

Równanie Laplace'a w ujęciu pochodnych niecałkowitego rzędu

Streszczenie. W pracy przedstawiono równanie Laplace'a w ujęciu pochodnych niecałkowitego rzędu oraz podjęto próbę znalezienia analitycznego rozwiązania takiego równania. Do rozwiązania zastosowano metodę separacji zmiennych (metodę Fouriera).

Abstract. The paper attempts of Laplace type of a linear fractional order differential equation and find an analytical solution. To solve this equation the method of variable separation (Fourier method) was used. (**Laplace equation in terms of incomplete order derivatives**)

Słowa kluczowe: pochodna niecałkowitego rzędu, równanie Laplace'a, metoda rozdzielenia zmiennych.

Keywords: fractional derivatives, Laplace's equation, method of separation of variables.

Wstęp

Równanie Laplace'a jest przykładem liniowego jednorodnego równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Równanie to jest szeroko wykorzystywane zarówno w matematyce teoretycznej, jak i stosowanej. Prowadzi do niego opis wielu zagadnień fizyki i techniki. W elektrodynamice opisuje przepływ prądu w ośrodkach ciągłych, w termodynamice przepływ statyczny ciepła, w mechanice płynów przepływ bezwirowy cieczy a w mechanice opisuje np. odkształcenia membran sprężystych itp. I tak np. potencjał elektrostatyczny w obszarze, gdzie nie ma ładunku spełnia równanie Laplace'a. Do opisu rzeczywistych zjawisk fizycznych coraz częściej korzysta się z rachunku niecałkowitego rzędu okazało się bowiem, że rzeczywiste procesy fizyczne lepiej można opisać za pomocą pochodnych lub całek dowolnego, niecałkowitego rzędu [1, 2]. W niniejszej pracy autorzy podjęli próbę analitycznego rozwiązania, liniowego równania różniczkowego niecałkowitego rzędu typu Laplace'a. Do rozwiązania tego równania została zastosowana metoda rozdzielenia zmiennych (metoda Fouriera).

Rozwiązanie równania różniczkowego cząstkowego rzędu niecałkowitego metodą rozdzielenia zmiennych

Metoda rozdzielenia albo separacji zmiennych, zwana też metodą Fouriera, jest jedną z metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Metodę można zastosować aby wyrazić jawnymi wzorami rozwiązania pewnych równań różniczkowych cząstkowych. Polega ona na wyznaczeniu rozwiązania danego równania w postaci iloczynu kombinacji liniowych funkcji, których każda zależy tylko od jednej zmiennej. Metoda ta jest szczególnie przydatna, jeśli szukamy rozwiązania w zbiorze ograniczonym o zadanych wartościach na brzegu obszaru. Poszukiwane będzie zatem rozwiązanie w postaci:

$$(1) \quad \varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x) \cdot V_k(y)$$

Rozpatrzzone zostanie liniowe równanie różniczkowe cząstkowe niecałkowitego rzędu następującej postaci:

$$(2) \quad \Delta^\alpha \varphi(x, y) = \frac{\partial^{2\alpha} \varphi(x, y)}{\partial x^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} \varphi(x, y)}{\partial y^{2\alpha}} = 0$$

Równanie (2) dla $\alpha = 1$ jest klasycznym równaniem Laplace'a.

$$(3) \quad \Delta \varphi(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

Rozwiązaniami tego równania w świetle zastosowania metody rozdzielenia zmiennych są następujące funkcje:

$$(4) \quad \begin{cases} X(x) = B \sin Ax + C \cos Ax \\ Y(y) = D e^{-Ay} + E e^{Ay} \end{cases}$$

gdzie: B, C, D i E są dowolnymi stałymi.

Natomiast dla równania z pochodnymi niecałkowitego rzędu (2), zakładając rozwiązanie w postaci (1) otrzymujemy, że:

$$(5) \quad \Delta^\alpha \varphi(x, y) = Y \frac{d^{2\alpha} X}{\partial x^{2\alpha}} + X \frac{d^{2\alpha} Y}{\partial y^{2\alpha}} = 0$$

$$\text{gdzie: } \varphi(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

Porządkując (5), możemy zapisać:

$$(6) \quad \frac{1}{X} \frac{d^{2\alpha} X}{\partial x^{2\alpha}} = - \frac{1}{Y} \frac{d^{2\alpha} Y}{\partial y^{2\alpha}}$$

Ponieważ zmienne x i y mogą zmieniać się niezależnie w sposób zupełnie dowolny, równanie (6) będzie spełnione, jeżeli każdą stronę tego równania w myśl metody rozdzielenia zmiennych przyrównamy do pewnej stałej. Przyjmując zatem stałą, jako $-A^2$ dostajemy następujące równania:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{1}{X} \frac{d^{2\alpha} X}{\partial x^{2\alpha}} = -A^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^{2\alpha} Y}{\partial y^{2\alpha}} = A^2 \end{cases}$$

które prowadzą do dwóch niezależnych równań różniczkowych zwyczajnych

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d^{2\alpha} X}{\partial x^{2\alpha}} + A^2 X = 0 \\ \frac{d^{2\alpha} Y}{\partial y^{2\alpha}} - A^2 Y = 0 \end{cases}$$

Metoda przekształcania Laplace'a jest bardzo często używanym narzędziem do rozwiązywania równań różniczkowych. Zależności, na podstawie których wyznacza się transformatę Laplace'a pochodnych rzędu niecałkowitego można obliczyć korzystając z wzorów na transformatę pochodnej klasycznej n -tego rzędu - dla pochodnej ułamkowej w sensie Caputo można otrzymać formułę [3, 4]:

$$(9) \quad L\{{}_0^C D_x^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^k(0)$$

dla $n-1 \leq \alpha < n$.

Czyli dla $\alpha < 0.5$, $n = 1$:

$$(10) \quad L\{{}_0^C D_x^{2\alpha} f(t); s\} = s^{2\alpha} F(s) - s^{2\alpha-1} f^0(0), \quad 0 \leq 2\alpha < 1$$

Zatem

$$(11) \quad \begin{cases} X(s) = \frac{s^{2\alpha-1} X(0)}{s^{2\alpha} + A^2} \\ Y(s) = \frac{s^{2\alpha-1} Y(0)}{s^{2\alpha} - A^2} \end{cases}$$

W tym przypadku dla warunków brzegowych zerowych otrzymuje się, że obie funkcje równają się零. Oczywiście rozwiązywanie równanie nie jest równaniem Laplace'a ponieważ rzad pochodnych jest mniejszy od 1.

Natomiast dla $\alpha > 0.5$, $n = 2$ otrzymujemy:

$$(12) \quad L\{{}_0^C D_x^{2\alpha} f(t); s\} = s^{2\alpha} F(s) - s^{2\alpha-1} f^0(0) - s^{2\alpha-2} f^1(0)$$

Zatem:

$$(13) \quad \begin{cases} X(s) = \frac{s^{2\alpha-1} X(0) + s^{2\alpha-2} X'(0)}{s^{2\alpha} + A^2} \\ Y(s) = \frac{s^{2\alpha-1} Y(0) + s^{2\alpha-2} Y'(0)}{s^{2\alpha} - A^2} \end{cases}$$

Ponieważ iloczyn rozwiązań równania różniczkowego i stałej oraz dowolna kombinacja liniowa rozwiązań jest również rozwiązaniem równania (2), to jedno z rozwiązań można zapisać w postaci:

$$(14) \quad \varphi(x, y) = (D e^{-Ay} + E e^{Ay})(B \sin Ax + C \cos Ax)$$

W celu porównania, można w tym miejscu przytoczyć przykład dwuwymiarowego równanie Laplace'a zamieszczonego w pracy [5], obowiązującego w półpłaszczyźnie ograniczonej prostymi $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, z następującymi warunkami brzegowymi:

- dla $y = 0$, $\varphi = U \sin(\pi x)/a$,
- dla $y = \infty$, $\varphi = 0$,
- dla $x = 0$, $\varphi = 0$,
- dla $x = a$, $\varphi = 0$.

Stosując przekształcenie Laplace'a i uwzględniając obszar oraz warunki brzegowe takie jak we wspomnianym wyżej przykładzie, równanie (11) przedstawia się następująco:

$$(15) \quad \begin{cases} X(s) = \frac{ABs^{2\alpha-1}}{s(ss^{2\alpha-1} + A^2)} \\ Y(s) = \frac{s^{2\alpha-1}(Ds - A)}{s(ss^{2\alpha-1} - A^2)} \end{cases}$$

A podstawiając: $\beta = 2\alpha - 1$ otrzymujemy:

$$(16) \quad \begin{cases} X(s) = \frac{ABs^\beta}{s(ss^\beta + A^2)} \\ Y(s) = \frac{s^\beta(Ds - A)}{s(ss^\beta - A^2)} \end{cases}$$

Sformułowanie transformat Laplace'a w postaci wielomianów rzędów całkowitych, uzyskano w oparciu metodą CFE (Continued fraction expansion) [6,7,8] pozwalającą na rozwinięcie w ułamek nieskończony wyrażenia $(1+x)^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Zatem:

$$(17) \quad s^\beta = \frac{L(\beta, s)}{M(\beta, s)}, \quad \beta = 2\alpha - 1 \text{ dla } \alpha > 0.5$$

Do rozwiązywania zastosowano 5-ty rzad aproksymacji [6] i w rezultacie otrzymano:

$$(18) \quad \begin{cases} X(s) = \frac{ABL(\beta, s)}{s(sL(\beta, s) + A^2 M(\beta, s))} \\ Y(s) = \frac{L(\beta, s)(Ds - A)}{s(sL(\beta, s) - A^2 M(\beta, s))} \end{cases}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} L(\beta, s) = & -s^5(\beta^5 + 15\beta^4 + 85\beta^3 + 225\beta^2 + 274\beta + 120) + \\ & -s^4(-5\beta^5 - 45\beta^4 - 5\beta^3 + 1005\beta^2 + 3250\beta + 3000) + \\ & -s^3(10\beta^5 + 30\beta^4 - 410\beta^3 - 1230\beta^2 + 4000\beta + 12000) + \\ & +s^2(10\beta^5 - 30\beta^4 - 410\beta^3 + 1230\beta^2 + 4000\beta - 12000 + \\ & -s(5\beta^5 - 45\beta^4 + 5\beta^3 + 1005\beta^2 - 3250\beta + 3000) + \\ & +(\beta^5 - 15\beta^4 + 85\beta^3 - 225\beta^2 + 274\beta - 120) \end{aligned}$$

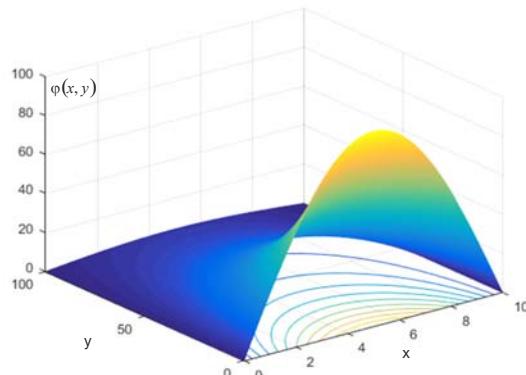
$$\begin{aligned} M(\beta, s) = & s^5(\beta^5 - 15\beta^4 + 85\beta^3 - 225\beta^2 + 274\beta - 120) + \\ & -s^4(5\beta^5 - 45\beta^4 + 5\beta^3 + 1005\beta^2 - 3250\beta + 3000) + \\ & +s^3(10\beta^5 - 30\alpha\beta^4 - 410\beta^3 + 1230\beta^2 + 4000\beta - 12000) + \\ & -s^2(10\beta^5 - 30\beta^4 - 410\beta^3 - 1230\beta^2 + 4000\alpha\beta + 12000) + \\ & -s(-5\beta^5 - 45\beta^4 - 5\beta^3 + 1005\beta^2 + 3250\beta + 3000) + \\ & -\beta^5 - 15\beta^4 - 85\beta^3 - 225\beta^2 - 274\beta - 120 \end{aligned}$$

Eksperymenty numeryczne

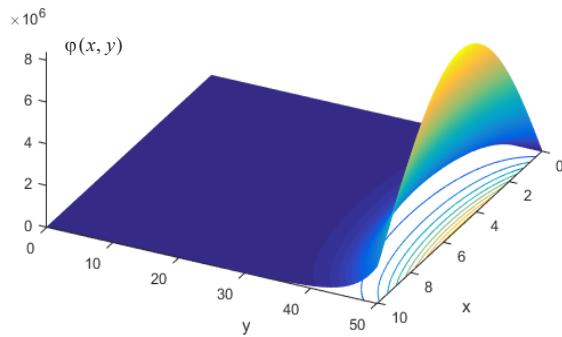
Rozwiązywanie problemu klasycznego przedstawionego w pracy [5] zilustrowano na rysunku 1.

Znajdując transformaty odwrotne funkcji (18), uzyskano rozwiązanie różniczkowego cząstkowego niecałkowitego rzędu dla założonych warunków brzegowych.

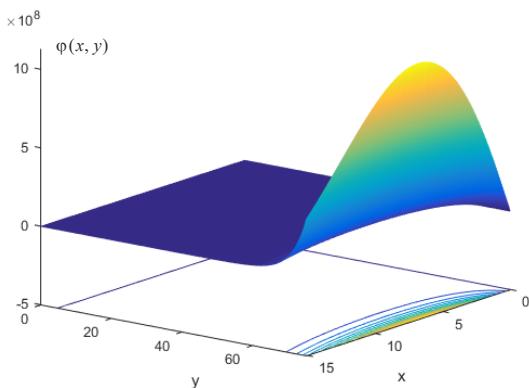
Wyniki symulacji numerycznych dla rzędu $\alpha = 0.9$ przedstawiono na rysunku 2, natomiast dla $\alpha = 0.8$ pokazano na rysunku 3.



Rys. 1. Rozwiązywanie numeryczne klasycznego równania Laplace'a



Rys. 2. Rozwiązywanie równania różniczkowego cząstkowego niecałkowitego rzędu dla $\alpha=0.9$



Rys. 3. Rozwiązywanie równania różniczkowego cząstkowego niecałkowitego rzędu dla $\alpha=0.8$

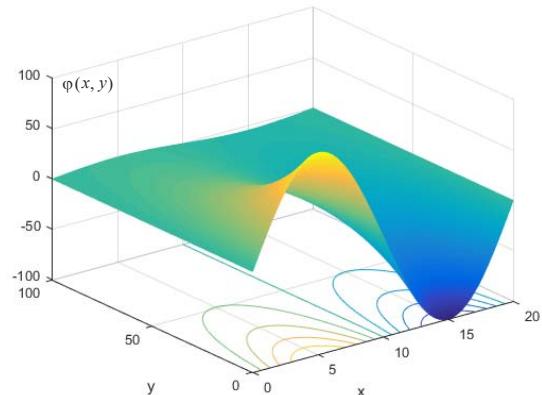
Rozszerzając, podobnie jak w przykładzie prezentowanym w pracy [5], obszar w kierunku osi x od 0 do $2a$ dla klasycznego równania Laplace'a otrzymano rozwiązanie przedstawione na rysunku 4.

Rozwiązuje się równanie:

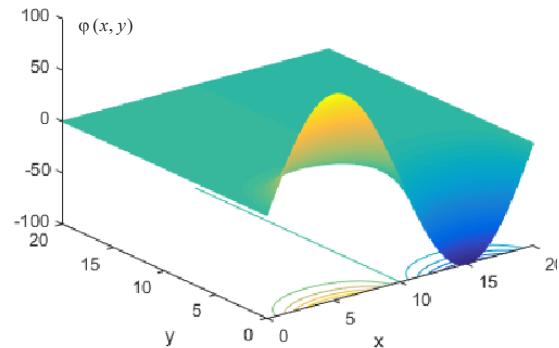
$$(19) \quad \Delta^\alpha \varphi(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^{2\alpha} \varphi(x, y)}{\partial y^{2\alpha}} = 0$$

Otrzymano:

$$(20) \quad \begin{cases} X(s) = B \sin Ax + C \cos Ax \\ Y(s) = \frac{L(\beta, s)D(s - A)}{s(sL(\beta, s) - A^2M(\beta, s))} \end{cases}$$



Rys. 4. Rozwiązywanie klasycznego równania Laplace'a z rozszerzonym obszarem w kierunku osi x .



Rys. 5. Rozwiązywanie równania (19) z rozszerzonym obszarem w kierunku osi x dla $\alpha=0.9$

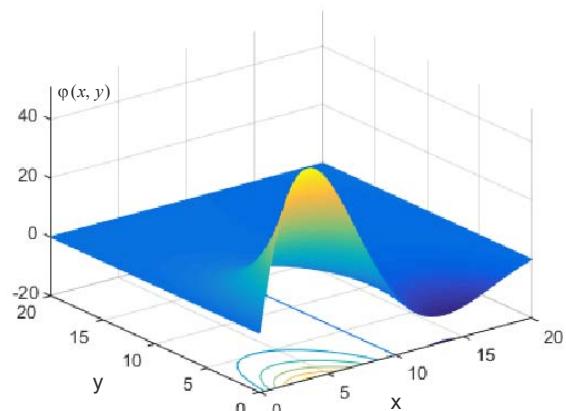
Natomiast rozwiązaniem równania postaci:

$$(21) \quad \Delta^\alpha \varphi(x, y) = \frac{\partial^{2\alpha} \varphi(x, y)}{\partial x^{2\alpha}} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

są następujące funkcje:

$$(22) \quad \begin{cases} X(s) = \frac{ABL(\beta, s)}{s(sL(\beta, s) + A^2M(\beta, s))} \\ Y(y) = De^{-Ay} + Ee^{Ay} \end{cases}$$

Rozwiązywanie równania (21) z rozszerzonym obszarem w kierunku osi x , dla $\alpha=0.9$ przedstawiono na rysunku 6.



Rys. 6. Rozwiązywanie równania (21) z rozszerzonym obszarem w kierunku osi x dla $\alpha=0.9$

Podsumowanie

Rozwiązywanie równania Laplace'a z pochodnymi niecałkowitego rzędu, z zastosowaniem metod w kolejności:
- rozdzielenia zmiennych,
- transformacji Laplace'a,
- CFE,

okazało się możliwe. W wyniku tych działań uzyskano transformaty poszukiwanych funkcji w postaci ilorazów wielomianów zmiennej s , w których występują całkowite potęgi. Ułatwiło to znalezienie transformaty odwrotnej i jednocześnie umożliwiło ocenę stabilności rozwiązań na podstawie analizy biegunów transformat.

Zmniejszanie rzędu pochodnej niecałkowitego rzędu w zakresie od 1 do $\alpha > 0.5$ powoduje coraz to większe tłumienie w kierunku osi tej zmiennej, względem której pochodną całkowitego rzędu zastąpiono rzędem niecałkowitym. W przypadku, gdy pochodna niecałkowitego rzędu występuje względem dwóch zmiennych – tłumienie obserwuje się w dwóch kierunkach.

Autorzy: dr hab. inż. Andrzej Zawadzki, prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Elektrotechniki Przemysłowej i Automatyki Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, E-mail: a.zawadzki@tu.kielce.pl

dr hab. inż. Maciej Włodarczyk, prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Informatyki, Elektroniki i Elektrotechniki, Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, Poland, E-mail: m.wlodarczyk@tu.kielce.pl

dr hab. inż. Sebastian Różowicz, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Elektrotechniki Przemysłowej i Automatyki Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, E-mail: s.rozowicz@tu.kielce.pl

LITERATURA

- [1] Kaczorek T.: Selected problems of fractional systems theory, *Springer-Verlag*, Berlin-Heidelberg 2011
- [2] Podlubny I.: Fractional Differential Equations. *Academic Press*, San Diego (1999)
- [3] Podlubny I.: Fractional Differential Equations. *Academic Press*, San Diego 1999.
- [4] Ostalczyk P.: Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. *Teoria i zastosowania w automatyce*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2008.
- [5] Matusiak R.: Teoria pola elektromagnetycznego, *WNT*, Warszawa 1966
- [6] Zawadzki A., Włodarczyk M. Analiza jakości aproksymacji odwrotnej transformaty Laplace'a ułamkowego rzędu metodą CFE. *IC-SPETO 2015*, str.45-46, 2015
- [7] Krishna B.T. Studies on fractional order differentiators and integrators: A survey. *Signal Processing, Volume 91, Issue 3*, pp. 386-426, March 2011
- [8] Elwakil A.S. Fractional-order circuits and systems: an emerging interdisciplinary research area. *IEEE Circuits Syst. Mag.* 10(4), 40–50 (2010)