Politechnika Warszawska
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych

Projektowanie układów sterowania, projekt grupowy (PUST): materiały dydaktyczne

Algorytm regulacji DMC

Maciej Ławryńczuk

Warszawa, 2023

1. Regulacja DMC procesów jednowymiarowych

W algorytmie DMC do predykcji wykorzystuje się model odpowiedzi skokowej, zdefiniowany zestawem D liczb: $s_1, \ldots, s_D$, gdzie D jest horyzontem dynamiki. Wektor zmiennych decyzyjnych w aktualnej dyskretnej chwili $k = 0, 1, 2, \ldots$ ma postać

$$\triangle U(k) = \begin{bmatrix} \triangle u(k|k) \\ \vdots \\ \triangle u(k + N_\mathrm{u} - 1|k) \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdzie N_u jest horyzontem sterowania. W każdej chwili próbkowania algorytm wyznacza wektor zmiennych decyzyjnych (1) w taki sposób, aby minimalizowany był wskaźnik jakości regulacji

$$J(k) = \sum_{p=1}^{N} (y^\mathrm{zad}(k) - \hat{y}(k+p|k))^2 + \lambda \sum_{p=0}^{N_\mathrm{u}-1} (\triangle u(k+p|k))^2 \tag{2}$$

gdzie N jest horyzontem predykcji, $y^\mathrm{zad}(k)$ sygnałem zadanym wyjścia znanym w aktualnej chwili k, natomiast $\hat{y}(k+p|k)$ jest sygnałem prognozowanym wyjścia dla przyszłej chwili $k+p$, obliczonym w chwili k. Różnica $y^\mathrm{zad}(k) - \hat{y}(k+p|k)$ jest więc prognozowanym uchybem regulacji dla przyszłej chwili $k+p$, obliczonym w chwili k. We wskaźniku jakości (2) można uwzględnić przyszłe wartości zadane na horyzoncie predykcji ($y^\mathrm{zad}(k+p|k)$), ale muszą być one znane w chwili k. Współczynnik kary oznaczony jest przez $\lambda > 0$. Jako sterowanie procesu w chwili k stosuje się pierwszy element wyznaczonego ciągu (1)

$$u(k) = \triangle u(k|k) + u(k-1) \tag{3}$$

W kolejnej chwili dyskretnej, po aktualizacji pomiaru sygnału wyjściowego procesu, cała procedura obliczeniowa zostaje powtórzona.

W wersji analitycznej, bez ograniczeń, optymalny wektor przyrostów oblicza się ze wzoru

$$\triangle U(k) = \boldsymbol{K}(Y^\mathrm{zad}(k) - Y(k) - \boldsymbol{M}^\mathrm{p}(k)\triangle U^\mathrm{p}(k)) \tag{4}$$

gdzie macierz o wymiarowości $N_\mathrm{u} \times N$ ma postać

$$\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{M}^\mathrm{T}\boldsymbol{M} + \lambda \boldsymbol{I}_{N_\mathrm{u} \times N_\mathrm{u}})^{-1}\boldsymbol{M}^\mathrm{T} \tag{5}$$

Macierz dynamiczna ma wymiary $N \times N_\mathrm{u}$ i złożona jest ze współczynników odpowiedzi skokowej

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_N & s_{N-1} & \ldots & s_{N-N_\mathrm{u}+1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Druga macierz złożona ze współczynników modelu ma wymiary $N \times (D-1)$

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}} = \begin{bmatrix} s_2 - s_1 & \dots & s_D - s_{D-1} \\ s_3 - s_1 & \dots & s_{D+1} - s_{\mathrm{D}-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N+1} - s_1 & \dots & s_{N+D-1} - s_{D-1} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Wektory o długości N mają postać

$$Y^{\mathrm{zad}}(k) = \begin{bmatrix} y^{\mathrm{zad}}(k) \\ \vdots \\ y^{\mathrm{zad}}(k) \end{bmatrix}, \ Y(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} \tag{8}$$

natomiast wektor o długości $D-1$ ma strukturę

$$\triangle U^{\mathrm{p}}(k) = \begin{bmatrix} \triangle u(k-1) \\ \vdots \\ \triangle u(k-(D-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(k-1) - u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-D+1) - u(k-D) \end{bmatrix} \tag{9}$$

W wersji oszczędnej algorytmu DMC oblicza się jedynie pierwszy element wektora (1), tzn. przyrost sygnału sterującego dla aktualnej chwili dyskretnej k. Macierz $\boldsymbol{K}$ (wzór (5)) ma strukturę

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{K}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\boldsymbol{K}}_{N_{\mathrm{u}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & \dots & K_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N_{\mathrm{u}},1} & \dots & K_{N_{\mathrm{u}},N} \end{bmatrix} \tag{10}$$

gdzie $K_{i,j}$ są skalarami, natomiast $\overline{\boldsymbol{K}}_i$ są wektorami poziomymi o długości N. Struktura macierzy $\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}$ (wzór (7)) ma postać

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}} = \left[\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{p}} \ \dots \ \boldsymbol{M}_{D-1}^{\mathrm{p}}\right] \tag{11}$$

gdzie $\boldsymbol{M}_i^{\mathrm{p}}$ są kolejnymi kolumnami (wektorami pionowymi o długości N). Ze wzoru (4) otrzymuje się

$$\triangle u(k|k) = K^{\mathrm{e}}(y^{\mathrm{zad}}(k) - y(k)) - \sum_{i=1}^{D-1} K_i^{\mathrm{u}} \triangle u(k-i) \tag{12}$$

gdzie

$$K^{\mathrm{e}} = \sum_{p=1}^{N} K_{1,p} \tag{13}$$

$$K_i^{\mathrm{u}} = \overline{\boldsymbol{K}}_1 \boldsymbol{M}_i^{\mathrm{p}}, \ i = 1, \dots, D-1 \tag{14}$$

Zwróćmy uwagę, że ze wzoru (12) oblicza się aktualny przyrost sygnału sterującego, aby wyznaczyć odpowiadającą mu wartość należy skorzystać ze wzoru (3).

2. Regulacja DMC procesów wielowymiarowych

W wersji wielowymiarowej rozważamy proces, który ma n_{u} wejść i n_{y} wyjść.

W wielowymiarowym algorytmie DMC do predykcji wykorzystuje się model odpowiedzi skokowej, zdefiniowany zestawem D macierzy o wymiarowości $n_{\mathrm{y}} \times n_{\mathrm{u}}$

$$S = \begin{bmatrix} s_p^{1,1} & \dots & s_p^{1,n_{\mathrm{u}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_p^{n_{\mathrm{y}},1} & \dots & s_p^{n_{\mathrm{y}},n_{\mathrm{u}}} \end{bmatrix} \tag{15}$$

gdzie D jest horyzontem dynamiki. Symbolem $s_p^{m,n}$ oznaczono p-ty współczynnik odpowiedzi skokowej przy skoku (jednostkowym) sygnału n-tego wejścia, który jest obserwowany dla m-tego wyjścia. Wektor zmiennych decyzyjnych w aktualnej dyskretnej chwili k ma ogólną postać taką samą jak w przypadku jednowymiarowym (równanie (1)), ale musimy uwzględnić przyrosty na horyzoncie sterowania dla wszystkich zmiennych wejściowych, a więc wektor zmiennych decyzyjnych ma długość $n_{\mathrm{u}}N_{\mathrm{u}}$

$$\triangle U(k) = \begin{bmatrix} \triangle u(k|k) \\ \vdots \\ \triangle u(k+N_{\mathrm{u}}-1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \triangle u_1(k|k) \\ \vdots \\ \triangle u_{n_{\mathrm{u}}}(k|k) \\ \vdots \\ \triangle u_1(k+N_{\mathrm{u}}-1|k) \\ \vdots \\ \triangle u_{n_{\mathrm{u}}}(k+N_{\mathrm{u}}-1|k) \end{bmatrix} \tag{16}$$

W każdej chwili próbkowania algorytm wyznacza wektor zmiennych decyzyjnych (16) w taki sposób, aby minimalizowany był wskaźnik jakości regulacji

$$J(k) = \sum_{m=1}^{n_{\mathrm{y}}} \psi_m \sum_{p=1}^{N} (y_m^{\mathrm{zad}}(k) - \hat{y}_m(k+p|k))^2 + \sum_{n=1}^{n_{\mathrm{u}}} \lambda_n \sum_{p=0}^{N_{\mathrm{u}}-1} (\triangle u_n(k+p|k))^2 \tag{17}$$

We wskaźniku jakości uwzględniamy prognozowane uchyby regulacji wszystkich zmiennych wyjściowych oraz przyrosty wszystkich sygnałów sterujących. Współczynniki obu członów wskaźnika jakości oznaczone są symbolami $\psi_m \geqslant 0$ ($m = 1, \dots, n_{\mathrm{y}}$) oraz $\lambda_n > 0$ ($n = 1, \dots, n_{\mathrm{u}}$). Jako sterowania procesu w chwili k stosuje się pierwsze n_{u} elementów wyznaczonego ciągu (16)

$$u_1(k) = \triangle u_1(k|k) + u_1(k-1) \tag{18}$$

$$\vdots$$

$$u_{n_{\mathrm{u}}}(k) = \triangle u_{n_{\mathrm{u}}}(k|k) + u_{n_{\mathrm{u}}}(k-1) \tag{19}$$

W wersji analitycznej, bez ograniczeń, optymalny wektor przyrostów oblicza się ze wzoru takiego samego jak w przypadku jednowymiarowym (4), tzn.

$$\triangle U(k) = \boldsymbol{K}(Y^{\mathrm{zad}}(k) - Y(k) - \boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}(k)\triangle U^{\mathrm{p}}(k)) \tag{20}$$

ale w wersji wielowymiarowej zmianie ulegają wymiary poszczególnych macierzy i wektorów. Macierz o wymiarowości $n_{\mathrm{u}}N_{\mathrm{u}} \times n_{\mathrm{y}}N$ ma postać

$$\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi} \tag{21}$$

Pierwsza z diagonalnych macierzy wagowych ma wymiary $n_{\mathrm{y}}N \times n_{\mathrm{y}}N$

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \psi_{n_{\mathrm{y}}} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \psi_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \psi_{n_{\mathrm{y}}} \end{bmatrix} \tag{22}$$

natomiast druga ma wymiary $n_{\mathrm{u}}N_{\mathrm{u}} \times n_{\mathrm{u}}N_{\mathrm{u}}$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_{n_{\mathrm{u}}} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_{n_{\mathrm{u}}} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Macierz dynamiczna ma wymiary $n_{\mathrm{y}}N \times n_{\mathrm{u}}N_{\mathrm{u}}$ i złożona jest z macierzy odpowiedzi skokowej (wzór (15))

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & \dots & \mathbf{0}_{n_{\mathrm{y}} \times n_{\mathrm{u}}} \\ S_2 & S_1 & \dots & \mathbf{0}_{n_{\mathrm{y}} \times n_{\mathrm{u}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_N & S_{N-1} & \dots & S_{N-N_{\mathrm{u}}+1} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Macierz $\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}$ ma wymiary $n_{\mathrm{y}}N \times n_{\mathrm{u}}(D-1)$

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}} = \begin{bmatrix} S_2 - S_1 & \dots & S_D - S_{D-1} \\ S_3 - S_1 & \dots & S_{D+1} - S_{\mathrm{D}-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N+1} - S_1 & \dots & S_{N+D-1} - S_{D-1} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Wektory o długości $n_{\mathrm{y}}N$ mają postać

$$Y^{\mathrm{zad}}(k) = \begin{bmatrix} y_1^{\mathrm{zad}}(k) \\ \vdots \\ y_{n_{\mathrm{y}}}^{\mathrm{zad}}(k) \\ \vdots \\ y_1^{\mathrm{zad}}(k) \\ \vdots \\ y_{n_{\mathrm{y}}}^{\mathrm{zad}}(k) \end{bmatrix}, \ Y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_{n_{\mathrm{y}}}(k) \\ \vdots \\ y_1(k) \\ \vdots \\ y_{n_{\mathrm{y}}}(k) \end{bmatrix} \tag{26}$$

natomiast wektor o długości $n_{\mathrm{u}}(D-1)$ ma strukturę

$$\triangle U^{\mathrm{p}}(k) = \begin{bmatrix} \triangle u_1(k-1) \\ \vdots \\ \triangle u_{n_{\mathrm{u}}}(k-1) \\ \vdots \\ \triangle u_1(k-(D-1)) \\ \vdots \\ \triangle u_{n_{\mathrm{u}}}(k-(D-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(k-1) - u_1(k-2) \\ \vdots \\ u_{n_{\mathrm{u}}}(k-1) - u_{n_{\mathrm{u}}}(k-2) \\ \vdots \\ u_1(k-D+1) - u_1(k-D) \\ \vdots \\ u_{n_{\mathrm{u}}}(k-D+1) - u_{n_{\mathrm{u}}}(k-D) \end{bmatrix} \tag{27}$$

W wersji oszczędnej algorytmu DMC oblicza się jedynie pierwsze n_{u} elementów wektora (16), tzn. przyrosty sygnałów sterujących dla aktualnej chwili dyskretnej k. Macierz $\boldsymbol{K}$ (wzór (21)) ma strukturę

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{K}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\boldsymbol{K}}_{N_{\mathrm{u}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{1,1} & \dots & \boldsymbol{K}_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{K}_{N_{\mathrm{u}},1} & \dots & \boldsymbol{K}_{N_{\mathrm{u}},N} \end{bmatrix} \tag{28}$$

gdzie każda z macierzy $\overline{\boldsymbol{K}}_i$ ma wymiary $n_{\mathrm{u}} \times n_{\mathrm{y}}N$, natomiast każda z macierzy $\boldsymbol{K}_{i,j}$ ma wymiary $n_{\mathrm{u}} \times n_{\mathrm{y}}$. Struktura macierzy $\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}$ (wzór (25)) ma postać

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_1^{\mathrm{p}} & \dots & \boldsymbol{M}_{D-1}^{\mathrm{p}} \end{bmatrix} \tag{29}$$

gdzie $\boldsymbol{M}_i^{\mathrm{p}}$ są macierzami o wymiarowości $n_{\mathrm{y}}N \times n_{\mathrm{u}}$. Ze wzoru (20) otrzymuje się

$$\triangle u(k|k) = \begin{bmatrix} \triangle u_1(k|k) \\ \vdots \\ \triangle u_{n_{\mathrm{u}}}(k|k) \end{bmatrix} = \boldsymbol{K}^{\mathrm{e}}(y^{\mathrm{zad}}(k) - y(k)) - \sum_{i=1}^{D-1} \boldsymbol{K}_i^{\mathrm{u}} \triangle u(k-i) \tag{30}$$

gdzie macierz

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{e}} = \sum_{p=1}^{N} \boldsymbol{K}_{1,p} \tag{31}$$

ma wymiary $n_\mathrm{u} \times n_\mathrm{y}$, macierze

$$\boldsymbol{K}_i^\mathrm{u} = \overline{\boldsymbol{K}}_1 \boldsymbol{M}_i^\mathrm{p},\ i = 1, \ldots, D-1 \tag{32}$$

mają wymiary $n_\mathrm{u} \times n_\mathrm{u}$ natomiast wektory o długości n_y mają postać

$$y^\mathrm{zad}(k) = \begin{bmatrix} y_1^\mathrm{zad}(k) \\ \vdots \\ y_{n_\mathrm{y}}^\mathrm{zad}(k) \end{bmatrix},\ y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_{n_\mathrm{y}}(k) \end{bmatrix} \tag{33}$$

Pamiętajmy, że ze wzoru (30) oblicza się aktualne przyrosty sygnałów sterujących, aby wyznaczyć odpowiadające im wartości należy skorzystać ze wzorów (18)-(19).

Literatura

[1] Ławryńczuk, M.: Sterowanie procesów. Skrypt, Politechnika Warszawska, Warszawa (2022).

[2] Tatjewski, P.: Sterowanie zaawansowane obiektów przemysłowych. Struktury i algorytmy. EXIT, Warszawa (2016).