# Problème 10

On utilise la méthode analytique.
$J=(-2,0), \quad U=(-1,0), \quad L=(0,0), \quad I=(1,0), \quad E=(2,0), \quad P=(x,y).$
Soient $O_1=(x_0,y_0)$ le centre du cercle circonscrit à $\triangle JIP$, et $O_2=(x_0',y_0')$ celui de $\triangle UEP$.
Considérons le triangle $JIP$ : $(x_1,y_1)=J=(-2,0),\ (x_2,y_2)=I=(1,0)$.
Par définition du cercle circonscrit, $O_1$ est sur la médiatrice de $JI$, donc

$$x_0=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Si $y\neq 0$, on a :

$$|PO_1|=|O_1J| \implies (x+\tfrac{1}{2})^2+(y-y_0)^2=(\tfrac{3}{2})^2+y_0^2,$$

ce qui donne :

$$y_0=\frac{1}{2y}(x^2+y^2+x-2).$$

Considérons ensuite le triangle $UEP$ : $(x_1',y_1')=U=(-1,0),\ (x_2',y_2')=E=(2,0)$.
De même,

$$x_0'=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}.$$

Si $y\neq 0$, on a :

$$|PO_2|=|O_2U| \implies (x-\tfrac{1}{2})^2+(y-y_0')^2=(\tfrac{3}{2})^2+{y_0'}^2,$$

d'où :

$$y_0'=\frac{1}{2y}(x^2+y^2-x-2).$$

La pente de la droite $O_1O_2$ est :

$$k=\frac{y_0'-y_0}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{-2x}{2y}=-\frac{x}{y},$$

et la pente de $PL$ est :

$$k_0=\frac{y}{x}.$$

Donc,

$$kk_0=-1 \implies O_1O_2\perp PL.$$

Lorsque $y=0$, les points $P,J,I,U,E$ sont alignés, donc ne forment pas de triangle.
La démonstration est terminée.