Algorytmiczne Zastosowania Łańcuchów Markowa
Projekt 10 - Compressed sensing

Projekt dotyczy odzyskiwania sygnału z zaszumionych obserwacji. Mamy $X \in \mathbb{R}^{m\times d}$ to losowa macierz pomiarów z wyrazami iid $N(0,1)$. Niech $\xi \in \mathbb{R}^m$ będzie wektorem szumu z rozkładu $N(0,\sigma^2 I_m)$, niezależnym od X. Niech $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ będzie skończonym podzbiorem. Niech θ będzie losowym punktem Θ wybieranym jednostajnie, niezależnie od (X,ξ). Pomiaru dokonujemy w następujący sposób

$$y = X\theta + \xi.$$

Chcemy odzyskać nieznany wektor θ znając (X,Y). Zakładamy, że d jest duże, korzystamy z estymatora największej wiarogodności, czyli

$$\widehat{\theta} = \arg\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{P}(y|\theta,X)$$

Część 1 Zakładamy, że $\Theta = \{0,1\}^d$.

Zauważmy, że jeśli $\sigma = 0$ to z p-stwem 1 mamy jedną $\theta \in \Theta$ taką że $y = X\theta$, więc wystarczy przeszukać wszystkie $\theta \in \Theta$.

Gdy $\sigma > 0$ pokazać że

$$\mathbb{P}(y|\theta,X) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}} e^{-\|y-X\theta\|^2}$$

Czyli tak naprawdę minimalizujemy $\|y - X\theta\|^2$

Cel 1: Zaprojektować algorytm MH i symulowanego wyżarzania rozwiązujący powyższy problem. Zbadać błąd znalezionego rozwiązania jako wielkość $\frac{1}{d}\mathbb{E}\|\widehat{\theta} - \theta\|^2$ dla różnych proporcji m/d.

Część 2

Załóżmy teraz że $\Theta = \{\theta \in \{0,1\}^d : \|\theta\|_0 = s\}$, gdzie $\|\theta\|_0$ oznacza liczbę niezerowych współrzędnych. Zakładamy, że $s \ll d$. Czy podstawowy łańcuch algorytmu MH wybierający losowo współrzędne i oraz j i zamieniający je będzie działał efektywnie? Jeśli nie to jak go poprawić?

Jak w tej sytuacji zachowuje się wielkość $\frac{1}{s}\mathbb{E}\|\widehat{\theta} - \theta\|^2$?

Część 3:

Ponownie zakładamy, że Załóżmy teraz że $\Theta = \{\theta \in \{0,1\}^d : \|\theta\|_0 = s\}$, ale niech teraz $y = \operatorname{sign}(X\theta + \xi)$. Pokazać że w tym przypadku

$$\mathbb{P}(y_i = \pm 1|\theta,X) = \mathbb{P}(\xi \le \pm(X\theta)_i)$$

więc

$$\mathbb{P}(y|\theta,X) = \prod_{i=1}^{m} \Phi\left(\frac{y_i(X\theta)_i}{\sigma}\right),$$

gdzie Φ to dystrybuanta rozkładu $N(0,1)$.

Czyli w tym przypadku

$$\widehat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\Theta} - \sum_{i=1}^{m} \log\left(\Phi\left(\frac{y_i(X\theta)_i}{\sigma}\right)\right).$$

Zaprojektować i zaimplementować łańcuch Markowa służący odzyskiwaniu sygnału w tym przypadku. Ponownie zbadać wielkość $\frac{1}{s}\mathbb{E}\|\widehat{\theta} - \theta\|^2$