Licence 1$^{\text{ère}}$ année, 2024-2025, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)
Feuille de TD n°4 :
Suites réels et complexes (deuxième partie)

Correction Personnelle

Pion
17 octobre 2024

Prérequis

(1) **Négation de la proposition prédicative**
Montrer qu'une proposition quantitative est fause $\iff$ Montrer que sa négation est vraie.
Exemple :
La proposition A est

$$\forall r_u > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, |u_n - l| < r_u$$

$$\text{(définition de la convergence de la suite } \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}_+}\text{)}$$

une autre écriture :

$$\forall r_u > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n, (n > N \implies |u_n - l| < r_u)$$

Alors, la négation de A, i.e. $\neg A$, est :

$$\exists r_u > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists n > N, |u_n - l| \geq r_u$$

ce qui veut dire la non convergence de la suite.
En somme, la négation de $\forall$ est $\exists$, la négation de $\exists$ est $\forall$ le reste restant inchangé. Pour nier une proposition prédicative complète, on applique de manière récursive les lois de négation.

(2) **L'inégalité triangulaire**
Forme générale (où $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^k$ et $|\boldsymbol{x}|$ est la norme) :

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k, |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$$

Formes courantes :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Utilisation avec transformation algébrique et changement de variable :

$$|x - z| = |x - y + y - z| \leqslant |x - y| + |y - z|$$

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$$

(À vous ! Donnez les conditions pour que l'égalité soit vérifiée.)

Remarque

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, P(u_n, \varepsilon)) \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, P(u_n, c\varepsilon))$$

(où c est une constante positive non nulle et P une relation entre u_n et ε).
Démonstration :

$\varepsilon > 0, c > 0 \implies c\varepsilon > 0, c+\varepsilon > 0, \varepsilon/c > 0, \sqrt{\varepsilon} > 0, .etc$

$$\text{LHS} \implies (\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n > N_1, P(u_n, c\varepsilon)) \implies \text{RHS}$$

$$\text{RHS} \implies (\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n > N_2, P(u_n, \varepsilon/c)) \implies \text{LHS}$$

Donc $\quad$ LHS $\iff$ RHS.
De façon similaire on peut aussi prouver les cas où on remplace $c\varepsilon$ par e.g. $\varepsilon + c$ ou d'autres e.g. ceux listés ci-dessus. L'essenciel (personnellement) reste à montrer que on peut toujours($\forall\varepsilon > 0$ ou $\forall M \in \mathbb{R}_+^*$ ou...) trouver un rang($\exists N \in \mathbb{N}$) à partir duquel ($\forall n > N$) la distance entre u_n et la limite est arbitrairement petite, c'est aussi de vérifier la définition.
Par exemple, vous verrez dans l'exercise 2(2), que même si on pose $r_v = \dfrac{\varepsilon}{100(1+|\ell|)}$, il suffit de prendre $r_u = \dfrac{\varepsilon}{2\,|\ell'|}$ $\quad$ et $\quad$ $r_v = \dfrac{\varepsilon}{2(1+|\ell|)}$.

Exercice 1.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et u, v deux suites réelles.
(1) Montrer que si u et v sont minorés alors $u + v$ est aussi minorée.
(2) Montrer que si $\lambda \leqslant 0$ et u est majorée alors λu est minorée.
(3) Montrer que si u et v sont bornées alors uv est aussi bornée.
(4) Montrer que si u et v sont croissantes à partir d'un certain rang, alors $u + v$ est également croissante à partir d'un certain rang.

Correction possible

(1)
$\lambda \in \mathbb{R}, u, v$ deux suites réelles.
u, v sont minorées $\iff \exists m_u, m_v \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}_+, u_n \geqslant m_u \,\text{et}\, v_n \geqslant m_v$.
Donc $u_n + v_n \geqslant m_u + m_v$,
Donc $u + v$ est minorée.
(2)
u est majorée $\iff \exists M_u \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}_+, u_n \leqslant M_u$.
Si $\lambda \leqslant 0$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}_+, \lambda u_n \geqslant \lambda M_u \quad \text{(RHS est une constante)}$$

Donc λu est minorée.
(3)
u et v sont bornées

$$\iff \exists m_u, M_u, m_v, M_v \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}_+, m_u \leqslant u_n \leqslant M_u, m_v \leqslant v_n \leqslant M_v$$

$$\iff \exists b_u, b_v \in \mathbb{R}_+ : |u_n| \leqslant b_u, |v_n| \leqslant b_v \quad \text{(À vous ! Donnez la démonstration)}$$

$$\implies |u_n v_n| = |u_n||v_n| \leqslant b_u b_v$$

Donc uv est bornée.
PS : Utilisez la définition de bornée sous forme de valeur absolue pour avoir des bornes positives et par conséquent faciliter la multiplication des bornes.

(4)
u, v sont croissantes à partir d'un certain rang (APDCR).
u est croissante APDCR

$$\iff (\exists N_u \in \mathbb{N}_+, \forall n \in \mathbb{N}_+, n > N_u \implies u_{n+1} \geqslant u_n)$$

v est croissante APDCR

$$\iff (\exists N_v \in \mathbb{N}_+, \forall n \in \mathbb{N}_+, n > N_v \implies v_{n+1} \geqslant v_n)$$

$$\text{Donc,} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+, n > N_{uv} = \max(N_u, N_v) \implies n > N_u \,\text{et}\, n > N_v$$
$$\implies u_{n+1} \geqslant u_n \,\text{et}\, v_{n+1} \geqslant v_n \implies u_{n+1} + v_{n+1} \geqslant u_n + v_n$$

Donc APDCR (e.g. $N_{uv} = \max(N_u, N_v)$) $u + v$ est croissante .

Exercice 2.

(Opérations sur les suites convergentes) Soit u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.
(1) Montrer que $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$.
(2) Montrer que la suite produit $uv = (u_n v_n)_{n>0}$ est convergente de limite $\ell\ell'$.
(3) Supposons de plus $\ell' \neq 0$, alors montrer :
  (a) v est non nulle à partir d'un certain rang,
  (b) la suite inverse de terme général $\dfrac{1}{v_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang et est convergente, de limite $\dfrac{1}{p}$,
  (c) la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang et est convergente, de limite $\dfrac{\ell}{p}$.
(4) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $\left(u_n^d\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ^d.

Correction possible

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \forall r_u > 0, \exists N_u \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N_u \implies |v_n - \ell| < r_u$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell' \iff \forall r_v > 0, \exists N_v \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N_v \implies |u_n - \ell'| < r_v$$

(1)
Pour tout $r_u > 0$, il existe $N_u \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque $n > N_u$, posons $r_u = \dfrac{\varepsilon}{2}$, nous avons

$$|u_n - \ell| < r_u = \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout $r_v > 0$, il existe $N_v \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque $n > N_v$, posons $r_v = \dfrac{\varepsilon}{2}$, nous avons

$$|v_n - \ell'| < r_v = \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $N = \max(N_u, N_v)$. Alors, pour tout $n > N$, nous avons à la fois :

$$|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous pouvons obtenir :

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|$$

Ainsi, pour tout $n > N$, nous avons :

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}(i.e. N = \max(N_u, N_v)), \forall n > N, |u_n + v_n - (\ell + \ell')| < \varepsilon$$

, selon la définition de la limite, nous concluons que :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$$

(2)
L'objectif c'est d'avoir $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n v_n - \ell\ell'| < \varepsilon$.
Considérons les données qu'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \iff \forall r_u > 0, \exists N_u \in \mathbb{N}, \forall n > N_u, |u_n - \ell| < r_u$$
$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell' \iff \forall r_v > 0, \exists N_v \in \mathbb{N}, \forall n > N_v, |v_n - \ell'| < r_v$$

Donc on va s'intérresser à faire apparaitre $|u_n v_n - \ell\ell'| < \varepsilon$ ou la décomposer pour faire apparaitre les données qu'on a.
Une méthode courante dans ce cas est d'essayer de linéaliser le produit $u_n v_n$ avant d'exploiter l'inégalité triangulaire.
Par exemple,

$$|u_n v_n - \ell\ell'| = |u_n v_n - u_n \ell' + u_n \ell' - \ell\ell'| \leqslant |u_n(v_n - \ell')| + |\ell'(u_n - \ell)|$$
$$= |u_n||v_n - \ell'| + |\ell'||u_n - \ell|$$

Ici, les données apparaissent. On va voir comment utiliser les deux inégalités dans lesquelles on peut choisir ARBITRAIREMENT r_u, r_v pour satisfaire notre besoin :

$$|v_n - \ell'| < r_u \quad \text{et} \quad |v_n - \ell'| < r_v$$

pour mener à

$$|u_n||v_n - \ell'| + |\ell'||u_n - \ell| < \varepsilon$$

Soyons vigilant, parce qu'on se concentre seulement sur le processus d'approchement, c'est-à-dire, APDCR.
Et APDCR, on a le fait que $|u_n|$ est bornée parce qu'elle converge. Donc $|u_n|$ ne pose pas de problème parce qu'on peut trouver un N et les index

après lui pour que $|u_n|$ soit assez petit (pour réduire la valeur du produit $|u_n||v_n - \ell'|$)
Et comme $|\ell'|$ est une constante et on peut arbitrairement choisir r_v de sorte que la valeur de $|u_n - \ell|$ soit grandement inférieure à celle de $\frac{\varepsilon}{|\ell'|}$, et ensuite $|u_n||v_n - \ell'| + |\ell'||u_n - \ell|$ est garanti de ne pas dépasser ε.

Voici une solution :
On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \forall r_u > 0, \exists N_u \in \mathbb{N}, \forall n > N_u, |u_n - \ell| < r_u$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell' \iff \forall r_v > 0, \exists N_v \in \mathbb{N}, \forall n > N_v, |v_n - \ell'| < r_v$$

$$\text{posons } r_u = \frac{\varepsilon}{100|\ell'|}, r_v = \frac{\varepsilon}{100(1+|\ell|)},$$

(C'est pour vous montrer à quel point on a le droite de choisir r_u, r_v pour prendre des valeurs suffisamment petites. Il faut donc bien connaitre **la puissance de "$\forall$"** dans les définitions.)

$$\text{et on a APDCR } N, |u_n| < |\ell| + 1$$

tkt, on peut prendre le plus grand N_{nice} i.e. $N_{nice} = \max(N_u, N_v, N)$ pour que ces trois conditions précédentes sont satisfaites à la fois.
Donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}$(ça peut être N_{nice})$, \forall n > M$,

$$|u_n||v_n - \ell' < (|\ell| + 1)|\frac{\varepsilon}{100(1+|\ell|)} = \frac{\varepsilon}{100}, \quad |\ell'||u_n - \ell| < |\ell'|\frac{\varepsilon}{100|\ell'|} = \frac{\varepsilon}{100}$$

$$|u_n||v_n - \ell'| + |\ell'||u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{50} < \varepsilon$$

(3)

— (a) $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell' \iff \forall r_v > 0, \exists N_v \in \mathbb{N}, \forall n > N_u, |v_n - \ell'| < r_v$
Supposons $\ell' > 0$,
prenons $\varepsilon = \frac{\ell'}{2}$, donc on a $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - \ell'| < \varepsilon = \frac{\ell'}{2}$

$$\implies 0 < \frac{\ell'}{2} = \ell' - \frac{\ell'}{2} < v_n < \ell' + \frac{\ell'}{2}$$

(Ça veut aussi dire que u_n est bornée APDCR)

— (b) $\ell' \neq 0$ et APDCR $v_n \neq 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_v \in \mathbb{N}, \forall n > N_u, |v_n - \ell'| < r_v$$

$$\implies \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n > N_1, \left|\frac{\ell'}{2}\right| < |v_n| < \left|\frac{3\ell'}{2}\right| \quad \text{(bornée APDCR)}$$

$$\text{et} \quad \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n > N_2, |\ell' - v_n| < \frac{2r}{|\ell'|^2}$$

Donc, $\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \frac{|\ell' - v_n|}{|v_n \ell'|} < \frac{2r/|\ell'|^2}{|\ell'|^2/2}$

Enfin, $\forall r > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| < r$

— (c) *Hint :* $\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{\ell}{\ell'}\right| = \left|\frac{u_n \ell' - v_n \ell}{\ell \ell'}\right| = \left|\frac{u_n \ell' - \ell' \ell + \ell' \ell - v_n \ell}{\ell \ell'}\right| = \left|\frac{\ell'(u_n - \ell) + \ell(\ell' - v_n)}{\ell \ell'}\right|$ et on a l'inégalité triangulaire et les propriétés vues en amont.

(4) $|u_n^d - \ell^d| = |u_n - \ell| \left|\sum_{i=0}^{d-1} u_n^i (-\ell)^{d-1-i}\right|$ APDCR, u_n est bornée donc $\sum_{i=0}^{d-1} u_n^i (-\ell)^{d-1-i}$ est bornée (e.g. par C. Comme d est une constante, la valeur de la somme finite des termes finites est finite).
On a la convergence de u_n vers ℓ. $\forall \varepsilon$, on peut prendre un N assez grand pour que à partir de ce rang N, $|u_n - \ell| < \varepsilon / C$. Donc à partir de ce rang N, $|u_n^d - \ell^d|$ est plus petit que ε.

Exercice 3.

Soit u une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Montrer que u n'est pas convergente (donc est une suite divergente).

Correction possible

u est une suite réelle qui tend vers $+\infty$

$$\iff \forall M \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, u_n > M$$

On va montrer par contradiction en utilisant cette donnée. Supposons que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

mais prenons $M = 2\ell$ (ou bien d'autres valeurs que vous voulez), on a

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n > N_1, u_n > 2\ell$$

$$\implies \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N_1, |u_n - \ell| > \ell$$

. On voit que quand $\varepsilon < \ell$ il y a une contradiction.

Exercice 4.

(Opérations sur les suites divergentes) Soit u et v deux suites réelles.

(1) Montrer que si u converge vers $\ell > 0$ et v tend vers $+\infty$, alors le produit uv tend vers $+\infty$.

(2) Montrer que si u tend vers $+\infty$ et v tend vers $-\infty$, alors uv tend vers $-\infty$.

(3) Montrer que si u converge vers ℓ et si v tend vers $+\infty$, alors la suite des quotients $\frac{u}{v} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bien définie à partir d'un certain rang et est une suite convergente, de limite 0.

(4) Soit u et v deux suites réelles. Montrer que si u est minorée et si v tend vers $+\infty$, alors $u+v$ tend vers $+\infty$. En particulier, montrer que si u est convergente et si v tend vers $+\infty$, alors $u+v$ tend vers $+\infty$.

Correction possible

(1)
u converge vers $\ell > 0$, $\quad v$ tend vers $+\infty$, donc
APDCR N_1, u_n est bornée, i.e.

$$\forall n > N_1, C \leqslant |u_n|, \quad C \text{ est une constante}$$

De l'autre coté, $\forall M > 0$, APDCR N_2, $v_n > M$,
donc,

$$\forall M > 0, \text{ APDCR } N = \max(N_1, N_2), |u_n v_n| > CM$$

(ce qui signifie que APDCR $|u_n v_n|$ peut prendre une valeur arbitrairement grande, parce que M est arbitrairement grand et on peut poser $M' = CM$ ensuite $\forall M' > 0$, APDCR $|u_n v_n| > M'$)

(2)
On peut se limiter aux cas où $M > 1$, parce que le reste peut en être déduit
$\forall M > 1$, APDCR N_u, $\quad u_n > M_u > \sqrt{M} > 0$
$\forall M > 1$, APDCR N_v, $\quad v_n < -M < -\sqrt{|M|} < 0$
Donc, $\forall M > 0 \quad$ APDCR N, $\quad u_n v_n < -M$

(3)
u converge vers ℓ et v tend vers $+\infty$,
donc on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_u \in \mathbb{N}, \forall n > N_u, |u_n - \ell| < \varepsilon, \quad \text{et}$$
$$\forall M > 0, \exists N_v \in \mathbb{N}, \forall n > N_v, v_n > M$$

$\forall \delta > 0, \exists m \in \mathbb{N}$tel que $\frac{1}{m} < \delta$ (Le principe euclidien). Donc,

$$\forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, v_n > N > 0 \implies 0 < \frac{1}{v_n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{m} < \delta$$

La convergence de la suite u nous indique qu'elle est bornée APDCR, donc

$$\forall \delta > 0, \text{APDCR}, \quad \left|\frac{u_n}{v_n}\right| < \frac{c}{m} < \delta$$

(ici c étant un majorant de la suite u APDCR)

(4)
Si u est convergente et v tend vers $+\infty$, alors u est bornée par une constante c i.e. $|u_n| < c$ et $\forall M > 0$ APDCR N, $\quad v_n > M$. Donc,

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, u_n + v_n > M$$

Exercice 5.

(1) On considère les suites de termes généraux suivants. Donner leur domaine de définition ainsi que leur limite.
   (a) $u_n = \dfrac{2^n}{n^3}$
   (b) $u_n = \dfrac{(\ln(n))^2}{\sqrt{n}}$
   (c) $u_n = \dfrac{2^{\ln(n)}}{n^{\ln(3)}}$
   (d) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.
(2) On considère les suites de termes généraux suivants. Donner leur domaine de définition et dire si elles convergent. Si c'est le cas, donner leur limite.
   (a) $u_n = n + \cos(n)$,
   (b) $u_n = \dfrac{(n+1)\left(2 + (-1)^n\right)}{n+3}$,
   (c) $u_n = \sqrt{n-2} - \dfrac{n}{2}$,
   (d) $u_n = \dfrac{4n + \sin(n)}{n^3}$,
   (e) $u_n = \dfrac{n - \ln(n)}{n + \ln(n)}$,
   (f) $u_n = \dfrac{2^n}{n \ln(n)}$,
   (g) $u_n = \dfrac{3n+5}{\sqrt{n^2+1}}$,
   (h) $u_n = (-1)^n + \dfrac{2}{n}$,
   (i) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$.