Problème 12

On va d'abord retirer des informations des conditions nécessaires de l'existence d'un tel triangle demandé.

Supposons qu'il existe un triangle *équilatéral* satisfaisant les conditions, de côté $d \geqslant 1$, dont les sommets sont A, B et C.

Soient $J = (m_1, n_1), K = (m_2, n_2), M = (m_3, n_3)$ trois points à coordonnées entières, situés respectivement à une distance inférieure à $\frac{1}{2025}$ de A, B, C, c'est-à-dire :

$$0 \leqslant |A - J|, |B - K|, |C - M| \leqslant \frac{1}{2025}, \quad \text{et } |A - B| = |B - C| = |C - A| = d$$

Par inégalité triangulaire, on a :

$$d - \frac{2}{2025} \leqslant |J - K| \leqslant d + \frac{2}{2025}.$$

De même,

$$d - \frac{2}{2025} \leqslant |K - M| \leqslant d + \frac{2}{2025}, \quad d - \frac{2}{2025} \leqslant |M - J| \leqslant d + \frac{2}{2025}.$$

D'où :

$$(d - \frac{2}{2025})^2 \leqslant (m_i - m_j)^2 + (n_i - n_j)^2 \leqslant (d + \frac{2}{2025})^2, \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, i \neq j. \tag{1}$$

Preuve qu'il n'existe pas de triangle équilatéral dont tous les sommets sont des points entiers

Supposons que les trois sommets A, B, C soient à coordonnées entières. Complétons ce triangle équilatéral en un rectangle $DEFG$ dont les côtés sont parallèles aux axes. Comme le triangle a 3 sommets et que le rectangle a 4 côtés, il existe un sommet du triangle qui coïncide avec un sommet du rectangle. Supposons que $C = F$.

Comme A, B, C sont entiers, alors les longueurs $a = |AD|, b = |DB|, c = |BE|, d = |EF|, e = |FG|, f = |GA|$ sont des entiers strictement positifs.

Ainsi l'aire du rectangle $S_{DEFG} \in \mathbb{N}$, et les aires $S_{ADB}, S_{BEF}, S_{AGF}$ aussi.

Donc $S_{ABF} = S_{DEFG} - S_{ADB} - S_{BEF} - S_{AGF} \in \mathbb{N}^*$.

Mais la longueur $l = |AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$ donne :

$$S_{ABF} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2), \quad a^2 + b^2 \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \implies S_{ABF} \notin \mathbb{N}^*,$$

ce qui est une contradiction.

Donc, il n'existe pas de triangle à sommets tous entiers.

Minoration de d

Montrons maintenant que si un triangle satisfaisant les conditions existe, alors $d > 253$.

$$(d + \frac{2}{2025})^2 - (d - \frac{2}{2025})^2 < 1 \iff \frac{8d}{2025} < 1 \iff d < 253{,}125.$$

Supposons $d \leqslant 253$, alors :

$$(d + \frac{2}{2025})^2 - (d - \frac{2}{2025})^2 < 1, \implies \exists! k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } k \in [(d - \frac{2}{2025})^2, (d + \frac{2}{2025})^2]$$

L'existence de k est du à (1) où $(m_i - m_j)^2 + (n_i - n_j)^2 \in \mathbb{N}^*$. L'unicité est due à l'étroitesse de cette intervalle car si elle comprenait deux entiers différents alors sa longueur serait au moins 1.

Donc $(m_i - m_j)^2 + (n_i - n_j)^2 = k, \ \forall i \neq j$.

Cela implique que JKM est un triangle équilatéral à sommets entiers (d'où la motivation de la preuve précédente) $\implies$ contradiction.

Donc, si un tel triangle existe, alors $d > 253$.

Existence d'un tel triangle

Maintenant, nous allons montrer que si d est suffisamment grand, un tel triangle existe réellement.

Soient$A = (-\delta, 0), \ B = (\delta, 0), \ C = (0, \sqrt{3}\delta)$. ABC forme un triangle équilatéral. Donc il suffit de montrer qu'il existe $\delta \in \mathbb{Z}$ tel que $\{\sqrt{3}\delta\} \leqslant \frac{1}{2025}$

Il suffit de prouver l'existence d'une suite d'entiers $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\{\sqrt{3} b_n\} \to 0$.

Définissons $\alpha_n := \{\sqrt{3}n\}$. Alors α_n est une suite bornée dans $[0, 1]$, donc il existe une sous-suite convergente (α_{n_k}).

Comme toute suite réelle bornée convergente admet une sous-suite monotone convergente, donc α_n admet une telle sous-suite

$$d_m := \{\sqrt{3} a_m\} \text{ où } a_m := n_{k_m} \text{ croissante}$$

Dans la démonstration suivante, n'oublions pas que (d_n) est monotone et convergente.

Notation : On note

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \text{ la partie entière (arrondi vers } -\infty) \text{ d'un réel } x$$

$$\text{et } 0 \leqslant \{x\} < 1 \text{ la partie décimale de } x$$

On a donc $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, et $\lfloor x \rfloor$ croissante.

Lemme :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \{\alpha\} \geqslant \{\beta\} \implies \lfloor \alpha - \beta \rfloor \geqslant \lfloor \alpha \rfloor - \lfloor \beta \rfloor$$

Preuve :

Soit $\alpha = p_1 + r_1, \beta = p_2 + r_2, \quad p_1, p_2 \in \mathbb{Z}, r_1, r_2 \in [0, 1[, r_1 = \{\alpha\} \geqslant r_2 = \{\beta\}$.

Ainsi, $r_1 \geqslant r_2 \implies \lfloor p_1 - p_2 + (r_1 - r_2) \rfloor \geqslant \lfloor p_1 - p_2 \rfloor = p_1 - p_2$.

Donc, $\lfloor \alpha - \beta \rfloor \geqslant \lfloor \alpha \rfloor - \lfloor \beta \rfloor$.

Corollaire :$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \{\alpha\} \geqslant \{\beta\} \implies \{\alpha - \beta\} \leqslant \{\alpha\} - \{\beta\} = |\{\alpha\} - \{\beta\}|$.

Cas croissant : si (d_n) est croissante, on pose $b_n := a_{n+1} - a_n \in \mathbb{N}^*$, alors on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \{\sqrt{3} b_n\} = \{\sqrt{3}(a_{n+1} - a_n)\} \leqslant |\{\sqrt{3} a_{n+1}\} - \{\sqrt{3} a_n\}| = |d_{n+1} - d_n|.$$

Soit $\alpha := \sqrt{3} a_{n+1}, \beta := \sqrt{3} a_n, \quad \{\alpha\} \geqslant \{\beta\}$ car (d_n) est croissante. Par conséquent, d'après le corollaire du lemme, l'assertion est vérifiée. Donc

$$(d_n) \text{ est convergente} \implies |\{\sqrt{3} a_{n+1}\} - \{\sqrt{3} a_n\}| \to 0 \implies \{\sqrt{3} b_n\} \to 0,$$

ce qui implique $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\{\sqrt{3} b_m\} < \frac{1}{2025}$

Cas décroissant : En reprenant les notations précédentes $\alpha := \sqrt{3} a_{n+1}, \beta := \sqrt{3} a_n, \quad \{\alpha\} \leqslant \{\beta\}$ car (d_n) est décroissante.

On a

$$\{\alpha\} \leqslant \{\beta\} \iff \{-\alpha\} = 1 - \{\alpha\} \geqslant 1 - \{\beta\} = \{-\beta\}$$

Soit $\alpha' = -\alpha, \ \beta' = -\beta \implies \{\alpha'\} \geqslant \{\beta'\}$.

Ainsi, pour tout n, on a :

$$\{\sqrt{3}(a_n - a_{n+1})\} = \{\alpha' - \beta'\} \leqslant |\{\alpha'\} - \{\beta'\}| = |1 - \{\alpha\} - 1 + \{\beta\}| = |\{\beta\} - \{\alpha\}|$$
$$= |\{\sqrt{3}a_n\} - \{\sqrt{3}a_{n+1}\}| = |d_n - d_{n+1}| = |d_{n+1} - d_n|$$

Soit $b'_n := a_n - a_{n+1} \in \mathbb{Z}$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \{\sqrt{3}b'_n\} = \{\sqrt{3}(a_n - a_{n+1})\} \leqslant |\{\sqrt{3}a_{n+1}\} - \{\sqrt{3}a_n\}|$$

Ce qui implique comme dans le cas dernier :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ \{\sqrt{3}b'_n\} < \varepsilon \implies \exists m \in \mathbb{N}^*,\ \{\sqrt{3}b'_m\} < \frac{1}{2025}$$

Conclusion :

$$\exists \delta \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \{\sqrt{3}\delta\} < \frac{1}{2025}.$$

On prend alors $A = (-\delta, 0)$, $B = (\delta, 0)$, $C = (0, \sqrt{3}\delta)$: ABC est un triangle *équilatéral* conforme aux conditions.

Ainsi, les deux idées de Bastien sont vérifiées.

Fin de la preuve.