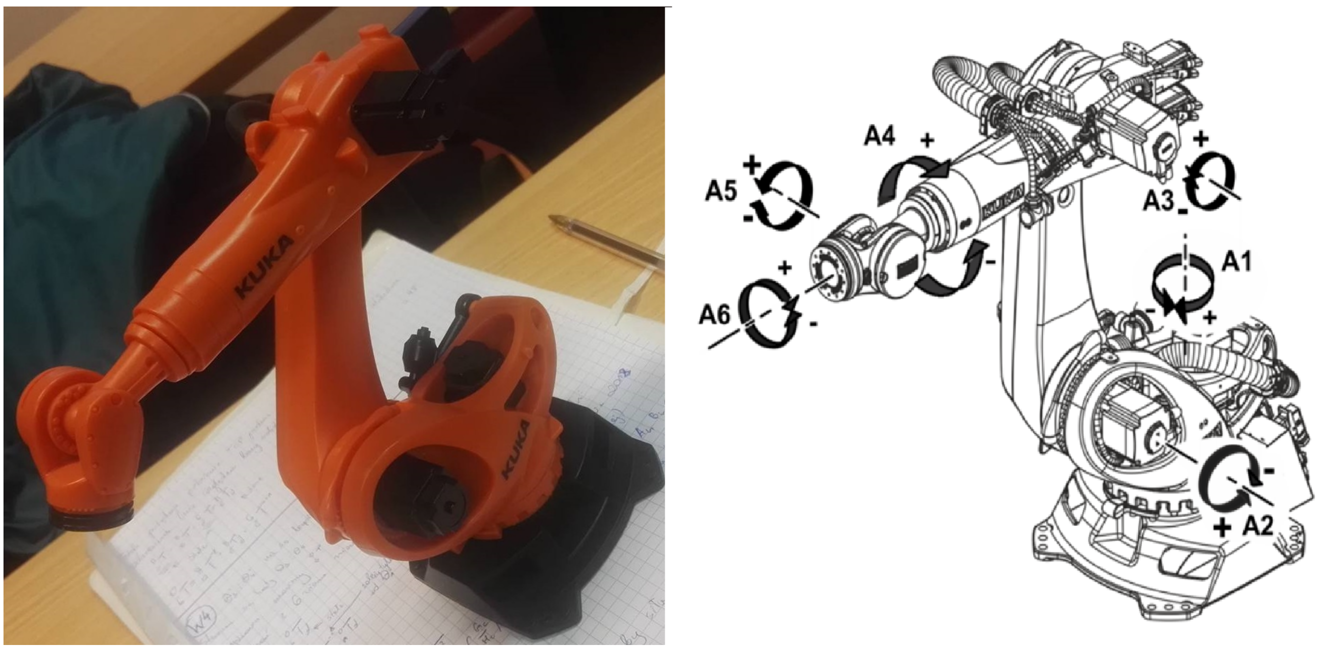
Modelowanie i sterowanie robotów
PROJEKT

Arkadiusz Piórkowski

20 grudnia 2017

1 Zadanie

Zadaniem projektu jest rozwiązanie zadania prostego i odwrotnego kinematyki robota przedstawionego na rysunku 1.



Rysunek 1: Robot firmy KUKA serii KR QUANTEC pro

Proste zadanie kinematyki (PZK) polega na znalezieniu macierzy jednorodnej ${}^{0}_{6}T$ przy znajomości wartości zmiennych złączowych θ_i.
Odwrotne zadanie kinematyki (OZK) polega na znalezieniu wartości zmiennych złączowych θ_i przy znajmości macierzy jednorodnej ${}^{0}_{6}T$.

Przedstawiony manipulator to 6-osiowy robot o strukturze szeregowej. Zatem do rozwiązania wykorzystano algorytm postępowania dla manipulatorów szeregowych przedstawiony podczas wykładu prof. C.Zielińskiego:

1. Narysować manipulator
2. Wskazać osie obrotu lub translacji (dla złącz obrotowych lub translacyjnych)
3. Przyporządkować osie ${}_{i}z$ i-tych układów osiom obrotu/translacji
4. Znaleźć wspólne prostopadłe pomiędzy osiami ${}_{i-1}z$ i ${}_{i}z$ (jeżeli te osie się przecinają, to wspólna prostopadła pokrywa się z ${}_{i-1}z \times_{i} z$)

5. Określić osie ${}_ix$ - oś ${}_{i-1}x$ pokrywa się ze wspólną prostopadłą do ${}_{i-1}z$ i ${}_iz$ (jest skierowana od ${}_{i-1}z$ do ${}_iz$)

6. Wyznaczyć osie ${}_iy$ jako ${}_iy =_i z \times_i x$

7. Układ bazowy 0 powinien być tak ulokowany, aby α_0, a_0 i θ_1 lub d_1 były równe 0 $\Rightarrow_0 z =_1 z$ i ${}_0^0P =_1^0 P$

8. Wyznaczyć parametry złącz i członów

   - a_{i-1}: odległość pomiędzy osiami ${}_{i-1}z$ i ${}_iz$ mierzona wzdłuż osi ${}_{i-1}x$
   - α_{i-1}: kąt pomiędzy osiami ${}_{i-1}z$ i ${}_iz$ mierzony wokół osi ${}_{i-1}x$
   - d_i: odległość pomiędzy osiami ${}_{i-1}x$ i ${}_ix$ mierzona wzdłuż osi ${}_iz$
   - θ_i: kąt pomiędzy osiami ${}_{i-1}x$ i ${}_ix$ mierzony wokół osi ${}_iz$

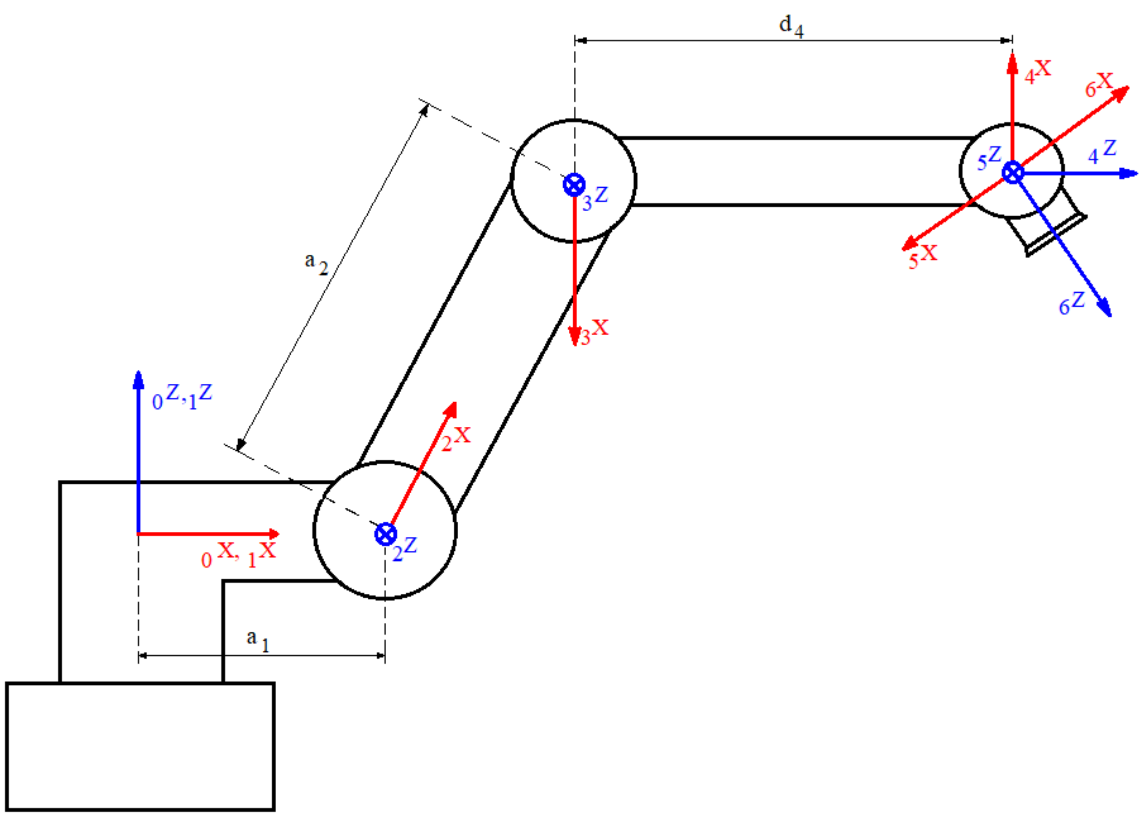
9. Wyznaczyć macierze jednorodne ${}_i^{i-1}T$

10. Rozwiązać proste zadanie kinematyki: ${}_n^0T =_1^0 T_2^1T \dots_n^{n-1} T = \prod_{i=1}^{n} {}_i^{i-1}T$

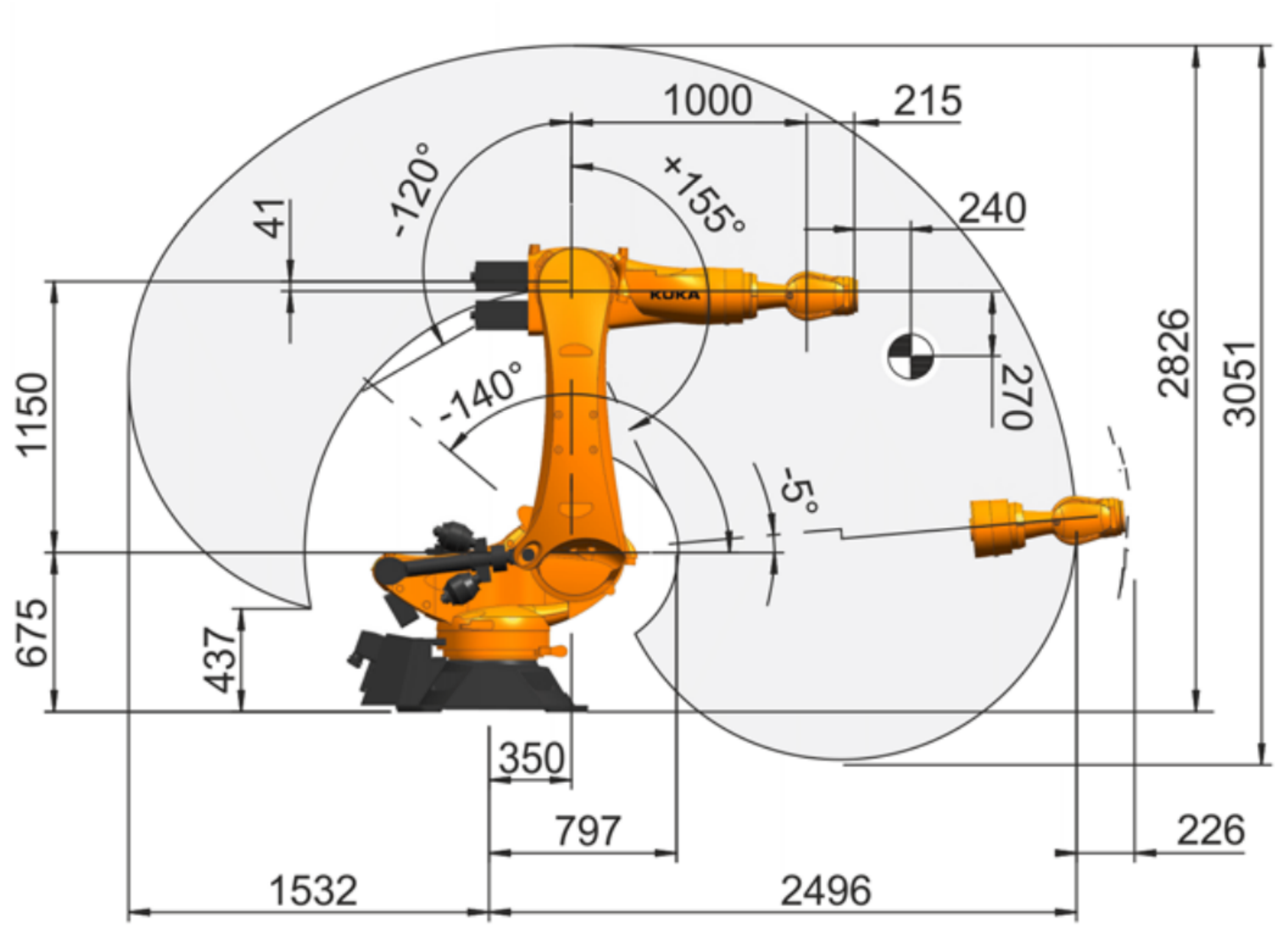
11. Rozwiązać odwrotne zadanie kinematyki

2 Rozwiązanie

Zgodnie z zaleceniami założono, iż wszystkie człony znajdują się w jednej płaszczyźnie (nie występują "odsadzenia" członów 2 oraz 3), oraz sprowadzono osie członów 4, 5 i 6 do jednego punktu.



Rysunek 2: Schematyczny rysunek manipulatora z zaznaczonymi osiami ${}_iz$ i ${}_ix$ oraz parametrami a_i i d_i



Rysunek 3: Rzut izometryczny robota KUKA KR120 R2500

W tabeli 1 przedstawiono parametry Denavita-Hartenberga dla danego robota.

Tabela 1: Parametry Denavita-Hartenberga

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	a_1	$-\pi/2$	0	θ_2
3	a_2	0	0	θ_3
4	0	$\pi/2$	d_4	θ_4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5
6	0	$\pi/2$	0	θ_6

2.1 Rozwiązanie prostego zadania kinematyki (PZK)

Dla skrócenia zapisów przyjęto następujące oznaczenia:

$$c_i = cos\theta_i, s_i = sin\theta_i, c_{ij} = cos(\theta_i + \theta_j), s_{ij} = sin(\theta_i + \theta_j)$$

Macierze opisujące człony/złącza:

$$ {}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_{i-1} \\ s_i c\alpha_{i-1} & c_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s_i s\alpha_{i-1} & c_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{4}_{5}T = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Złożenie macierzy:

$$ {}^{0}_{2}T = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c_2c_2 & -c_1s_2 & -s_1 & a_1c_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1 & a_1s_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{3}T = {}^{0}_{2}T \cdot {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & -s_1 & c_1(a_2c_2 + a_1) \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & c_1 & s_1(a_2c_2 + a_1) \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{4}T = {}^{0}_{3}T \cdot {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 - s_1s_4 & -c_1c_{23}s_4 - s_1c_4 & c_1s_{23} & c_1(d_4s_{23} + a_2c_2 + a_1) \\ s_1c_{23}c_4 + c_1s_4 & -s_1c_{23}s_4 + c_1c_4 & s_1s_{23} & s_1(d_4s_{23} + a_2c_2 + a_1) \\ -s_{23}c_4 & s_{23}s_4 & c_{23} & d_4c_{23} - a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{5}T = {}^{0}_{4}T \cdot {}^{4}_{5}T = \begin{bmatrix} c_5(c_1c_{23}c_4 - s_1s_4) + c_1s_{23}s_5 & -s_5(c_1c_{23}c_4 - s_1s_4) + c_1s_{23}c_5 & c_1c_{23}s_4 + s_1c_4 & c_1(d_4s_{23} + a_2c_2 + a_1) \\ c_5(s_1c_{23}c_4 + c_1s_4) + s_1s_{23}s_5 & -s_5(s_1c_{23}c_4 + c_1s_4) + s_1s_{23}c_5 & s_1c_{23}s_4 - c_1c_4 & s_1(d_4s_{23} + a_2c_2 + a_1) \\ -s_{23}c_4c_5 + c_{23}s_5 & s_{23}c_4s_5 + c_{23}c_5 & -s_{23}s_4 & d_4c_{23} - a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^0_6T = {}^0_5T \cdot {}^5_6T = $$

$$ = \left[\begin{matrix} c_6(c_5(c_1c_{23}c_4 - s_1s_4) + c_1s_{23}s_5) + s_6(c_1c_{23}s_4 + s_1c_4) & -s_6(c_5(c_1c_{23}c_4 - s_1s_4) + c_1s_{23}s_5) + c_6(c_1c_{23}s_4 + s_1c_4) \\ c_6(c_5(s_1c_{23}c_4 + c_1s_4) + s_1s_{23}s_5) + s_6(s_1c_{23}s_4 - c_1c_4) & -s_6(c_5(s_1c_{23}c_4 + c_1s_4) + s_1s_{23}s_5) + c_6(s_1c_{23}s_4 - c_1c_4) \\ c_{23}s_5c_6 - s_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) & s_{23}(c_4c_5s_6 - s_4c_6) - c_{23}s_5s_6 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right. $$

$$ \left.\begin{matrix} s_5(c_1c_{23}c_4 - s_1s_4) - c_1s_{23}c_5 & c_1(d_4s_{23} + a_2c_2 + a_1) \\ s_5(s_1c_{23}c_4 + c_1s_4) - s_1s_{23}c_5 & s_1(d_4s_{23} + a_2c_2 + a_1) \\ -s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 & d_4c_{23} - a_2s_2 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right] $$

2.2 Rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki (OZK)

Zdefiniowano następujące macierze pośrednie:

$$ {}^1_3T = {}^1_2T \cdot {}^2_3T = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 + a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^1_4T = {}^1_3T \cdot {}^3_4T = \begin{bmatrix} c_{23}c_4 & -c_{23}s_4 & s_{23} & d_4s_{23} + a_2c_2 + a_1 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ -s_{23}c_4 & s_{23}s_4 & c_{23} & d_4c_{23} - a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^4_6T = {}^4_5T \cdot {}^5_6T = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & s_5 & 0 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & -c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Stąd:

$$ {}^1_6T = {}^1_4T \cdot {}^4_6T = \begin{bmatrix} c_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) + s_{23}s_5c_6 & c_{23}(s_4c_6 - c_4c_5s_6) - s_{23}s_5s_6 & c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5 & d_4s_{23} + a_2c_2 + a_1 \\ s_4c_5c_6 - c_4s_6 & -s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ -s_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) + c_{23}s_5c_6 & s_{23}(c_4c_5s_6 - s_4c_6) - c_{23}s_5s_6 & -s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 & d_4c_{23} - a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Następnie do rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki posłużono się zależnościami:

$$ {}^0_nT = {}^0_nT_d, $$

w którym lewa strona oznacza wynik PZK zaś prawa stałe. Następnie:

$$ {}^0_1T^{-1}\ {}^0_nT = {}^0_1T^{-1}\ {}^0_nT_d $$

$$ {}^0_nT\ {}^{n-1}_{n}T^{-1} = {}^0_nT_d\ {}^{n-1}_{n}T^{-1} $$

poszukuje się elementów dających $f(\theta_i) = \text{const}$, które po znalezieniu są traktowane jako wielkości znane. Macierz stałych ${}^0_nT_d$ jest następująca:

$$ {}^0_nT_d = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, $$

W celu porównania wyznaczonej wcześniej macierzy ${}^1_6T$ należy wyznaczyć poniższy iloczyn macierzowy:

$$ {}^0_1T^{-1}\ {}^0_nT_d = \begin{bmatrix} c_1r_{11} + s_1r_{21} & c_1r_{12} + s_1r_{22} & c_1r_{13} + s_1r_{23} & c_1p_x + s_1p_y \\ c_1r_{21} - s_1r_{11} & c_1r_{22} - s_1r_{12} & c_1r_{23} - s_1r_{13} & c_1p_y - s_1p_x \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Zgodnie ze wzorem:

$$ {}^0_1T^{-1}\ {}^0_nT_d = {}^1_6\,T $$

Porównując kolejne elementy macierzy można wyznaczyć kąty θ_i.

Wybieramy element ${}^1_6T_{24} \Rightarrow c_1p_y - s_1p_x = 0 \Rightarrow c_1p_y = s_1p_x \Rightarrow \dfrac{s_1}{c_1} = \dfrac{p_y}{p_x} \Rightarrow \theta_1 = arctan\left(\dfrac{p_y}{p_x}\right)$

W celu znalezienia kąta θ_2 wybrano elementy ${}^1_6T_{14}$ i ${}^1_6T_{34}$ (ze względu, iż występują w nich tylko dwa nieznane kąty θ_2 i θ_2:

$$\begin{cases} c_1p_x + s_1p_y = d_4s_{23} + a_2c_2 + a_1 \\ p_z = d_4c_{23} - a_2s_2 \end{cases}$$

Po przekształceniu

$$\begin{cases} c_1p_x + s_1p_y - a_1 = d_4s_{23} + a_2c_2 \\ p_z = d_4c_{23} - a_2s_2, \end{cases}$$

otrzymujemy równania, które po lewej stronie zawierają wyrażenia stałe. Zatem w celu uproszczenia zapisu wprowadzono następujące podstawienia:

$$\begin{aligned} E &= c_1p_x + s_1p_y - a_1 \\ F &= p_z \end{aligned}$$

Otrzymujemy standardowy układ równań:

$$\begin{cases} E - a_2c_2 = d_4s_{23} \\ F + a_2s_2 = d_4c_{23} \end{cases}$$

Podnosząc równania obustronie do kwadratu i dodając stronami otrzymujemy:

$$E^2 + F^2 + a_2^2(c_2^2 + s_2^2) - 2Ea_2c_2 + 2Fa_2s_2 = d_4^2(s_{23}^2 + c_{23}^2)$$

$$E^2 + F^2 + a_2^2 - 2Ea_2c_2 + 2Fa_2s_2 = d_4^2$$

$$E^2 + F^2 + a_2^2 - d_4^2 = 2Ea_2c_2 - 2Fa_2s_2$$

Po lewej stronie równania mamy wyrażenie stałe, więc stosując podstawienie:

$$K = E^2 + F^2 + a_2^2 - d_4^2,$$

otrzymujemy:

$$K = 2Ea_2c_2 - 2Fa_2s_2.$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} G = 2Ea_2 = rs(\varphi) \\ H = -2Fa_2 = rc(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{G^2 + F^2} \\ \varphi = arctan\left(\frac{G}{H}\right), \end{cases}$$

równanie przyjmuje następującą postać:

$$K = rs(\varphi)c_2 + rc(\varphi)s_2 = r(s(\varphi)c_2 + c(\varphi)s_2) = rs(\varphi + \theta_2) \Rightarrow \frac{K}{r} = s(\varphi + \theta_2)$$

Zatem mamy układ równań:

$$\begin{cases} s(\varphi + \theta_2) = \dfrac{K}{r} = \\ c(\varphi + \theta_2) = \pm\sqrt{1 - \left(\dfrac{K}{r}\right)^2}, \end{cases}$$

który po podzieleniu stronami i zastosowaniu funkcji $arctan$ pozwala na wyznaczenie wartości kąta θ_2:

$$\theta_2 = arctan\left(\frac{\frac{K}{r}}{\pm\sqrt{1-\left(\frac{K}{r}\right)^2}}\right) - arctan\left(\frac{G}{H}\right)$$

Korzystając ponownie z układu równań:

$$\begin{cases} E - a_2c_2 = d_4s_{23} \\ F + a_2s_2 = d_4c_{23}, \end{cases}$$

wyznaczamy kąt θ_3 poprzez podział stronami i zastosowanie funkcji $arctan$:

$$\theta_2 + \theta_3 = arctan\left(\frac{E - a_2c_2}{F + a_2s_2}\right)$$

$$\theta_3 = arctan\left(\frac{E - a_2c_2}{F + a_2s_2}\right) - \theta_2$$

Mając wyznaczone kąty $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ można wyznaczyć kąt θ_5 przy wykorzystaniu elementów ${}^1_6T_{13}$ i ${}^1_6T_{33}$:

$$\begin{cases} c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5 = c_1r_{13} + s_1r_{23} \\ -s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 = r_{33} \end{cases}$$

Po prawej stronie równań występują wyrażenia stałe zatem stosując podstawienie:

$$L = c_1r_{13} + s_1r_{23}$$
$$M = -r_{33},$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5 = L \\ s_{23}c_4s_5 + c_{23}c_5 = M \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy:

$$c_4s_5 = \frac{M - c_{23}c_5}{s_{23}}$$

Podstawiając do pierwszego równania uzyskujemy:

$$c_{23}\frac{M - c_{23}c_5}{s_{23}} - s_{23}c_5 = L$$

Mnożąc obustronnie przez s_{23} uzyskujemy:

$$c_{23}M - c_{23}^2c_5 - s_{23}^2c_5 = s_{23}L$$

$$c_{23}M - c_5 = s_{23}L$$

$$c_{23}M - s_{23}L = c_5$$

Taki sam wzór uzyskuję się wyznaczając c_4s_5 z pierwszego równania stosując dzielenie przez c_{23}. Zatem kąt θ_5 ma wartość:

$$\theta_5 = arccos(c_{23}M - s_{23}L)$$

Następnie można wyznaczyć kąt θ_4 przy wykorzystaniu elementu ${}^1_6T_{23}$:

$$s_4s_5 = c_1r_{23} - s_1r_{13}$$

$$\theta_4 = arcsin\Big(\frac{c_1 r_{23} - s_1 r_{13}}{s_5}\Big), s_5 \neq 0$$

Osobliwość, gdy $s_5 = 0(\theta_5 = 0$ lub $\theta_5 = \pi) \Rightarrow$

$$^1_6T = \begin{bmatrix} \pm c_{23}c(\theta_4 \mp \theta_6) & c_{23}s(\theta_4 \mp \theta_6) & \mp s_{23} & d_4 s_{23} + a_2 c_2 + a_1 \\ \pm s(\theta_4 \mp \theta_6) & -c(\theta_4 \mp \theta_6) & 0 & 0 \\ -s_{23}(\pm c(\theta_4 \mp \theta_6)) & -s_{23}s(\theta_4 \mp \theta_6) & \mp c_{23} & d_4 c_{23} - a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Biorąc pod uwagę elementy $^1_6T_{11}$ i $^1_6T_{12}$ i dzieląc je przez siebie otrzymujemy:

$$\frac{^1_6T_{12}}{^1_6T_{11}} = \frac{\pm s(\theta_4 \mp \theta_6)}{\pm c_{23}c(\theta_4 \mp \theta_6)} = \frac{c_1 r_{21} - s_1 r_{11}}{c_1 r_{11} + s_1 r_{21}}$$

$$\frac{\pm s(\theta_4 \mp \theta_6)}{\pm c(\theta_4 \mp \theta_6)} = \frac{c_{23}(c_1 r_{21} - s_1 r_{11})}{c_1 r_{11} + s_1 r_{21}}$$

$$(\theta_4 \mp \theta_6) = arctan\left(\frac{c_{23}(c_1 r_{21} - s_1 r_{11})}{c_1 r_{11} + s_1 r_{21}}\right)$$

Zatem można przyjąć (przy $s_5 = 0$), iż wartość kąta θ_4 w danej chwili może równać się wartości tego kąta z chwili poprzedniej.

Do wyznaczenia kąta θ_6 zostaną wykorzystane elementy $^1_6T_{21}$ i $^1_6T_{22}$

$$\begin{cases} s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 = c_1 r_{21} - s_1 r_{11} \\ -s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 = c_1 r_{22} - s_1 r_{12} \end{cases}$$

Po prawej stronie mamy wyrażenia stałe, zatem stosując podstawienie

$$\begin{cases} N = c_1 r_{21} - s_1 r_{11} \\ P = c_1 r_{22} - s_1 r_{12}, \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 = N \\ -s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 = P \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_4 c_5 c_6 = N + c_4 s_6 \\ -s_4 c_5 s_6 = P + c_4 c_6 \end{cases}$$

Po podniesieniu do kwadratu i dodaniu stronami otrzymujemy:

$$s_4^2 c_5^2 = N^2 + P^2 + 2Nc_4 s_6 + 2Pc_4 c_6 + c_4^2$$

$$s_4^2 c_5^2 - N^2 - P^2 - c_4^2 = 2Nc_4 s_6 + 2Pc_4 c_6$$

Po lewej stronie równania mamy wyrażenie stałe, więc stosując podstawienie:

$$D = s_4^2 c_5^2 - N^2 - P^2 - c_4^2,$$

otrzymujemy:

$$D = 2Nc_4 s_6 + 2Pc_4 c_6.$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} U = 2Pc_4 = Rs(\varphi) \\ W = 2Nc_4 = Rc(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{U^2 + W^2} \\ \varphi = arctan\Big(\frac{U}{W}\Big), \end{cases}$$

równanie przyjmuje następującą postać:

$$D = Rs(\varphi)c_6 + Rc(\varphi)s_6 = R(s(\varphi)c_6 + c(\varphi)s_6) = Rs(\varphi + \theta_6) \Rightarrow \frac{D}{R} = s(\varphi + \theta_6)$$

Zatem mamy układ równań:

$$\begin{cases} s(\varphi + \theta_6) = \dfrac{D}{R} \\ c(\varphi + \theta_6) = \pm\sqrt{1 - \left(\dfrac{D}{R}\right)^2}, \end{cases}$$

który po podzieleniu stronami i zastosowaniu funkcji *arctan* pozwala na wyznaczenie wartości kąta θ_2:

$$\theta_6 = arctan\left(\frac{\frac{D}{R}}{\pm\sqrt{1 - \left(\frac{D}{R}\right)^2}}\right) - arctan\left(\frac{U}{W}\right)$$

Wybór właściwego rozwiązania spośród wielu otrzymywanych dokonywany jest na podstawie założenia o ciągłości trajektorii. Właściwe rozwiązanie jest najbliższe akutalnej pozycji ramienia.