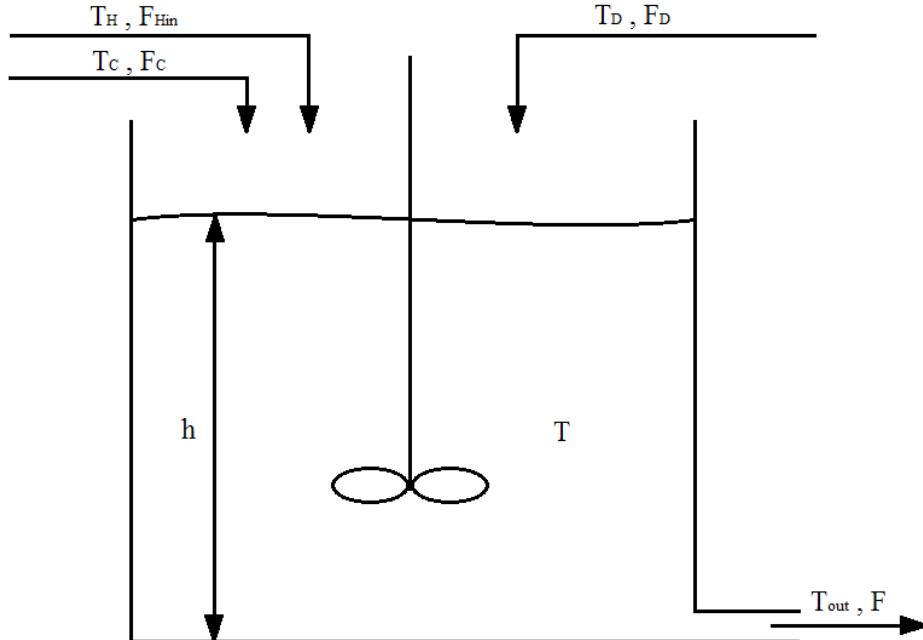


Technika Automatyzacji Procesów – projekt
 semestr letni 2017

I sprawozdanie częściowe

Zbiornik z mieszaniem
 (zadanie 3)



Mieszanie wody gorącej (T_H, F_H) z zimną (T_C, F_C) z dopływem zakłócającym (T_D, F_D).
 Równania opisujące działanie obiektu:

$$\begin{cases} A \frac{dh}{dt} = F_H + F_C + F_D - F(h) \\ A \cdot h \frac{dT}{dt} = F_H \cdot T_H + F_C \cdot T_C + F_D \cdot T_D - (F_H + F_C + F_D) \cdot T \\ F(h) = \alpha \sqrt{h}, T_{out}(t) = T(t - \tau), F_H(t) = F_{Hin}(t - \tau_H) \end{cases}$$

Po przekształceniu:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = \frac{F_H + F_C + F_D - \alpha \sqrt{h}}{A} \\ \frac{dT}{dt} = \frac{F_H \cdot T_H + F_C \cdot T_C + F_D \cdot T_D - (F_H + F_C + F_D) \cdot T}{A \cdot h} \end{cases}$$

Stałe:

$$A = 500 \text{ cm}^2, \alpha = 22$$

Punkt pracy:

$$\begin{aligned} T_{C0} &= 17^\circ C, T_{H0} = 75^\circ C, T_{D0} = 42^\circ C, \\ F_{C0} &= 60 \text{ cm}^3/\text{s}, F_{H0} = 20 \text{ cm}^3/\text{s}, F_{D0} = 15 \text{ cm}^3/\text{s}, \\ \tau_H &= 230 \text{ s}, h_0 = 18,65 \text{ cm}, T_0 = 33,16^\circ C \end{aligned}$$

- a) Modele zlinearyzowane (ciągły w postaci równań stanu i transmitancji) we wskazanym punkcie pracy

Ze względu na nieliniowość równań różniczkowych opisujących działanie obiektu należy poddać je linearyzacji we wskazanym punkcie pracy. Równania po linearyzacji mają następującą postać:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} \approx \frac{1}{A} \left(\frac{-\alpha \sqrt{h_0}}{2\sqrt{h_0}} h + F_H + F_C + F_D - \frac{\alpha \sqrt{h_0}}{2} \right) \\ \frac{dT}{dt} \approx \frac{1}{Ah_0} \left[-\left(\frac{F_{H0} \cdot T_{H0} + F_{C0} \cdot T_{C0} + F_{D0} \cdot T_{D0} - (F_{H0} + F_{C0} + F_{D0}) \cdot T_0}{h_0} \right) h - (F_{H0} + F_{C0} + F_{D0}) T \right. \\ \quad \left. + (T_{H0} - T_0) F_H + F_{H0} T_H + (T_{C0} - T_0) F_C + F_{C0} T_C + (T_{D0} - T_0) F_D + F_{D0} T_D \right] \end{cases}$$

Dla wektorów zmiennych stanu, wejścia i wyjścia w postaci:

$$x(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} F_H(t) \\ T_H(t) \\ F_C(t) \\ T_C(t) \\ F_D(t) \\ T_D(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \end{bmatrix}$$

Otrzymano model ciągły zlinearyzowany w postaci równań stanu:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) + E \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned}$$

, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2A\sqrt{h_0}} & 0 \\ -\frac{F_{H0} \cdot T_{H0} + F_{C0} \cdot T_{C0} + F_{D0} \cdot T_{D0} - (F_{H0} + F_{C0} + F_{D0}) \cdot T_0}{Ah_0^2} & -\frac{F_{H0} + F_{C0} + F_{D0}}{Ah_0} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & \frac{1}{A} & 0 & \frac{1}{A} & 0 \\ \frac{T_{H0} - T_0}{Ah_0} & \frac{F_{H0}}{Ah_0} & \frac{T_{C0} - T_0}{Ah_0} & \frac{F_{C0}}{Ah_0} & \frac{T_{D0} - T_0}{Ah_0} & \frac{F_{D0}}{Ah_0} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \mathbf{0}, E = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha \sqrt{h_0}}{2A} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.0051 & 0 \\ 1.15 \cdot 10^{-6} & -0.0102 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.002 & 0 & 0.002 & 0 & 0.002 & 0 \\ 0.0045 & 0.0021 & -0.0017 & 0.0064 & 0.0009 & 0.0016 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -\alpha \sqrt{h_0} \\ 2A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Następnie za pomocą funkcji programu Matlab wyznaczono model w postaci transmitancji:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) & G_{14}(s) & G_{15}(s) & G_{16}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) & G_{24}(s) & G_{25}(s) & G_{26}(s) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(s)^T = \begin{bmatrix} \frac{0.002}{s+0.005094} & \frac{0.004487s+2.286 \cdot 10^{-5}}{s^2+0.01528s+5.19 \cdot 10^{-5}} \\ 0 & \frac{0.002145}{s+0.01019} \\ \frac{0.002}{s+0.005094} & \frac{-0.001733s-8.826 \cdot 10^{-6}}{s^2+0.01528s+5.19 \cdot 10^{-5}} \\ 0 & \frac{0.006434}{s+0.01019} \\ \frac{0.002}{s+0.005094} & \frac{0.000948s+4.832 \cdot 10^{-6}}{s^2+0.01528s+5.19 \cdot 10^{-5}} \\ 0 & \frac{0.001609}{s+0.01019} \end{bmatrix}$$

Model w postaci transmitancji można zastosować tylko w przypadku modeli liniowych (zlinearyzowanych). Transmitancja jest uproszczeniem, gdyż nie zawiera informacji na temat warunków początkowych oraz stałych.

Powyżej wyznaczono modele zlinearyzowane bez występujących opóźnień występujących w obiekcie. Uwzględniając opóźnienia dla wektorów zmiennych stanu, wejść i wyjście w postaci:

$$x(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \end{bmatrix}, x(t-\tau_H) = \begin{bmatrix} h(t-\tau_H) \\ T(t-\tau_H) \end{bmatrix}, x(t-\tau) = \begin{bmatrix} h(t-\tau) \\ T(t-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(t-\tau) \\ T_{out}(t) \end{bmatrix},$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} F_{Hin}(t) \\ T_H(t) \\ F_C(t) \\ T_C(t) \\ F_D(t) \\ T_D(t) \end{bmatrix}, u(t-\tau_H) = \begin{bmatrix} F_{Hin}(t-\tau_H) \\ T_H(t-\tau_H) \\ F_C(t-\tau_H) \\ T_C(t-\tau_H) \\ F_D(t-\tau_H) \\ T_D(t-\tau_H) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_H(t) \\ T_H(t-\tau_H) \\ F_C(t-\tau_H) \\ T_C(t-\tau_H) \\ F_D(t-\tau_H) \\ T_D(t-\tau_H) \end{bmatrix}, u(t-\tau) = \begin{bmatrix} F_{Hin}(t-\tau) \\ T_H(t-\tau) \\ F_C(t-\tau) \\ T_C(t-\tau) \\ F_D(t-\tau) \\ T_D(t-\tau) \end{bmatrix}, y(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ T_{out}(t) \end{bmatrix}$$

Otrzymano model ciągły zlinearyzowany w postaci równań stanu:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{A}_1x(t-\tau_H) + \mathbf{B}_1u(t-\tau_H) + \mathbf{A}_2x(t-\tau) + \mathbf{B}_2u(t-\tau) + \mathbf{E}$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) + \mathbf{C}_1x(t-\tau_H) + \mathbf{D}_1u(t-\tau_H) + \mathbf{C}_2x(t-\tau) + \mathbf{D}_2u(t-\tau)$$

, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2A\sqrt{h_0}} & 0 \\ -\frac{F_{H0} \cdot T_{H0} + F_{C0} \cdot T_{C0} + F_{D0} \cdot T_{D0} - (F_{H0} + F_{C0} + F_{D0}) \cdot T_0}{Ah_0^2} & -\frac{F_{H0} + F_{C0} + F_{D0}}{Ah_0} \end{bmatrix}, A_1 = \mathbf{0}, A_2 = \mathbf{0}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{A} & 0 & \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{F_{H0}}{Ah_0} & \frac{T_{C0} - T_0}{Ah_0} & \frac{F_{C0}}{Ah_0} & \frac{T_{D0} - T_0}{Ah_0} & \frac{F_{D0}}{Ah_0} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{T_{H0} - T_0}{Ah_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \mathbf{0},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_1 = \mathbf{0}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \mathbf{0}, D_1 = \mathbf{0}, D_2 = \mathbf{0}, E = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha\sqrt{h_0}}{2A} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oraz model w postaci transmitancji:

$$G(s)^r = \begin{bmatrix} \frac{0.002}{s+0.005094} \cdot e^{-230s} & \frac{0.004487s + 2.286 \cdot 10^{-5}}{s^2 + 0.01528s + 5.19 \cdot 10^{-5}} \cdot e^{-500s} \\ 0 & \frac{0.002145}{s+0.01019} \cdot e^{-270s} \\ \frac{0.002}{s+0.005094} & \frac{-0.001733s - 8.826 \cdot 10^{-6}}{s^2 + 0.01528s + 5.19 \cdot 10^{-5}} \cdot e^{-270s} \\ 0 & \frac{0.006434}{s+0.01019} \cdot e^{-270s} \\ \frac{0.002}{s+0.005094} & \frac{0.000948s + 4.832 \cdot 10^{-6}}{s^2 + 0.01528s + 5.19 \cdot 10^{-5}} \cdot e^{-270s} \\ 0 & \frac{0.001609}{s+0.01019} \cdot e^{-270s} \end{bmatrix}$$

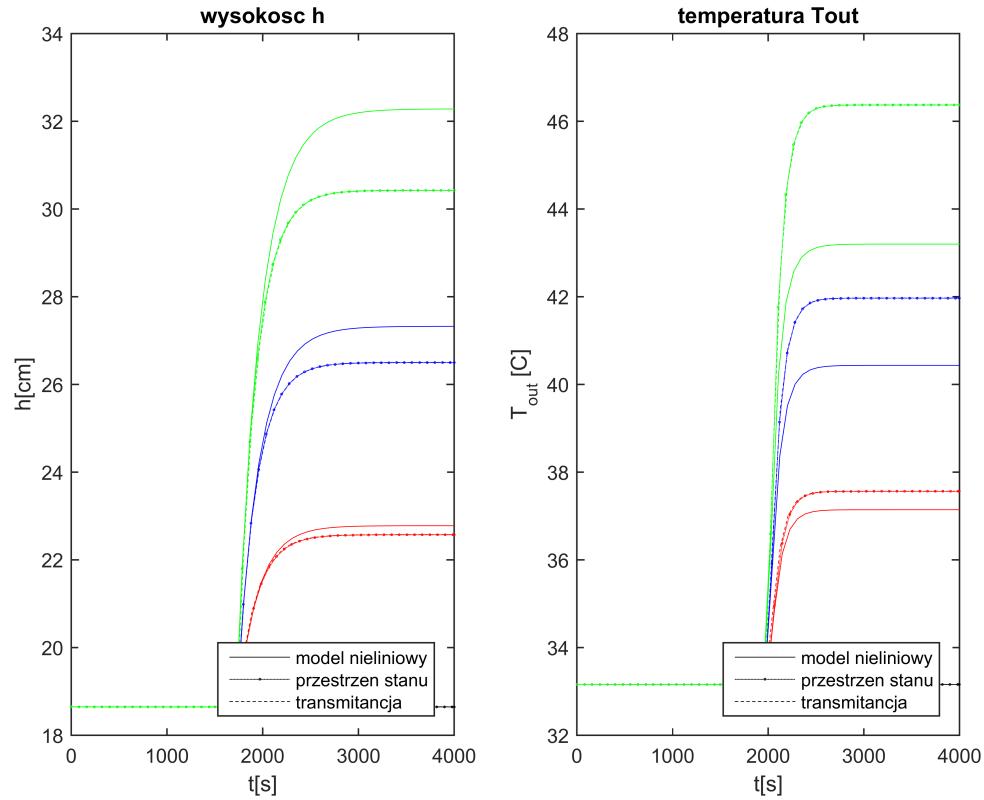
b) Porównanie działania modeli liniowych z działaniem modelu nieliniowego

Poniżej przedstawiono przebiegi otrzymane dla modelu nieliniowego i modelu zlinearyzowanego w postaci równań stanu oraz transmitancji. Dla zmiennych wejściowych zastosowano skoki (startując z podanego punktu równowagi – dla którego wykresy są oznaczone kolorem czarnym):

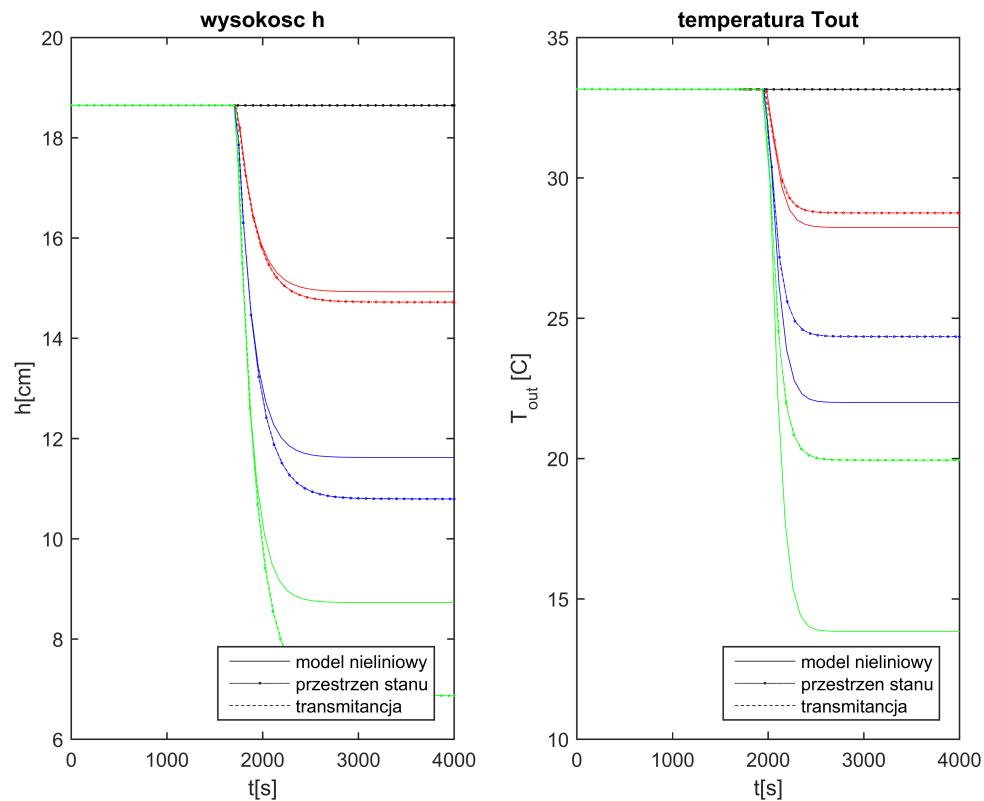
- +10 oraz -10 $\frac{cm^3}{s}$ (dla przepływów) lub $^{\circ}C$ (dla temperatur) – oznaczone kolorem czerwonym;
- +20 oraz -20 $\frac{cm^3}{s}$ (dla przepływów) lub $^{\circ}C$ (dla temperatur) – oznaczone kolorem niebieskim;
- +30 oraz -30 $\frac{cm^3}{s}$ (dla przepływów) lub $^{\circ}C$ (dla temperatur) – oznaczone kolorem zielonym;

Wykresy dla transmitancji są poprowadzone linią przerywaną, dla modelu w przestrzeni stanu wykresy są zaprezentowane za pomocą linii kropkowanej z markerami, zaś dla modelu nieliniowego linią ciągłą. Skoki wprowadzane są w 1500 sekundzie czasu symulowanego.

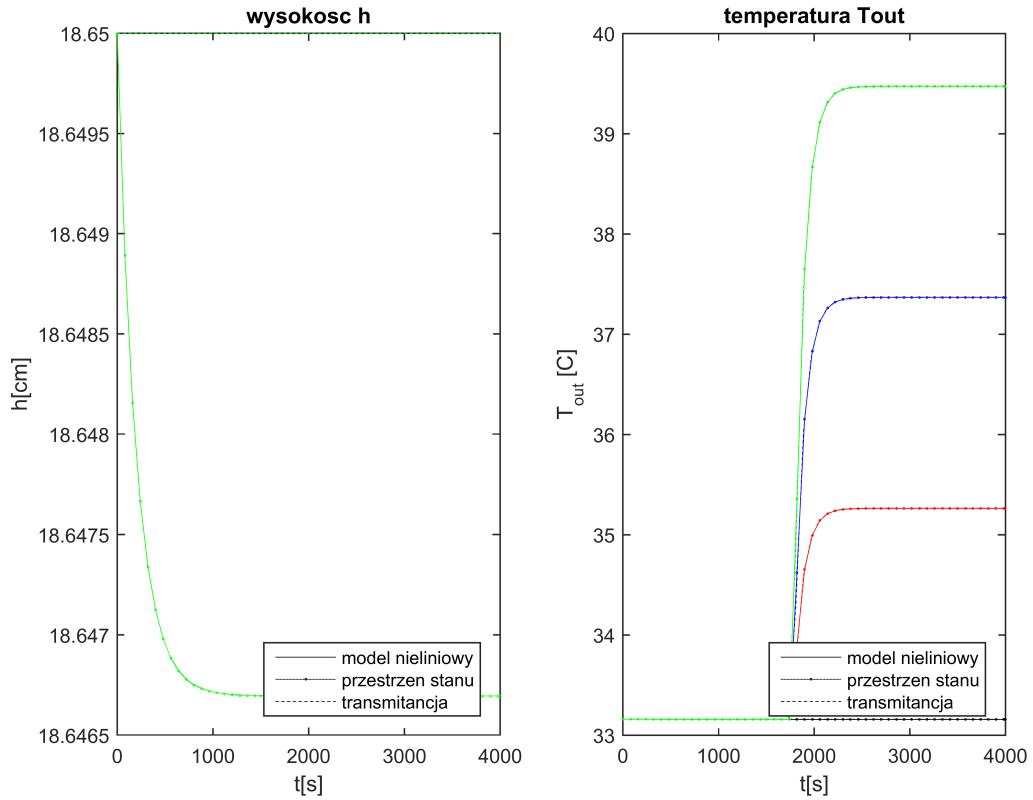
- Odpowiedzi na dodatni skok F_H :



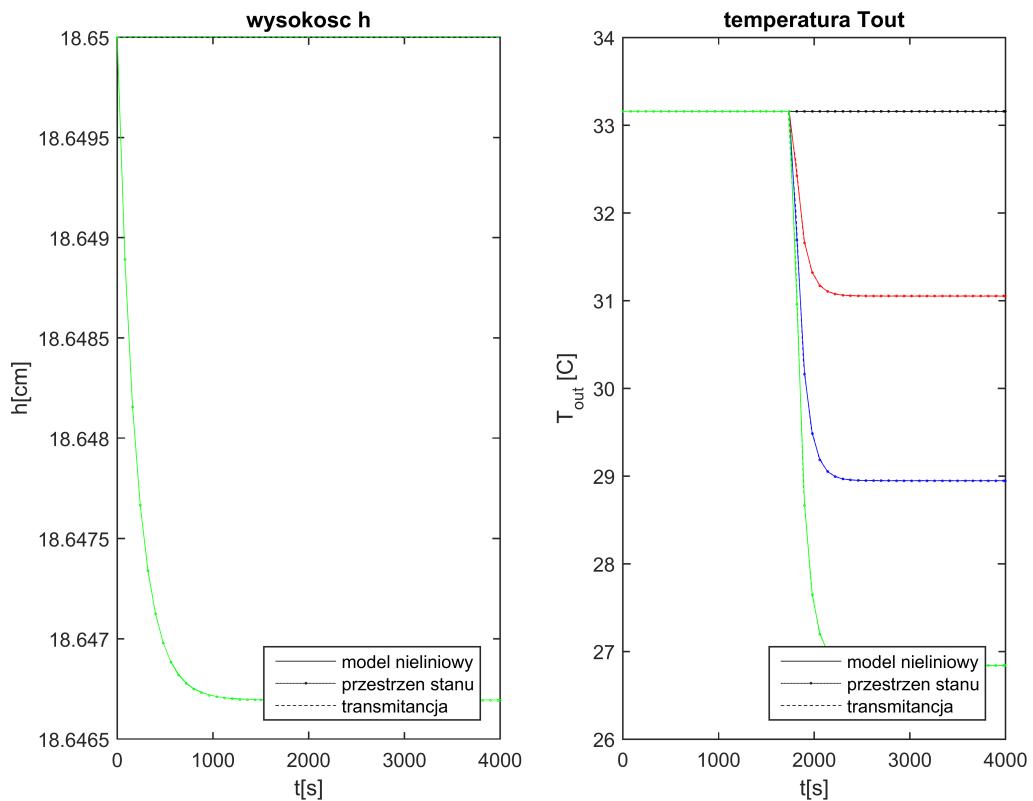
- Odpowiedzi na ujemny skok F_H :



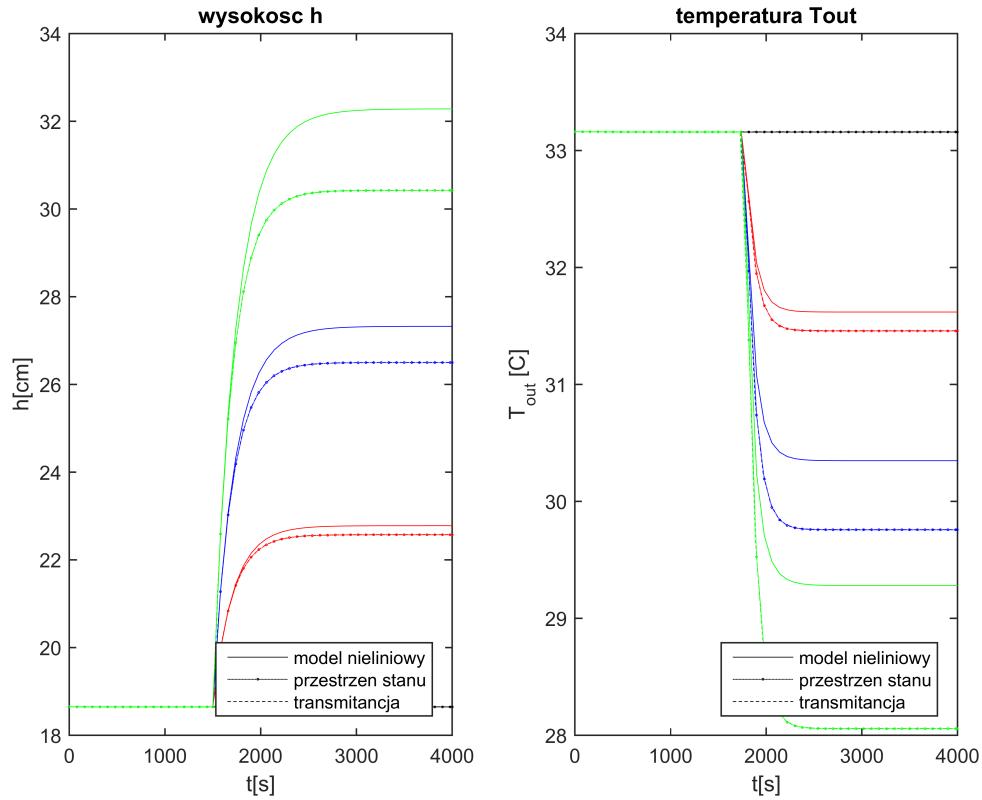
- Odpowiedzi na dodatni skok T_H :



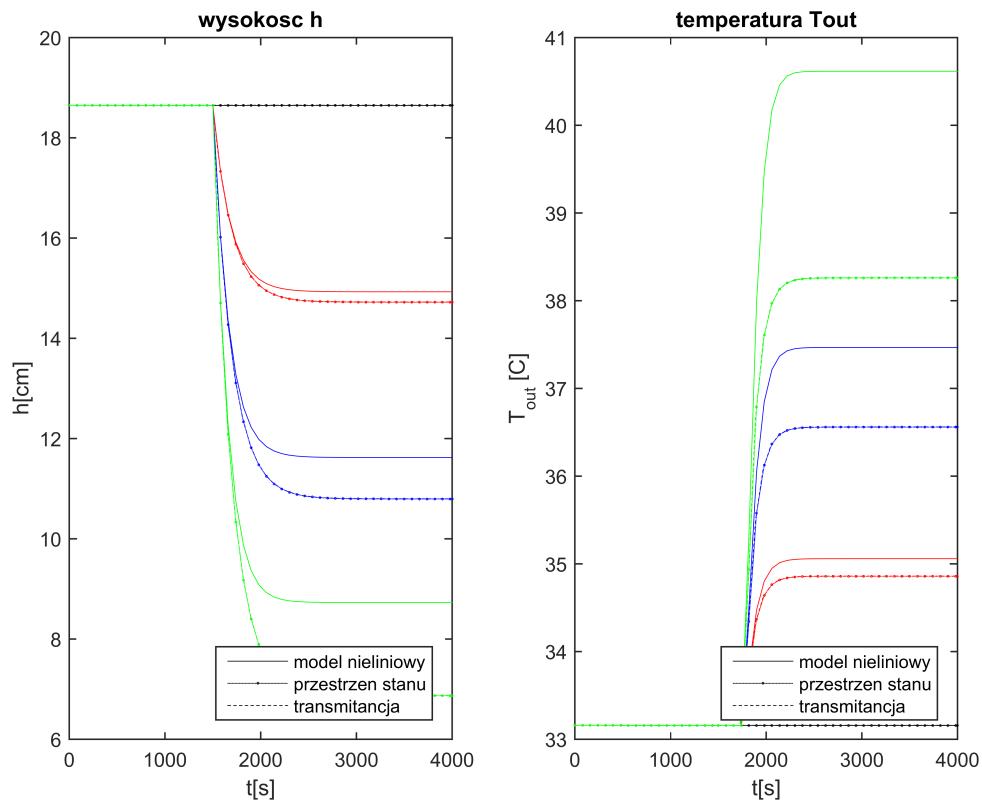
- Odpowiedzi na ujemny skok T_H :



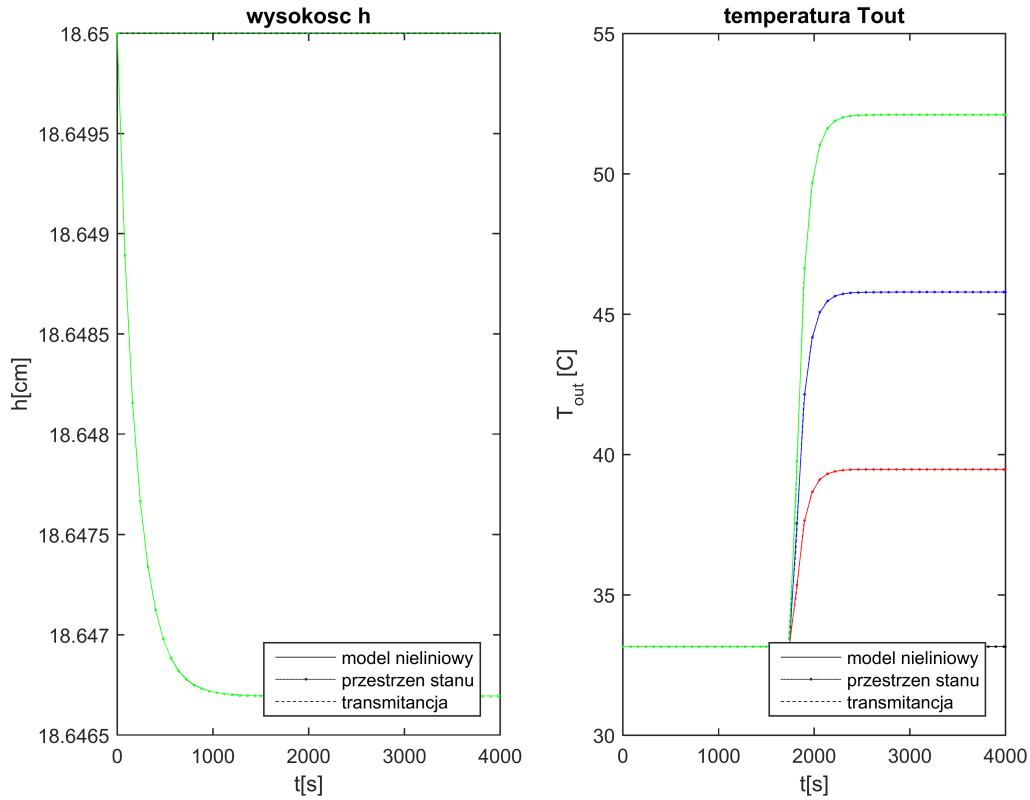
- Odpowiedzi na dodatni skok F_C :



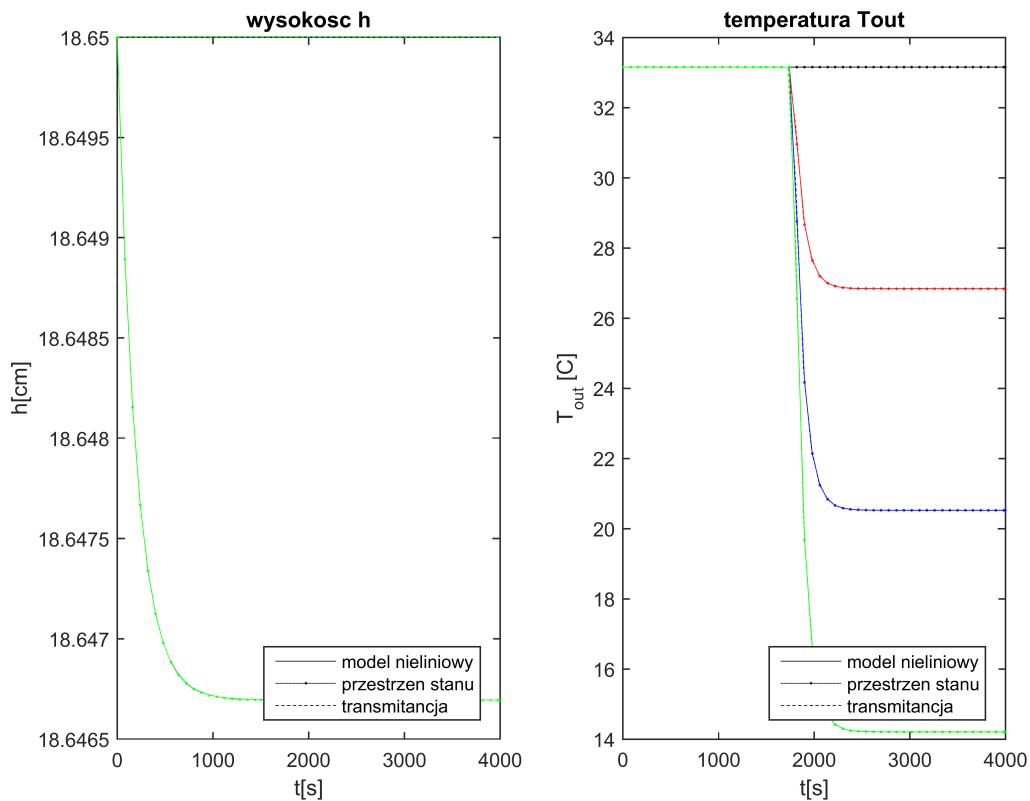
- Odpowiedzi na ujemny skok F_C :



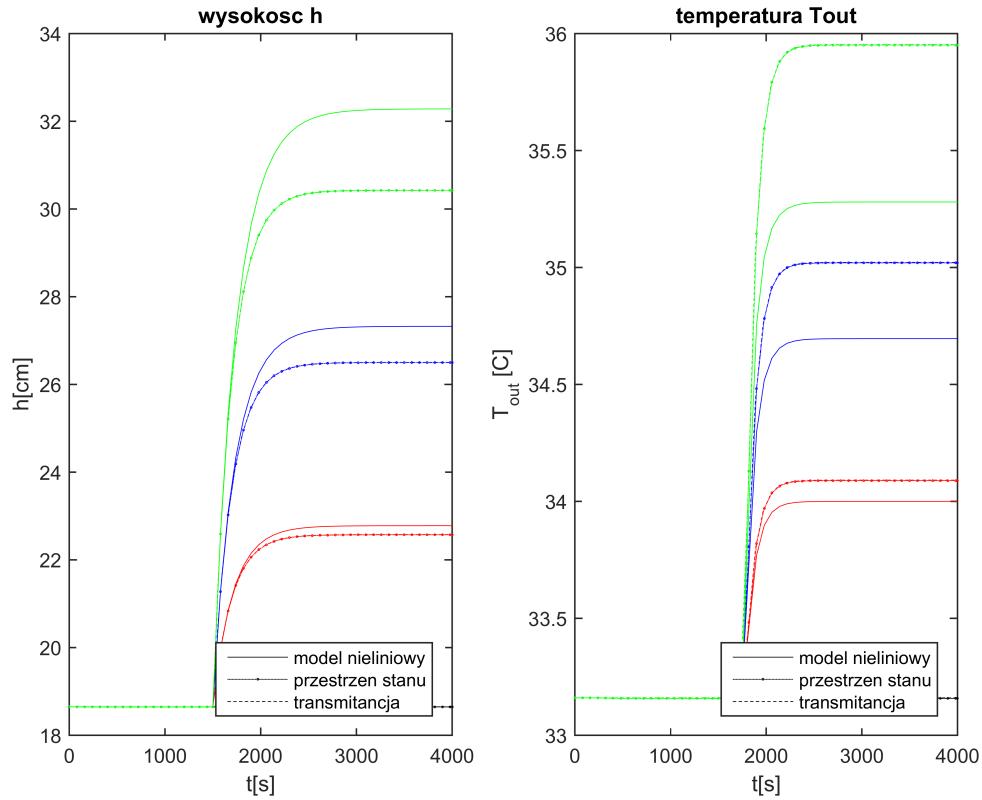
- Odpowiedzi na dodatni skok T_C :



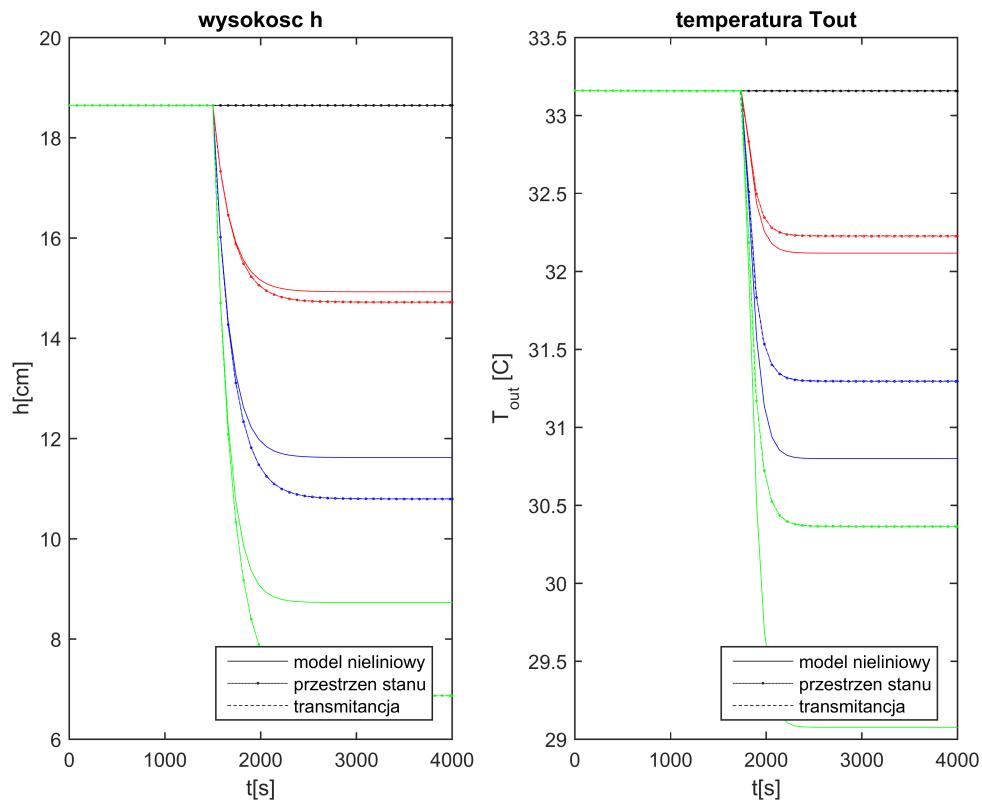
- Odpowiedzi na ujemny skok T_C :



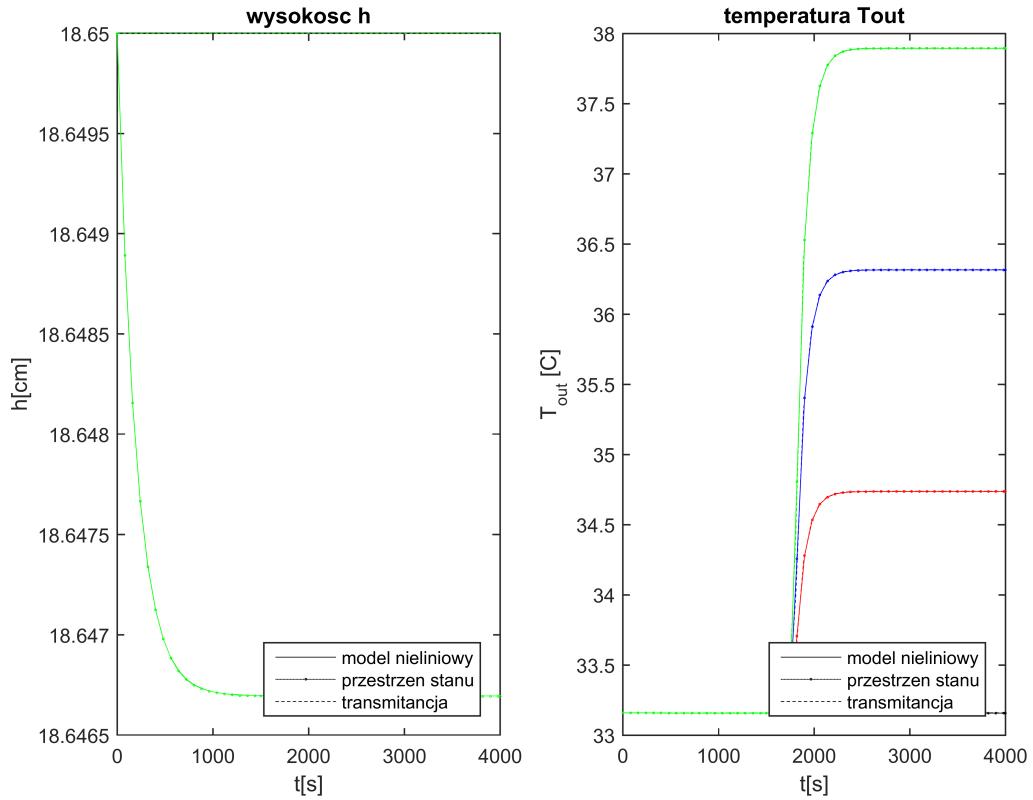
- Odpowiedzi na dodatni skok F_D :



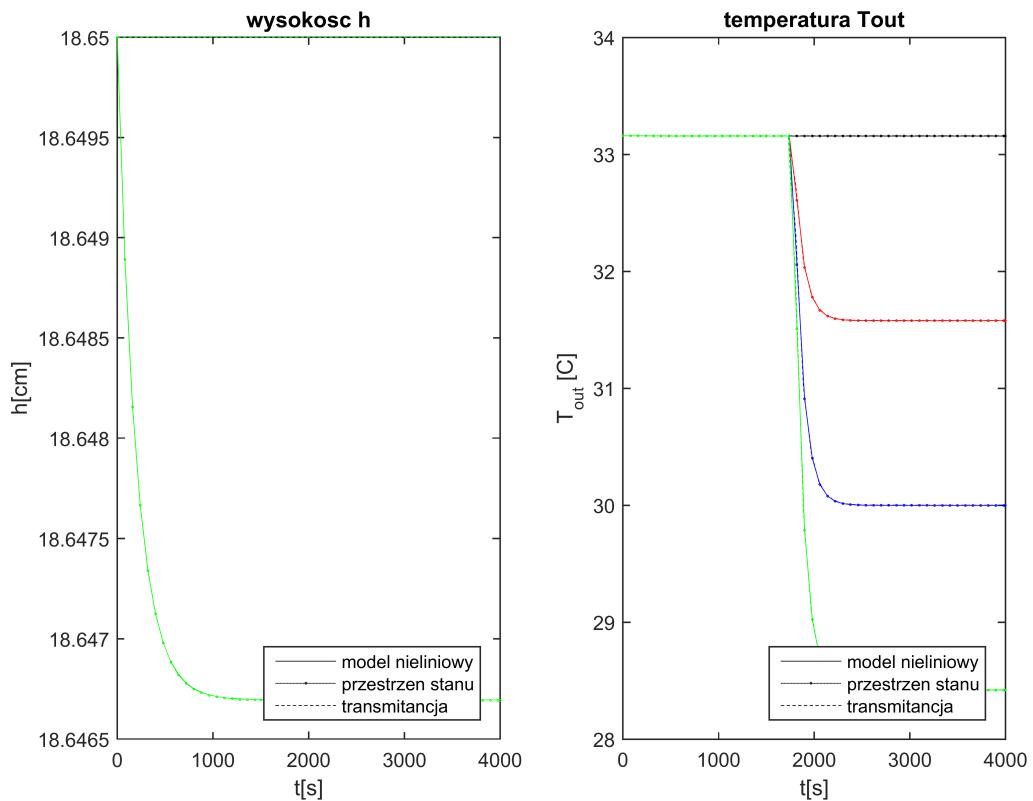
- Odpowiedzi na ujemny skok F_D :



- Odpowiedzi na dodatni skok T_D :



- Odpowiedzi na ujemny skok T_D :



- c) Dyskusja na temat jakości przybliżenia liniowego, w zależności od wielkości zmian sygnałów wejściowych

Odpowiedzi otrzymane dla modeli zlinearyzowanych w postaci równań stanu oraz transmitancji pokrywają się. Analizując otrzymane charakterystyki widoczny jest wyraźny wzrost wielkości błędu względnego (różnicy między wartościami uzyskiwanymi na podstawie modelu nieliniowego i modelu liniowego w postaci równań stanu) wraz ze wzrostem wartości bezwzględnej skoku wielkości wejściowej. Według modelu nie ma zależności pomiędzy wyjściem h a temperaturami T_H, T_C, T_D . Zatem ich skoki nie powodują zmiany wysokości słupa cieczy w zbiorniku. Dla skoków tych wielkości wejściowych nie występuje różnica pomiędzy odpowiedziami modelu nieliniowego i liniowego w postaci równań stanu. Widać tylko niewielką różnicę odpowiedzi tych modeli w stosunku do odpowiedzi transmitancji. Wynika to z faktu, iż punkt pracy podany w zadaniu $h_0 = 18,65$ w zadaniu nie odpowiada rzeczywistemu, który w przybliżeniu wynosi $h_0 = 18,6467$ cm i do niego dążą wartości odpowiedzi modeli w przestrzeni stanu.

- d) Modele liniowe, dyskretne (w postaci równań stanu i transmitancji)

Przyjęto okres próbkowania $T_p = 10$ s

Za pomocą funkcji programu Matlab wyznaczono model w postaci transmitancji:

$$G(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) & G_{13}(z) & G_{14}(z) & G_{15}(z) & G_{16}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) & G_{23}(z) & G_{24}(z) & G_{25}(z) & G_{26}(z) \end{bmatrix}$$

$$G(z)^T = \begin{bmatrix} \frac{0.009752z + 0.009752}{z - 0.9503} \cdot z^{-23} & \frac{0.02135z^2 + 0.001061z - 0.02029}{z^2 - 1.853z + 0.8582} \cdot z^{-50} \\ 0 & \frac{0.0102z + 0.0102}{z - 0.9031} \cdot z^{-27} \\ \frac{0.009752z + 0.009752}{z - 0.9503} & \frac{-0.008245z^2 - 0.0004095z + 0.007835}{z^2 - 1.853z + 0.8582} \cdot z^{-27s} \\ 0 & \frac{0.03061z + 0.03061}{z - 0.9031} \cdot z^{-27} \\ \frac{0.009752z + 0.009752}{z - 0.9503} & \frac{0.00451z^2 + 0.0002242z - 0.004286}{z^2 - 1.853z + 0.8582} \cdot z^{-27} \\ 0 & \frac{0.007653z + 0.007653}{z - 0.9031} \cdot z^{-27} \end{bmatrix}$$

Uwzględniając opóźnienia dla wektorów zmiennych stanu, wejść i wyjście w postaci:

$$\begin{aligned}
x(k) &= \begin{bmatrix} h(k) \\ T(k) \end{bmatrix}, x(k - \frac{\tau_H}{T_p}) = \begin{bmatrix} h(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \\ T(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \end{bmatrix}, x(k - \frac{\tau}{T_p}) = \begin{bmatrix} h(k - \frac{\tau}{T_p}) \\ T(k - \frac{\tau}{T_p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(k - \frac{\tau}{T_p}) \\ T_{out}(k) \end{bmatrix}, \\
u(k) &= \begin{bmatrix} F_{Hin}(k) \\ T_H(k) \\ F_C(k) \\ T_C(k) \\ F_D(k) \\ T_D(k) \end{bmatrix}, u(k - \frac{\tau_H}{T_p}) = \begin{bmatrix} F_{Hin}(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \\ T_H(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \\ F_C(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \\ T_C(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \\ F_D(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \\ T_D(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_H(k) \\ T_H(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \\ F_C(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \\ T_C(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \\ F_D(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \\ T_D(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \end{bmatrix}, u(k - \frac{\tau}{T_p}) = \begin{bmatrix} F_{Hin}(k - \frac{\tau}{T_p}) \\ T_H(k - \frac{\tau}{T_p}) \\ F_C(k - \frac{\tau}{T_p}) \\ T_C(k - \frac{\tau}{T_p}) \\ F_D(k - \frac{\tau}{T_p}) \\ T_D(k - \frac{\tau}{T_p}) \end{bmatrix}, \\
y(t) &= \begin{bmatrix} h(k) \\ T_{out}(k) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Otrzymano model ciągły zlinearyzowany w postaci równań stanu:

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + A_1x(k - \frac{\tau_H}{T_p}) + B_1u(k - \frac{\tau_H}{T_p}) + A_2x(k - \frac{\tau}{T_p}) + B_2u(k - \frac{\tau}{T_p}) + E \\
y(k) &= Cx(k) + Du(k) + C_1x(k - \frac{\tau_H}{T_p}) + D_1u(k - \frac{\tau_H}{T_p}) + C_2x(k - \frac{\tau}{T_p}) + D_2u(k - \frac{\tau}{T_p}) + F
\end{aligned}$$

, gdzie:

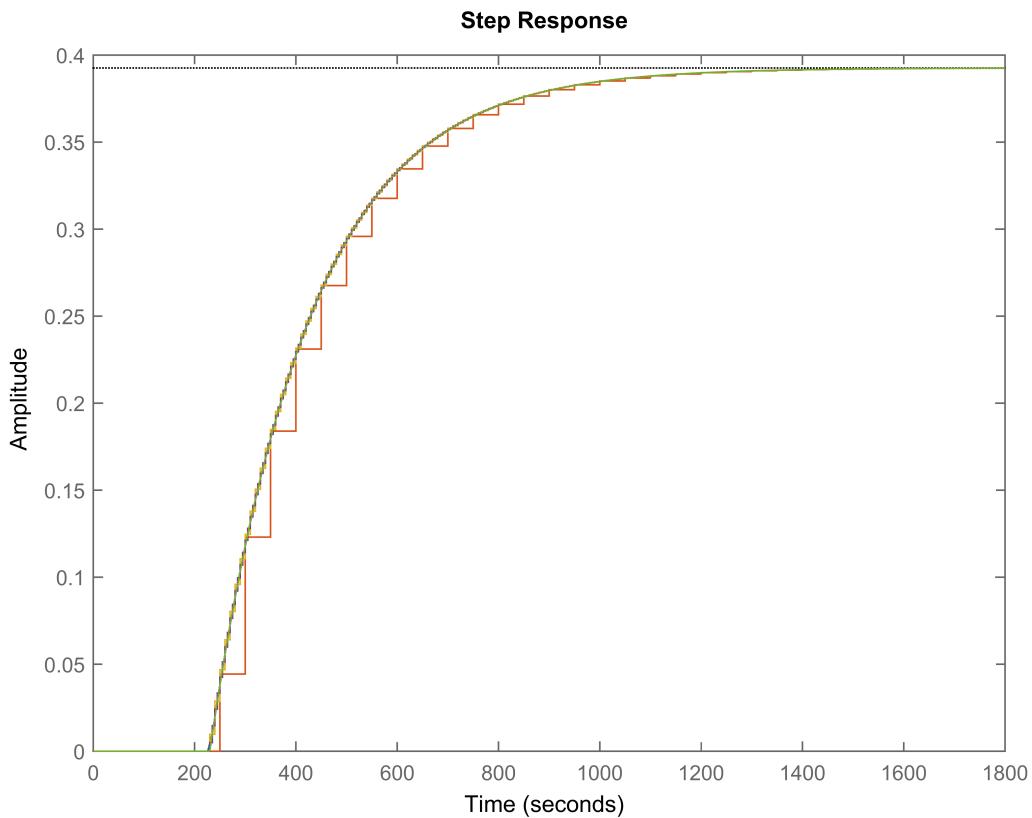
$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0.9503 & 0 \\ 1.067 \cdot 10^{-05} & 0.9031 \end{bmatrix}, A_1 = \mathbf{0}, A_2 = \mathbf{0}, \\
B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0195 & 0 & 0.0195 & 0 \\ 0 & 0.02041 & -0.01649 & 0.06122 & 0.009021 & 0.01531 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.0195 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.04269 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
B_2 &= \mathbf{0}, C = \begin{bmatrix} 0.9752 & 0 \\ 5.335 \cdot 10^{-06} & 0 \end{bmatrix}, C_1 = \mathbf{0}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.9515 \end{bmatrix}, \\
D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.009752 & 0 & 0.009752 & 0 \\ 0 & 0.0102 & -0.008245 & 0.03061 & 0.00451 & 0.007653 \end{bmatrix}, \\
D_1 &= \begin{bmatrix} 0.009752 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.02135 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \mathbf{0}, E = \begin{bmatrix} -0.9265 \\ -5.0691 \cdot 10^{-06} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -0.4632 \\ -2.5346 \cdot 10^{-06} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Dokonanie dyskretyzacji układu wymaga odpowiedniego doboru czasu próbkowania, który umożliwi jak najlepsze odwzorowanie odpowiedzi modelu ciągłego stosując model dyskretny. Zwiększenie okresu próbkowania powoduje zwiększenie różnicy pomiędzy odpowiedzą modelu dyskretnego i ciągłego. Mniejsze wartości okresu próbkowania powodują zwiększenie kosztów oraz czasu obliczeń. Celem zatem jest uzyskanie kompromisu pomiędzy jakością dyskretyzacji,

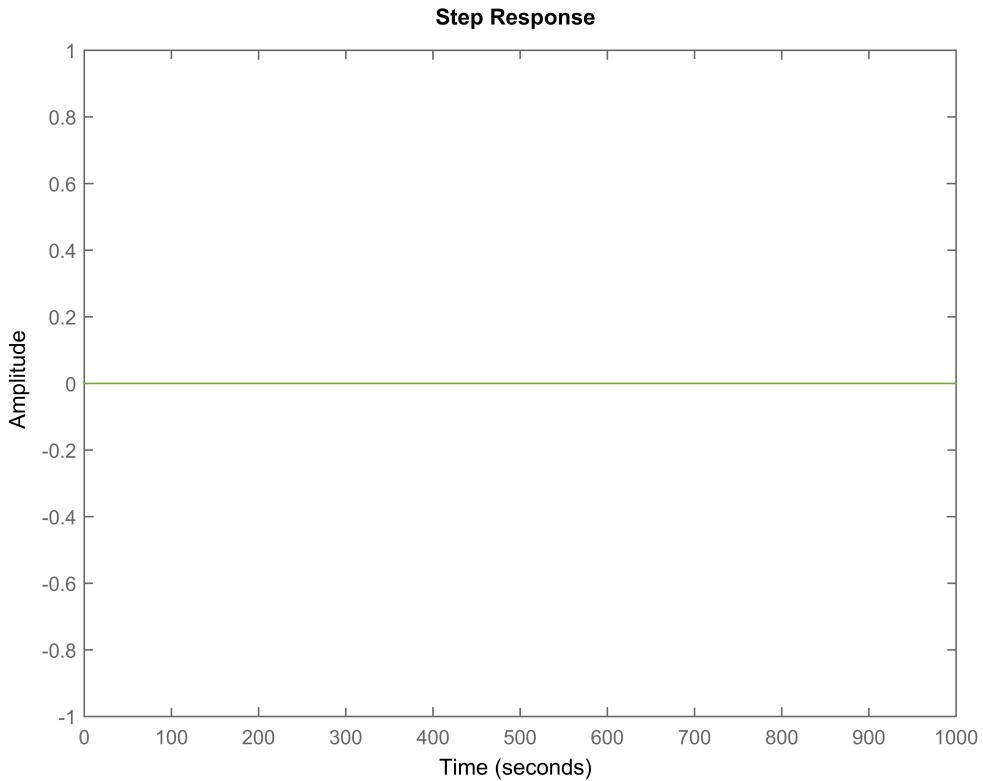
a czasem obliczeń (symulacji). Modele w postaci równań stanu oraz transmitancji wyznaczono za pomocą funkcji programu Matlab `c2d(sys1, Tp, metoda)`. Do wygenerowania modeli dyskretnych wykorzystano metodę trapezów. Przeanalizowano charakterystyki odpowiedzi na skok jednostkowy dla różnych kombinacji wejść oraz wyjść, stosując okresy próbkowania T_p równe 50s, 10s, 5s oraz 1s. Analizując wykresy umieszczone poniżej widać, że najlepsze wyniki utrzymuje się dla coraz mniejszych wartości okresu próbkowania, jednak zadowalające odpowiedzi uzyskuje się dla czasu próbkowania $T_p = 10s$. Okres próbkowania, dla którego występujące opóźnienia w układzie nie są jego wielokrotnością wprowadza błędy w odpowiedziach układu. Dla T_p równego 50s występują różne wielkości przesunięcia odpowiedzi modelu dyskretnego, względem odpowiedzi modelu ciągłego. Wynika to z zaokrąglenia liczby próbek prezentujących wartość opóźnienia. Opóźnienia występujące w układzie to $\tau_H = 230s, \tau = 270s$ i każde z nich jest zaokrąglane do liczby próbek równej 5, które w reprezentacji czasowej wynoszą 250s. Z tego względu występują różne wielkości przesunięcia odpowiedzi modelu dyskretnego z okresem próbkowania 50s, względem odpowiedzi modelu ciągłego. Wybór odpowiednio małego okresu próbkowania jest konieczny ze względu na szybkie zmiany amplitudy temperatury T_{out} w odpowiedzi na skok jednostkowy.

Otrzymane odpowiedzi na skok jednostkowy:

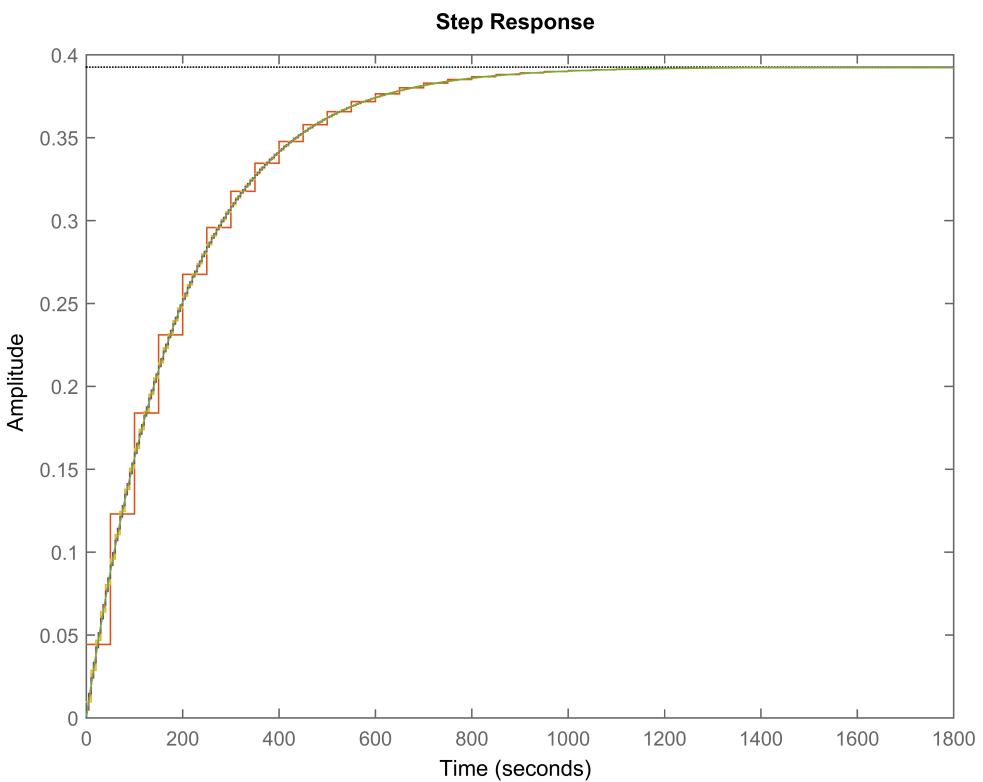
Wejście F_H wyjście h



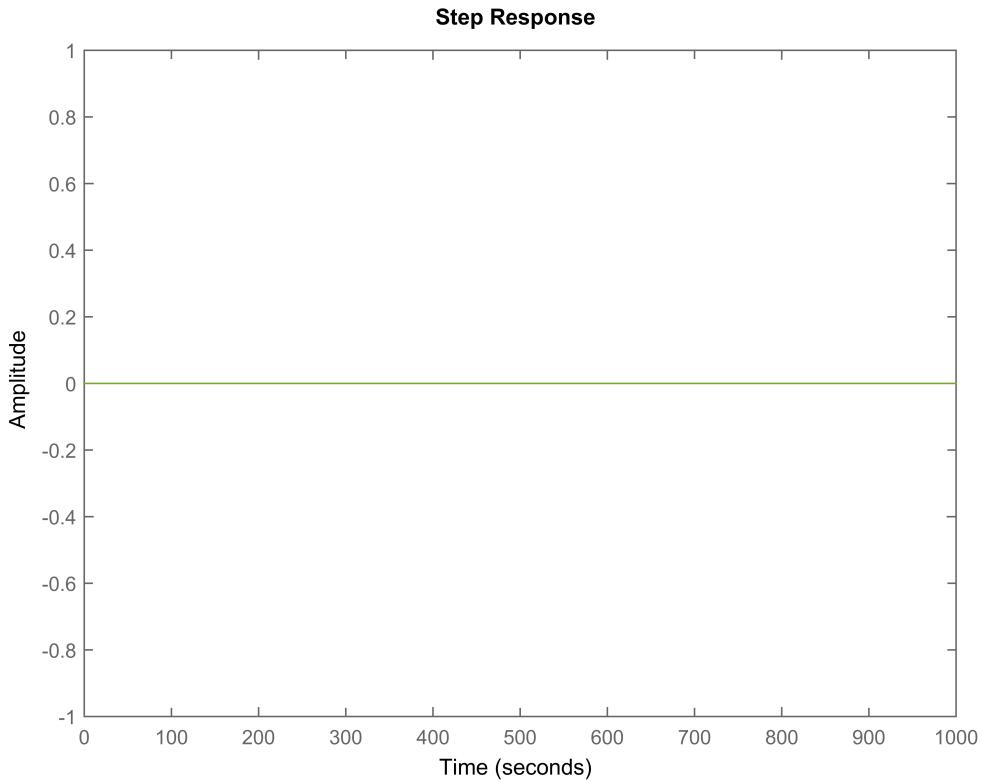
Wejście T_H wyjście h



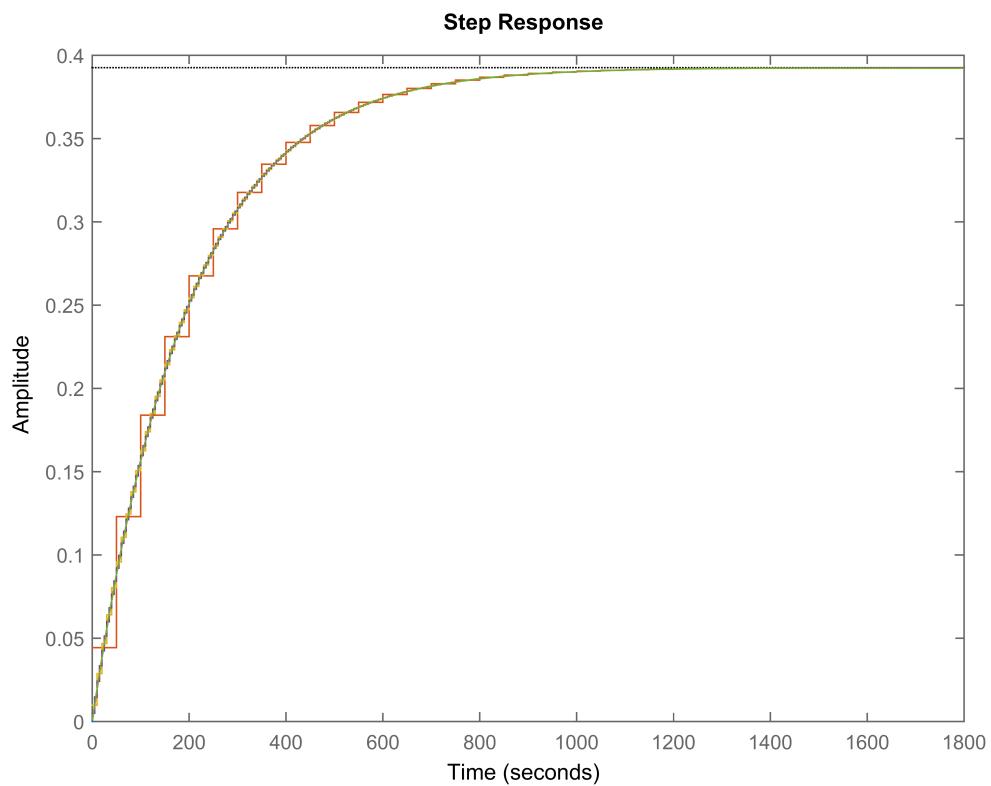
Wejście F_C wyjście h



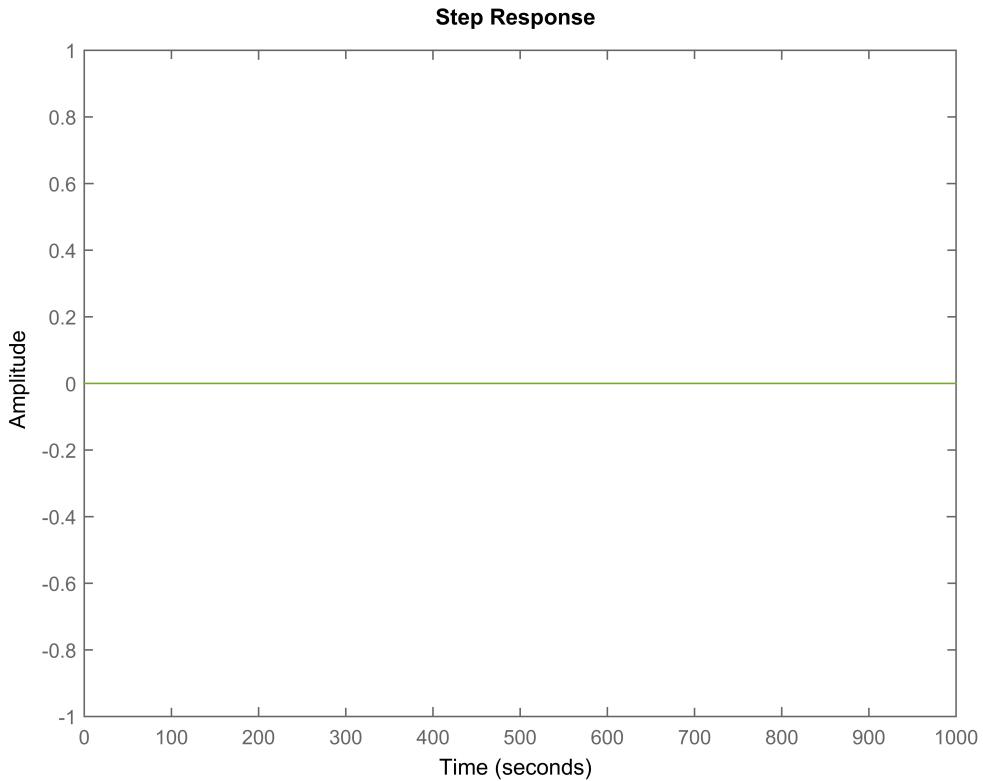
Wejście T_C wyjście h



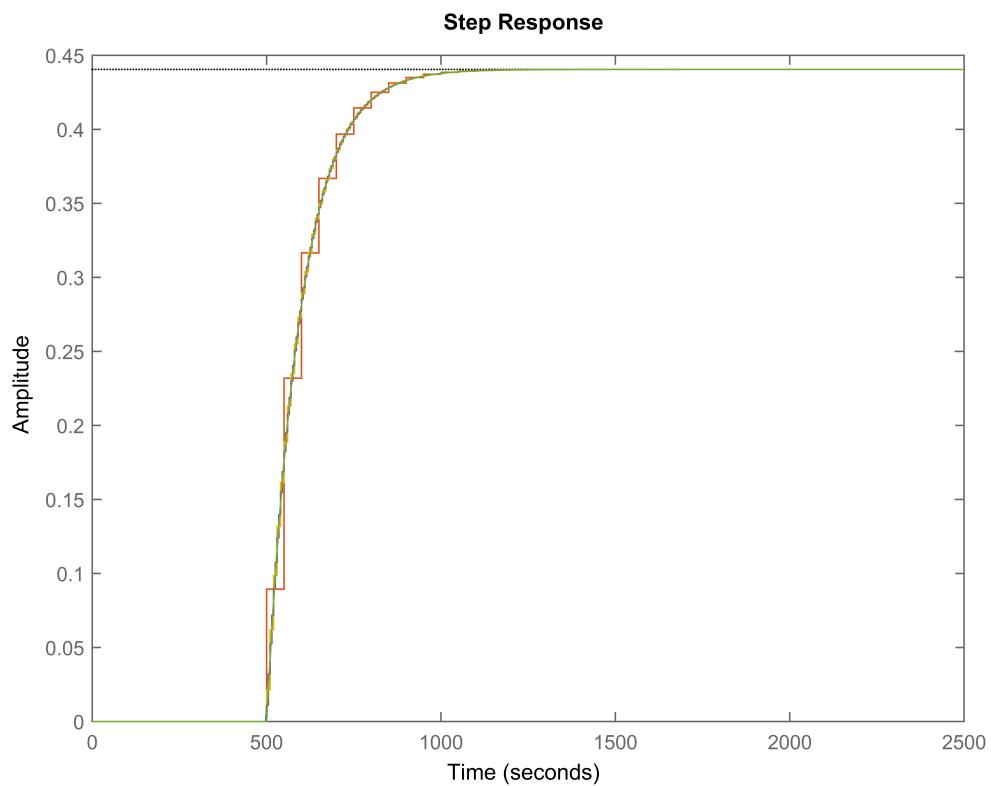
Wejście F_D wyjście h



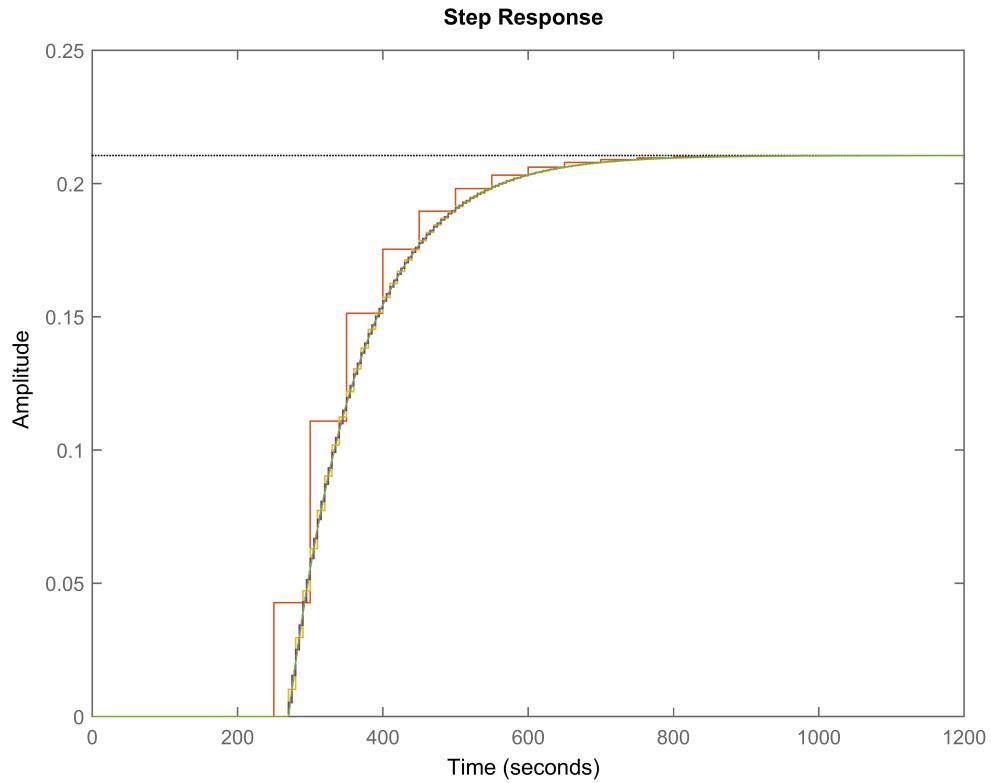
Wejście T_D wyjście h



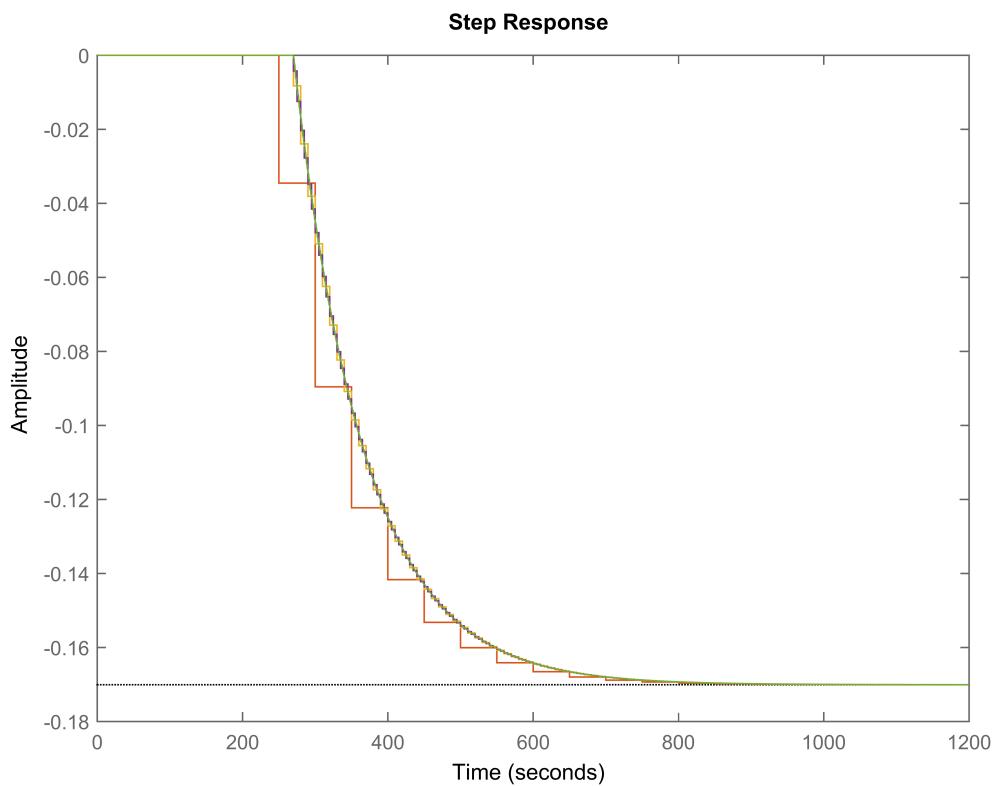
Wejście F_H wyjście T_{out}



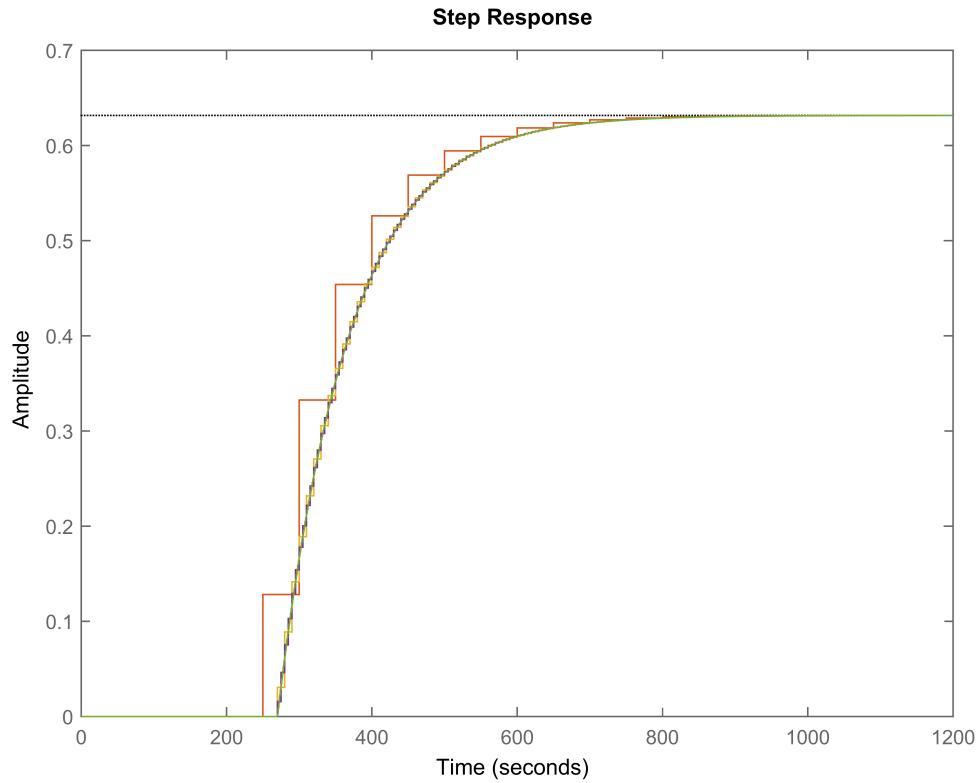
Wejście T_H wyjście T_{out}



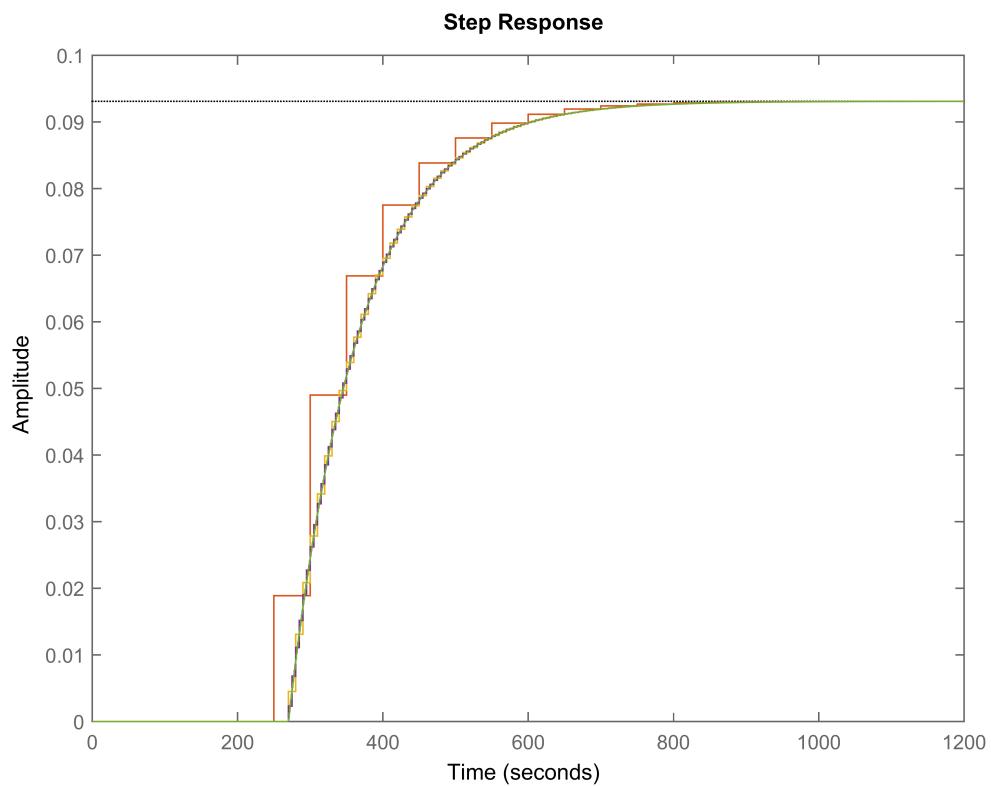
Wejście F_C wyjście T_{out}



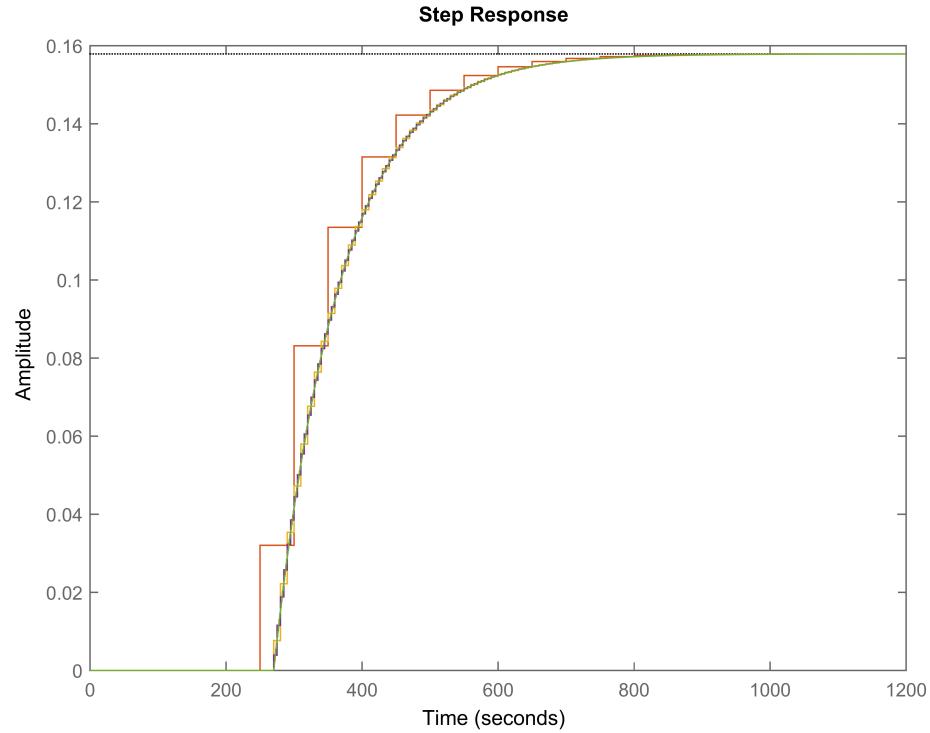
Wejście T_C wyjście T_{out}



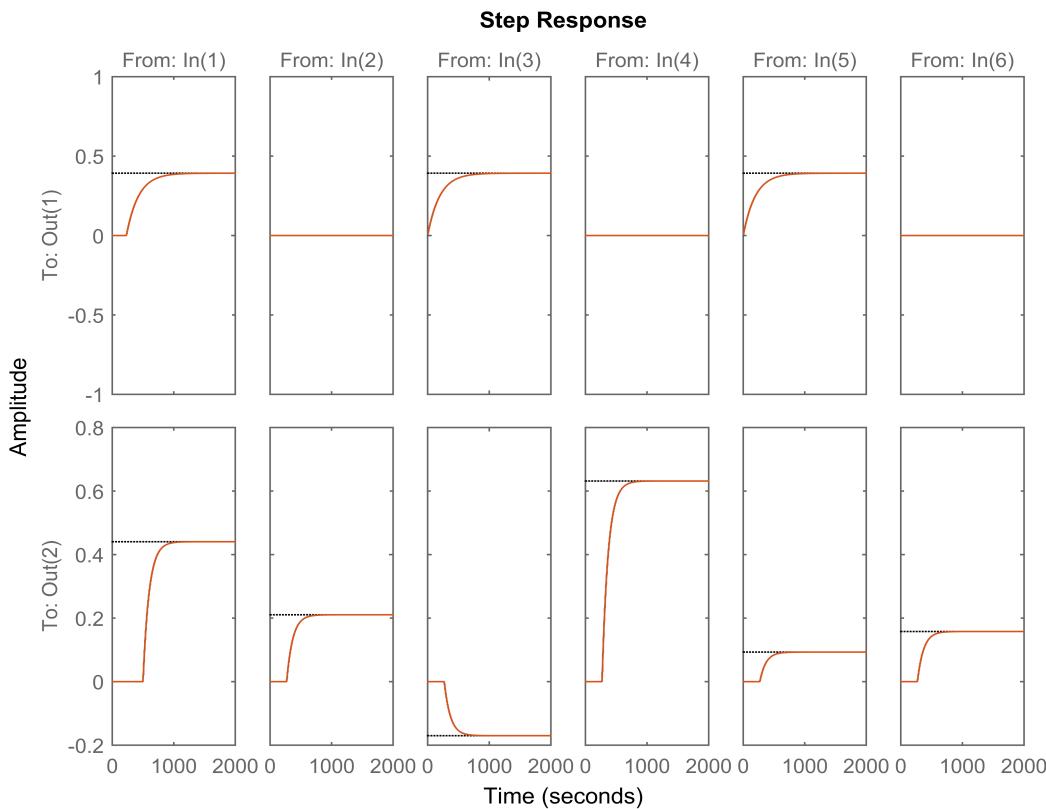
Wejście F_D wyjście T_{out}



Wejście T_D wyjście T_{out}



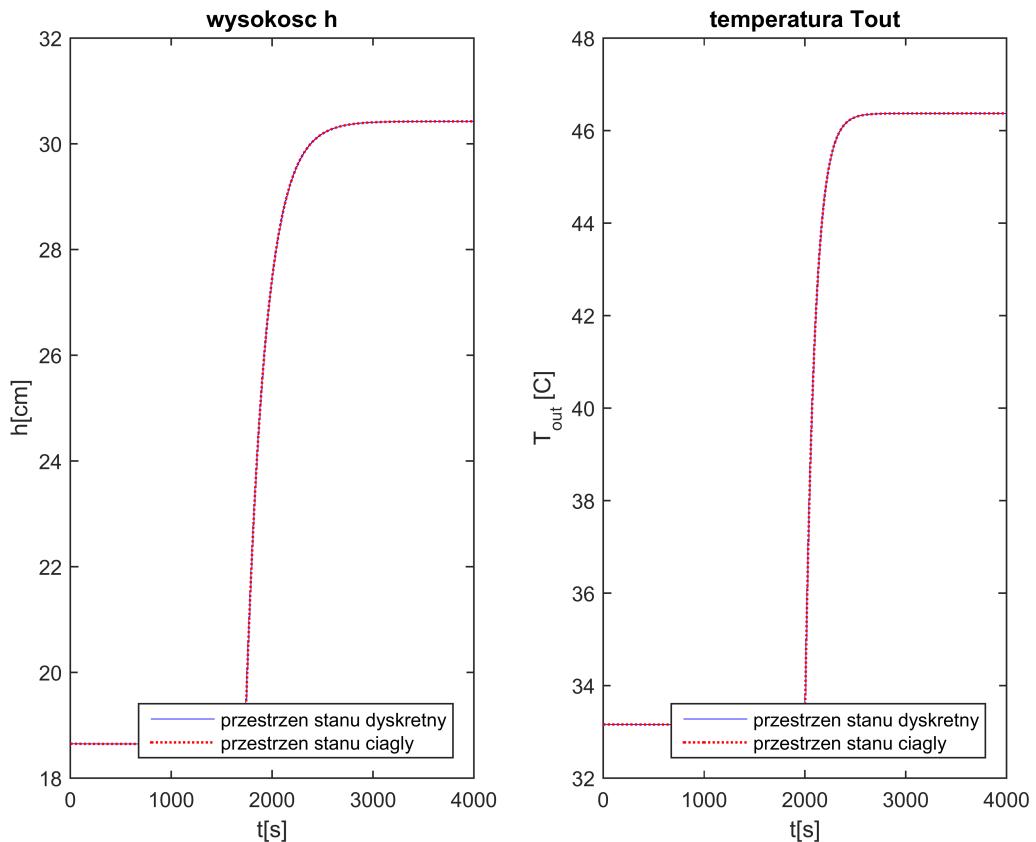
Modele wygenerowane na podstawie równań stanu i transmitancji zarówno dla reprezentacji ciągłej jak i dyskretnej generują takie same rezultaty działań – ich odpowiedzi pokrywają się.
Modele ciągły oraz dyskretny na podstawie transmitancji – odpowiedź skokowa:



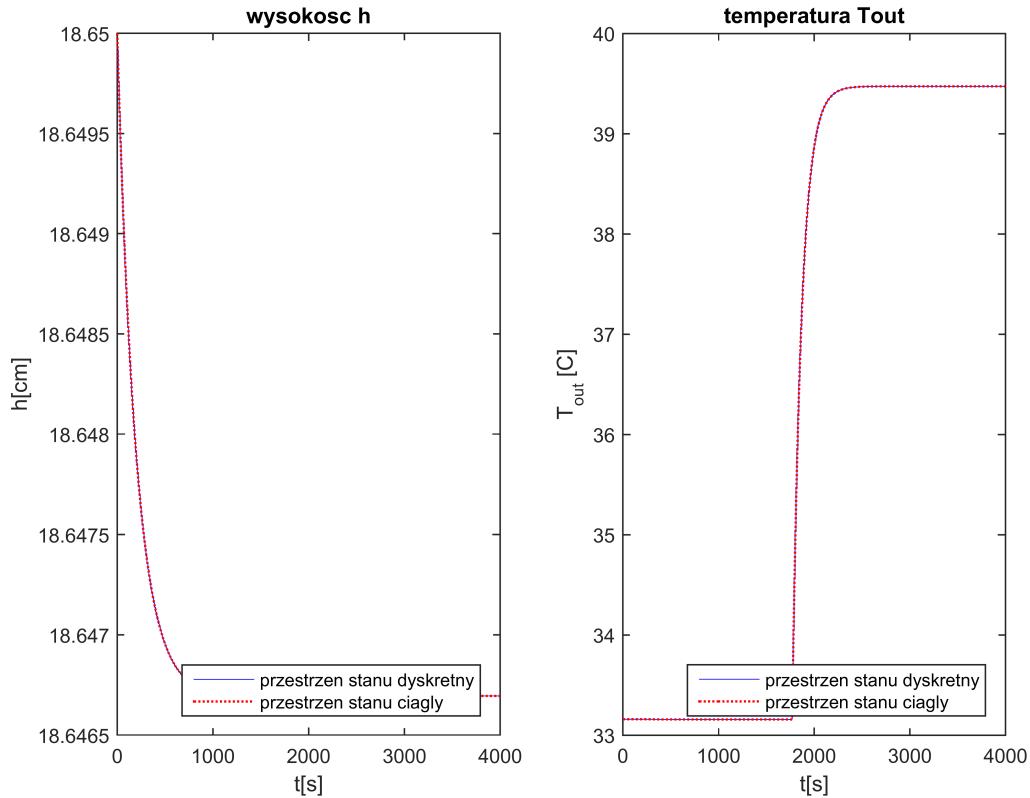
Odpowiedzi zlinearyzowanego modelu dyskretnego oraz ciągłego w postaci równań stanu również mają takie podobne przebiegi. Poniżej przedstawiono otrzymane dla tych modeli dla skoku zmiennych wejściowych o wartości $+30 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$ (dla przepływów) lub ${}^\circ\text{C}$ (dla temperatur).

Przebiegi startowały z podanego punktu równowagi. Wykresy dla modelu ciągłego w przestrzeni stanu są zaprezentowane za pomocą czerwonej linii kropkowanej, zaś dla modelu dyskretnego w przestrzeni stanu niebieska linią ciągłą. Skoki wprowadzane są w 1500 sekundzie czasu symulowanego.

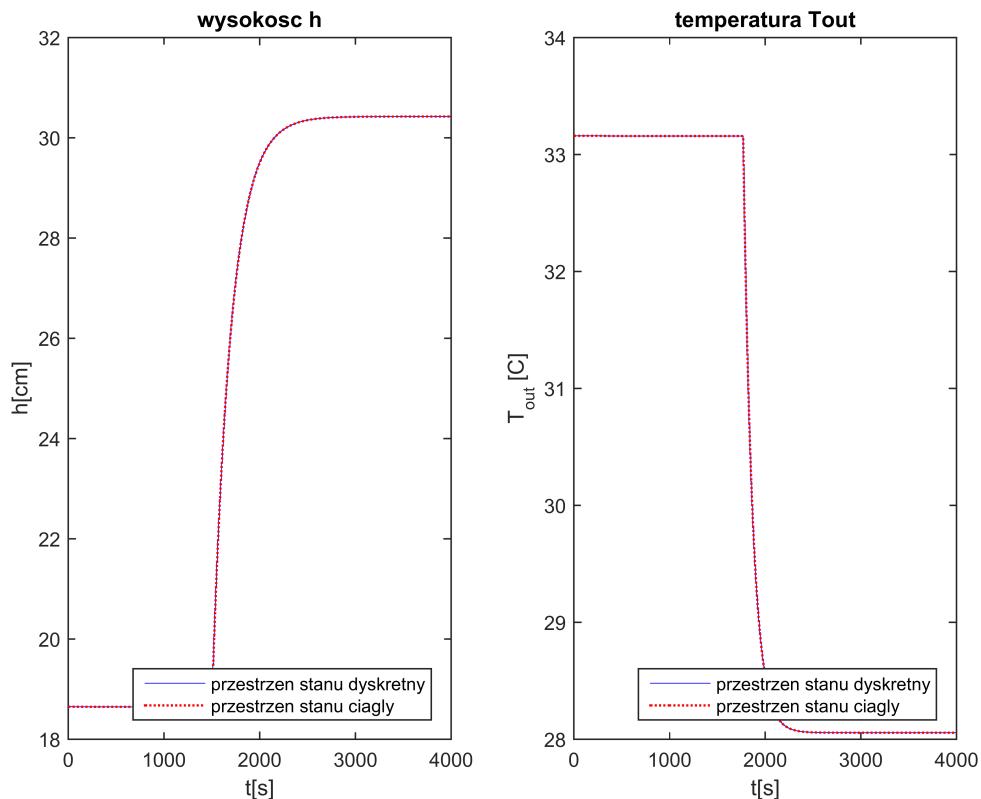
- Odpowiedzi na skok F_H :



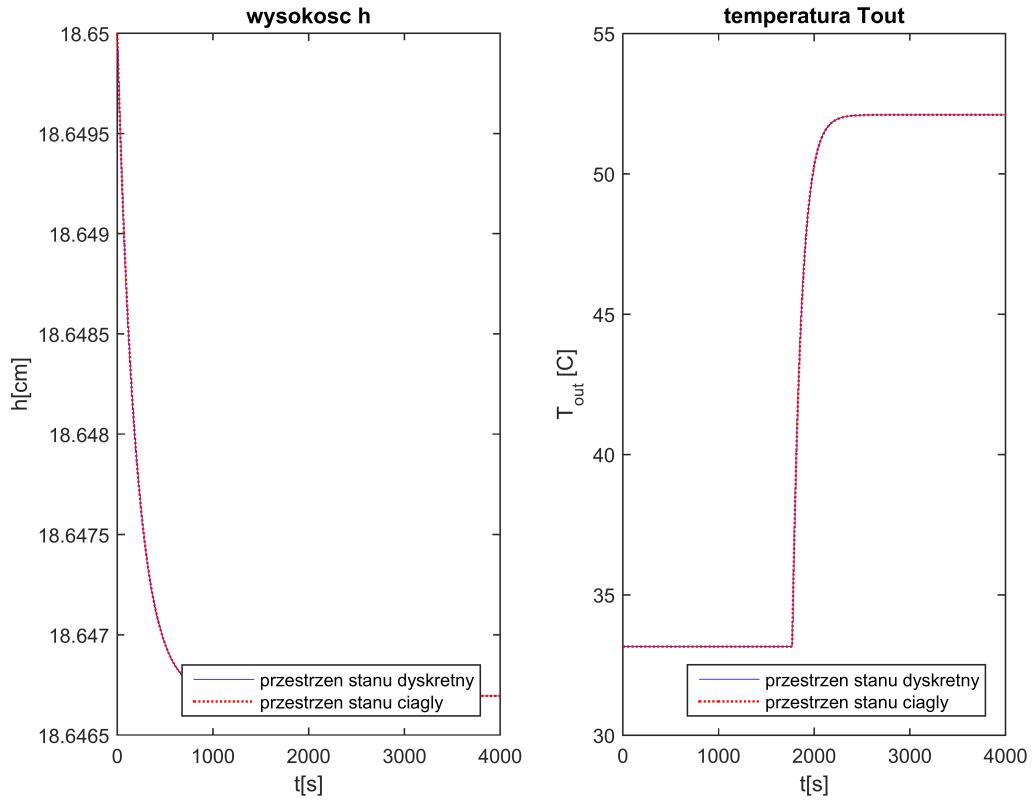
- Odpowiedzi na skok T_H :



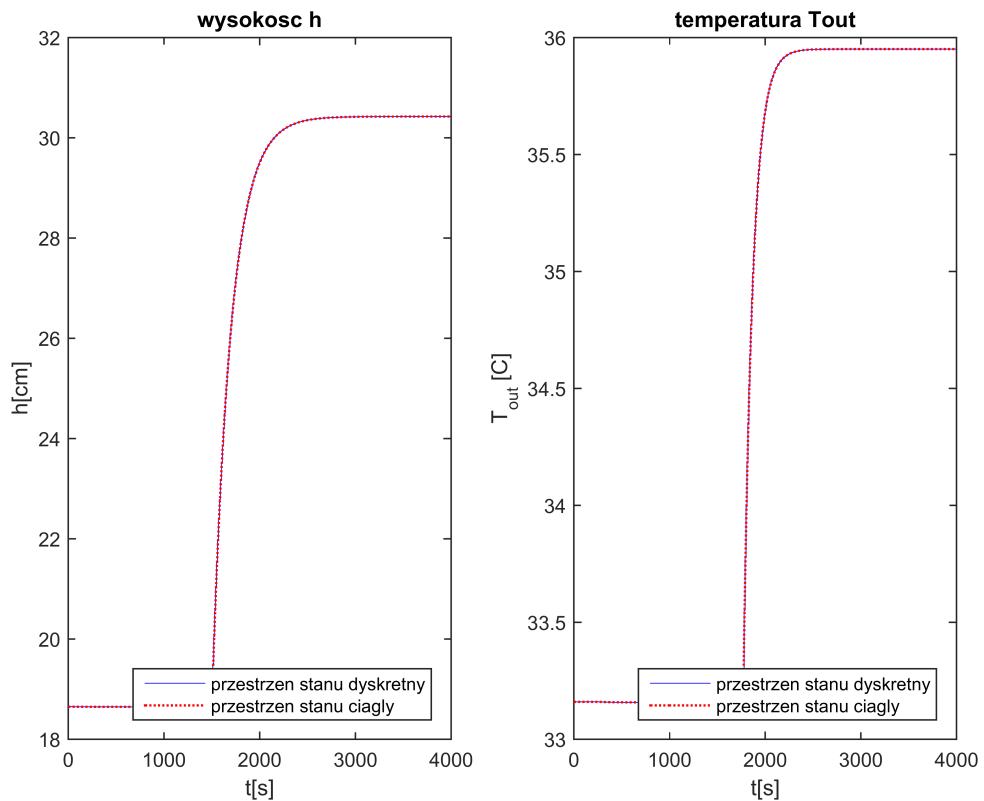
- Odpowiedzi na skok F_C :



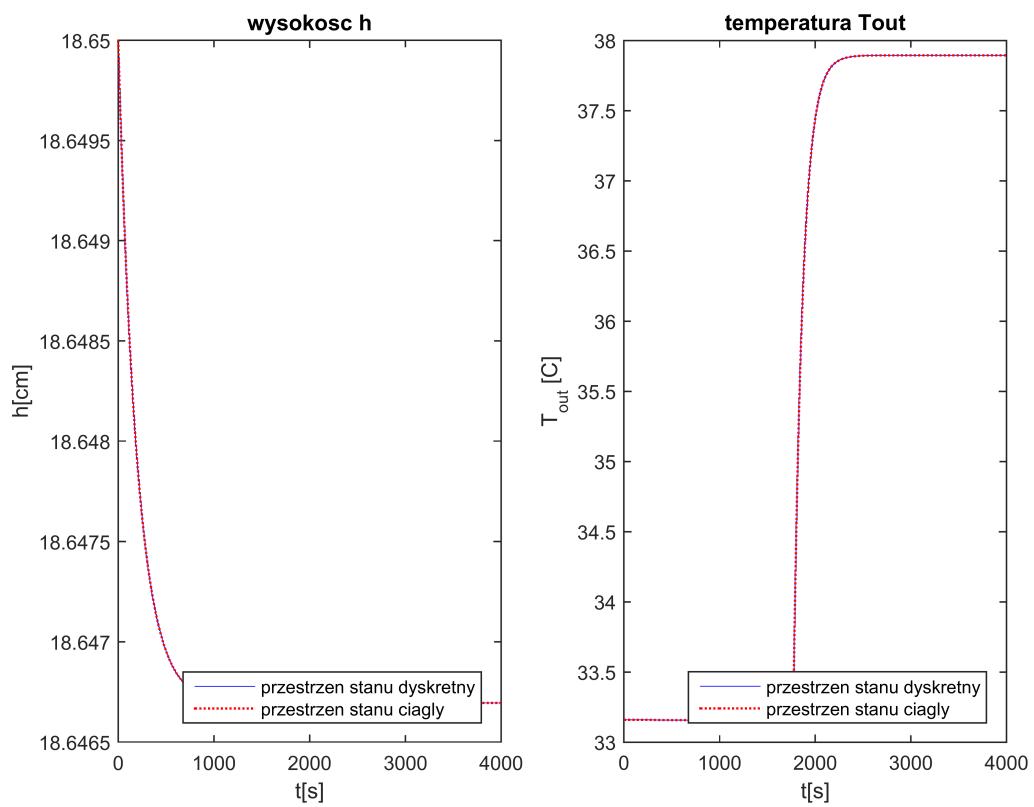
- Odpowiedzi na skok T_c :



- Odpowiedzi na skok F_D :



- Odpowiedzi na skok T_D :



Implementacja modelu dyskretnego w postaci równań stanu

Implementacja modelu dyskretnego w postaci równań stanu przebiegła z wykorzystaniem polecenia programu Matlab `c2d(sys_1, Tp, metoda)`, w którym wykorzystano metodę trapezów z okresem próbkowania 10s. Polecenie to wywołano na modelu ciągłym w przestrzeni stanu sys_1, które jest modelem rozszerzonym, z powodu uwzględnienia składowej stałej występującej w równaniach różnicowych zlinearyzowanych. Stała tą dodano do wektora zmiennych stanu. Model ciągły bez uwzględnienia występujących opóźnień ma następującą postać:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}$$

, gdzie:

$$x(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \\ -\alpha\sqrt{h_0} \\ \frac{-}{2A} \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} F_H(t) \\ T_H(t) \\ F_C(t) \\ T_C(t) \\ F_D(t) \\ T_D(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2A\sqrt{h_0}} & 0 & 1 \\ -\frac{F_{H0} \cdot T_{H0} + F_{C0} \cdot T_{C0} + F_{D0} \cdot T_{D0} - (F_{H0} + F_{C0} + F_{D0}) \cdot T_0}{Ah_0^2} & -\frac{F_{H0} + F_{C0} + F_{D0}}{Ah_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & \frac{1}{A} & 0 & \frac{1}{A} & 0 \\ \frac{T_{H0} - T_0}{Ah_0} & \frac{F_{H0}}{Ah_0} & \frac{T_{C0} - T_0}{Ah_0} & \frac{F_{C0}}{Ah_0} & \frac{T_{D0} - T_0}{Ah_0} & \frac{F_{D0}}{Ah_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymane dyskretne równania stanu w postaci macierzowej, wykorzystane w skrypcie Matlabowym (z uwzględnieniem powrotu do pierwotnego rzędu obiektu) mają następującą postać:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} h(k+1) \\ T(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9503 & 0 \\ 1.067 \cdot 10^{-05} & 0.9031 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(k) \\ T(k) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.0195 & 0 & 0.0195 & 0 & 0.0195 & 0 \\ 0.04269 & 0.02041 & -0.01649 & 0.06122 & 0.009021 & 0.01531 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_H(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \\ T_H(k) \\ F_C(k) \\ T_C(k) \\ F_D(k) \\ T_D(k) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 9.752 \cdot (-\frac{\alpha \sqrt{h_0}}{2A}) \\ 5.335 \cdot 10^{-05} \cdot (-\frac{\alpha \sqrt{h_0}}{2A}) \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} h(k) \\ T_{out}(k + \frac{\tau}{T_p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9752 & 0 \\ 5.335 \cdot 10^{-06} & 0.9515 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(k) \\ T(k) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.009752 & 0 & 0.009752 & 0 & 0.009752 & 0 \\ 0.02135 & 0.0102 & -0.008245 & 0.03061 & 0.00451 & 0.007653 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_H(k - \frac{\tau_H}{T_p}) \\ T_H(k) \\ F_C(k) \\ T_C(k) \\ F_D(k) \\ T_D(k) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 4.876 \cdot (-\frac{\alpha \sqrt{h_0}}{2A}) \\ 2.668 \cdot 10^{-05} \cdot 10^{-05} \cdot (-\frac{\alpha \sqrt{h_0}}{2A}) \end{bmatrix}$$

W skrypcie Matlabowym z pierwszego równania macierzowego wyznaczono równania na zmienne stanu $h(k)$ oraz $T(k)$. Z drugiego równania macierzowego wyznaczono równania na wyjścia procesu $h(k)$ oraz $T_{out}(k)$ – po przesunięciu próbek o $-\frac{\tau}{T_p}$.

Technika automatyzacji procesów

Projekt - etap 2

Rafał Goluch
 Łukasz Meyer
 Arkadiusz Piórkowski

1 czerwca 2017

1 Uproszczenie transmitancji

W pierwszej części projektu uzyskano model w postaci transmitancji:

$$G(s)^T = \begin{bmatrix} \frac{0.002}{s+0.005094} \cdot e^{-230s} & \frac{0.004487s+2.286 \cdot 10^{-5}}{s^2+0.01528s+5.19 \cdot 10^{-5}} \cdot e^{-500} \\ 0 & \frac{0.002145}{s+0.01019} \cdot e^{-270s} \\ \frac{0.002}{s+0.005094} & \frac{-0.001733s-8.826 \cdot 10^{-6}}{s^2+0.01528s+5.19 \cdot 10^{-5}} \cdot e^{-270} \\ 0 & \frac{0.006434}{s+0.01019} \cdot e^{-270s} \\ \frac{0.002}{s+0.005094} & \frac{0.000948+4.832 \cdot 10^{-6}}{s^2+0.01528s+5.19 \cdot 10^{-5}} \cdot e^{-270} \\ 0 & \frac{0.001609}{s+0.01019} \cdot e^{-270s} \end{bmatrix}$$

Człony z transmitancjami drugiego rzędu można uprościć poprzez zapisanie mianownika w formie iloczynowej, skracając go z licznikiem (skracając się stabilny składnik - inercja pierwszego rzędu). Uzyskujemy wtedy:

$$G(s)^T = \begin{bmatrix} \frac{0.3926}{196.3s+1} \cdot e^{-230s} & \frac{2.23}{100s+1} \cdot e^{-500} \\ 0 & \frac{0.21}{98.1s+1} \cdot e^{-270s} \\ \frac{0.3926}{196.3s+1} & \frac{-0.173}{100s+1} \cdot e^{-270} \\ 0 & \frac{0.63}{98.1s+1} \cdot e^{-270s} \\ \frac{0.3926}{196.3s+1} & \frac{10.5}{100s+1} \cdot e^{-270} \\ 0 & \frac{0.16}{98.1s+1} \cdot e^{-270s} \end{bmatrix}.$$

2 Analiza RGA

Kolejnym krokiem było wyznaczenie macierzy RGA w celu określenia struktury regulacji, to znaczy przyporządkowania wielkości sterowanych F_{Hin} oraz F_C do wyjść h oraz T_{out} . Konieczne jest określenie macierzy transmitancji tylko dla wejść sterowanych (pominięcie wejść niesterowanych T_H, T_C, F_D, T_D).

$$G_{RGA}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.3926}{196.3s+1} \cdot e^{-230s} & \frac{2.23}{100s+1} \cdot e^{-500} \\ \frac{0.3926}{196.3s+1} & \frac{-0.173}{100s+1} \cdot e^{-270} \end{bmatrix}$$

Macierz wzmacnień statycznych K :

$$K = \begin{bmatrix} 0.3926 & 0.3926 \\ 2.23 & -0.173 \end{bmatrix}.$$

Natomiast macierz \bar{K} :

$$\bar{K} = (K^{-1})^T = \begin{bmatrix} -0.1834 & 2.364 \\ -0.4161 & -0.4161 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z [1] mamy wzór na względne wzmacnianie w torze $u_j \rightarrow y_i$:

$$\lambda_{ij} = k_{ij} \cdot \bar{k}_{ij},$$

co po obliczeniu wartości daje macierz RGA:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0.072 & 1.072 \\ 0.928 & 0.072 \end{bmatrix}.$$

Na diagonali rozpoczynającej się w górnym lewym rogu macierzy uzyskano niekorzystne wartości współczynników λ , to znaczy wartości nie są bliskie 1, a także jedna z komórek ma ujemną wartość. Na drugiej diagonali uzyskano natomiast korzystne wartości, zbliżone do 1.

Powyższe oznacza, że przyporządkowanie wielkości sterowanych do wielkości regulowanych powinno być następujące:

$$F_{Hin} \rightarrow T_{out}$$

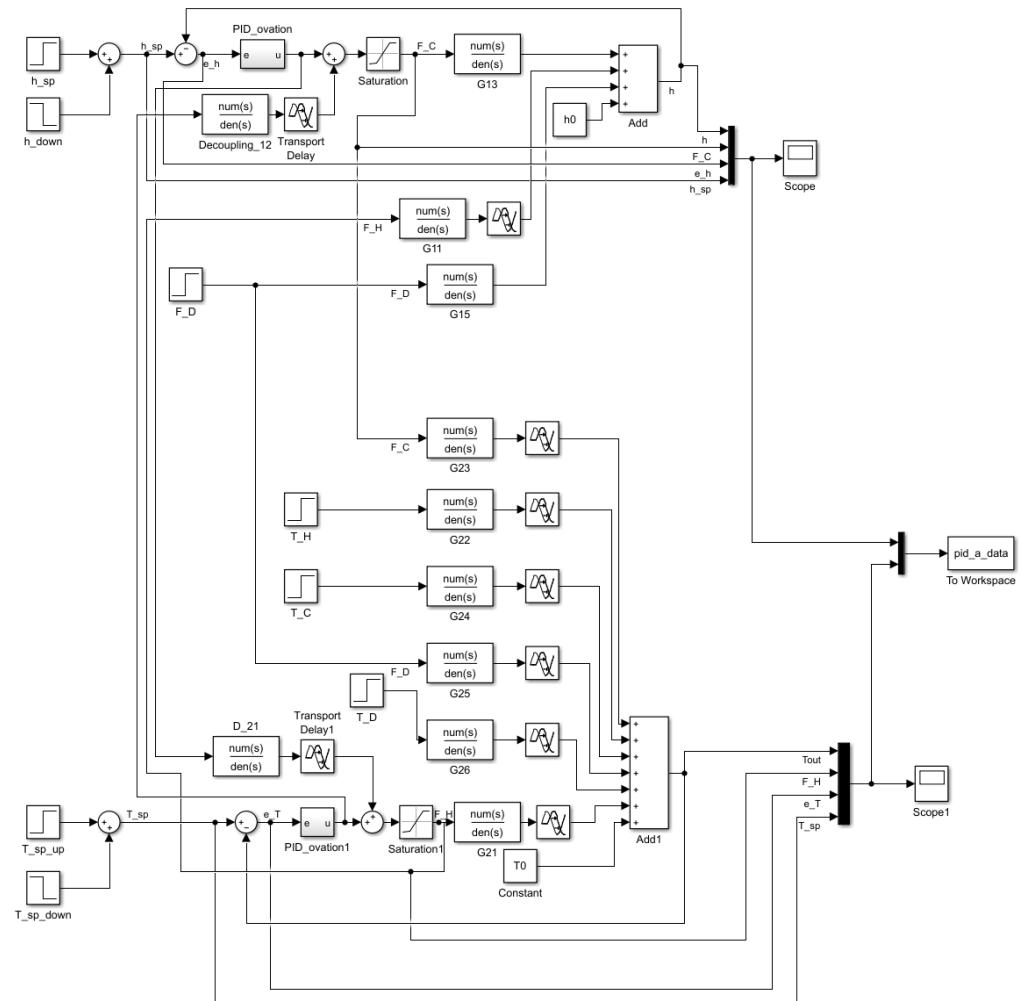
$$F_C \rightarrow h$$

Takie przyporządkowanie sprawia, że w pętli regulacji temperatury występuje bardzo duże opóźnienie (łącznie 500 sekund), jednak uznano, że istotniejsze jest spełnienie warunku o nieujemności wartości komórek macierzy RGA.

3 Struktura regulacji

Utworzony schemat regulacji w Simulinku przedstawiono na rysunku 1. Zawiera on już człyony odsprzęgające, opisane w rozdziale 4. Układ pozwala na włączenie i wyłączenie transmitancji skrośnych oraz odsprzęgających z poziomu Matlaba.

Układ posiada także bloki obcinające sygnały sterujące F_C i F_H (*Saturation* i *Saturation1*), które mogą być deaktywowane z poziomu Matlaba. Bloki te obcinają sygnał względem punktu pracy, przyjęto że może się mieścić on w zakresie $-60 \frac{cm^3}{s}$ do $40 \frac{cm^3}{s}$ w przypadku ΔF_C (w ten sposób sygnał F_C zmienia się w zakresie od $0 \frac{cm^3}{s}$ do $100 \frac{cm^3}{s}$). Dla ΔF_H zakres wynosi od $-20 \frac{cm^3}{s}$ do $80 \frac{cm^3}{s}$, więc dopuszczalna wartość F_H zmienia się od $0 \frac{cm^3}{s}$ do $100 \frac{cm^3}{s}$.



Rysunek 1: Schemat regulacji wysokości i temperatury

4 Człony odsprzęgające

W układzie regulacji dodano bloki odsprzęgające:

- $D_{12}(s)$ - transmitancja odsprzęga wpływ zmian sygnału F_H na wyjście h
- $D_{21}(s)$ - transmitancja odsprzęga wpływ zmian sygnału F_C na wyjście T

W przypadku analizowanego układu transmitancje te mają postać:

$$D_{12}(s) = -\frac{G_{11}(s)}{G_{13}(s)} = -\frac{\frac{0.3926}{196.3s+1} \cdot e^{-230s}}{\frac{0.3926}{196.3s+1}} = -e^{-230s}$$

$$\widetilde{D_{21}(s)} = -\frac{G_{23}(s)}{G_{21}(s)} = -\frac{\frac{-0.173}{100s+1} \cdot e^{-270}}{\frac{2.23}{100s+1} \cdot e^{-500}} = 0.0776 \cdot e^{230s}$$

Transmitancja $D_{12}(s)$ jest realizowalna, więc uzyskamy pełne odsprzęganie na wyjściu h . Transmitancja $D_{21}(s)$ zawiera blok przyspieszający e^{230s} , co oznacza, że nie jest realizowalna. W związku z tym transmitancję tę sprowadzono do postaci realizowalnej:

$$D_{21}(s) = 0.0776$$

5 Realizacja regulatora PID

Zgodnie z wytycznymi prowadzącego zaimplementowano algorytm PID taki jak w systemie OVATION. Równania opisujące algorytm:

$$\begin{aligned} u1_k &= K_e e_k \\ u2_k &= u2_{k-1} + \frac{T_p}{2T_i} e_k + \frac{T_p}{2T_i} e_{k-1} \\ u2_k &= \frac{2\tau_d - T_p}{T_p + 2\tau_d} u3_{k-1} + \frac{2K_d}{T_p + 2\tau_d} e_k - \frac{2K_d}{T_p + 2\tau_d} e_{k-1}. \end{aligned}$$

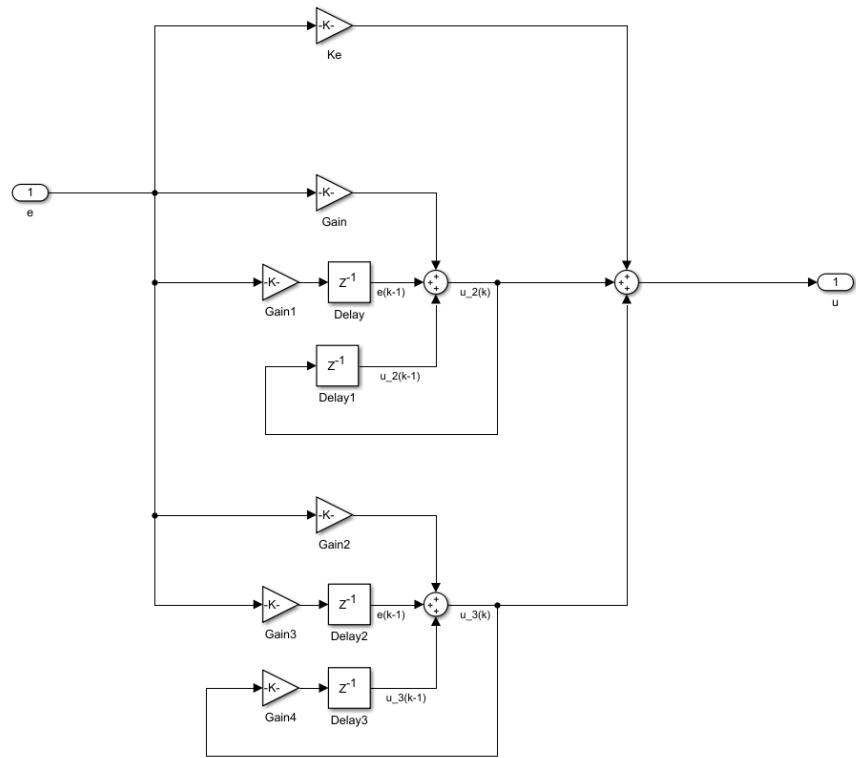
Parametry strojeniowe algorytmu to K_e, T_i, K_d, τ_d .

Struktura w Simulinku przedstawiona jest na rysunku 2.

6 Działanie regulatorów bez interakcji skrośnych

Kolejnym krokiem była symulacja działania układu regulacji tylko z transmitancjami głównymi, bez transmitancji skrośnych. Do doboru nastaw wykorzystano heurystyczną metodę bazującą na wizualnej ocenie uzyskiwanych przebiegów i korekcie uzyskiwanych wartości.

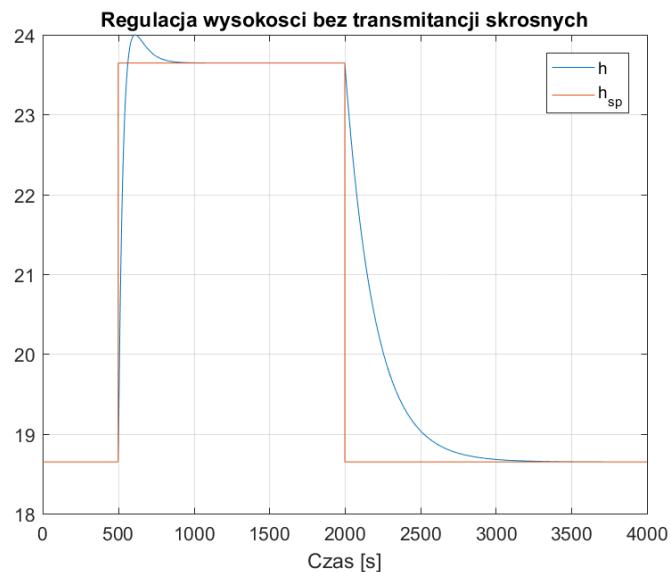
W wyniku przeprowadzonych testów zdecydowano się zastosować w regulatorze wysokości regulator z członami PID, natomiast do regulacji temperatury zastosowano człony PI.



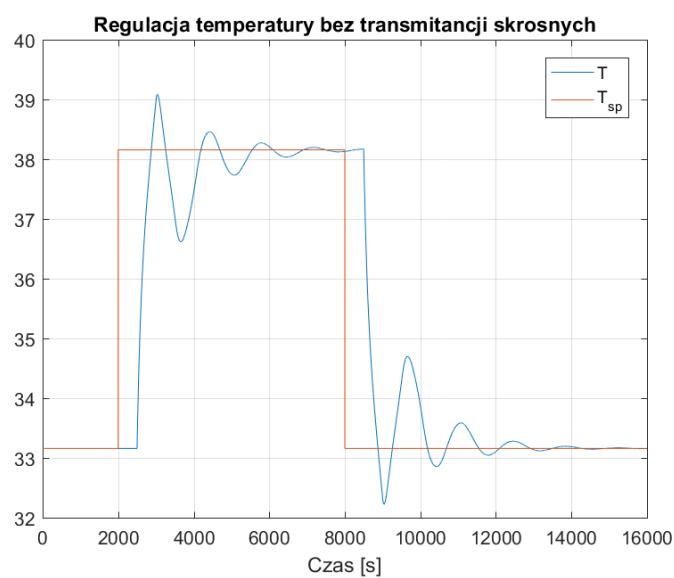
Rysunek 2: Schemat struktury PID (jak w systemie OVATION)

Uzyskane przebiegi na skokowe zmiany wartości zadanych przedstawiono na rysunkach 3 i 4.

Na przebiegach temperatury widoczny jest negatywny wpływ dużego opóźnienia (równego 500 sekund), czas regulacji jest dość długi. Odpowiedź układu regulacji na skok wartości zadanej cechuje się sporym przeregulowaniem, odpowiedź ma oscylacyjny charakter.



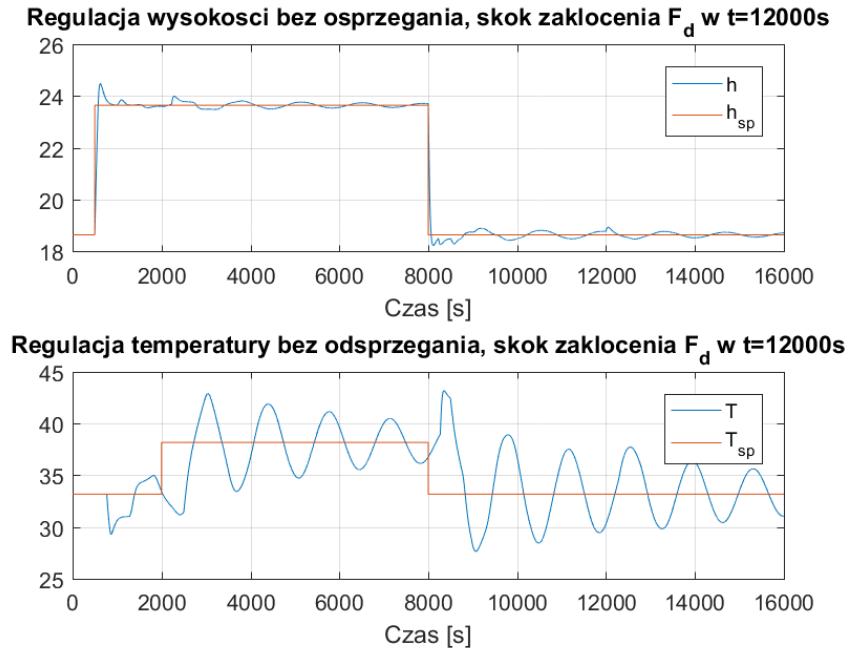
Rysunek 3: Działanie układu regulacji wysokości bez interakcji skrośnych. $K_e = 10, T_i = 5, K_d = 4, \tau_d = 2$



Rysunek 4: Działanie układu regulacji temperatury bez interakcji skrośnych. $K_e = 1.5, T_i = 350$

7 Działanie regulatorów z interakcjami skrośnymi

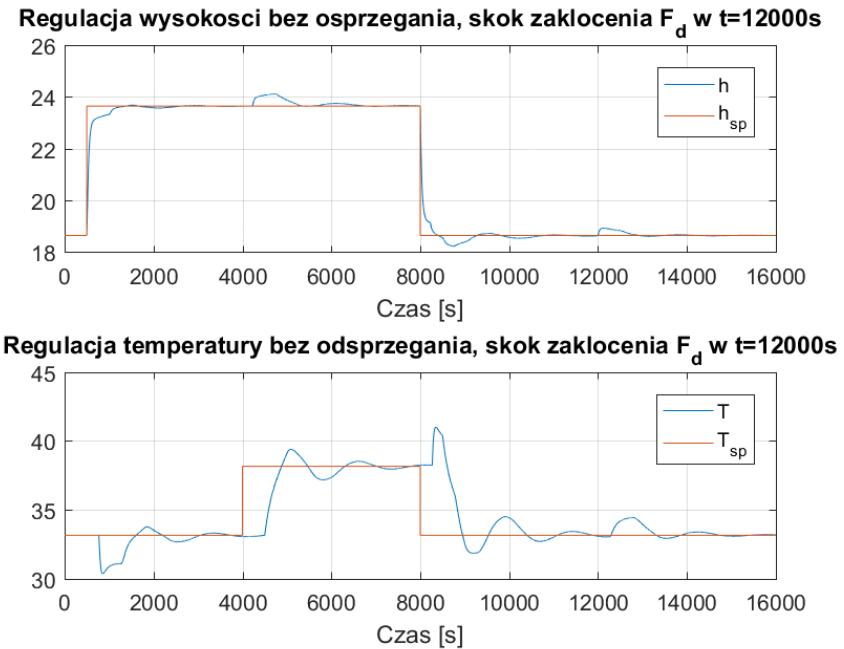
Następnie uruchomiono układ regulacji z interakcjami skrośnymi, bez zmieniających nastaw uzyskanych w poprzednim punkcie. Uzyskany układ był stabilny (amplituda oscylacji malała z czasem), jednak przebiegi wartości regulowanych były dalekie od zadowalających. Przebiegi temperatury wyjściowej zawierały sinusoidę o amplitudzie kilku stopni Celsjusza, co widać na rysunku 5. Ponow-



Rysunek 5: Działanie układu regulacji wysokości i temperatury przy nastawach uzyskanych w poprzednim rozdziale

nie przeprowadzono dobór nastaw regulatora metodą prób i błędów. Uzyskane przebiegi wartości regulowanych (wraz ze skokiem zakłócenia F_D) przedstawiono na rysunku 6. Regulacja wysokości poziomu cieczy działa stosunkowo dobrze, ale regulacja temperatury jest daleka od idealnej. W przebiegach temperatury widoczne są gasnące oscylacje, czas regulacji jest długi. Niestety w analizowanym układzie (to znaczy regulatory PID i duże opóźnienia w pętli regulacji temperatury) ciężko uzyskać lepszej jakości przebiegi.

Ciekawe zachowanie układu można zaobserwować na przebiegu temperatury w okolicach czasu 8500 sekund, niedługo po skoku wartości zadanych w dół. Widoczny jest wzrost temperatury wyjściowej, podczas gdy skok zadanej temperatury był w dół. Zjawisko to jednak da się łatwo wyjaśnić. W momencie skoku



Rysunek 6: Działanie układu regulacji wysokości i temperatury. Nastawy regulatora wysokości: $K_e = 5, T_i = 50, K_d = 4, \tau_d = 2$, nastawy regulatora temperatury: $K_e = 1, T_i = 400$

wartości zadanych (czas 8000s) oba regulatory zmieniają wartość sterującą (wynikającą z obecności członu P oraz D). Regulator wysokości zmniejsza dopływ cieczy (zimnej) do zbiornika (by uzyskać spadek poziomu cieczy), a regulator temperatury zmniejsza dopływ cieczy cieplej, by uzyskać spadek temperatury. Ze względu na obecność transmitancji skrośnych oraz fakt, że regulator wysokości może 'silniej' sterować sygnałem F_C (ze względu na brak opóźnień w pętli regulacji), uzyskujemy wzrost temperatury na wyjściu. Dopiero gdy regulator temperatury 'zauważ' wzrost tej temperatury, może zareagować na tę sytuację.

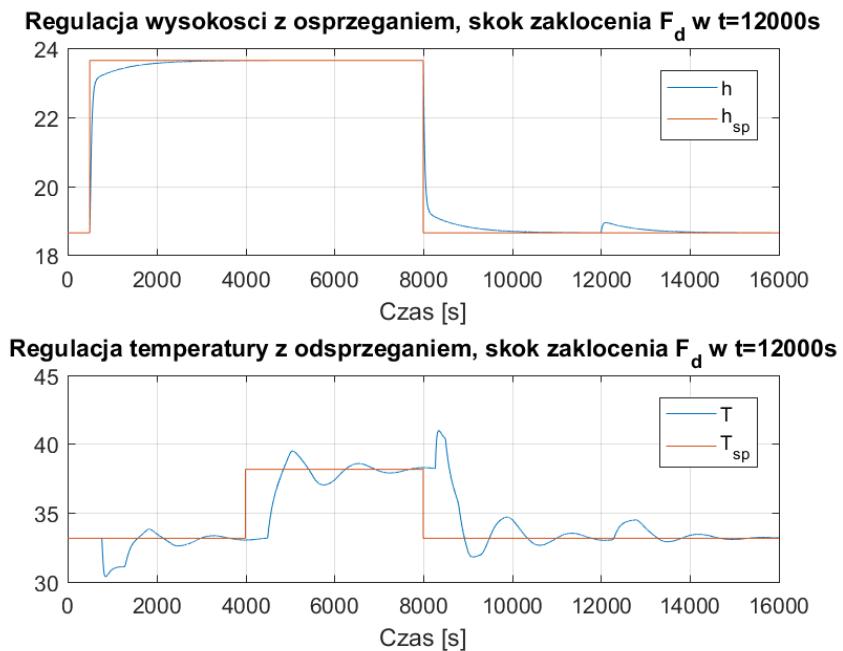
8 Działanie regulatorów z interakcjami skrośnymi i odsprzęganiem

W modelu uwzględniono również transmitancje osprzęgające (wyznaczone w rozdziale 4) $D_{12}(s)$ oraz $D_{21}(s)$, które mają postać

$$D_{12}(s) = -e^{-230s}$$

$$D_{21}(s) = 0.0776.$$

Do obiektu wprowadzono takie same zmiany wartości zadanych oraz zakłóceń jak w poprzednim rozdziale, wynik symulacji z niezmienionymi nastawami (tzn. uzyskanyimi dla układu regulacji bez odsprzęgania) przedstawiono na rysunku 7.



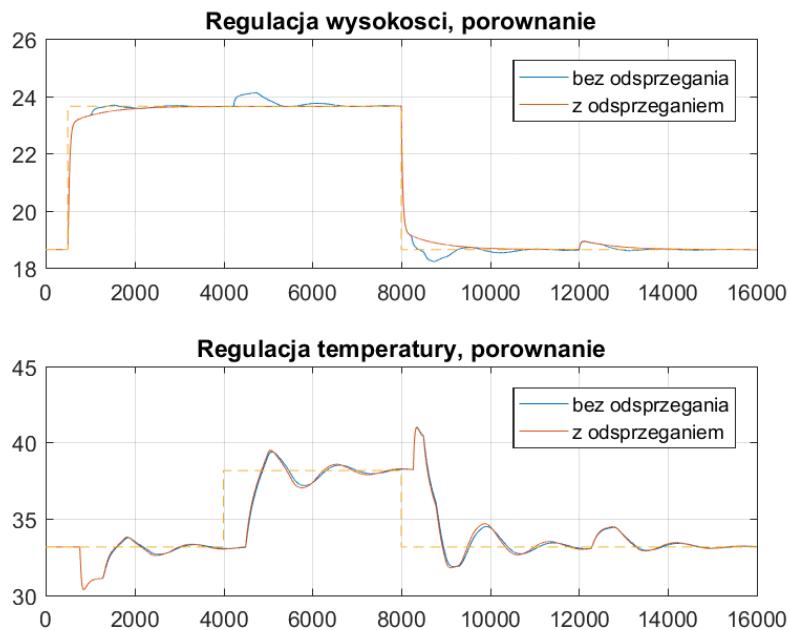
Rysunek 7: Działanie układu regulacji wysokości i temperatury z odsprzęganiem. Nastawy takie jak w przebiegach na rysunku 6

9 Porównanie działania układów bez i z odsprzęganiem

Na rysunku 8 przedstawiono porównanie przebiegów wartości regulowanych.

Analizując przebieg zmian wysokości poziomu cieczy nie ma wielkiego zaskoczenia, to znaczy dzięki realizowalnej postaci obliczonego członu odsprzęgającego $D_{12}(s)$ uzyskano pełne odsprzeganie, więc działanie regulatora temperatury nie 'przedostaje się' na wyjście temperatury. Uzyskane przebiegi zmian wysokości są płynniejsze. Dodanie odsprzegania wydłuża jednak nieco czas regulacji przy skokowej zmianie zakłócenia.

W przypadku regulacji temperatury nie zaobserwowano znaczącej poprawy jakości regulacji, uzyskane przebiegi są do siebie podobne. Niestety brak możliwości zrealizowania wyliczonego członu odsprzęgającego $\tilde{D}_{21}(s)$ sprawia, że odsprzeganie jest nieskuteczne. Opóźnienie (w zasadzie to przyspieszenie) pominięte w bloku odsprzęgającym, równe 230 sekund, jest zbyt duże względem stałej czasowej obiektu.



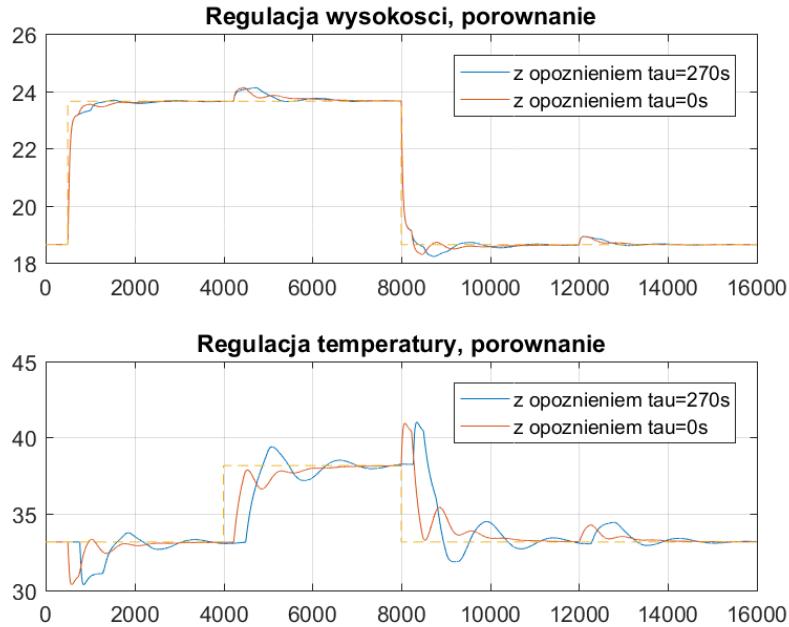
Rysunek 8: Porównanie działania układów regulacji wysokości i temperatury bez i z odsprzęganiem

10 Analiza wpływu likwidacji opóźnienia na wyjściu T_{out}

W ramach dodatkowych testów przeprowadzono symulację zachowania układu w momencie, gdy nie będzie opóźnienia na wyjściu temperatury, czyli $\tau = 0s$. W takim przypadku transmitancja odsprzęgająca $D_{21}(s)$ nadal ma nierealizowalne opóźnienie (przyspieszenie) i zachowanie układu jest analogiczne jak w rozdziale 8. Dlatego też skupiono się na porównaniu zachowania układów bez odsprzęgania.

Pierwszym krokiem po zlikwidowaniu opóźnienia τ było dostrojenie regulatora temperatury. Dzięki likwidacji sporej części opóźnienia (z 500 sekund do 230 sekund) można było nieco 'podkręcić' nastawy regulatora i uzyskać szybszą i lepszą stabilizację temperatury. Ostatecznie uzyskane nastawy regulatora temperatury to $K_e = 1.2, T_i = 350$.

Wykonano wykres porównujący zachowanie układu regulacji dla opóźnienia $\tau = 270s$ oraz $\tau = 0s$, przedstawiono go na rysunku 9.



Rysunek 9: Działanie układu regulacji wysokości i temperatury. Nastawy regulatora wysokości: $K_e = 5, T_i = 50, K_d = 4, \tau_d = 2$, nastawy regulatora temperatury: $K_e = 1.2, T_i = 350$

Widoczna jest pozytywna zmiana w zachowaniu działania układu regulacji, szczególnie w przypadku regulacji temperatury. Układ reguluje temperaturę

szybciej, a amplituda oscylacji jest mniejsza. Jest to zgodne z przewidywaniami.

Pomiar temperatury bez opóźnienia powinien być możliwy do przeprowadzenia na rzeczywistym obiekcie - wystarczy umieścić sensor temperatury na początku rury wylotowej ze zbiornika, a nie w jej dalszym biegu (zakładając, że w czasie przepływu cieczy przez rurę nie pojawiają się jakieś znaczące zakłócenia). Niewielkim kosztem można w dość znaczący sposób poprawić jakość regulacji.

Literatura

- [1] Piotr Tatjewski, *Regulacja wielopętlowa PID, wykład*, Politechnika Warszawska, Warszawa, 2017.