Problème 9

On considère l'inégalité suivante :

$$(x^2-1)(y^2-1) > (x+y)^2-1 \iff x^2y^2 > 2(x^2+y^2)+2xy-2.$$

On sait que $x^2+y^2 \geqslant 2xy \quad \forall x,y$, donc si

$$x^2y^2 > 3(x^2+y^2),$$

alors on a :

$$x^2y^2 > 2(x^2+y^2)+2xy-2 \implies (x^2-1)(y^2-1) > (x+y)^2-1.$$

Si $x=1$ ou $y=1$, alors

$$(x^2-1)(y^2-1)=0, \quad \text{et} \quad (x+y)^2-1>1 \implies (x^2-1)(y^2-1) \neq (x+y)^2-1.$$

Pour $x=2, y=2$,

$$(x^2-1)(y^2-1)=9 \neq (x+y)^2-1=15.$$

Pour $x=2, y=3$ ou $x=3, y=2$,

$$(x^2-1)(y^2-1)=24=(x+y)^2-1=24.$$

Si $x \geqslant 3$ et $y \geqslant 3$, alors

$$3\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) \leqslant \frac{6}{9} < 1 \iff x^2y^2 > 3(x^2+y^2) \implies (x^2-1)(y^2-1) > (x+y)^2-1.$$

Ainsi, les couples (x,y) qui vérifient $(x^2-1)(y^2-1)=(x+y)^2-1$ sont $(2,3)$ et $(3,2)$.