

Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych  
Politechnika Warszawska

Modelowanie i identyfikacja

Sprawozdanie projekt 1 zadanie 37

Michał Pióro  
324881

Warszawa, kwiecień 2024

# Spis treści

<b>1. Ciągłe modele dynamiczne</b>	<b>2</b>
1.1. Ciągły nieliniowy model dynamiczny	2
1.1.1. Reprezentacja w przestrzeni stanów	2
1.1.2. Reprezentacja graficzna	2
1.2. Ciągły zlinearyzowany model dynamiczny	3
1.2.1. Linearyzacja	3
1.2.2. Reprezentacja w przestrzeni stanów	3
1.2.3. Reprezentacja graficzna	4
1.3. Odpowiedzi skokowe	4
1.3.1. „Mały” skok sygnału sterującego	5
1.3.2. „Średni” skok sygnału sterującego	6
1.3.3. „Duży” skok sygnału sterującego	8
1.3.4. Wnioski	9
1.4. Transmitancja modelu zlinearyzowanego	10
1.4.1. Wyznaczenie	10
1.4.2. Wzór	10
1.5. Wzmocnienie statyczne	10
1.5.1. Wyznaczenie	10
1.5.2. Wzór	10
1.5.3. Wzmocnienie statyczne dla danych punktów linearyzacji	10
1.5.4. Wnioski	10
<b>2. Ciągłe modele statyczne</b>	<b>11</b>
2.1. Ciągła nieliniowa charakterystyka statyczna	11
2.1.1. Wyznaczanie charakterystyki statycznej	11
2.1.2. Wzór	11
2.1.3. Wykres	11
2.2. Ciągły zlinearyzowany model statyczny	12
2.2.1. Linearyzacja	12
2.2.2. Wzór	12
2.2.3. Wykresy	12
2.2.4. Wnioski	13
<b>3. Dyskretny model dynamiczny</b>	<b>15</b>
3.1. Dyskretny nieliniowy model dynamiczny	15
3.1.1. Dyskretyzacja	15
3.1.2. Reprezentacja w przestrzeni stanów	15
3.1.3. Reprezentacja graficzna	15
3.1.4. Odpowiedzi skokowe	17
3.1.5. Wnioski	18

# 1. Ciągłe modele dynamiczne

## 1.1. Ciągły nieliniowy model dynamiczny

### 1.1.1. Reprezentacja w przestrzeni stanów

Bazowy model, na którego podstawie wykonywane są kolejne zadania.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -a_2 x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_1 x_1(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -a_0 x_1(t) + b_0(\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u^2(t) + \alpha_3 u^3(t) + \alpha_4 u^4(t)) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

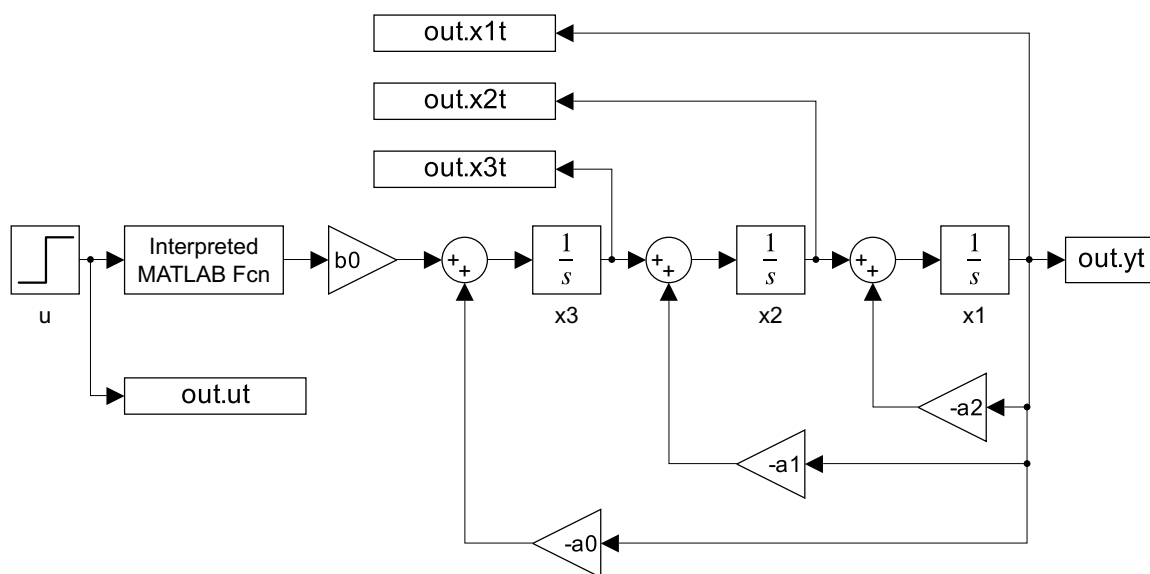
Oznaczenia parametrów wykorzystywane w sprawozdaniu.

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,001\,851\,85 & \alpha_1 &= 0,4 \\ a_1 &= 0,046\,296\,3 & \alpha_2 &= 0,55 \\ a_2 &= 0,377\,778 & \alpha_3 &= -0,92 \\ b_0 &= 0,003\,333\,33 & \alpha_4 &= 0,53 \end{aligned}$$

Wartość sygnału sterującego:

$$u \in \langle -1; 1 \rangle$$

### 1.1.2. Reprezentacja graficzna



Rys. 1.1. Reprezentacja graficzna ciągłego liniowego modelu dynamicznego

Interpreted MATLAB Fcn zawiera wyrażenie:  $\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4$

## 1.2. Ciągły zlinearyzowany model dynamiczny

### 1.2.1. Linearyzacja

W celu zlinearyzowania charakterystyki dynamicznej wykorzystano szereg Taylora, a dokładnie pierwsze dwa człony rozwinięcia. W modelu, nieliniowość występuje tylko w przypadku stanu  $x_3(t)$ . Oznacza to, że pozostałe równania na  $x_1(t), x_2(t), y(t)$  nie wymagają linearyzacji i stanowią część modelu liniowego, dlatego linearyzacji zostały poddane funkcje:  $u^4; u^3; u^2$ . W programie MATLAB do linearyzacji został wykorzystany autorski program, korzystający z funkcji *syms*, *subs* oraz *diff*. Wzór 1.2 przedstawia Otrzymaną charakterystykę liniową w przestrzeni stanów natomiast reprezentację graficzną przedstawia rysunek 1.2 z programu Simulink.

```
up = [ut ut^2 ut^3 ut^4];
up_lin=ut;
for i=2:4
    up_lin(i) = subs(up(i),ut,ud) + subs(diff(up(i), ut),ut,ud)*(ut-ud);
end
dx3_lin = dx3;
for i=4:-1:2
    dx3_lin=subs(dx3_lin,up(i),up_lin(i));
end

dx3_lin = collect(expand(dx3_lin),[ut b0]);
dX_lin = [dx1;dx2;dx3_lin];
yt_lin = yt;
```

### 1.2.2. Reprezentacja w przestrzeni stanów

$$\dot{x}_1(t) = -a_2 x_1(t) + x_2(t)$$

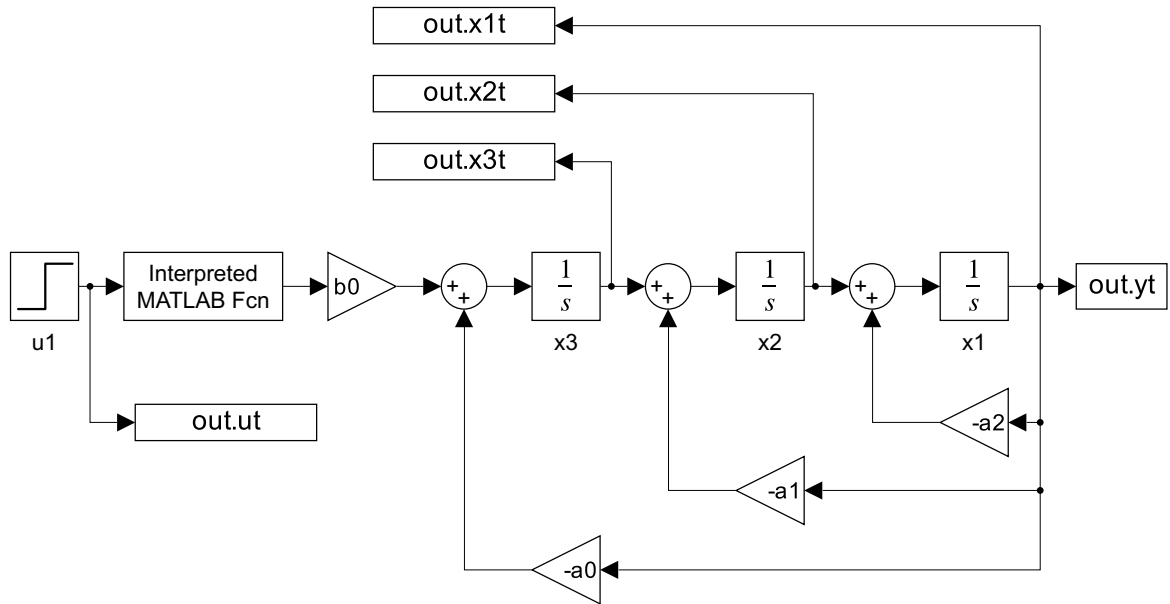
$$\dot{x}_2(t) = -a_1 x_1(t) + x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -a_0 x_1(t) + b_0 \left( 4\alpha_4 \bar{u}^3 + 3\alpha_3 \bar{u}^2 + 2\alpha_2 \bar{u} + \alpha_1 \right) u(t) + \left( -3\alpha_4 \bar{u}^4 - 2\alpha_3 \bar{u}^3 - \alpha_2 \bar{u}^2 \right) b_0$$

$$y(t) = x_1(t)$$

(1.2)

### 1.2.3. Reprezentacja graficzna



Rys. 1.2. Reprezentacja graficzna ciągłego zlinearyzowanego modelu dynamicznego

Interpreted MATLAB Fcn zawiera wyrażenie:

$$(\alpha_1 u + \alpha_2(2\bar{u}(u - \bar{u}) + \bar{u}^2) + \alpha_3(\bar{u}^3 + 3\bar{u}^2(u - \bar{u})) + \alpha_4(\bar{u}^4 + 4\bar{u}^3(u - \bar{u})))$$

### 1.3. Odpowiedzi skokowe

W celu sprawdzenia poprawności linearyzacji oraz porównania modelu zlinearyzowanego oraz nieliniowego przeprowadzono symulacje modeli, podając 3 różne wartości skoku sygnału sterującego oraz dla 3 różnych wartości punktów linearyzacji. Założono zerowe warunki początkowe ( $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0$ ).

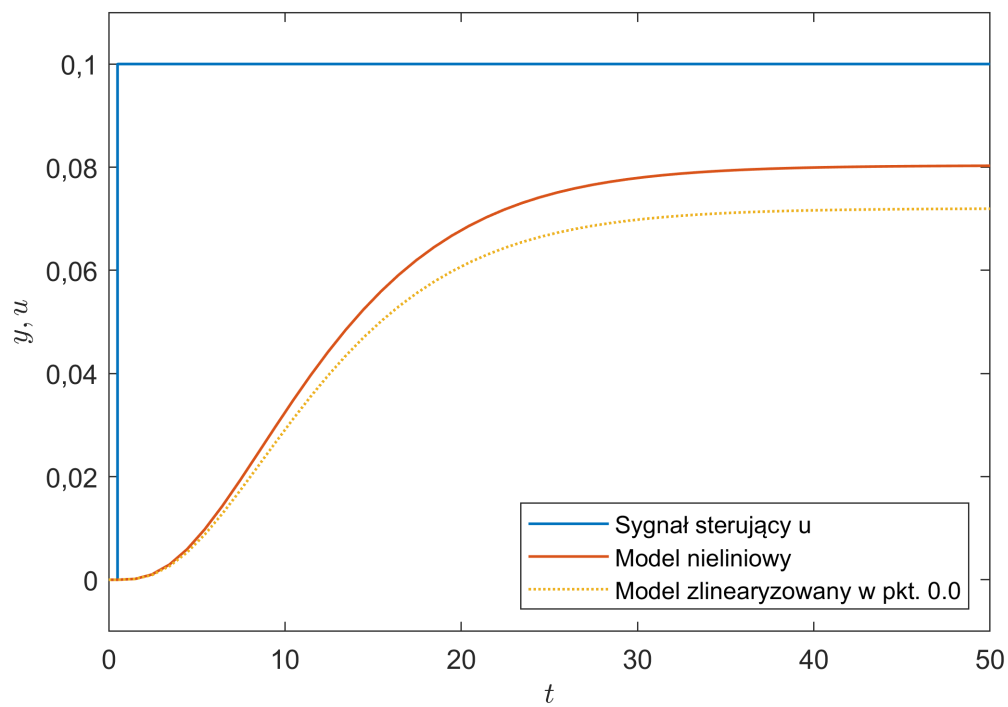
Wartości poszczególnych skoków:

- „mały”: 0,1
- „średni”: 0,5
- „duży”: 1

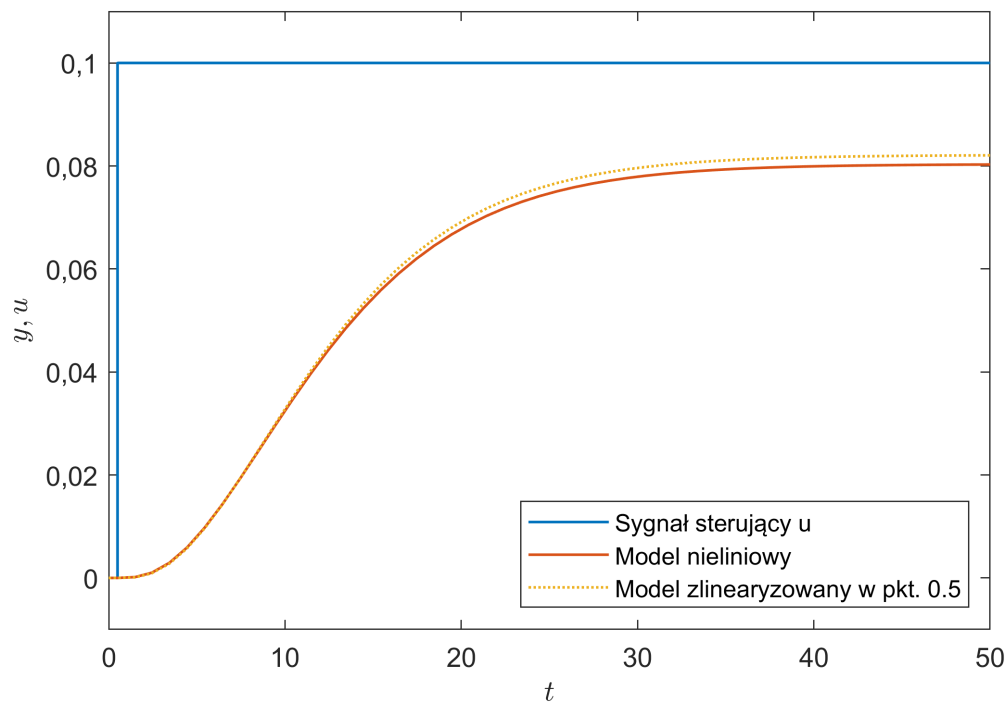
Wartości poszczególnych punktów linearyzacji ( $\bar{u}$ ):

- 0,0
- 0,5
- 1,0

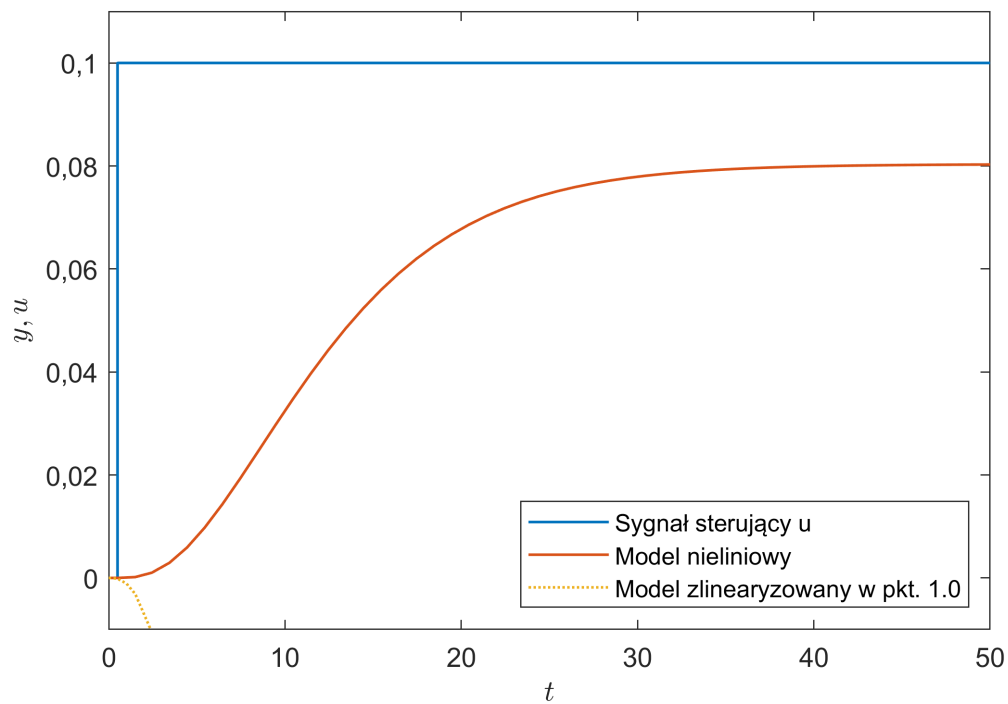
## 1.3.1. „Mały” skok sygnału sterującego



Rys. 1.3. Wykres odpowiedzi skokowej modelu nieliniowego oraz zlinearyzowanego w  $\bar{u} = 0,0$  dla skoku  $\Delta u = 0,1$

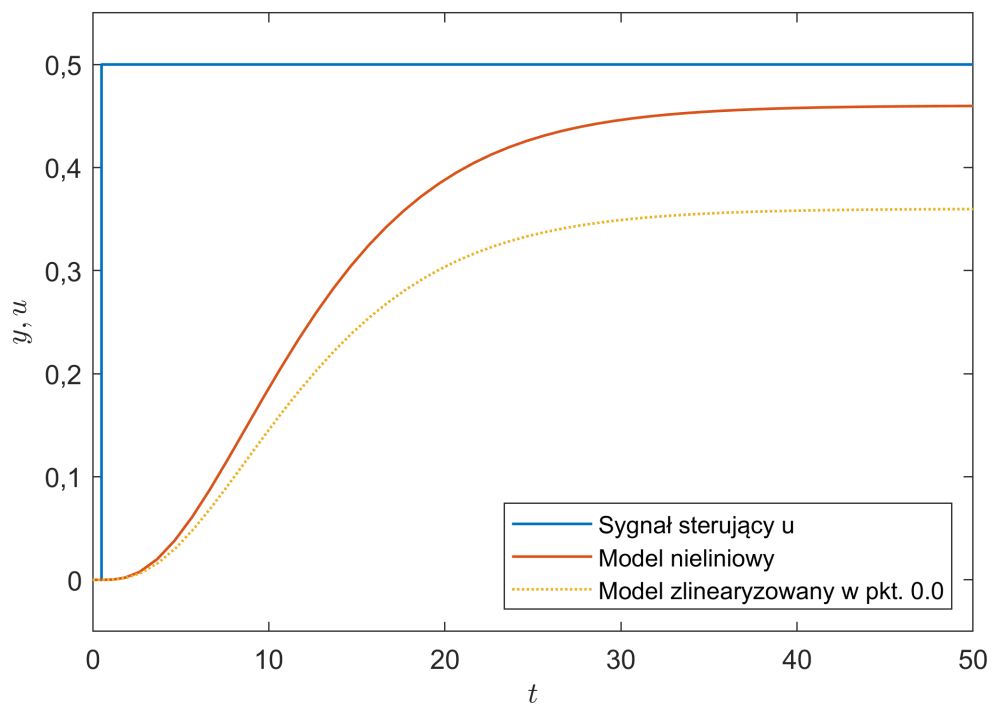


Rys. 1.4. Wykres odpowiedzi skokowej modelu nieliniowego oraz zlinearyzowanego w  $\bar{u} = 0,5$  dla skoku  $\Delta u = 0,1$

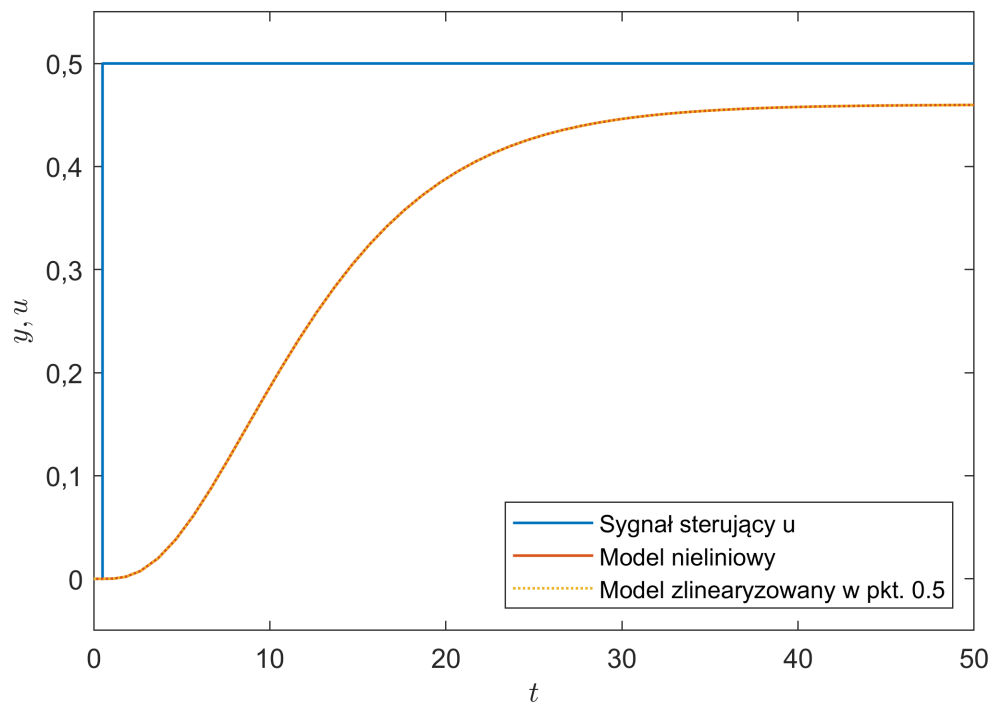


Rys. 1.5. Wykres odpowiedzi skokowej modelu nieliniowego oraz zlinearyzowanego w  $\bar{u} = 1,0$  dla skoku  $\Delta u = 0,1$

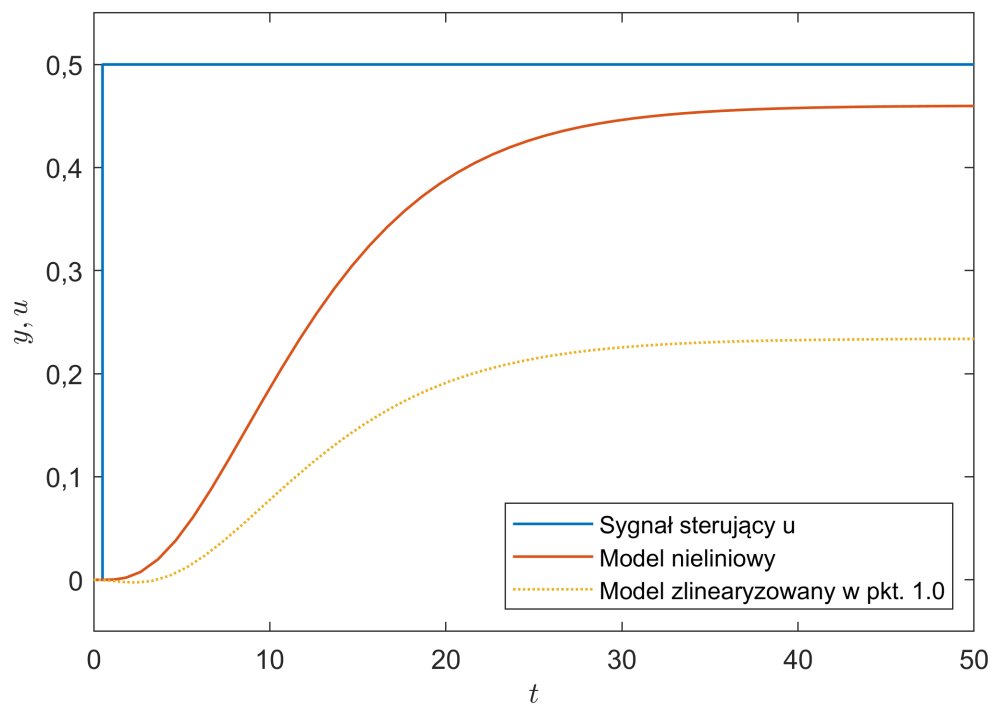
### 1.3.2. „Średni” skok sygnału sterującego



Rys. 1.6. Wykres odpowiedzi skokowej modelu nieliniowego oraz zlinearyzowanego w  $\bar{u} = 0,0$  dla skoku  $\Delta u = 0,5$



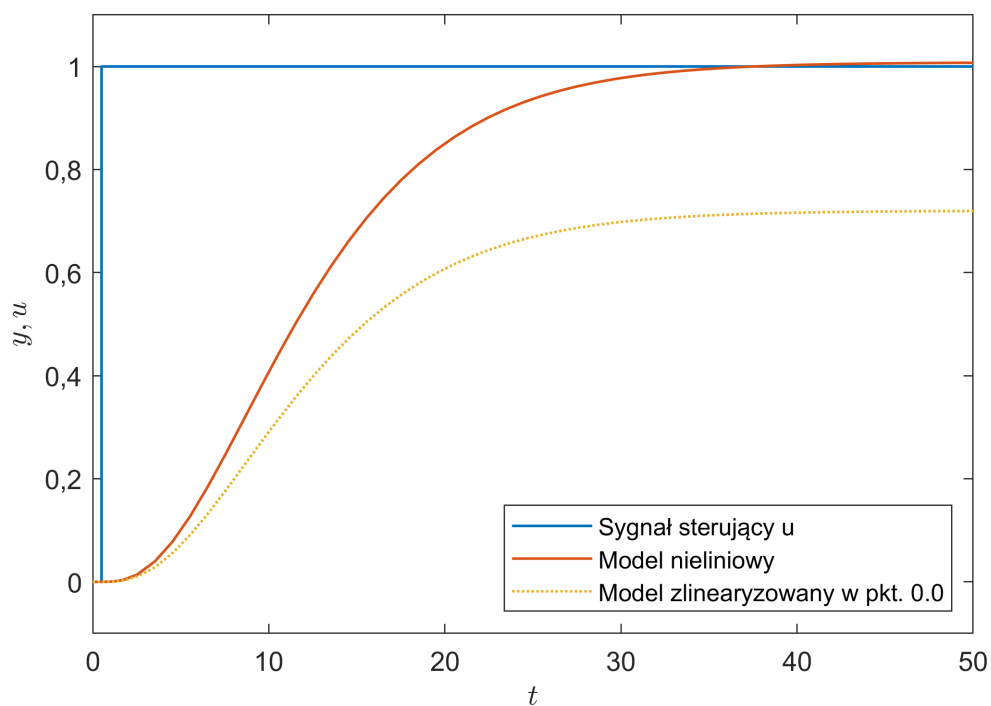
Rys. 1.7. Wykres odpowiedzi skokowej modelu nieliniowego oraz zlinearyzowanego w  $\bar{u} = 0,5$  dla skoku  $\Delta u = 0,5$



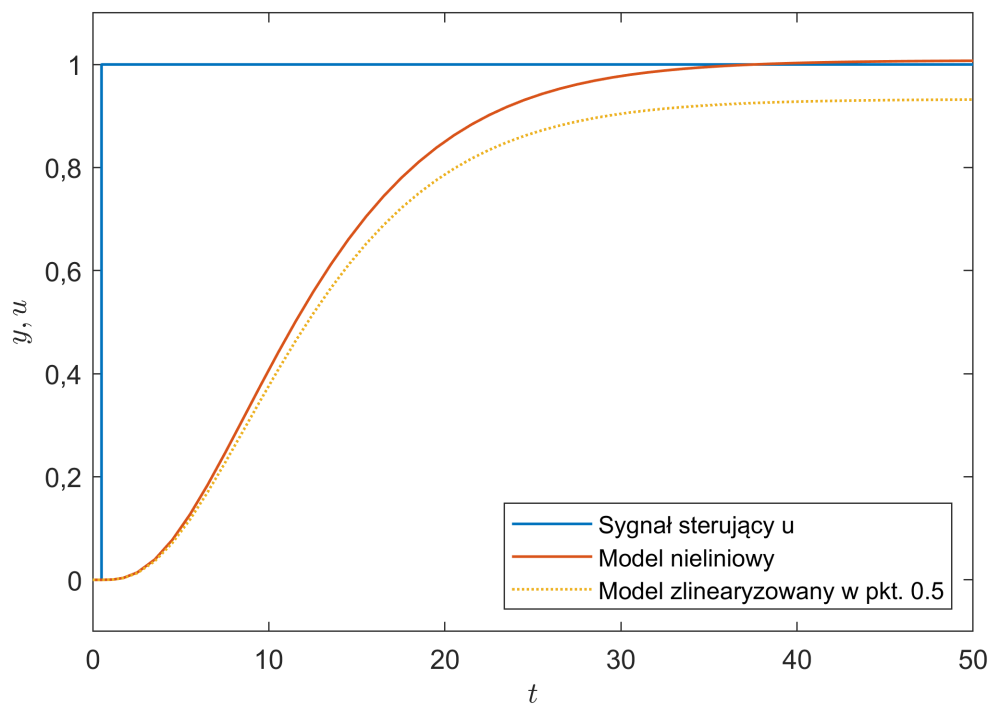
Rys. 1.8. Wykres odpowiedzi skokowej modelu nieliniowego oraz zlinearyzowanego w  $\bar{u} = 1,0$  dla skoku  $\Delta u = 0,5$



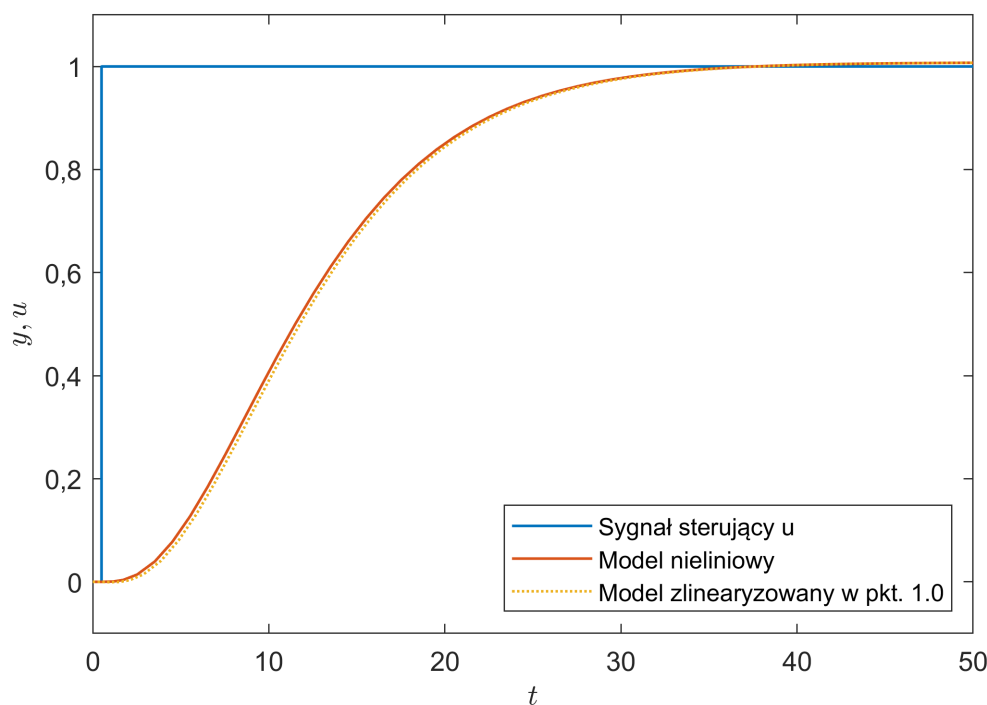
## 1.3.3. „Duży” skok sygnału sterującego



Rys. 1.9. Wykres odpowiedzi skokowej modelu nieliniowego oraz zlinearyzowanego w  $\bar{u} = 0,0$  dla skoku  $\Delta u = 1,0$



Rys. 1.10. Wykres odpowiedzi skokowej modelu nieliniowego oraz zlinearyzowanego w  $\bar{u} = 0,5$  dla skoku  $\Delta u = 1,0$



Rys. 1.11. Wykres odpowiedzi skokowej modelu nieliniowego oraz zlinearyzowanego w  $\bar{u} = 1,0$  dla skoku  $\Delta u = 1,0$

#### 1.3.4. Wnioski

W przypadku modeli zlinearyzowanych znaczący wpływ na jakość odwzorowania modelu dynamicznego ma punkt linearyzacji  $\bar{u}$ , a dokładniej jego stosunek do sygnału  $u$ . Kiedy wartość  $\bar{u}$  jest zbliżona do wartości początkowej skoku sygnału sterującego, to charakterystyka nieliniowa jest dobrze przybliżona na początkowym etapie zmiany i z czasem coraz bardziej oddala się od docelowego przebiegu. Dobrze można to zjawisko zaobserwować w przypadku wykresów na rysunkach 1.3, 1.6, 1.9. W przypadku gdy pkt.  $\bar{u}$  znajduje się między początkową, a końcową wartością skoku  $u$  to wtedy, jak na rysunku 1.10, wartości odpowiedzi zlinearyzowanej są zbliżone do nieliniowej trochę dłużej niż w pierwszym opisanym przypadku, jednak tak samo nie osiągają ostatecznie tej samej wartości, lecz różną trochę lepiej przybliżoną. Z kolei w przypadku, gdy punkt linearyzacji  $\bar{u}$  jest równy wartości końcowej skoku  $u$  to w takim przypadku wartości, do których dąży sygnał wyjściowy  $y$ , pokrywają się dla obu modeli. Widać to na przykładzie wyników symulacji z rysunków 1.11 i 1.7. Dodatkowo, dla tych dwóch przypadków, można zaobserwować to, że całe charakterystyki są dobrze przybliżone, wynika to głównie z tego, że (jak wspomniano przy charakterystykach statycznych) dla części wartości charakterystyka statyczna nieliniowa  $y(u)$  jest zbliżona do liniowej. W pozostałych przypadkach robi się już bardziej problematycznie, ponieważ po przekroczeniu wartości końcowej  $u$  przez  $\bar{U}$  sygnał wyjściowy zlinearyzowany znacznie gubi przebieg jak na rysunkach 1.4 i 1.5. Dodatkowo gdy punkt linearyzacji znacznie różni się od wartości końcowej skoku to sygnał  $u$ , jak w przypadku 1.5, to wyjście przyjmuje wartości całkowicie różne od modelu nieliniowego, co przy dalszym wykorzystaniu takiego modelu może prowadzić do znaczących problemów. Podsumowując wykonane eksperymenty, najlepszą wartością punktu linearyzacji  $\bar{U}$  jest wartość końcowa skoku sygnału sterującego  $u$ , w początkowym czasie dobre są wartości z przedziału wartości początkowej i końcowej  $u$ , a należy unikać wartości wykraczających poza ten zakres.

## 1.4. Transmitancja modelu zlinearyzowanego

### 1.4.1. Wyznaczenie

W celu wyznaczenia transmitancji należy wyciągnąć z wzorów 1.1 macierze:  $A, B, C, D$ . Następnie wystarczy podstawić odczytane wartości do wzoru na transmitancję, a możliwe jest to ponieważ wykorzystywany model jest zlinearyzowany w punkcie  $\bar{u}$ . Oznacza to, że otrzymana transmitancja 1.3 jest zależna od wartości  $\bar{u}$ .

```
A=[-a2 1 0; -a1 0 1; -a0 0 0];
u_coeffs=coeffs(dX_lin(3),ut);
u_coeff=u_coeffs(2);
B=[0; 0; u_coeff];
C=[0 0 1];
G=C*(s*eye(3,3)-A)^(-1)*B;
```

### 1.4.2. Wzór

$$G = \frac{b_0(s^2 + a_2s + a_1)(4\alpha_4\bar{u}^3 + 3\alpha_3\bar{u}^2 + 2\alpha_2\bar{u} + \alpha_1)}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (1.3)$$

## 1.5. Wzmocnienie statyczne

### 1.5.1. Wyznaczenie

W celu wyznaczenia wzmocnienia statycznego, należy obliczyć granicę transmitancji gdzie  $s$  dąży do 0. Otrzymany wzór na wzmocnienie statyczne 1.4 jest zależny od  $\bar{u}$ .

```
K_stat=subs(G,s,0);
```

### 1.5.2. Wzór

$$K_{stat} = \frac{a_1b_0(4\alpha_4\bar{u}^3 + 3\alpha_3\bar{u}^2 + 2\alpha_2\bar{u} + \alpha_1)}{a_0} \quad (1.4)$$

### 1.5.3. Wzmocnienie statyczne dla danych punktów linearyzacji

$$K_{stat}(\bar{u} = 0) \approx 0,0333 \quad (1.5)$$

$$K_{stat}(\bar{u} = 0,5) \approx 0,0438 \quad (1.6)$$

$$K_{stat}(\bar{u} = 1,0) \approx 0,0717 \quad (1.7)$$

### 1.5.4. Wnioski

Porównując otrzymane wzmocnienia statyczne oraz zlinearyzowane charakterystyki statyczne można dojść do jednoznacznego wniosku, że wzmocnienie statyczne jest powiązane ze współczynnikiem kierunkowy prostej modelu liniowego (zlinearyzowanego).

## 2. Ciągłe modele statyczne

### 2.1. Ciągła nieliniowa charakterystyka statyczna

#### 2.1.1. Wyznaczanie charakterystyki statycznej

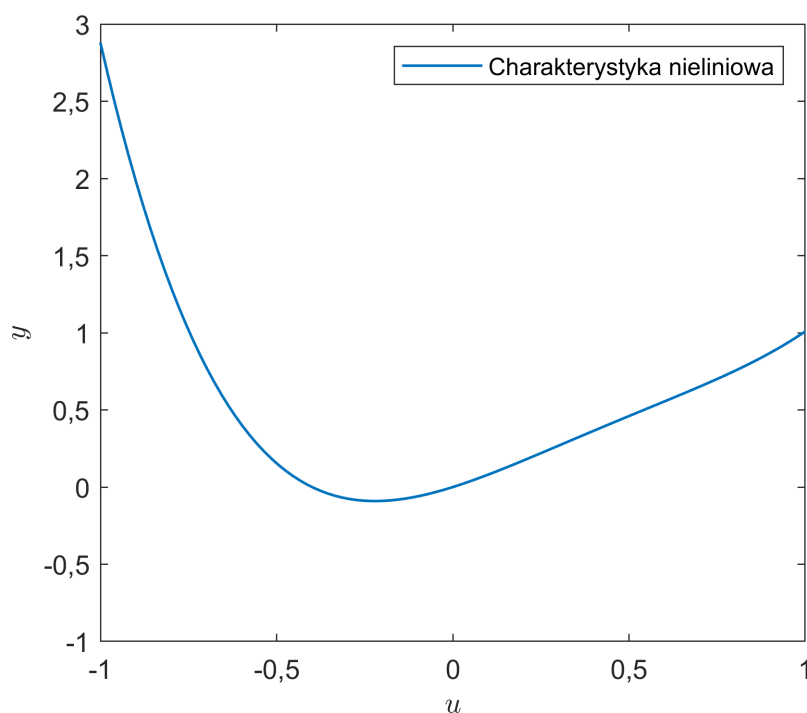
W celu wyznaczenia charakterystyki statycznej wzory na pochodne stanów przyrównano do 0, a stany zależne od czasu zastąpiono stałymi  $x_1, x_2, x_3$ . Następnie rozwiązano powstały w ten sposób układ równań i otrzymane wyniki dla zmiennych  $x_1, x_2, x_3$  zależne od  $u$  podstawiono do wzoru na  $y(x_1, x_2, x_3, u)$  otrzymując zależność  $y(u)$  przedstawioną w równaniu 2.1.

```
Xs = solve(dXdt==zeros(3,1), Xt);  
y=collect(Xs.x1);
```

#### 2.1.2. Wzór

$$y = \frac{b_0}{a_0}(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4) \quad (2.1)$$

#### 2.1.3. Wykres



Rys. 2.1. Nieliniowa charakterystyka statyczna

## 2.2. Ciągły zlinearyzowany model statyczny

### 2.2.1. Linearyzacja

Linearyzację rozpoczęto od zlinearyzowania nieliniowych funkcji występujących w nieliniowej charakterystyce statycznej. W tym celu skorzystano ze rozwinięcia funkcji w szereg Taylora.

```
up = [ut ut^2 ut^3 ut^4];
up_lin=ut;
for i=2:4
    up_lin(i) = subs(up(i),ut,ud) + subs(diff(up(i), ut),ut,ud)*(ut-ud);
end
```

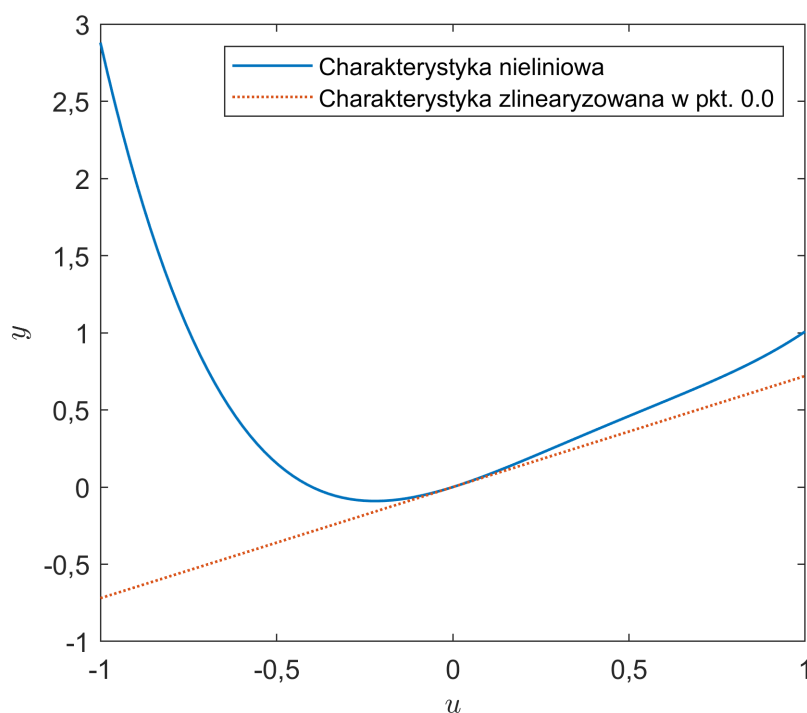
Po otrzymaniu zlinearyzowanych pojedynczych funkcji podstawiono je do nieliniowej charakterystyki statycznej.

```
y_lin=y;
for i=4:-1:2
    y_lin=subs(y_lin,up(i),up_lin(i));
end
y_lin = collect(y_lin);
```

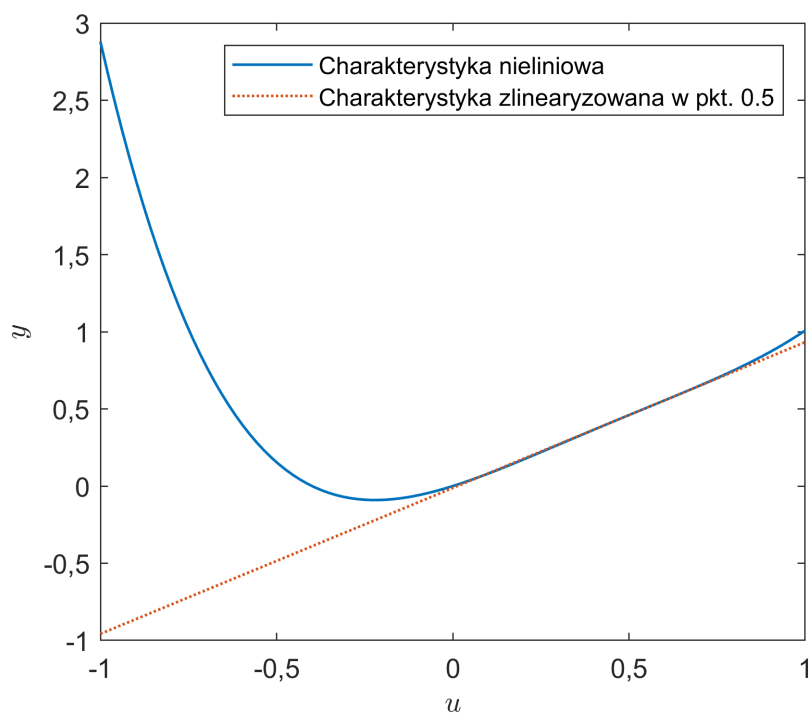
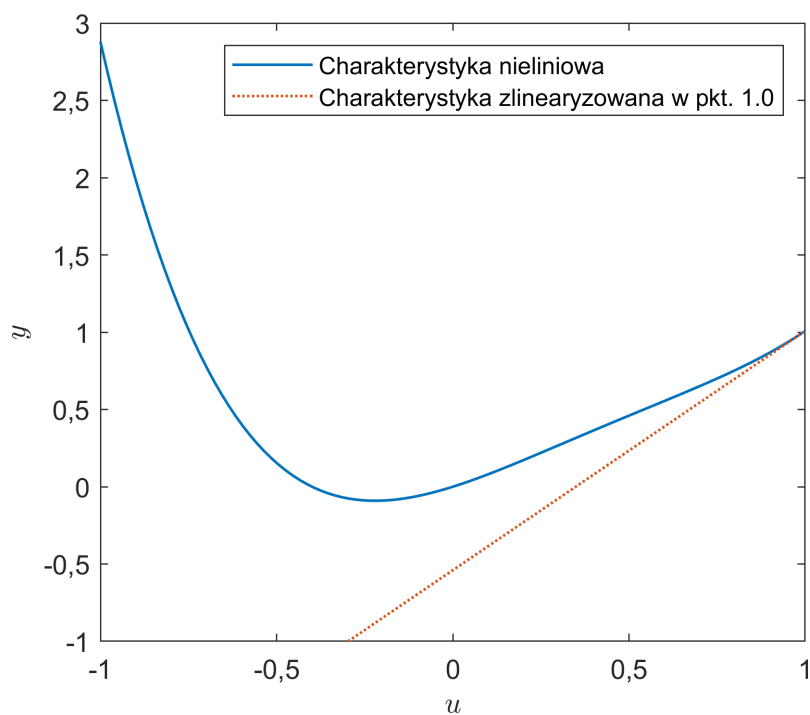
### 2.2.2. Wzór

$$y = \frac{b_0(\alpha_1 + 2\alpha_2\bar{u} + 3\alpha_3\bar{u}^2 + 4\alpha_4\bar{u}^3)}{a_0}u - (\alpha_2\bar{u}^2 + 2\alpha_3\bar{u}^3 + 3\alpha_4\bar{u}^4) \quad (2.2)$$

### 2.2.3. Wykresy



Rys. 2.2. Charakterystyka statyczna dla punktu linearyzacji  $\bar{u} = 0$

Rys. 2.3. Charakterystyka statyczna dla punktu linearyzacji  $\bar{u} = 0,5$ Rys. 2.4. Charakterystyka statyczna dla punktu linearyzacji  $\bar{u} = 1$ 

#### 2.2.4. Wnioski

Z przedstawionych na wykresach 2.2, 2.3, 2.4 można zaobserwować, że na wartości przyjmowane przez zlinearyzowaną charakterystykę statyczną znaczący wpływ ma punkt linearyzacji  $\bar{u}$ . Dobrze pokazuje to różnica między wykresem 2.2, a 2.4, gdzie kąt nachylenia prostej różni się znacząco. Dodatkowo równie istotny jest kształt charakterystyki nieliniowej, gdyż determi-

nuje on w jak dużym otoczeniu punktu  $\bar{u}$  zlinearyzowany model będzie wystarczająco dobrze przybliżał wartości oryginalnego modelu. Na podstawie przeprowadzonych symulacji dla punktu  $\bar{u} = 0,5$  odległość w jakiej charakterystyka jest dobrze przybliżona wynosi około 0,4. Natomiast dla punktu  $\bar{u} = 1$  taka odległość wynosi poniżej 0,1, co jest znaczącą różnicą.

## 3. Dyskretny model dynamiczny

### 3.1. Dyskretny nieliniowy model dynamiczny

#### 3.1.1. Dyskretyzacja

W celu dyskretyzacji nieliniowego modelu dynamicznego wszystkie zmienne stanu, wejścia, wyjścia zamieniono na zależne od  $k$ , zamiast od  $t$ , natomiast pochodne zostały zastąpione wzorem na dyskretyzację metodą Eulera do przodu i w ten sposób zostały wyprowadzone równania przedstawione we wzorze 3.1

```
syms xk1 xk2 xk3 xkp11 xkp12 xkp13 uk T
Xk=[xk1;xk2;xk3];
Xkp1=[xkp11; xkp12; xkp13];
for i=1:3
    Xkp1(i)=solve(dXdt(i)==(Xkp1(i)-Xk(i))/T,Xkp1(i));
    for j=1:3
        Xkp1(i)=subs(Xkp1(i),Xt(j),Xk(j));
    end
    Xkp1(i)=subs(Xkp1(i),ut,uk);
    Xkp1(i)=collect(Xkp1(i));
end
yk = xk1;
```

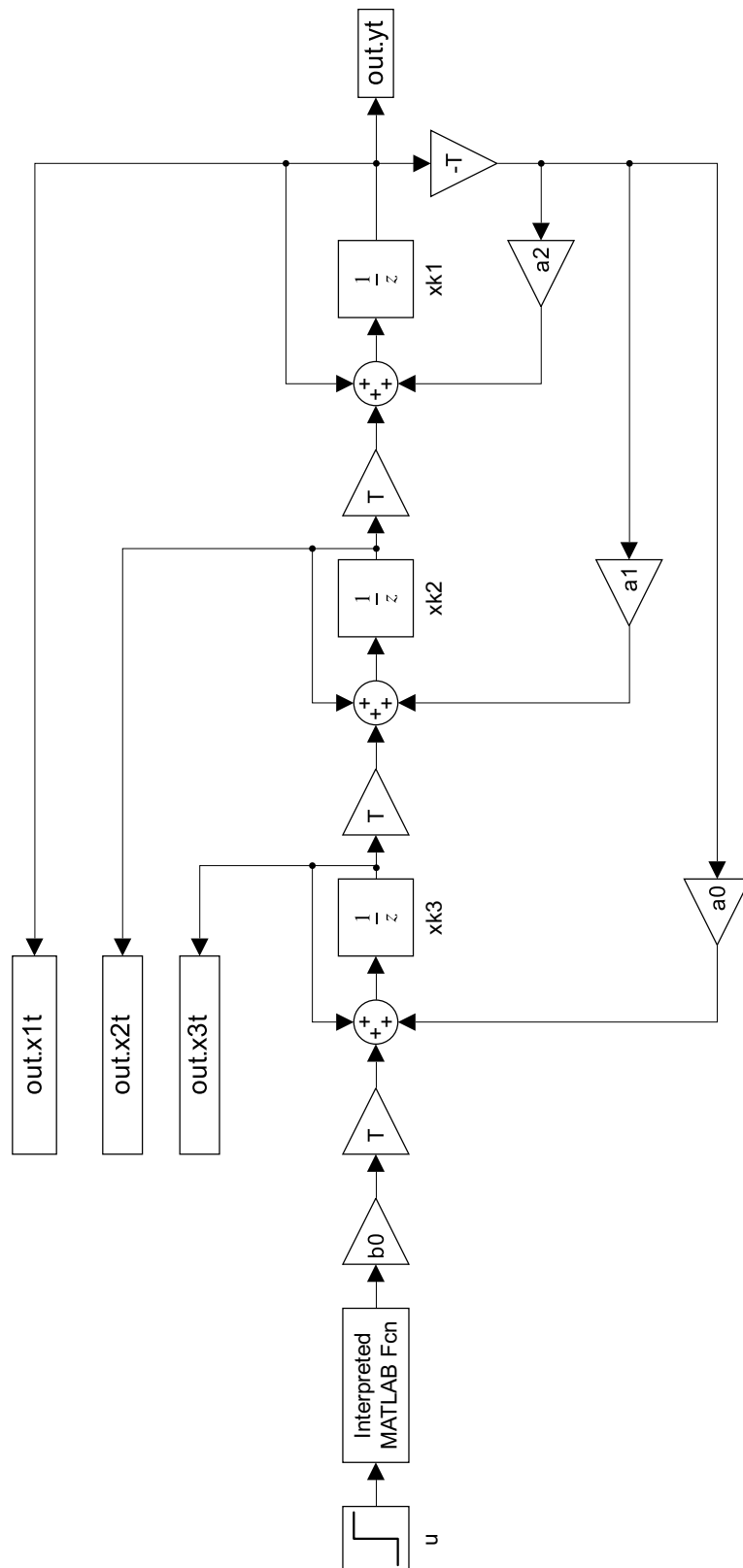
#### 3.1.2. Reprezentacja w przestrzeni stanów

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= (1 - Ta_2)x_1(k) + Tx_2(k) \\x_2(k+1) &= -Ta_1x_1(k) + x_2(k) + Tx_3(k) \\x_3(k+1) &= -Ta_0x_1(k) + x_3(k) + Tb_0(\alpha_4u^4(k) + \alpha_3u^3(k) + \alpha_2u^2(k) + \alpha_1u(k)) \\y(k) &= x_1(k)\end{aligned}\tag{3.1}$$

#### 3.1.3. Reprezentacja graficzna

Interpreted MATLAB Fcn zawiera wyrażenie:  $\alpha_1u + \alpha_2u^2 + \alpha_3u^3 + \alpha_4u^4$

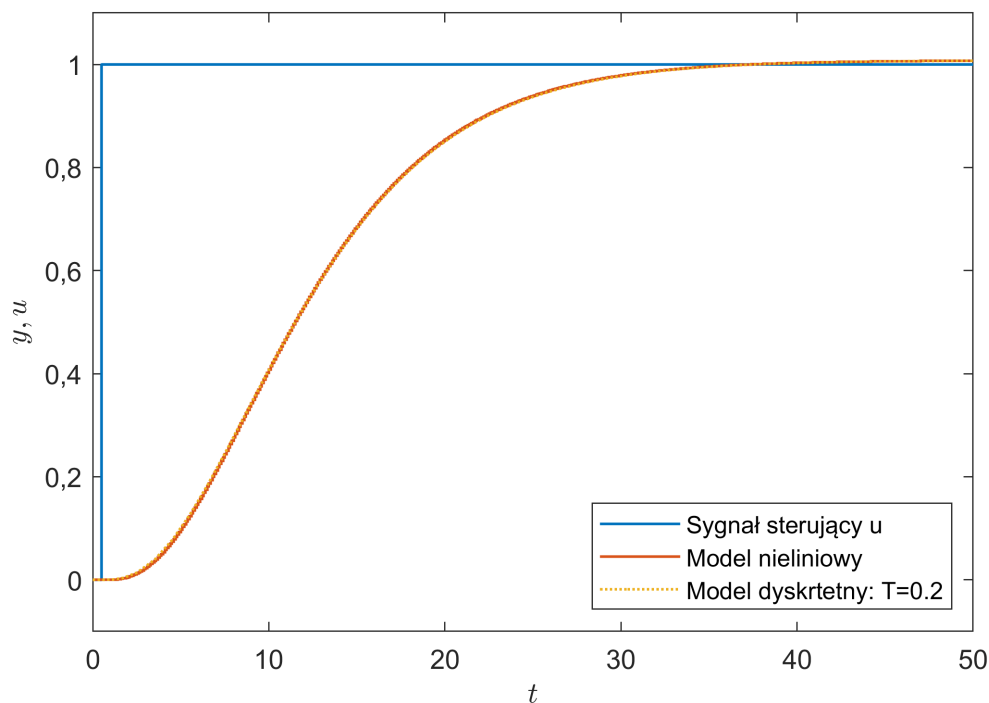




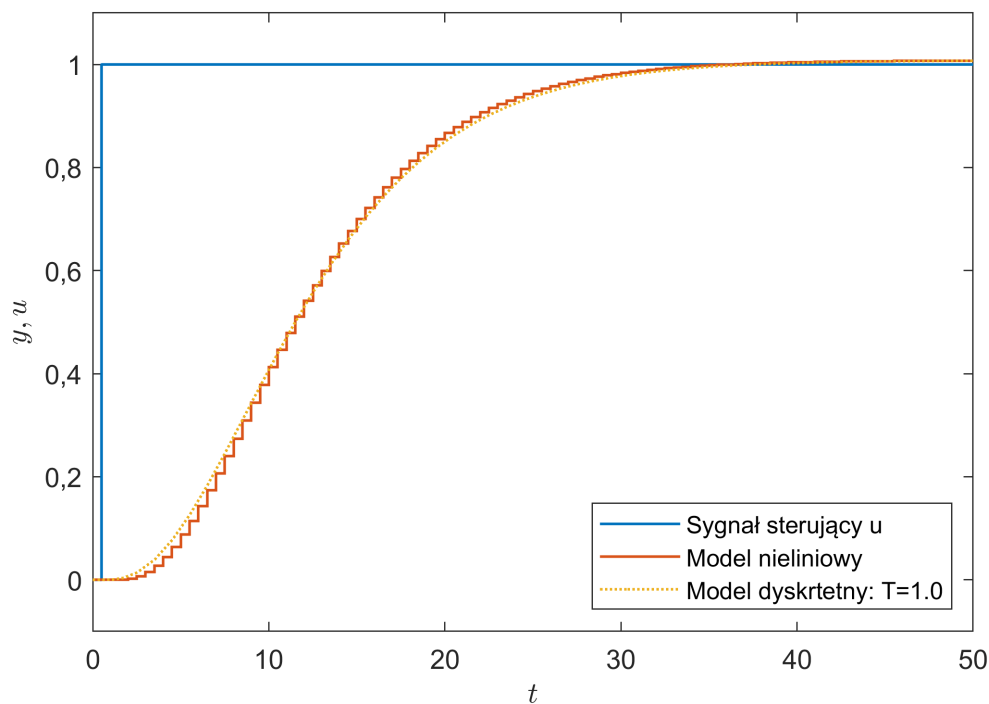
Rys. 3.1. Reprezentacja graficzna modelu dynamicznego dyskretnego

### 3.1.4. Odpowiedzi skokowe

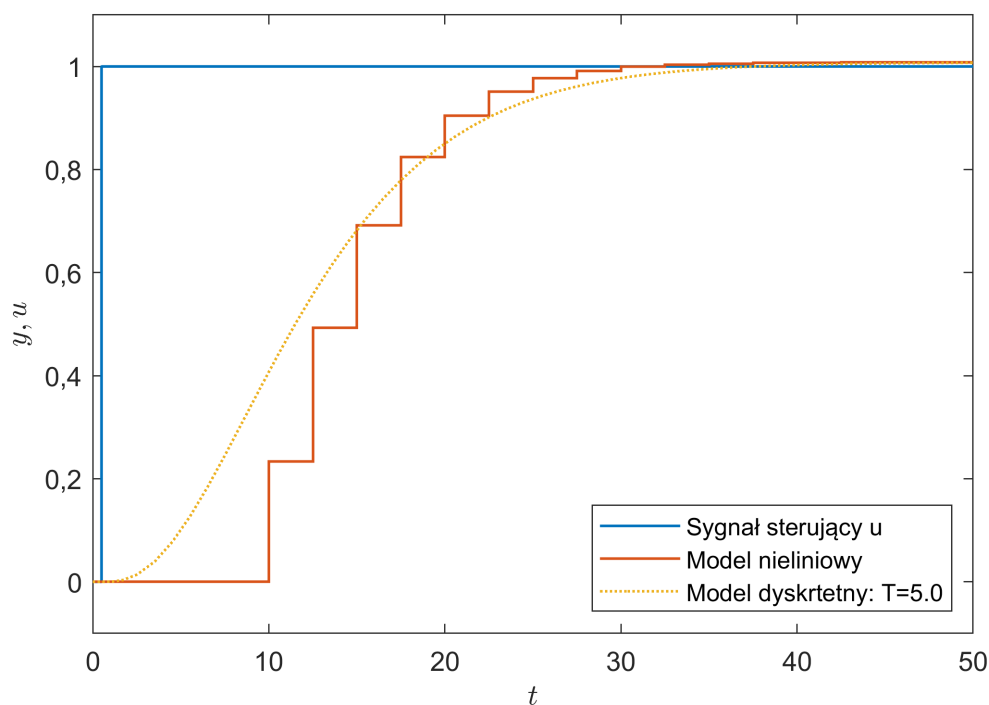
W celu sprawdzenia poprawności działania modelu dyskretnego oraz zbadaniu różnic w działaniu modeli przed i po dyskretyzacji pobudzono te modele skokiem wartości sygnału sterującego  $u$  z 0 do 1 przy zerowych warunkach początkowych ( $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0$ ).



Rys. 3.2. Wykres odpowiedzi skokowej modelu ciągłego oraz dyskretnego przy czasie próbkowania  $T = 0,2s$



Rys. 3.3. Wykres odpowiedzi skokowej modelu ciągłego oraz dyskretnego przy czasie próbkowania  $T = 1,0s$



Rys. 3.4. Wykres odpowiedzi skokowej modelu ciągłego oraz dyskretnego przy czasie próbkowania  $T = 5,0s$

### 3.1.5. Wnioski

Z wyników z przeprowadzonych symulacji przedstawionych na wykresach: 3.2, 3.3, 3.4 można jednoznacznie wywnioskować, że dokładność odwzorowania ciągłego modelu przez dyskretny zależy od okresu próbkowania  $T$ . Na przebiegu 3.2 widać, że możliwe jest bardzo dokładne odwzorowanie, które jednakże wymaga zdecydowanie większego nakładu obliczeń niż w przypadku 3.3, gdzie mimo wszystko dokładność jest na akceptowalnym poziomie. Warto też zauważyć, że przy zbyt dużym czasie próbkowania, jak w przykładzie 3.4, możliwe jest utracenie sensowności rozwiązania i otrzymanie wykresu, który nie będzie przypominał wyjściowej charakterystyki ciągłej.