Problème 11

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x, \forall y, \quad f\left(2^x + 2y\right) = 2^y f\left(f(x)\right) f(y) \tag{1}$$

Posons $x = 0$ dans (1), on obtient :

$$\forall y, \quad f\left(1 + 2y\right) = 2^y f\left(f(0)\right) f(y) \tag{2}$$

Posons $y = 0$ dans (1), on obtient :

$$\forall x, \quad f\left(2^x\right) = f\left(f(x)\right) f(0) \tag{3}$$

D'après (2), si $f(0) = 0$, alors $f\left(f(0)\right) = 0$ donc :

$$\forall t, f(t) = f\left(1 + 2 \cdot \frac{t-1}{2}\right) = 0 \implies f = 0$$

Supposons maintenant que $f(0) \neq 0$.
Considérons dans (1) les cas $x = a$, $y = 2^{b-1}$ et $x = b$, $y = 2^{a-1}$, alors :

$$\begin{aligned} f\left(2^a + 2^b\right) &= f\left(2^a + 2 \cdot 2^{b-1}\right) = 2^{2^{b-1}} f\left(f(a)\right) f\left(2^{b-1}\right) \\ &= 2^{2^{b-1}} f\left(f(a)\right) f\left(f(b-1)\right) f(0) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} f\left(2^b + 2^a\right) &= f\left(2^b + 2 \cdot 2^{a-1}\right) = 2^{2^{a-1}} f\left(f(b)\right) f\left(2^{a-1}\right) \\ &= 2^{2^{a-1}} f\left(f(b)\right) f\left(f(a-1)\right) f(0) \end{aligned} \tag{5}$$

Comparons les équations (4) et (5). Prenons $b = a + 1$:

$$\begin{aligned} f\left(2^a + 2^{a+1}\right) &= 2^{2^a} \left(f\left(f(a)\right)\right)^2 f(0) \\ = f\left(2^{a+1} + 2^a\right) &= 2^{2^{a-1}} f\left(f(a+1)\right) f\left(f(a-1)\right) f(0) \end{aligned} \tag{6}$$

Comme $f(0) \neq 0$, on peut simplifier par $f(0)$ et $2^{2^{a-1}}$:

$$2^{2^{a-1}} \left(f\left(f(a)\right)\right)^2 = f\left(f(a+1)\right) f\left(f(a-1)\right) \tag{7}$$

En divisant les deux membres de l'équation par $2^{2^{a-1}} 2^{2^{a+1}}$ on obtient :

$$\frac{\left(f\left(f(a)\right)\right)^2}{2^{2^{a+1}}} = \frac{\left(f\left(f(a)\right)\right)^2}{\left(2^{2^a}\right)^2} = \frac{f\left(f(a+1)\right)}{2^{2^{a+1}}} \frac{f\left(f(a-1)\right)}{2^{2^{a-1}}} \tag{8}$$

Posons $g(n) = f(f(n))$, et $h(n) = \dfrac{g(n)}{2^{2^n}}$. Alors (8) devient :

$$h(n)^2 = h(n+1)h(n-1), \quad h(0) = \frac{f(f(0))}{2} \tag{9}$$

Si $h(0) = 0 \iff f(f(0)) = 0$, alors d'après (2), on a :

$$\forall y, \quad f(1 + 2y) = 2^y f(f(0)) f(y) = 0 \implies f = 0$$

Supposons maintenant que $h(0) \neq 0$, c'est-à-dire $f(f(0)) = g(0) \neq 0$.
On démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(f(n)) \neq 0$.

À partir de (4) et (5), on a pour tout a, b :

$$2^{2^{b-1}-2^{a-1}} f(f(a))f(f(b-1)) = f(f(b))f(f(a-1)) \tag{10}$$

Posons $a = 0, b = 1$ dans (10), on a :

$$2^{1/2}\left(f\left(f(0)\right)\right)^2 = f(f(1))f(f(-1)) \implies f(f(1)) \neq 0$$

Par récurrence sur (10) avec $a = n, b = n+1$, on montre :

$$f(f(n)) \neq 0 \implies f(f(n+1)) \neq 0 \implies \forall n, \quad h(n) \neq 0$$

Dès lors, la suite $h(n)$ vérifie la relation (9) avec $h(n) \neq 0$. Cela implique que h est une suite géométrique :

$$\exists k \neq 0, \quad h(n) = h(0) \cdot k^n$$

Posons $A = f(f(0)) \neq 0$, alors selon la définition de h en (9) on a :

$$f(f(n)) = 2^{2^n} h(n) = 2^{2^n} \cdot h(0) \cdot k^n = 2^{2^n-1} A k^n \tag{11}$$

D'après (3), on a :

$$f(2^n) = f(f(n))f(0) = 2^{2^n-1} A k^n f(0) \tag{12}$$

On souhaite également déterminer k, afin de pouvoir estimer $f(2^n)$. Pour cela, on envisage de construire une équation contenant k.

Remplaçons dans (5) avec $a = b = n$, avec n un entier naturel quelconque et on obtient :

$$\begin{aligned} f(2^{n+1}) = f(2^n + 2^n) &= 2^{2^{n-1}} f(f(n))f(2^{n-1}) \\ &= 2^{2^{n-1}} \cdot \frac{f(2^n)}{f(0)} \cdot f(2^{n-1}) \end{aligned} \tag{13}$$

En utilisant (12) dans (13), on obtient :

$$\begin{aligned} f(2^{n+1}) &= 2^{2^{n-1}} \cdot \frac{2^{2^n-1} A k^n f(0)}{f(0)} \cdot 2^{2^{n-1}-1} A k^{n-1} f(0) \\ &= 2^{2^{n-1}+2^n-1+2^{n-1}-1} A^2 k^{2n-1} f(0) \qquad (14) \\ &= 2^{2^{n+1}} \frac{A^2}{4} k^{2n-1} f(0) \qquad (15) \end{aligned}$$

D'un autre côté, (12) donne aussi :

$$f(2^{n+1}) = 2^{2^{n+1}-1} A k^{n+1} f(0)$$

On a donc l'égalité :

$$2^{2^{n+1}} \frac{A}{2} k^{n+1} f(0) = 2^{2^{n+1}} \frac{A^2}{4} k^{2n-1} f(0)$$

On simplifie car on a supposé que $A \neq 0$ et $f(0) \neq 0$:

$$2 = A k^{n-2}$$

Ceci est valide pour tout n. Mais le membre de droite dépend de n, tandis que le membre de gauche est constant. Contradiction.

Donc l'hypothèse $f(f(0)) \neq 0$ est fausse. Il en résulte :

$$f(0) \neq 0 \implies f(f(0)) = 0 \implies f = 0$$

On a démontré que $\forall x, \forall y, \quad f\left(2^x + 2y\right) = 2^y f\left(f(x)\right) f(y) \implies f = 0$.

Et il est trivial que $f = 0 \implies \forall x, \forall y, \quad f\left(2^x + 2y\right) = 2^y f\left(f(x)\right) f(y)$.

Conclusion : La seule fonction f qui satisfait l'identité donnée est :

$$\boxed{f = 0}$$