rangle\langle f| \otimes |k\rangle\langle l| \otimes |e\rangle\langle f| \otimes |k\rangle\langle l| \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \\ &\Big(|m\rangle\langle n| \otimes U_i |m\rangle\langle n| U_i^\dagger \otimes |q\rangle U_j |q\rangle\langle p| \langle p| U_j^\dagger \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{16} \sum_{efklmnqp} (-1)^{(m\cdot(i\div 2)+q\cdot(j\div 2))} \mathrm{Tr}\left[|e\rangle\langle f| \otimes |k\rangle\langle l| \otimes |e\rangle\langle f| \otimes |k\rangle\langle l| \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}\right. \\ &\left.\Big(|m\rangle\langle n| \otimes |m \oplus ((i\oplus 1)\oplus 1)\rangle\langle n| U_i^\dagger \otimes |q\rangle |q((j\oplus 1)\oplus 1)\rangle\langle p| \langle p| U_j^\dagger \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}\Big)\right] \\ &= \frac{1}{16} \sum_{efklmnqp} (-1)^{(m\cdot(i\div 2)+q\cdot(j\div 2))} \delta_{fm} \delta_{l(m\oplus(i\oplus 1)\oplus 1)} \delta_{fq} \delta_{l(q\oplus(j\oplus 1)\oplus 1)} \\ &\quad \mathrm{Tr}\left[|e\rangle\langle n| \otimes |k\rangle\langle n| U_i^\dagger \otimes |e\rangle\langle p| \otimes |k\rangle\langle p| U_j^\dagger \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}\right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{efkmnqp} (-1)^{(m\cdot(i\div 2)+q\cdot(j\div 2))} \delta_{(m\oplus(i\oplus 1)\oplus 1)(q\oplus(j\oplus 1)\oplus 1)} \delta_{fm} \delta_{fq} \\ &\quad \mathrm{Tr}\left[|e\rangle\langle n| \otimes |k\rangle\langle n| U_i^\dagger \otimes |e\rangle\langle p| \otimes |k\rangle\langle p| U_j^\dagger\right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{ekmnp} (-1)^{(m\cdot(i\div 2)+m\cdot(j\div 2))} \delta_{(i\oplus 1)(j\oplus 1)} \mathrm{Tr}\left[|e\rangle\langle n| \otimes |k\rangle\langle n| U_i^\dagger \otimes |e\rangle\langle p| \otimes |k\rangle\langle p| U_j^\dagger\right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{ekmnp} (-1)^{(m\cdot(i\div 2)+m\cdot(j\div 2))} \delta_{(i\oplus 1)(j\oplus 1)} \delta_{en} \delta_{ep} \mathrm{Tr}\left[|e\rangle\langle n| \otimes |k\rangle\langle n| U_i^\dagger \otimes |e\rangle\langle p| \otimes |k\rangle\langle p| U_j^\dagger\right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{ekm} (-1)^{(m\cdot(i\div 2)+m\cdot(j\div 2))} \delta_{(i\oplus 1)(j\oplus 1)} \mathrm{Tr}\left[|e\rangle\langle e| \otimes |k\rangle\langle e| U_i^\dagger \otimes |e\rangle\langle e| \otimes |k\rangle\langle e| U_j^\dagger\right] \\ &= \delta_{ij}.\end{aligned} \tag{65}$$

Macierze U_i są uporządkowane w taki sposób, że macierze o tej samej parzystości mają taką samą strukturę, lecz mogą się różnić znakiem - patrz (65). Oznacza to, że podczas wykonywania ostatniego kroku powyższych obliczeń, połowa wyrazów będzie miała plus, zaś druga minus, co razem da zero. Obserwacja ta pozwala dokonać ostatniego przejścia. Powyższe obliczenia pokazują, że rzeczywiście opisywany jest tutaj protokół supergęstego kodowania.

3 Przyczynowa separowalność i przyczynowe nierówności

Bardzo ważnym pojęciem, które pozwala określić, czy dany proces generuje klasyczne statystyki (czyli takie, które są zgodne z pewną probabilistyczną kombinacją pewnych porządków przyczynowych) jest przyczynowa separowalność, która zdefiniowana jest następująco:

Definicja 6. *(por. [10]). Przyczynowo separowalnymi macierzami procesu (causally separable) nazywa się takie macierze, które można zapisać jako wypukłą kombinację procesów implementowalnych przy założeniu określonej struktury przyczynowej:*

$$W^{A_1A_2B_1B_2} = qW^{B\not\prec A} + (1-q)W^{A\not\prec B},\ 0 \leqslant q \leqslant 1, \tag{66}$$

gdzie

$$W^{B\not\prec A} := \frac{1}{d_{A_1}d_{B_1}}\not\Vdash + \sigma^{A\preceq B} + \sigma^{A\not\preceq\not\succeq B} \tag{67}$$

$$W^{A\not\prec B} := \frac{1}{d_{A_1}d_{B_1}}\not\Vdash + \sigma^{B\preceq A} + \sigma^{A\not\preceq\not\succeq B} \tag{68}$$

$$W^{A\not\prec\not\succ B} := \frac{1}{d_{A_1}d_{B_1}}\not\Vdash + \sigma^{A\not\prec\not\succ B}, \tag{69}$$

Pierwszą rodzinę procesów można interpretować jako zasób, w którym operacje Boba nie zachodzą przed operacjami Alicji. Powyższa dekompozycja nie musi być jednoznaczna, jako że wyrazy typu $W^{A\not\prec\not\succ B}$ można włączyć do wybranego wyrazu. Przed wprowadzeniem przyczynowej nierówności (*causal inequallity*) warto wspomnieć o tzw. nierówności Bella. Jest to nieskończona rodzina nierówności, których żaden niesplątany system nie może złamać. Jest to niezależny od implementacji pomiarów (*device independent*) sposób weryfikacji splątania kwantowego.

Definicja 7. *Nierówność przyczynowa to taka nierówność wynikająca z pewnego zadania komunikacyjnego, która ogranicza wyniki, jakie można osiągnąć w danym zadaniu korzystając z zasobów przyczynowych. Niespełnianie takiej nierówności implikuje fakt, że dany zasób jest nieprzyczynowy.*

Przykład takiej nierówności przedstawiony jest poniżej. Przyjmuje się następujące założenia na temat natury rzeczywistości uporządkowanej przyczynowo [10].

Przyczynowa struktura (*causal structure*, CS) Wydarzenia obdarzone są częściowym porządkiem w strukturze czasoprzestrzeni, można wyznaczyć kolejność wydarzeń $A \prec B$, która wyznacza kierunek przesyłania informacji; jeżeli $A \prec B$, to możliwe jest sygnalizowanie [8] z A do B, lecz nie na odwrót.

Wolny wybór (*free choice*, FC) W przypadku wyboru liczb losowych możliwe korelacje występują wyłącznie z wynikami z przyszłości.

[8] W przypadku, gdy $A \prec B$, oznacza to, że brzegowy rozkład prawdopodobieństwa otrzymania danego wyniku nie zależy od wejścia drugiej strony: $\Pr(a|x,y) = \Pr(a|x,y')\ \forall a,x,y,y'$, $\Pr(a|x,y) = \sum_b \Pr(a,b|x,y)$, gdzie a, b oznacza wyniki otrzymane przez odpowiednie strony, zaś x, y - ich wejścia.

Zamknięte laboratoria (*closed laboratories*, CL) Liczba odgadnięta przez Alicję może być skorelowana z liczbą losową Boba wyłącznie, jeżeli system jest wysłany do Alicji przed (w sensie przyczynowości) generacją liczby Boba, analogicznie w przypadku odwrotnym.

Rozważa się następującą dwustronną grę realizowaną wielokrotnie przez dwa odległe laboratoria (Alicję i Boba). W każdej iteracji rozgrywki Alicja i Bob otrzymują na wejściu pewien fizyczny system, wykonują na nim pewne operacje i wysyłają dalej system. Każda ze stron może otrzymać sygnał wyłącznie przez system wchodzący do laboratorium, zaś wysłać wyłącznie przez system wychodzący z laboratorium. Widać więc, że jeżeli Alicja otrzyma system, który przeszedł pewną procedurę u Boba, to Bob może wysłać informacje, zaś Alicja może ją wyłącznie odebrać, co uniemożliwia dwustronną sygnalizację. Każdy z graczy otrzymując system losuje jeden bit wybraną metodą, oznaczany a dla Alicji i b dla Boba. Dodatkowo Bob losuje bit b', który decyduje, czy Bob ma zgadywać bit a Alicji, czy Alicja ma zgadywać bit b Boba. Bez utraty ogólności można przyjąć, że obie strony zgadują bit drugiego gracza. W zależności od b' ich predykcja może się nie liczyć. Zakłada się, że bity losowane są z równym prawdopodobieństwem. Prawdopodobieństwo sukcesu w takiej grze zapisuje się następująco

$$\Pr{}_{sukcesu} := \frac{1}{2}\left[\Pr(x = b|b' = 0) + \Pr(y = a|b' = 1)\right] \tag{70}$$

Każda strategia w uporządkowanej strukturze czasu osiąga $\Pr{}_{sukcesu} \leqslant \frac{3}{4}$. Optymalną strategię opisuje się nierygorystycznie następująco: w przypadku $A \prec B$ Alicja może zakodować swój bit w pewien sposób w systemie, który wyśle do Boba, dlatego można wybrać taką strategię, że $\Pr(y = a) = 1$, Alicji pozostaje wtedy losowa predykcja co do wartości bitu Boba - $\Pr(x = b) = \frac{1}{2}$. Można również pokazać, że żadna probabilistyczna strategia nie może poprawić wyniku, co daje optymalną strategię. Prawdziwym okazuje poniższe twierdzenie

Twierdzenie 2. *(por. [15]). Prawdopodobieństwo sukcesu, osiągalne z wykorzystaniem prawidłowych macierzy procesu, w powyższej grze ograniczone jest z góry przez* $\Pr{}_{sukces} \leqslant \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Dowód tego twierdzenia znaleźć można w [15]. Inspirując się zasobem z [10] można wprowadzić następującą rodzinę procesów:

$$W^{A_1A_2B_1B_2} = \frac{1}{4}\left[\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1}\mathbb{Z}\mathbb{Z}\mathbb{1} + q\mathbb{Z}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{Z} + \frac{(1-q)}{2}\mathbb{Z}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{1})\right],\ 0 \leqslant q \leqslant 1. \tag{71}$$

Macierze $\mathbb{1}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ tworzą bazę Hilberta-Schmidta. W powyższym zapisie pominięto iloczyn tensorowy w celu skrócenia zapisu w miejscach, gdzie jego brak nie powinien wprowadzać nieporozumień - $\mathbb{1}^{A_1}\mathbb{X}^{A_2}\mathbb{Y}^{B_1}\mathbb{Z}^{B_2} =: \mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{Y}\mathbb{Z}$. Przy odpowiednich wartościach q można wykorzystać powyższy zasób do złamania przyczynowej nierówności. Okazuje się, że przy $q = 1$ i odpowiedniej procedurze osiąga się maksymalne złamanie przyczynowej nierówności wynikającej z wprowadzonej gry. Z drugiej strony widać od razu, że przy $q = 0$ ma się $A \prec B$, zatem z definicji nie pozwala złamać przyczynowej nierówności. Procedurę, która wykorzystywana jest w celu osiągnięcia maksymalnego prawdopodobieństwa sukcesu, zaprezentowano poniżej. Za każdym razem Alicja mierzy swój system w bazie z i przypisuje $x = 0$ dla $|z_+\rangle$, zaś $x = 1$ dla $|z_-\rangle$, a następnie przygotowuje na nowo kubit i zakodowuje a w tej samej bazie. Odwzorowanie CP Alicji wygląda następująco:

$$\xi(x, a) = \frac{1}{4}\left[\mathbb{1} + (-1)^x\mathbb{Z}\right] \otimes \left[\mathbb{1} + (-1)^a\mathbb{Z}\right]. \tag{72}$$

Natomiast, gdy Bob jako posiadacz bitu b' chce odczytać bit Alicji, mierzy przychodzący kubit w bazie z i przypisuje wyniki tego pomiaru do y analogicznie jak Alicja. W tym przypadku nieistotne jest jaki stan przygotuje Bob, więc przygotowuje dowolny stan ρ^{B_2} znormalizowany do $\mathrm{Tr}(\rho^{B_2}) = 1$. W przypadku

$b' = 0$, Bob chce wysłać swój bit do Alicji. Dokonuje pomiaru w bazie x, następnie w przypadku wyniku $y = |x_+\rangle$ zakodowuje swój bit następująco: $0 \to |z_+\rangle, 1 \to |z_-\rangle$, zaś w drugim kodowanie wygląda odwrotnie: $1 \to |z_+\rangle, 0 \to |z_-\rangle$. Jego odwzorowanie wygląda następująco

$$\eta(y,b,b') = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\not{1} + (-1)^y\mathbb{Z}\right] \otimes \rho & b' = 1 \\ \frac{1}{4}\left[\not{1} + (-1)^y\mathbb{X}\right] \otimes \left[\not{1} + (-1)^{b+y}\mathbb{Z}\right] & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \tag{73}$$

Przypominając, że prawdopodobieństwo sukcesu w tej grze dane jest jako

$$\Pr{}_{sukcesu} := \frac{1}{2}\left[\Pr(x = b|b' = 0) + \Pr(y = a|b' = 1)\right], \tag{74}$$

i przyjmując dla wygody obliczeń, że ρ w mapie Boba to $\frac{1}{2}\not{1}$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\Pr(x,y|a,b,b' = 1)_q &= \frac{1}{4}\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4\right) \\
p_1 &= \frac{1}{64}\operatorname{Tr}\left[(\not{1} + (-1)^x\mathbb{Z}) \otimes (\not{1} + (-1)^a\mathbb{Z}) \otimes (\not{1} + (-1)^y\mathbb{Z}) \otimes \not{1}\right] \\
&= \frac{1}{4} \\
p_2 &= \frac{1}{64\sqrt{2}}\operatorname{Tr}\left[\not{1}\mathbb{Z}\mathbb{Z}\not{1}\,(\not{1} + (-1)^x\mathbb{Z}) \otimes (\not{1} + (-1)^a\mathbb{Z}) \otimes (\not{1} + (-1)^y\mathbb{Z}) \otimes \left(\not{1} + (-1)^{b+y}\mathbb{Z}\right)\right] \\
&= \frac{4}{64\sqrt{2}}\operatorname{Tr}\left[(\mathbb{Z} + (-1)^a\mathbb{Z}\mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\mathbb{Z}(-1)^y)\right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1)^a(-1)^y \\
p_3 &= \frac{q}{32\sqrt{2}}\operatorname{Tr}\left[(\mathbb{Z} + (-1)^x\mathbb{Z}\mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{X} + (-1)^y\mathbb{X}\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}\right] \\
&= \frac{q}{4\sqrt{2}}(-1)^x \cdot 0 \cdot 0 = 0 \\
p_4 &= 0 \\
\Pr(x,y|a,b,b' = 1)_q &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1)^a(-1)^y.
\end{aligned} \tag{75}$$

Dla utrzymania porządku w powyższych obliczeniach wydzielono obliczenia dla każdego wyrazu z W. Następnie oblicza się odpowiednie rozkłady brzegowe. Poniżej zostanie jawnie obliczony jeden z rozkładów:

$$\begin{aligned}
\Pr(y = a|b' = 1)_q &= \sum_x \Pr(x, y = a|b' = 1)_q = \frac{1}{2}\sum_{xb}\Pr(x, y = a|b.b' = 1) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{xab}\delta_{ya}\Pr(x,y|a,b,b' = 1) = \frac{1}{4}\sum_{xyab}\delta_{ya}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1)^a(-1)^y\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{xyb}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1)^y(-1)^y\right) = \sum_{xy}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}+2}{4}
\end{aligned} \tag{76}$$

Po obliczeniu drugiego rozkładu brzegowego otrzymuje się wyrażenie na prawdopodobieństwo sukcesu.

$$\Pr(x = b|b' = 0)_q = \frac{\sqrt{2}q + 2}{4} \tag{77}$$

$$\Pr(y = a|b' = 1)_q = \frac{\sqrt{2}+2}{4} \tag{78}$$

$$\Pr{}_{sukcesu_q} = \frac{\sqrt{2}q + \sqrt{2} + 4}{8}, \tag{79}$$

gdzie indeks odnotowuje zależność prawdopodobieństwa od q. Tak jak się spodziewano, prawdopodobieństwo sukcesu Alicji rośnie wraz ze zwiększaniem współczynnika przy członie $\mathbb{Z}\not{\mathbb{I}}\not{\mathbb{I}}\mathbb{X}\mathbb{Z}$ rozumianym jako reprezentacja kanału kwantowego z pamięcią, który odpowiada za sygnalizujące korelacje $A \preceq B$. Przy $q = 0$ Alicja ma dostęp wyłącznie do niesygnalizujących nietrywialnych zasobów (wyraz $\mathbb{Z}\not{\mathbb{I}}\not{\mathbb{I}}\mathbb{X}\not{\mathbb{I}}$), które nie mogą zwiększyć prawdopodobieństwa sukcesu w tej grze, gdyż wymaga ona zasobów sygnalizujących. Argument ten został rygorystycznie pokazany np. w [16]. Wraz ze zwiększaniem q Alicja ma dostęp do coraz większej ilości sygnalizujących zasobów, co pozwala jej częściej wygrywać w owej grze. Ważnym jest zauważyć, że macierz ta jest nieujemna: $W^{A_1A_2B_1B_2} \geqslant 0$ dla $0 \leqslant q \leqslant 1$, korzystając z tego protokołu łamie się przyczynową nierówność dla $q \geqslant \sqrt{2} - 1$, zaś proces jest nieseparowalny dla $q \geqslant q_0,\ q_0 \approx 0.365$. Separowalność przybliżono numerycznie. Wartość q, dla której proces jest separowalny, istotnie różni się od wartości, dla której łamie on zaprezentowaną nierówność przyczynową. Może to wskazywać, że nie każdy nieseparowalny proces może złamać przyczynowe nierówności. W tym przypadku może wynikać to z doboru nieoptymalnej procedury, lecz dalej w pracy zostanie pokazana taka klasa procesów.

3.1 Systemy n-cząstkowe

W celu rozważania systemów więcej wymiarowych konieczne jest wykorzystanie bazy dla systemów o odpowiednim wymiarze. Przykładowo bazą dla systemów 2^n poziomowych jest $\{\sigma_i\}^{\otimes n}$, gdzie σ_i to macierz Pauliego. W przypadku systemów o dowolnym wymiarze wygodnie jest skorzystać z bazy Hilberty-Schmidta dla macierzy n-wymiarowych. Przykładem takiej bazy są uogólnione macierze Gell-Manna, które między innymi zostały opisane w dodatku A. Przypadek, w którym ma się do czynienia z systemami o m^n poziomach można traktować jako przypadek, w którym działa się na n systemach m poziomowych. Nierówność zaprezentowaną w poprzednim podrozdziale można próbować również badać przy pomocy procesów, w którym laboratoria otrzymują więcej niż jeden kubit. Przykładowo biorąc macierz procesu jako:

$$W = \bigotimes_i^n \frac{1}{4}\left[\not{\mathbb{I}}\not{\mathbb{I}}\not{\mathbb{I}}\not{\mathbb{I}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\not{\mathbb{I}}\mathbb{Z}\mathbb{Z}\not{\mathbb{I}} + \mathbb{Z}\not{\mathbb{I}}\mathbb{X}\mathbb{Z}\right)\right], \tag{80}$$

który odpowiada n-krotnemu powieleniu skrajnego procesu opisanego w poprzednim podrozdziale. W takim procesie każde z laboratoriów otrzymuje n kubitów i wysyła je dalej, po czym każdy kubit transportowany jest takim samym kanałem. Warto podkreślić, że założone jest, że laboratoria mogą wykonywać pomiary wyłącznie na poszczególnych kubitach i nie mają dostępu do korelacji wielosystemowych. Sfaktoryzowana postać tego procesu zapewnia, że jego odwzorowanie jest całkowicie dodatnie, przez co jest prawidłowym procesem. W celu zakodowania swojej wiadomości każde z laboratoriów wykonuje na każdym z kubitów operacje z poprzedniego rozdziału. Prawdopodobieństwo jest dane następująco:

$$\begin{aligned}
\Pr(\mathbf{x},\mathbf{y}|a,b,b') &= \frac{1}{4}^n \operatorname{Tr}\left[\bigotimes_i^n \left[\left(\not{\mathbb{I}}\not{\mathbb{I}}\not{\mathbb{I}}\not{\mathbb{I}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\not{\mathbb{I}}\mathbb{Z}\mathbb{Z}\not{\mathbb{I}} + \mathbb{Z}\not{\mathbb{I}}\mathbb{X}\mathbb{Z}\right)\right)\Big(\xi(x_i,a)\otimes\eta(y_i,b,b')\Big)\right]\right] \\
&= \frac{1}{4}^n \prod_i^n \operatorname{Tr}\left[\left(\not{\mathbb{I}}\not{\mathbb{I}}\not{\mathbb{I}}\not{\mathbb{I}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\not{\mathbb{I}}\mathbb{Z}\mathbb{Z}\not{\mathbb{I}} + \mathbb{Z}\not{\mathbb{I}}\mathbb{X}\mathbb{Z}\right)\right)\Big(\xi(x_i,a)\otimes\eta(y_i,b,b')\Big)\right] \\
&= \prod_i^n \Pr(x_i,y_i|a,b,b'),
\end{aligned} \tag{81}$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Przypisując $x = 1$, gdy $\sum x_i \geqslant c_x$, $x = 0$,gdy $\sum x_i \leqslant d_x$ i $x =?$ w przeciwnym wypadku (analogicznie dla y). Prawdopodobieństwo sukcesu można zapisać wtedy tak samo jak poprzednio, czyli:

$$\Pr{}_{sukcesu} = \frac{1}{2}\left[\Pr(x = b|b' = 0) + \Pr(y = a|b' = 1)\right]. \tag{82}$$

Można również sformułować prawdopodobieństwo sukcesu w przypadku, gdy strony mają możliwość zrezygnowania z zgadywania.

$$\Pr{}_{sukces?} = \frac{1}{2}\left[\Pr(x = b|b' = 0, x \neq ?) + \Pr(y = a|b' = 1, y \neq ?)\right]. \tag{83}$$

Przykładem może być proces, gdzie każde laboratorium otrzymuje trzy kubity i Alicja przypisuje $x = 1$, gdy $\sum_i^3 x_i \geqslant 2$, a $x = 0$ w przeciwnym wypadku (analogicznie dla Boba). Prawdopodobieństwo można wyliczyć jako:

$$\Pr{}_{sukces} = \Pr{}_{sukces?} \approx 0.941. \tag{84}$$

W przypadku przypisania, $x =?$ dla $1 \leqslant \sum_{i=0}^2 x_i \leqslant 2$. Można otrzymać wynik:

$$\Pr{}_{sukces?} \approx 0.994. \tag{85}$$

W tym przypadku Alicja i Bob postanawiają zrezygnować ze zgadywania $\frac{11}{16}$ czasu. Powyższe wyniki są ewidentnie lepsze, niż przedstawione wcześniej. Sterując liczbą wysłanych systemów i porzucanych wyników można osiągnąć dowolnie dobry wynik dla $\Pr_{sukces?}$, $\Pr_{sukces}$. Koniecznym jest podkreślenie faktu, że eksperyment, gdzie laboratoria mogą wybrać swój wynik na podstawie wielu pomiarów, jest ograniczony inną wartością. W przypadku klasycznym również możliwie jest osiągniecie dowolnych prawdopodobieństw sukcesu przy odpowiedniej dużej liczbie prób.

3.2 Adnotacja

Sposób obliczenia:

$$\Pr{}_{sukcesu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{x_1x_2x_3y_1y_2y_3abb'=0}^{1}\Pr(x,y|a,b,b')\delta_{b'0}\delta_{xb}}{\sum_{x_1x_2x_3y_1y_2y_3abb'=0}^{1}\Pr(x,y|a,b,b')\delta_{b'0}} + \frac{\sum_{x_1x_2x_3y_1y_2y_3abb'=0}^{1}\Pr(x,y|a,b,b')\delta_{b'1}\delta_{ya}}{\sum_{x_1x_2x_3y_1y_2y_3abb'=0}^{1}\Pr(x,y|a,b,b')\delta_{b'1}}\right) \tag{86}$$

$$\Pr{}_{sukcesu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{x_1x_2x_3y_1y_2y_3abb'=0}^{1}\Pr(x,y|a,b,b')\delta_{b'0}\delta_{xb}\delta_{x_?0}}{\sum_{x_1x_2x_3y_1y_2y_3abb'=0}^{1}\Pr(x,y|a,b,b')\delta_{b'0}\delta_{x_?0}} + \frac{\sum_{x_1x_2x_3y_1y_2y_3abb'=0}^{1}\Pr(x,y|a,b,b')\delta_{b'1}\delta_{ya}\delta_{x_?0}}{\sum_{x_1x_2x_3y_1y_2y_3abb'=0}^{1}\Pr(x,y|a,b,b')\delta_{b'1}\delta_{x_?0}}\right) \tag{87}$$

$$x_? = \begin{cases} 0 & x \neq ? \\ 1 & x = ? \end{cases} \tag{88}$$

3.3 Procesy z przyczynowym modelem

W artykule [17] zaproponowano następującą definicję procesu z przyczynowym modelem:

Definicja 8. *Proces z przyczynowym modelem to taka macierz nieseparowalna, że statystyki pomiarowe generowane przez nią są identyczne z tymi generowanymi przez macierze separowalne przyczynowo.*

Istnienie takiej klasy procesów pokazano w [17].

Twierdzenie 3. *Proces opisywany poniższymi macierzami*

$$W^{A\prec B} := \mathbb{1}^{\circ} + \frac{1}{12}(\mathbb{1}\mathbb{Z}\mathbb{Z}\mathbb{1} + \mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{X}\mathbb{1} + \mathbb{1}\mathbb{Y}\mathbb{Y}\mathbb{1}) \tag{89}$$

$$W^{B\prec A} := \mathbb{1}^{\circ} + \frac{1}{4}(\mathbb{Z}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{Z}) \tag{90}$$

$$W := qW^{A\prec B} + (1 - q + \epsilon)W^{B\prec A} - \epsilon\mathbb{1}^{\circ}, \tag{91}$$

ma przyczynowy model dla dowolnych prawidłowych wartości q i ϵ, a jest nieseparowalny przyczynowo dla $\epsilon > 0$.

W powyższym twierdzeniu przyjęto oznaczenie $\mathbb{1}^\circ = \frac{1}{d_{A_1} d_{B_1}} \mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}$. Zauważa się, że $W \geqslant 0$ dla $\epsilon \leqslant q - 1 + \sqrt{\frac{(1-q)(q+3)}{3}}$ i przyczynowo nieseparowalne dla $\epsilon \geqslant 0$. Dowód faktu, że ten proces nie może złamać żadnej przyczynowej nierówności niezależnie od strategii przebiega następująco [17]. Pokazuje się najpierw, że proces ten produkuje te same korelacje, co W^{T_B}, gdzie T_B oznacza częściową transpozycję systemów $\mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2}$ względem CB. Natomiast W^{T_B} jest przyczynowo separowalna i nie może złamać przyczynowych nierówności, co razem dowodzi tezę. Na początku obserwuje się, że:

$$\begin{aligned}
\Pr(x, y|a, b) &= \operatorname{Tr}\left[W^{T_B} \xi(x, a) \otimes \eta(y, b)^T\right] \\
&= \sum_{\mu\nu\lambda\gamma} w_{\mu\nu\lambda\gamma} \operatorname{Tr}\left[(\sigma_\mu^{A_1} \otimes \sigma_\nu^{A_2}) \otimes (\sigma_\lambda^{B_1} \otimes \sigma_\gamma^{B_2})^T \xi(x, a) \otimes \eta(y, b)^T\right] \\
&= \sum_{\mu\nu\lambda\gamma} w_{\mu\nu\lambda\gamma} \operatorname{Tr}\left[(\sigma_\mu^{A_1} \otimes \sigma_\nu^{A_2}) \xi(x, a) \otimes (\sigma_\lambda^{B_1} \otimes \sigma_\gamma^{B_2})^T \eta(y, b)^T\right] \\
&= \sum_{\mu\nu\lambda\gamma} w_{\mu\nu\lambda\gamma} \operatorname{Tr}\left[(\sigma_\mu^{A_1} \otimes \sigma_\nu^{A_2}) \xi(x, a)\right] \operatorname{Tr}\left[(\sigma_\lambda^{B_1} \otimes \sigma_\gamma^{B_2})^T \eta(y, b)^T\right] \\
&= \sum_{\mu\nu\lambda\gamma} w_{\mu\nu\lambda\gamma} \operatorname{Tr}\left[(\sigma_\mu^{A_1} \otimes \sigma_\nu^{A_2}) \xi(x, a)\right] \operatorname{Tr}\left[(\sigma_\lambda^{B_1} \otimes \sigma_\gamma^{B_2}) \eta(y, b)\right] \\
&= \operatorname{Tr}\left[W \xi(x, a) \otimes \eta(y, b)\right]
\end{aligned} \tag{92}$$

Ta równość jest spełniona nawet wtedy, gdy $W^{T_B} \leqslant 0$, czyli opisuje niefizyczną macierz procesu. Taki proces generuje dodatnie prawdopodobieństwo dla lokalnych pomiarów, lecz może generować ujemne prawdopodobieństwa, gdy laboratoria dzielą splątane cząsteczki, toteż takie rozszerzenie jest istotne fizycznie. Faktem jest, że dla każdego kwantowego instrumentu $\{\eta(y, b)\}$ instrument $\{\eta(y, b)^T\}$ również jest prawidłowy, jako że transpozycja transformuje odwzorowania CP do odwzorowań CP i mapy zachowujące ślad (*trace preserving*, TP) do map zachowujących ślad. Następnie pokazuje się w sposób jawny przyczynową separację W^{T_B}. Widać, że

$$\left[\mathbb{1}^\circ + \frac{1}{12}\left(\mathbb{1}\mathbb{Z}\mathbb{Z}\mathbb{1} + \mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{X}\mathbb{1} + \mathbb{1}\mathbb{Y}\mathbb{Y}\mathbb{1}\right)\right]^{T_B} = \mathbb{1}^\circ + \frac{1}{12}\mathbb{1}\mathbb{Z}\mathbb{Z}\mathbb{1} + \mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{X}\mathbb{1} - \mathbb{1}\mathbb{Y}\mathbb{Y}\mathbb{1}, \tag{93}$$

po prawej stronie nierówności można rozpoznać macierz procesu opisujący kanał depolaryzacyjny, krótko opisany we wstępie, z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ depolaryzacji oraz $\frac{1}{3}$ idealnej transmisji systemu.

Definicja 9. *(por. [17]). Proces depolaryzacyjny od Alicji do Boba jest to zasób, w którym z pewnym prawdopodobieństwem q Alicja idealnie przesyła swój system do Boba, zaś z prawdopodobieństwem $1 - q$ przesyła do Boba stan maksymalnie zmieszany. Macierz procesu tak zdefiniowanego zasobu dana jest następująco:*

$$W_{dep}(q) = \frac{q}{\mathbb{1}} + \frac{(1-q)}{2}\mathbb{1} \otimes |\mathbb{1}\rangle\rangle\langle\langle\mathbb{1}| \otimes \mathbb{1} \tag{94}$$

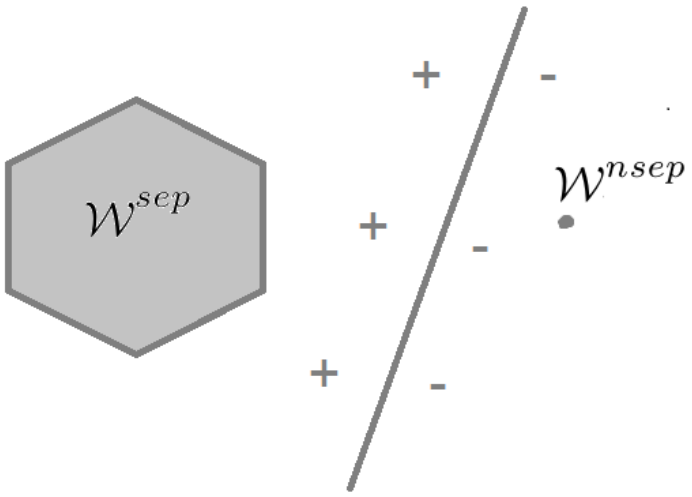
$$D_{\frac{2}{3}}^{A \prec B} = \frac{2}{3}\mathbb{1}^\circ + \frac{1}{3} I^{A \prec B} \tag{95}$$

$$I^{A \prec B} = \frac{\mathbb{1} \otimes |I\rangle\rangle\langle\langle I| \otimes \mathbb{1}}{2}. \tag{96}$$

Dodając do tego $\left(W^{B \prec A}\right)^{T_B} = W^{B \prec A}$ otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
W^{T_B} &= \frac{2q}{3}\mathbb{1}^\circ + \frac{q}{3} I^{A \prec B} + (1 - q + \epsilon) W^{B \prec A} - \epsilon \mathbb{1}^\circ \\
&= \frac{q}{3} I^{A \prec B} + (1 - q + \epsilon) W^{B \prec A} - (\frac{2q}{3} - \epsilon)\mathbb{1}^\circ,
\end{aligned} \tag{97}$$

co jest kombinacją wypukłą procesów uporządkowanych przyczynowo tak długo, jak $\epsilon < \frac{2q}{3}$. Można jednakże sprawdzić, że $q - 1 + \sqrt{\frac{(1-q)(3+q)}{3}} \leqslant \frac{2q}{3}$, więc poprzedni warunek jest zawsze spełniony, co kończy



Rysunek 6: Każde dwa rozłączne zbiory wypukłe (geometrycznie - figury) można rozdzielić hiperpłaszczyzną ze względu na pewien iloczyn skalarny, tak że elementy jednego zbioru będą przyjmowały dodatnie wartości iloczynu skalarnego z elementem przestrzeni wektorowej charakteryzującym hiperpłaszczyznę, zaś elementy drugiego - ujemne. Jako że zbiór separowalnych macierzy procesu jest wypukły z definicji i każdy zbiór jednoelementowy jest zbiorem wypukłym, pozwala to dla każdego procesu poszukiwać hiperpłaszczyzn oddzielających ten konkretny proces od zbioru procesów separowalnych. Taką hiperpłaszczyznę nazywa się świadkiem przyczynowości.

dowód. Konsekwencją tego jest fakt, że każdy prawidłowy proces (91) ma przyczynowy model. Powyższy dowód opiera się na fakcie, że odwzorowania poddane częściowej transpozycji według odpowiedniego systemu są nadal poprawnymi odwzorowaniami CP. Może to być jednak nieprawdziwe, gdy systemy są poszerzone o splątane cząsteczki. Częściowa transpozycja nie jest wtedy pełną transpozycją względem danych systemów, czyli może transformować odwzorowania CP na odwzorowania nie CP. Procesy takie, które nie łamią przyczynowych nierówności, a łamią je, gdy zostaną rozszerzone o splątany system w odpowiednich laboratoriach, nazywa się nierozszerzalnie przyczynowymi (*not extensibly causal*), i można o nich przeczytać więcej w [17].

4 Świadek przyczynowości

Poprzedni rozdział sugeruje, że istnieje klasa procesów, która nie może złamać żadnej przyczynowej nierówności, zaś jest niesparowalna przyczynowo. Istnieje więc motywacja do poszukiwania metody, która sklasyfikuje, czy dany proces jest separowalny czy nie. Wprowadzony w [18] świadek przyczynowości (*causal witness*) jest analogiem do świadka splątania (*entanglement witness*), który pozwala klasyfikować splątanie danego układu niezależnie od jego zdolności do łamania nierówności Bella.

Definicja 10. *(por. [18]). Świadkiem przyczynowości nazywa się taki operator S, dla którego każda macierz separowalna W^{sep} spełnia nierówność*

$$\mathrm{Tr}\left[SW^{sep}\right] \geqslant 0. \tag{98}$$

Twierdzenie o separującej hiperpłaszczyźnie mówi, że dla każdych dwóch wypukłych zbiorów albo ich przecięcie nie jest zbiorem pustym, albo istnieje taka hiperpłaszczyzna, że zbiory leżą po obu jej stronach, nierygorystycznie mówiąc. Można to łatwo sobie zobrazować geometrycznie patrząc na rysunek 6. Korzystając z tego twierdzenia i faktu, że zbiór macierzy separowalnych jest wypukły i zamknięty dla każdego nieseparowalnego procesu W^{nsep}, można stwierdzić, że istnieje taki świadek przyczynowości, że

$$\mathrm{Tr}\left[S_{W^{nsep}} W^{nsep}\right] < 0. \tag{99}$$

4.1 Sformułowanie macierzy procesu niezależne od bazy

Przed dalszym charakteryzowaniem świadków przyczynowości wygodnie jest wprowadzić niezależne od wyboru bazy sformułowanie macierzy procesu [18].

Definicja 11. *(por. [18]). Operator ${}_X W$ zdefiniowany jest następująco:*

$${}_X W = \frac{\mathbb{1}^X}{d_X} \otimes \mathrm{Tr}_X W. \tag{100}$$

Operacja ${}_X W$ opisuje operację wzięcia śladu i zastąpienia tego systemu znormalizowaną macierzą jednostkową. Warunki na macierz procesu (33), (34), (39) wprowadzone w rozdziale 2 są równoważne z następującymi

$$W \geqslant 0 \tag{101}$$

$$\mathrm{Tr}\, W = d_O \tag{102}$$

$$W = L_V\left(W\right), \tag{103}$$

gdzie $d_0 = d_{A_2} d_{B_2} \ldots$ jest iloczynem wymiaru wszystkich systemów wyjściowych, a L_V jest projektorem, zdefiniowanym w [18], na pewną podprzestrzeń $\mathcal{L}_{\mathcal{V}} \subset \mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2} \otimes \mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2} \ldots$. W sposób jawny projektor dla przypadku dwustronnego L_V wyraża się następująco:

$$L_V(W) = {}_{A_2} W + {}_{B_2} W - {}_{A_2 B_2} W - {}_{B_1 B_2} W + {}_{A_2 B_1 B_2} W - {}_{A_1 A_2} W + {}_{A_1 A_2 B_2} W. \tag{104}$$

Warto tutaj porównać powyższe równanie do poprzedniego sformułowania macierzy procesu. Zauważa się, że w przypadku wybranej bazy Hilberta-Schmidta operacja

$${}_X\left[\sigma_\mu^X \otimes \sigma_\nu^Y\right] = \delta_{\mu 0}. \tag{105}$$

Należy przypomnieć, że $\sigma_0 = \mathbb{1}$. Wynika to oczywiście z faktu, że reszta wyrazów jest bezśladowa i $\frac{\mathrm{Tr}\,\mathbb{1}^X}{d_X} = 1$. Badając działanie operatora L_V na ogólną macierz można otrzymać układ równań liniowych kładący warunki na współczynniki stojące przy danych wyrazach bazowych. Zważywszy na fakt, że jawna postać projektora dla n stron została wyprowadzona w artykule [18], możliwe jest wyprowadzenie warunków na najogólniejszą macierz zgodną z formalizmem macierzy procesu dla przypadku n stron analogiczną do warunków (39). Dla oswojenia się z powyższym projektorem warto sprawdzić spełnianie warunku

$W = L_V(W)$ przez macierz procesu wprowadzoną w poprzednim rozdziale:

$$W = \frac{1}{4}\left[\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1}\mathbb{Z}\mathbb{Z}\mathbb{1} + q\mathbb{Z}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{Z} + \frac{(1-q)}{2}\mathbb{Z}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{1})\right],\ 0 \leqslant q \leqslant 1. \tag{106}$$

$$_{A_2}W = \frac{1}{4}\left[\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1} + \frac{1}{\sqrt{2}}(q\mathbb{Z}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{Z} + \frac{(1-q)}{2}\mathbb{Z}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{1})\right] \tag{107}$$

$$_{B_2}W = \frac{1}{4}\left[\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1}\mathbb{Z}\mathbb{Z}\mathbb{1} + \frac{(1-q)}{2}\mathbb{Z}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{1})\right] \tag{108}$$

$$_{A_2B_2}W = \frac{1}{4}\left[\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1-q)}{2}\mathbb{Z}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{1}\right] \tag{109}$$

$$_{B_1B_2}W = \frac{1}{4}\left[\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\right] \tag{110}$$

$$_{A_2B_1B_2}W = \frac{1}{4}\left[\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\right] \tag{111}$$

$$_{A_1A_2}W = \frac{1}{4}\left[\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\right] \tag{112}$$

$$_{A_1A_2B_2}W = \frac{1}{4}\left[\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\right] \tag{113}$$

$$W = L_V(W). \tag{114}$$

W poprzednich obliczeniach korzystano z faktu, że wyłącznie $\mathbb{1}$ jest elementem bazy Hilberta-Schmidta o niezerowym śladzie, a konsekwencją tego jest to, że operator $_X(\cdot)$ działający na macierz jednostkową na danej pozycji dokonuje trywialnej zmiany, zaś w innym wypadku usuwa dany wyraz. W celu oswojenia się z operatorem L_V można dowieść, że rzeczywiście jest on operatorem samosprzężonym w kontekście iloczynu skalarnego Hilberta-Schmidta.

Lemat 1. *Operator $L_V(\cdot)$ jest samosprzężony jako rzeczywista kombinacja liniowa operatorów $_X(\cdot)$.*

Powyższy lemat naturalnie dowodzi się przez wykonanie jawnego rachunku dla operatora $_X(\cdot)$.

$$A = \sum_{ij} \alpha_{ij}\sigma_i \otimes \sigma_j,\ A \in X \otimes Y \tag{115}$$

$$B = \sum_{kl} \beta_{kl}\sigma_k \otimes \sigma_l,\ B \in X \otimes Y \tag{116}$$

$$\begin{aligned}
\langle {}_XA, B\rangle &= \operatorname{Tr}\left[{}_XA^\dagger B\right] = \sum_{ijkl} \operatorname{Tr}\left[{}_X(\alpha_{ij}\sigma_i \otimes \sigma_j)(\beta_{kl}\sigma_k \otimes \sigma_l)\right] \\
&= \sum_{jkl} \operatorname{Tr}\left[(\alpha_{0j}\mathbb{1} \otimes \sigma_j)(\beta_{kl}\sigma_k \otimes \sigma_l)\right] = \sum_{jkl} \alpha_{0j}\beta kl \operatorname{Tr}\left[\mathbb{1}\sigma_k\right] \operatorname{Tr}\left[\sigma_j\sigma_l\right] \\
&= \sum_{jl} \alpha_{0j}\beta_{0l}C \operatorname{Tr}\left[\sigma_j\sigma_l\right] \\
\langle A, {}_XB\rangle &= \operatorname{Tr}\left[(\alpha_{ij}\sigma_i \otimes \sigma_j)({}_X\beta_{kl}\sigma_k \otimes \sigma_l)\right] = \sum_{ijl} \operatorname{Tr}\left[(\alpha_{ij}\mathbb{1} \otimes \sigma_j)(\beta_{0l}\sigma_k \otimes \sigma_l)\right] \\
&= \sum_{jl} \alpha_{0j}\beta_{0l}C \operatorname{Tr}\left[\sigma_j\sigma_l\right] = \langle {}_XA, B\rangle,
\end{aligned} \tag{117}$$

gdzie macierze $\{\sigma_i\}$ tworzą bazę Hilberta-Schmidta, zaś stała C jest związana ze stałą, do której znormalizowana jest baza. Korzystając z faktu, że rzeczywista kombinacja liniowa zachowuje hermitowskość, pokazuje się, że projektor L_V jest samosprzężony.

Lemat 2. *Operator L_V spełnia: $L_V^2(\cdot) = L_V(\cdot)$.*

Dowód tego lematu można przeprowadzić następująco:

$$\begin{aligned} L_V^2(W) = (&{}_{A_2} + {}_{B_2} - {}_{A_2B_2} - {}_{B_1B_2} + {}_{A_2B_1B_2} - {}_{A_1A_2} + {}_{A_1A_2B_2}) \\ &({}_{A_2} + {}_{B_2} - {}_{A_2B_2} - {}_{B_1B_2} + {}_{A_2B_1B_2} - {}_{A_1A_2} + {}_{A_1A_2B_2})\, W \end{aligned} \tag{118}$$

$$\begin{aligned} {}_{A_2}L_V(W) &= ({}_{A_2} + {}_{A_2B_2} - {}_{A_2B_2} - {}_{A_2B_1B_2} + {}_{A_2B_1B_2} - {}_{A_1A_2} + {}_{A_1A_2B_2})W \\ &= ({}_{A_2} - {}_{A_1A_2} + {}_{A_1A_2B_2})W \end{aligned} \tag{119}$$

$${}_{B_2}L_V(W) = ({}_{B_2} - {}_{B_1B_2} + {}_{B_1B_2A_2})W \tag{120}$$

$$\begin{aligned} -{}_{A_2B_2}L_V(W) &= (-{}_{A_2B_2} - {}_{A_2B_2} + {}_{A_2B_2} + {}_{A_2B_1B_2} - {}_{A_2B_1B_2} + {}_{A_1A_2B_2} - {}_{A_1B_1B_2})W \\ &= -{}_{A_2B_2}W \end{aligned} \tag{121}$$

$$\begin{aligned} -{}_{B_1B_2}L_V(W) &= (-{}_{A_2B_1B_2} - {}_{B_1B_2} + {}_{A_2B_1B_2} + {}_{B_1B_2} - {}_{A_2B_1B_2} + {}_{A_1A_2B_1B_2} - {}_{A_1A_2B_1B_2})W \\ &= -{}_{A_2B_1B_2}W \end{aligned} \tag{122}$$

$$-{}_{A_1A_2}L_V(W) = -{}_{B_2A_1A_2}W \tag{123}$$

$$\begin{aligned} {}_{A_2B_1B_2}L_V(W) &= ({}_{A_2B_1B_2} + {}_{A_2B_1B_2} - {}_{A_2B_1B_2} - {}_{A_2B_1B_2} + {}_{A_2B_1B_2} - {}_{A_1A_2B_1B_2} + {}_{A_1A_2B_1B_2})W \\ &= {}_{A_2B_1B_2}W \end{aligned} \tag{124}$$

$${}_{A_1A_2B_2}L_V(W) = {}_{A_1A_2B_2}W \tag{125}$$

$$\begin{aligned} L_V^2(W) =&({}_{A_2} - {}_{A_1A_2} + {}_{A_1A_2B_2})W + ({}_{B_2} - {}_{B_1B_2} + {}_{B_1B_2A_2})W - {}_{A_2B_2}W - \\ &- {}_{A_2B_1B_2}W - {}_{B_2A_1A_2}W + {}_{A_2B_1B_2}W + {}_{A_1A_2B_2}W = L_V(W). \end{aligned} \tag{126}$$

Powyżej korzystano z własności ${}_{XY} = {}_{YX}$, ${}_{XX} = {}_X$ i z faktu, że operator L_V jest symetryczny ze względu na zamianę systemu A i B.

4.2 Poszukiwanie świadka przyczynowości

Często bardziej niż istnienie danego obiektu interesująca jest metoda pozwalająca na konstruowanie ich. W tym podrozdziale zostanie zaprezentowane wyprowadzenie metody, opublikowanej w pracy [18], która umożliwi efektywne poszukiwanie świadków przyczynowości. Zauważa się, że warunek (98) jest równoważny z następującymi dwoma

$$\mathrm{Tr}\left[W^{A\prec B}S\right] \geqslant 0 \tag{127}$$

$$\mathrm{Tr}\left[W^{B\prec A}S\right] \geqslant 0 \tag{128}$$

dla pewnego świadka przyczynowości S. Oczywiście powyższe równania wynikają z definicji stanów separowalnych jako kombinacji wypukłej macierzy o określonej przyczynowości i liniowości śladu. Łatwo można zaobserwować, że pozbywając się wyrazów zawierających wyrazy typu $\ldots B_2$ usuwamy korelacje wyjścia Boba z pomiarami Alicji, co implikuje, że $A \prec B$. Pisze się, że:

$${}_{B_2}W = \sum_{ijk} \alpha_{ijk}\sigma_i \otimes \sigma_j \otimes \sigma_k \otimes \mathbb{1}, \tag{129}$$

$${}_{A_2}W = \sum_{ijk} \alpha_{ikl}\sigma_i \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma_k \otimes \sigma_l. \tag{130}$$

Porównując powyższe wyniki z równaniami 39 otrzymuje się, że:

$${}_{B_2}W = W^{A\prec B}, {}_{A_2}W = W^{B\prec A}. \tag{131}$$

Wykorzystując powyższą zależność, równanie (128) możemy zapisać następująco:

$$\mathrm{Tr}\left[{}_{A_2}WS\right] \geqslant 0 \tag{132}$$

Traktując ślad jako iloczyn skalarny $\langle MS\rangle = \operatorname{Tr} M^\dagger S$ oraz korzystając z tego, że ${}_X$ jest operatorem samosprzężonym, równoważne z powyższym równaniem jest:

$$\operatorname{Tr}\left[W {}_{A_2} S\right] \geqslant 0. \tag{133}$$

Dla prawidłowych macierzy procesu wystarczającym dla S do bycia świadkiem przyczynowości jest

$${}_{A_2} S \geqslant 0 \tag{134}$$

$${}_{B_2} S \geqslant 0. \tag{135}$$

Zauważa się dodatkowo dowolność dodania dowolnego elementu $S^\perp$ z przestrzeni ortogonalnej do $\mathcal{L}_\mathcal{V}$, który nie zmieni wartości (98), a mianowicie

$$\operatorname{Tr}\left[W\left(S + S^\perp\right)\right] = \operatorname{Tr}\left[WS\right] \tag{136}$$

Okazuje się, że powyższe warunki charakteryzują wszystkich świadków przyczynowości, co, zbierając razem, daje:

Twierdzenie 4. *(por. [18]). Macierz herimitowska S jest świadkiem przyczynowości wtedy i tylko wtedy, gdy podlega poniższej dekompozycji:*

$$S = S_P + S^\perp, \tag{137}$$

gdzie S_P i $S^\perp$ są takimi macierzami hermitowskimi, że

$${}_{A_2} S_P \geqslant 0, {}_{B_2} S_P \geqslant 0, L_V(S^\perp) = 0. \tag{138}$$

Pokazuje się, że zbiór tak zdefiniowanych świadków przyczynowości jest domkniętym stożkiem wypukłym. Można jednak ograniczyć się z S do przestrzeni $\mathcal{L}_\mathcal{V}$. Okazuje się, że tak ograniczony zbiór świadków przyczynowości: $\mathcal{S}_\mathcal{V} = \mathcal{S} \cap \mathcal{L}_\mathcal{V}$ również jest domkniętym wypukłym stożkiem. Ponieważ wybrane elementy ortogonalne do $\mathcal{L}_\mathcal{V}$ nie zmieniają wartości $\operatorname{Tr} WS$, nie zmieniają one też zdolności S do wykrywania separowalności. Dostając pewną macierz W i chcąc zbadać, czy jest ona separowalna, można spróbować znaleźć minimalną wartość $\operatorname{Tr} WS$. W przypadku możliwości znalezienia minimum globalnego takiego wyrażenia widać, że jeżeli nie uda się znaleźć takiego S, że $\operatorname{Tr} WS < 0$, oznacza to, że nie istnieje hiperpłaszczyzna oddzielająca procesy separowalne, więc ten proces też jest separowalny. W przeciwnym wypadku proces jest nieseparowalny. W celu ograniczenia od dołu skończoną wartością, by możliwe było rozwiązanie problemu numerycznie, na $\operatorname{Tr} SW$ należy narzucić pewien dowolny warunek normujący. Autorzy oryginalnego artykułu proponują następujący:

$$\operatorname{Tr}\Omega S \leqslant 1, \tag{139}$$

gdzie Ω jest znormalizowaną macierzą procesu. Rozpisując powyższą formułę otrzymuje się

$$\operatorname{Tr}\left[\frac{\Omega \operatorname{Tr}\left[\Omega\right]}{d_O} S\right] \leqslant 1 \iff \operatorname{Tr}\Omega S \leqslant \frac{\operatorname{Tr}\Omega}{d_O} \tag{140}$$

Ostateczna postać powyżej nierówności pozwala porzucić warunek, by Ω była znormalizowana, co umożliwia przeniesienie problemu optymalizacyjnego na stożek wypukły nieznormalizowanych macierzy procesu, co można przepisać jako

$$\operatorname{Tr}\left[\Omega(\frac{\not\Vdash}{d_O} - S)\right] \geqslant 0 \tag{141}$$

Łatwo zauważyć, że powyższy warunek jest warunkiem, który muszą spełniać operatory $\frac{\mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}}{d_O} - S$, by należały do stożka dualnego [9] macierzy procesu, czyli takiego, że ich iloczyn skalarny jest nieujemny z macierzami procesu.

Definicja 12. *(por. [18]). Optymalnym świadkiem przyczynowości nazywa się optimum globalne poniższego zadania optymalizacyjnego:*

$$\min \mathrm{Tr}\left[WS\right] \tag{142}$$

$$\textit{tak, aby } S \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}},\ \frac{\mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}}{d_O} - S \in \mathcal{W}^*_{\mathcal{V}}, \tag{143}$$

gdzie $\mathcal{W}^*_{\mathcal{V}} := \mathcal{W}^* \cap \mathcal{L}_{\mathcal{V}}$. $\mathcal{W}^*$ jest wcześniej wspomnianym stożkiem dualnym do macierzy procesu, zaś człon $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ wynika z wcześniej narzuconego warunku na $S \in \mathcal{L}_{\mathcal{V}}$.

Optymalny świadek przyczynowości pozwala stwierdzić, czy dany proces jest separowalny przyczynowo. Problem ten okazuje się być prawidłowym problemem programowania liniowego po stożku (*semidefinite programming*, SDP), którego numeryczne rozwiązanie jest zbieżne do optimum globalnego. Wynika z tego, że rozwiązanie takiego problemu optymalizacyjnego daje kryterium separowalności przyczynowej, z którego można efektywnie korzystać.

Definicja 13. *(por. [18]). Uogólnioną wytrzymałością (generalized robustness) nazywa się wartość:*

$$R_g(W) = -\,\mathrm{Tr}\left[S^*W\right], \tag{144}$$

gdzie S^* jest optymalnym świadkiem przyczynowości dla macierzy W. Wartość ta odpowiada rozwiązaniu dualnego problemu do problemu optymalnego świadka:

$$\frac{1}{1+\lambda}\left(W + \lambda\widetilde{\Omega}\right), \tag{145}$$

ze względu na zmienną λ zoptymalizowanej po wszystkich znormalizowanych macierzach procesu $\widetilde{\Omega}$.

Wartość ta określa odporność danego procesu do pozostania nieseparowalnym podczas mieszania z "najgorszym" możliwym szumem. Jest to miara nieseparowalności spełniająca standardowe wymagania, a mianowicie

Rozróżnienie $R_g(W) \geqslant 0$ dla każdej macierzy procesu, przyjmuje wartość 0 wyłącznie dla procesów należących do $\mathcal{W}^{sep}$.

Wypukłość $R_g(\sum_i p_i W_i) \leqslant \sum_i p_i R_g(W_i)$ dla dowolnych macierzy procesu i $p_i \geqslant 0$ takich, że $\sum_i p_i = 1$.

Monotoniczność ze względu na lokalne operacje $R_g\left(\$(W)\right) \leqslant R_g\left(W\right)$, gdzie $\$(W)$ jest dowolnym procesem, który można otrzymać przez złożenie go z lokalnymi odwzorowaniami CPTP.

Można wprowadzić również problem, w którym poszukuje się minimalnej ilości białego szumu potrzebnego do spowodowania, by proces stał się separowalnym. Biały szum może się okazać bardziej adekwatnym modelem szumu niż przypadek pesymistyczny.

Definicja 14. *(por. [18]). Losową wytrzymałością (random robustness) nazywa się wielkość:*

$$R_r(W) = -\,\mathrm{Tr}\left[S^*W\right], \tag{146}$$

[9] Stożek dualny definiuje się jako $C* = y \in X* : \langle y, x\rangle \geqslant 0\ \ \forall x \in C$, gdzie $X*$ jest przestrzenią dualną do do pewnej przestrzeni liniowej X, zaś C jest pewnym jej podzbiorem. W tym przypadku $X*$ to zbiór macierzy, zaś C - zbiór macierzy procesu.

gdzie S^* jest optymalnym rozwiązaniem następującego problemu optymalizacyjnego

$$\min \mathrm{Tr}\left[WS\right] \tag{147}$$

$$\textit{tak, by } S \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}}, \mathrm{Tr}\left[\mathbb{1}^{\circ} S\right] \leqslant 1. \tag{148}$$

W przeciwieństwie do uogólnionej wytrzymałości nie jest to miara nieseparowalności, w sensie poprzednio przytoczonych postulatów, jako że nie jest monotoniczna pod działaniem lokalnych odwzorowań CPTP.

4.3 Implementacja świadka przyczynowości

Korzystając chociażby z twierdzenia spektralnego wiadomym jest, że macierz hermitowską S można zapisać jako kombinację liniową następującej postaci

$$S = \sum_{i,j} \gamma_{i,j} \sigma_i^{A_1 A_2} \otimes \sigma_j^{B_1 B_2}, \tag{149}$$

gdzie macierze $\sigma \geqslant 0$. Można teraz spróbować wykorzystać macierze $\sigma^{A_1 A_2}$ jako macierze CJ implementowanych przez Alicję pomiarów, analogicznie dla Boba. Dodatkowo, żeby macierze σ tworzyły instrument kwantowy muszą zachowywać ślad, czyli $\mathrm{Tr}_{A_2} \sigma_i \leqslant \mathbb{1}^{A_1}$, $\sum_i \mathrm{Tr}_{A_2} \sigma_j = \mathbb{1}^{A_1}$. Można to zrealizować w dwóch krokach: wybiera się odpowiednie stałe $\alpha_{i,j} > 0$:

$$\gamma_{i,j} \frac{1}{\alpha_{i,j}} (\alpha_{i,j} \sigma_i \otimes \sigma_j) = \gamma'_{i,j} \sigma'_i \otimes \sigma'_j, \tag{150}$$

w celu spełniania $\mathrm{Tr}_{A_2} \sigma'_i \leqslant \mathbb{1}^{A_1}$ i $\mathrm{Tr}_{B_2} \sigma'_i \leqslant \mathbb{1}^{B_1}$ Następnie dodaje się do S odpowiednie macierze o 0 współczynniku:

$$S = 0 \cdot \sigma_0^{A_1 A_2 \prime} \otimes \sigma_0^{B_1 B_2 \prime} + \sum_{i,j} \gamma_{i,j} \sigma_i^{A_1 A_2} \otimes \sigma_j^{B_1 B_2}, \tag{151}$$

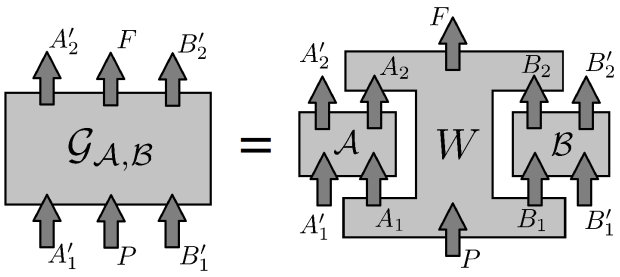
które po włączeniu ich do S powodują, że spełnione są warunki $\sum_i \mathrm{Tr}_{A_2} \sigma'_j = \mathbb{1}^{A_1}$ i $\sum_i \mathrm{Tr}_{B_2} \sigma'_j = \mathbb{1}^{B_1}$. Można teraz interpretować zbiór macierzy $\{\sigma_i\}$ z pewną wielkością mierzalną. Pozwala to teraz zapisać:

$$\mathrm{Tr}\left[WS\right] = \sum_{i,j} \gamma_{i,j} \mathrm{Tr}\left[W \sigma'_i \otimes \sigma'_j\right] = \sum_{i,j} \gamma'_{i,j} \Pr(i,j), \tag{152}$$

co umożliwia wyznaczenie wartości $\mathrm{Tr}\left[WS\right]$ przy pomocy sumy odpowiednio ważonych prawdopodobieństw. Można dzięki temu wyznaczać te wartości eksperymentalnie. Warto również przypomnieć, że do S można dodać dowolny element z przestrzeni ortogonalnej do przestrzeni $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$, co nie zmienia wartości oczekiwanej świadka, a może skutkować odwzorowaniem fizycznie łatwiejszym do implementacji.

5 Postulat puryfikacyjny

Ważnym aktualnie nierozwiązanym problemem występującym w tym formalizmie jest brak jasnego kryterium, które stwierdzałoby, które procesy są możliwe do zrealizowania fizycznie. Nie wiadomo, czy łamanie nierówności przyczynowych jest możliwie fizyczne, czy też jest wyłącznie matematycznym artefaktem. Jasne jednakże jest, że występowanie nieseparowalności jest fizycznie występującym fenomenem, który został potwierdzony doświadczalnie przy realizacji tzw. kwantowego przełącznika (*quantum switch*) - zasobu, który nie może złamać przyczynowych nierówności - wykorzystując wcześniej opisanego świadka przyczynowości np. w [19]. Może to nasuwać postulat, że fizycznie niemożliwe jest naruszenie tych nierówności. Prawdziwość tego postulatu wciąż stoi pod znakiem zapytania. W [20] autorzy proponują



Rysunek 7: Rysunek symbolizuje działanie procesu W jako funkcję wyższego rzędu odwzorowań $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, która dla danych odwzorowań zwraca odwzorowanie $\mathcal{G}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ reprezentującą transformację, która przechodzi z globalnej przeszłości do globalnej przyszłości.

postulat puryfikacyjny (*purification postulate*). Uznają za konieczne, że każda fundamentalna fizycznie poprawna teoria musi być odwracalna. Motywują się faktem, że każda znana fundamentalna teoria jest odwracalna - taka intuicja sprawdza się do tej pory. Warto jeszcze dodać, że we wstępie zostały opisany pomiar rzutujący jako nieodwracalny rodzaj ewolucji, jednakże można modelować pomiar w sposób niewymagający takich pomiarów, modelując układ pomiarowy jako system kwantowy, który ewoluuje unitarnie wraz z mierzonym systemem, co pokazano np. w [21].

Definicja 15. *(por. [20]). Najogólniejsze liniowe odwzorowanie odwzorowań CPTP* $\mathcal{A} : \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_1'}) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_2} \otimes \mathcal{H}^{A_2'})$ *i* $\mathcal{B} : \mathcal{L}(\mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_1'}) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}^{B_2} \otimes \mathcal{H}^{B_2'})$ *na odwzorowanie CPTP* $\mathcal{G}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} : \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1'} \otimes \mathcal{H}^{P} \otimes \mathcal{H}^{B_1'} \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_2'} \otimes \mathcal{H}^{F} \otimes \mathcal{H}^{B_2'}$ *nazywa się procesem (puryfikacyjnym)* $\mathcal{W} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mapsto \mathcal{G}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$*. Macierzą procesu nazywa się macierz CJ procesu, która otrzymuje się z formuły [20]*

$$G_{A,B} = \mathrm{Tr}_{A_1A_2B_1B_2}\left[\not\in^{A_1'B_1'A_2'B_2'} \otimes W^{PA_1A_2B_1B_2F T_{A_1A_2B_1B_2}} \left(\not\in^{PF} \otimes A^T \otimes B^T\right)\right], \tag{153}$$

gdzie $A = \mathfrak{C}(\mathcal{A})$*,* $B = \mathfrak{C}(\mathcal{B})$*,* $G_{A,B} = \mathfrak{C}(\mathcal{G}_{\mathcal{A},\mathcal{B}})$*. Macierz procesu musi spełniać następujące warunki:*

$$W \geqslant 0 \tag{154}$$

$$\mathrm{Tr}\, W = d_{A_2} d_{B_2} d_P \tag{155}$$

$$W = L_V(W). \tag{156}$$

Jawna postać powyższego projektora jest następująca:

$$\begin{aligned} L_V(W) =& W - {}_F W + {}_{A_2F} W + {}_{B_2} W - {}_{A_2B_2F} W \\ & - {}_{A_1A_2F} W + {}_{A_1A_2B_2F} W - {}_{B_1B_2F} W \\ & + {}_{A_2B_1B_2F} W - {}_{A_1A_2B_1B_2F} W + {}_{PA_1A_2B_1B_2F} W. \end{aligned} \tag{157}$$

Ważnym spostrzeżeniem jest fakt, który przekonuje do słuszności poprzedniej definicji macierzy procesu: definiując $W' = {}_{PF}W$ i korzystając z faktu, że ${}_{XX}W = {}_{X}W$, po elementarnych przekształceniach otrzymuje się, że

$$L_V(W') = {}_{A_2} W' + {}_{B_2} W' - {}_{A_2B_2} W' - {}_{B_1B_2} W' + {}_{A_2B_1B_2} W' - {}_{A_1A_2} W' + {}_{A_1A_2B_2} W'. \tag{158}$$

Powyższy projektor ma takie same wyrazy, jak ten zdefiniowany w (104). Każdy dwustronny proces zdefiniowany w poprzednim sensie rozszerzony o odpowiednio znormalizowaną jednostkową przyszłość i przeszłość spełnia warunki narzucone powyżej, co pokazuje, że każdy proces dwustronny, definiowany jak poprzednio, jest zgodny z tą definicją. Równanie (153) może być skrócone z wykorzystaniem iloczynu łączącego (*link product*), który zostanie opisany dalej. W celu zapisania postaci CJ złożenia pewnych

dwóch funkcji można obliczyć jawną postać CJ $\mathfrak{C}(\mathcal{M}\circ\mathcal{N})$. Wygodniejszym jednak często okazuje się być wcześniej wspomniany iloczyn łączący.

Definicja 16. *(por. [20]). Iloczyn łączący dwóch macierzy definiowany jest jako*

$$N * M = \mathrm{Tr}_{I\cap J}\left[(\mathbb{1}^{J\setminus I}\otimes M^{T_{I\cap J}})(N\otimes\mathbb{1}^{I\setminus J})\right], \tag{159}$$

gdzie $M\in\bigotimes_{i\in I}A^i,\ N\in\bigotimes_{j\in J}A^j$.

W skrajnych przypadkach, gdy $I\cap J=\emptyset$, $N*M$ to po prostu $N\otimes M$, a gdy $I\cap J=I=J$ to $N*M=\mathrm{Tr}\,M^TN$. Następujący przykład ułatwia zrozumienie iloczynu łączącego w przypadkach bardziej skomplikowanych:

$$\begin{aligned}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{Y}^{ABC} * \mathbb{Y}\mathbb{Y}\mathbb{Z}^{BCD} &= \mathrm{Tr}_{BC}\left[\left(\mathbb{1}^A\otimes\mathbb{Y}\mathbb{Y}\mathbb{Z}^{BCD^{T_{BC}}}\right)\left(\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{Y}^{ABC}\otimes\mathbb{1}^D\right)\right]\\ &= \mathrm{Tr}_{BC}\left[\mathbb{1}^A\otimes(-\mathbb{Y}\mathbb{X})^B\otimes-\mathbb{Y}\mathbb{Y}^C\otimes\mathbb{Z}^D\right]\\ &= \mathbb{1}^A\otimes\mathbb{Z}^D\,\mathrm{Tr}_B\left[-\mathbb{Y}\mathbb{X}\right]\mathrm{Tr}_C\left[-\mathbb{Y}\mathbb{Y}\right]\\ &= \mathbb{1}^A\otimes\mathbb{Z}^D 0\cdot(-1)\\ &= 0\end{aligned} \tag{160}$$

Znając iloczyn łączący w sposób bardzo elegancki można zapisać dwustronny proces jako

$$G_{A,B} = W * (A\otimes B), \tag{161}$$

gdzie A i B są macierzami CJ odwzorowań $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

5.1 Czysty proces

W pracy [20] zaproponowano następującą definicję czystego procesu:

Definicja 17. *(por. [20]). Czysty proces* $W^{A_1A_2B_1B_2PF}$ *definiuje się jako proces, dla którego istnieje taka transformacja unitarna* U_W*, że można zapisać proces ten jako*

$$W_{czysty} = |U_W\rangle\rangle\langle\langle U_W|, \tag{162}$$

gdzie $|U_W\rangle\rangle = (\mathbb{1}\otimes U_W)|\mathbb{1}\rangle\rangle$.

Postuluje się, że wyłącznie takie procesy są implementowalne fizyczne. Prowadzi to do kolejnej definicji procesu puryfikacyjnego jako procesu, który potencjalnie można zaobserwować i wyznaczyć go z generowanych przez niego statystyk. Macierz puryfikowalna jest tym, co można zaobserwować z procesu czystego, czyli potencjalnie fizyczna.

Definicja 18. *(por. [20]). Proces puryfikowalny* W *definiuje się jako proces, dla którego można znaleźć proces czysty* S *spełniający następującą równość:*

$$W^{A_1A_2B_1B_2PF} = S^{A_1A_2A_1'A_2'B_1B_2B_1'B_2'PFP'F'} * \left(|0\rangle\langle 0|^P\otimes\mathbb{1}^F\right), \tag{163}$$

Definicja ta jest zgodna tylko z tymi macierzami procesu, które można odzyskać z procesu czystego, gdy w globalnej przeszłości umieści się ustalony stan i wykona się ślad częściowy po globalnej przeszłości. Odpowiada to sytuacji, w której nie obserwuje się globalnej przeszłości symbolizowanej przez P i przyszłości symbolizowanej przez F. Postuluje się, że wyłącznie procesy czyste można skonstruować fizycznie, gdyż jeśli byłoby inaczej, zachwiana byłaby zasada odwracalności, która jest uznawana za kluczową fizycznie.

Twierdzenie 5. *(por. [20]). Proces W o rozkładzie spektralnym i rzędzie r:*

$$W = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|^{A_1A_2B_1B_2} \tag{164}$$

jest puryfikowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki zbiór $\{|w_i\rangle\}$ spełniający warunki:

$$\forall i,j \;\; L_V^{\perp}(|w_i\rangle\langle w_j|) = 0 \tag{165}$$

$$\langle w_i||w_j\rangle = d_{A_2} d_{B_2} \delta_{ij}, \tag{166}$$

gdzie w szczególności wektor $|w_0\rangle$ jest dany jawnie przez:

$$|w_0\rangle = \sum_{i=0}^{r-1} \sqrt{\alpha_i} |\alpha_i\rangle^{A_1A_2B_1B_2} |i\rangle^{F'}. \tag{167}$$

Powyższe twierdzenie pozostawione jest bez dowodu, który można poznać w [20].

5.2 Warunek konieczny

Okazuje się jednakże, że znalezienie takiego zbioru wektorów $\{|w_i\rangle\}$ jest problemem trudnym, gdyż warunek $L_V^{\perp}(|w_i\rangle\langle w_j|) = 0$ jest kwadratowy. Zostanie teraz opisany warunek konieczny, który jest łatwiejszy do sprawdzenia. Procesy, które nie spełniają tego warunku będą więc niepuryfikowalne, zaś dla reszty będzie on niekonkluzywny. Poniżej zostaną w sposób usystematyzowany wprowadzone pojęcia użyte w pracy [20] do sformułowania warunku koniecznego.

Definicja 19. *(por. [20]). Macierz rzutowa $\Pi_{L_V^{\perp}}$ dana jest następująco:*

$$\forall i,j \;\; \Pi_{L_V^{\perp}} = |L_V^{\perp}(|i\rangle\langle j|)\rangle\rangle. \tag{168}$$

Definicja 20. *Operator O_W definuje się jako:*

$$O_W := \left(\langle w_0^*| \otimes \mathbb{1}\right) \Pi_{L_V^{\perp}} \left(|w_0^*\rangle \otimes \mathbb{1}\right), \tag{169}$$

gdzie $|w_0\rangle$ dany jest jak w równaniu (167)*.*

Definicja 21. *Niech $\{|r_i\rangle\}$ będzie zbiorem wektorów własnych O_W, którym odpowiadają zerowe wartości własne. Macierz R określona jest jako:*

$$R = \sum_i |i\rangle\langle r_i|. \tag{170}$$

Definicja 22. *Ograniczona macierz rzutowa $\Pi_{L_V^{\perp}}$ do podprzestrzeni $V_W^* \otimes V_W$, gdzie V_W jest podprzestrzenią rozpinaną przez wektory $|r_i\rangle$, dana jest następująco*

$$\Pi_{L_V^{\perp}|V_W} = (R^* \otimes R)\Pi_{L_V^{\perp}}(R^{*\dagger} \otimes R^{\dagger}). \tag{171}$$

Definicja 23. *Macierz M_k definiuje się jako:*

$$|M_k\rangle\rangle = |m_k\rangle, \tag{172}$$

gdzie $\{|m_k\rangle\}$ jest zbiorem wektorów własnych $\Pi_{L_V^{\perp}|V_W}$ odpowiadających niezerowym wartościom własnym.

Ważna uwaga: macierze M_k nie muszą być hermitowskie, a hermitowskość potrzebna jest do skorzystania z twierdzenia przytoczonego dalej. W celu zaradzenia temu wprowadza się macierze C_k, z których liniowej kombinacji można odtworzyć macierze M_k.

Definicja 24. *Macierze C_k zdefiniowane są następująco:*

$$\begin{aligned} C_k &= M_k + M_k^\dagger \\ C_{k+d_m} &= i(M_k - M_k^\dagger), \end{aligned} \tag{173}$$

gdzie d_m jest liczbą macierzy M_k.

Lemat 3. *Wymiar podprzestrzeni złożonej z wektorów $|v'\rangle, |v\rangle$, które spełniają*

$$\langle v'|A|v\rangle = 0 \tag{174}$$

dla pewnej macierzy hermitowskiej A to:

$$d_A = n_0 + \min(n_+, n_-), \tag{175}$$

gdzie n_0 jest liczbą zerowych wartości własnych, a n_+ (n_-) - liczbą dodatnich (ujemnych) wartości własnych macierzy A. Dowód tego lematu można odnaleźć w dodatku A [20].

Lemat ten został udowodniony w dodatku D pracy [20]. Okazuje się, że korzystając z powyżej podanych wielkości można wyprowadzić warunek konieczny, które muszą spełniać macierze puryfikowalne. Taki warunek pozwala wykluczyć część macierzy procesu z grona potencjalnie implementowalnych fizycznie.

Twierdzenie 6. *Puryfikowalna macierz procesu W implikuje:*

$$W \text{ jest puryfikowalne} \implies d_{max}(W) \geqslant \operatorname{rank}(W) \tag{176}$$

$$d_{max}(W) := \min_i d_{C_i}, \tag{177}$$

gdzie macierze C_i podane są w definicji 24.

Powyższe twierdzenia pozostawione są bez dowodów, ich wyprowadzenie można odnaleźć w [20].

5.3 Związek z procesami z rozdziału 2

Może się wydawać, że definicja macierzy procesu z aktualnego rozdziału różni się fundamentalnie od definicji macierzy procesu z drugiego rozdziału. Wcześniej w tym rozdziale pokazano w równaniu (158) powiązanie projektorów L_V. Wynika z tego fakt, że mając daną pewną macierz procesu $W^{A_1A_2B_1B_2PF}$ można otrzymać prawidłową macierz procesu $W^{A_1A_2B_1B_2}$ poprzez wykonanie śladu po podsystemie P i F. Co więcej, nie został narzucony warunek na wymiar podsystemów P i F. Oznacza to, że można wybrać $d_P, d_F = 1$, wtedy $W^{A_1A_2B_1B_2PF} = W^{A_1A_2B_1B_2}$. Przytaczając po raz kolejny argument z (158), otrzymuje się drugą metodę otrzymania prawidłowych macierzy procesu (w sensie rozdziału 2).

6 Przykłady

Naley zwrócićuwagę, że poniżej wykorzystuje się wektory procesu, które często okazują się być wygodne i ułatwiają zrozumienie, co reprezentuje dany proces. Mając pewien wektor procesu $|w\rangle$ odpowiadająca mu macierz procesu dana jest jako $W = |w\rangle\langle w|$. W poniższych rozważaniach przez proces, w kontekście wektorów procesu, rozumie się macierz procesu otrzymaną z przytoczonej formuły. W niektórych miejscach analizuje się wektory procesu, które zawierają P i F, a rozważa się prawdopodobieństwa. W celu ujednolicenia postaci macierzy procesu usuwa się P i F poprzez dokonania śladu częściowego po P i F, który odpowiada zignorowaniu tych podsystemów. W rozdziale trzecim podano przykład procesu,

które może łamać przyczynowe nierówności. Okazuje się, że ten proces nie jest puryfikowalny dla skrajnego $q = 1$, dla $q = 0$ jest puryfikowalny, bo przyczynowy, zaś ze względu na złożoność obliczeniową i brak dostępnych wyników w literaturze nie jest wiadome, dla jakich q ten proces jest puryfikowalny. Kolejnymi interesującymi przykładami są kanały kwantowe. Wektor procesu dla idealnego kanału kwantowego jest następujący:

$$|w_{channel}\rangle^{A\prec B} = |\Phi^+\rangle\rangle^{PA_1}|\Phi^+\rangle\rangle^{A_2B_1}|\Phi^+\rangle\rangle^{B_2F},\ a, b \geqslant 0. \tag{178}$$

Reprezentuje on oczywiście zasób, które ma ściśle określoną przyczynowość, dlatego nie może złamać żadnych nierówności przyczynowych. Biorąc proces następujący

$$a|w_{channel}\rangle\langle w_{channel}|^{A\prec B} + b|w_{channel}\rangle\langle w_{channel}|^{B\prec A}, \tag{179}$$

warunek normujący daje, że $a + b = 1$, więc ewidentnie proces jest separowalny. Co za tym idzie, on również nie może złamać nierówności przyczynowych. Taki zasób można interpretować jako probabilistyczny kanał, który z pewnym prawdopodobieństwem decyduje, kto jest przed kim. Eksplorując dalej procesy związane w prosty sposób z kanałami można zadać sobie pytanie, co w takim razie dzieje się z koherentną superpozycją kanałów. Niech wektor procesu będzie dany jako

$$|w_{procesu}\rangle = a|w_{channel}\rangle^{A\prec B} + b|w_{channel}\rangle^{B\prec A}, \tag{180}$$

z analogicznymi a i b jak poprzednio. Okazuje się jednakże, że niestety proces dany tym wektorem nie należy do przestrzeni poprawnych procesów, gdy dwa współczynniki są różne od zera, gdyż nie spełnia warunku $L_V(W) = W$. W celu uratowania tego wybornego pomysłu spróbowano wziąć

$$W' = CL_V(W). \tag{181}$$

C jest stałą normalizacyjną równą $\frac{d_O}{\mathrm{Tr}\, W'}$. W celu prób złamania nierówności danej w twierdzeniu 2 wykorzystano następujący protokół. Gdyby dany był idealny dwustronny kanał, można by otrzymać system w jednym laboratorium, zmierzyć $|i\rangle\langle i|$ i powiązać przesyłany bit z odebranym stanem, przypisać odpowiednio swój bit do stanu i wysłać go do drugiego laboratorium. Idąc za hipotezą, że proces powyższy reprezentuje pewnego rodzaju pozostałość z takiego idealnego dwustronnego kanału, przyjmuje się właśnie tę procedurę. Odpowiednie odwzorowania są więc dane

$$\eta(x, a) = |x\rangle\langle x| \otimes |a\rangle\langle a| \tag{182}$$

$$\xi(y, b, b') = \eta(y, b) \tag{183}$$

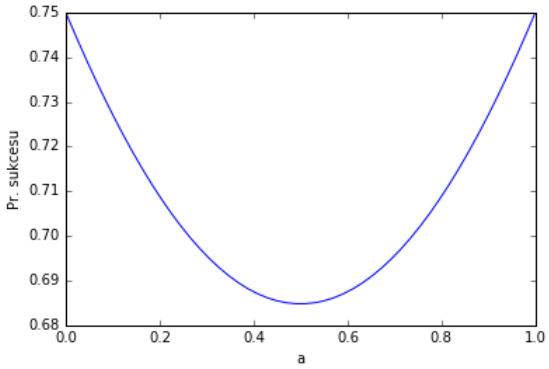
Pamiętając, że prawdopodobieństwo jest dane jak zazwyczaj, czyli

$$\Pr(x, y|a, b, b\text{`}) = \mathrm{Tr}\left\{W\left[\eta(x, a) \otimes \xi(y, b, b')\right]\right\} \tag{184}$$

Okazuje się, że prawdopodobieństwo sukcesu w grze zdefiniowanej w rozdziale trzecim wynosi 0.8 dla $a = b$, który jest równym połączeniem dwóch kanałów. Macierz (181) nie jest prawidłowym procesem, ponieważ nie jest dodatnia. Dodając najmniejszą ilość białego szumu takiego, że W' będzie nieujemne, czyli

$$W'' = W' - \lambda_{min}\mathbb{1}, \tag{185}$$

gdzie λ_{min} to najmniejsza wartość własna. Otrzymuje się prawdopodobieństwo równe około 0.68, co niestety ujmuje przydatności i wyjątkowości takiego zasobu oraz zmusza do szukania innych ciekawych implementowalnych fizycznie procesów. W celu spelnienia warunku normalizacyjnego $a + b \leqslant C$, gdzie C jest pewną stałą, dlatego bez utraty ogólności można wybierać $a + b = 1$ i następnie dokonywać procesu renormalizacji. Na rysunku 8 pokazano prawdopodobieństwo sukcesu dla rodziny procesów generowanych powyżej opisaną metodą. Sprawdzono numerycznie, że dla $a = b$ proces jest separowalny przyczynowo.



Rysunek 8: Wykres pokazujący zależność między współczynnikiem a i prawdopodobieństwem sukcesu

6.1 Przykłady z literatury

Bardzo ważnym przykładem, który został zaimplementowany fizycznie, który potwierdza występowanie w fizyce nieprzyczynowego porządku jest kwantowy przełącznik (*quantum switch*). Jest to proces, w którym kanały kwantowe są w superpozycji zależnej od stanów w przeszłości. Jego wektor wygląda następująco

$$|w_{switch}\rangle = |0\rangle^{P_1}|\!\not\subset\rangle\rangle^{P_2A_1}|\!\not\subset\rangle\rangle^{A_2B_1}|\!\not\subset\rangle\rangle^{B_2F_2}|0\rangle^{F_1} + |1\rangle^{P_1}|\!\not\subset\rangle\rangle^{P_2B_1}|\!\not\subset\rangle\rangle^{B_2A_1}|\!\not\subset\rangle\rangle^{A_2F_2}|1\rangle^{F_1}, \tag{186}$$

gdzie $F = F_1 \otimes F_2$, $P = P_1 \otimes P_2$. Proces ten jest ewidentnie reprezentacją wektorową CJ pewnego unitarnego operatora. Wystarczy zaobserwować, że działając na proces macierzą unitarną postaci

$$U = \not\subset^{P_1P_2A_1A_2B_1B_2F_1} \otimes |0\rangle\langle 0|^{F_2} + \not\subset^{P_1P_2} \otimes \mathbf{SWAP}^{A_1B_1} \otimes \mathbf{SWAP}^{A_2B_2} \otimes |1\rangle\langle 1|^{F_2}, \tag{187}$$

otrzymuje się wektor CJ macierzy jednostkowej. Wynika z tego fakt, że sam proces jest wektorem CJ macierzy unitarnej. Kubit kontrolny z P_1 pozostaje niezmieniony, zaś badając zmianę stanu z P_2 można dowiedzieć się, jaką "drogę" przebyły. Taki zasób nie jest w stanie złamać żadnych nierówności przyczynowych. Nie jest znany żaden puryfikowalny przykład w literaturze, który byłby w stanie złamać przyczynowe nierówności, jednakże znany jest proces trzystronny, wprowadzony w [22], który jest w stanie złamać przyczynowe nierówności.

$$W_{det} = \sum_{a,b,c} |a,b,c\rangle\langle a,b,c| \otimes |\neg b \wedge c, \neg c \wedge a \neg a \wedge b\rangle\langle \neg b \wedge c, \neg c \wedge a, \neg a \wedge b|, \tag{188}$$

gdzie systemy zostały zapisane w kolejności $A_2B_2C_2A_1B_1C_1$. Korzystając ze standardowej metody zamieniania nieodwracalnych logicznych funkcji w odwracalne pisze się $|x\rangle|y\rangle \mapsto |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$ zamiast $|x\rangle \mapsto |f(x)\rangle$. Wykorzystując to, powyższy proces można przepisać w postaci wektorowej jako

$$|w\rangle = \sum_{a,b,c,e,f,g} |a,b,c\rangle|e,f,g\rangle \otimes |a,b,c\rangle|i \oplus \neg b \wedge c, f \oplus \neg c \wedge, a, g \oplus \neg a \wedge b\rangle, \tag{189}$$

gdzie systemy zostały wypisane w kolejności $A_2B_2C_2PFA_1B_1C_1$. Tutaj zarówno przeszłość jak i przyszłość mają po trzy kubity, co stanowi puryfikację powyższego procesu.

6.2 Wielostronne przykłady

Okazuje się, że generalizacja formalizmu macierzy procesu do większej liczby stron powoduje komplikowanie się części wprowadzonych pojęć. W celu zilustrowania powstających problemów można

zacząć od pokazania przykładu trzystronnego kwantowego przełącznika. Tym razem rozszerzono postać przełącznika z artykułu [18]. W przypadku trzystronnym przełącznik kwantowy składa się z czterech laboratoriów: Alicji, Boba, Charliego i Dawida. Pierwszych troje otrzymuje kubit, wykonuje na nim pewne operacji i pomiary i wysyła system dalej. Laboratorium Dawida ma dostęp do dwóch podsystemów: kubitu D_1^t, który jest kubitem poddanym operacjom Alicji, Boba i Charliego w pewnej kolejności, oraz podsystemu kontrolnego D_1^c, który określa przyczynowy porządek wykonanych operacji. Zakłada się, że Dawid porzuca swój system po wykonaniu pomiarów na nim. Rozmiary poszczególnych podsystemów to:

$$d_{A_1} = d_{A_2} = d_{B_1} = d_{B_2} = d_{C_1} = d_{C_2} = 2,\ d_{D_1} = 12 = 2 \cdot 6,\ d_{D_2} = 1 \tag{190}$$

Wygodnie zdefiniować jest następujące wielkości:

$$|C(X,Y,Z,i)\rangle := |\psi\rangle^{X_1} |\Psi\rangle\rangle^{X_2 Y_1} |\Psi\rangle\rangle^{Y_2 Z_1} |\Psi\rangle\rangle^{Z_2 D_1^t} |i\rangle^{D_1^c} \tag{191}$$

$$|C(X,Y,Z)\rangle := |\psi\rangle^{X_1} |\Psi\rangle\rangle^{X_2 Y_1} |\Psi\rangle\rangle^{Y_2 Z_1} |\Psi\rangle\rangle^{Z_2 D_1^t} \tag{192}$$

Wektor trzystronnego przełącznika można zapisać jako:

$$\begin{aligned} |w\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_i |C(X_i,Y_i,Z_i,i)\rangle =& \frac{1}{\sqrt{6}} |C(A,B,C,0)\rangle + |C(A,C,B,1)\rangle + |C(B,A,C,2)\rangle \\ &+ |C(B,C,A,3)\rangle + |C(C,A,B,4)\rangle + |C(C,B,A,5)\rangle. \end{aligned} \tag{193}$$

Okazuje się, że tak zdefiniowany wektor procesu generuje poprawną macierz procesu. Analizę tego procesu można rozpocząć od zbadania jak wygląda obserwowany proces, gdy podsystem kontrolny zostanie zignorowany. Standardowo jest to równoważne z wykonaniem śladu częściowego po ignorowanym podsystemie:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{D_1^c} |w\rangle\langle w| &= \frac{1}{6} \mathrm{Tr}_{D_1^c} \left[\sum_{ij} |C(X_i,Y_i,Z_i,i)\rangle\langle C(X_j,Y_j,Z_j,j)| \right] \\ &= \frac{1}{6} \mathrm{Tr}_{D_1^c} \left[\sum_{ij} |C(X_i,Y_i,Z_i)\rangle|i\rangle\langle C(X_j,Y_j,Z_j)|\langle j| \right] \\ &= \frac{1}{6} |C(X_i,Y_i,Z_i)\rangle\langle C(X_i,Y_i,Z_i)|. \end{aligned} \tag{194}$$

Łatwo zidentyfikować wyraz typu $|C(A,B,C)\rangle\langle C(A,B,C)|$ ($|C(A,B,C,0)\rangle\langle C(A,B,C,0)|$) jako proces, w którym Alicja jest połączona idealnym kanałem z Bobem, Bob z Charliem, Charlie z Dawidem. Widać więc, że gdy nie jest posiadana wiedza na temat podsystemu kontrolnego, obserwowany proces jest probabilistyczną kombinacją wszystkich możliwych porządków idealnych kanałów między A, B i C - analogicznie do przypadku przełącznika dwustronnego. Intuicyjnie można teraz wnioskować, że proces trzystronnego przełącznika jest nieseparowalny przyczynowo. Oczywistym jest, że zredukowany proces jest prawidłowym procesem, opisuje on zasób, który można zrealizować fizycznie. Jednakże proces kwantowego przełącznika posiada jeszcze wyrazy mieszane, których implementacja fizyczna jest nieoczywista. Zarówno postać wektora procesu jako superpozycji wyrazów zgodnych z konkretnymi porządkami przyczynowymi, jak i istnienie wyrazów mieszanych pozwala wnioskować, że proces ten jest nieseparowalny. Warto zauważyć, iż z definicji przyczynowej separowalności wynika, że proces o nietrywialnej probabilistycznej kombinacji porządków musi mieć rząd co najmniej 2, a proces trzystronnego przełącznika ma rząd równy jeden, co implikuje, że jest nieseparowalny. Specjalna postać tego procesu pozwala na postulowanie, że zasób ten sposób nieseparowalny, lecz w ogólności posiadając proces lub dostęp do generowanych przez niego korelacji stwierdzenia czy jest on nieseparowalny jest nietrywialnym problemem. Można zapisać przyczynowe nierówności dla przypadku wielostronnego [23], jednakże już w przypadku trzystronnym okazuje się to

być kłopotliwe. Biorąc pod uwagę fakt, że dwustronny przełącznik nie może generować korelacji łamiących przyczynowe nierówności, zapewne jego trzystronny odpowiednik również ich nie łamie. Słuszność tego zdania jest problemem otwartym, lecz gdy założy się jego prawdziwość, to nie można scharakteryzować separowalności przyczynowej przełącznika przy pomocy nierówności przyczynowych. Nietrywialne jest również rozszerzenia świadka przyczynowości dla większej liczby stron. W przypadku dwustronnym, można określić porządek przyczynowy przy pomocy operatorów $_X(\cdot)$. Fakt ten zapewnia ładną postać świadków przyczynowości i pozwala na efektywne ich znajdowanie. Można podejrzewać, że nie jest to prawdziwe w przypadku wielostronnym. Przykładowo można rozważyć dwa procesy postaci:

$$W_{ABC} = \rho^{A_1} \otimes |\mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}\rangle\rangle\langle\langle \mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}|^{A_2B_1} \otimes |\mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}\rangle\rangle\langle\langle \mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}|^{B_2C_1} \otimes \mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}^{C_2} \tag{195}$$

$$W_{BAC} = \rho^{B_1} \otimes |\mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}\rangle\rangle\langle\langle \mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}|^{B_2A_1} \otimes |\mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}\rangle\rangle\langle\langle \mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}|^{A_2C_1} \otimes \mathbb{1}\!\!\!\!\mathbb{1}^{C_2}. \tag{196}$$

Oba procesy zawierają wyrazy typu $_{A_1A_2B_1B_2C_1}$, które ewidentnie mogą posiadać korelacje zgodne z pewnym porządkiem przyczynowym. Powyższy przykład ilustruje fakt, że istnieją takie wyrazy, których nie można określić porządku patrząc na typ wyrazu. Pozwala to podejrzewać, że nie można opisać wielostronnych świadków przyczynowości przy pomocy operatorów $_X(\cdot)$. Sformułowanie świadków przyczynowości dla przypadku wielostronnego jest wciąż problemem otwartym. Wiele wskazuje na to, że nawet jeżeli można sformułować świadków przyczynowości dla wielu stron, to poszukiwanie świadków będzie problemem trudnym numerycznie. Mnogość problemów dalej pokazuje rozumowanie przeprowadzone w [24]. W tym artykule zostało pokazane, że w przypadku wielostronnym laboratoria mogą wpływać swoimi operacjami na kolejność operacji występujących po sobie. Fakt ten dodatkowo utrudnia sformułowanie przyczynowej separowalności i wprowadza pojęcie pojęcie procesów o określonej przyczynowości i separowalnych do określonej przyczynowości [24]. Pokazują, że pojęcia te są nierówne w przypadku wielostronnym. W celu poznania rygorystycznej definicji czytelnik jest zachęcany do zapoznania się z oryginalnym artykułem. Intuicyjnie można zilustrować następującym eksperymentem: Alicja otrzymuje kubit, dokonuje pomiaru w pewnej bazie, w przypadku otrzymania jednego wyniku w klasyczny sposób powoduje, że Bob jest przed Charliem, a gdy otrzyma drugi wynik Charlie jest przed Bobem. Za każdym razem eksperyment taki ma ściśle określony porządek przyczynowy, lecz próbując zapisać zasób ten przy pomocy macierzy procesu okazuje się, że niemożliwe jest zapisanie go w postaci separowalnej przyczynowo.

7 Wnioski

W pracy przedstawiono podstawy formalizmu macierzy procesu. Zaprezentowano przykładowe zadanie, w którym nieprzyczynowe zasoby mogą osiągać lepsze wyniki niż zasoby o określonym porządku przyczynowym. Następnie pokazano narzędzie, które zostało wykorzystane do eksperymentalnego potwierdzenia braku ścisłego określenia przyczynowości w przyrodzie. Opisano następnie proponowany postulat, który miałby określać, czy dany proces jest implementowalny fizycznie. Podano parę oryginalnych przykładów. Poszukiwanie wektorów, które spełniałyby warunek wystarczający i konieczny okazuje się być trudnym problemem, więc zademonstrowano wyprowadzenie warunku koniecznego, który sprowadza się do działań algebry liniowej.

Badanie nieprzyczynowości wydaje się być popularnym nurtem w informatyce kwantowej, który niesie wiele nadziei na nowe ważne odkrycia, chociażby na połączenie mechaniki kwantowej z grawitacją. Istnieje wiele elementów, które wymagają rozwinięcia. Ewidentnym brakiem w prezentowanym na końcu postulacie jest brak jakichkolwiek innych przesłanek na jego słuszność, niż intuicja fizyczna. Wymagane jest w celu utwierdzenia słuszności powyższego postulat wiele eksperymentów fizycznych, jednakże ze względu na pewien metafizyczny charakter tego postulatu będzie to trudne. Ważne są również bada-

nia nad skutecznymi metodami spełniania warunku wystarczającego, gdyż problematyczne będą procesy niewykluczane przez warunek konieczny.

Spis treści

1 Wstęp 2
1.1 Historia . . . 2
1.2 Podstawowe informacje . . . 3

2 Macierz Procesu 6
2.1 Stany . . . 9
2.2 Kanały . . . 12
2.3 Kanały z pamięcią . . . 13

3 Przyczynowa separowalność i przyczynowe nierówności 16
3.1 Systemy n-cząstkowe . . . 19
3.2 Adnotacja . . . 20
3.3 Procesy z przyczynowym modelem . . . 20

4 Świadek przyczynowości 22
4.1 Sformułowanie macierzy procesu niezależne od bazy . . . 23
4.2 Poszukiwanie świadka przyczynowości . . . 25
4.3 Implementacja świadka przyczynowości . . . 28

5 Postulat puryfikacyjny 28
5.1 Czysty proces . . . 30
5.2 Warunek konieczny . . . 31
5.3 Związek z procesami z rozdziału 2 . . . 32

6 Przykłady 32
6.1 Przykłady z literatury . . . 34
6.2 Wielostronne przykłady . . . 34

7 Wnioski 36

Bibliografia 40

Dodatek A Szybkie obliczanie L_V 41

Dodatek B Jawna postać $\Pi_{L_V^\perp}$ 44

Spis rysunków

1 Sfera Blocha. Punkty na tej sferze opisują wszystkie możliwe stany z dokładnością do czynnika fazowego $|\psi\rangle$. 3

2 Rysunek ilustruje działanie izomorfizmu CJ. Zamiast działać odwzorowaniem na pewien stan izomorfizm CJ pokazuje działanie na maksymalnie splątane cząstki. Z powodu izomorfizmu w drugą stronę, konwencjonalnie interpretuje się izomorfizm CJ jako teleportacje bramek kwantowych. 7

3 Schematyczne przedstawienie stanów. Laboratoria wykonują pewne wybrane pomiary na systemach po czym wysyłają je ze swoich laboratoriów. Każde z laboratoriów otrzymuje różne, potencjalnie splątane, systemy. 9

4 Schematyczna reprezentacja kanału CPTP. Alicja wykonuje wybrane operacje na systemie po czym wysyła go do Boba. W trakcie przesyłania systemu zostaje zaaplikowana unitarna transformacja U. 12

5 Schematyczna reprezentacja kanału z pamięcią na przykładzie zasobu wykorzystywanego do implementacji kodowania supergęstego. Alicja z Bobem dzielą maksymalnie splątane cząstki. Alicja wykonuje pewną unitarną transformację i wysyła swój system dalej do Boba. 14

6 Każde dwa rozłączne zbiory wypukłe (geometrycznie - figury) można rozdzielić hiperpłaszczyzną ze względu na pewien iloczyn skalarny, tak że elementy jednego zbioru będą przyjmowały dodatnie wartości iloczynu skalarnego z elementem przestrzeni wektorowej charakteryzującym hiperpłaszczyznę, zaś elementy drugiego - ujemne. Jako że zbiór separowalnych macierzy procesu jest wypukły z definicji i każdy zbiór jednoelementowy jest zbiorem wypukłym, pozwala to dla każdego procesu poszukiwać hiperpłaszczyzn oddzielających ten konkretny proces od zbioru procesów separowalnych. Taką hiperpłaszczyznę nazywa się świadkiem przyczynowości. 22

7 Rysunek symbolizuje działanie procesu W jako funkcję wyższego rzędu odwzorowań $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, która dla danych odwzorowań zwraca odwzorowanie $\mathcal{G}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ reprezentującą transformację, która przechodzi z globalnej przeszłości do globalnej przyszłości. 29

8 Wykres pokazujący zależność między współczynnikiem a i prawdopodobieństwem sukcesu 34

Bibliografia

[1] P. W. Shor, "Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer," 1995, arXiv:quant-ph/9508027.

[2] A. W. Harrow, A. Hassidim, and S. Lloyd, "Quantum algorithm for solving linear systems of equations," 2008, arXiv:0811.3171.

[3] P. Rebentrost, M. Mohseni, and S. Lloyd, "Quantum support vector machine for big data classification," 2013, arXiv:1307.0471.

[4] S. Lloyd, M. Mohseni, and P. Rebentrost, "Quantum principal component analysis," 2013, arXiv:1307.0401.

[5] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden, "Quantum cryptography," 2001, arXiv:quant-ph/0101098.

[6] S. Pironio, A. Acin, S. Massar, A. B. de la Giroday, D. N. Matsukevich, P. Maunz, S. Olmschenk, D. Hayes, L. Luo, T. A. Manning, and C. Monroe, "Random numbers certified by bell's theorem," 2009, arXiv:0911.3427.

[7] S. Pirandola, J. Eisert, C. Weedbrook, A. Furusawa, and S. L. Braunstein, "Advances in quantum teleportation," 2015, arXiv:1505.07831.

[8] M. Keyl, "Fundamentals of quantum information theory," 2002, arXiv:quant-ph/0202122.

[9] D. Kretschmann and R. F. Werner, "Quantum channels with memory," 2005, arXiv:quant-ph/0502106.

[10] O. Oreshkov, F. Costa., and C. Brukner, "Quantum correlations with no causal order," 2011, arXiv:1105.4464.

[11] E. B. Davies and J. T. Lewis, "An operational approach to quantum probability," *Comm. Math. Phys.*, vol. 17, no. 3, pp. 239–260, 1970.

[12] A. Jamiolkowski, "Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators," *Reports on Mathematical Physics*, vol. 3, pp. 275–278, Dec. 1972.

[13] M.-D. Choi, "Completely positive linear maps on complex matrices," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 10, no. 3, pp. 285 – 290, 1975.

[14] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, "Quantum entanglement," 2007, arXiv:quant-ph/0702225.

[15] C. Brukner, "Bounding quantum correlations with indefinite causal order," 2014, arXiv:1404.0721.

[16] M. L. Almeida, J. D. Bancal, N. Brunner, A. Acin, N. Gisin, and S. Pironio, "Guess your neighbour's input: a multipartite non-local game with no quantum advantage," 2010, arXiv:1003.3844.

[17] A. Feix, M. Araújo, and Časlav Brukner, "Causally nonseparable processes admitting a causal model," 2016, arXiv:1604.03391.

[18] M. Araújo, C. Branciard, F. Costa, A. Feix, C. Giarmatzi, and Časlav Brukner, "Witnessing causal nonseparability," 2015, arXiv:1506.03776.

[19] G. Rubino, L. A. Rozema, A. Feix, M. Araújo, J. M. Zeuner, L. M. Procopio, Časlav Brukner, and P. Walther, "Experimental verification of an indefinite causal order," 2016, arXiv:1608.01683.

[20] M. Araújo, A. Feix, M. Navascués, and Časlav Brukner, "A purification postulate for quantum mechanics with indefinite causal order," 2016, arXiv:1611.08535.

[21] A. Peres, "Quantum measurements are reversible," *American Journal of Physics*, vol. 42, no. 10, pp. 886–891, 1974, http://dx.doi.org/10.1119/1.1987884.

[22] Ämin Baumeler and S. Wolf, "The space of logically consistent classical processes without causal order," 2015, arXiv:1507.01714.

[23] A. A. Abbott, C. Giarmatzi, F. Costa, and C. Branciard, "Multipartite causal correlations: Polytopes and inequalities," 2016, arXiv:1608.01528.

[24] O. Oreshkov and C. Giarmatzi, "Causal and causally separable processes," 2015, arXiv:1506.05449.

[25] J. Maziero, "Computing partial traces and reduced density matrices," 2016, arXiv:1601.07458.

[26] R. A. Bertlmann and P. Krammer, "Bloch vectors for qudits," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 41, no. 23, p. 235303, 2008.

Dodatek A Szybkie obliczanie L_V

W wielu przypadkach, gdy ma się do czynienia z dużymi macierzami, konieczne jest skorzystanie z metod numerycznych. Problematyczne ze względu na złożoność obliczeniową okazują się nawet takie pozornie proste operacje jak częściowy ślad, liczony naiwnie z następującej, łatwej do zaimplementowania formuły

$$\mathrm{Tr}_B\, A = \sum_i^{d_b} (\mathbb{1}^A \otimes \langle i|_B) A (\mathbb{1}^A \otimes |i\rangle_B). \tag{197}$$

Dla wybranego i wykonując pierwsze mnożenie otrzymuje się macierz o $d_A^2 d_B$ komórkach, gdzie obliczenie każdej komórki wymaga $d_A d_B$ operacji, następnie wykonuje się drugie mnożenie, które nie zwiększa złożoności. Wykonując tę procedurę dla wszystkich $|i\rangle$ otrzymuje się złożoność $O(d_A^3 d_B^3)$. Wykorzystując wiedzę o chociażby strukturze (praktycznie wszystkie komórki są zerami) można znacznie przyśpieszyć te obliczenia. W [25] pokazano wydajną metodę obliczania częściowego śladu. Posiadając jawną postać pewnej macierzy A, w celu wyliczenia ${}_X A$ konieczne po wykonaniu śladu częściowego jest zastąpienie jedynką odpowiedniego systemu. Jawnie iloczyn tensorowy dla macierzy reprezentuje się przy pomocy tzw. iloczynu Kroneckera. O ile jest pewna dowolność w zapisie matematycznym, gdzie postawi się znak iloczynu tensorowego tak długo, jak odnotuje się, jakiego podsystemu dotyczy macierz, w implementacji kolejność systemów jest niejawna, zakodowana pozycyjne. Korzystając z wydajnej metody na obliczanie śladu można łatwo w wydajny sposób obliczyć operacje ${}_X A$ skrajnych systemów następująco:

$${}_{A_1} A = \mathbb{1}^{A_1} \otimes \mathrm{Tr}_{A_1}\, A, \tag{198}$$

$${}_{A_N} A = \mathrm{Tr}_{A_N}\, A \otimes \mathbb{1}^{A_N}. \tag{199}$$

W innych przypadkach macierz jednostkowa będzie znajdowała się na niewłaściwym miejscu, co zmusza do wykorzystania tzw. macierzy komutacji, co pozwala zapisać

$${}_{A_n} A = Q \left(\mathrm{Tr}_{A_n}\, A \otimes \mathbb{1}^{A_N} \right) Q \tag{200}$$

$$Q = \sum_{ijkl} |i\rangle_{A_1 \ldots A_{n-1}} |j\rangle_{A_n} |k\rangle_{A_n+1 \ldots A_{N-1}} |l\rangle_{A_N} \langle i|_{A_1 \ldots A_{n-1}} \langle l|_{A_n} \langle k|_{A_n+1 \ldots A_{N-1}} \langle j|_{A_N}, \tag{201}$$

gdzie A_N oznacza ostatni system, zaś $\mathbb{1}^{A_N}$ rozumie się jako macierz jednostkową o odpowiednim rozmiarze na ostatniej pozycji. Zauważa się, że macierz Q ma $d_{A_1A_2\ldots A_N}$ jedynek i jest unitarna, co razem daje, że w każdej kolumnie i każdym rzędzie jest dokładnie jedna jedynka i na innych miejscach zera. Wynika to z faktu, że gdyby było inaczej, to przy obliczaniu wyznacznika macierzy Q metodą minorów rozwijając względem wiersza, w którym nie stoi jedynka wyszłoby, że wyznacznik tej macierzy byłby równy zero, co jest sprzeczne z faktem, że macierz ta jest odwracalna. Niemożliwa jest większą liczba jedynek, niż jeden w każdej kolumnie i wierszu, ponieważ jest ich dokładnie $d_{A_1A_2\ldots A_N}$. Taka postać macierzy pozwala na obliczenie wartości danej komórki macierzy w czasie stałym, co pozwala na wykonanie operacji ${}_XA$ w $O({d_{A_1A_2\ldots A_N}}^2)$. Problem można również rozwiązać w innych sposób, który może być uznawany za bardziej elegancki, a oferuje taką samą złożoność obliczeniową i jest bardziej przystępny implementacyjnie. Jest nim wykonywanie tej operacji na tzw. uogólnionym wektorze Blocha. We wcześniejszym rozdziale została wprowadzona baza Hilberta-Schmidta. Jest to zbiór macierzy, zawierających macierz jednostkową i d_A^2-1 bezśladowych macierzy ortoznormalizowanych w sensie iloczynu skalarnego Hilberta-Schmidta, czyli

$$\operatorname{Tr}(\Gamma_i\Gamma_j) = C\delta_{ij}, \tag{202}$$

gdzie C jest pewną stała normalizacyjną. Można rozpisać A jako:

$$A = \sum_{i=0}^{d_A^2-1} \sigma_i\Gamma_i = \sigma\Gamma \tag{203}$$

$$\sigma := \{\sigma_0, \sigma_1, \dots\} \tag{204}$$

$$\Gamma := \{\Gamma_0, \Gamma_1, \dots\}^T \tag{205}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{C}\operatorname{Tr}[A\Gamma_i]. \tag{206}$$

Standardowo, gdy mówi się o wektorze Blocha, narzucony jest warunek normalizacji śladu $\operatorname{Tr} A = 1$ co wyznacza $\sigma_0 = \frac{1}{d_{A_1A_2\cdots}}$, który nie jest włączany do wektoru Blocha σ. Tutaj jednak można mieć do czynienia z nieznormalizowanymi macierzami, więc wyraz σ_0 jest nieokreślony i wraz z macierzą jednostkową włączony do odpowiednich wektorów. Jako bazę w celu obliczania ${}_XA$ wybrano uogólnione macierze Gell-Manna (UMG) [26]; są one uogólnieniem macierzy Pauliego na więcej wymiarów. Macierze te dzieli się na trzy grupy definiowane następująco:

- $\frac{d(d-1)}{2}$ Symetrycznych UMG

$$\Gamma_{ij}^S = |i\rangle\langle j| + |j\rangle\langle i|, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant d. \tag{207}$$

- $\frac{d(d-1)}{2}$ Antysymetrycznych UMG

$$\Gamma_{ij}^A = -\mathbf{i}|i\rangle\langle j| + \mathbf{i}|j\rangle\langle i|, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant d. \tag{208}$$

- $(d-1)$ Diagonalnych UMG

$$\Gamma_i = \sqrt{\frac{2}{i(i+1)}}\left(\sum_{j=1}^{i}|j\rangle\langle j| - i|i+1\rangle\langle i+1|\right), \quad 1 \leqslant l \leqslant d-1 \tag{209}$$

Przez pogrubione **i** oznaczono jednostkę urojoną. UMG spełnia następująca relację ortoznormalizowania: $\operatorname{Tr}\Gamma_i\Gamma_j = 2\delta_{ij}$. W [26] wyprowadzono następujące rozwinięcie standardowych macierzy ($|i\rangle\langle j|$) w bazie UMG:

$$|i\rangle\langle j| = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^S + i\Gamma_{ij}^A\right), & \text{dla } i < j \\ \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ji}^S - i\Gamma_{ji}^A\right), & \text{dla } i > j \\ -\sqrt{\frac{j-1}{2j}}\Gamma_{j-1} + \sum_{n=0}^{d-j-1}\frac{1}{\sqrt{2(j+n)(j+n+1)}}\Gamma_{j+n} + \frac{1}{d}\mathbb{1}, & \text{dla } j = k. \end{cases} \tag{210}$$

Łatwo zauważyć, że posiadając ortogonalną bazę w systemie A $\{\Gamma_i^A\}$ i bazę w B $\{\Gamma_j^B\}$ macierze $\{\Gamma_i \otimes \Gamma_j\}$ tworzą bazę w $A \otimes B$, ponieważ:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\left[(\Gamma_i^A \otimes \Gamma_j^B)(\Gamma_e^A \otimes \Gamma_f^B)\right] && (211)\\ &= \mathrm{Tr}\left[\Gamma_i^A\Gamma_e^A \otimes \Gamma_j^B\Gamma_f^B\right] && (212)\\ &= \mathrm{Tr}\left[\Gamma_i^A\Gamma_e^A\right]\ \ \mathrm{Tr}\left[\Gamma_j^B\Gamma_f^B\right] && (213)\\ &= CD\delta_{ie}\delta_{jf}. && (214)\end{aligned}$$

Korzystając z tego wyniku jako bazę w $P\otimes A_1\otimes A_2\otimes B_1\otimes B_2\otimes F$ można wybrać $\{\Gamma_i\otimes\Gamma_j\otimes\Gamma_k\otimes\Gamma_l\otimes\Gamma_e\otimes\Gamma_f\}$, gdzie poszczególne macierze są UMG o odpowiednim wymiarze. Macierz ta skrótowo będzie nazywana Γ_{ijklef}. Można teraz zapisać:

$$W = \sum_{ijklef} \sigma_{ijklef}\Gamma_{ijklef} = \sigma\Gamma. \tag{215}$$

Rozpisując W w bazie $|i\rangle\langle j|$ otrzymuje się

$$W = \sum_{ij} \alpha_{ij}|i\rangle\langle j|. \tag{216}$$

Następnie zauważa się, że

$$|m\rangle^A|n\rangle^B\langle i|^A\langle j|^B = |d_A\ m+n\rangle^{AB}\langle d_A\ i+j|^{AB}. \tag{217}$$

Wnioskiem płynącym z łączności iloczynu tensorowego jest fakt, że baza CB w przestrzeni więcej wymiarowej jest iloczynem tensorowym baz CB w poszczególnych podsystemach. Rozważa się dalej, jak wygląda wektor Blocha macierzy typu $|i\rangle\langle j|$. Widać, że:

$$A \otimes B = (\sigma^A\Gamma^A) \otimes (\sigma^B\Gamma^B) = (\sigma^A \otimes \sigma^B)(\Gamma^A \otimes \Gamma^B). \tag{218}$$

Co przekładając na macierz $|i\rangle\langle j|$ daje:

$$|i\rangle\langle j| = |ijklef_1\rangle\langle ijklef_2| = \sigma_{ijklef}\Gamma = (\sigma_i \otimes \sigma_j \otimes \sigma_k \otimes \sigma_l \otimes \sigma_e \otimes \sigma_f)\Gamma. \tag{219}$$

Z równania (210) widać, że wyrazy typu $|i\rangle\langle j|$ dla $i \neq j$ mają stałą ($O(1)$) liczbę niezerowych współrzędnych σ_i i jest ich $O(d^2)$ dla ogólnej macierzy, zaś wyrazy, gdzie $i = j$ mają $O(d)$ niezerowych wyrazów, ale jest ich tylko $O(d)$, więc policzenie ich wkładu dla dowolnej macierzy również zajmuje $O(d^2)$ czasu. Co pokazuje, że policzenie wektora Blocha dla bazy UMG zajmuje $O(d^2)$ czasu. Korzystając z analogicznego argumentu można pokazać, że odwrotna transformacja działa również w $O(d^2)$. Dalej zostanie pokazane, że obliczenia wektora Blocha dla baz składających się z $O(1)$ iloczynów tensorowych baz UMG również jest kwadratowy względem wymiaru systemu złożonego. Widać to od razu, gdy rozważy się, ile czasu zajmuje obliczenie wektora Blocha następującej macierzy:

$$|i\rangle\langle i| \otimes |j\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l| \otimes |e\rangle\langle f|, \quad \text{gdzie } k \neq l, e \neq f. \tag{220}$$

Wyrazy typu zaprezentowanego powyżej mają $O(d_1d_2)$ i jest ich w rozkładzie pewnej ogólnej macierzy $O(d_1d_2d_3^2d_4^2)$. Widać, że wyrazy typu $|i\rangle\langle i|$ kontrybuują liniową liczbę wyrazów do wektora Blocha i jest ich liniowa liczba, zaś wyrazy typu $|i\rangle\langle j|$ dają stała liczbę wyrazów, lecz jest ich kwadratowa liczba, a dla systemów złożonych złożoność widocznie się faktoryzuje. Sumując po wszystkich ustawieniach wyrazów diagonalnych i niediagonalnych otrzymuje się $O(1)$ wyrazów $O(d^2)$, czyli ostatecznie złożoność obliczania rozkładu to $O(d^2)$. Można zdefiniować operację

$$({}^X\sigma)\Gamma = {}_X(\sigma\Gamma), \tag{221}$$

której jawne działanie jest bardzo proste, a mianowicie dla pewnego wektora Blocha opisującego stan systemu złożonego $A \otimes X \otimes B$ mapuje ona ijk-ty element wektora do

$$\sigma_{ijk} \mapsto \delta_{j0}\sigma_{ijk}. \tag{222}$$

Korzystając z następującej obserwacji:

$$\begin{aligned} {}_X({}_Y A) &= {}_X({}_Y \sum_{ijk} \alpha_{ijk}\sigma_i^X \otimes \sigma_j^Y \otimes \sigma_k^Z) \\ &= {}_X \sum_{ik} \alpha_{i0k}\sigma_i^X \otimes \mathbb{1}^Y \otimes \sigma_k^Z = \sum_k \alpha_{i00}\mathbb{1}^X \otimes \mathbb{1}^Y \otimes \sigma_k^Z = {}_{XY}A. \end{aligned} \tag{223}$$

Zaaplikowanie projektora L_V sprowadza się do wykonania $O(1)$ operacji na $O(d^2)$ elementach wektory Blocha, czyli złożoność znów jest kwadratowa. Warto jeszcze podkreślić, że ze względu na rzadkość wektorów Blocha wskazanym jest trzymanie go w postaci par $\{(\sigma_{ijklef}, \Gamma_{ijklef})\}$, lub innym rzadkim formacie, w celu osiągnięcia odpowiedniej złożoności przy wykonywanie wielu obliczeń projektorów macierzy standardowych.

Dodatek B Jawna postać $\Pi_{L_V^\perp}$

Operator $\Pi_{L_V^\perp}$ definiuje się następująco:

$$\forall i,j\ \Pi_{L_V^\perp}||i\rangle\langle j|\rangle\rangle = |L_V^\perp(|i\rangle\langle j|)\rangle\rangle. \tag{224}$$

Dalej przytaczając argument z poprzedniego dodatku o CB zapisać można:

$$||i\rangle\langle j|\rangle\rangle = |i\rangle|j\rangle = |id_a + j\rangle = |e\rangle. \tag{225}$$

Widać z tego, że postać CJ macierzy standardowej to wektor CB w innej przestrzeni. Definiuje się wektor $|\pi_e\rangle = |L_V^\perp(|i\rangle\langle j|)\rangle\rangle$. Zauważa się teraz, że

$$\Pi_{L_V^\perp}|e\rangle = |\pi_e\rangle, \tag{226}$$

czyli macierz $\Pi_{L_V^\perp}$ mapuje wektory bazowe CB na pewne inne wektory co z definicji macierzy mówi, że e-ta kolumna macierzy $\Pi_{L_V^\perp}$ to wektor $|\pi_e\rangle$. Trzeba dalej zauważyć jednakże, że niewskazane jest trzymanie macierzy $\Pi_{L_V^\perp}$ w gęstej reprezentacji, gdzie każde pole macierzy ma swoją jawną reprezentację w pamięci. Niemożliwość tego może uświadomić następująca obserwacja: łatwo sprawdzić, że macierz ta ma $O(d^4)$ elementów. W przypadku projektora odpowiadającego macierzy przedstawionej w trzecim rozdziale zajmowałaby ona ok. 410TB pamięci w przypadku podwójnej precyzji. Przytaczając argument z dodatku A wiadome jest, że macierz ta ma $O(d^2)$ niezerowych elementów. Konieczna więc jest reprezentacja tej macierzy w rzadkim formacie np. skompresowanym formacie kolumnowym.
$\mathcal{W}_{sep}$ $\mathcal{W}_{nsep}$
$\{U_i\}$