Correction Personnelle du TD1

Pion

23 septembre 2024

Introduction

Ce document est avant tout une expérience pour tester ma capacité à rédiger en LaTeX. Au passage, ne fais pas trop de confiance à mes réponses ainsi que les expressions utilisées, je ne suis pas francophone et c'est probable que je me trompe. J'abandonne la suite parce que vous pourriez trouver le plus complet sur discord. Merci.

Exercice 1.

Mettre sous forme algébrique $(a + ib)$ les nombres complexes suivants :

(1) $z_1 = (1+i)(2-i)(3+i)$

(2) $z_2 = \dfrac{-2}{1+3i}$

(3) $z_3 = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{1-i}{2-5i}$

(4) $z_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} (2i)^k$

Correction possible

(1) $z_1 = (1+i)(2-i)(3+i) = \left(2 - i + 2i - i^2\right)(3+i) = (3+i)(3+i) = 9 + 6i + i^2 = 8 + 6i$

(2) Notons que pour le nombre complexe $z = a + ib$ dont $a, b \in \mathbb{R}$, l'inverse de z est défini par

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2},$$

vu que $z \cdot \dfrac{\overline{z}}{\|z\|^2} = 1$.

Ainsi, étant donné $z_2 = \dfrac{-2}{1+3i}$, nous avons

$$z_2 = (-2) \cdot \frac{1-3i}{1^2+3^2} = \frac{-2 \cdot (1-3i)}{10} = \frac{-2+6i}{10} = \frac{-1+3i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$$

(3)

$$\begin{aligned}
z_3 &= \frac{2+5i}{1-i} + \frac{1-i}{2-5i} \\
&= \frac{(2+5i)(1+i)}{1+1} + \frac{(1-i)(2+5i)}{4+25} \\
&= \frac{-3+7i}{2} + \frac{7+3i}{29} \\
&= -\frac{73}{58} + \frac{209i}{58}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
z_4 &= \sum_{k=0}^{6} (2i)^k, \\
2iz_4 &= 2i\sum_{k=0}^{6} (2i)^k = \sum_{k=0}^{6} (2i)^{k+1} = \sum_{t=1}^{7} (2i)^t \\
&= \sum_{t=1}^{6} (2i)^t + (2i)^7 = \sum_{t=1}^{6} (2i)^t + 128 \cdot i^{4+3} \\
&= \sum_{t=1}^{6} (2i)^t - 128i
\end{aligned}$$

$$z_4 - 2iz_4 = \sum_{k=0}^{6} (2i)^k - \sum_{t=1}^{7} (2i)^t = \sum_{k=0}^{6} (2i)^k - \sum_{t=1}^{6} (2i)^t + 128i = 1 + 128i$$

$$(1-2i)z_4 = 1 + 128i \quad \therefore \quad z_4 = \frac{1+128i}{1-2i} = -51 + 26i$$

Soit on utilise directement la formule de la somme d'une suite géométrique, à savoir :

$$S_n = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}, \quad \text{si} \quad r \neq 1$$

où S_n est la somme des n premiers termes, a est le premier terme et r est la raison de la suite géométrique, qui donne le même résultat.

Exercice 2.

Soit z un nombre complexe de module 1. Calculer $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

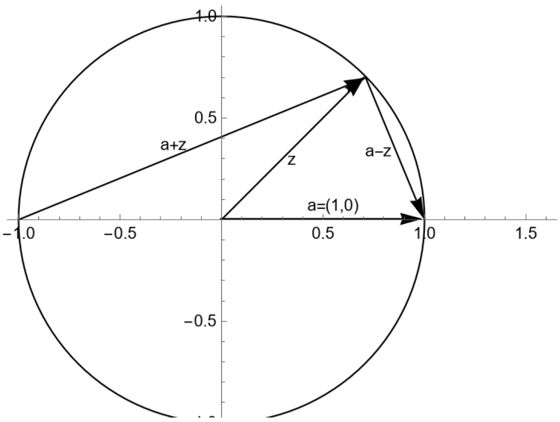

FIGURE 1 – Exercice2

Correction possible : Méthode algébrique

Pour les nombres complexes z, z_1, z_2, notons qu'on a :

$$|z|^2 = z\overline{z}$$
$$z + \overline{z} = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Ici, $\quad |z| = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = |z|^2 = z\overline{z}, \quad$ donc

$$\begin{aligned} |1+z|^2 &= (1+z)\,\overline{1+z} = (1+z)\,(1+\overline{z}) \\ &= 1 + z + \overline{z} + z\overline{z} = 2 + \mathrm{Re}(z) \\ |1-z|^2 &= (1-z)\,\overline{1-z} = (1-z)\,(1-\overline{z}) \\ &= 1 - z - \overline{z} + z\overline{z} = 2 - \mathrm{Re}(z) \\ |1+z|^2 + |1-z|^2 &= 2 + \mathrm{Re}(z) + 2 - \mathrm{Re}(z) = 4 \end{aligned}$$

Correction possible : Méthode géométrique

Comme le montre ci-dessus la figure Exercice 2, le point d'arrivée du vecteur z est sur le cercle, et la ligne reliant le point de départ du vecteur $\mathbf{a} + z$ et le point d'arrivée du vecteur $\mathbf{a} - z$ est le diamètre du cercle. Ainsi, nous obtenons un triangle rectangle avec une hypotenuse de longueur 2. On aboutit ensuite au même résultat qu'avant selon le théorème de Pythagore.

Exercice 3.

Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1.
(1) Développer $\overline{abc}(ab + bc + ca)$
(2) En déduire que $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$.

Correction possible

On a :
$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad |z| = z \cdot \overline{z} \quad \Longrightarrow \quad |z_1 z_2| = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} = |z_1| \cdot |z_2|$. On a encore : $|z| = |\overline{z}|$.
Considérons que $|a| = |b| = |c| = 1$, donc $|ab| = |bc| = |ac| = 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\overline{abc} \cdot (ab + bc + ca) &= \overline{abc} \cdot ab + \overline{abc} \cdot bc + \overline{abc} \cdot ca \\
&= \overline{ab} \cdot ab \cdot \overline{c} + \overline{bc} \cdot bc \cdot \overline{a} + \overline{ac} \cdot ac \cdot \overline{b} \\
&= |ab| \cdot \overline{c} + |bc| \cdot \overline{a} + |ac| \cdot \overline{b} \\
&= \overline{c} + \overline{a} + \overline{b} \\
&= \overline{a + b + c}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left|\overline{abc} \cdot (ab + bc + ca)\right| &= \left|\overline{abc}\right| \cdot |ab + bc + ca| = \left|\overline{a + b + c}\right| \\
\Longrightarrow \quad |ab + bc + ca| &= \frac{\left|\overline{a + b + c}\right|}{\left|\overline{abc}\right|} = \frac{|a + b + c|}{|\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot |\overline{c}|} = \frac{|a + b + c|}{1 \times 1 \times 1} \\
&= |a + b + c| \,.
\end{aligned}$$

Exercice 4.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, déterminer les ensembles E, F, G, H des points M d'affixe z définis par :

(1) $E = \{M(z), |(1 - i)z + 2i| = 9\}$

(2) $F = \left\{M(z), \left|\dfrac{z + 1}{z - 1 + i\sqrt{3}}\right| = 1\right\}$

(3) $G = \{M(z), |1 + iz| = |1 - iz|\}$

(4) $H = \{M(z), \mathrm{Re}\left((1 + i)z\right) = 0\}$

Donner pour chacun des ensembles une interprétation géométrique.

Correction possible

Soit $z = a + bi$ et $M = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(1) $E = \{M(z), |(1-i)z + 2i| = 9\}$

$$\begin{aligned}|(1-i)z+2i| &= |(1-i)(a+bi)+2i| \\ &= |a+b+(b-a+2)i| \\ &= |[(b+1)+(a-1)]+[(b+1)-(a-1)]\,i| \\ &= \sqrt{[(b+1)+(a-1)]^2+[(b+1)-(a-1)]^2}.\end{aligned}$$

Soit $x = a - 1$ et $y = b + 1$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}|(1-i)z+2i| &= \sqrt{(x+y)^2+(y-x)^2} \\ &= \sqrt{2x^2+2y^2}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}&|(1-i)z+2i| = 9 \iff \sqrt{2x^2+2y^2} = 9 \iff 2x^2+2y^2 = 81 \\ &\iff x^2+y^2 = \frac{81}{2} \iff (a-1)^2+(b+1)^2 = \frac{81}{2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, E est l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

$$(a-1)^2+(b+1)^2 = \frac{81}{2}.$$

Donc E représente un cercle de centre $(1, -1)$ et de rayon $\sqrt{\dfrac{81}{2}} = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

(2) $F = \left\{M(z), \left|\dfrac{z+1}{z-1+i\sqrt{3}}\right| = 1\right\}$

$$\left|\frac{z+1}{z-1+i\sqrt{3}}\right| = \frac{|z+1|}{|z-1+i\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{(a+1)^2+b^2}}{\sqrt{(a-1)^2+(b+\sqrt{3})^2}} = 1$$

$$\iff \sqrt{(a+1)^2+b^2} = \sqrt{(a-1)^2+(b+\sqrt{3})^2}$$

$$\iff (a+1)^2+b^2 = (a-1)^2+(b+\sqrt{3})^2$$

$$\iff 2a = -2a+2\sqrt{3}b+3 \iff 4a+2\sqrt{3}b+3 = 0$$

, ce qui donne une droite.

(3) $G = \{M(z), |1+iz| = |1-iz|\}$

$$\text{LHS} = |1 + i(a+bi)| = |1 - b + ai| = \sqrt{(1-b)^2 + a^2}$$

$$\text{RHS} = |1 - i(a+bi)| = |1 + b - ai| = \sqrt{(1+b)^2 + a^2}$$

$$|1+iz| = |1-iz| \iff \sqrt{(1-b)^2 + a^2} = \sqrt{(1+b)^2 + a^2}$$

$$\iff (1-b)^2 + a^2 = (1+b)^2 + a^2 \iff (1-b)^2 = (1+b)^2$$

$$\iff 1 - 2b + b^2 = 1 + 2b + b^2 \iff -2b = 2b \iff b = 0$$

G représente l'axe x.

(4) $H = \{M(z), \mathrm{Re}\,((1+i)z) = 0\}$

$$\mathrm{Re}\,((1+i)z) = \mathrm{Re}\,((1+i)(a+bi)) = \mathrm{Re}\,(a - b + (a+b)i) = a - b = 0$$

$$\iff a = b$$

Donc, H est l'ensemble des points sur la droite $y = x$

Exercice 5.

Calculer les racines carrées de $1, i, 3+4i, 8-6i$, et $7+24i$.

Correction possible

$$1,\ i,\ 3+4i,\ 8-6i$$

(Notes : Signification géométrique de la multiplication des nombres complexes, racine carrée et bisectrice d'angle)

$$\text{Soit } x, c \in \mathbb{C},\ \text{avec } x = a + bi \text{ écrit sous forme de } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

$$x \text{ est une racine carrée de } c \iff x^2 = c$$

$$(a,b)(a,b) = (a^2 - b^2, 2ab) = (1,0) \iff a = \pm 1, b = 0 \iff x = \pm 1$$

$$(a,b)(a,b) = (a^2 - b^2, 2ab) = (0,1) \iff a^2 = b^2 \text{ et } 2ab = 1$$

$$\iff \left(a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \iff x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \vee x = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

(Solution complexe de a et b est abandonnée en fonction de a et b réels.)

$$(a,b)(a,b) = (a^2 - b^2, 2ab) = (3,4) \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

$$\iff \frac{a}{b} = -\frac{1}{2} \text{ (abandonné)} \vee \frac{a}{b} = 2 \iff a = \pm 2, b = \pm 1$$

$$\iff x = 2 + i \vee x = -2 - i$$

$$(a,b)(a,b) = (a^2 - b^2, 2ab) = (8,-6) \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \end{cases}$$

$$\iff \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \text{ (abandonné)} \vee \frac{a}{b} = -3 \iff a = \mp 3, b = \pm 1$$

$$\iff x = -3 + i \vee x = 3 - i$$

Exercice 6.

(1) Donner le module et un argument des nombres complexes suivants :
  (a) $2 + 2i$
  (b) i^{95}
  (c) $\sqrt{3} + 3i$
  (d) $e^{e^{i\alpha}}$
  (e) $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$

(2) Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :
  (a) $(1+i)^5$
  (b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$
  (c) $(1 - \sqrt{3}i)^4$

(3) Calculer le module et l'argument principal de $u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument principal de $w = uv$ et de $z = u/v$.

Correction possible

On a d'abord :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(1) Le calcul de module et des trois premiers arguments étant trop simples,

on les passe.

(d) $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$$e^{e^{i\alpha}} = e^{\cos\alpha + i\sin\alpha} = e^{\cos\alpha}\left(\cos(\sin\alpha) + i\sin(\sin\alpha)\right)$$

$$\therefore\ |e^{e^{i\alpha}}| = e^{\cos\alpha}, \quad \arg\left(e^{e^{i\alpha}}\right) = \sin\alpha$$

(e)

$$e^{i\theta} + e^{2i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$= (\cos\theta + \cos 2\theta) + i\left(\sin\theta + \sin 2\theta\right)$$

$$= 2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + i\left(2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{3\theta}{2} + i\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\therefore\ |e^{i\theta} + e^{2i\theta}| = 2\cos\frac{\theta}{2}, \quad \arg\left(e^{i\theta} + e^{2i\theta}\right) = \frac{3\theta}{2}$$

(2)

(a)

$$(1+i)^5 = \left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]^5 = 4\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^5 = 4\sqrt{2}\left(e^{\frac{5\pi}{4}i}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

(b)

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 = (1+i)^3\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)^6 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6$$

$$= 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}i} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

(c)

$$(1-3i)^4 = \left[2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^4 = 2^4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^4$$

$$= 16\left(e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^4 = 16\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

(3)

$$u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, \quad |u| = \left|\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{2}$$

$$u=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right),\quad \arg(u)=-\frac{\pi}{6}$$

$$|v|=|1-i|=\sqrt{2},\quad v=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),\quad \arg(v)=-\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore |uv|=|u||v|=2,\quad \left|\frac{u}{v}\right|=\left|u\cdot\frac{\overline{v}}{|v|^2}\right|=\frac{|u|}{|v|}=1$$

$$\arg(uv)=\arg(u)+\arg(v)=-\frac{5\pi}{12},\quad \arg\left(\frac{u}{v}\right)=\arg(u)-\arg(v)=\frac{\pi}{12}$$

Exercice 7.

Soit $z=e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
(1) Calculer $1+z+z^2+z^3+z^4$.
(2) On pose $w=z+\bar{z}$. Montrer que $w=z+z^{-1}$, puis déduire de la question précédente que $w+w^2=1$.
(3) En déduire l'expression exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Correction possible

(1) On prouve directement la conclusion de cette question ci-dessous abordée dans le manuel de Conway :
Let $z=\operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}$ for an integer $n\geq 2$. Show that $1+z+\ldots+z^{n-1}=0$.

$$z=\operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}=e^{i\frac{2\pi}{n}}=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right),\quad n\geq 2\implies 0<\frac{2\pi}{n}\leq\pi$$

$$\implies -1\leq\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)<1$$

$$\therefore z\neq 1,\quad e^{2\pi i}=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)=1\implies 1-e^{2\pi i}=0$$

$$\therefore 1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}=\frac{1-e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot n}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}=\frac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}=0$$

(2)

$$z=e^{\frac{2i\pi}{5}}=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right),\quad \bar{z}=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$=e^{-\frac{2i\pi}{5}}=z^{-1}$$

$$\therefore w=z+\bar{z}=z+z^{-1}$$

$$\text{Rappel :}\quad \cos(\pm 2\pi-x)=\cos(x),\quad \sin(\pm 2\pi-x)=-\sin(x)$$

$$\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{n} \pm 2\pi\right) = e^{\frac{2i\pi}{n} \pm 2\pi} = \cos\left(\frac{2\pi}{n} \pm 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n} \pm 2\pi\right)$$
$$= e^{\frac{2i\pi}{n}} = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Les résultats sont ainsi immédiats :

$$\bar{z} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{5}\right)$$
$$= \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = e^{\frac{8i\pi}{5}} = z^4$$

$$\overline{z}^2 = \left(e^{\frac{8i\pi}{5}}\right)^2 = e^{\frac{16i\pi}{5}} = e^{\frac{6i\pi}{5}} = z^3$$

$$|z| = |e^{\frac{2i\pi}{5}}| = |\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)| = 1$$

$$\therefore w + w^2 = z + \bar{z} + (z+\bar{z})^2 = z + \bar{z} + z^2 + \overline{z}^2 + 2z\overline{z} = z + \bar{z} + z^2 + \overline{z}^2 + 2|z|^2$$
$$= z + z^4 + z^2 + z^3 + 2 = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + 1 = 0 + 1 = 1$$

(3)

De l'autre côté, on a :

$$w = z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \in \mathbb{R}, \quad w + w^2 = 1,$$
$$\therefore 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1$$

Résoudre cette équation et on obtient : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

En abandonnant la valeur négative $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ parce que

$$0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \implies \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0,$$

on obtient enfin : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Exercice 8.

(1) Donner sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines carrées de i.

(2) Donner sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines carrées de $-i$.

(3) Donner sous forme trigonométrique les racines quatrièmes de i.

(4) Calculer sous forme algébrique les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(5) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$, puis les racines quatrièmes de i sous forme algébrique.

Correction possible

Exercice 9.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$(E_1)\; z^2 - 1 + 2i = 0$
$(E_2)\; \left(z^7 - 1\right)\left(z^3 + 1/27\right) = 0$
$(E_3)\; z^2 + \sqrt{3}z - i = 0$
$(E_4)\; z^4 + z^3 - 2z = 0$

Correction possible

Exercice 10.

Soit $n \geqslant 1$. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z-2)^n = (z+2)^n$.

Correction possible

Exercice 11.

Calculer les sommes suivantes :

(1) $S = \sum_{k=0}^{32} \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k$

(2) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$

(3) $T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$

Correction possible

Exercice 12.

(1) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

(2) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ puis calculer $\cos(\pi/5)$ et $\cos(2\pi/5)$.

(3) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $\cos^4(\theta)$ et $\sin^4(\theta)$ (c'est-à-dire les exprimer en fonction des $\cos(k\theta), \sin(k\theta)$).

Correction possible

Exercice 13.

Parmi les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ci-dessous, lesquelles sont injectives ? Justifier par une preuve ou un contre-exemple.

(1) $f_1 : z \mapsto z$

(2) $f_2 : z \mapsto \mathrm{Re}(z)$

(3) $f_3 : z \mapsto z^2$

(4) $f_4 : z \mapsto z^3$

(5) $f_5 : z \mapsto iz + 1$

(6) $f_6 : z \mapsto (1 + 3i)\,\mathrm{Re}(z) + 4\,\mathrm{Im}(z)$

Correction possible

Exercice 14.

(1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1)\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (E_2)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (E_3)\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) = 1$$

(2) Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ les inéquations suivantes :

$$(I_1)\sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (I_2)\cos^2(x) \geqslant \cos(2x) + \frac{3}{4}$$

Correction possible

Exercice 15.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$. Que vaut le module de z ?

(2) Combien de solutions complexes a l'équation $z^{11} = -1$? Combien de solutions réelles ?

(3) Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

$$\mathbb{U}_3 = \left\{z \in \mathbb{C}, \quad z^3 = 1\right\} \quad \mathbb{U}_6 = \left\{z \in \mathbb{C}, \quad z^6 = 1\right\} \quad \mathbb{U}_8 = \left\{z \in \mathbb{C}, \quad z^8 = 1\right\}$$

Correction possible

Exercice 16.

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. On note M_1 (resp. M_2) le point d'affixe z_1 (resp. z_2).

(1) Quelles conditions géométriques doivent vérifier les points M_1 et M_2 pour que z_1/z_2 soit réel ?

(2) Quelles conditions géométriques doivent vérifier les points M_1 et M_2 pour que z_1/z_2 soit imaginaire pur ?

Correction possible

Exercice 17.

En utilisant les formules d'Euler, démontrer les identités suivantes :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Correction possible

Exercice 18*.

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$. On considère l'application

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} \end{cases}$$

(1) Quel est le domaine de définition de f_a ?

(2) Montrer que si $|z| = 1$, alors $|f_a(z)| = 1$.

(3) Soit $w \in \mathbb{C}$. À quelle condition sur w peut-on trouver un $z \in \mathbb{C}$ tel que $f_a(z) = w$? Donner, lorsque la condition est vérifiée, l'expression de z obtenue. Que remarque-t-on ?

(4) En déduire l'image par f_a du cercle unité $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et du domaine de définition de f_a.

Correction possible

Exercice 19*.

Soit $j = e^{2i\pi/3}$.

(1) Montrer que $\bar{j} = j^2$.

(2) Soient $z_0 = 1 + i$, $z_1 = jz_0$, $z_2 = j^2 z_0$, et M_0, M_1, M_2 les points d'affixes respectives z_0, z_1, z_2. Montrer que $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral.

(3) Soient A, B, et C trois points distincts du plan, d'affixes respectives a, b, c. Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} = -j$ ou $\dfrac{c-a}{b-a} = -\bar{j}$.

(4) En déduire que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $aj^2 + bj + c = 0$ ou $aj + bj^2 + c = 0$.

Correction possible