Piotr Onyszczuk, Maciej Pióro, gr. 3

Sprawozdanie z projektu nr 2, Metody Numeryczne II

Temat: Interpolacja kubicznymi funkcjami sklejanymi z przestrzeni $S_3(\Delta,2)$ z warunkami $s''(a)=f''(a)$, $s''(b)=f''(b)$

Opis metody: Interpolacja funkcji $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ za pomocą funkcji sklejanych (splajnów) trzeciego stopnia, czyli w taki sposób, że na przedziałach $[x_i,x_{i+1}], i=0,1,\dots,n-1, a=x_0<x_1<\dots<x_n=b, \Delta=\{x_0,\dots,x_n\}$ funkcja interpolująca(s) jest wielomianem stopnia co najwyżej 3, oraz 2. pochodna funkcji interpolującej jest ciągła. Przyjęliśmy, że węzły interpolacji są równoodległe. Ponadto zachodzą dodatkowe warunki na pochodną 2. rzędu na krańcach dziedziny funkcji interpolowanej. Aby wykonać zadanie należy wyznaczyć bazę przestrzeni $S_3(\Delta,2)$ oraz rozwiązać układ równań:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} f(x_0) - \frac{h^2 * f''(x_0)}{6} \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) - \frac{h^2 * f''(x_n)}{6} \end{bmatrix}$$

gdzie h to długość podprzedziału. Wektor $\boldsymbol{x}$ (rozwiązanie) to wektor współczynników przy kolejnych funkcjach z bazy przestrzeni.

Implementacja:

- `coefficients`: funkcja obliczająca wektor $\boldsymbol{x}$
- `values`: funkcja obliczająca wartości interpolujące
- `gausselim`: funkcja rozwiązująca układ równań o trójdiagonalnej, diagonalnie zdominowanej macierzy współczynników

- `test`: skrypt testujący interpolację
- `derivative`: funkcja obliczająca numerycznie pochodną
- `wykres/n/`: skrypty rysujące wykorzystywane przez test

`test`: Na początku ustawiane są parametry: `a`, `b` – kresy przedziału interpolacji, `fun` – wskaźnik (handler) do funkcji interpolowanej. Następnie ustawiana jest druga pochodna (również wskaźnik) – może być policzona analitycznie przez użytkownika, albo można użyć funkcji `derivative` obliczającej pochodną numerycznie. Następnie wywoływane są skrypty rysujące.

`coefficients`: funkcja przyjmuje długość przedziału, wskaźnik do funkcji, oraz wartość drugiej pochodnej w a i b. Rozwiązuje układ równań i zwraca wektor współczynników przy funkcjach z bazy przestrzeni.

`values`: przyjmuje początek przedziału interpolacji, odległość między węzłami interpolacji, wartości współczynników przy funkcjach z bazy przestrzeni i wektor punktów, w których funkcja ma być interpolowana. Zwraca wartość interpolującą w tych punktach.

`gausselim`: eliminacja Gaussa. Przyjmuje macierz współczynników, trójdiagonalną, diagonalnie dominującą i wektor wyrazów wolnych - dla takich danych GE jest wykonalna i numerycznie poprawna. Zwraca rozwiązanie układu. Napisana w sposób zwektoryzowany i zoptymalizowany dla tego rodzaju macierzy.

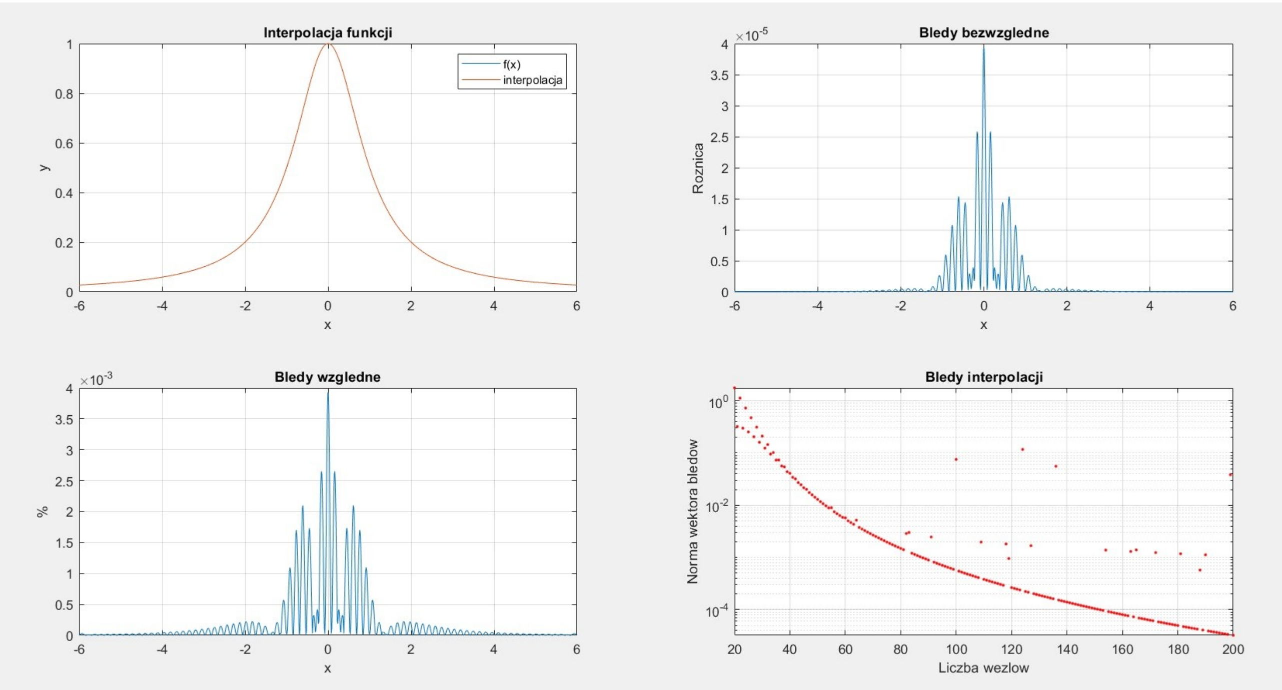
`derivative`: funkcja przyjmująca wskaźnik do funkcji, wektor punktów w których ma zostać obliczona pochodna oraz opcjonalnie parametr `h`. Korzystając z faktu, że dla odpowiednio małych h zachodzi:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \quad \text{, bo} \quad f'(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} \quad ,$$

obliczamy przybliżenie pochodnej. Funkcja `f` musi być zdefiniowana w otoczeniu `h` punktów z wektora `x`.

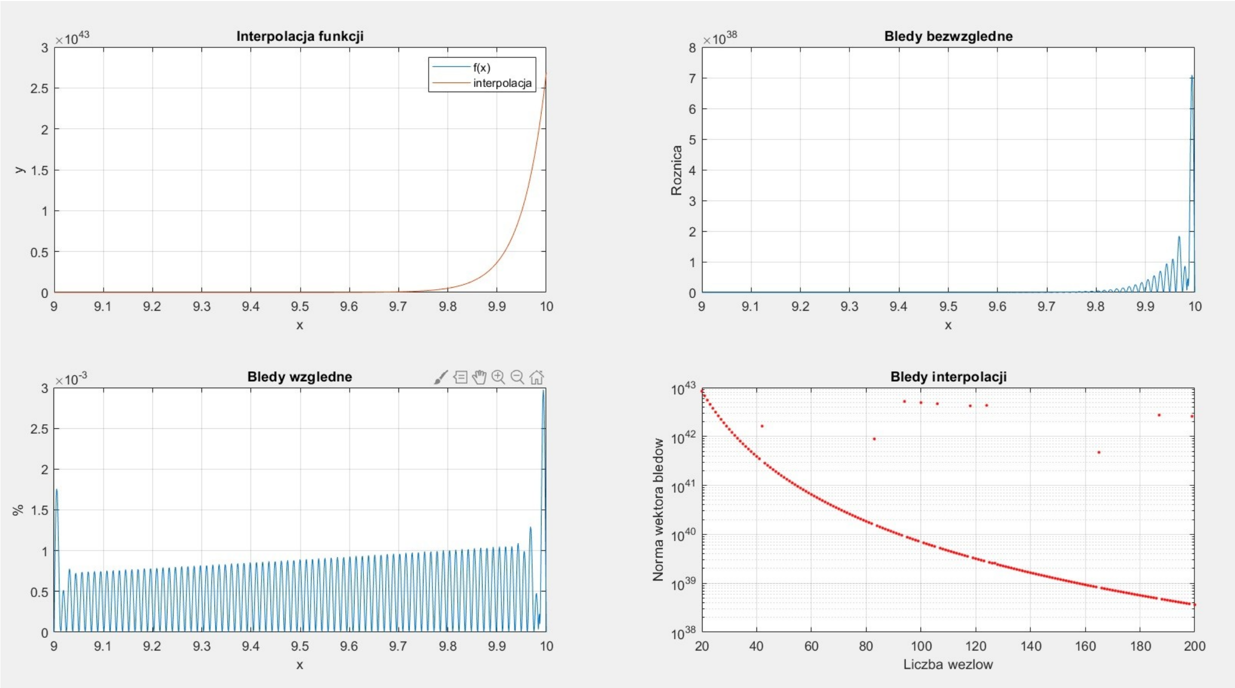
Przykłady:

- Interpolacja funkcji $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, dla której przy interpolacji wielomianowej zachodzi efekt Rungego, czyli poważnie błędy w aproksymacji na końcach przedziału. Używając interpolacji funkcjami sklejanymi można zauważyć że zachodzi przeciwne zjawisko. Największe błędy pojawiają się w centrum przedziału.



- Interpolacja funkcji $f(x)=\exp(x^2)$ na przedziale $[9,10]$. Nawet przy gwałtownie rosnących funkcjach i ekstremalnych wartościach błędu bezwzględnego interpolacja zachowuje niski błąd względny, choć tym razem nieznacznie większy na krańcach przedziału w porównaniu ze środkiem przedziału.

Pochodna numeryczna:



Pochodna analityczna: