

## MARATHON D'ORSAY DE MATHÉMATIQUES

Mars 2025

Voici les énoncés des derniers problèmes de la saison 2024–2025 du Marathon d'Orsay de Mathématiques, dont les solutions sont attendues au plus tard le **mardi 15 avril 2025 à 23h59** par email à [marathon.orsay.math@gmail.com](mailto:marathon.orsay.math@gmail.com).

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email.

### Problème 9 (semi et complet)

Trouver tous les couples  $(x, y)$  d'entiers strictement positifs satisfaisant l'équation

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (x + y)^2 - 1.$$

### Problème 10 (semi et complet)

Julie place sur une droite cinq points  $J, U, L, I$  et  $E$  régulièrement espacés :  $|JU| = |UL| = |LI| = |IE|$ . Elle choisit un point  $P$  extérieur à la droite, puis trouve le centre  $O_1$  du cercle circonscrit au triangle  $JIP$  ainsi que le centre  $O_2$  du cercle circonscrit au triangle  $UEP$ . Julie trace ensuite les droites  $O_1O_2$  et  $PL$ , et remarque que celles-ci sont perpendiculaires. Après mûre réflexion, Julie se convainc qu'il ne s'agit pas d'une coïncidence. Montrez comme Julie que  $O_1O_2$  et  $PL$  se coupent à angle droit, quels que soient les points  $J, U, L, I, E$  et  $P$  choisis comme ci-dessus.

### Problème 11 (complet)

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfont à l'équation

$$f(2^x + 2y) = 2^y f(f(x)) f(y)$$

quels que soient  $x, y \in \mathbb{R}$ .

### Problème 12 (complet)

Bastien considère le plan muni de coordonnées cartésiennes associées à un repère ortho-normé. Il veut tracer dans ce plan un triangle équilatéral avec des côtés d'une longueur au moins égale à 1, tel que chacun de ses trois sommets est à une distance au plus  $\frac{1}{2025}$  d'un point à coordonnées entières. Aidez Bastien en lui montrant que cela lui sera possible, mais que les côtés de son triangle auront forcément une longueur strictement supérieure à 253.