4.1 Automaty skończone

1. Zegar

Zegar systemu cyfrowego (ang. clock) to układ elektroniczny generujący napięciowy przebieg zegarowy (sygnał zegarowy). Sygnał zegarowy czasem jest również dla uproszczenia nazywany zegarem.

Sygnał zegarowy to prostokątny przebieg okresowy o kształcie pokazanym na Rys.1. Chwile kiedy pojawia się narastające zbocze wyznaczają dyskretne chwile czasu, w których może zachodzić zmiana stanu układu cyfrowego. Możemy powiedzieć, że system cyfrowy działa krok za krokiem w dyskretnych chwilach w takt zegara.

Podobnie chwile kiedy pojawia się zbocze opadające sygnału zegarowego można przyjąć za dyskretne chwile czasu, w których może zachodzić zmiana stanu układu cyfrowego. Trzecim sposobem jest przyjęcie że dyskretne chwile mogą być wyznaczone zarówno przez zbocza narastające jak i opadające.

W abstrakcyjnym opisie systemu cyfrowego wygodnie jest te chwile utożsamiać z liczbami naturalnymi lub całkowitymi. Na ogół w systemie cyfrowym jest jeden zegar i jest to bardzo wygodne. Czasami jednak konieczne jest zastosowanie kilku zegarów w systemie.

Zasadniczymi parametrami charakteryzującymi prostokątny przebieg zegarowy są częstotliwość f oraz wypełnienie d. Wypełnienie (ang. duty cycle) okresowego przebiegu prostokątnego to stosunek $d = \frac{T_1}{T}$, gdzie $T = \frac{1}{f}$ jest okresem przebiegu a czas T_1 jest czasem trwania „pojedynczego impulsu” por. Rys.1. Typowy przebieg zegarowy ma wypełnienie ½ , ale nie jest to reguła.

Istotna jest w systemach cyfrowych stałość częstotliwości generowanego przebiegu zegarowego. Dlatego też najczęściej jako generatory przebiegu zegarowego wykorzystuje się tzw. generatory kwarcowe wykazujące wyjątkowo dobrą stałość częstotliwości. W sytuacjach specjalnych gdy musimy mieć zegar zsynchronizowany z jedynie słusznym zegarem wszechświatowym (np. w tzw. stemplowaniu czasem dokumentów) to stosuje się synchronizację generatorów kwarcowych z sygnałami czasu systemu GPS.

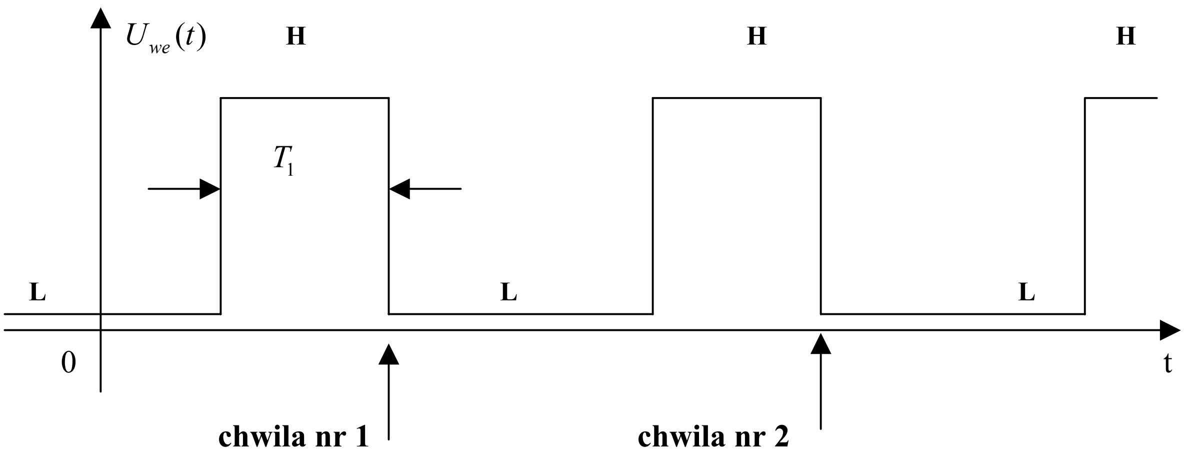
Częstotliwość zegara f może być bardzo różna. Od dołu praktycznie nie mamy żadnych ograniczeń choć istotna jest stromość zboczy przebiegu prostokątnego. Jeśli chodzi o wartości maksymalne to we współczesnych systemach mikroprocesorowych (np. w Pentium 4) częstotliwość zegara przekracza już 3 GHz a w systemach stosujących technologie specjalne 10 GHz.

Z reguły moc wydzielana w układzie cyfrowym jest wprost proporcjonalna do częstotliwości zegara (zależność ta jest w przybliżeniu liniowa). Dzieje się tak dlatego, że bramki logiczne pobierają prąd z układu zasilania głównie w chwilach przełączeń czyli na narastających i opadających zboczach sygnału zegarowego (dotyczy to zarówno bramek TTL jak i NMOS i CMOS).

Z kolei tzw. moc obliczeniowa systemu cyfrowego (jeśli to pojęcie ma sens dla konkretnego systemu cyfrowego) jest na ogół proporcjonalna do częstotliwości zegara.

Ponieważ jednak moc wydzielająca się w układzie rośnie wraz z częstotliwością, to stosowanie wysokich częstotliwości zegara prowadzi do konieczności stosowania specjalnych układów chłodzących (radiatory, wiatraczki a czasem nawet chłodzenie wodne podobne do samochodowego). Układy pracujące z wysokimi częstotliwościami zegara muszą być bardzo starannie zaprojektowane od strony cieplnej każdy bowiem układ ma swoją graniczną temperaturę pracy, której przekroczenie grozi nieodwracalnym zniszczeniem układu.

Ogólnie rzecz biorą systemy cyfrowe dzielimy na synchroniczne tzn. działające w takt zegara i asynchroniczne, w których chwile zmiany stanu układu są wyznaczone przez zmiany stanu wejść. Wszystkie duże systemy cyfrowe takie jak np. mikroprocesory są systemami cyfrowymi synchronicznymi. Sygnał zegarowy albo generowany jest wewnątrz systemu albo doprowadzany jest z zewnątrz.



Rys. 1. Przebieg prostokątny będący sygnałem zegarowym systemu cyfrowego

2. Automaty skończone

Automaty skończone są abstrakcyjnymi modelami rzeczywistych systemów cyfrowych.

Automat skończony lub dokładniej deterministyczny automat skończony (DAS) to piątka uporządkowana (Q,Σ,δ,q_0,F) , gdzie Q - jest zbiorem stanów, Σ - alfabetem wejściowym, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ - funkcją przejść automatu, $q_0 \in F$ - tzw. stanem początkowym a F – zbiorem stanów końcowych.

Stan automatu umożliwia pamiętanie historii wejścia tzn. stan w chwili bieżącej. Ogólnie rzecz biorąc zależy od słowa podanego na wejście w chwilach poprzednich.

Mówimy, że automat skończony ***akceptuje słowo*** pojawiające się na wejściu automatu, jeśli ciąg przejść ze stanu do stanu odpowiadający literom słowa wejściowego prowadzi od stanu początkowego q_0 do jakiegoś stanu q akceptowalnego tzn takiego że $q \in F$.

Automat skończony wyobrażamy sobie jako układ o skończonej liczbie stanów, z jednym wejściem, który znajduje się w pewnym stanie q i czyta ciąg symboli z alfabetu Σ, czyli czyta słowo nad alfabetem Σ podane na wejście. Układ działa w dyskretnych chwilach, które dla uproszczenia utożsamiamy z liczbami naturalnymi. W każdej chwili $n \in N$ automat może odczytać tylko jedną literę słowa $a_n \in \Sigma$ czyta ją i zmienia stan ze stanu q_{n-1} zgodnie z funkcją przejścia na $\tilde{\delta}(q_{n-1}, a_n) = q_n$ po czym automat staje i czeka na następną chwilę. W kolejnych chwilach pojawiają się więc na wejściu litery $a_1, a_2, ..., a_n \in \Sigma$ i następują zmiany stanu. Jeśli $\tilde{\delta}(q_{n-1}, a_n) = q_n \in F$ tzn. dotarliśmy do stanu akceptującego to uważamy, że automat zaakceptował słowo wejściowe $a_1 a_2 ... a_n$ dotychczas podane na wejście automatu.

Jeśli mamy funkcję przejścia $\delta : \Sigma \times Q \to Q$ to w naturalny sposób można ją rozszerzyć do funkcji $a \in \Sigma$ definiując $\tilde{\delta}$ następująco:

- $\tilde{\delta}(q, \varepsilon) = q$ dla każdego $q \in Q$
- $\tilde{\delta}(q, wa) = \delta(\tilde{\delta}(q, w), a)$ dla każdego $q \in Q$, dla każdego $a \in \Sigma$ i dla każdego słowa w nad alfabetem Σ

Język akceptowany przez automat skończony $M = (Q, \Sigma, S, \delta, q_0, F)$ to z definicji zbiór $L(M) \overset{df}{=} \{x \in \Sigma^*;\ \tilde{\delta}(q_0, x) \in F\} \subseteq \Sigma^*$. Język $L \subseteq \Sigma^*$ nazywamy *językiem regularnym*, jeśli jest akceptowany przez jakiś automat skończony $M = (Q, \Sigma, S, \delta, q_0, F)$

Niedeterministyczny automat skończony to piątka uporządkowana $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, gdzie Q jest zbiorem stanów automatu, Σ alfabetem wejściowym, $q_0 \in F$ - tzw. stanem początkowym, F – zbiorem stanów końcowych a $\tilde{\delta} : Q \times \Sigma \to 2^Q$ - funkcją przejść automatu niedeterministycznego. Przypominamy, że symbolem 2^Q oznaczamy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru Q.

Zbiór $\delta : (q, a) \subseteq Q$ jest zbiorem wszystkich stanów do których możliwe jest przejście ze stanu q pod wpływem litery a podanej na wejście automatu.

Zauważmy, że zdefiniowane wyżej automaty są automatami bez wyjścia. Ponieważ w praktyce najczęściej mamy do czynienia z systemami cyfrowymi z wyjściem, dlatego też wprowadza się definicje automatów skończonych z wyjściem.

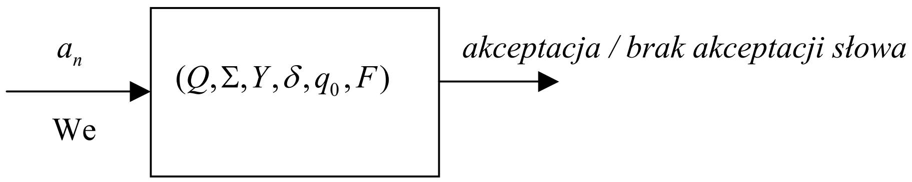
Automat skończony z wyjściem to szóstka uporządkowana $(Q, \Sigma, Y, \delta, \lambda, q_0)$, gdzie Q, Σ, Y są alfabetami, δ i λ są funkcjami oraz $q_0 \in S$. Σ to alfabet wejściowy, Y alfabet wyjściowy a Q jest tzw. zbiorem stanów. Funkcja $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ nosi nazwę *funkcji przejść*, funkcja $\lambda : Q \to Y$ nazywa się *funkcją wyjść*, a $q_0 \in S$ jest tzw. stanem początkowym. Tak zdefiniowany automat nazywa się *automatem Moore'a*.

Jeśli funkcja λ jest funkcją bezpośrednio zależną od wejścia tzn. $\lambda : Q \times \Sigma \to Y$, to taką szóstkę uporządkowaną $(X, Y, S, \delta, \lambda, q_0)$ nazywamy *automatem Mealy'ego*.

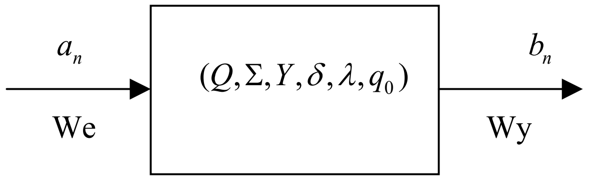
Automat skończony z wyjściem wyobrażamy sobie jako układ o skończonej liczbie stanów, z jednym wejściem i jednym wyjściem, który znajduje się w pewnym stanie q i czyta ciąg symboli $a_1 a_2 ... a_n$ z alfabetu Σ czyli czyta słowo nad alfabetem Σ podane na wejście. Układ działa w dyskretnych chwilach, które dla uproszczenia utożsamiamy z liczbami naturalnymi 1,2,3..... W każdej chwili $n \in N$ automat może odczytać tylko jedną literę słowa $a_n \in \Sigma$ czyta ją i zmienia stan ze stanu q_{n-1} zgodnie z funkcją przejścia na $\tilde{\delta}(q_{n-1}, a_n) = q_n$

i wyprowadza na wyjście literę $\lambda(q_n)$ w przypadku automatu Moore'a lub $\lambda(q_n, a_n) = b_n$ w przypadku automatu Mealy'ego po czym automat staje i czeka na następną chwilę. W kolejnych chwilach pojawiają się więc na wejściu litery $a_1, a_2, ..., a_n \in \Sigma$, na wyjściu litery $b_1, b_2, ..., b_n \in Y$ i następują zmiany stanu. Automaty Moore'a i Mealy'ego są więc urządzeniami do przetwarzania słów.

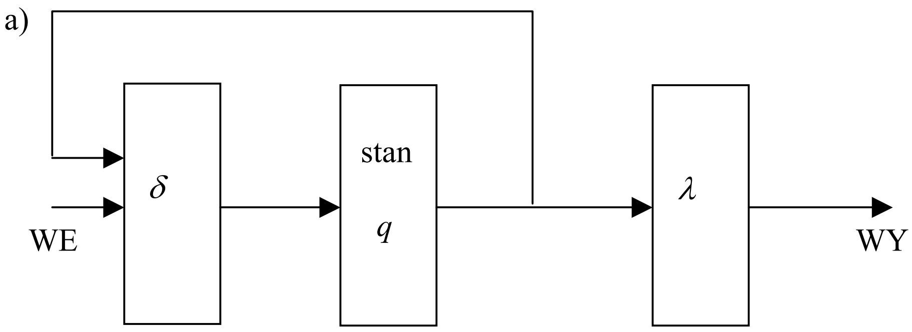
Układ sekwencyjny to układ elektroniczny realizujący automat skończony.

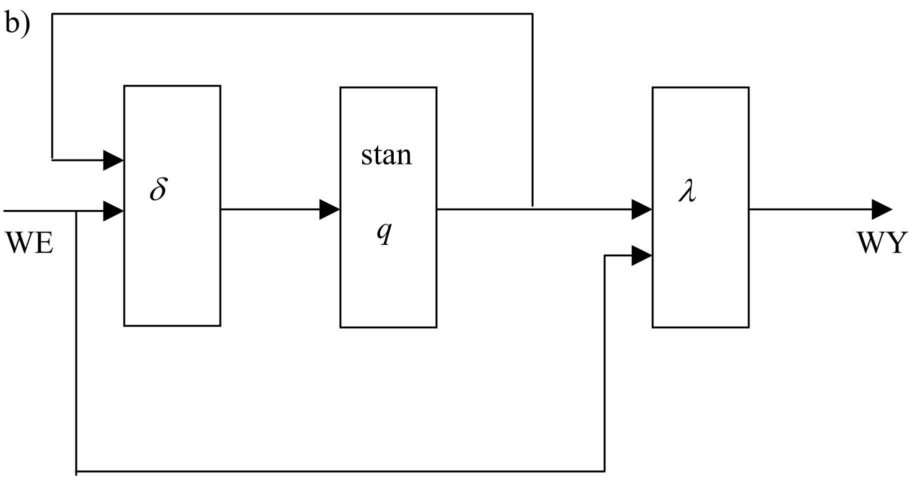


Rys. 2. Przetwarzanie słów przez automat skończony bez wyjścia

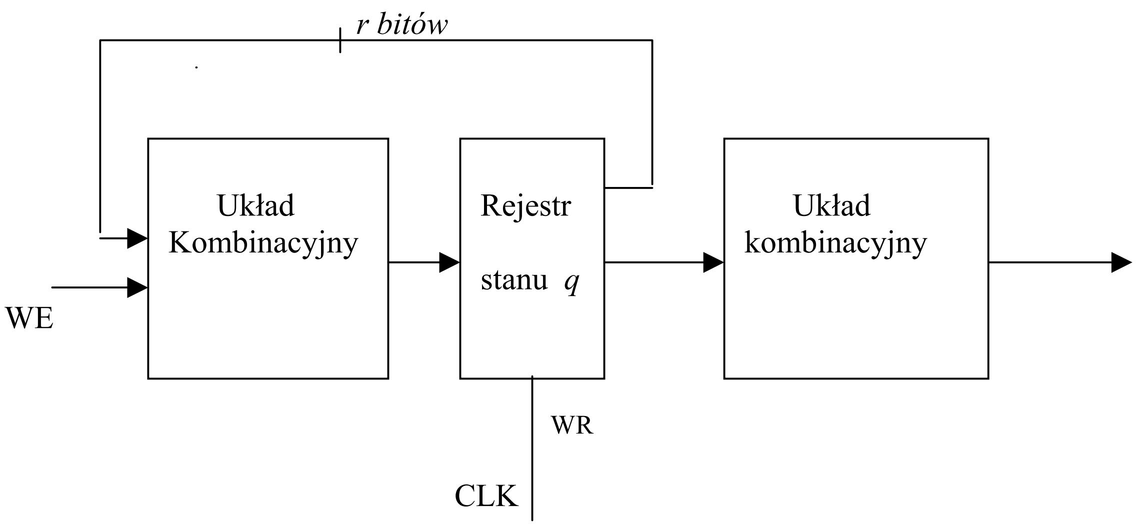


Rys. 3. Przetwarzanie słów przez automat skończony z wyjściem

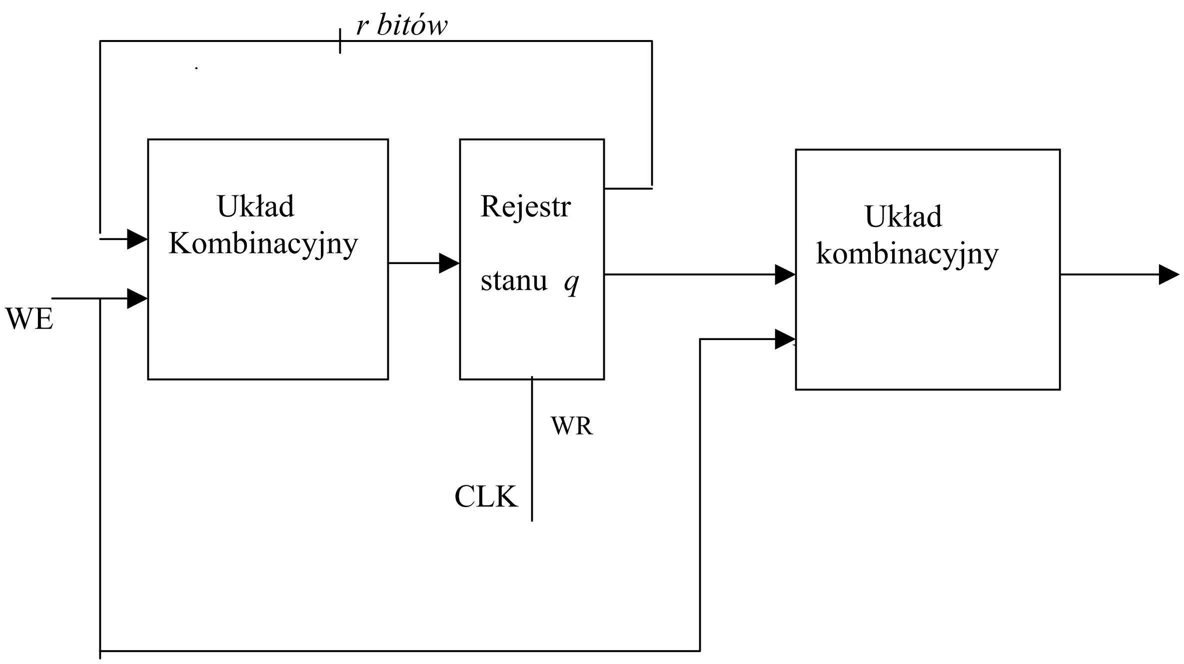




Rys. 4. Schemat blokowy układu automat skończony z wyjściem a) automat Moore'a b) automat Mealy'ego

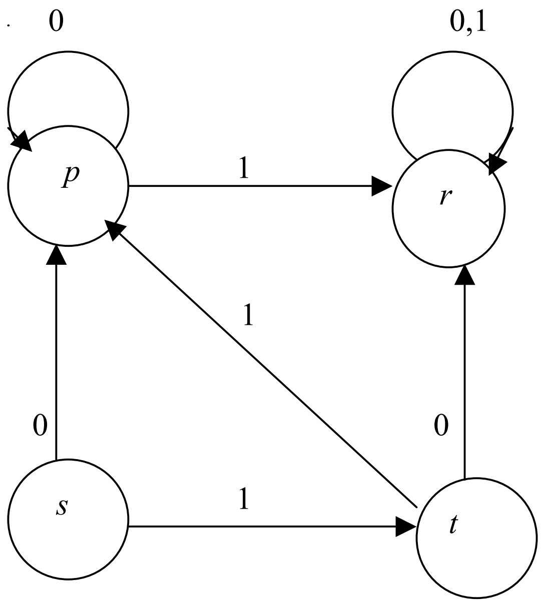


Rys. 5. Struktura uniwersalna automatu Moore'a z kodowaniem binarnym symboli wejściowych, wyjściowych i stanów; rejestr stanu jest rejestrem *r* bitowym



Rys. 6. Struktura uniwersalna automatu Mealy'ego z kodowaniem binarnym symboli wejściowych, wyjściowych i stanów

Opis automatu grafem. Z każdym automatem skończonym wiążemy diagram przejść lub dokładniej graf automatu. Jest to graf skierowany w którym wierzchołki grafu odpowiadają stanom automatu Jeśli w automacie istnieje przejście ze stanu $q_1 \in Q$ do stanu $q_2 \in Q$ przy wejściu $a \in \Sigma$ to diagram zawiera gałąź prowadzącą ze stanu $q_1 \in Q$ do stanu $q_2 \in Q$ i opatrzoną etykietą $a \in \Sigma$.



Rys.7. Opis automatu grafem. Z każdym automatem skończonym wiążemy diagram przejść czyli graf skierowany opisujący działanie automatu

Przykład: Niech $Q = \{p, r, s, t\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, stan początkowy $q_0 = s$, $F = \{r\}$. Funkcja przejść opisana jest równościami:

$\delta(p,0) = p$
$\delta(p,1) = r$
$\delta(r,0) = r$
$\delta(r,1) = r$
$\delta(s,1) = t$
$\delta(s,0) = p$
$\delta(t,0) = r$
$\delta(t,1) = p$

Graf opisujący ten automat pokazany jest na Rys.7.■