Sprawozdanie z projektu nr 6, Metody Numeryczne II

Piotr Onyszczuk, Maciej Pióro, gr. F3

18 XII 2018

1 Temat 40.

Metoda Scratona - zmienny krok całkowania.

2 Opis metody.

Metoda rozwiązuje zagadnienie początkowe równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu postaci $y' = f(x, y), y(a) = y_0$ na przedziale $[a, b]$ podając wartości funkcji y w $n + 1$ punktach $x_0, x_1, \ldots x_n$, gdzie $x_0 = a$, $x_n = b$ ($x_{i-1} < x_i$ dla $i = 1, 2, \ldots n$).

3 Implementacja.

1. *Scraton* - funkcja obliczająca wartości funkcji y w punktach $x_1, x_2, \ldots x_n$ na podstawie $y(x_0) = y_0$ zależności: $y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{1}{13770} * (1445k_1 + 6561k_3 + 3264k_4 + 2500k_5)$. Współczynniki k_1, k_3, k_4, k_5 obliczane są w funkcji *Scraton_step*,

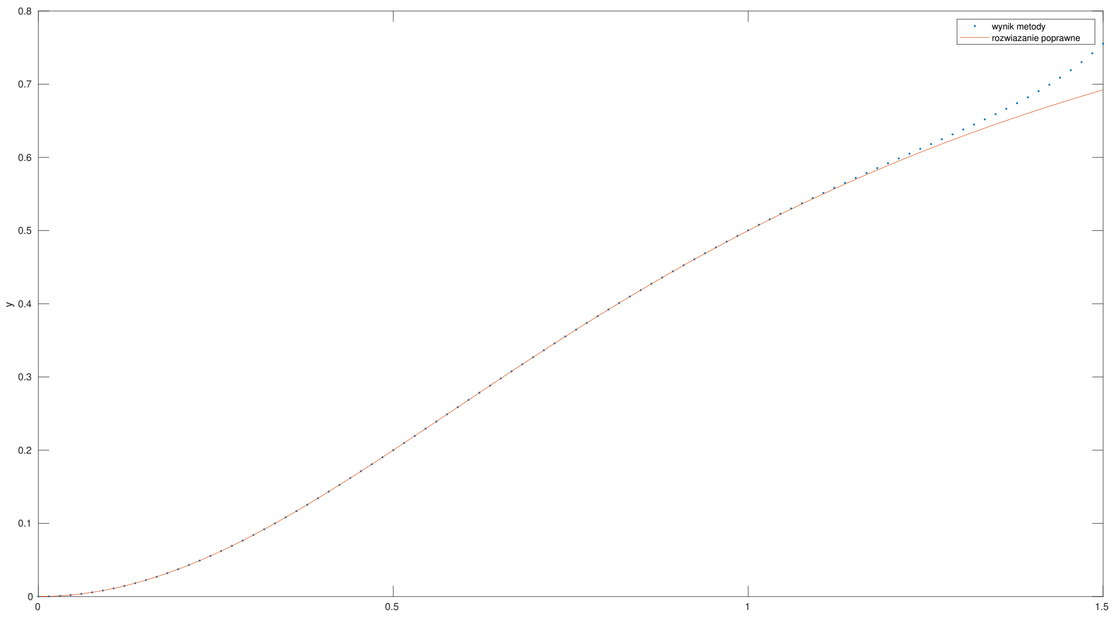
2. *Scraton_step* - funkcja obliczająca współczynniki k_1, k_3, k_4, k_5 potrzebne w funkcji *Scraton*, na podstawie otrzymanych parametrów: $x_i, y_i = y(x_i), h_i = x_{i+1} - x_i, f$ z następujących wzorów:

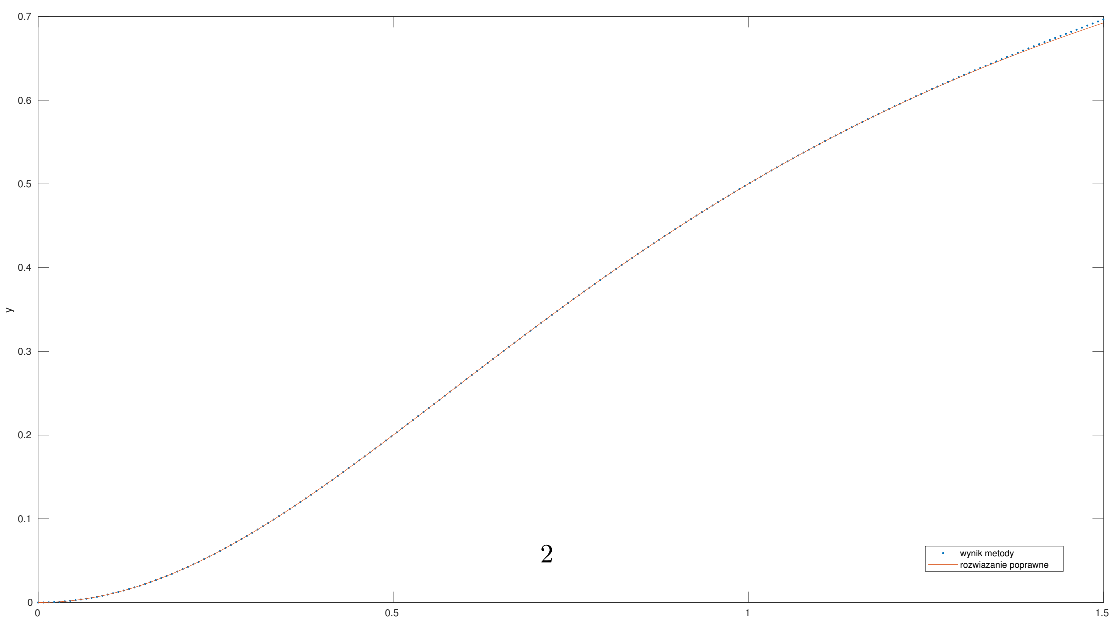
$$
\begin{gathered}
k_1 = h_i * f(x_i, y_i) \\
k_2 = h_i * f(x_i + \tfrac{2}{9}h_i, y_i + \tfrac{2}{9}k_1) \\
k_3 = h_i * f(x_i + \tfrac{1}{3}h_i, y_i + \tfrac{1}{12}(k_1 + 3k_2)) \\
k_4 = h_i * f(x_i + \tfrac{3}{4}h_i, y_i + \tfrac{3}{128}(23k_1 - 81k_2 + 90k_3)) \\
k_5 = h_i * f(x_i + \tfrac{9}{10}h_i, y_i + \tfrac{9}{10000}(-345k_1 + 2025k_2 - 1224k_3 + 544k_4)).
\end{gathered}
$$

4 Przykłady

4.1 Zwiększenie liczby podziałów zwiększa dokładność

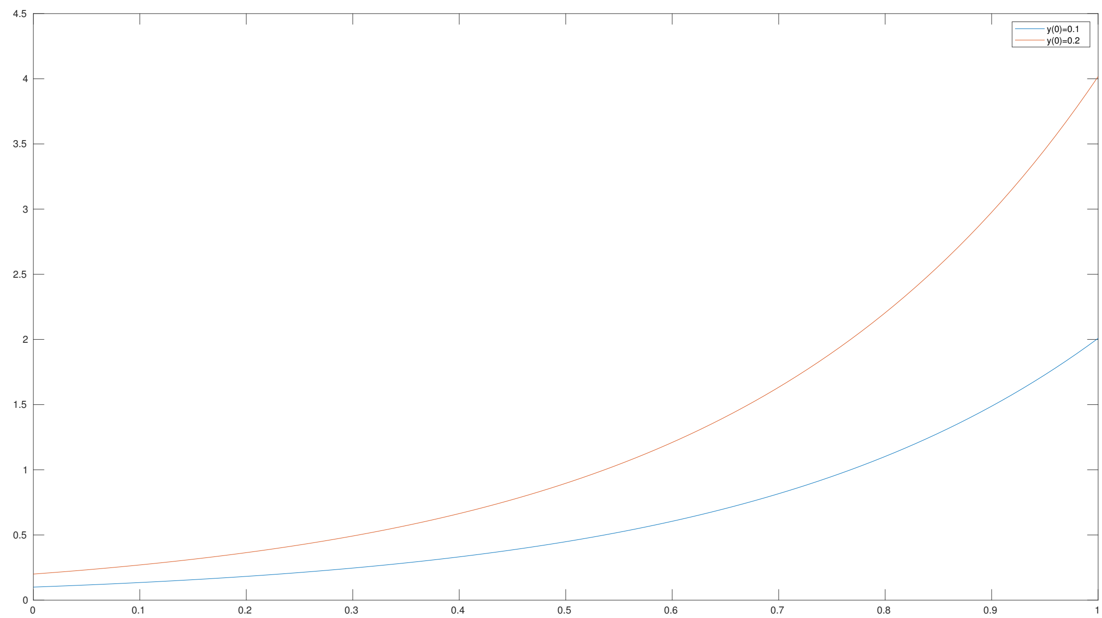
x = `linspace(0, 1.5)` i `linspace(0, 1.5, 200)`
$f = 10(y - \frac{x^2}{1+x^2}) + \frac{2x}{(1+x^2)^2}$





4.2 Niestabilność rozwiązania

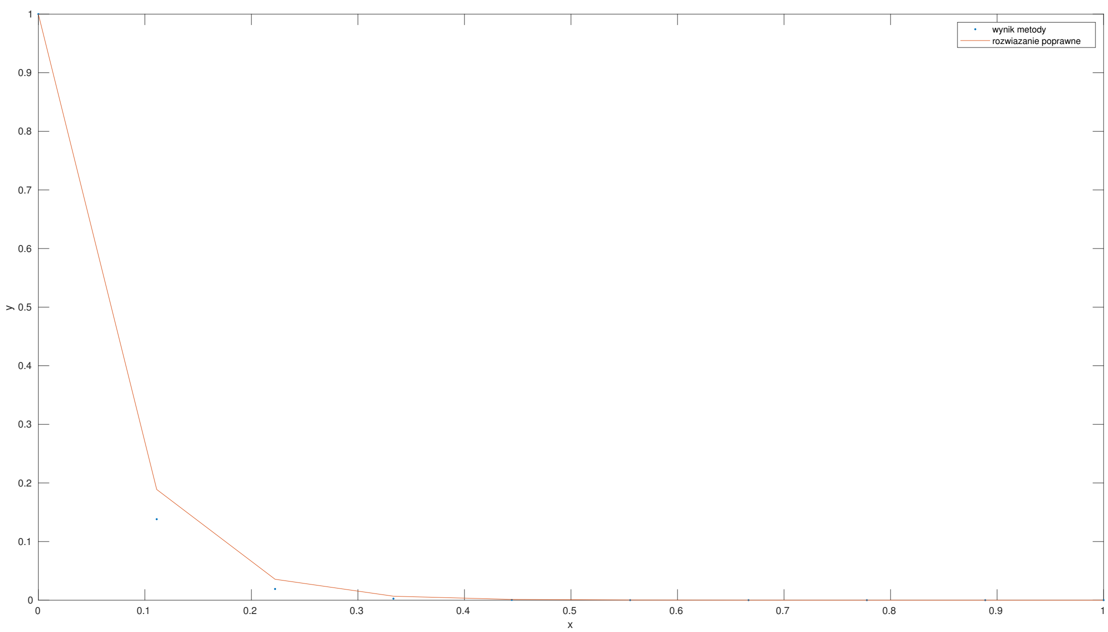
x = `linspace(0, 1)`
ya = `0.2` lub ya = `0.1`
$f = 3y$



4.3 Równania sztywne

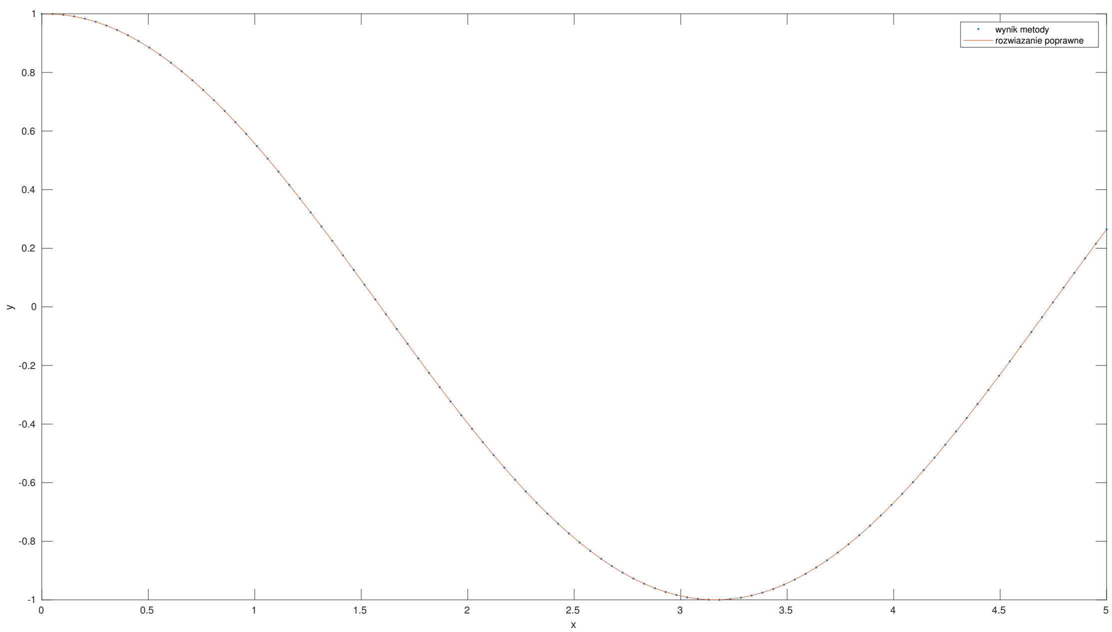
4.3.1

x = `linspace(0, 1, 10)`
ya = 1
$f = -15y$

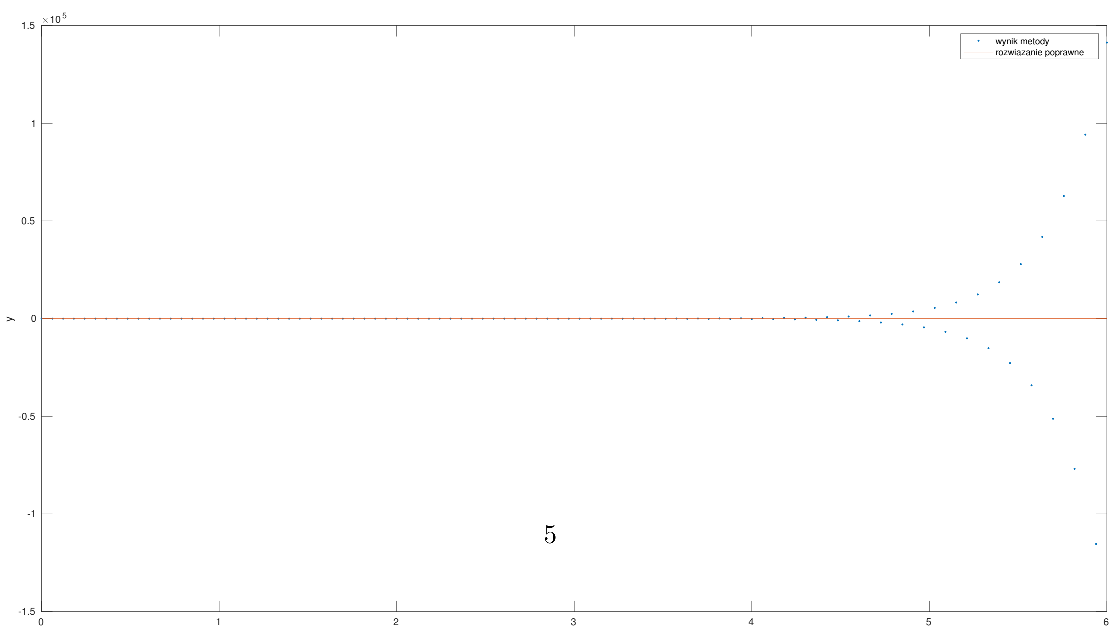


4.3.2

x = `linspace(0, 5)`
ya = 2500/2501
$f = -50(y - cos(x))$



x = `linspace(0, 6)`, reszta jw.



5 Wnioski

O metodzie Scratona można powiedzieć, że zazwyczaj jest metodą dokładną. We wszystkich metodach rozwiązywania równań różniczkowych dużą rolę odgrywa niestabilność (dramatyczna zmiana wyniku przy niewielkiej zmianie warunku początkowego), która jest jednak niemożliwa do wyeliminowania, ponieważ jest cechą danego równania, a nie metody. Jak można się było spodziewać, zmniejszanie długośći kroku wpływa pozytywnie na dokładność rozwiązania, przy czym nie udało nam się zaobserwować, aby bardzo małe długości kroku powodowały zmniejszanie dokładności, a więc problemu podobnego do występującego przy przybliżaniu numerycznym pochodnej lub znanego jako zjawisko Rungego dla interpolacji. Ciekawą (bo sprawiającą wiele trudności) z punktu widzenia metod numerycznych klasą równań różniczkowych są tzw. równania sztywne, objawiające się dużymi błędami nawet przy niewielkich długościach kroku. Widać to doskonale na dwóch ostatnich przykładach, gdy zmiana długości kroku z 0.06 na 0.05 powoduje gigantyczny błąd.