Rok akademicki 2022 -2023, półsemestr letni

TEST 2

Zadanie1

Znaleźć logarytm dyskretny log58 w Z*13 i w Z*19 .

log5 8 = 3 w Z13
log5 8 = 7 w Z13
log5 8 = 11 w Z13
log5 8 = 36 w Z13
log5 8 = 78 w Z13
log5 8 = 91 w Z13
log5 8 = 80 w Z19
log5 8 = 93 w Z19

```
public Integer log4( Integer x ){
                Integer ret=4;
                for (int i=1; i<x; i++  ){
                        ret=ret*4;
                }
                return ret;
        }

        public Integer log5( Integer x ){
                Integer ret=5;
                for (int i=1; i<x; i++  ){
                        ret=ret*5;
                }
                return ret;
        }

        public Integer Z_11( Integer x ){ return x%11; }
        public Integer Z_12( Integer x ){ return x%12; }
        public Integer Z_13( Integer x ){ return x%13; }
        public Integer Z_17( Integer x ){ return x%17; }
        public Integer Z_19( Integer x ){ return x%19; }

        @Test
        public void test2(){

                //  Znaleźć  logarytm dyskretny log58  w  Z*13     i  w Z*19 .
                // log5 8 =

                //     8       x
                // log5  -> 8=5
                for (int i=0;i<100;i++){
                        if ( Z_13( log5( i ))==8) System.out.println( "log5 8 = " + i + " w Z13" );
                }

                for (int i=0;i<100;i++){
                        if ( Z_19( log5( i ))==8) System.out.println( "log5 8 = " + i + " w Z19" );
                }
```

Zadanie 2

Znaleźć element odwrotny do 8 w Z*17. = 15
Znaleźć element odwrotny do 8 w Z*13. = 5
Czy istnieje element odwrotny do 8 w Z*12.?
 - nie, 8 nie jest względnie pierwsze w pierscieniu Z12 ponieważ: 4*2=8 i 4*3=12

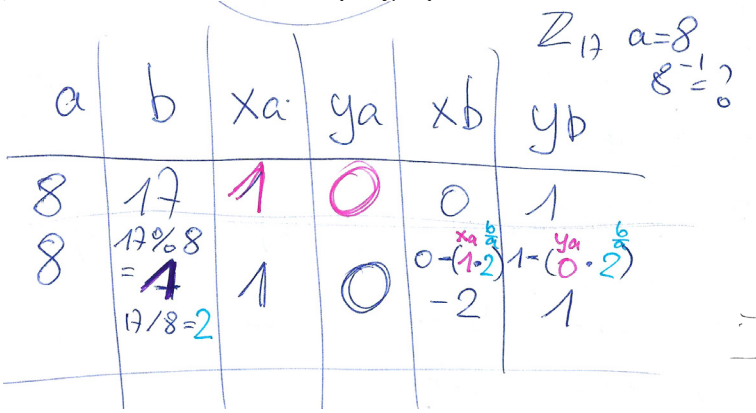
```
//   https://www.youtube.com/watch?v=x12La1oBKhM
int a=8;
for ( int i=0;i<1000;i++){
        if ( Z_17(a*i)==1 ) { System.out.println( "8^-1 Z17 = " + i  ); break; }
}}
```

Zadanie 3

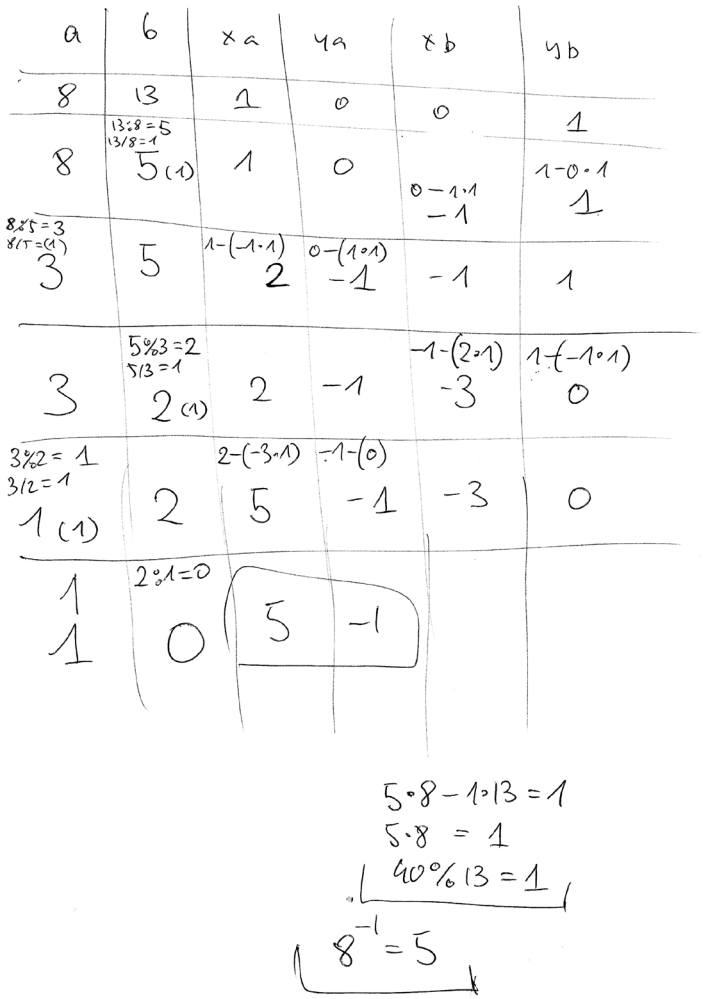
Podać warunek konieczny i wystarczający odwracalności elementu x należącego do Zm.
x musi być względnie pierwsze z m

Jak zastosować twierdzenie Eulera do obliczania elementu odwrotnego do .

Jak zastosować rozszerzony algorytm Euklidesa do obliczania elementu odwrotnego do x nal Zm.



przykład: znaleźć odwrotny do 8 w Z13



$5 \cdot 8 - 1 \cdot 13 = 1$
$5 \cdot 8 = 1$
$40 \% 13 = 1$
$8^{-1} = 5$

Zadanie 4
Ile jest elementów odwracalnych w pierścieniu Zm. Wykazać, że stanowią one grupę.
w pierścieniu Zm jest tyle odwracalnych elementów ile jest liczb pierwszych w tym pierścieniu czyli φ(m)
Stanowią one grupę ponieważ
jeśli $p^{-1}=q$ to $p=q^{-1}$
ponieważ: pΘq =1 to qΘp =1

Zadanie 5
Oblicz wartość funkcji Eulera

a) φ(3458) = φ (2) * φ (1729) = φ (2) * φ (7) *φ (13) * φ (19) = 1*1*1*1 = 1
b) φ(2^1000) = 1/2*(2^1000) = 2^999
c) φ(2^n), gdzie n należy do N =2^(n-1)
d) φ(3^n), gdzie n należy do N = (3^n)/1,5
e) φ(φ(2^1000)) = φ (2^999) = 2^998

x=2^n = x=2*2*2*2 czyli ma tylko dzielnik 2, a więc φ(2^n) - n/2
φ (a*b) = φ (a) * φ (b)

```
for ( int i=1;i<900;i++){
        if ( 1729%i==0 ){ System.out.println( i ); }
}}
```

```
rozkład : 7, 13, 19, 91, 133, 247
liczby pierwsze : 7, 13,
```

a) φ(3458) = φ (2) * φ (7) *φ (13) * φ (19) = 1

Zadanie 6
Podaj definicję funkcji jednokierunkowej i przykład takiej funkcji.
Funkcja jednokierunkowa to zestaw działań matematycznych które działając na wartość wejściową dają pewien wynik, jednak uzyskanie wartości wejściowej z wyniku jest niemożliwe.

Najprostrzą taką funkcją jest funkcja modulo, zwraca ona resztę z dzielenia argumentu przez podstawę.
mając podstawę i wynik nie określimy wartości argumentu - jedynie zbiór w którym argument się znajduje.

Zadanie 7
Rozwiązać układ kongruencji

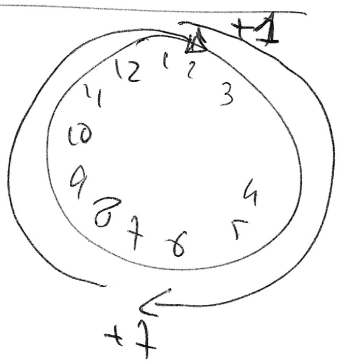
x ≡ 6 (mod 7) x1 = 20
x ≡ 7 (mod 13) x1 = 20
x ≡ 4 (mod 5) x2 = 29
x ≡ 7 (mod 11) x2 = 29

$x \equiv 6 \bmod 7$
$x \equiv 7 \bmod 13$ $\Rightarrow$ $|-6|$ $x-6 \equiv 0 \bmod 7$
$x-6 \equiv 1 \bmod 13$ (1)

$(0+7) \bmod 13 = 7$
$(7+7) \bmod 13 = 1$ $\Rightarrow$

a) $x+7 = 0 \bmod 7$; $x+7+7 = x \bmod 7$

b) $x+7+7 = (+1) \bmod 13$



$x = 7+7$ $x \equiv 0 \bmod 7$
$x \equiv 1 \bmod 13$

+6 $x = 7+7+6 \equiv 6 \bmod 7$
$x = 7+7+6$
$= 1+6 = 7 \bmod 13$!

$x = 6+7+7 = 20$!

$x \equiv 4 \mod 5$
$x \equiv 7 \mod 11$ | -4 | $x \equiv 0 \mod 5$
$x \equiv 3 \mod 11$

(7)

$\frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$

$11 \% 5 = 1$

$25 \% 11 = -1$

$(-1+11) \mod 11 = 10$

$2 \cdot 5 \cdot 10 = 100 = 1 \mod (11)$

$3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10 = 300 \mod (11) = 3$

$x = 300 \quad x \equiv 0 \mod 5$

$x \equiv 300 \quad x \equiv 3 \mod 11$

$x = 300+4 \quad x \equiv 4 \mod 5$

$x = 300+4 \quad x \equiv 4+3 \mod 11$

$x - 55 = 249 - 55 = 194 - 55 = 139$

$X = 304 \quad x = 139 - 55 = 84 - 55 = 29$

$X = 29$!

$x \equiv 6 \pmod 7$ x1 = 20
$x \equiv 7 \pmod{13}$ x1 = 20
$x \equiv 4 \pmod 5$ x2 = 29
$x \equiv 7 \pmod{11}$ x2 = 29

$x = 20 \pmod{7*13} = 20 \bmod (91) = 1294$
$x = 29 \pmod{5*11} = 29 \bmod (55) = 1294$
w
$55^{-1} \bmod (91) = 48$

$x \equiv 20 \bmod (91)$
$x \equiv 29 \bmod (55)$ | -29 | $x \equiv -9 \bmod (91) = 82 \bmod (91)$
$x \equiv 0 \bmod (11)$

(3)

$55 = 0 \bmod (55)$
$48 \cdot 55 = 1 \bmod (91)$ ←
$82 \cdot 48 \cdot 55 = 82 \bmod (91)$
$82 \cdot 48 \cdot 55 \,\%\, (91 \cdot 11) = 1265$ ←

$x = 1265 + 29 = 1294$

$55^{-1} = 48 \bmod (91)$

Zadanie 8

Rozwiązać układ kongruencji

x 6 (mod 7) = 494
x 12 (mod 13) = 494
x 4 (mod 5) = 494
x 10 (mod 11) = 494

(1)

$x \equiv 6 \mod(7)$ | $x \equiv 0 \mod(7)$
$x \equiv 12 \mod(13)$ | $x \equiv 6 \mod(13)$ | +6
$x \equiv 4 \mod(5)$ | $x \equiv 0 \mod(5)$
$x \equiv 10 \mod(11)$ | $x \equiv 6 \mod(11)$ | +4

$7+7 = 0 \mod(7)$
$7+7 = 1 \mod(13)$
$6 \cdot 7 \cdot 7 = 0 \mod(7)$
$6 \cdot 7 \cdot 7 = 6 \mod(13)$

$7 \cdot 13 = 91$

$-|27+6| = 33$ ||

$x \equiv 294+6 = 300$ |

$x = 33+6$
$x = 39$ ||

$0 \mod(5)$
$6 \mod(11)$
$5 \cdot 9 = 0 \mod(5)$
$5 \cdot 9 = 1 \mod(11)$
$5 \cdot 9 \cdot 6 = 6 \mod(11) = 270$
$270 - 55 \cdot x = 50$ $|+4|$ = 54 ||

$x \equiv 39 \mod(91)$
$x \equiv 54 \mod(55)$ | +54 |
$-15 \mod(91)$ $-15 \mod(91) = 76$
$0 \mod(55)$ $0 \mod(55)$

$48 \cdot 55 = 1 \mod(91)$ $-15 \mod 91 = 76$

$15 \cdot 48 \cdot 55 =$

$76 \cdot 48 \cdot 55 = 0 \mod(55)$
$76 \cdot 48 \cdot 55 = -15 \mod(9)) = 440$

$440 + 54 = 494$ ||

Zadanie 9

Znaleźć 2 ostatnie cyfry zapisu siódemkowego liczby 2^1000

Zad 9 Znaleźć 2 ostatnie cyfry zapisu siódemkowego liczby 2^{1000} ①

$2 = 2 \mod (49)$
$2^2 = 4 \mod (49)$
$2^3 = 8 \mod (49)$
$2^4 = 16 \mod (49)$
$2^5 = 32 \mod (49)$
$2^6 = 64 \mod (49)$
15

$2^7 = 128 \equiv \mod (49)$
$2^7 = 128 \equiv 30 \mod (49)$
$2^8 = 256 \equiv 11 \mod (49)$
$2^9 = 512 \equiv 22 \mod (49)$
$2^{10} = 1024 = 44 \mod (49)$
$2^{11} = 2048 \equiv 39 \mod (49)$
$2^{12} = 4096 \equiv 29 \mod (49)$
$2^{13} = 8192 \equiv 9 \mod (49)$
$2^{14} = 16384 \equiv 18 \mod (49)$
$2^{15} = 32767 \equiv 36 \mod (49)$
$2^{16} = 61735 \equiv 23 \mod (49)$
$2^{17} =$

$2^{21} = \ldots \equiv 1 \mod (49)$

$2^{1000} \mod (49) =$

$2^{21} \cdot 2^{21} \ldots \cdot 2^{13} \mod (49) =$

$2^{21} \mod (49) \cdot 2^{21} \pmod{49} \cdot 2^{13} \pmod{49} =$

$1 \cdot 1 \ldots \cdot 2^{13} \mod (49) =$

$2^{13} = 1024 \cdot 8$

$= 8192 \equiv 9 \mod (49)$

a zatem 2 ostatnie cyfry to

09

$2^{1000} \mod (49) = \underline{09}$

Zadanie 10

Dodać następujące wielomiany (bajty) w pierścieniu Z[x]=(x^8+x^4+x^3+x+1) GF(2^8)
a) ‘57’+’02’
b) ‘03’+’03’
c) ‘FF’+’0F’

Uwaga. Ciało skończone jest podstawową strukturą algebraiczną wykorzystywaną w szyfrze symetrycznym AES. Wielomian jest wielomianem nierozkładalnym w pierścieniu .

Zadanie 11
Pomnożyć następujące wielomiany (bajty) w pierścieniu

a) ‘57’ , ’02’

b) ‘57’ , ’04’

c) ‘57’ , ’10’