

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Wydział Elektryczny

ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr inż. Dominik Sierociuk

**Estymacja i sterowanie dyskretnych układów dynamicznych
ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu**

Promotor:

Dr hab. inż. Andrzej Dzieliński, Prof. PW

Warszawa, 2007

Streszczenie

W pracy wprowadzony został dyskretny model dynamiczny ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu. Dla tego modelu zostały podane warunki określające jego podstawowe własności systemowe. Dla osiągalności, obserwonalności i stabilności zostały podane warunki konieczne i wystarczające, a dla sterowalności – tylko warunki konieczne. Zostało także wprowadzone proste w użyciu kryterium stabilności, podające fragment obszaru stabilności, ograniczony okręgiem o określonym przez to kryterium promieniu.

Dla modelu tego zostały podane algorytmy identyfikacji parametrycznej, oparte o metodę najmniejszych kwadratów, wraz z przykładami numerycznymi i symulacyjnymi. Szczególnie ważnym przykładem była identyfikacja układu dyskretnego na podstawie układu ciągłego. Pokazała ona możliwość modelowania modelem dyskretnym układów ciągłych (rzeczywistych).

Następnie zostały pokazane i przeanalizowane podstawowe algorytmy estymacji wektora zmiennych stanu liniowych i nieliniowych modeli ułamkowego rzędu. Dla liniowych modeli były to: Dyskretny Obserwator Ułamkowego Rzędu i Ułamkowy Filtr Kalmana. Dla nieliniowych modeli: Rozszerzony Ułamkowy Filtr Kalmana i Ułamkowy Filtr Kalmana oparty o transformację "Unscented". Dla wszystkich tych algorytmów przedstawione i przedyskutowane zostały przykłady symulacyjne.

Następnie został przedstawiony i przedyskutowany algorytm regulatora od stanu, wraz z jego modyfikacjami dla sytuacji, gdy potrzebny jest estymator zmiennych stanu. Jako estymator zostały użyte wprowadzone wcześniej algorytmy estymacji. Dla wszystkich tych przypadków przedstawione i przedyskutowane zostały przykłady symulacyjne.

Na zakończenie pokazane zostało zastosowanie wprowadzonych w tej pracy algorytmów estymacji i sterowania do obiektu rzeczywistego, jakim był układ elektroniczny z superkondensatorem. Przedstawione wyniki eksperymentalne potwierdziły efektywność tych algorytmów i dużą dokładność zarówno identyfikacji, estymacji, jak i sterowania.

Abstract

In the thesis the discrete fractional order dynamical model described in state space (DFOSS) is introduced. For this system the fundamental system properties are given. The notions of controllability, reachability and observability are presented. Necessary and sufficient conditions for reachability and observability are given and proven. The sufficient conditions for controllability are proposed too. The stability condition and easy to use stability criterion is formulated. The criterion produces only part of the whole stability area which is restricted by a circle.

For the DFOSS model the parametric identification algorithms, based on the Least-Squares method, are proposed. The numerical and simulation results are also presented. The most important case is the identification of continuous time systems by the discrete time model. This example presents the ability of describing the continuous time systems (real life systems) by the discrete time model.

Next, the state vector estimation algorithms are presented. For linear system these are: Discrete Fractional Order Observer and Fractional Kalman Filter. For nonlinear system these are: Extended Fractional Kalman Filter and "Unscented Fractional Kalman Filter". For both linear and nonlinear cases the simulations results are presented and discussed.

Then the state feedback controller algorithm for the model is proposed and discussed, together with its modifications, when the state estimator is needed. Earlier introduced algorithms are used as the state estimator. For all cases the simulation results are presented and discussed.

At the end the estimation and control algorithms, which are introduced in this thesis, are tested in real life application. The application is an electronic circuit with ultracapacitor. The results which are presented confirm very high efficiency of identification, estimation and control algorithms used.

Spis treści

1 Wstęp	8
1.1 Użyte oznaczenia i skróty	13
2 Wprowadzenie do rachunku różniczkowego i różnicowego ułamkowego rzędu	14
2.1 Funkcja $\Gamma(x)$. Definicja i własności	14
2.2 Funkcja Mittaga-Lefflera	15
2.3 Układy ciągłe: rachunek różniczkowy i całkowy ułamkowego rzędu	18
2.3.1 Definicja Riemanna-Liouville'a	18
2.3.2 Definicja Caputo	20
2.3.3 Definicja Grünwalda-Letnikowa	21
2.3.4 Składanie operatorów różniczkowania ułamkowego rzędu	22
2.3.5 Przykłady różniczkowania ułamkowego rzędu	23
2.3.6 Transmitancja i charakterystyki członów ułamkowego rzędu	26
2.3.7 Odpowiedź skokowa układu w zapisie transmitancyjnym	29
2.3.8 Liniowy ciągły układ ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu .	31
2.4 Układy dyskretnie: rachunek różnicowy ułamkowego rzędu	33
2.4.1 Zapis macierzowy różnicy ułamkowego rzędu	34
2.4.2 Własności operatora Δ^n	36
2.4.3 Implementacja praktyczna różnicy ułamkowego rzędu	37
3 Dyskretny układ dynamiczny ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu	39
3.1 Zdefiniowanie dyskretnych układów układu ułamkowego rzędu opisanego w przestrzeni stanu	40
3.1.1 Dyskretny liniowy układ układu opisany w przestrzeni stanu	41
3.1.2 Uogólniony dyskretny liniowy układ opisany w przestrzeni stanu . . .	47

3.1.3	Podstawowe przekształcenia schematów blokowych dyskretnych układów ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu	51
3.1.4	Dyskretny układ nieliniowy ułamkowego rzędu	57
3.1.5	Dyskretne liniowe i nieliniowe układy stochastyczne ułamkowego rzędu	58
3.1.6	Implementacja praktyczna	60
3.2	Stabilność FOSS	62
3.2.1	Kryterium stabilności	63
3.3	Osiągalność, sterowalność i obserwowałość układu DFOSS	73
3.3.1	Osiągalność	73
3.3.2	Sterowalność	76
3.3.3	Dekompozycja układu niesterowalnego (nieosiągalnego)	79
3.3.4	Obserwowałość	80
3.3.5	Dekompozycja układu nieobserwownego	85
3.4	Macierze transmitancji, postacie kanoniczne i równania różnicowe układu DFOSS	86
3.4.1	Macierze transmitancji układu DFOSS	86
3.4.2	Postacie kanoniczne	94
3.4.3	Równania różnicowe	98
3.4.4	Wyznaczanie macierzy przekształcenia na podstawie macierzy sterowalności lub obserwowałości	100
3.5	Podsumowanie	108
4	Identyfikacja i modelowanie układów dynamicznych ułamkowego rzędu	110
4.1	Identyfikacja parametryczna	110
4.1.1	Metoda najmniejszych kwadratów	110
4.1.2	Rekurencyjna metoda najmniejszych kwadratów	115
4.2	Identyfikacja modelu dyskretnego na podstawie modelu ciągłego	119
4.2.1	Identyfikacja dyskretnego modelu transmitancyjnego	119
4.2.2	Przykład identyfikacji dla różnych okresów próbkowania	126
4.2.3	Modelowanie zależności zmiennych stanu	129
4.3	Podsumowanie	131
5	Estymacja wektora zmiennych stanu dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu	133

5.1	Obserwator dla dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu	134
5.1.1	Estymacja zmiennych stanu dla różnych chwil startowych estymowanego układu i obserwatora	137
5.1.2	Estymacja zmiennych stanu układu stochastycznego przy użyciu obserwatora	139
5.1.3	Estymacja zmiennych stanu układu ciągłego przy użyciu dyskretnego obserwatora	141
5.2	Filtr Kalmana dla liniowych układów dynamicznych dyskretnych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanów	143
5.3	Filtr Kalmana dla nieliniowych układów dynamicznych dyskretnych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanów	156
5.4	Filtr Kalmana dla nieliniowych układów dynamicznych dyskretnych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanów oparty na transformacji "Unscented" .	162
5.4.1	Estymacja połączona parametrów i stanów układu jako przykład estymacji stanów układu nieliniowego	164
5.4.2	Estymacja dualna	170
5.5	Podsumowanie	175
6	Sterowanie dyskretnymi układami dynamicznymi ułamkowego rzędu	177
6.1	Regulator od stanu	177
6.1.1	Wyznaczanie macierzy regulatora dla układu w postaci kanonicznej regulatorowej	179
6.1.2	Wyznaczanie macierzy regulatora dla układu nie danego w postaci kanonicznej regulatorowej	180
6.1.3	Regulator od stanu z wejściem odniesienia	182
6.2	Regulator od stanu wraz z estymacją zmiennych stanu	184
6.2.1	Regulator od stanu wraz z obserwatorem	185
6.2.2	Regulator od stanu wraz z FKF	188
6.3	Regulator samonastrajający się	190
6.4	Podsumowanie	194
7	Modelowanie, estymacja i sterowanie układu czwórnika z superkondensatorem	195

7.1	Wprowadzenie do tematyki superkondensatorów	195
7.2	Omówienie układu doświadczalnego	201
7.3	Wyniki eksperymentalne modelowania	203
7.3.1	Charakterystyki częstotliwościowe superkondensatora	203
7.3.2	Charakterystyki częstotliwościowe czwórnika z superkondensatorem .	205
7.3.3	Modelowanie za pomocą dyskretnego modelu ułamkowego rzędu opisanego w przestrzeni stanu	207
7.4	Wyniki eksperymentalne estymacji układu czwórnika z superkondensatorem . .	210
7.4.1	Estymacja przy użyciu obserwatora	210
7.4.2	Estymacja przy użyciu Ułamkowego Filtru Kalmana (FKF)	211
7.4.3	Estymacja rzędu układu	212
7.5	Wyniki eksperymentalne sterowania przy użyciu regulatora od stanu dla układu czwórnika z superkondensatorem	216
7.5.1	Regulator od stanu z obserwatorem	216
7.5.2	Regulator od stanu z FKF	218
7.5.3	Estymacja połączona i regulator samonastrajający się	219
7.6	Podsumowanie	224
8	Zakończenie	225

Rozdział 1

Wstęp

Rachunek różniczkowy (i całkowy) ułamkowego rzędu (ang. fractional calculus) jest naturalnym rozszerzeniem pojęć całki i różniczki, zawartych w tradycyjnym rachunku różniczkowym (i całkowym) całkowitego rzędu. Rozszerzenie to określa definicję całek i różniczek dla niecałkowitej (ułamkowej) ich krotności (liczby razy, rzędu).

Pierwsza wzmianka o możliwości istnienia różniczki rzędu $\frac{1}{2}$ pochodzi z 30 września 1695 roku, z listu Leibnitz'a do L'Hospital'a. W liście tym Leibnitz pisał: (cytat z [130, strona 3]) "Thus it follows that $d^{\frac{1}{2}}x$ will be equal to $x\sqrt{dx : x}$, an apparent paradox, from which one day usefull consequences will be drawn".

Wzmianka ta stała się motywacją dla przyszłych pokoleń matematyków, takich jak: Liouville, Grünwald, Letnikow, Riemann, którzy pod koniec XIX wieku stworzyli podstawy rachunku różniczkowego ułamkowego (niecałkowitego) rzędu [71, 96].

Na początku rozwoju rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu był on głównie domeną matematyków. Podstawy tego rachunku można znaleźć w [130] (pierwsza monografia na ten temat, 1974 rok), [90, 119, 128, 162, 188]. Dalsze informacje na jego temat można znaleźć w pracach [53, 65, 68, 78, 98, 99, 163, 167, 179, 184, 218, 221]. W 1974 roku odbyła się także pierwsza konferencja o układach ułamkowego rzędu: "International Conference on Fractional Calculus and Its Applications" [180].

W drugiej połowie XX wieku zaczęto obserwować coraz większe zainteresowanie tym rachunkiem (które trwa po dziś dzień) wśród inżynierów. Zainteresowanie to było spowodowane obserwacjami, że wiele zjawisk można dokładniej wyjaśnić i modelować właśnie przy użyciu rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu (wzrost tego zainteresowania był także możliwy wraz z rozwojem techniki komputerowej, który umożliwił analizę i w dużej części implemen-

tację układów ułamkowego rzędu).

Dla przykładu: w rozwiązyaniu równania dyfuzji, przy modelowaniu procesu rozchodzenia się ciepła w płynie, w dziedzinie operatora Laplace'a s obecny jest \sqrt{s} . Pierwiastek ten można interpretować jako pochodną rzędu 0.5, dlatego układy, gdzie występuje efekt transportu ciepła (lub dyfuzji), stały się naturalnym obszarem zastosowania tego rachunku [16, 166, 209].

Innym przykładem jest modelowanie zachowania się niektórych materiałów, jak polimery czy kauczuk, czyli posiadających bardzo skomplikowaną strukturę mikroskopową [214]. W pracy [194] przedstawiona jest identyfikacja parametryczna w dziedzinie częstotliwości dynamiki izolatora kauczukowego, dokonana z powodzeniem przy użyciu modelu dynamicznego ułamkowego rzędu. Modelowanie elementów kauczukowych przedstawione jest także w pracy [55].

W pracach [116, 174, 175] z powodzeniem modelowane jest zjawisko relaksacji dielektryków organicznych, takich jak polimery pół-krystaliczne (ang. semi-crystalline polymers) poprzez mechaniczne i dielektryczne modele ułamkowego rzędu. Mechaniczne równania Lagrange'a i Hamiltona mogą być przeformułowane z użyciem różniczek ułamkowego rzędu. Przewodzi to bezpośrednio do równań z siłami niezachowawczymi (ang. nonconservative forces), takimi jak tarcie [30, 64, 91, 107, 176, 177, 187].

W pracy [210] proces elektrochemiczny i odkształcające się ramię robota zostały zamodelowane z wykorzystaniem układów ułamkowego rzędu. Nawet przy modelowaniu ruchu w sieciach informacyjnych (ang. information network) rachunek ułamkowego rzędu okazał się bardzo przydatny [220].

Innym przykładem jest modelowanie zachowania się materiałów wiskoelastycznych (ang. visco-elastic materials). Materiały te łączą w sobie cechy materiałów plastycznych i sprężystych. Ich modelowanie przedstawione jest w pracach [7, 8, 11, 12, 92, 189, 195, 196, 197].

Więcej przykładów użycia rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu (np. modelowanie fraktalne, ruchy Browna, termodynamika i inne) można znaleźć w pracach [13, 37, 58, 63, 77, 125, 142, 168, 201, 207, 214].

W pracach [29, 171, 216] został przedstawiony bardzo efektywny sposób modelowania superkondensatorów przy użyciu układów ułamkowego rzędu. Także w niniejszej pracy, w rozdziale 7, przedstawione jest modelowanie superkondensatorów wykorzystujące rachunek różniczkowy (różnicowy) ułamkowego rzędu.

W pracach [122, 126, 164] są pokazane interpretacje geometryczne i fizyczne pochodnych

ułamkowego rzędu.

Inną prężnie rozwijającą się dziedziną zainteresowań inżynierów jest użycie rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu do budowania regulatorów, takich jak $PI^\lambda D^\mu$ [108, 123, 162, 165, 212, 219] lub CRONE [142, 144, 143, 148, 149, 150, 186]. Regulator $PI^\lambda D^\mu$ jest to odmiana regulatora PID, gdzie zarówno człon całkujący, jak i różniczkujący może być ułamkowego rzędu. W pracy [198] regulator $PI^\lambda D^\mu$ jest użyty do sterowania nadążnego ruchu pojazdu przemysłowego. W pracy [59] natomiast algorytmy sterowania ułamkowego rzędu zostały zastosowane do sterowania hybrydowego pozycja/siła manipulatorem robota.

Zastosowanie rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu do sterowania wymogło prace nad uogólnieniem zagadnień teorii sterowania dla tego rachunku. Definicje i własności systemowe ciągłych układów ułamkowego rzędu zostały opisane w pracach [9, 10, 40, 74, 95, 106, 111, 113, 131, 133, 153, 155, 157, 154, 162, 164, 165].

Układy ciągłe ułamkowego rzędu opisane w przestrzeni stanu zostały opisane w [113, 114, 158, 173, 211].

Dyskretyzacja układów ciągłych ułamkowego rzędu (aby była możliwa dyskretna implementacja układów ciągłych) i numeryczne algorytmy rozwiązywania równań różniczkowych ułamkowego rzędu zostały przedstawione w pracach [3, 15, 19, 31, 38, 40, 65, 159, 160, 161, 162, 202, 208].

Zagadnienie identyfikacji układów dynamicznych ułamkowego rzędu zostało opisane w pracach [41, 103, 206].

Dyskretne układy ułamkowego rzędu, ich własności systemowe i sposoby implementacji zostały pokazane w pracach [83, 102, 132, 135, 136, 137, 138, 140, 156].

Widoczny był brak prac dotyczących dyskretnych układów ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu. Jedynie w pracy [42] pokazana została próba zdefiniowania takiego układu. Brak jednolitej teorii definiującej i podającej przynajmniej podstawowe własności tych układów jest podstawową motywacją do powstania tej pracy.

Teza tej pracy jest następująca:

"Można zdefiniować dyskretny układ dynamiczny ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu. Dla tego układu można podać warunki osiągalności, sterowalności, obserwowalności i stabilności oraz podać algorytm identyfikacji, estymacji zmiennych stanu i sterowania od stanu."

Za oryginalne osiągnięcia autor uznaje:

1. Zdefiniowanie dyskretnego układu dynamicznego ułamkowego rzędu opisanego w przestrzeni stanu, zarówno liniowego, jak i nieliniowego, deterministycznego, jak i stochastycznego. Układ został po raz pierwszy wprowadzony w pracach [47, 192].
2. Podanie warunków osiągalności, sterowalności i obserwonalności dla liniowego układu ułamkowego rzędu. Zostały one opublikowane w pracach [48, 50].
3. Podanie warunków stabilności dyskretnego liniowego układu ułamkowego rzędu opisanej w przestrzeni stanu oraz podanie uproszczonego kryterium stabilności dla tego układu. Wyniki te zostały opublikowane w [49].
4. Podanie algorytmu Ułamkowego Filtru Kalmana do estymacji zmiennych stanu dyskretnego liniowego układu ułamkowego rzędu i algorytmu Rozszerzonego Ułamkowego Filtru Kalmana do estymacji zmiennych stanu dyskretnego nieliniowego układu ułamkowego rzędu. Algorytmy te zostały opublikowane w pracy [193].
5. Podanie algorytmu Ułamkowego Filtru Kalmana opartego o transformację "Unscented" do estymacji zmiennych stanu nieliniowego dyskretnego układu ułamkowego rzędu. Pokazanie przykładu użycia go do estymacji rzędu dyskretnego liniowego układu ułamkowego rzędu. Wyniki te zostały opublikowane w [192].
6. Podanie algorytmu obserwatora zmiennych stanu dyskretnego układu ułamkowego rzędu, opublikowanego w [48].
7. Podanie algorytmu identyfikacji parametrycznej dyskretnego liniowego układu ułamkowego rzędu, zamieszczonego w [47].
8. Podanie algorytmu sterowania od stanu, sterowania od stanu z estymatorami (Ułamkowym Filtrem Kalmana i obserwatorem), regulatora od stanu samonastrajającego się. Część tych wyników została opublikowana w [47, 51].
9. Modelowanie układu czwórnika z superkondensatorem modelem ciągłym (w dziedzinie częstotliwości) i dyskretnym (w dziedzinie czasu) ułamkowego rzędu. Przy użyciu otrzymanego modelu zastosowanie do układu z superkondensatorem sterowania od stanu z estymatorami i regulatora samonastrajającego się. Wyniki te zostały opublikowane w [51, 52].

Praca zorganizowana jest następująco:

- Rozdział 2 zawiera krótkie wprowadzenie do zagadnień rachunku różniczkowego i różnicowego ułamkowego rzędu. Nie zawiera on oryginalnych osiągnięć, celem jego jest podanie podstawowych wiadomości, ułatwiających odbiór dalszych rozdziałów pracy.
- Rozdział 3 wprowadza dyskretny układ ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu wraz z jego podstawowymi własnościami (osiągalność, sterowalność, obserwonalność, stabilność, transmitancje i inne).
- Rozdział 4 przedstawia zagadnienie identyfikacji parametrycznej układu dyskretnego ułamkowego rzędu, w oparciu o metodę najmniejszych kwadratów.
- Rozdział 5 wprowadza algorytmy estymacji liniowych i nieliniowych dyskretnych układów ułamkowego rzędu, tj. Ułamkowy Filtr Kalmana, Rozszerzony Ułamkowy Filtr Kalmana, Ułamkowy Filtr Kalmana oparty o transformację "Unscented", obserwator ułamkowego rzędu.
- Rozdział 6 przedstawia wyprowadzenie i analizę algorytmów sterowania od stanu dyskretnych liniowych układów ułamkowego rzędu.
- Rozdział 7 zawiera wyniki eksperymentalne modelowania, estymacji i sterowania układu z superkondensatorem przy użyciu dyskretnego układu ułamkowego rzędu opisanego w przestrzeni stanu.

1.1 Użyte oznaczenia i skróty

CRONE	sterowanie odporne niecałkowitego rzędu (fr. commande robuste d'ordre non-entier)
DFOSS	dyskretny układ ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu (ang. Discrete Fractional Order State-Space system)
GDFOSS	uogólniony dyskretny układ ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu (ang. Generalised Discrete Fractional Order State-Space system)
FKF	Ułamkowy Filtr Kalmana (ang. Fractional Kalman Filter)
EKF	Rozszerzony Ułamkowy Filtr Kalmana (ang. Extendet Fractional Kalman Filter)
UFKF	Ułamkowy Filtr Kalmana oparty na transformacji "Unsctented" (ang. Unscented Fractional Kalman Filter)
SISO	jedno wejście, jedno wyjście (ang. single input single output)
MIMO	wiele wejść, wiele wyjść (ang. multiple input multiple output)
x_k	funkcja dyskretna w chwili k (najczęściej zmienna stanu układu)
\hat{x}_k	estymata zmiennej dyskretnej x_k
\tilde{x}_k	predykcja zmiennej dyskretnej x_k
$\Delta^n x_k$	różnica rzędu n funkcji dyskretnej x_k dla chwili k
${}_a D_t^\alpha f(t)$	pochodna rzędu α funkcji $f(t)$ zmiennej t o granicy od a do t
A^T	transpozycja macierzy A
A^{-1}	odwrotność macierzy A
A^\dagger	pseudoodwrotność macierzy A
rank[A]	rzęd macierzy A
$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	transformata Laplace'a funkcji $f(t)$
$\Gamma(x)$	funkcja Gamma
$E_\alpha(z)$	jednoparametrowa funkcja Mittaga-Lefflera
$E_{\alpha,\beta}(z)$	dwuparametrowa funkcja Mittaga-Lefflera
\mathbb{C}	zbiór liczb zespolonych
\mathbb{Z}	zbiór liczb całkowitych
\mathbb{R}	zbiór liczb rzeczywistych
\mathbb{N}	zbiór liczb naturalnych

Rozdział 2

Wprowadzenie do rachunku różniczkowego i różnicowego ułamkowego rzędu

W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione podstawowe definicje i własności różniczko-całki i różnicy ułamkowego rzędu. Rozdział ten nie jest przeglądem całej tematyki rachunku różniczkowego czy różnicowego ułamkowego rzędu. Zawiera natomiast te elementy, które mogą być pomocne w odbiorze całości pracy. W podrozdziale 2.1 przedstawiona jest definicja i podstawowe własności funkcji $\Gamma(x)$, która będąc uogólnieniem silni na argumenty rzeczywiste jest szeroko wykorzystywana w dalszych definicjach. Następnie zostanie przedstawiona definicja funkcji Mittaga-Lefflera. Podrozdział 2.3 zawiera definicje i własności różniczko-całki ułamkowego rzędu, a także podstawowe własności układów dynamicznych ułamkowego rzędu. W podrozdziale 2.4 natomiast przedstawiona jest definicja i własności różnicy ułamkowego rzędu.

2.1 Funkcja $\Gamma(x)$. Definicja i własności

Funkcja $\Gamma(x)$ pełni rolę uogólnienia silni dla argumentów rzeczywistych lub zespolonych. Istnieją dwie definicje tej funkcji, całkowa i w postaci granicy. Dane są one następująco:

Definicja 1 [162] Funkcją $\Gamma(x)$ nazywamy funkcję określona następującymi sposobami:

1. Definicji całkowej (Eulera):

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (2.1)$$

gdzie $\operatorname{Re}(x) > 0$.

2. Definicji w postaci granicy:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad (2.2)$$

gdzie $x \in \mathbb{C}$.

Podstawową właściwością funkcji $\Gamma(x)$ jest

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (2.3)$$

Przykład 1 Przykład zastosowania relacji $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\Gamma(2.5) = 1.5 * \Gamma(1.5) = 1.5 * 0.5\Gamma(0.5)$$

$$\Gamma(0.5) = -0.5 * \Gamma(-0.5) = -0.5 * (-1.5)\Gamma(-1.5)$$

Z tej relacji wynika, że dla $x \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

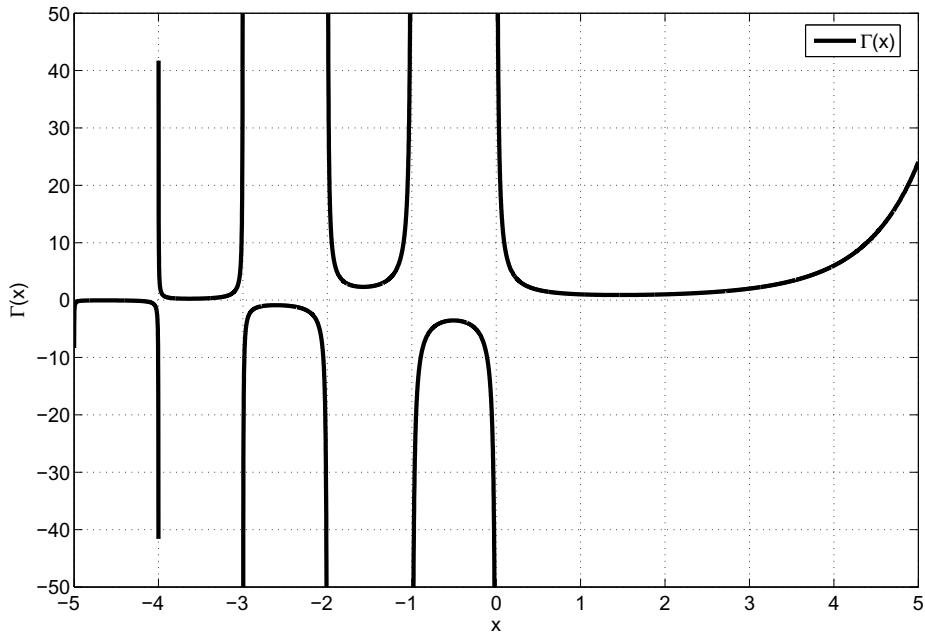
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$$

To pokazuje, że dla liczb naturalnych funkcja $\Gamma(n+1)$ przyjmuje wartości silni liczby n .

Na rysunku 2.1 przedstawiony jest przebieg funkcji $\Gamma(x)$ dla $-5 \leq x \leq 5$. Można zauważyć, że dla $x > 0$ funkcja ta jest określona i przyjmuje wartości dodatnie. Dla $x \leq 0$ natomiast funkcja posiada nieciągłości dla $x \in \mathbb{Z}_-$, gdzie \mathbb{Z}_- oznacza zbiór liczb całkowitych ujemnych.

2.2 Funkcja Mittaga-Lefflera

Funkcja Mittaga-Lefflera pełni zasadniczą rolę przy rozwiązywaniu równań różniczkowych ułamkowego rzędu (jest uogólnieniem funkcji e^{st} dla ułamkowego rzędu równań). Jednoparametrowa funkcja Mittaga-Lefflera została wprowadzona w pracach [120, 121]. Funkcja ta jest zdefiniowana następująco:



Rysunek 2.1: Przebieg wartości funkcji $\Gamma(x)$

Definicja 2 [162] Jednoparametrową Funkcją Mittaga-Lefflera nazywamy funkcję zmiennej zespolonej zdefiniowaną w następujący sposób:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

Dla $\alpha = 1$ otrzymujemy

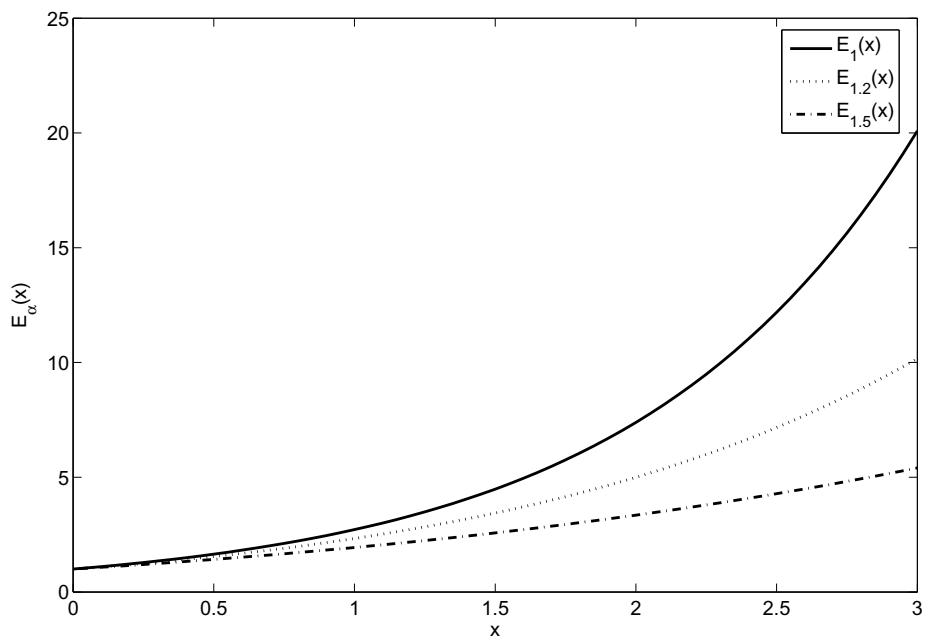
$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

czyli tradycyjną funkcję eksponencjalną.

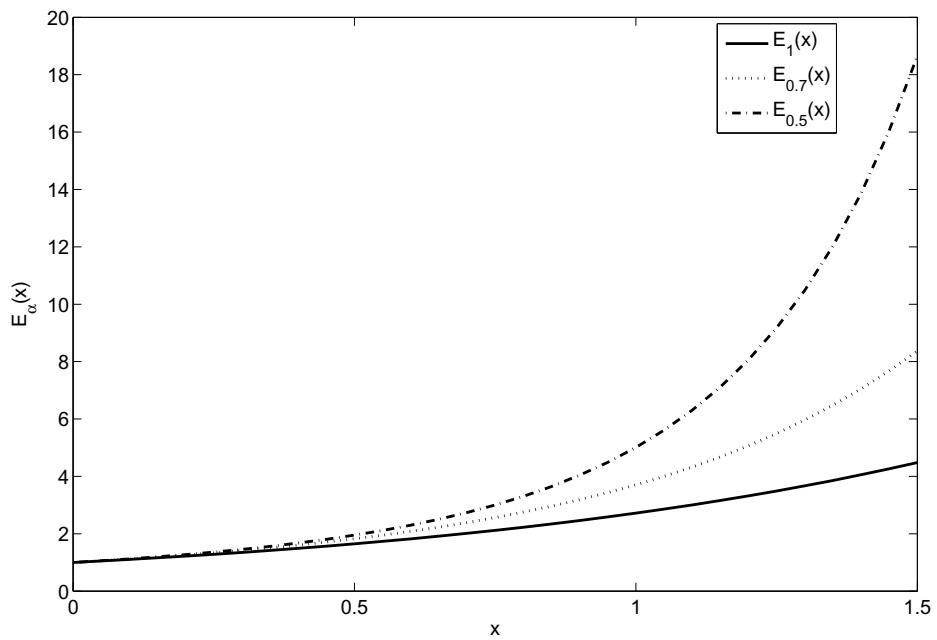
Na rysunkach 2.2 i 2.3 przedstawione są przykładowe przebiegi funkcji Mittaga-Lefflera. Na rysunku 2.2 jest to przebieg jednoparametrowej funkcji $E_\alpha(x)$ dla $\alpha = 1, 1.2, 1.5$, na rysunku 2.3 natomiast przedstawiony jest przebieg dla $\alpha = 1, 0.7, 0.5$.

Rozszerzeniem definicji jednoparametrowej funkcji Mittaga-Lefflera jest dwuparametrowa funkcja Mittaga-Lefflera. Jest ona zdefiniowana następująco:

Definicja 3 Dwuparametrową funkcję Mittaga-Lefflera nazywamy funkcję zmiennej zespolonej określona w następujący sposób:



Rysunek 2.2: Przebieg wartości funkcji $E_\alpha(x)$ dla $\alpha = 1, 1.2, 1.5$



Rysunek 2.3: Przebieg wartości funkcji $E_\alpha(x)$ dla $\alpha = 1, 0.7, 0.5$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

Dla $\beta = 1$ otrzymujemy jednoparametrową funkcję $E_\alpha(x)$.

2.3 Układy ciągłe: rachunek różniczkowy i całkowy ułamkowego rzędu

W podrozdziale tym zostaną przedstawione podstawowe definicje różniczko-całek ułamkowego rzędu, wraz z przykładami. Definicje te unifikują definicje różniczki i całki w jedną definicję różniczko-całki. Dla rzędu dodatniego ($\alpha > 0$) otrzymujemy pochodną, dla rzędu ujemnego ($\alpha < 0$) otrzymujemy całkę, a dla $\alpha = 0$ tę samą funkcję. Na początku zostanie przedstawiona definicja Riemanna-Liouville'a (w skrócie R-L), która jest rozszerzeniem reguły Cauchy'ego całkowania wielokrotnego. Następnie pokazana zostanie definicja Caputo, będąca modyfikacją definicji R-L, po czym zostanie przedstawiona definicja Grünwalda-Letnikowa (w skrócie G-L), która jest rozszerzeniem definicji pochodnej wielokrotnej całkowitego rzędu. Zostaną także podane podstawowe właściwości tych definicji. Na szczególną uwagę zasługuje fakt, przedstawiony w książce [162], jednoznaczności definicji R-L i G-L (przy założeniu odpowiedniej klasy różniczkowalności funkcji). Jest to wyrazem unifikacji, jaką daje rachunek różniczkowy ułamkowego rzędu. Rozpoczynając uogólnianie od definicji całki czy od pochodnej otrzymujemy jednoznaczne definicje różniczko-całki ułamkowego rzędu.

W rozdziale tym zostanie przedstawiony także transmitancja ułamkowego rzędu wraz z przykładami charakterystyk Bode'go podstawowych członów dynamicznych ułamkowego rzędu, po czym przedstawiony zostanie układ ciągły ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu, wraz z podstawowymi własnościami.

2.3.1 Definicja Riemanna-Liouville'a

Przedstawienie definicji całki ułamkowego rzędu zostanie rozpoczęte (jak to ma miejsce w [77]) od wzoru na całkowanie wielokrotne

$$\begin{aligned} {}_aI_x^n f(x) &= \int_a^x du_1 \int_a^{u_1} du_2 \dots \int_a^{u_{n-1}} f(u_n) du_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-u)^{n-1} f(u) du \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest krotnością całkowania, (a, x) jest przedziałem całkowania funkcji $f(u)$.

Korzystając z zależności $(n-1)! = \Gamma(n)$ można uogólnić wzór 2.4 na $n \in \mathbb{R}$. Otrzymujemy w ten sposób zależność Riemanna-Liouville'a na wyznaczanie całki ułamkowego rzędu.

$${}_aI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}^+$ jest rzędem całkowania w granicach (a, x) funkcji $f(x)$.

Definicję tę można rozszerzyć na $\alpha < 0$ w następujący sposób:

Definicja 4 [162] (Riemanna-Liouville'a) Różniczko-całka ułamkowego rzędu dana jest następująco:

$${}_aD_t^\alpha = \frac{d^k}{dt^k} I_t^{(\alpha-k)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

gdzie

$$k-1 \leq \alpha \leq k$$

■

Przekształcenie Laplace'a różniczkocałki ułamkowego rzędu, danej definicją R-L, ma następującą postać:

$$\mathcal{L}[{}_0D_t^\alpha f(t)] = \begin{cases} s^\alpha F(s) & n < 0 \\ s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{j-1} s^k {}_0D_x^{\alpha-k-1} f(0) & n > 0, \quad j-1 < \alpha \leq j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Jak można zauważyć, warunki początkowe są pochodnymi ułamkowego rzędu w punkcie $t = 0$.

Twierdzenie 1 Operator ${}_aD_t^\alpha$ jest operatorem liniowym, spełnia więc następującą zależność:

$${}_aD_t^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_aD_t^\alpha f(t) + \mu {}_aD_t^\alpha g(t) \quad (2.6)$$

■

Dowód [162, str. 91]:

$$\begin{aligned} {}_aD_t^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} (\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} \lambda f(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} \mu g(\tau) d\tau \\ &= \lambda {}_aD_t^\alpha f(t) + \mu {}_aD_t^\alpha g(t) \end{aligned}$$

□

Więcej własności można znaleźć w pracach [162], [119] i [130].

2.3.2 Definicja Caputo

Praktyczne użycie definicji Riemanna-Liouville'a pociąga za sobą problemy z interpretacją warunków początkowych, określonych pochodnymi ułamkowego rzędu (patrz str. 78 [162]). O ile problem ten jest matematycznie rozwiązywalny, o tyle interpretacja fizyczna pochodnych ułamkowego rzędu jest już bardziej skomplikowana. Pewnym rozwiązaniem tego problemu jest definicja Caputo, wprowadzona w pracach [26] i [27]. Ma ona następującą postać:

Definicja 5 [162] (Caputo) Różniczkowalna ułamkowego rzędu ma postać:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \quad \text{gdzie} \quad (n - 1 < \alpha < n)$$

■

Przekształcenie Laplace'a różniczko-całki wg tej definicji jest następujące:

$$\mathcal{L}[{}_0 D_x^\alpha f(x)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (n - 1 < \alpha \leq n) \quad (2.7)$$

Jak można zauważyć, warunki początkowe, otrzymane przy przekształceniu Laplace'a wg tej definicji, są zdefiniowane jako pochodne całkowitego rzędu. Pochodne te mają znacznie pełniejsze fizyczne znaczenie niż pochodne ułamkowego rzędu, dlatego definicja ta ma większe znaczenie praktyczne.

Inną różnicą pomiędzy definicjami Caputo i R-L jest ich wynik różniczkowania funkcji stałej. Korzystając z definicji Caputo, dla $\alpha > 0$ otrzymujemy wynik zero, natomiast korzystając z definicji R-L, zero otrzymujemy tylko dla całkowitych rzędów. Dla rzędów niecałkowitych i skończonej dolnej granicy a pochodna ta istnieje i ma postać:

$${}_0 D_t^\alpha C = \frac{C t^\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)}$$

Dla granicy dolnej równej $a = -\infty$ obydwie definicje Caputo i R-L są równoważne [162, str. 80].

Twierdzenie 2 [162] Operator ${}_a^C D_t^\alpha$ jest operatorem liniowym, spełnia więc następującą zależność:

$${}_a^C D_t^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_a^C D_t^\alpha f(t) + \mu {}_a^C D_t^\alpha g(t) \quad (2.8)$$

■

Dowód:

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{\frac{d^n}{dt}(\lambda f(\tau) + \mu g(\tau))}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{\frac{d^n}{dt}(\lambda f(\tau))}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{\frac{d^n}{dt}(\mu g(\tau))}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \\ &= \lambda {}_a^C D_t^\alpha f(t) + \mu {}_a^C D_t^\alpha g(t) \end{aligned}$$

□

Więcej własności można znaleźć w pracach [162], [119] i [130].

2.3.3 Definicja Grünwalda-Letnikowa

Innym sposobem zdefiniowania różniczko-całki ułamkowego rzędu jest definicja Grünwalda-Letnikowa.

Różniczka pierwszego rzędu definiowana jest zazwyczaj jako

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - h)}{h} \quad (2.9)$$

różniczka drugiego rzędu natomiast jako

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{df}{dt} f(t) - \frac{df}{dt} f(t - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t - h) + f(t - 2)}{h^2} \quad (2.10)$$

Różniczkę dowolnego (całkowitego) rzędu określa wzór

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh) \quad (2.11)$$

Korzystając z tego, iż $\binom{n}{r}$ jest równy 0, dla $r > n$ można to wyrażenie zapisać jako

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t - rh) \quad (2.12)$$

Używając zależności uogólniającej symbol Newtona na liczby rzeczywiste możemy zdefiniować różniczko-całkę ułamkowego rzędu

Definicja 6 (Grünwalda-Letnikowa) Różniczko-całka ułamkowego rzędu ma postać:

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t - rh) \quad (2.13)$$

■

Twierdzenie 3 [162] Operator ${}_a D_t^\alpha$ (wg definicji G-L) jest operatorem liniowym, spełnia więc następującą zależność:

$${}_a D_t^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_a D_t^\alpha f(t) + \mu {}_a D_t^\alpha g(t) \quad (2.14)$$

■

Dowód [162, str. 91]:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} (\lambda f(t - rh) + \mu g(t - rh)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} (\lambda f(t - rh)) \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} (\mu g(t - rh)) \\ &= \lambda {}_a D_t^\alpha f(t) + \mu {}_a D_t^\alpha g(t) \end{aligned}$$

□

Więcej własności można znaleźć w pracach [162], [119] i [130].

2.3.4 Składanie operatorów różniczkowania ułamkowego rzędu

Dla zerowych warunków początkowych (funkcji i jej pochodnych) otrzymujemy niezależnie od przyjętej definicji, następujące prawo składania pochodnych (przy założeniu odpowiednich różniczkowalności funkcji $f(t)$):

$${}_0 D_t^\alpha ({}_0 D_t^\beta f(t)) =_0 D_t^\beta ({}_0 D_t^\alpha f(t)) =_0 D_t^{\alpha+\beta} f(t) \quad (2.15)$$

Natomiast dla niezerowych warunków początkowych sytuacja jest bardziej skomplikowana.

Na przykład dla definicji R-L składanie pochodnych jest zdefiniowane następująco (str. 90 [32]):

$${}_aD_t^\alpha({}_aD_t^\beta f(t)) =_a D_t^\beta({}_aD_t^\alpha f(t)) =_a D_t^{\alpha+\beta}f(t) - \sum_{j=1}^m \left[{}_aD_t^{\beta-j}f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-1-j)} \quad (2.16)$$

Więcej własności można znaleźć w pracach [32], [162], [119] i [130].

2.3.5 Przykłady różniczkowania ułamkowego rzędu

W podrozdziale tym zostaną przedstawione analityczne przykłady wyznaczania różniczki ułamkowego rzędu.

Przykład 2 Wyznaczenie pochodnej rzędu $n = 0.5$ funkcji $1(t)$ z def. R-L

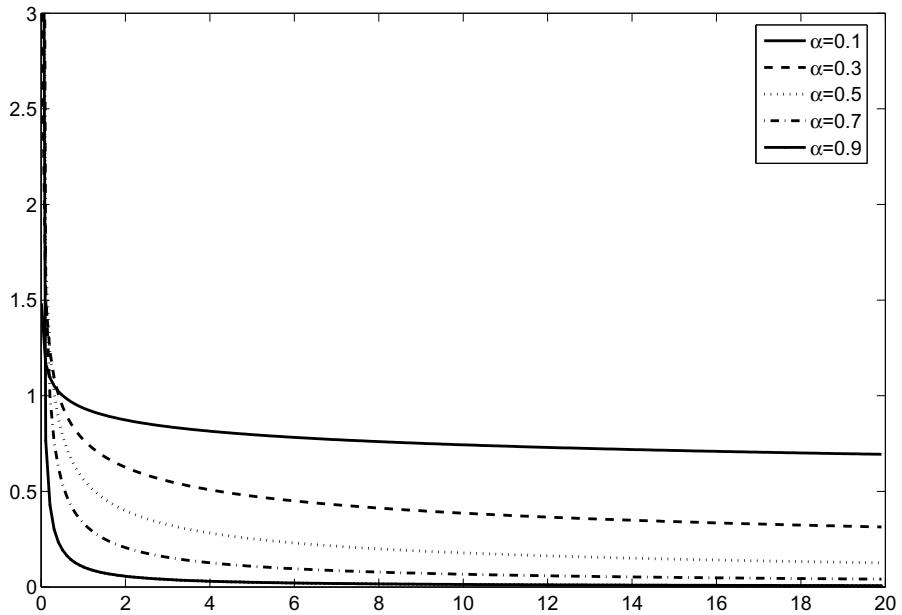
$$\begin{aligned} d^{0.5}1(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^t (t-u)^{-0.5} du \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(0.5)} \frac{d}{dt} [2(t-u)^{0.5}]_0^t = \frac{1}{\Gamma(0.5)} \frac{d}{dt} 2(t)^{0.5} \\ &= \frac{1}{\Gamma(0.5)} t^{-0.5} \end{aligned}$$

Wyznaczenie pochodnej rzędu $n = 1.5$ funkcji $1(t)$ z def. R-L

$$\begin{aligned} d^{1.5}1(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^t (t-u)^{-0.5} du \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(0.5)} \frac{d^2}{dt^2} [2(t-u)^{0.5}]_0^t = \frac{1}{\Gamma(0.5)} \frac{d^2}{dt^2} 2(t)^{0.5} \\ &= \frac{-0.5}{\Gamma(0.5)} t^{-1.5} = \frac{1}{\Gamma(-0.5)} t^{-1.5} \end{aligned}$$

Przykład 3 Wyznaczenie pochodnej dowolnego rzędu funkcji stałej z def. R-L

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} 1(t) &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \left[\int_0^t (t-u)^{k-\alpha-1} du \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \left[\frac{1}{k-\alpha} (t-u)^{k-\alpha} \right]_0^t \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \frac{1}{k-\alpha} t^{k-\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{1}{\alpha-k} (k-\alpha)(k-\alpha-1)\dots(1-\alpha) t^{-\alpha} \\ &= \frac{(1-\alpha)\dots(k-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\dots(k-\alpha)} t^{-\alpha} \\ &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \end{aligned}$$



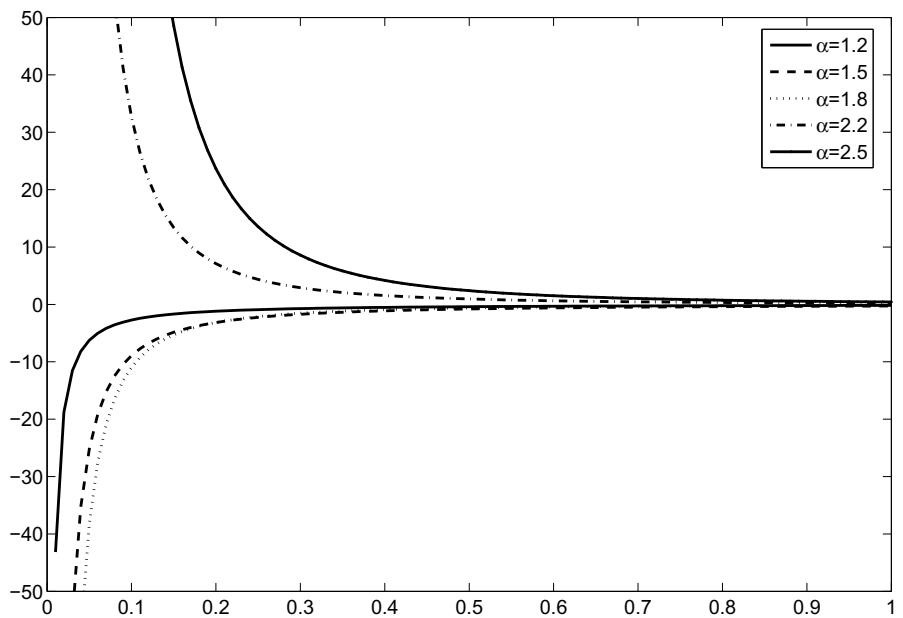
Rysunek 2.4: Pochodna rzędów $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ funkcji stałej

Na rysunku 2.4 przedstawiony jest przebieg pochodnych funkcji stałej rzędu $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ w zależności od czasu. Na rysunku 2.5 natomiast przedstawiony jest przebieg pochodnych funkcji stałej rzędu $\alpha = 1.2, 1.5, 1.8, 2.2, 2.5$ w zależności od czasu. Jak można zauważyć, wartość tych pochodnych dąży do zera, gdy czas dąży do nieskończoności.

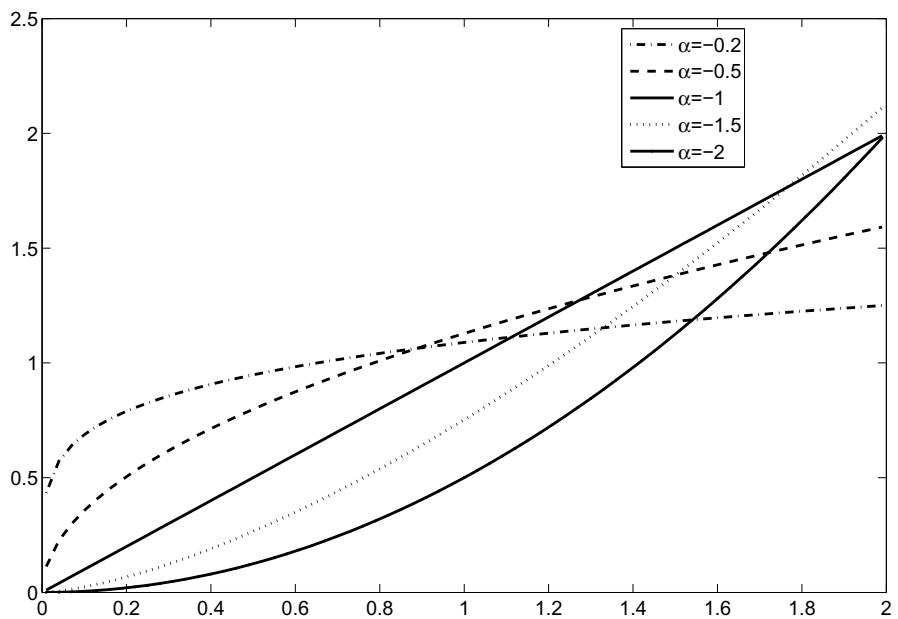
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} 1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)t^\alpha} = 0 \quad \text{dla } \alpha > 0$$

Dla całkowitego rzędu pochodnych wartość ich równa jest zero, ze względu na osobliwość funkcji $\Gamma(x)$ dla liczb całkowitych ujemnych i zera.

Na rysunku 2.6 natomiast przedstawiony jest przebieg pochodnych (całek) rzędu $\alpha = -0.2, -0.5, -1, -1.5, -2$ w zależności od czasu.



Rysunek 2.5: Pochodna rzędów $\alpha = 1.2, 1.5, 1.8, 2.2, 2.5$ funkcji stałej



Rysunek 2.6: Pochodna rzędów $\alpha = -0.2, -0.5, -1, -1.5, -2$ funkcji stałej

2.3.6 Transmitancja i charakterystyki członów ułamkowego rzędu

W podrozdziale tym zostanie przedstawiony zapis transmitancyjny układu ułamkowego rzędu wraz z przykładowymi charakterystykami częstotliwościowymi, logarytmicznymi amplitudy i fazy (Bode'go) podstawowych członów dynamicznych ułamkowego rzędu.

Transmitancja ciągła ułamkowego rzędu

Definicja 7 [162] *Transmitancja ciągła ułamkowego rzędu dana jest następującą relacją:*

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \cdots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_0 s^{\alpha_0}}$$

gdzie $Y(s)$ jest transformata Laplace'a sygnału wyjściowego, $U(s)$ jest transformata Laplace'a sygnału wejściowego, przy założeniu zerowych warunków początkowych ($y_0 = 0, u_0 = 0$). Liczby $\alpha_i \in \mathbb{R}$ dla $i = 0, 1, \dots, n$ i $\beta_j \in \mathbb{R}$ dla $j = 0, 1, \dots, m$ są stopniami potęg zmiennej s , odpowiednio mianownika i licznika transmitancji. Liczby $a_i \in \mathbb{R}$ dla $i = 0, 1, \dots, n$ i $b_j \in \mathbb{R}$ dla $j = 0, 1, \dots, m$ natomiast są współczynnikami odpowiednio jej mianownika i licznika.

■

Charakterystyka Bode'go członu całkującego ułamkowego rzędu

Człon całkujący ułamkowego rzędu dany jest następującą transmitancją:

$$G(s) = \frac{1}{Ts^\alpha} \quad (2.17)$$

Transmitancja widmowa takiego członu dana jest następująco:

$$G(j\omega) = \frac{1}{T(j\omega)^\alpha} = \frac{1}{T\omega^\alpha(\cos\frac{\pi}{2}\alpha + j\sin\frac{\pi}{2}\alpha)} \quad (2.18)$$

Moduł transmitancji widmowej dany jest następująco [80]:

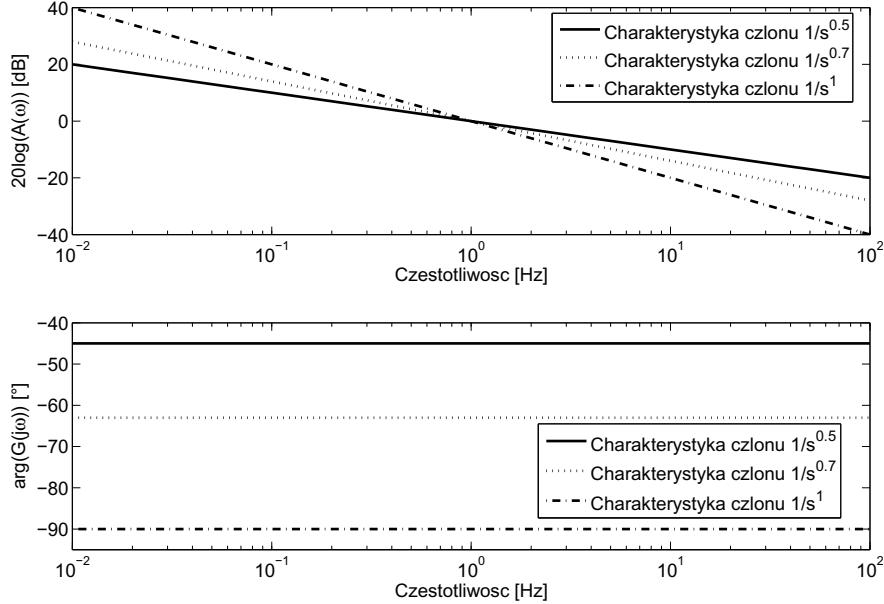
$$A(\omega) = \sqrt{\frac{(\cos^2\frac{\pi}{2}\alpha + \sin^2\frac{\pi}{2}\alpha)}{T\omega^{2\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{T}\omega^\alpha} \quad (2.19)$$

Logarytm modułu integratora jest następujący:

$$M(\omega) = -20\log(T) - \alpha 20\log(\omega) \quad (2.20)$$

Podobnie otrzymujemy funkcję przesunięcia fazowego

$$\varphi(\omega) = \arg \left[\frac{1}{T(\omega j)^\alpha} \right] = \arg \left[\frac{1}{T\omega^\alpha} j^{-\alpha} \right] = -\alpha \frac{\pi}{2} [\text{rad}]$$



Rysunek 2.7: Charakterystyka Bode'go transmitancji $\frac{1}{s^\alpha}$ dla $\alpha = 0.5, 0.7, 1$.

Przykładowe charakterystyki Bode'go członu całkującego dla $\alpha = 0.5, 0.7, 1$ przedstawione są na rysunku 2.7. Jak można zauważyć, co wynika także ze wzoru 2.20, nachylenie charakterystyki zależy od rzędu całkowania. Spadek wzmocnienia wynosi $\alpha 20\text{db/dek}$. Przesunięcie fazowe członu jest stałe i także proporcjonalne do rzędu $-\alpha \frac{\pi}{2}$.

Charakterystyka Bode'go członu inercyjnego

Człon inercyjny ułamkowego rzędu dany jest następująco:

$$G(s) = \frac{1}{Ts^\alpha + 1}$$

Jego transmitancja widmowa dana jest jako

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{T(j\omega)^\alpha + 1} = \frac{1}{T\omega^\alpha (\cos \frac{\pi}{2}\alpha + j \sin \frac{\pi}{2}\alpha) + 1} \\ &= \frac{(T\omega^\alpha \cos \frac{\pi}{2}\alpha + 1) - j T\omega^\alpha \sin \frac{\pi}{2}\alpha}{(T\omega^\alpha \cos \frac{\pi}{2}\alpha + 1)^2 + T^2 \omega^{2\alpha} \sin^2 \frac{\pi}{2}\alpha} \end{aligned}$$

Moduł transmitancji widmowej natomiast ma postać [80]:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^{2\alpha} + 2T\omega\cos\frac{\pi}{2}\alpha + 1}} \quad (2.21)$$

skąd otrzymujemy jego wartości dla przypadków szczególnych:

$$A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \ll \frac{1}{T} \\ \frac{1}{T\omega^\alpha} & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

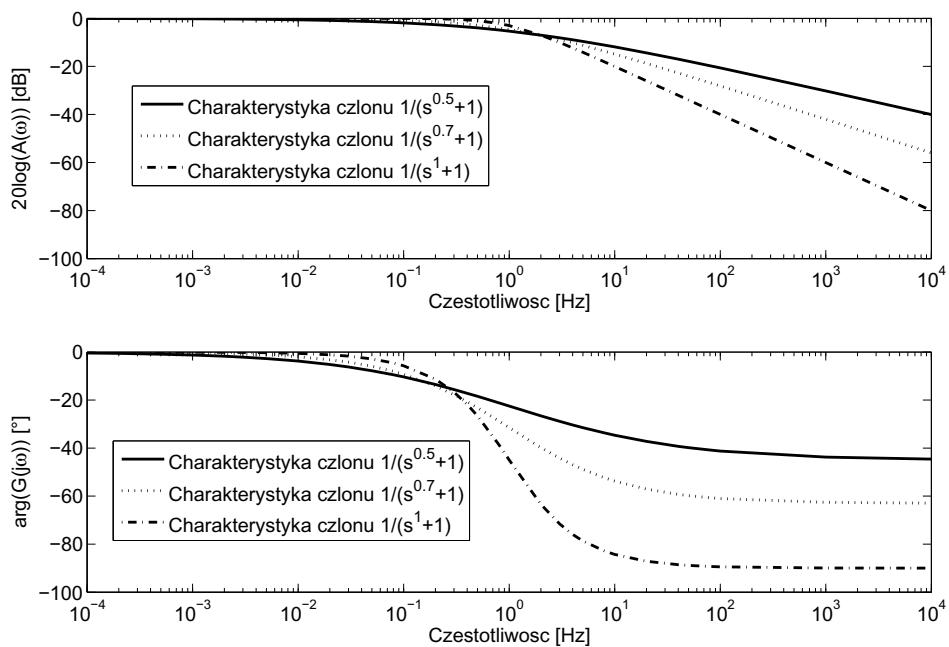
Logarytm modułu dany jest wtedy następująco:

$$M(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{T} \\ -20\log(T) - \alpha 20\log(\omega) & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

Przesunięcie fazowe określa natomiast następująca relacja:

$$\varphi(\omega) = \arctg \left[-\frac{T\omega^\alpha \sin\frac{\pi}{2}\alpha}{T\omega^\alpha \cos\frac{\pi}{2}\alpha + 1} \right]$$

Rysunek 2.8 przedstawia przykładowe charakterystyki członu inercyjnego dla $T = 1$ i $\alpha = 0.5, 0.7, 1$. Jak można zauważyć, część opadająca charakterystyki amplitudy ma nachylenie proporcjonalne do rzędu układu. Charakterystyka przesunięcia fazowego ma wartość końcową zależną od rzędu członu.



Rysunek 2.8: Charakterystyki Bode'go członu inercyjnego dla $\alpha = 0.5, 0.7, 1$.

Charakterystyka członów proporcjonalnego i całkującego połączonych równolegle

Transmitancja członów proporcjonalnego i całkującego połączonych równolegle (która jest później użyta przy modelowaniu superkondensatora) dana jest następująco:

$$G(s) = 1 + \frac{1}{Ts^\alpha}$$

Transmitancja widmowa jest następująca:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= 1 + \frac{1}{T(j\omega)^\alpha} = \frac{T\omega^\alpha(\cos\frac{\pi}{2}\alpha + j\sin\frac{\pi}{2}\alpha) + 1}{T\omega^\alpha(\cos\frac{\pi}{2}\alpha + j\sin\frac{\pi}{2}\alpha)} \\ &= \frac{T\omega^\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\alpha - j\sin\frac{\pi}{2}\alpha}{T\omega^\alpha} \end{aligned}$$

Moduł transmitancji widmowej natomiast ma postać

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{T^2\omega^{2\alpha} + 2T\omega\cos\frac{\pi}{2}\alpha + 1}{T\omega^\alpha}} = \sqrt{1 + \frac{2T\omega\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{T\omega^\alpha} + \frac{1}{T^2\omega^{2\alpha}}}$$

Dla warunków szczególnych otrzymujemy następujące wartości logarytmu modułu

$$A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \gg \frac{1}{T} \\ \frac{1}{T\omega^\alpha} & \omega \ll \frac{1}{T} \end{cases}$$

Ostatecznie otrzymujemy następującą relację:

$$M(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \gg \frac{1}{T} \\ -20\log(T) - \alpha 20\log(\omega) & \omega \ll \frac{1}{T} \end{cases}$$

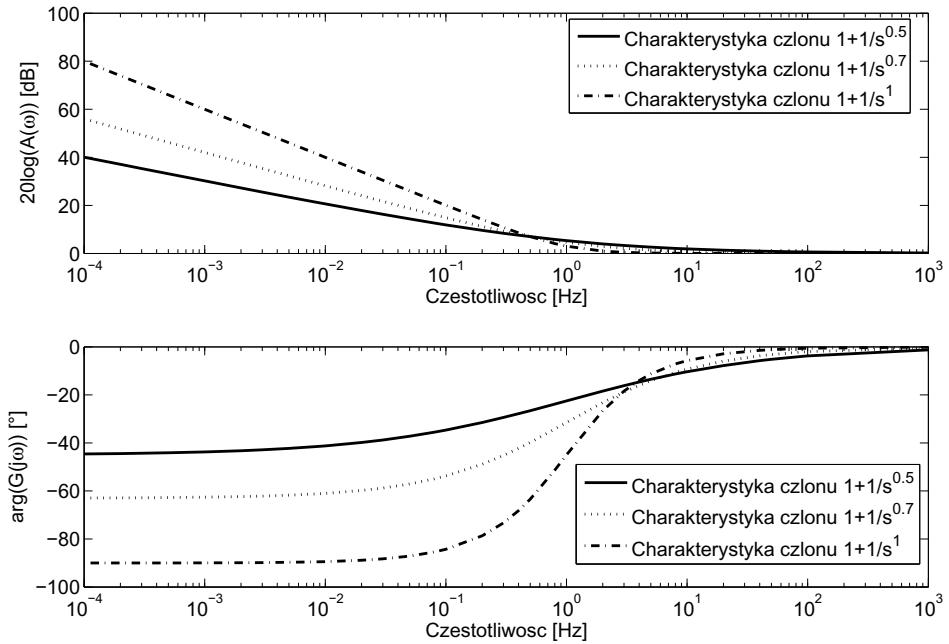
Przesunięcie fazowe określa natomiast następująca relacja:

$$\varphi(\omega) = \arctg \left[-\frac{T\omega^\alpha \cos\frac{\pi}{2}\alpha + 1}{T\omega^\alpha \sin\frac{\pi}{2}\alpha} \right]$$

Rys. 2.9 przedstawia przykładowe charakterystyki Bode'go dla tego członu i $T = 1$ oraz $\alpha = 0.5, 0.7, 1$.

2.3.7 Odpowiedź skokowa układu w zapisie transmitancyjnym

Dla przypadku, kiedy rzędy pochodnych danego układu są całkowitymi krotnościami ułamkowego rzędu podstawowego (ang. commensurate systems, układy współmierne), transmitancja ma postać:



Rysunek 2.9: Charakterystyka Bode'go członu $1 + \frac{1}{s^\alpha}$ dla $\alpha = 0.5, 0.7, 1$.

$$G(s) = \frac{b_{N-1}s^{(N-1)\alpha} + \dots + b_1s^\alpha + b_0}{s^{N\alpha} + a_{N-1}s^{(N-1)\alpha} + \dots + a_1s^\alpha + a_0}$$

Dla pierwiastków pojedynczych mianownika transmitancję można przedstawić jako

$$G(s) = \sum_{j=1}^p \frac{r_j}{s^\alpha - \lambda_j}$$

Odpowiedź tak zdefiniowanej transmitancji na skok jednostkowy jest następująca:

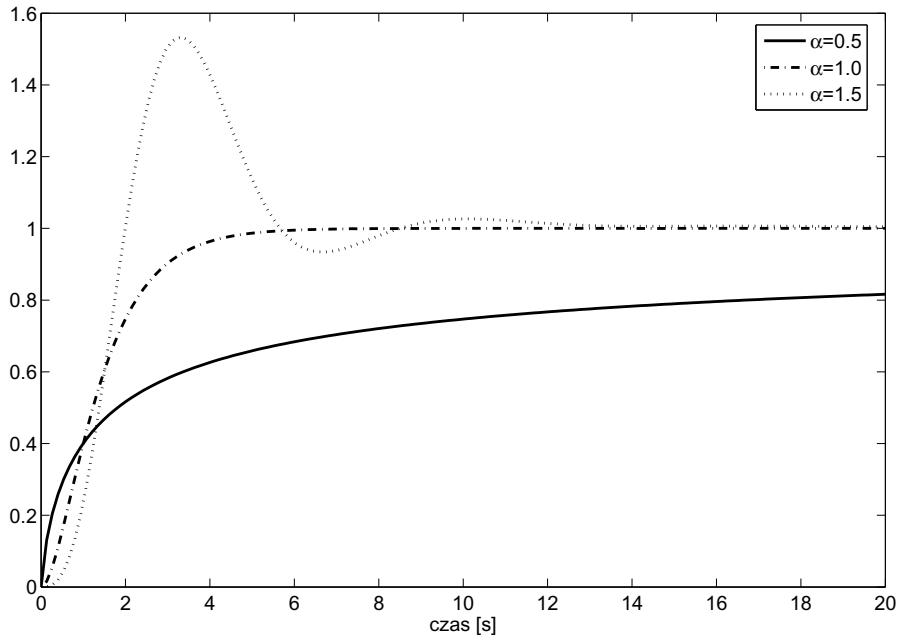
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{j=1}^p \frac{r_j}{s(s^\alpha - \lambda_j)} \right] = \sum_{j=1}^p r_j t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(\lambda_j t^\alpha)$$

Przykład 4 Dana jest transmitancja

$$G(s) = \frac{2}{s^{2\alpha} + 3s^\alpha + 2} = \frac{2}{s^\alpha + 1} - \frac{2}{s^\alpha + 2}$$

Odpowiedź układu na skok jednostkowy jest następująca:

$$h(t) = 2t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-t^\alpha) - 2t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-2t^\alpha)$$



Rysunek 2.10: Odpowiedź skokowa układu dla $\alpha = 0.5, 1, 1.5$

2.3.8 Liniowy ciągły układ ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu

Definicja 8 [211] *Liniowym ciągłym układem ułamkowego rzędu opisanym w przestrzeni stanu (dla przypadku tego samego rzędu wszystkich równań stanu) nazywamy układ dany następującymi równaniami:*

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) + Du_k \end{aligned}$$

gdzie $A_d \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times N}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, m jest liczbą wejść układow, p jest liczbą wejść układow, N jest liczbą równań stanu układow, a $\alpha \in \mathbb{R}$ jest rzędem układow.

■

Z opisu w przestrzeni stanu do opisu transmitancyjnego możemy przejść korzystając z następującej relacji:

$$G(s) = C(I s^n - A)^{-1} B + D$$

Odpowiedź takiego układu dana jest następującą relacją [211]:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \Phi(t) * [Bu(t)] = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (2.22)$$

gdzie $f(t) * g(t)$ jest splotem funkcji $f(t)$ i $g(t)$ danym następującą relacją:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

natomiast $\Phi(t)$ jest macierzą transzycji układu w chwili t i jest dana następująco:

$$\Phi(t) = E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} \quad (2.23)$$

Funkcja $E_\alpha(At^\alpha)$ jest macierzową funkcją Mittaga-Lefflera, będącą uogólnieniem macierzowej funkcji eksponencjalnej e^{At} .

Definicja 9 [85] *Układ ciągły nazywamy sterowalnym, jeżeli dla dowolnego stanu początkowego $x(0)$ istnieje chwila $t_f > 0$ oraz sterowanie $u(t)$ na przedziale $[0, t_f]$ takie, że $x(t_f) = 0$.*

Twierdzenie 4 [211] *Układ ciągły ułamkowego rzędu jest sterowalny, gdy:*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{N-1}B \end{bmatrix} = N$$

■

Dowód znajduje się w pracy [211].

Definicja 10 [85] *Układ ciągły nazywamy obserwowlanym, jeżeli istnieje chwila $t_f > 0$ taka, że dla danych $u(t)$ i $y(t)$ w przedziale $[0, t_f]$ można wyznaczyć stan początkowy x_0 tego układu.*

Twierdzenie 5 [211] *Układ ciągły ułamkowego rzędu jest obserwowlany wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} = N$$

■

Dowód znajduje się w pracy [211].

2.4 Układy dyskretnie: rachunek różnicowy ułamkowego rzędu

W rozdziale tym zostanie zaprezentowane krótkie wprowadzenie do zagadnienia rachunku różnicowego ułamkowego rzędu.

W przeciwnieństwie do układów ciągłych, w układach dyskretnych istnieje jedna definicja różnicicy ułamkowego rzędu. Definicja ta jest uogólnieniem tradycyjnej definicji różnicicy całkowitego rzędu na rząd ułamkowy i jest analogiczna do uogólnienia zawartego w definicji G-L dla ustalonego kroku h .

Różnica pierwszego rzędu (różnica wsteczna) definiowana jest następująco:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad (2.24)$$

różnica (wsteczna) drugiego rzędu natomiast jako

$$\Delta^2 x_k = x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2} \quad (2.25)$$

Różnicę dowolnego (całkowitego) rzędu określa wzór

$$\Delta^n x_k = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} x_{k-r} \quad (2.26)$$

Korzystając z tego (analogicznie jak dla definicji G-L), iż $\binom{n}{r}$ jest równy 0, dla $r > n$ można to wyrażenie zapisać w postaci następującej definicji:

Definicja 11 Różnica (wstecz) ułamkowego rzędu dana jest następująco:

$$\Delta^n x_k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{j} x_{k-j}$$

gdzie $n \in \mathbb{R}$, jest ułamkowym rzędem, \mathbb{R} jest zbiorem liczb rzeczywistych, $k \in \mathbb{N}$ jest numerem próbki, dla której różnica jest obliczana, x_k jest różnicowaną funkcją dyskretną.

Współczynnik $\binom{n}{j}$ natomiast wyznaczany jest w następujący sposób:

$$\binom{n}{j} = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = 0 \\ \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} & \text{dla } j > 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

■

Różnica ułamkowego rzędu jest więc sumą wszystkich próbek od chwili zerowej x_0 do chwili k x_k z odpowiednimi współczynnikami określonymi Definicją 11.

Przykład 5 Przykład wyznaczania różnicy ułamkowego rzędu

Dla $n = 1$ otrzymujemy znany wzór na różnicę pierwszego rzędu. Jak widać, tylko dwa współczynniki są niezerowe.

$$\Delta^1 x_k = 1x_k - 1x_{k-1} + 0x_{k-2} - 0x_{k-3} \dots$$

Dla $n = -1$ otrzymujemy sumę wszystkich próbek, czyli dyskretny odpowiednik całki pojętej dyńczej

$$\Delta^{-1} x_k = 1x_k + 1x_{k-1} + 1x_{k-2} + 1x_{k-3} \dots$$

Dla $n = 0.5$ otrzymujemy różnicę rzędu 0.5 będącą sumą ważoną wszystkich próbek

$$\Delta^{0.5} x_k = 1x_k - 0.5x_{k-1} - 0.125x_{k-2} - 0.0625x_{k-3} \dots$$

Dla $n = -0.5$ otrzymujemy natomiast

$$\Delta^{-0.5} x_k = x_k + 0.5x_{k-1} + 0.375x_{k-2} + 0.3125x_{k-3} \dots$$

Dla $n = 1.5$ otrzymujemy

$$\Delta^{1.5} x_k = x_k - 1.5x_{k-1} + 0.375x_{k-2} + 0.0625x_{k-3} \dots$$

Dla $n = -1.5$ otrzymujemy

$$\Delta^{-1.5} x_k = x_k + 1.5x_{k-1} + 1.875x_{k-2} + 2.1875x_{k-3}$$

2.4.1 Zapis macierzowy różnicy ułamkowego rzędu

W pracy [136] przedstawiony jest zapis różnicy ułamkowego rzędu w postaci macierzy współczynników.

Przyjmijmy za autorem tej pracy, że

$$b_i^{(n)} = (-1)^i \binom{n}{i} \quad (2.28)$$

Definicja różnicy ma wtedy postać

$$\Delta^n x_k = \sum_{j=0}^k b_j^{(n)} x_{k-j}$$

Możemy wtedy zapisać, że

$$\begin{bmatrix} \Delta^n f_k \\ \Delta^n f_{k-1} \\ \Delta^n f_{k-2} \\ \Delta^n f_{k-3} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_1^{(n)} & b_2^{(n)} & b_3^{(n)} & \dots \\ 0 & 1 & b_1^{(n)} & b_2^{(n)} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & b_1^{(n)} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_k \\ f_{k-1} \\ f_{k-2} \\ f_{k-3} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Macierz kwadratowa występująca w powyższym równaniu oznaczana jest jako

$$B^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & b_1^{(n)} & b_2^{(n)} & b_3^{(n)} & \dots \\ 0 & 1 & b_1^{(n)} & b_2^{(n)} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & b_1^{(n)} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Macierz ta jest zawsze nieosobliwa i zawsze istnieje jej odwrotność, która jest oznaczana jako

$$A^{(n)} = [B^{(n)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & \dots \\ 0 & 1 & a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & a_1^{(n)} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

gdzie

$$a_i^{(n)} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}$$

Otrzymujemy wtedy

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & \dots \\ 0 & 1 & a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & a_1^{(n)} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^n f_k \\ \Delta^n f_{k-1} \\ \Delta^n f_{k-2} \\ \Delta^n f_{k-3} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_k \\ f_{k-1} \\ f_{k-2} \\ f_{k-3} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Zachodzą następujące relacje pomiędzy macierzami $A^{(n)}$ i $B^{(n)}$:

$$A^{(n_1+n_2)} = A^{(n_1)} A^{(n_2)}$$

$$B^{(n_1+n_2)} = B^{(n_1)} B^{(n_2)}$$

2.4.2 Własności operatora Δ^n

Liniowość operatora Δ^n

Twierdzenie 6 [162] Operator różnicy ułamkowego rzędu Δ^n jest operatorem liniowym, czyli spełnia następującą relację

$$\Delta^n(ax_k + by_k) = \Delta^n ax_k + \Delta^n by_k \quad (2.31)$$

■

Dowód:

$$\begin{aligned} \Delta^n(ax_k + by_k) &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{j} (ax_{k-j} + by_{k-j}) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{j} ax_{k-j} + \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{j} by_{k-j} \\ &= \Delta^n ax_k + \Delta^n by_k \end{aligned}$$

□

Składanie opearatorów Δ^n

Twierdzenie 7 [162] Prawo składania operatorów dane jest następująco:

$$\Delta^n(\Delta^m x_k) = \Delta^m(\Delta^n x_k) = \Delta^{n+m} x_k \quad (2.32)$$

■ Dowód zawarty jest w pracach [136], [83].

Różnica iloczynu dwóch funkcji dyskretnych

Twierdzenie 8 [136] Różnica iloczynu dwóch funkcji dyskretnych dana jest następująco:

$$\Delta^{(n)}(f_k g_k) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i^{(n)} \Delta^{(n-i)} f_{k-i} \Delta^{(i)} g_k \quad (2.33)$$

■ Dowód znajduje się w pracy [136, podrozdział 2.1.4].

Różnica ilorazu dwóch funkcji dyskretnych

Twierdzenie 9 [136] Różnica ilorazu dwóch funkcji dyskretnych dana jest następująco:

$$\Delta^{(n)}\left(\frac{f_k}{g_k}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i^{(n)} \Delta^{(n-i)} f_{k-i} \Delta^{(i)} \frac{1}{g_k} \quad (2.34)$$

■ Dowód znajduje się w pracy [136, podrozdział 2.1.4].

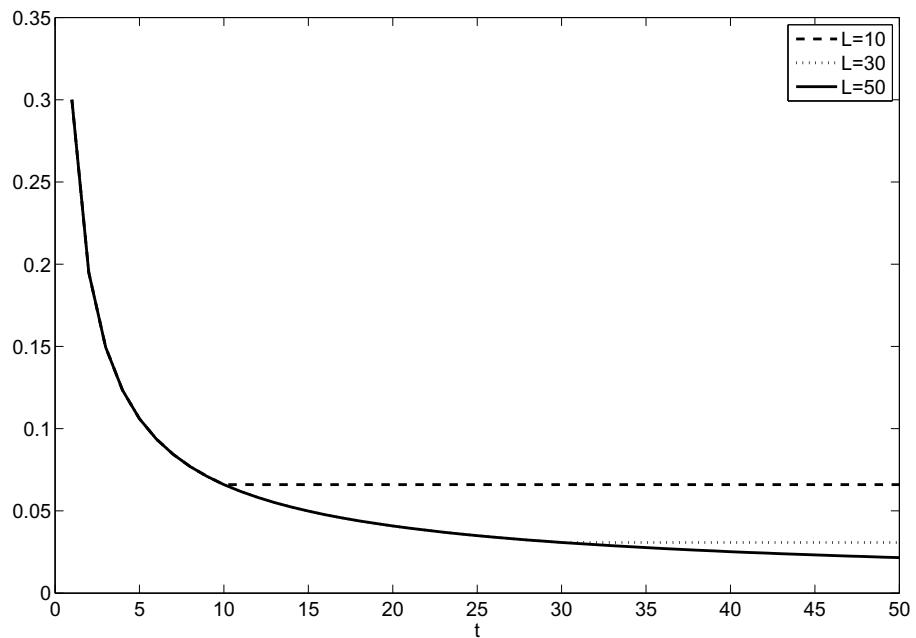
2.4.3 Implementacja praktyczna różnicy ułamkowego rzędu

Definicja różnicy ułamkowego rzędu zakłada sumowanie aktualnej i wszystkich poprzednich próbek z odpowiednimi współczynnikami. Rozpatrywana liczba próbek dąży do nieskończoności, gdy czas pracy układu także dąży do nieskończoności. Powoduje to oczywiste problemy z realizacją takiego sumowania, tak obliczeniowe, jak i zajętości pamięci. Jednakże współczynnik $\binom{n}{j}$ maleje wraz ze wzrostem j , czyli dla odległych w czasie próbek. Powoduje to, że im starsze są próbki, tym mają mniejszy wpływ na wynik końcowy. Dlatego też w realizacji praktycznej możemy ograniczyć liczbę sumowanych próbek do pewnej zadanej liczby L , która będzie nazywana długością implementacji.

Definicja różnicy ułamkowego rzędu przyjmie wtedy następującą postać:

$$\Delta^n x_k = \begin{cases} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{j} x_{k-j} & \text{dla } k < L \\ \sum_{j=0}^L (-1)^j \binom{n}{j} x_{k-j} & \text{dla } k \geq L \end{cases}$$

Ograniczenie liczby próbek branych pod uwagę przy sumowaniu ma jednak wpływ na dokładność wyznaczania różnicy. Na rysunku 2.11 przedstawiony jest przykład wyznaczania różnicy ułamkowego rzędu $\alpha = 0.7$ funkcji skoku jednostkowego. Jak można zauważyć, różnica wyznaczana jest dokładnie tylko do chwili równej L . Dla chwil większych od L różnica przyjmuje wartość stałą.



Rysunek 2.11: Porównanie realizacji praktycznych różnicy rzędu $\alpha = 0.7$ dla $L = 10, 30, 50$

Implementacja praktyczna jest więc kompromisem pomiędzy dokładnością implementacji zależną od długości implementacji L , a fizyczną możliwością jej realizacji, ograniczoną poprzez rozmiar zajmowanej pamięci i szybkość działania. W praktyce dobre rezultaty są osiągane dla L rzędu kilkuset.

Rozdział 3

Dyskretny układ dynamiczny ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu

W niniejszym rozdziale zostanie przedstawione uogólnienie tradycyjnego dyskretnego układu dynamicznego opisanego w przestrzeni stanu całkowitego (pierwszego) rzędu na rząd ułamkowy. W rozdziale tym zostaną także przedstawione podstawowe własności nowo zdefiniowanego układu. Podrozdział 3.1 zawiera uogólnienia dyskretnych liniowych i nieliniowych, deterministycznych i stochastycznych układów całkowitego (pierwszego) rzędu opisanych w przestrzeni stanu na dyskretne układy ułamkowego rzędu w przestrzeni stanu. W podrozdziale 3.2 przedstawione są warunki stabilności dla dyskretnego linowego układu ułamkowego rzędu. W podrozdziale 3.3 omówione jest zagadnienie osiągalności, sterowalności i obserwonalności dla dyskretnych układów ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu. W podrozdziale 3.4 wprowadzony jest zapis transmitancyjny dla dyskretnych układów liniowych ułamkowego rzędu, ich postacie kanoniczne oraz odpowiadające im postacie równań różnicowych. Przedstawiony jest także sposób wyznaczania macierzy przekształcenia na podstawie macierzy obserwonalności lub sterowalności.

3.1 Zdefiniowanie dyskretnych układów układu ułamkowego rzędu opisanego w przestrzeni stanu

Rozważmy tradycyjny dyskretny układ dynamiczny całkowitego (pierwszego) rzędu w przestrzeni stanu opisany równaniami:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (3.1)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (3.2)$$

gdzie $x_k \in \mathbb{R}^N$, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times N}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, m jest liczbą wejść układu, $y_k \in \mathbb{R}^p$, p jest liczbą wyjść układu, $k \in (0, 1, 2, \dots)$ chwilami czasowymi, dla których rozpatrywany jest układ, a N jest liczbą równań stanu układu (wymiarem wektora stanu).

Równanie aktualizacji wektora stanu można przedstawić jako

$$\Delta^1 x_{k+1} = A_d x_k + Bu_k \quad (3.3)$$

gdzie $A_d = A - I$, a Δ_k^1 jest różnicą rzędu 1 równą

$$\Delta^1 x_{k+1} = x_{k+1} - x_k. \quad (3.4)$$

Wartość kolejnego wektora stanu można wyznaczyć z zależności

$$x_{k+1} = \Delta^1 x_{k+1} + x_k \quad (3.5)$$

Można to uogólnić na różnicę niecałkowitego rzędu, która jest dyskretnym odpowiednikiem różniczki ułamkowego rzędu (def. Grünwalda-Letnikowa), przez co otrzymujemy dyskretny układ ułamkowego rzędu w przestrzeni stanu.

$$\Delta^n x_{k+1} = A_d x_k + Bu_k \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Delta^n x_{k+1} \\ &- \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} x_{k-j+1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

gdzie n może być liczbą niecałkowitą, ułamkowym rzędem układu.

Dzięki takiemu zabiegowi otrzymujemy układ ułamkowego rzędu w przestrzeni stanu, złożony z układu trzech równań:

- obliczającego ułamkową różnicę danej zmiennej stanu (3.6)
- wyznaczającego kolejną zmienną stanu (korzystając z definicji różnicy ułamkowego rzędu) (3.7).
- równania wyjścia (takie same jak w (3.2)).

3.1.1 Dyskretny liniowy układ opisany w przestrzeni stanu

Dyskretny układ w przestrzeni stanu można więc zapisać w postaci następującej definicji:

Definicja 12 *Dyskretnym, liniowym układem dynamicznym ułamkowego rzędu opisanym w przestrzeni stanu (zwany układem standardowym) nazywamy układ dany następującymi równaniami:*

$$\begin{aligned}\Delta^n x_{k+1} &= A_d x_k + B u_k \\ x_{k+1} &= \Delta^n x_{k+1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} x_{k-j+1} \\ y_k &= C x_k + D u_k\end{aligned}$$

gdzie $x_k \in \mathbb{R}^N$, $A_d \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times N}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, m jest liczbą wejść układa, p jest liczbą wejść układa, N jest liczbą równań stanu układa, $k \in \mathbb{Z}_+$ chwilami czasowymi, dla których rozpatrywany jest układ, a $n \in \mathbb{R}$ jest rzędem układu.

■

Rozwiązywanie równania systemowego tego układu jest następujące [86]:

$$x_k = \Phi(k)x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1)Bu_j \quad (3.8)$$

gdzie $\Phi(k)$ jest macierzą tranzycji układu daną wyrażeniem

$$\Phi(k+1) = (A_d + I \binom{n}{1})\Phi(k) - \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} \Phi(k+1-j) \quad (3.9)$$

przy warunku początkowym $\Phi(0) = I$.

Liniowość układu

Układ dynamiczny nazywamy liniowym, jeżeli spełnia zasadę superpozycji.

Definicja 13 *Układ spełnia zasadę superpozycji, jeżeli odpowiedź na wymuszenie*

$$u = \sum_{i=1}^m a_i u_i$$

będące kombinacją liniową wymuszeń u_1, u_2, \dots, u_m , a a_i są liczbami rzeczywistymi (przy założeniu, że $\sum_{i=1}^m |a_i| \neq 0$), równa się kombinacji liniowej

$$y = \sum_{i=1}^m a_i y_i$$

odpowiedzi y_1, y_2, \dots, y_m , przy czym y_i jest odpowiedzią tego układu na wymuszenie u_i .

Twierdzenie 10 *Układ dany Definicją 12 spełnia zasadę superpozycji.*

■

Dowód:

Niech

$$u_k = \sum_{i=1}^m a_i u_{i,k}$$

gdzie u_k jest wejściem układu, a $u_{i,k}$ i -tą składową wejścia układu.

Układ z wymuszeniem u_k dany jest następująco:

$$\begin{aligned}\Delta^n x_{k+1} &= A_d x_k + B u_k \\ x_{k+1} &= \Delta^n x_{k+1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} x_{k-j+1} \\ y_k &= C x_k + D u_k\end{aligned}$$

Rozwiązanie takiego układu jest następujące:

$$x_k = \Phi(k) x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1) B u_j$$

skąd można wyznaczyć odpowiedź (przy założeniu zerowych warunków początkowych)

$$y_k = C \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1) Bu_j + Du_k$$

Układ dla składowych $u_{i,k}$ dany jest następująco:

$$\begin{aligned}\Delta^n x_{i,k+1} &= A_d x_{i,k} + B u_{i,k} \\ x_{i,k+1} &= \Delta^n x_{i,k+1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} x_{i,k-j+1} \\ y_{i,k} &= C x_{i,k} + D u_{i,k}\end{aligned}$$

Rozwiązanie tego układu jest następujące:

$$x_{i,k} = \Phi(k) x_{i,0} + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1) Bu_{i,j}$$

skąd można wyznaczyć odpowiedź tego układu (przy założeniu zerowych warunków początkowych)

$$y_{i,k} = C \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1) Bu_{i,j} + D u_{i,k}$$

Rozwiązanie układu dla wymuszenia będącego sumą wymuszeń składowych, przy założeniu zerowych warunków początkowych jest następujące:

$$x_k = \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1) B \sum_{i=1}^m a_i u_{i,j}$$

co można zapisać jako

$$x_k = \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1) Bu_{i,j}$$

a następnie

$$x_k = \sum_{i=1}^m a_i x_{i,k}$$

Odpowiedź układu przyjmuje wtedy postać

$$\begin{aligned}
y_k &= Cx_k + Du_k = C \sum_{i=1}^m a_i x_{i,k} + Du_k \\
&= \sum_{i=1}^m a_i (Cx_{i,k} + Du_{i,k}) = \sum_{i=1}^m a_i y_{i,k}
\end{aligned}$$

□

Dla niezerowych warunków początkowych układ nie spełnia zasad superpozycji, analogicznie do układów całkowitego rzędu.

Przekształcanie zmiennych stanu układu

Jedną z podstawowych własności tak zdefiniowanego układu jest możliwość transformacji zmiennych stanu tego układu, tworząc w ten sposób nową (np. bardziej dogodną) postać danego układu.

Lemat 1 *Dla każdego układu danego Definicja 12 istnieje taka nieosobliwa macierz $P \in \mathbb{R}^{N \times N}$, która określa następującą transformację zmiennych stanu $z_k = Px_k$ w ten sposób, że układ opisany nowymi zmiennymi stanu z_k ma następującą postać:*

$$\begin{aligned}
\Delta^n z_{k+1} &= A'_d z_k + B' u_k \\
z_{k+1} &= \Delta^n z_{k+1} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} z_{k-j+1} \\
y_k &= C' z_k + D u_k
\end{aligned}$$

gdzie $A'_d = P A_d P^{-1}$, $B' = P B$, $C' = C P^{-1}$

■

Dowód:

Mnożąc lewostronnie dwa pierwsze równania Definicji 12 przez macierz P otrzymujemy

$$\begin{aligned}
P \Delta^n x_{k+1} &= P A_d x_k + P B u_k \\
P x_{k+1} &= P \Delta^n x_{k+1} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} P x_{k-j+1}
\end{aligned}$$

Używając relacji $z_k = Px_k$ i $x_k = P^{-1}z_k$ i liniowości operatora różnicy otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Delta^n z_{k+1} &= PA_d P^{-1} z_k + PB u_k \\ z_{k+1} &= \Delta^n z_{k+1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} z_{k-j+1} \\ y_k &= CP^{-1} z_k + Du_k\end{aligned}$$

co jest tezą Lematu 1.

□

Przekształcenie macierzy $A'_d = PA_d P^{-1}$ jest przekształceniem macierzy przez podobieństwo (dlatego też całość transformacji nazywana jest transformacją przez podobieństwo). Przekształcenie to nie zmienia wartości własnych macierzy A_d [84].

Układ dany Definicją 12 możemy także zapisać w formie nieskończoność-wymiarowego układu pierwszego rzędu.

Definicja 14 Postacią nieskończoność wymiarową dyskretnego układu dynamicznego ułamkowego rzędu opisanego w przestrzeni stanu nazywamy następujący nieskończoność wymiarowy układu pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \end{bmatrix} &= \mathbb{A} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \\ \vdots \end{bmatrix} + \mathbb{B} u_k \\ y_k &= \mathbb{C} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \\ \vdots \end{bmatrix}\end{aligned}$$

gdzie

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} (A_d + \binom{n}{1} I) & -(-1)^2 \binom{n}{2} I & -(-1)^3 \binom{n}{3} I & \dots \\ I & 0 & 0 & \dots \\ 0 & I & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

□

Postać nieskończonie wymiarowego układu pierwszego rzędu jest bardzo przydatna przy badaniu stabilności układu. Przykładowe odpowiedzi układu danego Definicją 12 pokazane są w przykładzie 6.

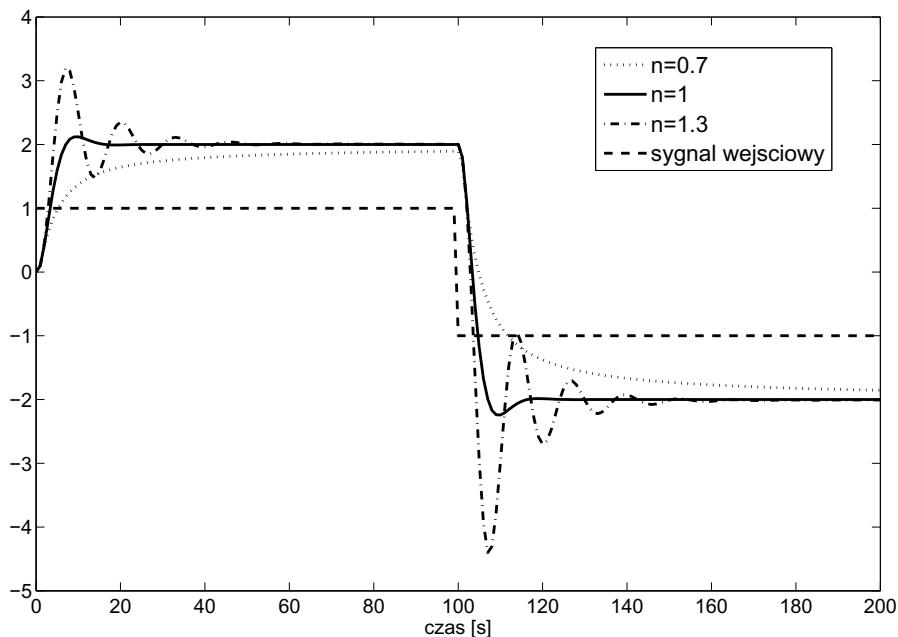
Przykład 6 Dany jest układ określony następującymi macierzami:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.15 & -0.6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

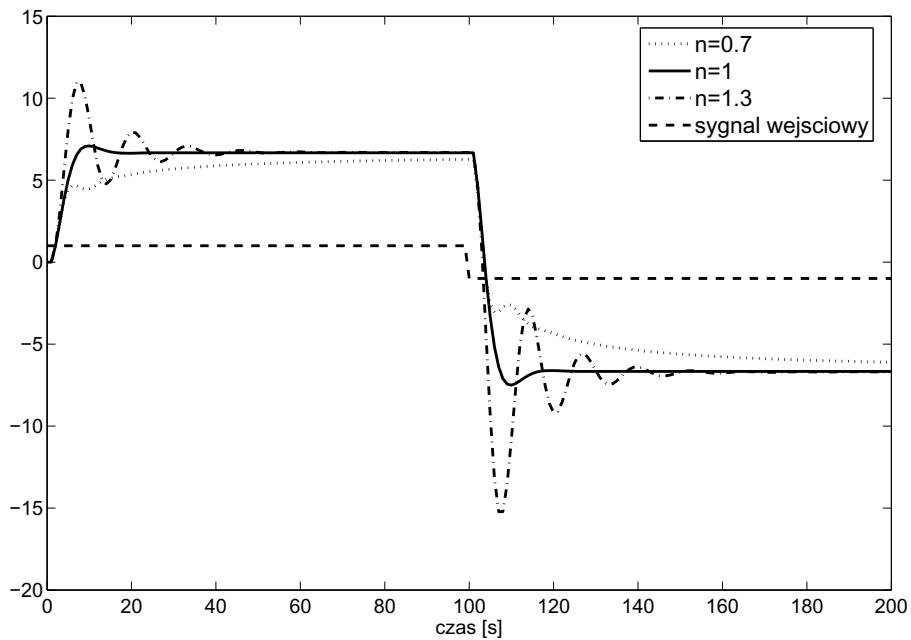
$$C = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

dla różnych wartości rzędu układu $n = 0.7, 1, 1.3$;

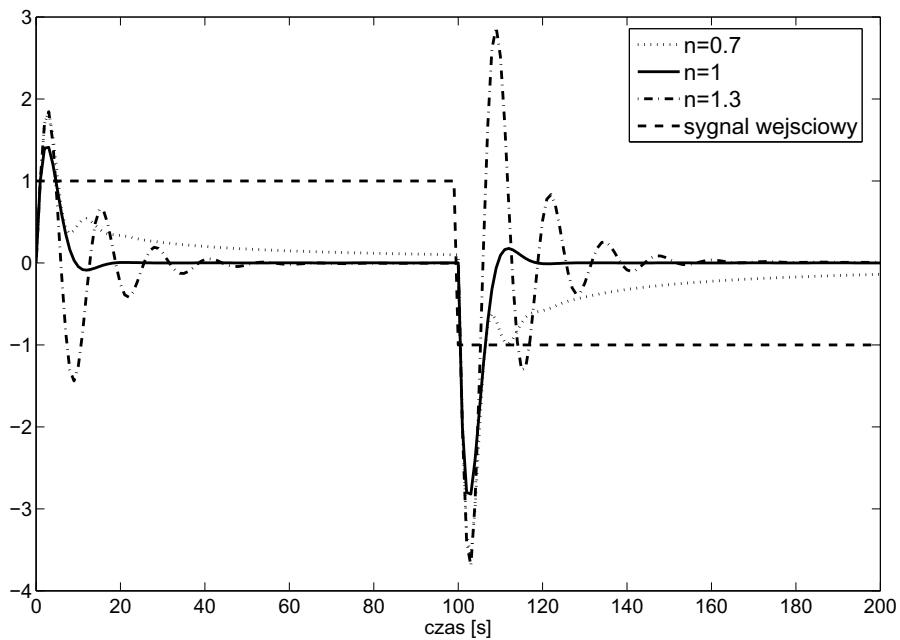
Odpowiedzi tych układów na wymuszenie prostokątne są przedstawione na Rys. 3.1.



Rysunek 3.1: Przykładowe odpowiedzi układu danego przykładem 6



Rysunek 3.2: Przykładowe przebiegi zmiennej stanu x_1 układu danego przykładem 6



Rysunek 3.3: Przykładowe przebiegi zmiennej stanu x_2 układu danego przykładem 6

3.1.2 Uogólniony dyskretny liniowy układ opisany w przestrzeni stanu

Dla układu, w którym równania stanu nie mają tego samego rzędu, układ możemy zdefiniować w następujący sposób.

Definicja 15 Uogólnionym dyskretnym układem dynamicznym ułamkowego rzędu opisanym w przestrzeni stanu nazywamy układ dany następującymi równaniami:

$$\begin{aligned}\Delta^{\Upsilon} x_{k+1} &= A_d x_k + B u_k \\ x_{k+1} &= \Delta^{\Upsilon} x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j} \\ y_k &= C x_k + D u_k\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Upsilon_j &= \text{diag} \left[\begin{array}{ccc} \binom{n_1}{j} & \dots & \binom{n_N}{j} \end{array} \right] \\ \Delta^{\Upsilon} x_{k+1} &= \left[\begin{array}{ccc} \Delta^{n_1} x_{1,k+1} & \dots & \Delta^{n_N} x_{N,k+1} \end{array} \right]^T \\ \mathcal{N} &= \left[\begin{array}{ccc} n_1 & \dots & n_N \end{array} \right]^T\end{aligned}$$

oraz $x_k \in \mathbb{R}^N$, $A_d \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times N}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $\Upsilon_k \in \mathbb{R}^{N \times N}$, m jest liczbą wejść układow, p jest liczbą wejść układow, N jest liczbą równań stanu układow, $k \in \mathbb{Z}_+$ chwilami czasowymi, dla których rozpatrywany jest układ, a $\mathcal{N} \in \mathbb{R}^N$ jest wektorem rzędów równań układu.

□

Rozwiązań takiego układu jest następujące:

$$x_k = \Phi^{\Upsilon}(k)x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{\Upsilon}(k-j-1)B u_j \quad (3.10)$$

gdzie $\Phi(k)$ jest macierzą tranzycji układu daną wyrażeniem

$$\Phi^{\Upsilon}(k+1) = (A_d + \Upsilon_1)\Phi^{\Upsilon}(k) - \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \Phi^{\Upsilon}(k+1-j) \quad (3.11)$$

przy warunku początkowym $\Phi^{\Upsilon}(0) = I$.

Twierdzenie 11 Układ dany Definicją 15 spełnia zasadę superpozycji.

■

Dowód:

Niech

$$u_k = \sum_{i=1}^m a_i u_{i,k}$$

gdzie u_k jest wejściem układu, a $u_{i,k}$ i -tą składową wejścia.

Rozwiązańe układu jest następujące:

$$x_k = \Phi^\Upsilon(k)x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^\Upsilon(k-j-1)Bu_j$$

skąd można wyznaczyć odpowiedź (przy założeniu zerowych warunków początkowych)

$$y_k = C \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^\Upsilon(k-j-1)Bu_j + Du_k$$

Rozwiązańe układu dla i -tej składowej jest następujące:

$$x_{i,k} = \Phi^\Upsilon(k)x_{i,0} + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^\Upsilon(k-j-1)Bu_{i,j}$$

skąd można wyznaczyć odpowiedź układu dla i -tej składowej (przy założeniu zerowych warunków początkowych)

$$y_{i,k} = C \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^\Upsilon(k-j-1)Bu_{i,j} + Du_{i,k}$$

Rozwiązańe układu dla wymuszenia będącego sumą wymuszeń składowych i przy założeniu zerowych warunków początkowych jest następujące:

$$x_k = \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^\Upsilon(k-j-1)B \sum_{i=1}^m a_i u_{i,j}$$

co można zapisać jako

$$x_k = \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^\Upsilon(k-j-1)Bu_{i,j}$$

a następnie

$$x_k = \sum_{i=1}^m a_i x_{i,k}$$

odpowiedź układu przyjmuje wtedy postać

$$\begin{aligned}
y_k &= Cx_k + Du_k = C \sum_{i=1}^m a_i x_{i,k} + Du_k \\
&= \sum_{i=1}^m a_i (Cx_{i,k} + Du_{i,k}) = \sum_{i=1}^m a_i y_{i,k}
\end{aligned}$$

□

Dla niezerowych warunków początkowych, analogicznie jak układy całkowitego rzędu, układ dany Definicją 15 nie spełnia zasady superpozycji.

Układ taki możemy także zapisać w postaci nieskończenie wymiarowego układu pierwszego rzędu

Definicja 16 Postacią nieskończenie wymiarową uogólnionego dyskretnego układu dynamicznego ułamkowego rzędu opisanego w przestrzeni stanu nazywamy nieskończoność wymiarowy układ pierwszego rzędu dany następującymi równaniami:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbb{A} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \\ \vdots \end{bmatrix} + \mathbb{B} u_k$$

$$y_k = \mathbb{C} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} (A_d + \Upsilon_1) & -(-1)^2 \Upsilon_2 & -(-1)^3 \Upsilon_3 & \dots \\ I & 0 & 0 & \dots \\ 0 & I & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

□

Forma ta jest bardzo przydatna przy badaniu stabilności i innych własności układu.

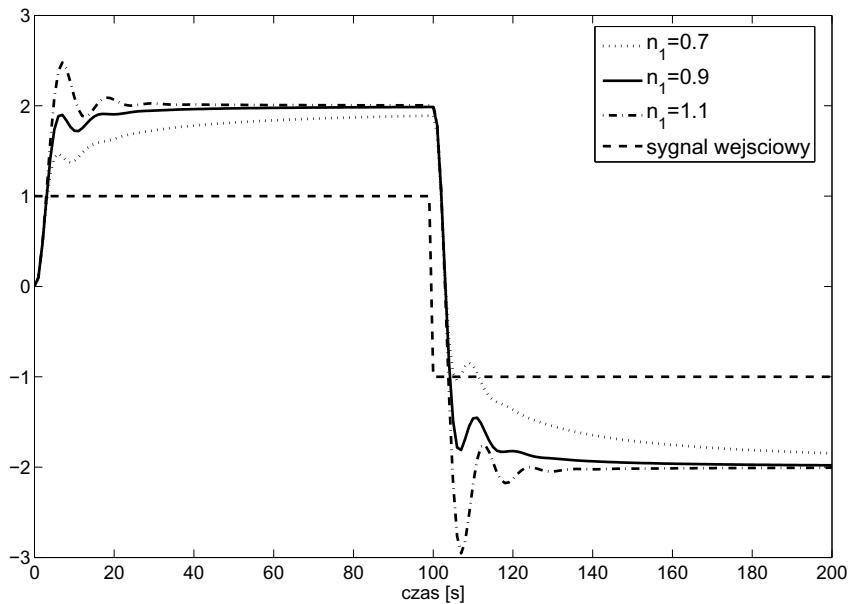
Przykład 7 Dany jest układ określony następującymi macierzami:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.15 & -0.6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

dla różnych wartości rzędu pierwszego równania układu $n_1 = 0.7, 0.9, 1.1$ i stałej wartości rzędu równania drugiego $n_2 = 1.3$

Odpowiedzi tych układów na wymuszenie prostokątne są przedstawione na Rys. 3.4.

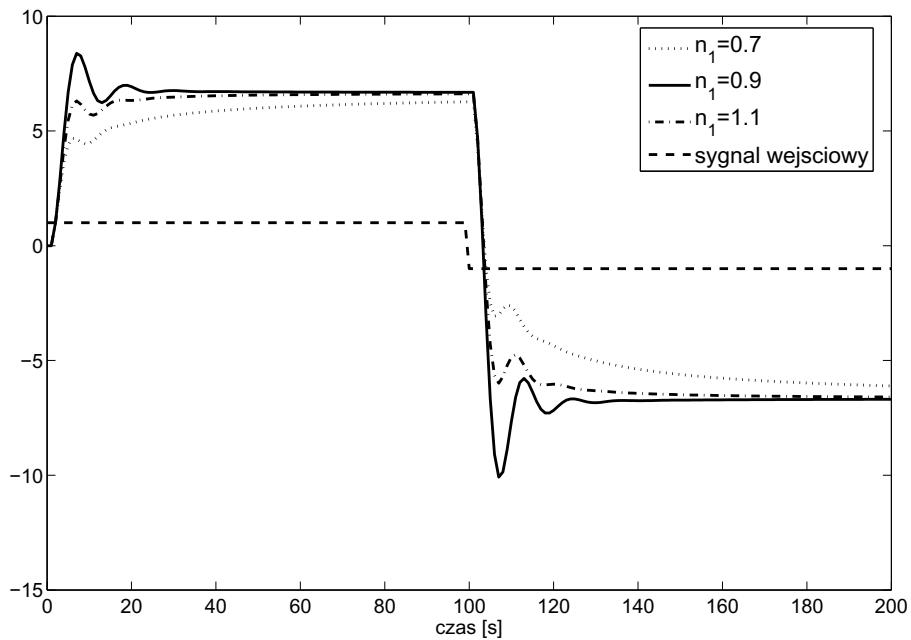
Na rysunkach 3.5 i 3.6 przedstawiony jest natomiast przebieg zmiennych stanu tych układów.



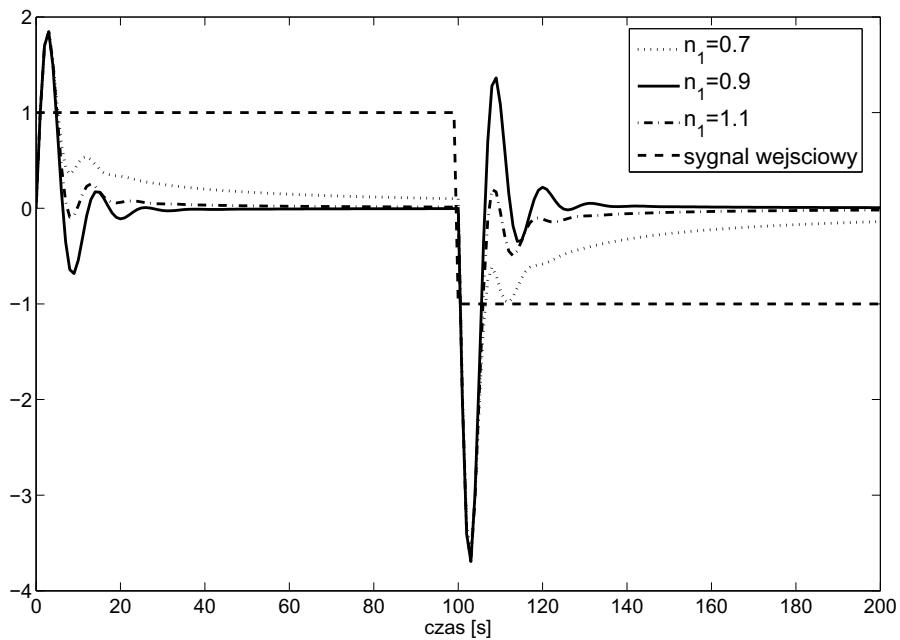
Rysunek 3.4: Przykładowe odpowiedzi układu danego przykładem 7

3.1.3 Podstawowe przekształcenia schematów blokowych dyskretnych układów ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu

W podrozdziale tym zostaną przedstawione podstawowe zasady przekształcania schematów blokowych zawierających dyskretnie układy ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu.



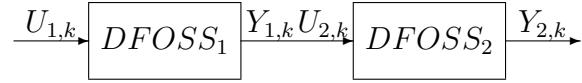
Rysunek 3.5: Przykładowe przebiegi zmiennej stanu x_1 układu danego przykładem 7



Rysunek 3.6: Przykładowe przebiegi zmiennej stanu x_2 układu danego przykładem 7

Połączenie układów szeregowo

Układ $DF OSS_1$ dany jest równaniami:



Rysunek 3.7: Połaczenie szeregowe

$$\begin{aligned}\Delta^{\Upsilon_1} x_{1,k+1} &= A_{d1}x_{1,k} + B_1u_{1,k} \\ x_{1,k+1} &= \Delta^{\Upsilon_1} x_{1,k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_{1,j} x_{1,k+1-j} \\ y_{1,k} &= C_1x_{1,k} + D_1u_{1,k}\end{aligned}$$

Układ $DF OSS_2$ dany jest natomiast równaniami:

$$\begin{aligned}\Delta^{\Upsilon_2} x_{2,k+1} &= A_{d2}x_{2,k} + B_2u_{2,k} \\ x_{2,k+1} &= \Delta^{\Upsilon_2} x_{2,k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_{2,j} x_{2,k+1-j} \\ y_{2,k} &= C_2x_{2,k} + D_2u_{2,k}\end{aligned}$$

gdzie $x_{n,k}$ wektor stanu w chwili k układu n , a $\Delta^{\Upsilon_n} x_{n,k+1}$ oznacza wektor różnic n -tego układu w chwili $k+1$.

Lemat 2 Dwa dyskretnie układy $DF OSS$ połączone szeregowo można zapisać w postaci następującego układu $DF OSS$:

$$\begin{aligned}\Delta^{\Upsilon} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} u_{1,k} \\ x_{k+1} &= \Delta^{\Upsilon} x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j} \\ y_{2,k} &= \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} D_2D_1 \end{bmatrix} u_{1,k}\end{aligned}$$

gdzie

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}, \quad \Delta^{\Upsilon} x_{k+1} = \begin{bmatrix} \Delta^{\Upsilon_1} x_{1,k+1} \\ \Delta^{\Upsilon_2} x_{2,k+1} \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_j = \text{diag} \begin{bmatrix} \Upsilon_{1,j} & \Upsilon_{2,j} \end{bmatrix}$$

Dowód:

Tworzymy nowy wektor stanu x_k zawierający wektory stanu obu układów

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}$$

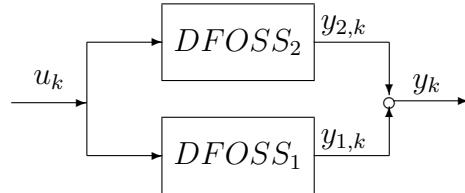
Z własności połączenia szeregowego wynika $u_{2,k} = y_{1,k}$, przez co otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Delta^{\Upsilon_2} x_{2,k+1} &= B_2 C_1 x_{1,k} + A_{d2} x_{2,k} + B_2 D_1 u_{1,k} \\ y_{2,k} &= D_2 C_1 x_{1,k} + C_2 x_{2,k} + D_2 D_1 u_{1,k}\end{aligned}$$

co w zapisie macierzowym daje równania dane przez Lemat 2.

□

Połączenie układów równolegle



Rysunek 3.8: Połączenie równoległe

Lemat 3 *Dwa dyskretne układy DF OSS połączone równolegle można zapisać w postaci następującego układu DF OSS:*

$$\begin{aligned}\Delta^{\Upsilon} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} [u_k] \\ x_{k+1} &= \Delta^{\Upsilon} x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j} \\ y_k &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} D_2 + D_1 \end{bmatrix} [u_k]\end{aligned}$$

gdzie

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}, \quad \Delta^\Upsilon x_{k+1} = \begin{bmatrix} \Delta^{\Upsilon_1} x_{1,k+1} \\ \Delta^{\Upsilon_2} x_{2,k+1} \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_j = \text{diag} \begin{bmatrix} \Upsilon_{1,j} & \Upsilon_{2,j} \end{bmatrix}$$

■

Dowód:

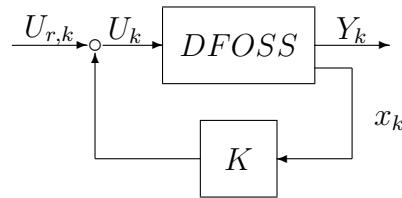
Tworzymy nowy wektor stanu x_k zawierający wektory stanu obu układów

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}$$

Przyjmując $y_k = y_{1,k} + y_{2,k}$ otrzymujemy równania dane przez Lemat 3

□

Połączenie układów ze sprzężeniem zwrotnym od stanu



Rysunek 3.9: Sprzężenie zwrotne od wektora stanu

Lemat 4 Dyskretny układ DFOSS (dany macierzami A_d, B, C, D) połączony w układzie sprzężenia zwrotnego od wektora zmiennych stanu można zapisać w postaci następującego układu DFOSS:

$$\begin{aligned} \Delta^\Upsilon x_{k+1} &= (A_d - BK)x_k + Bu_{r,k} \\ x_{k+1} &= \Delta^\Upsilon x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j} \\ y_{2,k} &= Cx_k + Du_{r,k} \end{aligned}$$

■

Dowód:

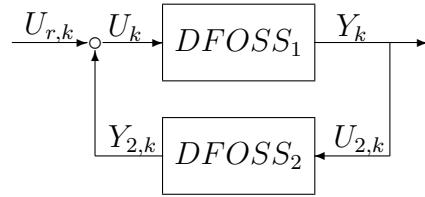
przyjmując $u_k = u_r - Kx_k$ otrzymujemy równanie

$$\Delta^\Upsilon x_{k+1} = A_d x_k + B (u_{r,k} - Kx_k)$$

po uszeregowaniu którego otrzymujemy równania dane przez Lemat 4

□

Połączenie układów ze sprzężeniem zwrotnym od wyjścia



Rysunek 3.10: Sprzężenie zwrotne od wyjścia

Lemat 5 *Dwa dyskretnie układy DFOSS połączone w układzie sprzężenia zwrotnego od wyjścia można zapisać w postaci następującego układu DFOSS:*

$$\begin{aligned}\Delta^\Upsilon x_{k+1} &= \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 - B_2 D_1 C_2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u_{r,k} \\ x_{k+1} &= \Delta^\Upsilon x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j} \\ y_{2,k} &= \begin{bmatrix} C_1 & -D_1 C_2 \end{bmatrix} x_k + D_1 u_{r,k}\end{aligned}$$

gdzie

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}, \quad \Delta^\Upsilon x_{k+1} = \begin{bmatrix} \Delta^{\Upsilon_1} x_{1,k+1} \\ \Delta^{\Upsilon_2} x_{2,k+1} \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_j = \text{diag} \begin{bmatrix} \Upsilon_{1,j} & \Upsilon_{2,j} \end{bmatrix}$$

oraz przy założeniu $D_2 = 0$.

■

Dowód:

Tworzymy nowy wektor stanu x_k zawierający wektory stanu obu układów

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}$$

Przyjmując $u_{1,k} = u_{r,k} - y_{2,k}$ i $u_{2,k} = y_{1,k}$, oraz zakładając $D_2 = 0$ otrzymujemy

$$\Delta^{\Upsilon_1} x_{1,k+1} = A_1 x_{1,k} + B_1(u_{r,k} - C_2 x_{2,k})$$

$$y_{1,k} = C_1 x_{1,k} + D_1(u_{r,k} - C_2 x_{2,k})$$

oraz

$$\Delta^{\Upsilon_2} x_{2,k+1} = A_2 x_{2,k} + B_2(C_1 x_{1,k} + D_1(u_{r,k} - C_2 x_{2,k}))$$

$$y_{2,k} = C_2 x_{2,k}$$

przez co otrzymujemy równania dane przez Lemat 5

□

3.1.4 Dyskretny układ nieliniowy ułamkowego rzędu

Analogicznie do rozumowania przedstawionego w podrozdziale 3.1 można uogólnić tradycyjny układ nieliniowy dyskretny pierwszego rzędu opisany w przestrzeni stanu na układy o ułamkowym rzędzie różnicowym.

Weźmy więc tradycyjny dyskretny układ nieliniowy całkowitego (pierwszego) rzędu

$$x_{k+1} = f_p(x_k, u_k)$$

$$y_k = h(x_k)$$

Można go przedstawić w następującej postaci:

$$\Delta^1 x_{k+1} = f_p(x_k, u_k) - x_k$$

$$x_{k+1} = \Delta^1 x_{k+1} + x_k$$

$$y_k = h(x_k)$$

Uogólniając różnicę pierwszego rzędu na różnicę ułamkowego rzędu, otrzymujemy dyskretny układ nieliniowy ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu. Przyjmując $f(x_k, u_k) = (f_p(x_k, u_k) - x_k)$ możemy go zapisać w następujący sposób:

Definicja 17 Nieliniowym dyskretnym układem ułamkowego rzędu opisanym w przestrzeni stanu nazywamy układ dany następującymi równaniami:

$$\begin{aligned}\Delta^n x_{k+1} &= f(x_k, u_k) \\ x_{k+1} &= \Delta^n x_{k+1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} x_{k+1-j} \\ y_k &= h(x_k)\end{aligned}$$

■

Definicja 18 Uogólnionym nieliniowym dyskretnym układem ułamkowego rzędu opisanym w przestrzeni stanu nazywamy układ dany następującymi równaniami:

$$\begin{aligned}\Delta^\Upsilon x_{k+1} &= f(x_k, u_k) \\ x_{k+1} &= \Delta^\Upsilon x_{k+1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j} \\ y_k &= h(x_k)\end{aligned}$$

■

3.1.5 Dyskretne liniowe i nieliniowe układy stochastyczne ułamkowego rzędu

W rzeczywistych problemach sterowania wykorzystywane są układy z zakłóceniami (stochastyczne). Kolejnym krokiem będzie więc uogólnienie dyskretnego układu stochastycznego pierwszego rzędu na układy rzędu ułamkowego. Można to uczynić w sposób analogiczny do zaprezentowanego w podrozdziale 3.1.

Weźmy więc liniowy układ układu stochastycznego pierwszego rzędu

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \omega_k \quad (3.12)$$

$$y_k = Cx_k + \nu_k \quad (3.13)$$

Układ ten oczywiście możemy zapisać w następującej formie:

$$\Delta^1 x_{k+1} = A_d x_k + Bu_k + \omega_k \quad (3.14)$$

$$x_{k+1} = \Delta^1 x_{k+1} + x_k \quad (3.15)$$

$$y_k = Cx_k + \nu_k \quad (3.16)$$

co można uogólnić na przypadek różnicicy o ułamkowym rzędzie w sposób podany następującą definicją:

Definicja 19 *Dyskretnym układem stochastycznym ułamkowego rzędu opisanym w przestrzeni stanu nazywamy układ dany następującymi równaniami:*

$$\begin{aligned} \Delta^n x_{k+1} &= A_d x_k + Bu_k + \omega_k \\ x_{k+1} &= \Delta^n x_{k+1} \\ &- \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} x_{k-j+1} \\ y_k &= Cx_k + Du_k + \nu_k \end{aligned}$$

gdzie ω_k i ν_k są zakłóceniami odpowiednio zmiennych stanu i wyjścia układu.

□

W przypadku, gdy rzędy równań stanu nie są identyczne, otrzymujemy następującą definicję:

Definicja 20 *Uogólnionym dyskretnym układem stochastycznym ułamkowego rzędu opisanym w przestrzeni stanu nazywamy układ dany następującymi równaniami:*

$$\begin{aligned} \Delta^\Upsilon x_{k+1} &= A_d x_k + Bu_k + \omega_k \\ x_{k+1} &= \Delta^\Upsilon x_{k+1} \\ &- \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k-j+1} \\ y_k &= Cx_k + Du_k + \nu_k \end{aligned}$$

gdzie ω_k i ν_k są zakłóceniami odpowiednio zmiennych stanu i wyjścia układu.

□

Dyskretny nieliniowy stochastyczny układ dynamiczny ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu zdefiniowany jest natomiast dany następującą definicją:

Definicja 21 *Uogólnionym nieliniowym stochastycznym układem ułamkowego rzędu opisanym w przestrzeni stanu nazywamy układ dany następującymi równaniami:*

$$\begin{aligned}\Delta^{\Upsilon} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + \omega_k \\ x_{k+1} &= \Delta^{\Upsilon} x_{k+1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j} \\ y_k &= h(x_k) + \nu_k\end{aligned}$$

■

3.1.6 Implementacja praktyczna

Przy implementacji praktycznej dyskretnego układu ułamkowego rzędu niezależnie od tego, czy jest to układ liniowy, czy nieliniowy, zachodzi konieczność ograniczenia liczby sumowanych próbek we wzorze 3.7 i w jemu odpowiadających wzorach w innych definicjach, do pewnej wartości L nazwanej długością implementacji.

Definicja 22 *Długością implementacji układu nazywamy liczbę próbek L , do której zostało ograniczone sumowanie próbek we wzorze 3.7.*

Brak tego ograniczenia spowodowałby konieczność sumowania wszystkich poprzednich próbek, co byłoby niemożliwe w implementacji praktycznej. Równanie (3.7) przyjmuje wtedy następującą postać:

$$x_{k+1} = \Delta^{\Upsilon} x_{k+1} - \sum_{j=1}^L (-1)^j \Upsilon_j x_{k-j+1}. \quad (3.17)$$

Definicja 12 przyjmuje wtedy postać:

Definicja 23 *Praktyczną implementacją dyskretnego układu dynamicznego ułamkowego rzędu opisanego w przestrzeni stanu o długości implementacji L nazywamy układ dany następującymi równaniami:*

$$\begin{aligned}
\Delta^n x_{k+1} &= A_d x_k + B u_k \\
x_{k+1} &= \Delta^n x_{k+1} \\
&\quad - \sum_{j=1}^L (-1)^j \binom{n}{j} x_{k-j+1} \\
y_k &= C x_k + D u_k
\end{aligned}$$

□

Definicja 15 przyjmuje natomiast postać:

Definicja 24 Praktyczną implementacją uogólnionego dyskretnego układu dynamicznego ułamkowego rzędu opisanego w przestrzeni stanu o długości implementacji L nazywamy układ dany następującymi równaniami:

$$\begin{aligned}
\Delta^\gamma x_{k+1} &= A_d x_k + B u_k \\
x_{k+1} &= \Delta^\gamma x_{k+1} - \sum_{j=1}^L (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j} \\
y_k &= C x_k + D u_k
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\Upsilon_k &= \text{diag} \left[\begin{array}{ccc} \binom{n_1}{k} & \dots & \binom{n_N}{k} \end{array} \right] \\
\Delta^\gamma x_{k+1} &= \left[\begin{array}{ccc} \Delta^{n_1} x_{1,k+1} & \dots & \Delta^{n_N} x_{N,k+1} \end{array} \right]^T
\end{aligned}$$

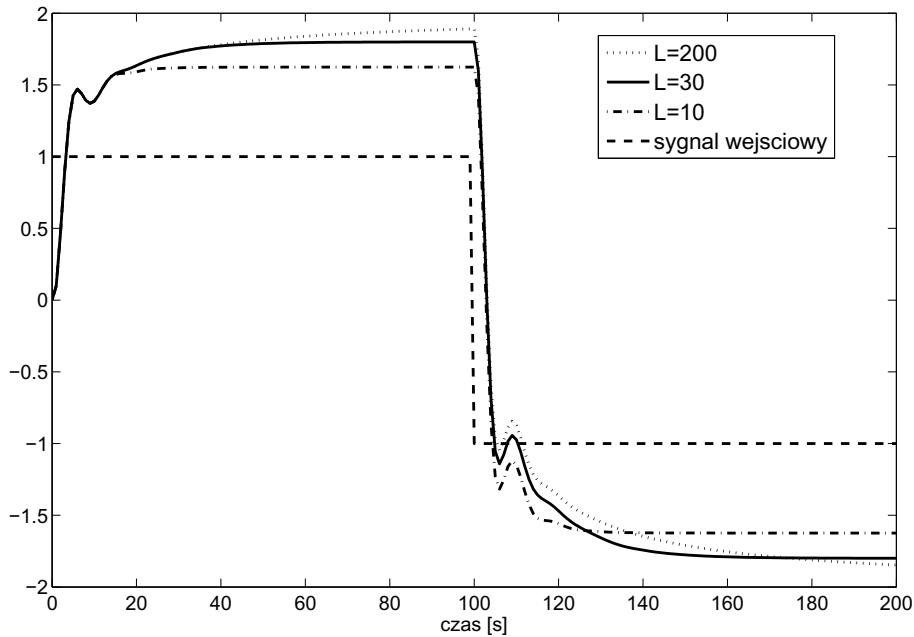
□

Podobnie można zdefiniować równania w pozostałych układach: stochastycznym i nielinowych.

Ograniczenie to ma wpływ na dokładność realizacji danego układu, co zostanie zilustrowane na następującym przykładzie.

Przykład 8 Dany jest układ taki sam jak w przykładzie 7, dla $n_1 = 0.7$ i $n_2 = 1.2$ oraz dla różnych wartości parametru $L = 200, 30, 10$.

Odpowiedzi tych układów dla wymuszenia prostokątnego są zaprezentowana na Rys. 3.11.



Rysunek 3.11: Przykładowe odpowiedzi układu danego Definicją 15 dla $L = 200, 30, 10$

3.2 Stabilność FOSS

Zagadnienie stabilności w dyskretnych układach ułamkowego rzędu jest znacznie bardziej skomplikowane niż w wypadku układów rzędu całkowitego. Ze względu na to, iż dyskretne układy ułamkowego rzędu są podklasą dyskretnych układów nieskończoność wymiarowych, jako definicję stabilności przyjęto definicję stabilności stosowaną w tych układach, podaną np. w [36].

Definicja 25 [36] *Dyskretny, liniowy, nieskończoność wymiarowy układ nazywamy stabilnym w skończonym czasie względem $\{\alpha, \beta, N, M, \|\cdot\|\}$, $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in R_+$, wtedy i tylko wtedy gdy:*

$$\|x(i)\| < \alpha, \quad i = 0, -1, \dots, -N,$$

implikuje:

$$\|x(i)\| < \beta, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M$$

przy założeniu, że $\alpha < \infty$ i $\beta < \infty$.

□

Warunek konieczny i wystarczający stabilności układu określonego przez definicję 16 dany jest następującym twierdzeniem:

Twierdzenie 12 *Układ określony definicją 16 jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\|\mathbb{A}\| < 1$$

gdzie $\|\mathbb{A}\|$ oznacza normę macierzy \mathbb{A} zdefiniowaną jako $\max_i |\lambda_i|$ gdzie λ_i jest i -tą wartością własną macierzy \mathbb{A} .

■

Dowód:

Macierz \mathbb{A} jest macierzą systemową dyskretnego układu pierwszego rzędu.

□

Liczba podmacierzy Υ_j w macierzy \mathbb{A} w rzeczywistej realizacji układu musi być ograniczona. To ograniczenie może zmniejszyć dokładność określenia stabilności układu, szczególnie gdy jest on bliski granicy stabilności.

3.2.1 Kryterium stabilności

Kryterium stabilności podane w Twierdzeniu 12 jest w praktyce trudne do zastosowania. Ze względu na to, iż poszczególne macierze Υ_k zależą tylko od rzędu układu (i jawnie od k), pożądany byłoby takie kryterium, które na podstawie macierzy A_d i rzędu układu, stwierdzałoby o jego stabilności lub niestabilności. Takie kryterium, jakkolwiek podające tylko warunek wystarczający, zostanie przedstawione w tym podrozdziale.

Kryterium to zostało wyprowadzone w oparciu o wyniki zaprezentowane w pracy [36].

Kryterium stabilności dla dyskretnych liniowych układów w przestrzeni stanu z opóźnieniem w stanie zaprezentowane w tej pracy jest następujące:

$$\sum_{i=0}^N \|A_i\| < 1$$

gdzie A_i są macierzami opóźnień układu:

$$x_{k+1} = \sum_{j=0}^p A_i x_{k-j} + B u_k$$

p natomiast jest liczbą opóźnień tego układu.

Kryterium to implikuje, że macierz tranzytyjnej Φ spełnia następującą zależność:

$$\|\Phi(k+1)\| < \sum_{i=1}^N \|\Phi(k-i)\| \leq \epsilon \quad (3.18)$$

Używając notacji przyjętej w Definicji 15, to kryterium można zapisać jako

Twierdzenie 13 *Uogólniony dyskretny liniowy układ ułamkowego rzędu dany przez definicję 15 jest stabilny wtedy (ale nie wtedy i tylko wtedy), gdy*

$$\|A_d + \Upsilon_1\| + \sum_{j=2}^{k+1} \|(-1)^j \Upsilon_j\| < 1$$

■

Dowód: Relacja pomiędzy notacją użytą w pracy [36] a notacją użytą w Definicji 15 jest następująca:

$$\begin{aligned} A_0 &= A_d + \Upsilon_1 \\ A_i &= (-1)^{i-1} \Upsilon_{i-1} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 14 *Standardowy dyskretny liniowy układ ułamkowego rzędu dany przez definicję 12 jest stabilny wtedy (ale nie wtedy i tylko wtedy), gdy*

$$\|A_d + In\| + \sum_{j=2}^{k+1} \|(-1)^j \binom{n}{j} I_N\| < 1$$

■

Dowód:

Układ standardowy jest szczególnym przypadkiem układu uogólnionego dla $n_i = n$.

□

Twierdzenie 15 *Dana implementacja standardowego dyskretnego liniowego układu ułamkowego rzędu danego przez definicję 23 jest stabilna wtedy (ale nie wtedy i tylko wtedy), gdy*

$$\|A_d + In\| + \sum_{j=2}^L \|(-1)^j \binom{n}{j} I_N\| < 1$$

■

Dowód:

Implementacja układu standardowego jest układem standardowym dla $L = k + 1$.

□

Twierdzenia 14 i 15 są trudne do użycia ze względu na konieczność wyznaczania sumy, którą można wyznaczyć w sposób analityczny, jak to zostanie pokazane niżej.

Lemat 6 Dla $j \geq 2$ współczynniki $(-1)^j \binom{n}{j}$ są

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \begin{cases} \text{dodatnie} & \text{dla } 2 > n > 1 \\ \text{ujemne} & \text{dla } 0 < n < 1 \\ 0 & \text{dla } n = 0, 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

□

Dowód: Używając wyrażenia (2.27) do wyznaczania $\binom{n}{j}$ można zauważać, że dla $j \geq 2$ and $0 > n > 1$

$$\begin{aligned} \binom{n}{j} &< 0 \quad \text{dla } j = 2, 4, 6, \dots \\ \binom{n}{j} &> 0 \quad \text{dla } j = 3, 5, 7, \dots \end{aligned}$$

Współczynniki $(-1)^j$ są równe 1 dla $j = 2, 4, \dots$ i równe -1 dla $j = 1, 3, \dots$. Znaki obydwu współczynników $\binom{n}{j}$ i $(-1)^j$ są przeciwe, co implikuje, że współczynniki $(-1)^j \binom{n}{j}$ są ujemne dla $j \geq 2$ i $0 > n > 1$.

Dla $j \geq 2$ i $1 > n > 2$ sytuacja jest odwrotna

$$\begin{aligned} \binom{n}{j} &> 0 \quad \text{dla } j = 2, 4, 6, \dots \\ \binom{n}{j} &< 0 \quad \text{dla } j = 3, 5, 7, \dots \end{aligned}$$

Znaki obydwu współczynników $\binom{n}{j}$ i $(-1)^j$ są takie same, co implikuje, że współczynniki $(-1)^j \binom{n}{j}$ są dodatnie dla $j \geq 2$ i $1 > n > 2$.

Inna metoda dowodu tego lematu (metodą indukcji) przedstawiona jest w pracy [86].

□

Używając tego lematu można pokazać, że

$$\sum_{j=2}^L |(-1)^j \binom{n}{j}| =$$

$$\begin{cases} \sum_{j=2}^L (-1)^j \binom{n}{j} & \text{dla } 2 > n \geq 1 \\ -\sum_{j=2}^L (-1)^j \binom{n}{j} & \text{dla } 0 < n < 1 \end{cases}$$

Korzystając z własności pokazanej w [77, p. 29]

$$\sum_{j=0}^L (-1)^j \binom{n}{j} = \frac{\Gamma(L+1-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(L+1)} \quad (3.20)$$

można otrzymać następujące wyrażenie:

$$\sum_{j=2}^L (-1)^j \binom{n}{j} = \frac{\Gamma(L+1-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(L+1)} - 1 + n \quad (3.21)$$

Używając tej własności, kryterium opisane w Twierdzeniu 15 można zapisać następująco:

Twierdzenie 16 *Układ dany Definicja 12 jest stabilny, jeżeli*

$$|A_d + In| < r(n, L) \quad (3.22)$$

gdzie

$$r(n, L) = \begin{cases} 2 - \frac{\Gamma(L+1-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(L+1)} - n & \text{dla } 2 \geq n \geq 1 \\ \frac{\Gamma(L+1-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(L+1)} + n & \text{dla } 0 < n < 1 \\ 1 & \text{dla } n = 0 \end{cases}$$

jest promieniem koła będącego obszarem stabilności układu (stabilności w sensie zależności (3.18)).



Dowód:

Z twierdzenia 15 i równania 3.21 otrzymujemy warunek:

$$\|A_d + In\| + \left\| \frac{\Gamma(L+1-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(L+1)} - 1 + n \right\| < 1$$

opuszczając wartość bezwzględną z tego wyrażenia (w poszczególnych przedziałach wartości n) otrzymujemy warunek tego twierdzenia.



Szczególnie interesująca jest możliwość wyznaczania promienia stabilności dla nieskończoności (idealnej) długości implementacji.

Lemat 7 *Współczynnik $\frac{\Gamma(L+1-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(L+1)}$ dla nieskończonej długości implementacji równy jest zero dla $n > 0$.*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(L+1-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(L+1)} = 0$$

■

Dowód:

Biorąc pod uwagę, że

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} z^k = (1-z)^n$$

przyjmując $z = 1$, możemy zapisać

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(L+1-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(L+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} = (1-1)^n = 0$$

dla $n > 0$

□

Twierdzenie 17 *Nieskończona implementacja ($L \rightarrow \infty$) układu standardowego danego Definicją 12 jest stabilna, jeżeli*

$$|A_d + In| < r(n, L) \quad (3.23)$$

gdzie

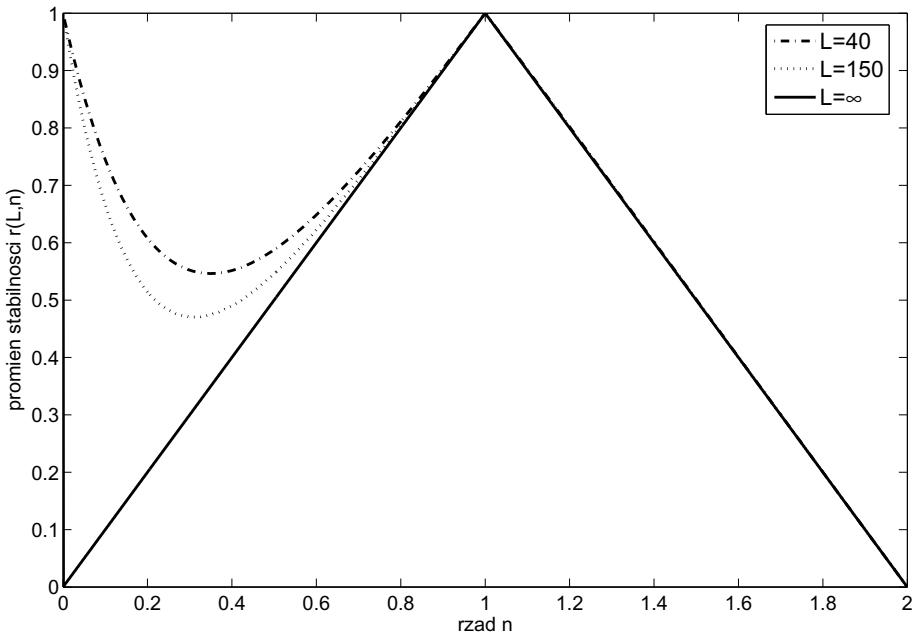
$$r(n, \infty) = \begin{cases} 2 - n & \text{dla } 2 \geq n \geq 1 \\ n & \text{dla } 0 < n < 1 \\ 1 & \text{dla } n = 0 \end{cases}$$

■

Dowód:

Dowód wynika z twierdzenia 16 i lematu 7.

□



Rysunek 3.12: Wykres zależności promienia stabilności $r(n, L)$ od rzędu n układowego dla $L = 40, 150$ i ∞ .

Na Rys. 3.12 przedstawiona jest zależność promienia stabilności $r(n, L)$ od rzędu układowego n dla różnych wartości długości implementacji L .

Ze względu na problemy numeryczne w wyznaczaniu współczynnika $\frac{\Gamma(L+1-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(L+1)}$ dla $L > 171$ (przepełnienie następuje już przy wyznaczaniu $\Gamma(172)$ w Matlab'ie 2006a), dla wyższych wartości L zależność tę należy wyznaczać w inny sposób.

Lemat 8 *Współczynnik $\frac{\Gamma(L+1-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(L+1)}$ można wyznaczyć w następujący sposób:*

$$\frac{\Gamma(L+1-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(L+1)} = \prod_{j=1}^{L+1} \frac{j-n}{j}$$

■

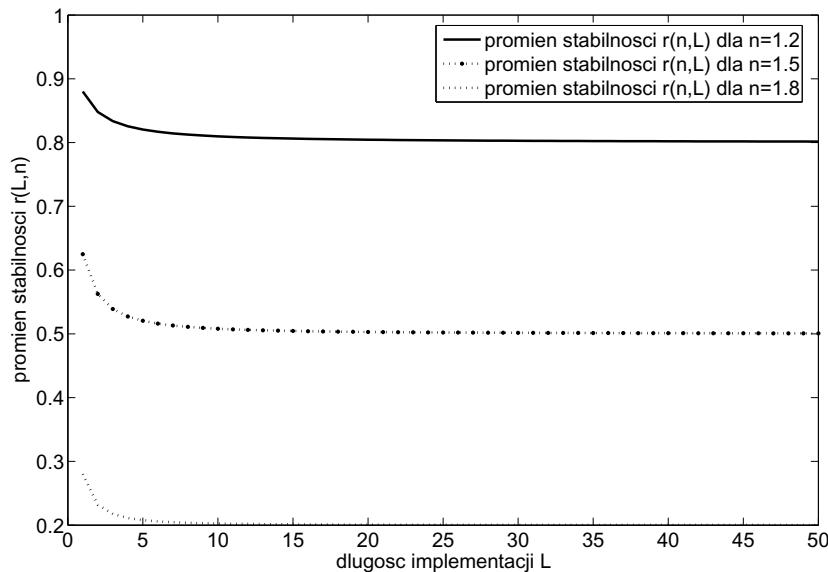
Dowód:

Korzystając z podstawowej własności funkcji $\Gamma(x)$ danej relacją $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, otrzymujemy

$$\frac{\Gamma(L+1-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(L+1)} = \frac{(L-n)(L-1-n)\dots(1-n)\Gamma(1-n)}{\Gamma(1-n)(L)(L-1)\dots(1)\Gamma(1)} = \prod_{j=1}^L \frac{j-n}{j}$$

□

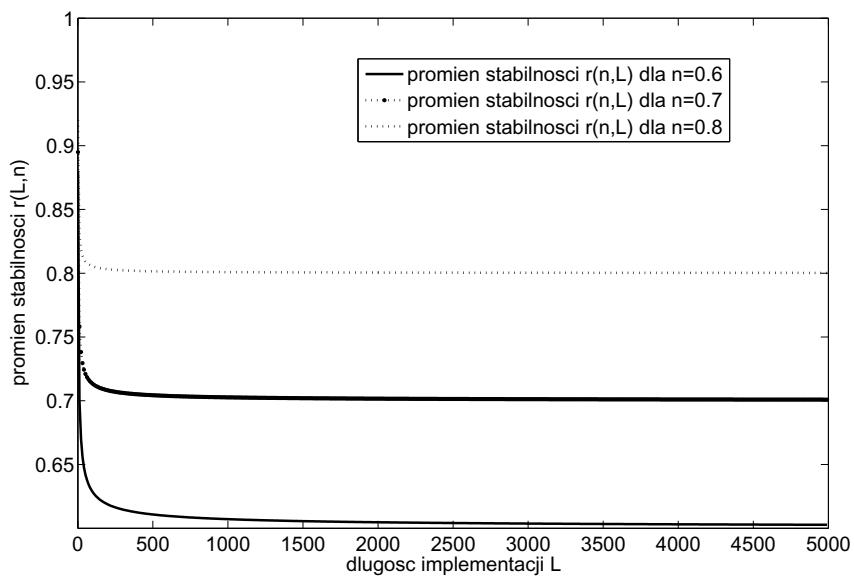
Na rysunkach 3.13, 3.14 i 3.15 przedstawione są zależności promienia stabilności $r(n, L)$ od długości implementacji układu dla danej wartości rzędu n . Jak można na nich zaobserwować, dla rzędów powyżej $n = 1$ zbieżność wartości promienia stabilności do wartości dla nieskończonej implementacji jest bardzo szybka, w granicach $L > 10$. Dla rzędów $n \in (0.6, 1)$ zbieżność ta jest znacznie wolniejsza, w granicach $L > 2000$ i szybkość ta znacznie zmniejsza się wraz ze zmniejszaniem się wartości rzędu n . Dla rzędów $n < 0.5$ zbieżność ta jest znacznie wolniejsza, dla $n = 0.3$ wartość promienia stabilności zbliża się do wartości implementacji nieskończonej dla $L > 500000$.



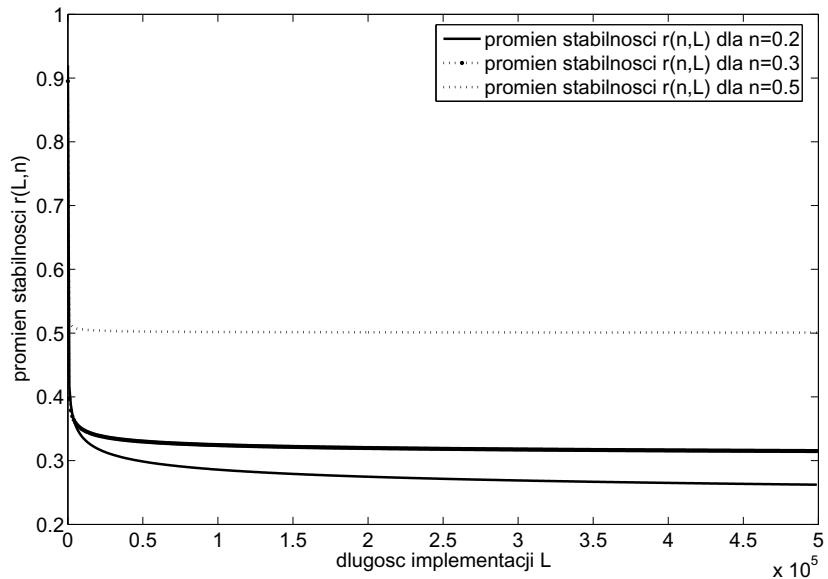
Rysunek 3.13: Wykres zależności promienia stabilności $r(n, L)$ od długości implementacji L układu dla $n = 1.2, 1.5, 1.8$.

Przykłady obszarów stabilności

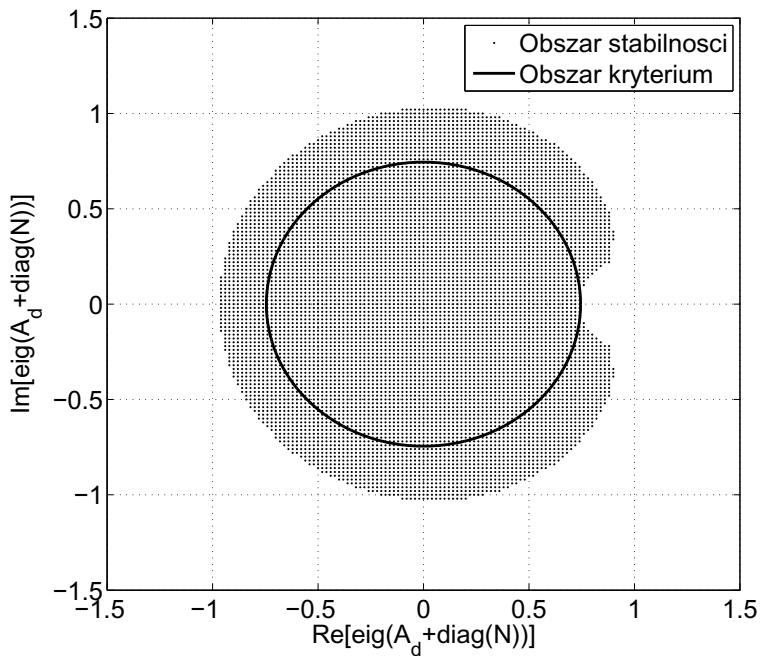
Na rysunkach 3.16, 3.17, 3.18 i 3.19 przedstawione jest porównanie obszarów rzeczywistej stabilności układu, wyznaczanej na podstawie Twierdzenia 12, z obszarem wyznaczonym na podstawie kryterium stabilności danego Twierdzeniem 16. Wszystkie obszary wyznaczone są dla długości implementacji równej $L = 40$. Jak widać na rysunkach 3.16 i 3.17 dla rzędów $n < 1$ obszar stabilności dany przez kryterium jest kołem o środku w punkcie $(0, 0)$ i o największym możliwym promieniu. Dla rzędów $n > 1$ obszar dany przez kryterium jest jeszcze bardziej ograniczony niż dla $n < 1$, szczególnie na rysunku 3.19 dobrze widać, jak bardzo mały obszar stabilności obejmuje obszar kryterium.



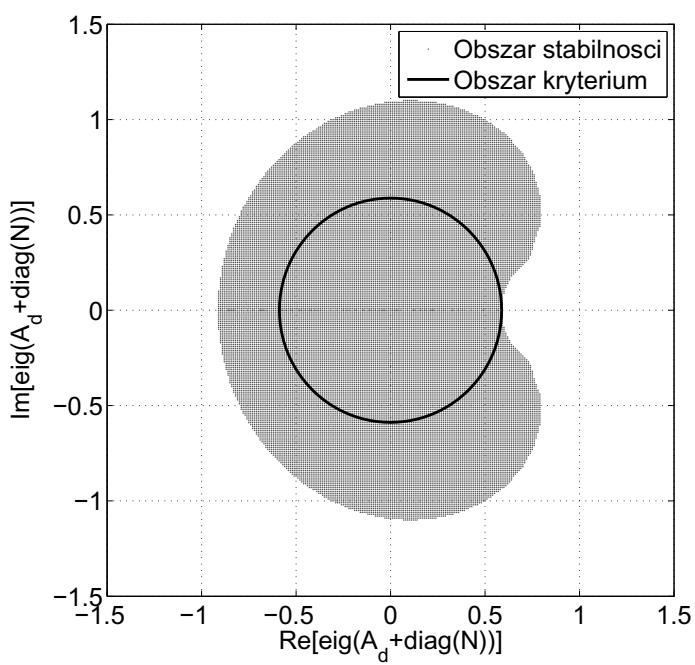
Rysunek 3.14: Wykres zależności promienia stabilności $r(n,L)$ od długości implementacji L układu dla $n = 0.6, 0.7, 0.8$.



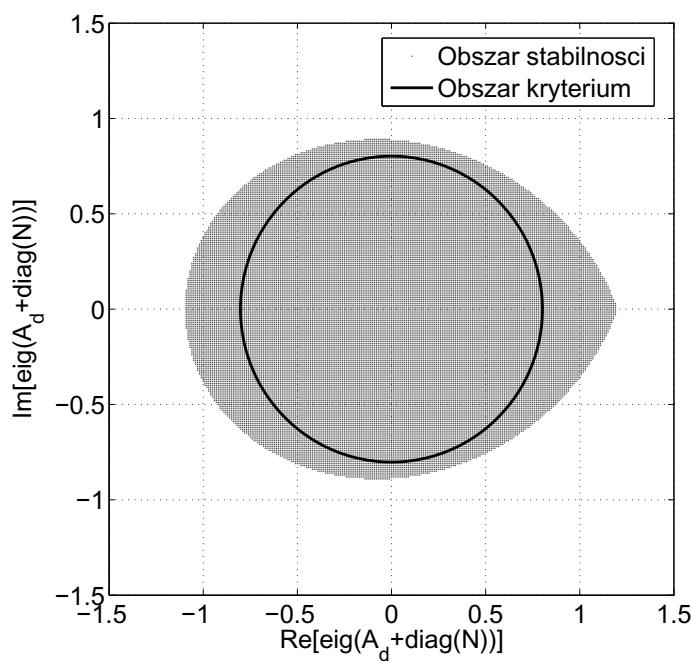
Rysunek 3.15: Wykres zależności promienia stabilności $r(n,L)$ od długości implementacji L układu dla $n = 0.2, 0.3, 0.5$.



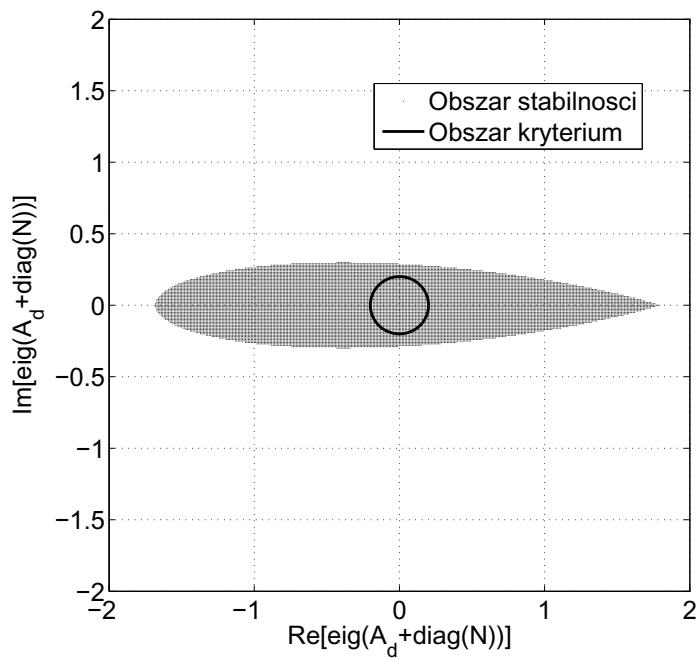
Rysunek 3.16: Obszar stabilności układu i obszar dany przez kryterium dla $n = 0.1$ i $L = 40$.



Rysunek 3.17: Obszar stabilności układu i obszar dany przez kryterium dla $n = 0.5$ i $L = 40$.



Rysunek 3.18: Obszar stabilności układu i obszar dany przez kryterium dla $n = 1.2$ i $L = 40$.



Rysunek 3.19: Obszar stabilności układu i obszar dany przez kryterium dla $n = 1.8$ i $L = 40$.

3.3 Osiągalność, sterowalność i obserwowalność układu DFOSS

W podrozdziale tym zostaną przeanalizowane zagadnienia osiągalności, sterowalności i obserwowalności dla dyskretnych układów ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu. Za definicje tych własności przyjęto klasyczne definicje stosowane przy analizie układów całkowitego rzędu podane na przykład w pozycji [87].

3.3.1 Osiągalność

Definicja 26 *Układ dany Definicją 12 lub Definicją 15 nazywamy osiągalnym, jeżeli dla dowolnego stanu końcowego x_k istnieje liczba naturalna q oraz ciąg wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_{q-1}\}$, który przeprowadza układ ten z zerowego stanu początkowego $x_0 = 0$ do zadanego stanu końcowego x_k .*

Twierdzenie 18 *Układ dany Definicją 12 jest osiągalny (w N krokach) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:*

$$\text{rank}[\mathcal{S}] = \text{rank} \begin{bmatrix} B & \Phi(1)B & \dots & \Phi(N-1)B \end{bmatrix} = N$$

gdzie $\Phi(k)$ jest macierzą transycji układu daną równaniem 3.9, N liczbą równań stanu, a \mathcal{S} jest macierzą osiągalności.

■

Dowód: Korzystając z rozwiązania

$$x_k = \Phi(k)x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1)Bu_j$$

dla zerowego warunku początkowego $x_0 = 0$ i stanu końcowego x_N przyjmuje ono postać

$$x_N = \sum_{j=0}^{N-1} \Phi(N-j-1)Bu_j = \begin{bmatrix} B & \Phi(1)B & \dots & \Phi(N-1)B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N-1} \\ u_{N-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

Tworzy to układ równań z N niewiadomymi, którymi są składowe wektora wymuszeń. Układ taki posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek podany w

Twierdzeniu 18. Możliwość wyznaczenia wektorów sterowań takich, aby przeprowadzały układ z x_0 do x_N , orzeka o osiągalności układu.

□

Warunek podany w Twierdzeniu 18 można uprościć, sprowadzając go do warunku znanego z układów pierwszego rzędu, korzystając z następującego lematu:

Lemat 9 *Macierz transycji $\Phi(k)$ można zapisać jako wielomian macierzowy macierzy $(A_d + In)$*

$$\Phi(k) = (A_d + In)^k + f_{k,k-1}(A_d + In)^{k-1} + f_{k,k-2}(A_d + In)^{k-2} + \cdots + f_{k,1}(A_d + In) + f_{k,0}I$$

gdzie współczynniki $f_{k,k-1}, f_{k,k-2}, \dots, f_{k,0}$ są współczynnikami wynikającymi z równania 3.9.

□

Twierdzenie 19 *Układ dany Definicja 12 jest osiągalny (w N krokach) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:*

$$\text{rank}[\mathcal{S}_I] = \text{rank} \left[\begin{array}{cccccc} B & (A_d + In)B & (A_d + In)^2B & \dots & (A_d + In)^{N-1}B \end{array} \right] = N$$

gdzie \mathcal{S}_I jest macierzą osiągalności w postaci równoważnej pierwnej.

■

Dowód:

Warunek konieczny i wystarczający osiągalności z Twierdzenia 18 jest następujący:

$$\text{rank} \left[\begin{array}{ccccc} B & \Phi(1)B & \Phi(2)B & \dots & \Phi(N-1)B \end{array} \right] = N$$

Korzystając z Lematu 9 możemy zapisać ten warunek w następujący sposób:

$$\text{rank} \left[\begin{array}{cccccc} B & (A_d + In)B & [(A_d + In)^2 + f_{2,1}(A_d + In) + f_{2,0}I]B & \dots \\ & & [(A_d + In)^{N-1} + f_{N-1,N-2}(A_d + In)^{N-2} + \cdots + f_{N-1,1}(A_d + In)^1 + f_{N-1,0}I]B & \dots \end{array} \right] = N$$

Elementy powyższej macierzy można uzyskać z następującej macierzy poprzez wykonanie działań elementarnych na kolumnach następującej macierzy:

$$\left[\begin{array}{ccccc} B & (A_d + In)B & (A_d + In)^2B & \dots & (A_d + In)^{N-1}B \end{array} \right]$$

Na przykład dla uzyskania ostatniej kolumny macierzy sterowalności (przy założeniu jednego wejścia układu) jest wymagany następujący ciąg działań elementarnych: $P(N, 1 \times f_{N-1,0}), P(N, 2 \times f_{N-1,1}), \dots, P(N, N-1 \times f_{N-1,N-2})$

Działania elementarne na macierzy nie zmieniają jej rzędu, w związku z tym warunek z Twierdzenia 19 jest równoważny warunkowi Twierdzenia 18.

□

Lemat 10 *Współczynnik $(A_d + In)^j$ można zapisać w postaci następującego wielomianu macierzowego:*

$$(A_d + In)^j = A_d^j + w_{j-1}A_d^{j-1} + \dots + w_1A_d + w_0I$$

Twierdzenie 20 *Układ dany Definicją 12 jest osiągalny (w N krokach) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:*

$$\text{rank}[\mathcal{S}_{II}] = \text{rank} \left[\begin{array}{ccccc} B & A_dB & A_d^2B & \dots & A_d^{N-1}B \end{array} \right] = N$$

gdzie \mathcal{S}_{II} jest macierzą osiągalności w postaci równoważnej drugiej.

■

Dowód:

Warunek konieczny i wystarczający osiągalności z Twierdzenia 19 jest następujący:

$$\text{rank} \left[\begin{array}{ccccc} B & (A_d + In)B & (A_d + In)^2B & \dots & (A_d + In)^{N-1}B \end{array} \right] = N$$

Korzystając z Lematu 10 możemy zapisać ten warunek w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \text{rank} \left[\begin{array}{ccccc} B & A_dB & [A_d^2 + w_{2,1}A_d + w_{2,0}I]B & \dots \\ & & [A_d^{N-1} + w_{N-1,N-2}A_d^{N-2} + \dots + w_{N-1,1}A_d + w_{N-1,0}I]B \end{array} \right] = N \end{aligned}$$

Elementy powyższej macierzy można uzyskać z następującej macierzy poprzez wykonanie działań elementarnych na kolumnach następującej macierzy:

$$\left[\begin{array}{ccccc} B & A_dB & A_d^2B & \dots & A_d^{N-1}B \end{array} \right]$$

Na przykład dla uzyskania ostatniej kolumny macierzy sterowalności (przy założeniu jednego wejścia układu) wymagany jest następujący ciąg działań elementarnych: $P(N, 1 \times w_{N-1,0})$, $P(N, 2 \times w_{N-1,1}), \dots, P(N, N-1 \times w_{N-1,N-2})$

Działania elementarne na macierzy nie zmieniają jej rzędu, w związku z tym warunek z Twierdzenia 20 jest równoważny warunkowi 19 i tym samym warunkowi Twierdzenia 18.

□

Twierdzenie 21 *Układ uogólniony dany Definicja 15 jest osiągalny (w N krokach) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:*

$$\text{rank} \left[\begin{array}{cccc} B & \Phi^T(1)B & \dots & \Phi^T(N-1)B \end{array} \right] = N$$

gdzie $\Phi^T(k)$ jest macierzą transycji układu daną równaniem 3.11.

■

Dowód: Jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 18, w miejsce $\Phi(k)$ należy podstawić $\Phi^T(k)$.

□

3.3.2 Sterowalność

Definicja 27 *Układ dany Definicja 12 lub Definicja 15 nazywamy sterowalnym, jeżeli dla dowolnego stanu początkowego x_0 istnieje liczba naturalna q oraz ciąg wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_{q-1}\}$, który przeprowadza układ ten z tego stanu początkowego x_0 do zerowego stanu końcowego $x_k = 0$.*

Twierdzenie 22 *Układ dany Definicja 12 jest sterowalny (w N krokach), gdy spełniony jest warunek:*

$$\text{rank}[\mathcal{S}] = \text{rank} \left[\begin{array}{cccc} B & \Phi(1)B & \dots & \Phi(N-1)B \end{array} \right] = N$$

gdzie $\Phi(k)$ jest macierzą transycji układu daną równaniem 3.9, N jest liczbą równań stanu, a \mathcal{S} jest macierzą sterowalności.

■

Dowód: Korzystając z rozwiązania

$$x_k = \Phi(k)x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1)Bu_j$$

dla zerowego warunku końcowego $x_N = 0$ przyjmuje ono postać

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(N)x_0 + \sum_{j=0}^{N-1} \Phi(N-j-1)Bu_j \\ &= \Phi(N)x_0 + \begin{bmatrix} B & \Phi(1)B & \dots & \Phi(N-1)B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N-1} \\ u_{N-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

co możemy zapisać jako następujące równanie:

$$-\Phi(N)x_0 = \begin{bmatrix} B & \Phi(1)B & \dots & \Phi(N-1)B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N-1} \\ u_{N-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

Tworzy to układ równań z N niewiadomymi, którymi są składowe wektora wymuszeń. Układ taki posiada rozwiązanie, jeżeli spełniony jest warunek podany w Twierdzeniu 22. Możliwość wyznaczenia wektorów sterowań, takich aby przeprowadzały układ z x_0 do $x_N = 0$, orzeka o sterowalności układu.

□

W przypadku ogólnym warunek Twierdzenia 22 nie jest warunkiem koniecznym sterowalności. Jeżeli macierz $\Phi(N) = 0$, to przy pomocy zerowego ciągu wymuszeń $u_0 = u_1 = \dots = u_{N-1} = 0$ można dany układ sprowadzić do zera niezależnie od postaci macierzy sterowalności.

Warunek z Twierdzenia 22 można uprościć w sposób analogiczny do Twierdzenia 19.

Twierdzenie 23 *Układ dany Definicją 12 jest sterowalny (w N krokach), gdy spełniony jest warunek:*

$$\text{rank}[\mathcal{S}_I] = \text{rank} \left[\begin{array}{ccccc} B & (A_d + In)B & (A_d + In)^2B & \dots & (A_d + In)^{N-1}B \end{array} \right] = N$$

gdzie \mathcal{S}_I jest macierzą sterowalności w postaci równoważnej pierwszej.

■
Dowód:

Dowód jest identyczny z dowodem Twierdzenia 19.

□

Twierdzenie 24 *Układ dany Definicja 12 jest sterowalny (w N krokach), gdy spełniony jest warunek:*

$$\text{rank}[\mathcal{S}_{II}] = \text{rank} \begin{bmatrix} B & A_d B & A_d^2 B & \dots & A_d^{N-1} B \end{bmatrix} = N$$

gdzie \mathcal{S}_{II} jest macierzą sterowalności w postaci równoważnej drugiej.

■
Dowód:

Dowód jest identyczny z dowodem Twierdzenia 20.

□

Twierdzenie 25 *Układ dany Definicja 15 jest sterowalny (w N krokach) wtedy, gdy spełniony jest warunek:*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & \Phi^\gamma(1)B & \dots & \Phi^\gamma(N-1)B \end{bmatrix} = N$$

gdzie $\Phi^\gamma(k)$ jest macierzą transycji układu daną równaniem 3.11.

■
Dowód: Jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 22, w miejsce $\Phi(k)$ należy podstawić $\Phi^\gamma(k)$.

□

Przykład 9 Sprawdźmy czy dana para macierzy (A_d, B) układu jest sterowalna (osiągalna).

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, n = 0.7$$

Rozwiążanie:

Wyznaczmy na początku potrzebne macierze transycji $\Phi(1)$ i $\Phi(2)$

$$\Phi(1) = A_d + I \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0.7 & 1 \\ 1 & 1 & 1.7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi(2) &= (A_d + I \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix})\Phi(1) - (-1)^2 I \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0.7 & 1 \\ 1 & 1 & 1.7 \end{bmatrix}^2 \\ &- \begin{bmatrix} -0.21 & 0 & 0 \\ 0 & -0.21 & 0 \\ 0 & 0 & -0.21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.4 & 1 \\ 1 & 1.8 & 2.4 \\ 2.4 & 3.4 & 4.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Macierz sterowalności (osiągalności) ma następującą postać:

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & \Phi(1)B & \Phi(2)B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2.4 \\ 1 & 1.7 & 4.2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } \mathcal{S} = 3$$

dany układ jest więc sterowalny i osiągalny.

Stosując Twierdzenie 23 otrzymujemy ten sam rezultat

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & (A_d + In)B & (A_d + In)^2 B \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2.4 \\ 1 & 1.7 & 3.89 \end{bmatrix} = 3$$

3.3.3 Dekompozycja układu niesterowalnego (nieosiągalnego)

Ze względu na to, iż warunek sterowalności i osiągalności jest identyczny z analogicznymi warunkami dla układów całkowitego rzędu, układ nieosiągalny (niesterowalny) możemy zdekomponować w sposób analogiczny, jak układy całkowitego rzędu.

Twierdzenie 26 Można znaleźć taką macierz przekształcenia P , które zdekomponuje macierze A_d i B w następujący sposób:

$$A_d = P \begin{bmatrix} A_{ds} & A_{d\bar{s}\bar{s}} \\ 0 & A_{\bar{d}\bar{s}} \end{bmatrix} P^{-1}, \quad B = P \begin{bmatrix} B_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie A_{ds} jest macierzą podkładu sterowalnego, a $A_{\bar{d}\bar{s}}$ jest macierzą podkładu niesterowalnego.

■

Dowód:

Ze względu na to, iż warunek sterowalności (osiągalności), dany Twierdzeniami 20 i 24, jest identycznym warunkiem jak dla układów pierwszego rzędu, dowód twierdzenia jest identyczny z dowodem Twierdzenia 5.8 z [85] str. 209.

□

3.3.4 Obserwowalność

Definicja 28 *Układ dany Definicją 15 nazywamy obserwowalnym na przedziale czasu $k \in [0, k_f]$ wtedy i tylko wtedy, gdy x_0 może być jednoznacznie wyznaczony na podstawie danych y_k i u_k dla $k \in [0, k_f]$.*

□

Twierdzenie 27 *Układ standardowy dany Definicją 12 jest obserwowalny (w N krokach) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\text{rank}[\mathcal{O}] = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ C\Phi(1) \\ C\Phi(2) \\ \vdots \\ C\Phi(N-1) \end{bmatrix} = N \quad (3.24)$$

gdzie N jest liczbą równań stanu, \mathcal{O} jest macierzą obserwowalności, a $\Phi(j)$ jest macierzą transycji dla kroku j daną następującą relacją:

$$\Phi(k+1) = (A_d + In)\Phi(k) - \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} \Phi(k+1-j)$$

■

Dowód:

Rozwiążanie układu FOSS dane jest następująco:

$$x_k = \Phi(k)x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1)Bu_j$$

Wyznaczając kolejne wartości odpowiedzi układu, otrzymujemy układ równań z niewiadomą x_0

$$\begin{aligned} y_0 &= Cx_0 + Du_0 \\ y_1 &= C\Phi(1)x_0 + \Phi(0)Bu_0 + Du_1 \\ y_2 &= C\Phi(2)x_0 + \Phi(1)Bu_0 + \Phi(0)Bu_1 + Du_2 \\ &\vdots \quad \vdots \\ y_{N-1} &= C\Phi(N-1)x_0 + \sum_{j=0}^{N-2} \Phi(N-j-2)Bu_j + Du_{N-1} \end{aligned}$$

Można go zapisać w następujący sposób:

$$x_0 \begin{bmatrix} C \\ C\Phi(1) \\ C\Phi(2) \\ \vdots \\ C\Phi(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Phi(0)B & D & 0 & \dots & 0 \\ \Phi(1)B & \Phi(0)B & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi(N-2)B & \Phi(N-3)B & \Phi(N-4)B & \dots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}$$

Ten układ równań ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki podane w 3.24.

□

Warunek ten możemy uprościć analogicznie do warunku sterowalności i obserwonalności.

Twierdzenie 28 *Układ standardowy dany Definicją 12 jest obserwowlalny (w N krokach) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\text{rank}[\mathcal{O}_{\mathcal{I}}] = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ C(A_d + In) \\ C(A_d + In)^2 \\ \vdots \\ C(A_d + In)^{N-1} \end{bmatrix} = N \quad (3.25)$$

gdzie N jest liczbą równań stanu, a $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}$ jest macierzą obserwowlalności w postaci równoważnej pierwszej.

■

Dowód:

Korzystając z Lematu 9 otrzymujemy

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ C(A_d + In) \\ C[(A_d + In)^2 + f_{2,1}(A_d + In) + f_{2,0}I] \\ \vdots \\ C[(A_d + In)^{N-1} + f_{N-1,N-2}(A_d + In)^{N-2} + \cdots + f_{N-1,0}I] \end{bmatrix} = N \quad (3.26)$$

Elementy macierzy z powyższego warunku można otrzymać poprzez wykonanie działań elementarnych (na wierszach) na macierzy

$$\begin{bmatrix} C \\ C(A_d + In) \\ C(A_d + In)^2 \\ \vdots \\ C(A_d + In)^{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Działania elementarne nie zmieniają rzędu macierzy, w związku z tym spełnienie warunku z Twierdzenia 27 jest równoznaczne ze spełnieniem warunku z Twierdzenia 28.

□

Twierdzenie 29 *Układ standardowy dany Definicją 12 jest obserwowałny (w N krokach) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\text{rank}[\mathcal{O}_{II}] = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA_d \\ CA_d^2 \\ \vdots \\ CA_d^{N-1} \end{bmatrix} = N$$

gdzie N jest liczbą równań stanu, a \mathcal{O}_{II} jest macierzą obserwonalności w postaci równoważnej drugiej.

■

Dowód:

Korzystając z Lematu 10 otrzymujemy

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ C(A_d + In) \\ C[(A_d + In)^2 + w_{2,1}(A_d + In) + w_{2,0}I] \\ \vdots \\ C[(A_d + In)^{N-1} + \cdots + w_{N-1,0}I] \end{bmatrix} = N$$

Elementy macierzy z powyższego warunku można otrzymać poprzez wykonanie działań elementarnych (na wierszach) na macierzy:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA_d \\ CA_d^2 \\ \vdots \\ CA_d^{N-1} \end{bmatrix}$$

Działania elementarne nie zmieniają rzędu macierzy, w związku z tym spełnienie warunków z Twierdzeń 27 i 28 jest równoznaczne ze spełnieniem warunku z Twierdzenia 29.

□

Twierdzenie 30 *Układ dany Definicja 15 jest obserwowałny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ C\Phi(1) \\ C\Phi(2) \\ \vdots \\ C\Phi(N-1) \end{bmatrix} = N \quad (3.28)$$

gdzie N jest liczbą równań stanu, $\Phi(j)$ jest macierzą transycji dla kroku j daną następującą relacją:

$$\Phi(k+1) = (A_d + \Upsilon_1)\Phi(k) - \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \Phi(k+1-j)$$

■

Dowód: Jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 27, w miejscu $\Phi(k)$ należy podstawić $\Phi^\Upsilon(k)$.

□

Przykład 10 Sprawdźmy, czy dana para macierzy (A_d, C) układu o rzędzie n jest obserwowała.

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, n = 0.7$$

Rozwiązań:

Wyznaczmy na początku potrzebne macierze transycji $\Phi(1)$ i $\Phi(2)$

$$\Phi(1) = A_d + I \binom{n}{1} = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0.7 & 1 \\ 1 & 1 & 1.7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi(2) &= (A_d + I \binom{n}{1})\Phi(1) - (-1)^2 I \binom{n}{2} \\ &= \begin{bmatrix} 0.7 & 1.4 & 1 \\ 1 & 1.7 & 2.4 \\ 2.4 & 3.4 & 4.1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Macierz obserwonalności ma następującą postać:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi(1) \\ C\Phi(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0 \\ 0.7 & 1.4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } \mathcal{O} = 3$$

dany układ jest więc obserwonalny.

Stosując Twierdzenie 28 otrzymujemy ten sam rezultat

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ C(A_d + In) \\ C(A_d + In)^2 \end{bmatrix} \\ = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0 \\ 0.49 & 1.4 & 1 \end{bmatrix} = 3 \end{aligned}$$

Stosując Twierdzenie 29 otrzymujemy ten sam rezultat

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA_d \\ CA_d^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

3.3.5 Dekompozycja układu nieobserwonalnego

Analogiczne do twierdzenia pokazanego w podrozdziale 3.3.3 możemy sformułować następujące twierdzenie o dekompozycji układu nieobserwonalnego:

Twierdzenie 31 Można znaleźć taką macierz przekształcenia P , która zdekomponuje macierze A_d i C w następujący sposób:

$$A_d = P \begin{bmatrix} A_{do} & 0 \\ A_{d\bar{o}\bar{o}} & A_{d\bar{o}} \end{bmatrix} P^{-1}, \quad C = \begin{bmatrix} C_o & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

gdzie A_{do} jest macierzą podkładu obserwonalnego, a $A_{d\bar{o}}$ jest macierzą podkładu nieobserwonalnego.

■

Dowód:

Ze względu na to, iż warunek obserwowalności dany Twierdzeniem 29 jest identyczny warunkiem dla układów pierwszego rzędu, dowód twierdzenia jest zatem identyczny z dowodem Twierdzenia 5.9 z [85] str. 209.

□

3.4 Macierze transmitancji, postacie kanoniczne i równania różnicowe układu DFOSS

W rozdziale tym przedstawione zostaną inne formy opisu dyskretnych układów ułamkowego rzędu, takie jak: transmitancję i równanie różnicowe. W Podrozdziale 3.4.1 wprowadzony zostanie transmitancja dyskretnego układu ułamkowego rzędu wraz definicjami biegunów i biegunów systemowych. W Podrozdziale 3.4.2 przedstawione są postacie kanoniczne: regulatorowa i obserwatorowa układu SISO opisanego w przestrzeni stanu wraz z odpowiadającą im postacią transmitancji. W podrozdziale 3.4.3 przedstawione są postacie równań różnicowych odpowiadające danym postaciom transmitancji. Podrozdział 3.4.4 przedstawia algorytmy sprowadzania układu do postaci kanonicznej.

3.4.1 Macierze transmitancji układu DFOSS

Definicja 29 *Transmitancją dyskretną (układu SISO) nazywamy następującą relację*

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

gdzie $Y(z)$ jest transformatą \mathcal{Z} sygnału wyjściowego, $U(z)$ jest transformatą \mathcal{Z} sygnału wejściowego, przy założeniu zerowych warunków początkowych ($y_j = 0$ dla $j \leq 0$), ($u_j = 0$ dla $j \leq 0$) i zerowych pozostałych wejść.

■

Definicja 30 *Macierz transmitancji dyskretnych dana jest relacją*

$$G(z) = [G_{i,j}(z)] = \begin{bmatrix} G_{1,1}(z) & \dots & G_{1,i}(z) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ G_{j,1}(z) & \dots & G_{j,i}(z) \end{bmatrix}$$

gdzie $G_{i,j}(z)$ jest transmitancją pomiędzy i -tym wejściem i j -tym wyjściem układu, przy założeniu zerowych warunków początkowych ($y_{j,l} = 0$ dla $l \leq 0$), ($u_{i,l} = 0$ dla $l \leq 0$) oraz zerowego wymuszenia (odpowiedzi) na pozostałych wejściach (wyjściach).

■

Transmitancja układu standardowego danego Definicją 12

Twierdzenie 32 Dla deterministycznego układu ułamkowego rzędu danego przez definicję 12 transmitancja dana jest następującym wyrażeniem (przy założeniu zerowych warunków początkowych):

$$G(z) = C(I(z\Delta^n(z)) - A_d)^{-1}B + D$$

■

Dowód:

Przedstawmy równania z Definicji 12 dokonując ich transformaty \mathcal{Z} przy założeniu zerowych warunków początkowych ($x_j = 0, y_j = 0, u_j = 0$ dla $j \leq 0$).

$$z\Delta^n(z)X(z) = A_dX(z) + BU(z) \quad (3.29)$$

$$Y(z) = CX(z) + DU(z) \quad (3.30)$$

gdzie $z\Delta^n(z)$ jest traktowane jako wielomian zmiennej z równy

$$z\Delta^n(z) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} z^{-j+1}$$

Wyznaczając $X(z)$ z równania (3.29)

$$X(z) = (I(z\Delta^n(z)) - A_d)^{-1}B$$

i podstawiając do równania (3.30), otrzymujemy

$$G(z) = C(I(z\Delta^n(z)) - A_d)^{-1}B + D$$

□

Przykład 11 Dany jest układ następującymi macierzami:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o rzędzie równym n .

Macierz transmitancji tego układu wyznaczona zostanie następująco:

$$\begin{aligned} G(z) &= C(I(z\Delta^n(z)) - A_d)^{-1}B + D \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z\Delta^n(z) - 1 & -2 \\ -3 & z\Delta^n(z) - 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{z^2\Delta^{2n}(z) - 5z\Delta^n(z) - 2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z\Delta^n(z) - 4 & -2 \\ -3 & z\Delta^n(z) - 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2z\Delta^n(z)+1}{z^2\Delta^{2n}(z)-5z\Delta^n(z)-2} & \frac{3z\Delta^n(z)+1}{z^2\Delta^{2n}(z)-5z\Delta^n(z)-2} \\ \frac{z\Delta^n(z)+2}{z^2\Delta^{2n}(z)-5z\Delta^n(z)-2} & \frac{2z\Delta^n(z)}{z^2\Delta^{2n}(z)-5z\Delta^n(z)-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Transmitancja jest więc funkcją zmiennej z , co można zapisać jako:

$$G(z) = \frac{l(z)}{m(z)}$$

gdzie $l(z)$ jest funkcją licznika transmitancji, a $m(z)$ funkcją mianownika transmitancji.

Dla układu danego Definicję 12 maksymalny stopień potęgi zmiennej z zawartej w tych funkcjach zależy od chwili k , dla której układ jest rozpatrywany i rośnie do nieskończoności, gdy czas układu rośnie do nieskończoności.

Dla układu danego Definicję 23 stopień tych potęg zależy od długości implementacji danego układu L (patrz Definicja 22).

Definicja 31 Biegunami danej implementacji układu, w skrócie biegunami układu, nazywamy miejsca zerowe funkcji mianownika transmitancji $m(z)$ ze względu na zmienną z .

Definicja 32 Zerami danej implementacji układu, w skrócie zerami układu, nazywamy miejsca zerowe funkcji licznika transmitancji $l(z)$ ze względu na zmienną z .

Ze względu na to, iż liczba biegunów i zer danej realizacji zależy od długości realizacji, znacznie prostszym w zapisie i analizie podejściem jest podejście wykorzystujące operator $z\Delta^n(z)$.

Definicja 33 Operator $z\Delta^n(z)$ zdefiniowany jest następującą relacją:

$$z\Delta^n(z) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} z^{-j+1}$$

Twierdzenie 33 Operator $z\Delta^n(z)$ posiada następujące własności:

a) *Jest liniowy*

$$az\Delta^n(z) + bz\Delta^n(z) = (a+b)z\Delta^n(z)$$

b) *Spełnia prawo wykładników:*

$$z\Delta^{n_1}(z)z\Delta^{n_2}(z) = z^2\Delta^{n_1+n_2}(z)$$

■

Dowód części a):

$$\begin{aligned} az\Delta^n(z) + bz\Delta^n(z) &= a \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} z^{-j+1} + b \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} z^{-j+1} \\ &= (a+b) \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} z^{-j+1} = (a+b)z\Delta^n(z) \end{aligned}$$

Dowód części b):

$$\begin{aligned} z\Delta^{n_1}(z)z\Delta^{n_2}(z) &= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{n_1}{j} \sum_{l=0}^{j+1} (-1)^l \binom{n_2}{l} z^{-l+1} \\ &= \sum_{j=0}^{k+2} (-1)^j \binom{n_1+n_2}{j} z^{-j+1} = z^2\Delta^{n_1+n_2}(z) \end{aligned}$$

□

Możemy teraz przedstawić transmitancję jako iloraz dwóch wielomianów operatora $z\Delta^n(z)$

$$G(z\Delta^n(z)) = \frac{l(z\Delta^n(z))}{m(z\Delta^n(z))} = \frac{(z\Delta^n(z) - \lambda_{b,1})(z\Delta^n(z) - \lambda_{b,2}) \dots (z\Delta^n(z) - \lambda_{b,N_b})}{(z\Delta^n(z) - \lambda_{a,1})(z\Delta^n(z) - \lambda_{a,2}) \dots (z\Delta^n(z) - \lambda_{a,N_a})}$$

gdzie $l(z\Delta^n(z))$ jest wielomianem licznika, $m(z\Delta^n(z))$ jest wielomianem mianownika, obydwa wielomiany są wielomianami operatora $z\Delta^n(z)$. N_b natomiast jest liczbą zer systemowych $\lambda_{b,i}$, a N_a jest liczbą biegów systemowych $\lambda_{a,i}$.

Definicja 34 *Biegunami systemowymi $\lambda_{a,i}$ układu nazywamy miejsca zerowe wielomianu mianownika transmitancji $m(z\Delta^n(z))$ ze względu na operator $z\Delta^n(z)$.*

Definicja 35 *Zerami systemowymi $\lambda_{b,i}$ układu nazywamy miejsca zerowe wielomianu licznika transmitancji $l(z\Delta^n(z))$ ze względu na operator $z\Delta^n(z)$.*

Zależność pomiędzy biegunami a biegunami systemowymi układu DFOSS

W podrozdziale tym, przy użyciu pojęć biegunów układu (Definicja 31) i biegunów systemowych układu (Definicja 34), przedstawiona zostanie analiza relacji pomiędzy tymi dwoma pojęciami dla układu standardowego.

Transmitancję układu standardowego możemy rozłożyć na ułamki proste, otrzymując następującą zależność:

$$G(z\Delta^n(z)) = \sum_{j=1}^p \sum_{r=1}^{d_j} \frac{w_j}{(z\Delta^n(z) - \lambda_{a,j})^r}$$

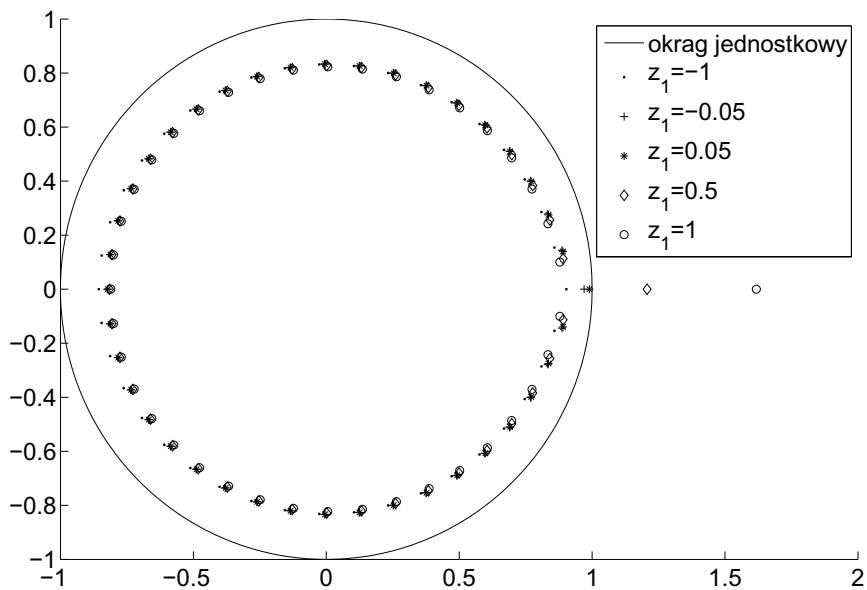
gdzie w_j są współczynnikami uzyskanymi z rozkładu transmitancji na ułamki proste, p jest liczbą biegunów systemowych, a d_j krotnością j -tego biegu. Ze względu na liniowość odwrotnej transformaty \mathcal{Z}^{-1} każdemu modowi $\frac{1}{z\Delta^n(z) - \lambda_{a,1}}$ tak zapisanej transmitancji odpowiada jeden niezależny od innych mod odpowiedzi $\mathcal{Z}^{-1}[\frac{1}{z\Delta^n(z) - \lambda_{a,1}}U(z)]$.

Weźmy więc transmitancję zawierającą jeden mod, jeden biegun systemowy $\lambda_{a,1}$ i L odpowiadających mu biegunów układu (w liczbie zależnej od długości implementacji układu).

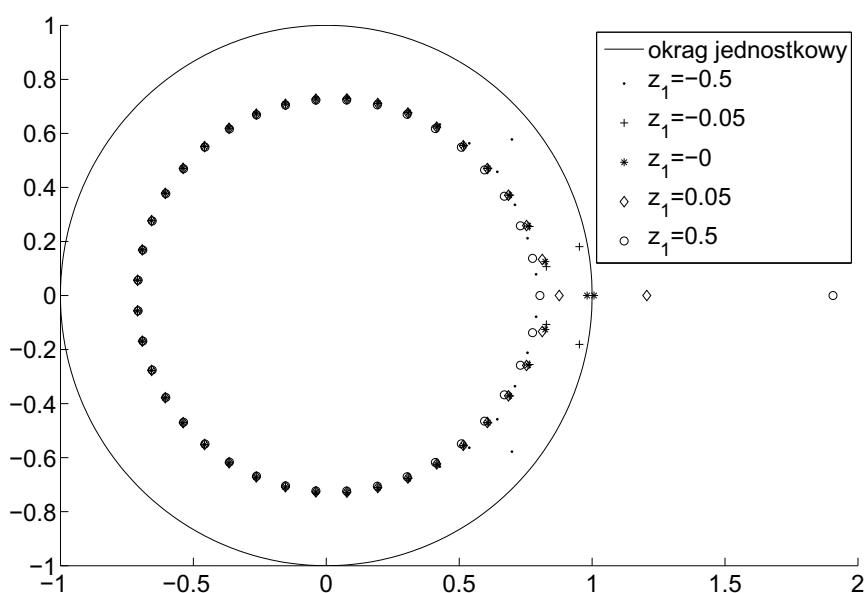
$$G(z) = \frac{1}{z\Delta^n(z) - \lambda_{a,1}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^L (z - z_{a,i})}$$

Na Rys. 3.20 przedstawione są położenia biegunów układu dla różnych wartości biegu systemowego $\lambda_{a,1} = -1, -0.05, 0.05, 0.5, 1$ dla rzędu układu równego $n = 0.5$. Jak można zaobserwować, zmiana wartości biegu systemowego powoduje różną zmianę położenia wszystkich biegunów układu, w szczególności zaś dużą zmianę położenia biegu o największej wartości części rzeczywistej.

Na Rys. 3.21 przedstawione są położenia biegunów układu dla różnych wartości biegu systemowego $\lambda_{a,1} = -0.5, -0.05, 0, 0.05, 0.5$ dla rzędu układu równego $n = 1.8$. Jak można



Rysunek 3.20: Zależność pomiędzy biegunami a biegunami systemowymi układu dla $n = 0.5$



Rysunek 3.21: Zależność pomiędzy biegunami a biegunami systemowymi układu dla $n = 1.8$

zaobserwować, podobnie jak dla poprzedniego przykładu, zmiana wartości bieguna systemowego powoduje różną zmianę położenia wszystkich biegunów układu. W szczególności zaś powoduje dużą zmianę położenia dwóch biegunów o największej wartości części rzeczywistej.

Transmitancja układu uogólnionego danego Definicją 15

Twierdzenie 34 *Dla deterministycznego uogólnionego układu ułamkowego rzędu danego przez definicję 15 transmitancja dana jest wyrażeniem*

$$G(z) = C(I(z\Delta^\gamma(z)) - A_d)^{-1}B + D$$

■

Dowód:

Przedstawmy więc równania z Definicji 15, dokonując ich transformaty \mathcal{Z} przy założeniu zerowych warunków początkowych ($x_j = 0, y_j = 0, u_j = 0$ dla $j \leq 0$).

$$z\Delta^\gamma(z)X(z) = A_dX(z) + BU(z) \quad (3.31)$$

$$Y(z) = CX(z) + DU(z) \quad (3.32)$$

gdzie $z\Delta^\gamma$ jest traktowane jako wielomian zmiennej z równy

$$z\Delta^\gamma(z) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j z^{-j+1}$$

Wyznaczając $X(z)$ z równania 3.31

$$X(z) = (I(z\Delta^\gamma(z)) - A_d)^{-1}B$$

i podstawiając do równania 3.32, otrzymujemy

$$G(z) = C(I(z\Delta^\gamma(z)) - A_d)^{-1}B + D$$

□

Przykład 12 *Dany jest układ z następującymi macierzami:*

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Macierz transmitancji tego układu wyznaczona zostanie następująco:

$$\begin{aligned}
G(z) &= C(I(z\Delta^\gamma(z)) - A_d)^{-1}B + D \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z\Delta^{n_1}(z) - 1 & -2 \\ -3 & z\Delta^{n_2}(z) - 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{z\Delta^{n_1+n_2}(z) - z\Delta^{n_2}(z) - 4z\Delta^{n_1}(z) - 2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z\Delta^{n_2}(z) - 4 & 2 \\ 3 & z\Delta^{n_1}(z) - 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{z\Delta^{n_1+n_2}(z) - z\Delta^{n_2}(z) - 4z\Delta^{n_1}(z) - 2} \begin{bmatrix} 2z\Delta^{n_2}(z) + 1 & 3z\Delta^{n_1}(z) + 1 \\ z\Delta^{n_2}(z) + 2 & 2z\Delta^{n_1}(z) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

Transmitancja jest więc tak samo jak w przypadku transmitancji dla układu danego Definicją 12 funkcją zmiennej z :

$$G(z) = \frac{l(z)}{m(z)}$$

Dla Definicji 15 stopień tych funkcji (najwyższa potęga zmiennej z) zależy od chwili k , dla której układ jest rozpatrywany i rośnie do nieskończoności, gdy czas układu rośnie do nieskończoności.

Dla Definicji 24 stopień tych funkcji zależy od długości implementacji danego układu L (patrz Definicja 22).

Definicje biegunów i zer układu danego Definicję 15 są identyczne do Definicji 31 i 32.

Używając operatora $z\Delta^n(z)$ możemy transmitancję zapisać jako

$$G(z\Delta^{n_1}(z), z\Delta^{n_2}(z), \dots, z\Delta^{n_N}(z)) = \frac{l(z\Delta^{n_1}(z), z\Delta^{n_2}(z), \dots, z\Delta^{n_N}(z))}{m(z\Delta^{n_1}(z), z\Delta^{n_2}(z), \dots, z\Delta^{n_N}(z))}$$

lub w skrócie

$$G(z\Delta^\gamma(z)) = \frac{l(z\Delta^\gamma(z))}{m(z\Delta^\gamma(z))}$$

gdzie $z\Delta^\gamma(z)$ dana jest jako macierz diagonalna operatorów $z\Delta^{n_i}(z)$

$$z\Delta^\gamma(z) = \text{diag} \left[\begin{array}{cccc} z\Delta^{n_1}(z) & z\Delta^{n_2}(z) & \dots & z\Delta^{n_N}(z) \end{array} \right]$$

Transmitancja ta jest więc funkcją N operatorów $z\Delta^{n_i}(z)$, dlatego też definicje zer systemowych i biegunów systemowych danych przez Definicje 35 i 34 nie mają w tym przypadku zastosowania.

3.4.2 Postacie kanoniczne

Postać kanoniczna regulatorowa

Postać kanoniczna regulatorowa jest identyczna z postacią regulatorową układów całkowitego rzędu. Jest on szczególnie użyteczna przy projektowaniu regulatorów od stanu (patrz Rozdział 6.1.1).

Definicja 36 Postacią regulatorową układu SISO nazywamy następujące macierze:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{N-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{N-1} \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 35 Dla układu uogólnionego danego Definicję 15 w postaci kanonicznej regulatorowej transmitancja ma następującą postać:

$$G(z\Delta^{\Upsilon}(z)) = \frac{b_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n_{N-1}^*}(z) + \dots + b_1z\Delta^{n_1^*}(z) + b_0}{z^N\Delta^{n_N^*}(z) + a_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n_{N-1}^*}(z) + \dots + a_1z\Delta^{n_1^*}(z) + a_0}$$

gdzie

$$n_N^* = n_1 + n_2 + \dots + n_N \quad (3.33)$$



Dowód:

Uwzględniając, że $z\Delta^n(z)$ jest funkcją skalarną, przez analogię do tradycyjnych układów pierwszego rzędu można zapisać, że

$$G(z\Delta^\Upsilon(z)) = C(Iz\Delta^\Upsilon(z) - A_d)^{-1}B = \frac{C\text{adj}(Iz\Delta^\Upsilon(z) - A_d)B}{\det(Iz\Delta^\Upsilon(z) - A_d)}$$

Rozwijając wyznacznik macierzy $(Iz\Delta^\Upsilon(z) - A_d)$ względem jej n -tego wiersza otrzymujemy [85, str. 222]

$$\begin{aligned} \det(Iz\Delta^\Upsilon(z) - A_d) &= \begin{vmatrix} z\Delta^{n_1}(z) & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z\Delta^{n_2}(z) & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z\Delta^{n_{N-1}}(z) & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-2} & z\Delta^{n_N}(z) + a_{N-1} \end{vmatrix} \\ &= z^N \Delta^{n_N^*}(z) + a_{N-1}z\Delta^{n_{N-1}^*}(z) + \dots + a_1z\Delta^{n_1^*}(z) + a_0 \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\text{adj}(Iz\Delta^\Upsilon(z) - A_d)B = \begin{bmatrix} 1 \\ z\Delta^{n_1^*}(z) \\ \vdots \\ z\Delta^{n_{N-1}^*}(z) \end{bmatrix}$$

otrzymujemy,

$$G(z) = \frac{b_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n_{N-1}^*}(z) + \dots + b_1z\Delta^{n_1^*}(z) + b_0}{z^N \Delta^{n_N^*}(z) + a_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n_{N-1}^*}(z) + \dots + a_1z\Delta^{n_1^*}(z) + a_0}$$

gdzie

$$n_N^* = n_1 + n_2 + \dots + n_N \quad (3.34)$$

□

Twierdzenie 36 Dla układu standardowego danego Definicja 12 w postaci kanonicznej regułatorowej transmitancja ma następującą postać:

$$\begin{aligned} G(z) &= C(I(z\Delta^n(z) - A_d)^{-1}B + D \\ &= \frac{b_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n(N-1)}(z) + \dots + b_1z\Delta^n(z) + b_0}{z^N \Delta^{n(N)}(z) + a_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n(N-1)}(z) + \dots + a_1z\Delta^n(z) + a_0} \end{aligned}$$

■

Dowód:

Układ standardowy dany Definicją 12 jest szczególnym przypadkiem układu uogólnionego, dla którego:

$$n_l^* = ln \quad \text{gdzie} \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (3.35)$$

Otrzymujemy wtedy

$$G(z) = \frac{b_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n(N-1)}(z) + \dots + b_1z\Delta^n(z) + b_0}{z^N\Delta^{n(N)}(z) + a_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n(N-1)}(z) + \dots + a_1z\Delta^n(z) + a_0}$$

□

Postać kanoniczna obserwatorowa

Postać kanoniczna obserwatorowa jest identyczna z postacią obserwatorową układów całkowitego rzędu. Jest ona szczególnie użyteczna przy projektowaniu obserwatorów stanu (patrz Rozdział 5.1).

Definicja 37 Postacią obserwatorową układu SISO nazywamy następujące postacie macierzy:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{N-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 37 Dla układu uogólnionego danego Definicją 15 w postaci kanonicznej obserwatorowej transmitancja ma następującą postać:

$$G(z\Delta^\gamma(z)) = \frac{b_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n_{N-1}^*}(z) + \dots + b_1z\Delta^{n_1^*}(z) + b_0}{z^N\Delta^{n_N^*}(z) + a_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n_{N-1}^*}(z) + \dots + a_1z\Delta^{n_1^*}(z) + a_0}$$

gdzie

$$n_N^* = n_1 + n_2 + \dots + n_N \quad (3.36)$$

■

Dowód:

Uwzględniając, że $z\Delta^n(z)$ jest funkcją skalarną, przez analogię do tradycyjnych układów pierwszego rzędu można zapisać, że

$$G(z\Delta^\gamma(z)) = C(Iz\Delta^\gamma(z) - A_d)^{-1}B = \frac{C\text{adj}(Iz\Delta^\gamma(z) - A_d)B}{\det(Iz\Delta^\gamma(z) - A_d)}$$

Rozwijając wyznacznik macierzy $(Iz\Delta^\gamma(z) - A_d)$ względem jej n -tego wiersza, otrzymujemy [85, str. 222]

$$\begin{aligned} \det(Iz\Delta^\gamma(z) - A_d) &= \begin{vmatrix} z\Delta^{n_1}(z) & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z\Delta^{n_2}(z) & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z\Delta^{n_{N-1}}(z) & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-2} & z\Delta^{n_N}(z) + a_{N-1} \end{vmatrix} \\ &= z^N \Delta^{n_N^*}(z) + a_{N-1}z\Delta^{n_{N-1}^*}(z) + \dots + a_1z\Delta^{n_1^*}(z) + a_0 \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\text{adj}C(Iz\Delta^\gamma(z) - A_d) = \begin{bmatrix} 1 & z\Delta^{n_1^*}(z) & \dots & z\Delta^{n_{N-1}^*}(z) \end{bmatrix}$$

otrzymujemy,

$$G(z) = \frac{b_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n_{N-1}^*}(z) + \dots + b_1z\Delta^{n_1^*}(z) + b_0}{z^N \Delta^{n_N^*}(z) + a_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n_{N-1}^*}(z) + \dots + a_1z\Delta^{n_1^*}(z) + a_0}$$

gdzie

$$n_N^* = n_1 + n_2 + \dots + n_N \quad (3.37)$$

□

Twierdzenie 38 Dla układu standardowego danego Definicja 12 w postaci kanonicznej obserwatorowej transmitancja ma następującą postać:

$$\begin{aligned} G(z) &= C(I(z\Delta^n(z)) - A_d)^{-1}B + D \\ &= \frac{b_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n(N-1)}(z) + \dots + b_1z\Delta^n(z) + b_0}{z^N \Delta^{n(N)}(z) + a_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n(N-1)}(z) + \dots + a_1z\Delta^n(z) + a_0} \end{aligned}$$

■

Dowód:

Układ standardowy dany Definicją 12 jest szczególnym przypadkiem układu uogólnionego, dla którego:

$$n_l^* = ln \quad \text{gdzie} \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (3.38)$$

Otrzymujemy wtedy

$$G(z) = \frac{b_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n(N-1)}(z) + \dots + b_1z\Delta^n(z) + b_0}{z^N\Delta^{n(N)}(z) + a_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n(N-1)}(z) + \dots + a_1z\Delta^n(z) + a_0}$$

□

3.4.3 Równania różnicowe

Równania różnicowe układu standardowego, jak i uogólnionego wynikają bezpośrednio z postaci transmitancji.

Twierdzenie 39 *Dla uogólnionego układu ułamkowego rzędu danego przez definicję 15 danego w postaci kanonicznej regulatorowej lub obserwatorowej, równanie różnicowe odpowiadające takiemu układowi jest określone następującą zależnością:*

$$\begin{aligned} \Delta^{n_N^*}y_k + a_{N-1}\Delta^{n_{N-1}^*}y_{k-1} + \dots + a_0y_{k-N} = \\ b_{N-1}\Delta^{n_{N-1}^*}u_{k-1} + \dots + b_0u_{k-N} \end{aligned} \quad (3.39)$$

gdzie

$$n_N^* = n_1 + n_2 + \dots + n_N \quad (3.40)$$

■

Dowód:

Transmitancja układu w postaci kanonicznej regulatorowej lub obserwatorowej jest następująca:

$$G(z) = \frac{b_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n_{N-1}^*}(z) + \dots + b_1z\Delta^{n_1^*}(z) + b_0}{z^N\Delta^{n_N^*}(z) + \dots + a_1z\Delta^{n_1^*}(z) + a_0}$$

gdzie

$$n_N^* = n_1 + n_2 + \cdots + n_N \quad (3.41)$$

co można zapisać jako

$$\begin{aligned} & (b_{N-1}z^{N-1}\Delta^{n_{N-1}^*}(z) + \cdots + b_1z\Delta^{n_1^*}(z) + b_0)U(z) \\ &= (z^N\Delta^{n_N^*}(z) + \cdots + a_1z\Delta^{n_1^*}(z) + a_0)Y(z) \end{aligned}$$

Używając odwrotnej transformaty \mathcal{Z} , przy założeniu zerowych warunków początkowych, wynikających z definicji transmitancji, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \Delta^{n_N^*}y_k + a_{N-1}\Delta^{n_{N-1}^*}y_{k-1} + \cdots + a_0y_{k-N} = \\ & b_{N-1}\Delta^{n_{N-1}^*}u_{k-1} + \cdots + b_0u_{k-N} \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 40 *Dla deterministycznego układu ułamkowego rzędu danego przez definicję 12, równanie różnicowe odpowiadające takiemu układowi jest określone następującą zależnością:*

$$\begin{aligned} & \Delta^{(N)n}y_k + a_{N-1}\Delta^{(N-1)n}y_{k-1} + \cdots + a_0y_{k-N} = \\ & b_{N-1}\Delta^{(N-1)n}u_{k-1} + \cdots + b_0u_{k-N} \end{aligned}$$

■

Dowód:

Układ standardowy dany Definicją 12 jest szczególnym przypadkiem układu uogólnionego, dla którego:

$$n_l^* = ln \quad \text{gdzie} \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (3.42)$$

Otrzymujemy więc:

$$\begin{aligned} & \Delta^{(N)n}y_k + a_{N-1}\Delta^{(N-1)n}y_{k-1} + \cdots + a_0y_{k-N} = \\ & b_{N-1}\Delta^{(N-1)n}u_{k-1} + \cdots + b_0u_{k-N} \end{aligned}$$

□

3.4.4 Wyznaczanie macierzy przekształcenia na podstawie macierzy ste- rowalności lub obserwowalności

Niech będzie dany dyskretny układ ułamkowego rzędu o zmiennych stanu x_k . Niech będzie dany także odpowiadający mu układ w innej postaci (wygodniejszej np. kanonicznej), o zmiennych stanu oznaczonych jako z_k . Nieznana jest natomiast macierz P , zadająca następujące przekształcenie pomiędzy tymi dwoma układami $z_k = Px_k$.

Lemat 11 *Zależność pomiędzy macierzami tranzycji układów o zmiennych stanu x_k i z_k dana jest następująco:*

$$\Phi_x(k) = P^{-1}\Phi_z(k)P$$

gdzie $\Phi_x(k)$ i $\Phi_z(k)$ są macierzami tranzycji odpowiednio układów x_k i z_k w chwili k .

Dowód:

Rozwiążanie obydwu układów dla $u_k = 0$ jest dane następującymi zależnościami:

$$x_k = \Phi_x(k)x_0$$

$$z_k = \Phi_z(k)z_0$$

Podstawiając do powyższego równania przekształcenie zadawane przez macierz P , otrzymujemy

$$Px_k = \Phi_z(k)Px_0$$

co możemy przekształcić do następującej postaci:

$$P\Phi_x(k)x_0 = \Phi_z(k)Px_0$$

a następnie

$$\Phi_x(k)x_0 = P^{-1}\Phi_z(k)Px_0$$

co daje relację określoną Lematem 11.

Twierdzenie 41 Macierz przekształcenia P pomiędzy dwoma układami o zmiennych stanu odpowiednio x_k, z_k dana jest następującą relacją:

$$P = S_z S_x^{-1}$$

gdzie S_x jest macierzą sterowalności układu o zmiennych stanu x_k , a S_z jest macierzą sterowalności układu o zmiennych stanu z_k .

Dowód: Dowód jest analogiczny do pokazanego w [85].

Macierz sterowalności układu x_k równa jest

$$S_x = \begin{bmatrix} B & \Phi_x(1)B & \dots & \Phi_x(n-1)B \end{bmatrix}$$

Macierz sterowalności układu z_k natomiast równa jest

$$S_z = \begin{bmatrix} PB & \Phi_z(1)PB & \dots & \Phi_z(n-1)PB \end{bmatrix}$$

Korzystając z Lematu 11 otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_z &= \begin{bmatrix} PB & P\Phi_x(1)P^{-1}PB & \dots & P\Phi_x(n-1)P^{-1}PB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} PB & P\Phi_x(1)B & \dots & P\Phi_x(n-1)B \end{bmatrix} \\ &= PS_x \end{aligned}$$

co daje następującą relację:

$$S_z = PS_x$$

Z relacji tej możemy wyznaczyć macierz przekształcenia P w sposób dany Twierdzeniem

41

$$P = S_z S_x^{-1}$$

□

Przykład 13 Wyznaczyć macierz przekształcenia danego układu do postaci kanonicznej regulatorowej

Układ dany jest następująco:

$$A_d = \begin{bmatrix} 2.4 & 2.8 & -0.2 \\ -1.8 & -1.6 & 0.4 \\ 2.5 & 1.5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, n = 0.7$$

$$C = \begin{bmatrix} 13 & 16 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz sterowalności tego układu równa jest

$$S_x = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & 0.56 \\ 0 & 0.4 & -0.12 \\ 1 & -0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Transmitancja układu jest następująca:

$$G(z\Delta^n(z)) = \frac{2z^2\Delta^{2n}(z) + 3z\Delta^n(z) + 1}{z^3\Delta^{3n}(z) + 0.2z^2\Delta^{2n}(z) + 0.3z\Delta^n(z) + 0.1}$$

Układ w postaci kanonicznej regulatorowej jest więc w następującej postaci:

$$A'_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1 & -0.3 & -0.2 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, n = 0.7$$

$$C' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz sterowalności układu w postaci kanonicznej regulatorowej równa jest

$$S_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1.2 \\ 1 & 0.5 & 0.16 \end{bmatrix}$$

Macierz przekształcenia otrzymujemy następująco:

$$P = S_z S_x^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogiczne do Twierdzenia 41 można zdefiniować twierdzenia dla postaci równoważnych macierzy sterowalności.

Lemat 12 Zachodzi następująca relacja:

$$(PA_dP^{-1} + In)^k = P(A_d + In)^k P^{-1}$$

■

Dowód:

$$\begin{aligned} (PA_dP^{-1} + In)^k &= (PA_dP^{-1} + PInP^{-1})^k = (P(A_d + In)P^{-1})^k \\ &= P(A_d + In)P^{-1}P(A_d + In)P^{-1} \dots P(A_d + In)P^{-1} \\ &= P(A_d + In)^k P^{-1} \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 42 Macierz przekształcenia P pomiędzy dwoma układami o zmiennych stanu odpowiednio x_k, z_k dana jest następującą relacją:

$$P = S_{I,z} S_{I,x}^{-1}$$

gdzie $S_{I,x}$ jest macierzą sterowalności w postaci równoważnej pierwszej układu o zmiennych stanu x_k , a $S_{I,z}$ jest macierzą sterowalności układu o zmiennych stanu z_k .

■

Dowód:

Macierz sterowalności w postaci równoważnej pierwszej układu x_k równa jest

$$S_{I,x} = \begin{bmatrix} B & (A_d + In)B & \dots & (A_d + In)^{N-1}B \end{bmatrix}$$

układu z_k natomiast równa jest

$$S_{I,z} = \begin{bmatrix} PB & (A'_d + In)PB & \dots & (A'_d + In)^{N-1}PB \end{bmatrix}$$

Korzystając z Lematu 12 otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_{I,z} &= \begin{bmatrix} PB & P(A_d + In)P^{-1}PB & \dots & P(A_d + In)^{N-1}P^{-1}PB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} PB & P(A_d + In)B & \dots & P(A_d + In)^{N-1}B \end{bmatrix} \\ &= PS_{I,x} \end{aligned}$$

co daje następującą relację:

$$P = S_{I,z} S_{I,x}^{-1}$$

□

Twierdzenie 43 Macierz przekształcenia P pomiędzy dwoma układami o zmiennych stanu odpowiednio x_k, z_k dana jest następującą relacją:

$$P = S_{II,z} S_{II,x}^{-1}$$

gdzie $S_{II,x}$ jest macierzą sterowalności w postaci równoważnej drugiej układu o zmiennych stanu x_k , a $S_{II,z}$ jest macierzą sterowalności w postaci równoważnej drugiej układu o zmiennych stanu z_k .

■

Dowód: Dowód jest analogiczny do pokazanego w [85].

Biorąc pod uwagę, że $(PA_d P^{-1})^k = PA_d^k P^{-1}$
otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_{II,z} &= \begin{bmatrix} PB & PA_d P^{-1}PB & \dots & PA_d^{N-1} P^{-1}PB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} PB & PA_d B & \dots & PA_d^{N-1} B \end{bmatrix} \\ &= PS_{II,x} \end{aligned}$$

co daje następującą relację:

$$P = S_{II,z} S_{II,x}^{-1}$$

□

Twierdzenie 44 Macierz przekształcenia P pomiędzy dwoma układami o zmiennych stanu odpowiednio x_k, z_k dana jest następującą relacją:

$$P = \mathcal{O}_z^{-1} \mathcal{O}_x$$

gdzie \mathcal{O}_x jest macierzą obserwonalności układu o zmiennych stanu x_k , a \mathcal{O}_z jest macierzą obserwonalności układu o zmiennych stanu z_k .

■

Dowód:

Macierz obserwowalności układu x_k równa jest

$$\mathcal{O}_x = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi_x(1) \\ C\Phi_x(2) \\ \vdots \\ C\Phi_x(N-1) \end{bmatrix}$$

układu z_k natomiast równa jest

$$\mathcal{O}_z = \begin{bmatrix} CP^{-1} \\ CP^{-1}\Phi_z(1) \\ CP^{-1}\Phi_z(2) \\ \vdots \\ CP^{-1}\Phi_z(N-1) \end{bmatrix}$$

Korzystając z Lematu 11 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_z &= \begin{bmatrix} CP^{-1} \\ CP^{-1}P\Phi_x(1)P^{-1} \\ CP^{-1}P\Phi_x(2)P^{-1} \\ \vdots \\ CP^{-1}P\Phi_x(N-1)P^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{O}_x P^{-1} \end{aligned}$$

co daje następującą relację:

$$\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_z P$$

Z relacji tej możemy wyznaczyć macierz przekształcenia P w sposób dany Twierdzeniem

$$P = \mathcal{O}_z^{-1} \mathcal{O}_x$$

□

Przykład 14 Wyznaczyć macierz przekształcenia danego układu do postaci kanonicznej obserwatorowej

Układ dany jest następująco:

$$A_d = \begin{bmatrix} -0.4000 & -0.2400 & -0.0200 \\ 0.8000 & 0.2800 & -0.0600 \\ 1.4000 & 3.0400 & -0.0800 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, n = 0.7$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz obserwonalności tego układu równa jest

$$\mathcal{O}_x = \begin{bmatrix} 0 & 2.0000 & 1.0000 \\ 3.0000 & 5.0000 & 0.5000 \\ 5.6000 & 5.9100 & 0.0550 \end{bmatrix}$$

Transmitancja układu jest następująca:

$$G(z\Delta^n(z)) = \frac{2z^2\Delta^{2n}(z) + 3z\Delta^n(z) + 1}{z^3\Delta^{3n}(z) + 0.2z^2\Delta^{2n}(z) + 0.3z\Delta^n(z) + 0.1}$$

Układ w postaci kanonicznej regulatorowej jest więc w następującej postaci:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.1000 \\ 1 & 0 & -0.3000 \\ 0 & 1 & -0.2000 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, n = 0.7$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz obserwonalności układu w postaci kanonicznej obserwatorowej równa jest

$$\mathcal{O}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1.2 & 0.055 \end{bmatrix}$$

Macierz przekształcenia otrzymujemy następująco:

$$P = \mathcal{O}_z^{-1}\mathcal{O}_x = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogicznie do Twierdzenia 44 można zdefiniować twierdzenia dla postaci równoważnych macierzy obserwowalności.

Twierdzenie 45 Macierz przekształcenia P pomiędzy dwoma układami o zmiennych stanu odpowiednio x_k, z_k dana jest następującą relacją:

$$P = \mathcal{O}_{I,z}^{-1} \mathcal{O}_{I,x}$$

gdzie $\mathcal{O}_{I,x}$ jest macierzą obserwowalności w postaci równoważnej pierwszej układu o zmiennych stanu x_k , a $\mathcal{O}_{I,z}$ jest macierzą obserwowalności w postaci równoważnej pierwszej układu o zmiennych stanu z_k .

■

Dowód:

Korzystając z Lematu 12 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{I,z} &= \begin{bmatrix} CP^{-1} \\ CP^{-1}P(A_d - In)P^{-1} \\ CP^{-1}P(A_d - In)^2P^{-1} \\ \vdots \\ CP^{-1}P(A_d - In)^{N-1}P^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{O}_{I,x}P^{-1} \end{aligned}$$

co daje następującą relację:

$$P = \mathcal{O}_{I,z}^{-1} \mathcal{O}_{I,x}$$

□

Twierdzenie 46 Macierz przekształcenia P pomiędzy dwoma układami o zmiennych stanu odpowiednio x_k, z_k dana jest następującą relacją:

$$P = \mathcal{O}_{II,z}^{-1} \mathcal{O}_{II,x}$$

gdzie $\mathcal{O}_{II,x}$ jest macierzą obserwowalności w postaci równoważnej drugiej układu o zmiennych stanu x_k , a $\mathcal{O}_{II,z}$ jest macierzą obserwowalności w postaci równoważnej drugiej układu o zmiennych stanu z_k .

Dowód:

Biorąc pod uwagę, że $(PA_dP^{-1})^k = PA_d^kP^{-1}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{II,z} &= \begin{bmatrix} CP^{-1} \\ CP^{-1}PA_dP^{-1} \\ CP^{-1}PA_d^2P^{-1} \\ \vdots \\ CP^{-1}PA_d^{N-1}P^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{O}_{II,x}P^{-1}\end{aligned}$$

co daje następującą relację:

$$P = \mathcal{O}_{II,z}^{-1}\mathcal{O}_{II,x}$$

□

3.5 Podsumowanie

W rozdziale 3 wprowadzony został liniowy dyskretny układ dynamiczny ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu. Na podstawie tego uogólnienia zostały także wprowadzone układy stochastyczne i nieliniowe ułamkowego rzędu opisane w przestrzeni stanu. Dla liniowego, deterministycznego układu ułamkowego rzędu zostały podane warunki konieczne i wystarczające osiągalności i obserwonalności, oraz warunki wystarczające sterowalności, wraz z równoważnymi (prostszymi) ich postaciami. Druga równoważna postać tych warunków jest identyczna z odpowiednimi warunkami dla układów całkowitego (pierwszego) rzędu. Identyczność ta implikuje możliwość bezpośredniego stosowania do dyskretnych układów ułamkowego rzędu takich algorytmów, jak przesuwanie biegunów, wzór Ackerman'a itd.

Przedstawione kryterium stabilności może być w prosty sposób użyte na przykład przy projektowaniu regulatora od stanu stabilizującego dany obiekt niestabilny oraz przy projektowaniu obserwatora.

Na szczególną uwagę zasługuje otrzymana postać transmitancyjna i równanie różnicowe. Jest ona różna od tej, którą zwyczajowo przyjęto w literaturze (np. [211]). Wprowadzona dla

całkowitego rzędu postać (z przesunięciem czasu w różnicach) jest równoważna z postacią tradycyjną, różnica pojawia się przy ułamkowym rzędzie. Nowa postać wydaje się być bardziej czytelna, gdyż jest analogiczna do postaci transmitancji ciągłej.

Rozdział 4

Identyfikacja i modelowanie układów dynamicznych ułamkowego rzędu

W rozdziale tym zostaną zaprezentowane wybrane metody identyfikacji dyskretnych układów ułamkowego rzędu. W podrozdziale 4.1 przedstawione zostaną wybrane metody identyfikacji parametrycznej wraz z przykładami identyfikacji układów dyskretnych. W podrozdziale 4.2 natomiast przedstawione są przykłady identyfikacji układu dyskretnego na podstawie odpowiedzi układu ciągłego.

4.1 Identyfikacja parametryczna

W podrozdziale tym zostaną opisane wybrane metody identyfikacji parametrycznej dla układów ułamkowego rzędu. Na początku zostanie zaprezentowana metoda najmniejszych kwadratów wraz z przykładem identyfikacji układów dyskretnych deterministycznych i stochastycznych. Następnie zostanie przedstawione rozszerzenie tej metody - rekurencyjna metoda najmniejszych kwadratów, wraz z przykładem identyfikacji dyskretnych układów deterministycznych i stochastycznych ułamkowego rzędu. Następnie zostaną podane przykłady identyfikacji (modelowania) układów ciągłych modelem dyskretnym. Przykłady te obrazują także możliwości modelowania (odwzorowywania) układów ciągłych ułamkowego rzędu przez układy dyskretnie, także rzędu ułamkowego.

4.1.1 Metoda najmniejszych kwadratów

Równanie (3.39) możemy przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \Delta^{n_N^*} y_k = -a_{N-1} \Delta^{n_{N-1}^*} y_{k-1} - \cdots - a_0 y_{k-N} + \\ b_{N-1} \Delta^{n_{N-1}^*} u_{k-1} + \cdots + b_0 u_{k-N} \end{aligned} \quad (4.1)$$

wprowadzając następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \varphi_k^T &= [-\Delta^{n_{N-1}^*} y_{k-1} \ \dots \ -y_{k-N} \\ &\quad \Delta^{n_{N-1}^*} u_{k-1} \ \dots \ u_{k-N}] \\ \theta &= [a_{N-1} \ \dots \ a_0 \ b_{N-1} \ \dots \ b_0]^T \\ Y_k &= [\Delta^{n_N^*} y_k] \end{aligned}$$

gdzie φ_k i Y_k są wektorami danych, a θ wektorem identyfikowanych parametrów, dostajemy

$$Y_k = \varphi_k^T \theta \quad (4.2)$$

Przy większej liczbie danych niż parametrów otrzymujemy następujący nadokreślony układ równań:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_k^T \end{bmatrix} \theta \quad (4.3)$$

który można zapisać jako

$$Y = \varphi^T \theta \quad (4.4)$$

gdzie

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix}, \varphi^T = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_k^T \end{bmatrix}$$

Błąd rozwiązania takiego układu równań określony jest jako wektor błędów równań dla poszczególnych chwil czasu k :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\epsilon_k = Y_k - \varphi_k^T \theta$$

Estymator $\hat{\theta}$ metody najmniejszych kwadratów wyznaczany jest jako wektor minimalizujący następującą funkcję celu [200]:

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \epsilon_j^2 = \frac{1}{2} \epsilon^T \epsilon \quad (4.5)$$

Gdy macierz $\varphi^T \varphi$ jest dodatnio określona, to funkcja strat $V(\theta)$ ma jednoznaczne minimum dla (patrz [200] str. 92)

$$\hat{\theta} = \varphi^\dagger Y \quad (4.6)$$

gdzie φ^\dagger oznacza pseudoodwrotność macierzy φ , którą można wyznaczyć w następujący sposób:

$$\varphi^\dagger = (\varphi^T \varphi)^{-1} \varphi^T$$

Przykład 15 *Identyfikacja dyskretnego układu ułamkowego rzędu bez zakłóceń.*

Dany jest układ określony następującymi macierzami:

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gdzie

$$a_0 = 0.05, a_1 = 0.2, b_0 = 0.3, b_1 = 0.2, n_1 = 0.6, n_2 = 1.4$$

Równanie różnicowe takiego układu jest następujące:

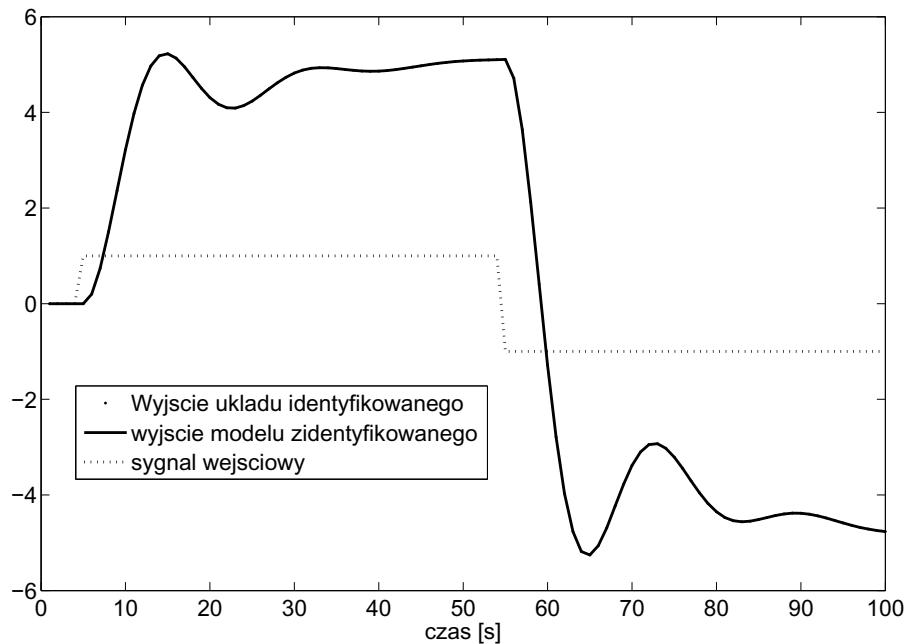
$$\Delta^{n_2^*} y_k + a_1 \Delta^{n_1^*} y_{k-1} + a_0 y_{k-2} = b_1 \Delta^{n_1^*} u_{k-1} + b_0 u_{k-2}$$

Wektory danych są zdefiniowane następująco:

$$Y_k = \Delta^{n_2^*} y_k$$

$$\varphi_k^T = \begin{bmatrix} -\Delta^{n_1^*} y_{k-1} & -y_{k-2} & \Delta^{n_1^*} u_{k-1} & u_{k-2} \end{bmatrix}$$

Odpowiedź na skok jednostkowy danego układu jest przedstawiona na rys. 4.1.



Rysunek 4.1: Odpowiedź na sygnał prostokątny układu deterministycznego i modelu zidentyfikowanego (sygnały pokrywają się)

Następnie na podstawie tej odpowiedzi tworzymy macierze Y i φ .

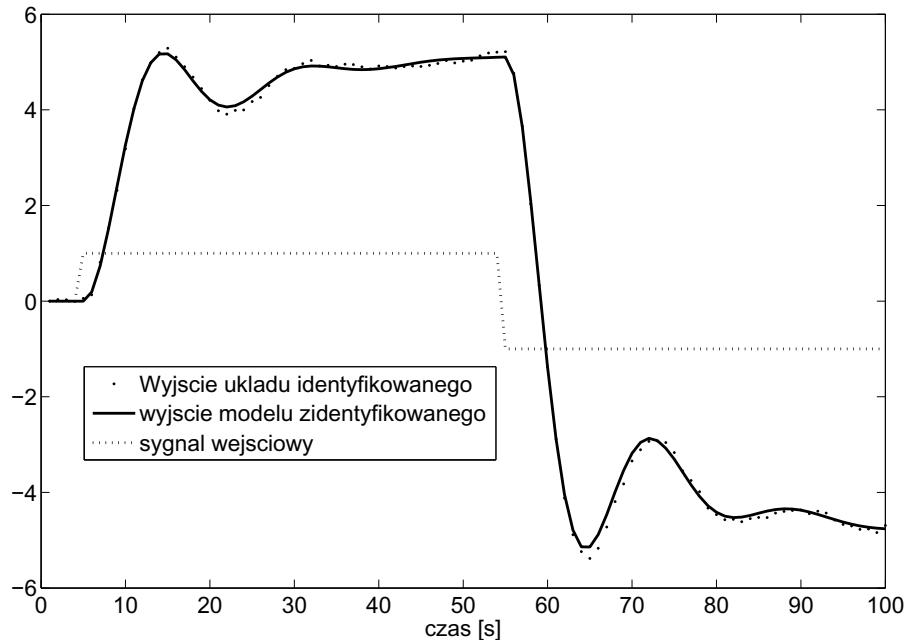
Na podstawie tych macierzy wyznaczamy wektor parametrów θ . Ze względu na to, iż macierz $\varphi^T \varphi$ jest macierzą dodatnio określona, rozwiązuje się układ równań $Y = \varphi^T \theta$ przez wyznaczenie pseudoodwrotności macierzy φ .

Otrzymany wektor parametrów jest następujący:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2000 \\ 0.0500 \\ 0.2000 \\ 0.3000 \end{bmatrix}$$

Ze względu na brak zakłóceń wyniki są identyczne z rzeczywistymi, a odpowiedzi układu danego i zidentyfikowanego, pokazane na rysunku 4.1, pokrywają się dokładnie.

Przykład 16 Weźmy układ stochastyczny dany macierzami z przykładu 15 wraz z zakłóceniami o wariancjach równych $E[\nu^T \nu] = 0.0014$ i $E[\omega^T \omega] = \begin{bmatrix} 0.0011 & 0 \\ 0 & 0.0011 \end{bmatrix}$



Rysunek 4.2: Odpowiedź na skok jednostkowy układu stochastycznego i modelu zidentyfikowanego

W wyniku analogicznych działań, jak w przykładzie 15, otrzymano następujące wyniki identyfikacji:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2101 \\ 0.0535 \\ 0.1894 \\ 0.3214 \end{bmatrix}$$

Wynik identyfikacji pokazany jest na rysunku 4.2.

Średniokwadratowy błąd rozwiązania równania jest następujący:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \epsilon_j = 0.0070$$

a średniokwadratowy błąd odpowiedzi układu równy jest

$$\tilde{\epsilon}_y = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (y_k - \hat{y}_k)^2 = 0.0086$$

Jak widać, zaprezentowany algorytm identyfikacji jest wrażliwy na zakłócenia.

4.1.2 Rekurencyjna metoda najmniejszych kwadratów

Estymator parametrów, przedstawiony w rozdziale 4.1.1, można przedstawić w następującej postaci:

$$\theta_k = \left[\sum_{j=1}^k \varphi_j \varphi_j^T \right]^{-1} \left[\sum_{j=1}^k \varphi_j Y_j \right]$$

Oznaczmy

$$P_k^{-1} = \left[\sum_{j=1}^k \varphi_j \varphi_j^T \right]$$

Możemy to wyrażenie zapisać w postaci rekurencyjnej

$$P_k^{-1} = \left[\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j \varphi_j^T \right] + \varphi_k \varphi_k^T = P_{k-1}^{-1} + \varphi_k \varphi_k^T \quad (4.7)$$

Podstawiając to rekurencyjne wyrażenie do równania estymacji otrzymujemy

$$\theta_k = P_k^{-1} \left[\sum_{j=1}^k \varphi_j Y_j \right] = P_k \left[P_{k-1}^{-1} \theta_{k-1} + \varphi_k Y_k \right] = \theta_{k-1} + P_k \varphi_k \left[Y_k - \varphi_k^T \theta_{k-1} \right]$$

Używając lematu o odwrotności macierzy (ang. Matrix Inversion Lemma), równanie 4.7 można przedstawić w postaci

$$P_k = P_{k-1} - \frac{P_{k-1} \varphi_k \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k}{1 + \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k} = \frac{P_{k-1} \varphi_k}{1 + \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k}$$

Algorytm rekurencyjny metody najmniejszych kwadratów można zapisać w postaci następującej definicji:

Definicja 38 *Rekurencyjny estymator metody najmniejszych kwadratów dla układów ułamkowego rzędu ma postać:*

$$\theta_k = \theta_{k-1} + P_k \varphi_k [Y_k - \varphi_k^T \theta_{k-1}]$$

gdzie

$$P_k = \frac{P_{k-1} \varphi_k}{1 + \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k}$$

przy warunkach początkowych θ_0 i P_0 .

□

Przykład 17 Dany jest układ taki, jak w przykładzie 15.

Przyjmijmy wartości początkowe algorytmu jako:

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$$

W wyniku identyfikacji otrzymujemy następujący model dyskretny :

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.049992 & -0.19997 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0.29994 & 0.19995 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wyniki estymacji parametrów przedstawione są na Rys. 4.3. Odpowiedź układu zidentyfikowanego porównana jest z odpowiedzią układu danego na Rys. 4.4.

Średniokwadratowy błąd rozwiązania równania jest następujący:

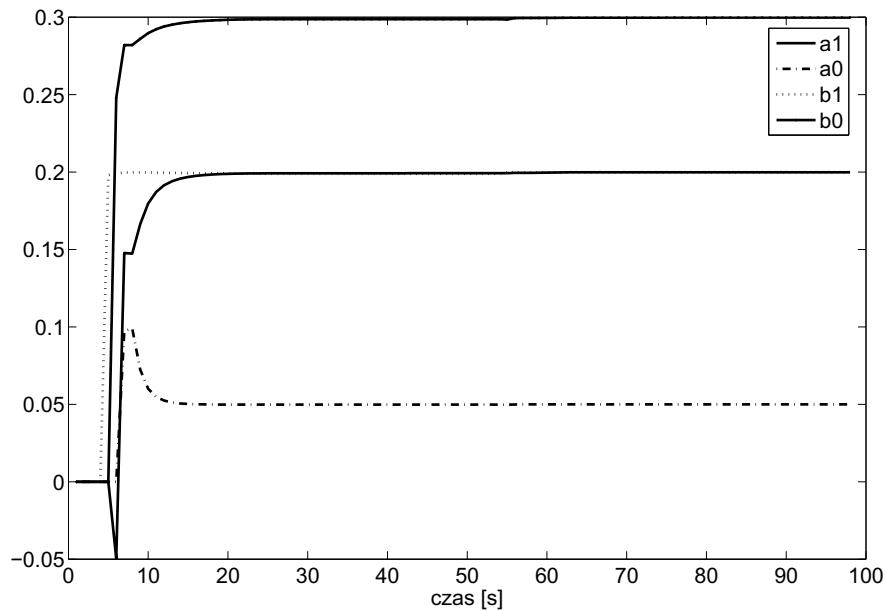
$$\tilde{\epsilon} = 6.644e - 010$$

a średniokwadratowy błąd odpowiedzi układu równy jest

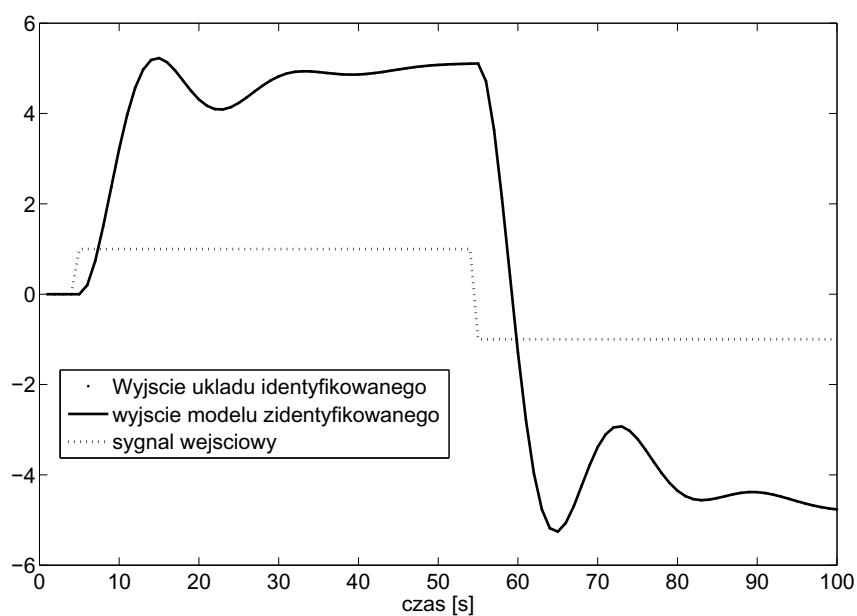
$$\tilde{\epsilon}_y = 8.7985e - 008$$

Przykład 18 Weźmy układ taki jak w przykładzie 16.

Przyjmijmy wartości początkowe algorytmu jako



Rysunek 4.3: Wynik estymacji parametrów układu



Rysunek 4.4: Odpowiedź na wymuszenie prostokątne układu danego i modelu zidentyfikowanego (pokrywają się)

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix}$$

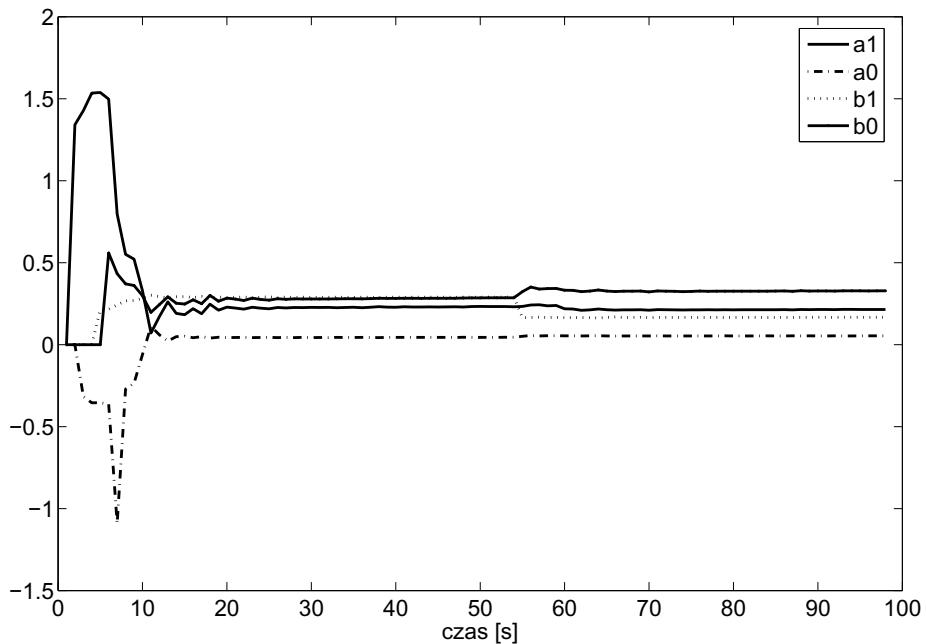
W wyniku identyfikacji otrzymujemy następujący dyskretny model:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.053642 & -0.20592 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.32618 & 0.14809 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

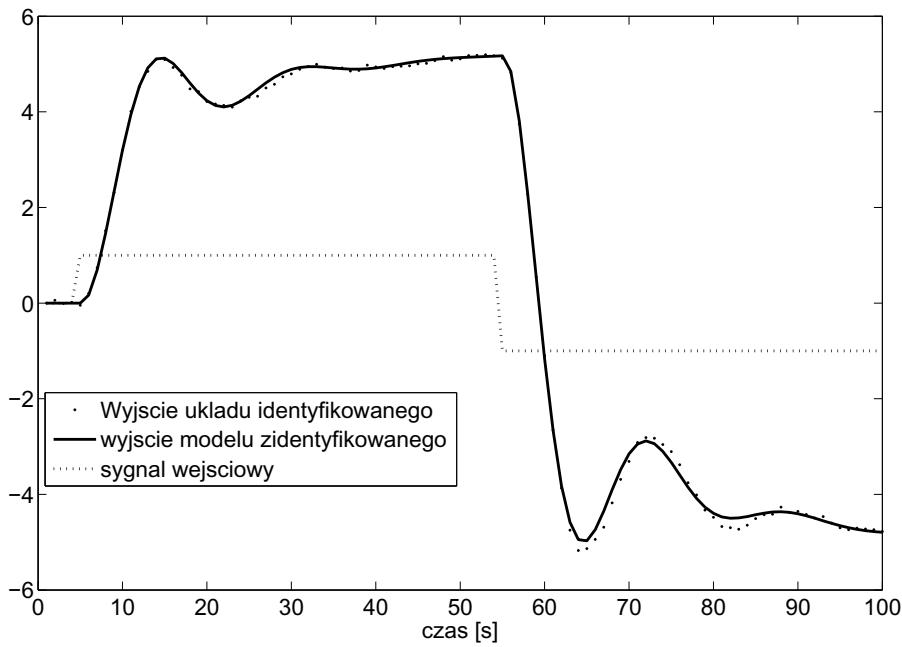
Wyniki estymacji parametrów przedstawione są na Rys. 4.5. Odpowiedź układu zidentyfikowanego porównana jest z odpowiedzią układu danego na Rys. 4.6.

Średniokwadratowy błąd rozwiązania równania jest następujący: $\tilde{\epsilon} = 0.0056238$, a średniokwadratowy błąd odpowiedzi układu równy jest $\tilde{\epsilon}_y = 0.014028$.



Rysunek 4.5: Wynik estymacji parametrów układu

Jak można zauważyć, dla danych pozabawionych zakłóceń identyfikowane rekurencyjnie parametry bardzo szybko przyjmują poprawne wartości. W przypadku istnienia zakłóceń, podobnie jak dla identyfikacji nierekurencyjnej, identyfikacja obarczona jest większym błędem. Identyfikowane parametry ustalają się po znacznie większym czasie niż dla przypadku braku zakłóceń, a błąd rozwiązania równania także jest wiele rzędów większy.



Rysunek 4.6: Odpowiedź na wymuszenie prostokątne układu stochastycznego i modelu zidentyfikowanego

4.2 Identyfikacja modelu dyskretnego na podstawie modelu ciągłego

W podrozdziale tym zostanie przeprowadzona i przeanalizowana identyfikacja parametryczna dyskretnego modelu ułamkowego rzędu na podstawie danych pochodzących z symulacji wybranych modeli ciągłych ułamkowego rzędu. Identyfikacja taka daje możliwość przeanalizowania działania algorytmu identyfikacji w warunkach zbliżonych do warunków eksperymentu praktycznego, w którym układ ciągły jest modelowany modelem dyskretnym. Identyfikacja taka umożliwia także sprawdzenie, czy model dyskretny jest w stanie prawidłowo opisać dynamikę układu ciągłego (dynamikę rozumianą tutaj jako odpowiedź układu na skok jednostkowy). Należy w tym miejscu podkreślić, że błędny wynik identyfikacji nie będzie świadczył, iż model dyskretny nie jest w stanie opisać takiej dynamiki.

4.2.1 Identyfikacja dyskretnego modelu transmitancyjnego

Kolejnym sposobem sprawdzenia algorytmu identyfikacji jest próba modelowania układu ciągłego modelem dyskretnym. Najpierw zostanie wyznaczona odpowiedź analityczna układu cią-

glego, która zostanie zdyskretyzowana. Następnie na podstawie tej już dyskretnej odpowiedzi zostaną zidentyfikowane parametry modelu dyskretnego odpowiadającego układowi ciągłemu.

Układ ciągły ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu dany jest następująco:

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t)\end{aligned}$$

Transmitancja ciągła takiego układu jest równa

$$G(s) = \frac{b_{N-1}s^{(N-1)\alpha} + \dots + b_1s^\alpha + b_0}{s^{N\alpha} + a_{N-1}s^{(N-1)\alpha} + \dots + a_1s^\alpha + a_0}$$

Dla pierwiastków pojedynczych transmitancję można przedstawić jako (patrz także Rozdział 2.3.7)

$$G(s) = \sum_{j=1}^p \frac{r_j}{s^\alpha - \lambda_j}$$

Odpowiedź tak zdefiniowanej transmitancji na skok jednostkowy jest następująca:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{j=1}^p \frac{r_j}{s(s^\alpha - \lambda_j)} \right] = \sum_{j=1}^p r_j t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(\lambda_j t^\alpha)$$

gdzie $E_{\alpha, \alpha+1}$ jest funkcja Mittaga-Lefflera, przedstawioną w rozdziale 2.2.

Przykład 19 Weźmy układ ciągły dany macierzami

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \alpha = 0.3\end{aligned}$$

Transmitancja jest równa

$$G(s) = \frac{2}{s^{0.6} + 3s^{0.3} + 2} = \frac{2}{s^{0.3} + 1} - \frac{2}{s^{0.3} + 2}$$

Odpowiedź układu na skok jednostkowy jest następująca:

$$h(t) = 2t^{0.3} E_{0.3, 1.3}(-t^{0.3}) - 2t^{0.3} E_{0.3, 1.3}(-2t^{0.3})$$

Zdyskretyzowana odpowiedź na skok jednostkowy dana jest następująco:

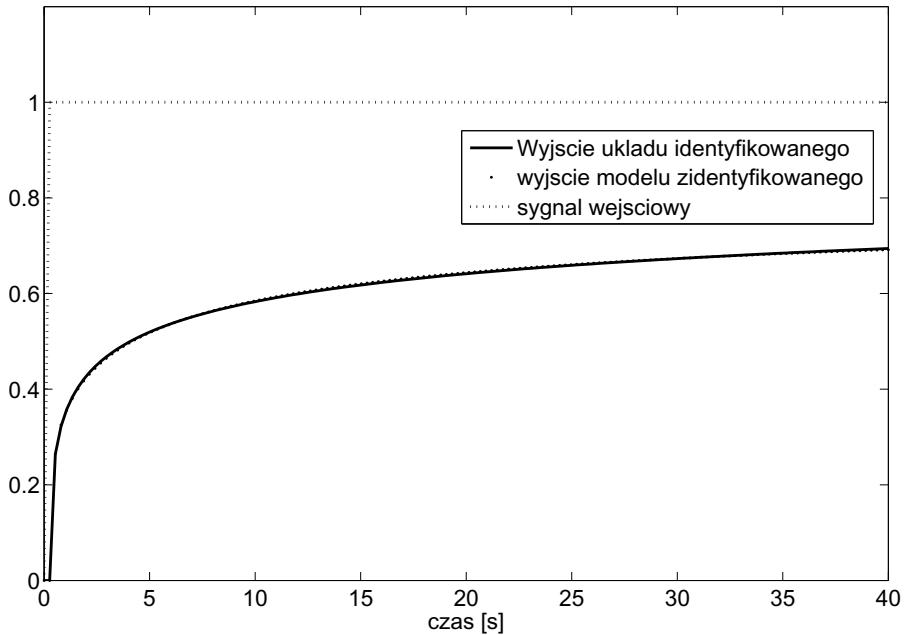
$$h_k = 2k^{0.3}E_{0.3,1.3}(-k^{0.3}) - 2k^{0.3}E_{0.3,1.3}(-2k^{0.3})$$

Następnie dokonujemy identyfikacji parametrycznej metodą najmniejszych kwadratów, otrzymanej w powyższy sposób, dyskretnej odpowiedzi na skok jednostkowy. Przyjmujemy przy tym, że rząd układu dyskretnego jest równy rzędowi układu ciągłego.

W wyniku identyfikacji otrzymujemy następujący dyskretny model:

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.048569 & -0.18806 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, n = 0.3 \\ C &= \begin{bmatrix} 0.030385 & 0.26508 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Porównanie odpowiedzi układu ciągłego i zidentyfikowanego na jej podstawie modelu dyskretnego przedstawione jest na rys. 4.7. Błąd średniokwadratowy odpowiedzi jest równy $\tilde{\epsilon}_y = 0.0083069$.



Rysunek 4.7: Odpowiedź na skok jednostkowy układu ciągłego dla $\alpha = 0.3$ i modelu zidentyfikowanego

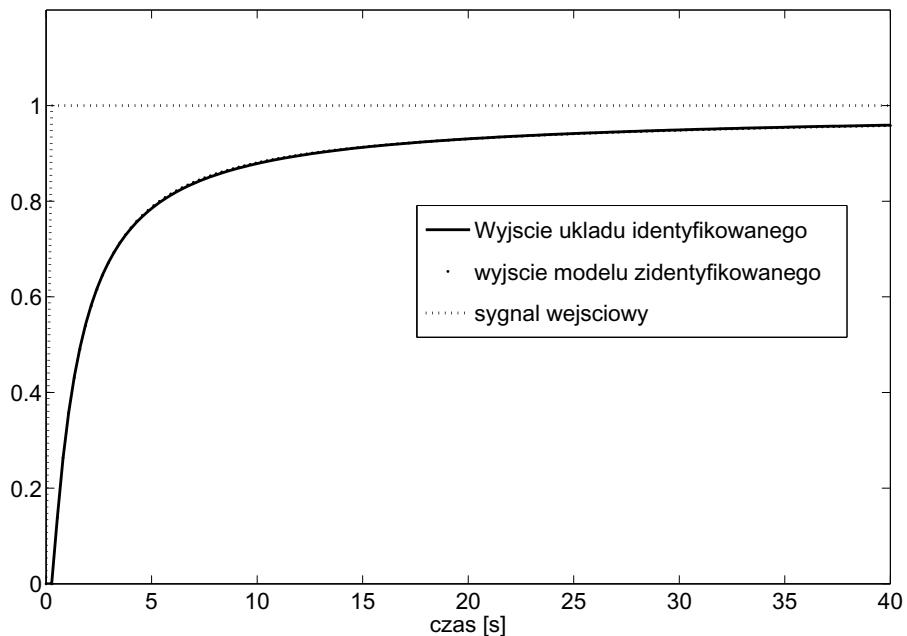
Przykład 20 Weźmy układ ciągły dany, taki jak w przykładzie 19, z tą różnicą, że rząd układu równa się $\alpha = 0.7$.

W wyniku identyfikacji otrzymujemy następujący dyskretny model:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.10166 & -0.52442 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, n = 0.7$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.10154 & 0.13801 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Porównanie odpowiedzi układu ciągłego i zidentyfikowanego na jej podstawie modelu dyskretnego przedstawione jest na rys. 4.8. Błąd średniokwadratowy odpowiedzi jest równy $\tilde{\epsilon}_y = 0.0043073$.



Rysunek 4.8: Odpowiedź na skok jednostkowy układu ciągłego dla $\alpha = 0.7$ i modelu zidentyfikowanego

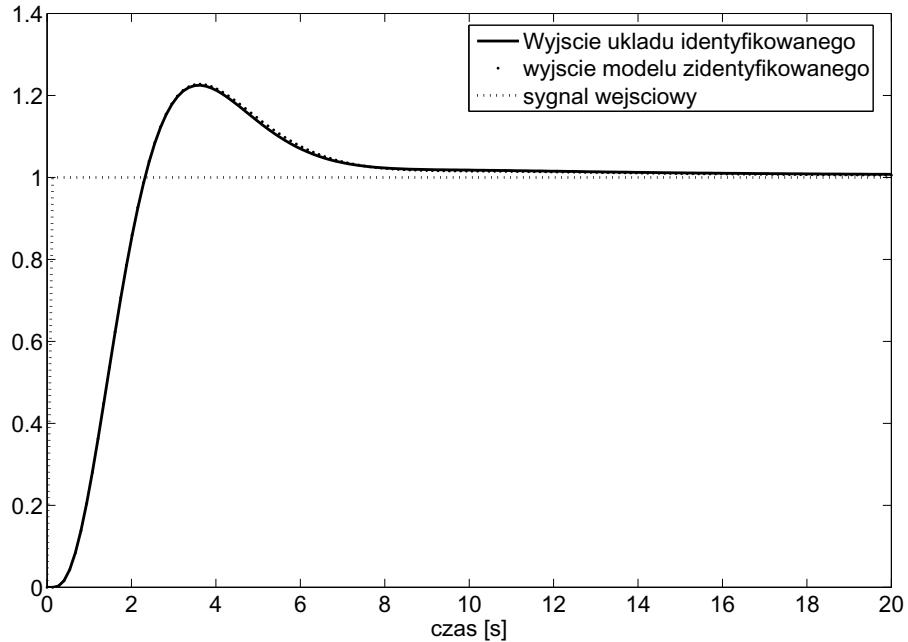
Przykład 21 Weźmy układ ciągły dany, taki jak w przykładzie 19 z tą różnicą, że rzad układu równa się $\alpha = 1.3$.

W wyniku identyfikacji otrzymujemy następujący dyskretny model:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.010108 & -0.21941 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, n = 1.3$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.010086 & 0.0027782 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Porównanie odpowiedzi układu ciągłego i zidentyfikowanego na jej podstawie modelu dyskretnego przedstawione jest na rys 4.9. Błąd średniokwadratowy odpowiedzi jest równy $\tilde{\epsilon}_y = 0.00040584$.



Rysunek 4.9: Odpowiedź na skok jednostkowy układu ciągłego dla $\alpha = 1.3$ i modelu zidentyfikowanego

Przykład 22 Weźmy układ ciągły dany, taki jak w przykładzie 19, z tą różnicą, że rząd układu równa się $\alpha = 1.7$.

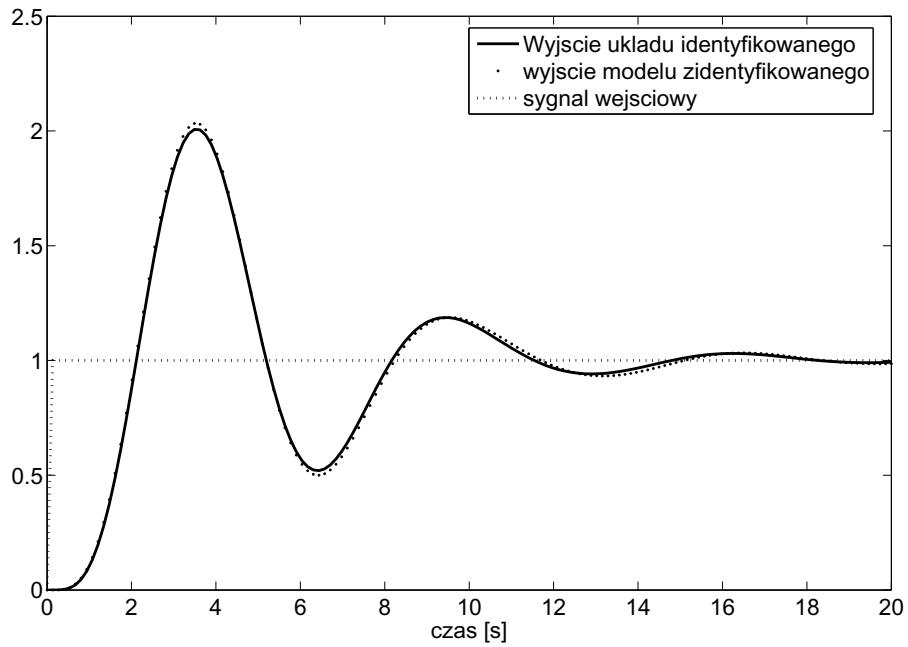
W wyniku identyfikacji otrzymujemy następujący dyskretny model:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0020685 & -0.097118 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, n = 1.7$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.0020628 & 0.00039836 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Porównanie odpowiedzi układu ciągłego i zidentyfikowanego na jej podstawie modelu dyskretnego przedstawione jest na rys 4.10. Błąd średniokwadratowy odpowiedzi jest równy $\tilde{\epsilon}_y = 0.00038952$.

Weźmy kolejny przykład układu ciągłego, w którym wielomian licznika nie będzie wielomianem jednostkowym.



Rysunek 4.10: Odpowiedź na skok jednostkowy układu ciągłego dla $\alpha = 1.7$ i modelu zidentyfikowanego

Przykład 23 Dany jest układ określony następującymi macierzami:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \alpha = 0.7$$

Transmitancja jest równa

$$G(s) = \frac{3s^{0.7} + 2}{s^{1.4} + 3s^{0.7} + 2} = \frac{-1}{s^{0.7} + 1} + \frac{4}{s^{0.7} + 2}$$

Odpowiedź układu na skok jednostkowy jest następująca:

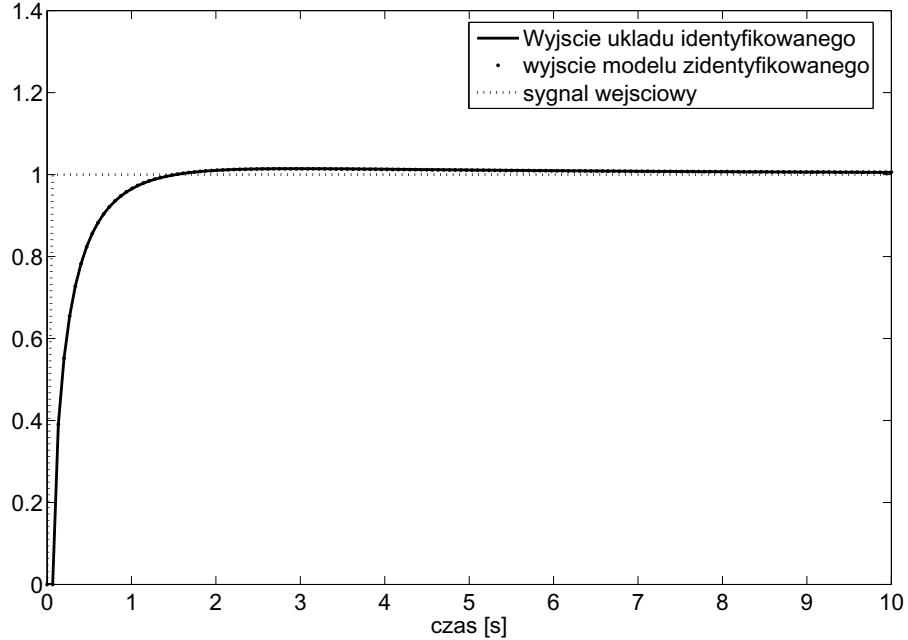
$$h(t) = -t^{0.7}E_{0.7,1.7}(-t^{0.7}) + 4t^{0.7}E_{0.7,1.7}(-t^{0.7})$$

W wyniku identyfikacji otrzymujemy następujący dyskretny model:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0435 & -0.3985 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, n = 1.3$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.0436 & 0.3904 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Porównanie odpowiedzi układu ciągłego i zidentyfikowanego na jej podstawie modelu dyskretnego przedstawione jest na rys 4.11. Błąd średniokwadratowy odpowiedzi jest równy $\tilde{\epsilon}_y = 2.6122 * 10^{-6}$. Błąd rozwiązania układu równań natomiast równy jest $\tilde{\epsilon} = 1.9556 * 10^{-6}$.



Rysunek 4.11: Odpowiedź na skok jednostkowy układu ciągłego dla $\alpha = 0.7$ i modelu zidentyfikowanego

Przykład 24 Dany jest układ ciągły taki, jak w przykładzie 23, z tą różnicą, że rząd układu równa się $\alpha = 1.3$.

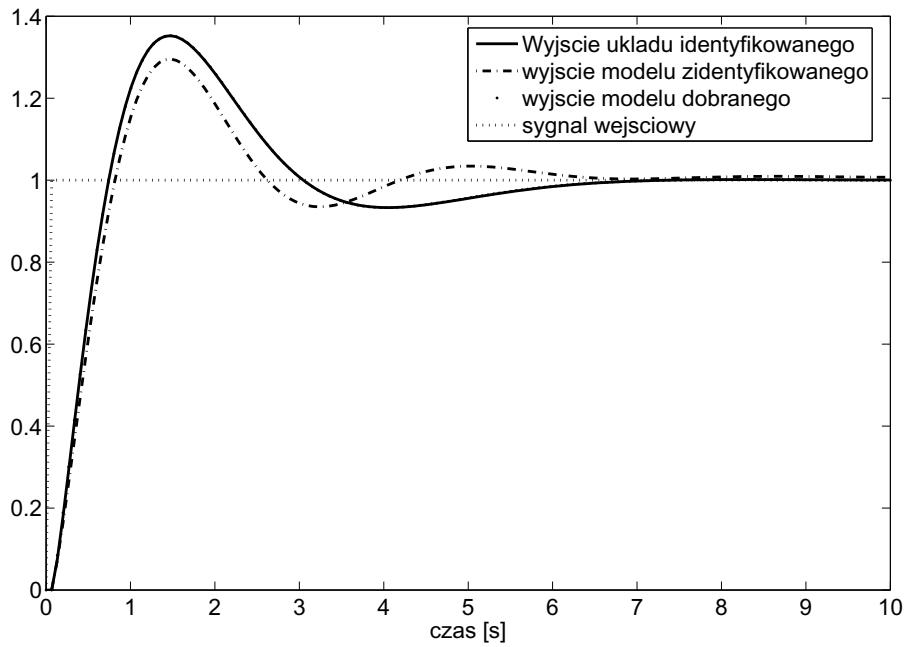
W wyniku identyfikacji otrzymujemy następujący dyskretny model:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.010108 & -0.21941 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, n = 1.3$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.010086 & 0.0027782 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Porównanie odpowiedzi układu ciągłego i zidentyfikowanego na jej podstawie modelu dyskretnego przedstawione jest na rys 4.12. Błąd średniokwadratowy odpowiedzi jest równy $\tilde{\epsilon}_y = 0.0024649$. Błąd rozwiązania układu równań natomiast równy jest $\tilde{\epsilon} = 8.6716 * 10^{-7}$.

Jak widać w przykładzie 24, pomimo dokładnego rozwiązania układu równań, zidentyfikowane parametry nie odpowiadają dokładnie danemu modelowi. Problem ten pojawia się dla



Rysunek 4.12: Odpowiedź na skok jednostkowy układu ciągłego dla $\alpha = 1.3$ i modelu zidentyfikowanego

rzędów większych od 1. Jednakże nie jest to wina modelu, gdyż można pokazać takie parametry modelu, które będą poprawnie opisywały dynamikę tego układu. Dla przykładu 24 będą to następujące parametry:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0017 & -0.0871 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, n = 1.3$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.0017 & 0.0844 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Porównanie odpowiedzi układu ciągłego i zidentyfikowanego na jej podstawie modelu dyskretnego przedstawione jest na rys 4.12. Błąd średniokwadratowy odpowiedzi jest równy $\tilde{\epsilon}_y = 2.6121e - 006$. Błąd rozwiązania układu równań natomiast równy jest $\tilde{\epsilon} = 1.9556e - 006$.

4.2.2 Przykład identyfikacji dla różnych okresów próbkowania

W podrozdziale tym zostaną przedstawione wyniki identyfikacji danego układu ciągłego przy użyciu modelu dyskretnego przy założeniu różnych okresów próbkowania. Celem tej identyfikacji jest sprawdzenie, czy okres próbkowania ma wpływ na dokładność modelowania. W

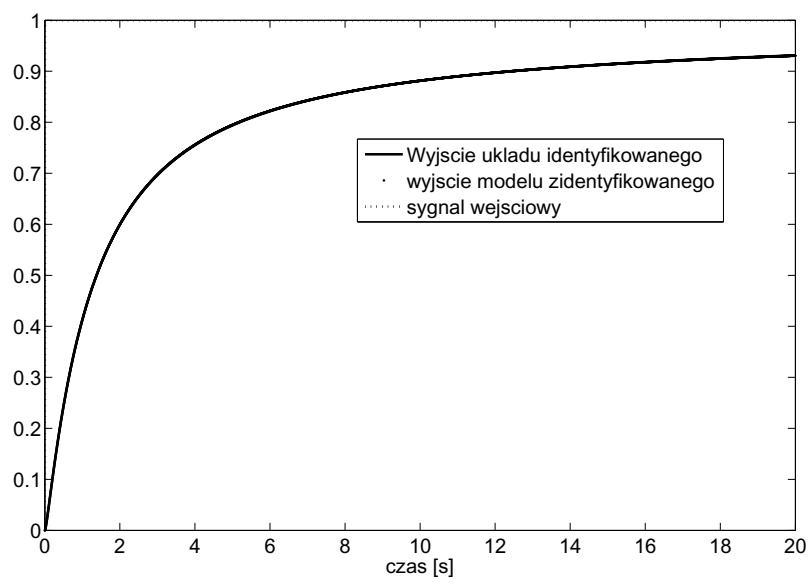
poniższej tablicy przedstawione jest zestawienie otrzymanych wyników identyfikacji. Jako model ciągły został użyty model pokazany w przykładzie 23.

liczba próbek k	$T_s [s]$	$\tilde{\epsilon}_y$
5000	0.04	3.5419e-007
1000	0.02	1.6785e-006
300	0.066667	3.2046e-006
150	0.13333	3.2765e-006
50	0.4	1.7002e-006
25	0.8	1.0843e-006
15	1.3333	9.5334e-007
5	4	0.00026995

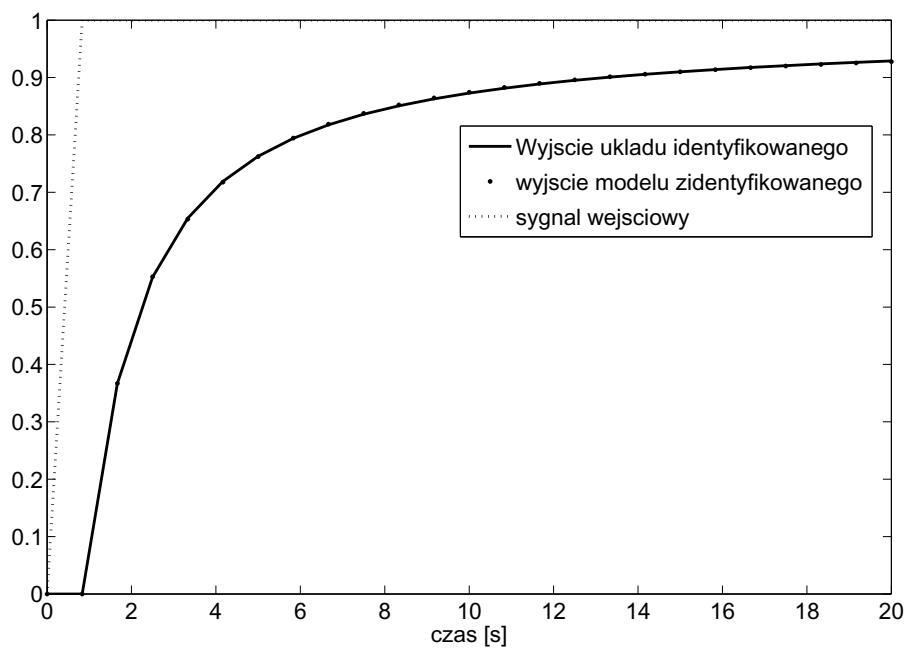
Tabela 4.1: Wpływ okresu próbkowania na błąd identyfikacji.

Na rysunkach 4.13 i 4.14 zostały przedstawione przykładowe przebiegi odpowiedzi układów dla okresów próbkowania $T_s = 0.04$ i $T_s = 0.8$.

Jak można zauważyć, na podstawie wyników zawartych w Tabeli 4.1 i pokazanych na rysunkach 4.13 i 4.14, okres próbkowania ma znaczący wpływ na identyfikowane parametry dopiero przy bardzo długich okresach próbkowania (porównywalnych ze stałymi czasowymi identyfikowanego obiektu). Dla krótszych okresów próbkowania błąd identyfikacji był na bardzo zbliżonym poziomie, dając dobre odwzorowanie modelu ciągłego.



Rysunek 4.13: Odpowiedź na skok jednostkowy układu ciągłego dla $\alpha = 0.7$ i modelu zidentyfikowanego dla $k = 5000$



Rysunek 4.14: Odpowiedź na skok jednostkowy układu ciągłego dla $\alpha = 0.7$ i modelu zidentyfikowanego dla $k = 25$

4.2.3 Modelowanie zależności zmiennych stanu

W przykładach przedstawionych w poprzednich rozdziałach zakładano postać kanoniczną identyfikowanego modelu. Zidentyfikowany model opisywał wtedy dobrze zależność dynamiki pomiędzy wejściem układu i jego wyjściem, natomiast zmienne stanu nie odpowiadały zmiennym stanu identyfikowanego układu. Identyfikowana postać kanoniczna modelu, założona w poprzednich przykładach, nie jest w tym przypadku odpowiednią postacią. Aby więc zidentyfikować układ tak, aby zmienne stanu modelu odpowiadały zmiennym stanu układu, musimy założyć bardziej ogólną postać modelu i znać zmienne stanu układu.

Zakładamy więc następującą postać dyskretnego modelu:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta^n x_{1,k+1} \\ \Delta^n x_{2,k+1} \\ \vdots \\ \Delta^n x_{N,k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{N,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} u_k \\ x_{k+1} &= \Delta^n x_{k+1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} x_{k-j+1} \\ y_k &= Cx_k \end{aligned}$$

gdzie macierz C jest macierzą C układu ciągłego.

Przyjmując oznaczenia

$$\begin{aligned} Y_k &= \begin{bmatrix} \Delta^n x_{1,k+1} \\ \Delta^n x_{2,k+1} \\ \vdots \\ \Delta^n x_{N,k+1} \end{bmatrix}, \quad \varphi_k^T = \begin{bmatrix} x_k^T & 0 & \dots & 0 & u_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_k^T & \dots & 0 & 0 & u_k & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_k^T & 0 & 0 & \dots & u_k \end{bmatrix} \\ \theta^T &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{N,N} & b_0 & \dots & b_{N-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

otrzymujemy macierze danych do identyfikacji parametrycznej metodą najmniejszych kwadratów przedstawionej w rozdziale 4.1.1.

Przykład 25 Weźmy układ ciągły dany macierzami:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \alpha = 0.7$$

Przyjmując C jako macierz jednostkową, otrzymujemy macierz transmitancji opisującą dynamikę zmiennych stanu układu. Macierz ta jest następująca:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{1.4} + 3s^{0.7} + 2} \\ \frac{s^{0.7}}{s^{1.4} + 3s^{0.7} + 2} \end{bmatrix}$$

Zmienne stanu układu w odpowiedzi na skok jednostkowy są następujące:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t^{0.7} E_{0.7,1.7}(-t^{0.7}) - t^{0.7} E_{0.7,1.7}(-2t^{0.7}) \\ x_2(t) &= -t^{0.7} E_{0.7,1.7}(-t^{0.7}) + 2t^{0.7} E_{0.7,1.7}(-2t^{0.7}) \end{aligned}$$

Zdyskretyzowane zmienne stanu mają następującą postać:

$$\begin{aligned} x_1, k &= k^{0.7} E_{0.7,1.7}(-k^{0.7}) - k^{0.7} E_{0.7,1.7}(-2k^{0.7}) \\ x_2, k &= -k^{0.7} E_{0.7,1.7}(-k^{0.7}) + 2k^{0.7} E_{0.7,1.7}(-2k^{0.7}) \end{aligned}$$

Przyjmijmy identyfikowany model w postaci

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta^n x_{1,k+1} \\ \Delta^n x_{2,k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} u_k \\ x_{k+1} &= \Delta^n x_{k+1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} x_{k-j+1} \\ y_k &= C x_k \end{aligned}$$

Oznaczenia równania identyfikacji są następujące:

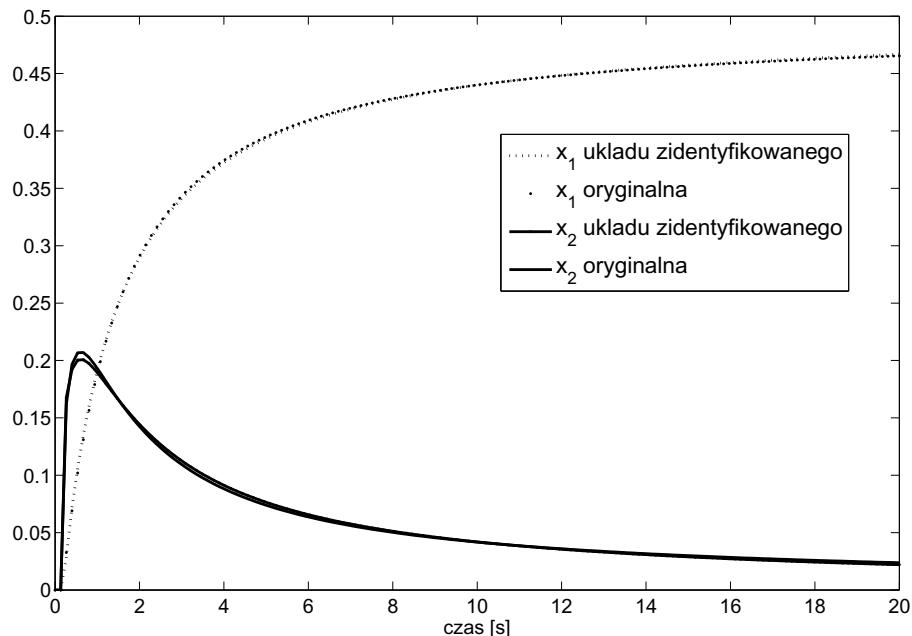
$$\begin{aligned} Y_k &= \begin{bmatrix} \Delta^n x_{1,k+1} \\ \Delta^n x_{2,k+1} \end{bmatrix}, \quad \varphi_k^T = \begin{bmatrix} x_{1,k} & x_{2,k} & 0 & 0 & u_k & 0 \\ 0 & 0 & x_{1,k} & x_{2,k} & 0 & u_k \end{bmatrix} \\ \theta^T &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{2,1} & a_{2,2} & b_0 & b_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zidentyfikowany model ma następującą postać:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0372 & 0.1372 \\ -0.2997 & -0.4571 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0189 \\ 0.1497 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \alpha = 0.7$$

Porównanie zmiennych stanu układu ciągłego i zmiennych stanu układu zidentyfikowanego modelu dyskretnego przedstawione jest na rys 4.15. Błąd średniokwadratowy modelowania zmiennej stanu x_1 jest równy $\tilde{\epsilon}_1 = 1.6876e - 006$, a $x_2 \tilde{\epsilon}_2 = 3.7311e - 006$. Błąd rozwiązania układu równań natomiast równy jest $\tilde{\epsilon} = 1.6331e - 006$.



Rysunek 4.15: Zmienne stanu w odpowiedzi na skok jednostkowy układu ciągłego dla $\alpha = 0.7$ i modelu zidentyfikowanego

4.3 Podsumowanie

W rozdziale tym zostały przedstawione algorytmy identyfikacji parametrycznej modelu dyskretnego liniowego ułamkowego rzędu, oparte o metodę najmniejszych kwadratów. Przedstawiono zarówno klasyczną metodę najmniejszych kwadratów, jak i jej rozwinięcie - rekurencyjną metodę najmniejszych kwadratów. Dla obydwu metod przeprowadzono i przedstawiono

wyniki symulacji dla różnych typów układów identyfikowanych, dyskretnych deterministycznych i stochastycznych oraz ciągłych. Z przeprowadzonych symulacji wynika, że zaproponowane algorytmy identyfikacji są bardzo wrażliwe na zakłócenia. Powoduje to konieczność używania dodatkowych algorytmów identyfikacji na podstawie minimalizacji błędu odpowiedzi układu, aby otrzymać dokładny model. Jest też motywacją do dalszych badań i prób zastosowania innych metod identyfikacji układów stochastycznych (np: zmiennych instrumentalnych, Total Least-Squares, innych). Na szczególną uwagę zasługuje rozdział o identyfikacji modelu ciągłego przy użyciu modelu dyskretnego. Zawarte w nim przykłady identyfikacji pokazują, że model dyskretny jest w stanie poprawnie opisać model ciągły. Jest to szczególnie ważne z punktu widzenia praktycznej implementacji układów dyskretnych do sterowania ciągłymi układami ułamkowego rzędu.

Rozdział 5

Estymacja wektora zmiennych stanu dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu

W praktycznej realizacji układów sterowania zachodzi potrzeba odtworzenia (estymacji) nieznanych (niemierzalnych lub takich, których pomiar byłby zbyt kosztowny) zmiennych stanu układu. Odtworzenie tych zmiennych stanu można przeprowadzić na podstawie znajomości wejścia i wyjścia układu oraz jego dynamiki.

W rozdziale tym zostaną zaprezentowane wybrane metody estymacji dyskretnych układów ułamkowego rzędu. W podrozdziale 5.1 przedstawiony zostanie obserwator dla dyskretnych układów ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu, wraz z przykładami estymacji zmiennych stanu układów dyskretnych i ciągłych. W podrozdziale 5.2 przedstawiony zostanie Ułamkowy Filtr Kalmana (FKF) będący uogólnieniem tradycyjnego algorytmu dyskretnego Filtru Kalmana dla dyskretnych układów liniowych ułamkowego rzędu. W podrozdziale 5.3 natomiast zostanie przedstawione analogiczne uogólnienie dla Rozszerzonego Filtru Kalmana na Rozszerzony Ułamkowy Filtr Kalmana (EKF) dla dyskretnych układów nieliniowych ułamkowego rzędu. W podrozdziale 5.4 zostanie zaprezentowane rozszerzenie koncepcji Filtru Kalmana opartego o transformację "Unscented" dla dyskretnych nieliniowych układów ułamkowego rzędu.

5.1 Obserwator dla dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu

Idea obserwatora dla dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu oparta jest na klasycznym podejściu Luenbergera (patrz [104]). Zaproponowany obserwator przedstawiony jest w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 47 *Obserwator stanu dla dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu danego definicją 15 (ang. Discrete Fractional Order Observer DFOO) ma następującą postać:*

$$\begin{aligned}\Delta^{\Upsilon} \hat{x}_{k+1} &= F_d \hat{x}_k + G u_k + H y_k \\ \hat{x}_{k+1} &= \Delta^{\Upsilon} \hat{x}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k-j+1}\end{aligned}$$

gdzie \hat{x}_k jest estymatą wektora zmiennych stanu x_k , natomiast $F_d = A_d - HC$ i $G = B$.

■

Dowód:

Błąd estymacji przyjęty jest w następujący sposób:

$$e_k = \hat{x}_k - x_k \quad (5.1)$$

Podstawiając równania dane przez definicje 15 i 47 do równania (5.1) otrzymujemy następującą relację:

$$\begin{aligned}e_{k+1} &= F_d \hat{x}_k + G u_k + H y_k - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k-j+1} \\ &\quad - A_d x_k - B u_k + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k-j+1} \\ &= (F_d + HC) \hat{x}_k - A_d x_k + (G - B) u_k \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j (\hat{x}_{k-j+1} - x_{k-j+1})\end{aligned}$$

Przyjmując, że $A_d = F_d + HC$ i $B = G$, równanie błędu estymacji przyjmuje następującą postać:

$$e_{k+1} = F_d e_k - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j e_{k-j+1}$$

Równanie to może być zapisane w postaci dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu danego definicją 15

$$\Delta^{\Upsilon} e_{k+1} = F_d e_k \quad (5.2)$$

$$e_{k+1} = \Delta^{\Upsilon} e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j e_{k-j+1} \quad (5.3)$$

Stabilność asymptotyczna takiego systemu implikuje, że błąd estymacji obserwatora dąży do zera, przez co estymowane zmienne stanu dążą do oryginalnych zmiennych stanu.

□

Przykład 26 Dany jest układ opisany następującymi macierzami:

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & 0.15 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Moduły wartości własne macierzy $(A_d + \Upsilon_1)$ są równe

$$\begin{aligned} |\text{eig}(A_d + \Upsilon_1)| &= \left| \begin{pmatrix} 0.675 + 0.30721i \\ 0.675 - 0.30721i \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{bmatrix} 0.74162 \\ 0.74162 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

a macierz obserwowalności układu

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C(A_d + \Upsilon_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0.75 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy obserwowalności jest równy $\text{rank}(\mathcal{O}) = 2$, więc system jest obserwowalny.

Macierz obserwatora F jest tak dobrana, aby zagwarantować asymptotyczną stabilność obserwatora, a także pożądane jego własności dynamiczne, i ma następującą postać:

$$F_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & -0.6 \end{bmatrix}$$

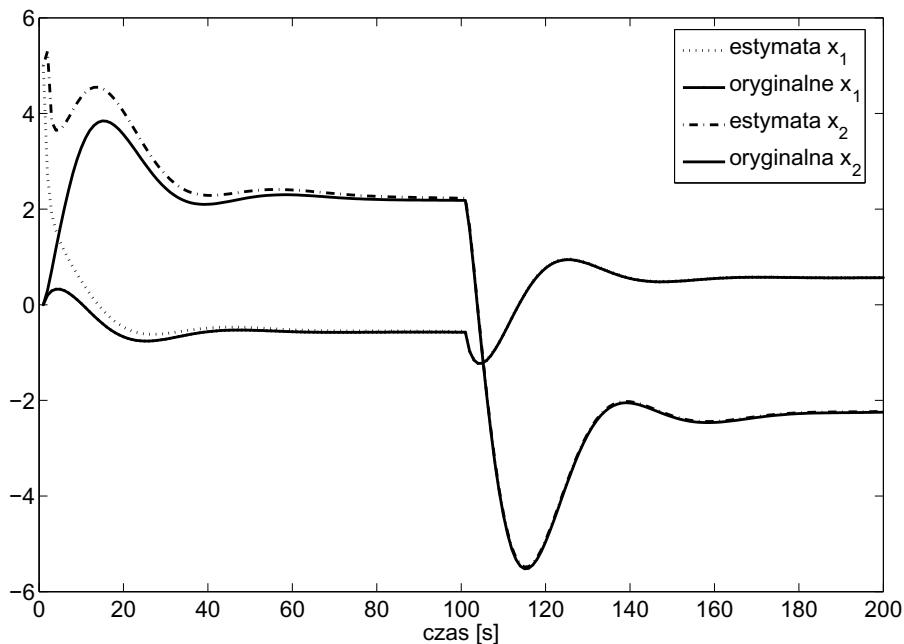
gdzie moduły wartości własnych macierzy $(F + \Upsilon_1)$ są równe

$$\begin{aligned} |\text{eig}(F_d + \Upsilon_1)| &= \left| \begin{pmatrix} 0.3 + 0.1i \\ 0.3 - 0.1i \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{bmatrix} 0.31623 \\ 0.31623 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

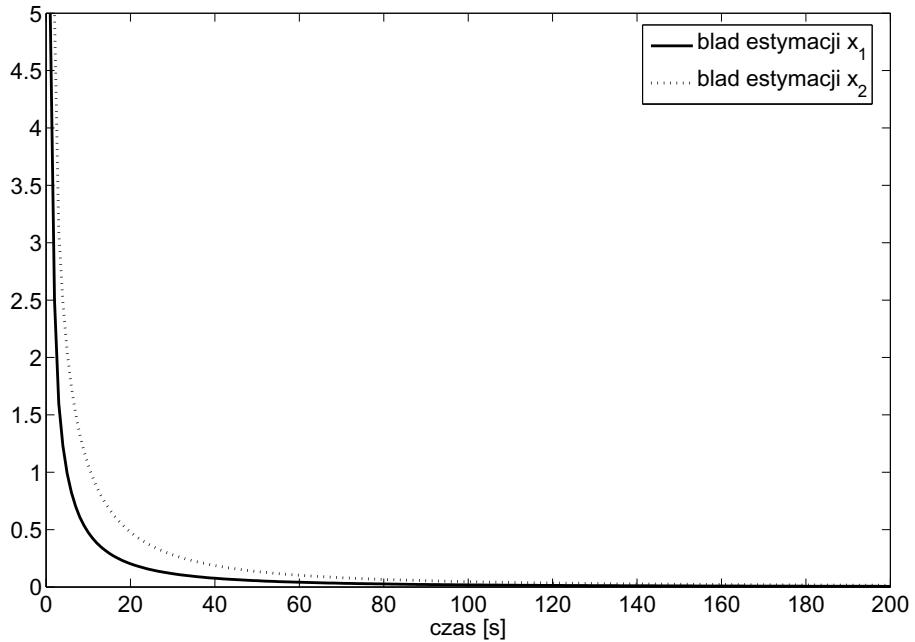
Przy danych A_d , F_d i C macierz H jest następująca:

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

Wyniki estymacji dla niezerowych warunków początkowych obserwatora $\hat{x}_0 = [5 \quad 5]$ przedstawione są na rysunkach 5.1 i 5.2. Rysunek 5.1 przedstawia estymowane zmienne stanu porównane z oryginalnymi zmiennymi stanu układu. Rysunek 5.2 natomiast przedstawia błąd estymacji obserwatora.



Rysunek 5.1: Wynik estymacji zmiennych stanu, zmienne stanu (przykład 26)



Rysunek 5.2: Wynik estymacji zmiennych stanu, błąd estymacji (przykład 26)

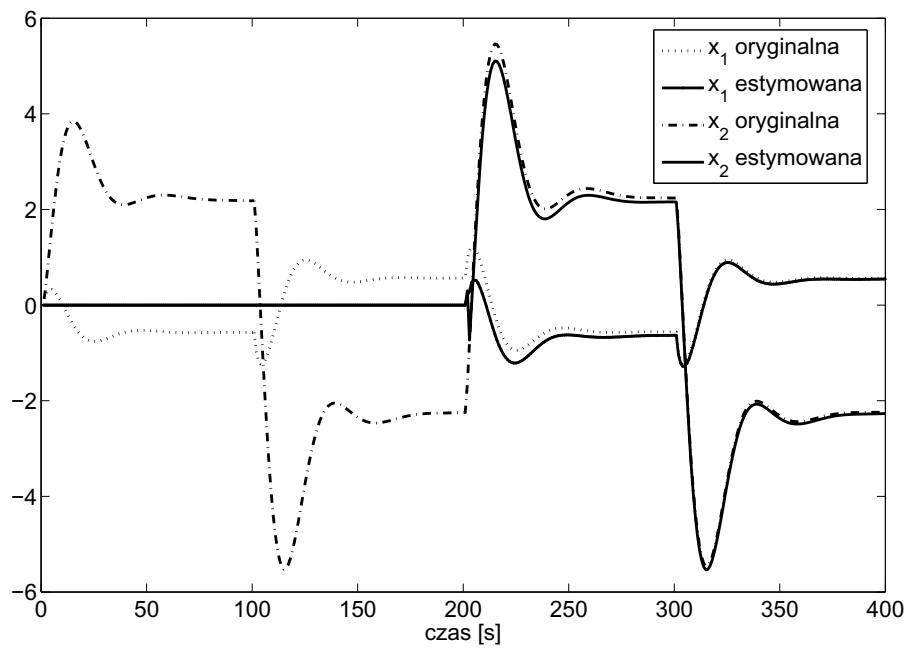
5.1.1 Estymacja zmiennych stanu dla różnych chwil startowych estymowanego układu i obserwatora

Sytuacją wymagającą bardziej szczegółowego przeanalizowania jest algorytm obserwatora uruchamiany w chwili, gdy układ obserwowany działał już przez pewien okres czasu k_{obs} . W sytuacji tej występuje nie tylko różnica początkowa estymaty i wektora stanu układu w chwili $k = 0$, ale także błąd estymacji wynikający z tego, iż algorytm obserwatora nie bierze pod uwagę nieznanych wartości wyjścia i wejścia układu z chwil przed uruchomieniem obserwatora.

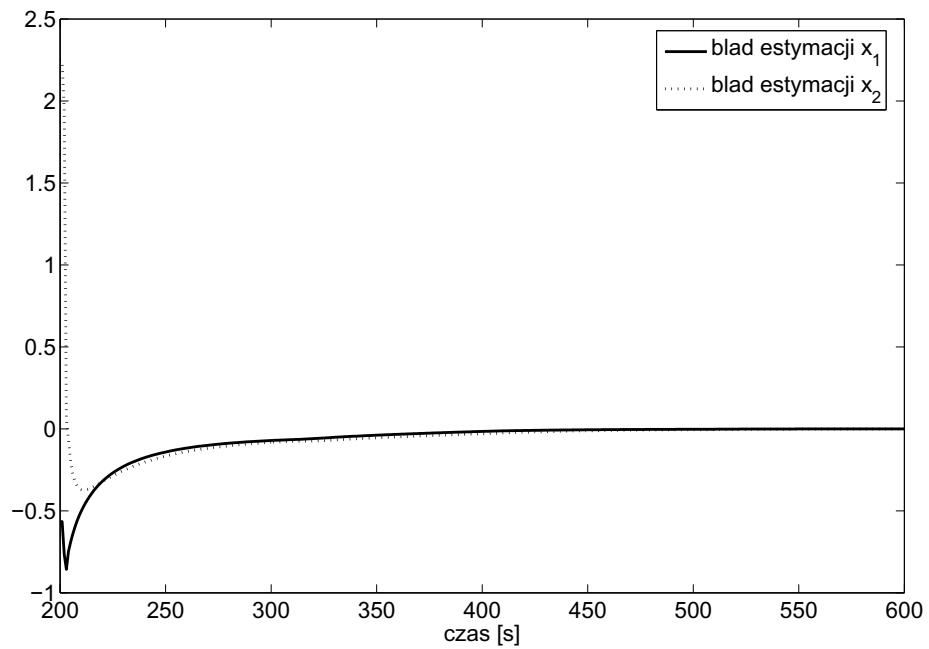
Przykład 27 *Estymacja wektora stanu w sytuacji różnej chwili startowej układu i obserwatora*

Dany jest układ taki sam, jak w przykładzie 26. Zakładamy, że w chwili uruchomienia algorytmu obserwatora układ działał już 200sek. Uruchomiony algorytm obserwatora nie zawiera żadnych informacji o przeszłości układu, zarówno czasu pracy, jak i wartości wejściowych czy wyjściowych.

Wyniki estymacji przy takich warunkach przedstawiają rysunki 5.3 i 5.4. Rysunek 5.3 przedstawia estymowane zmienne stanu, a rysunek 5.4 błąd estymacji od chwili układu $k = 200$ (początku pracy obserwatora).



Rysunek 5.3: Wyniki estymacji przy różnej chwili startowej (przykład 27)



Rysunek 5.4: Błąd estymacji przy różnej chwili startowej (przykład 27)

Jak można zauważyć (w przykładzie 27), błąd estymacji dąży asymptotycznie do zera, pomimo braku informacji o przeszłości układu. Nieznajomość przeszłości układu powoduje pojawienie się dodatkowego błędu estymacji (nie tylko związanego z różnicą warunków początkowych).

kowych w chwili $k = 0$ obserwatora, ale z całą przeszłością układu). Błąd ten jest minimalizowany asymptotycznie do zera, ale trwa to znacznie dłużej niż dla przypadku startu układu i obserwatora w tym samym czasie. Błąd może zostać zminimalizowany do zera dopiero wtedy, gdy nieznana przeszłość układu przestaje już odgrywać decydującą rolę w dynamice samego układu (w tym przypadku po ok. 200sek).

5.1.2 Estymacja zmiennych stanu układu stochastycznego przy użyciu obserwatora

Algorytm obserwatora został wyprowadzony dla układów deterministycznych, jakkolwiek w rzeczywistych warunkach użytkowania mamy do czynienia z zakłóceniami (układami stochastycznymi). Dlatego bardzo interesujący, ze względów praktycznych, jest przypadek estymacji zmiennych stanu dyskretnego układu ułamkowego rzędu z zakłóceniami za pomocą dyskretnego obserwatora ułamkowego rzędu.

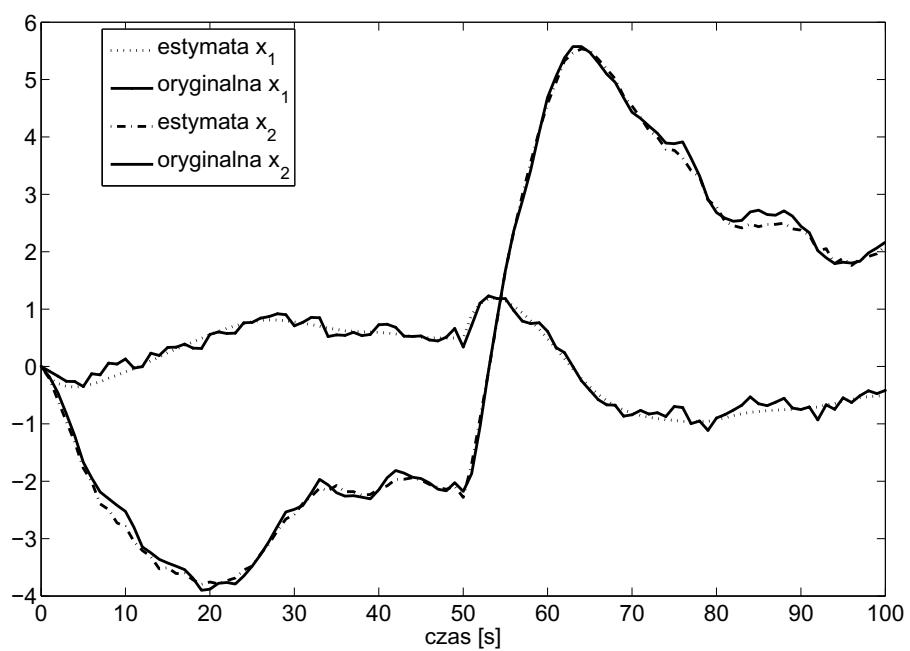
Przykład 28 Estymacja zmiennych stanu układu stochastycznego

Układ i obserwator są dane tak samo, jak w przykładzie 26 z dodatkowym zakłóceniem zmiennych stanu i wyjścia układu estymowanego. Parametry szumów to:

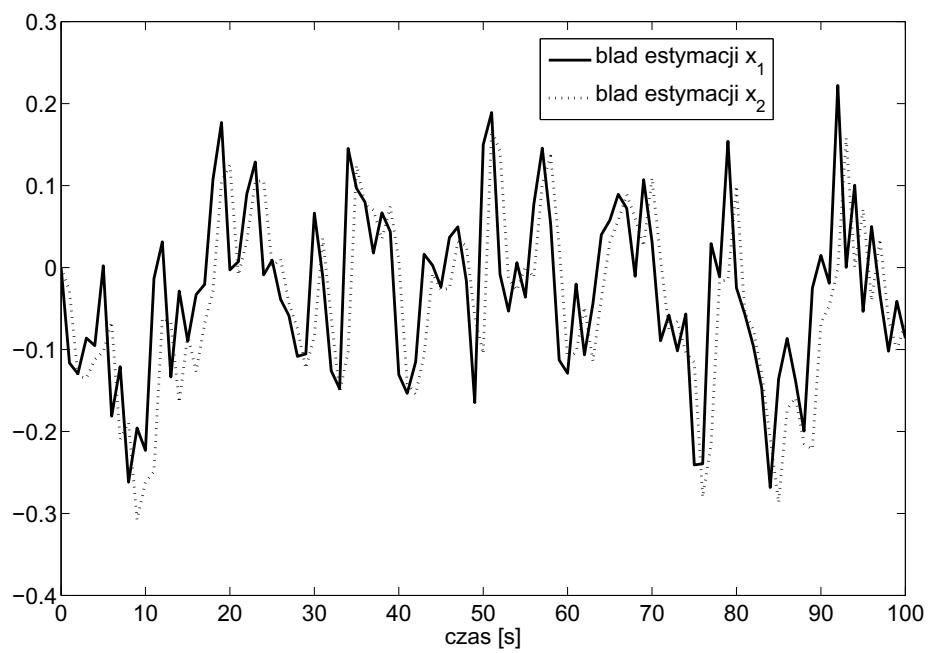
$$E[\omega_k^T \omega_k] = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}, E[\nu_k \nu_k] = 0.04$$

Wyniki estymacji układu z zakłóceniami przedstawiają rysunki 5.5 i 5.6. Rysunek 5.5 przedstawia porównanie estymowanych zmiennych stanu z oryginalnymi zmiennymi stanu układu. Rysunek 5.6 przedstawia natomiast błąd estymacji.

Jak można zauważyć (w przykładzie 28), estymacja zmiennych stanu przy użyciu obserwatora jest możliwa, pomimo istnienia niewielkich zakłóceń zarówno na wyjściu układu, jak i w zmiennych stanu. Błąd estymacji nie dąży do zera, ale oscyluje w zakresie ± 0.2 . Jest to spowodowane tym, że w każdej chwili zakłócenia powodują dodatkowy, ograniczony błąd estymacji. Jednak w przypadku obecności większych zakłóceń działanie obserwatora może być obarczone jeszcze większym błędem (o ile w ogóle możliwe).



Rysunek 5.5: Wynik estymacji zmiennych stanu układu stochastycznego, zmienne stanu (przykład 28)



Rysunek 5.6: Wynik estymacji zmiennych stanu układu stochastycznego, błąd estymacji (przykład 28)

5.1.3 Estymacja zmiennych stanu układu ciągłego przy użyciu dyskretnego obserwatora

Bardzo ważną sytuacją, z praktycznego punktu widzenia, jest estymacja zmiennych stanu ciągłego układu ułamkowego rzędu przy użyciu dyskretnego obserwatora ułamkowego rzędu. Dla układu ciągłego identyfikowany jest model dyskretny, dla którego wyznaczany jest dyskretny obserwator ułamkowego rzędu.

Przykład 29 *Dany jest układ ciągły opisany równaniami jak w przykładzie 25 dla rzędu równego $n = 1.3$.*

Jego model dyskretny dany jest macierzami

$$A_d = \begin{bmatrix} -0.0032175 & 0.069404 \\ -0.13562 & -0.21619 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0015804 \\ 0.067732 \end{bmatrix}, n = 1.3$$

$$C = \begin{bmatrix} 2.0002 & -0.0056536 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Układ ten jest obserwowałny, a moduły wartości własnych macierzy $(A_d + \Upsilon_1)$ są równe

$$|\text{eig}(A_d + \Upsilon_1)| = \begin{bmatrix} 1.2342 \\ 1.1464 \end{bmatrix}$$

Macierz obserwatora F jest tak dobrana, aby zagwarantować asymptotyczną stabilność obserwatora, a także pożądane jego własności dynamiczne i ma następującą postać:

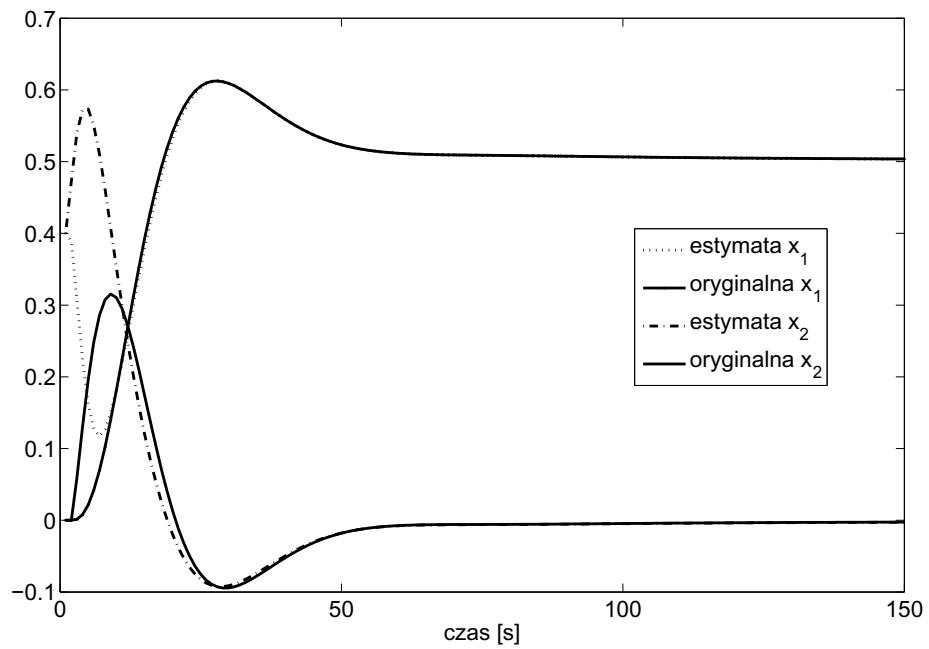
$$F_d = \begin{bmatrix} -0.3975 & 0.0705 \\ 0.0985 & -0.2169 \end{bmatrix}$$

gdzie moduły wartości własnych macierzy $(F + \Upsilon_1)$ są równe

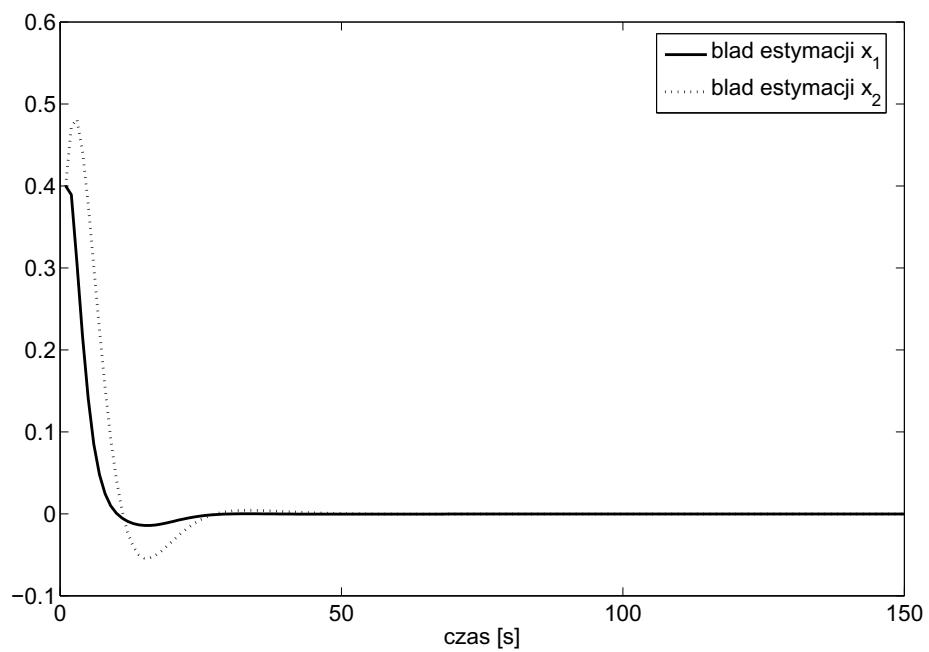
$$|\text{eig}(F_d + \Upsilon_1)| = \begin{bmatrix} 0.8699 \\ 1.1157 \end{bmatrix}$$

Przy danych A_d , F_d i C macierz H jest następująca:

$$H = \begin{bmatrix} 0.1971 \\ -0.1171 \end{bmatrix}$$



Rysunek 5.7: Wyniki estymacji układowi ciągłego (przykład 29)



Rysunek 5.8: Błąd estymacji układowi ciągłego (przykład 29)

Wyniki estymacji dla niezerowych warunków początkowych obserwatora $\hat{x}_0 = [0.4 \quad 0.4]$ przedstawione są na rysunkach 5.7 i 5.8. Rysunek 5.7 przedstawia estymowane zmienne stanu porównane z oryginalnymi zmiennymi stanu układu. Rysunek 5.8 natomiast przedstawia błąd

estymacji obserwatora.

Jak widać (na przykładzie 29), dyskretny obserwator ułamkowego rzędu może z powodzeniem odtwarzać zmienne stanu układu ciągłego (pod warunkiem posiadania dokładnego modelu dyskretnego). Daje to możliwość zastosowania dyskretnego obserwatora ułamkowego rzędu w układach sterowania od stanu dla rzeczywistych (ciągłych) układów.

5.2 Filtr Kalmana dla liniowych układów dynamicznych dyskretnego ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanów

Filtr Kalmana jest optymalnym estymatorem zmiennych stanu układu stochastycznego na podstawie wiedzy o modelu, a także danych wejściowych i wyjściowych z estymowanego obiektu [88]. Wynik estymacji może być otrzymywany, na przykład, poprzez minimalizację w każdym kroku następującej funkcji celu [190]:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= \arg \min_x [(\tilde{x}_k - x)\tilde{P}_k^{-1}(\tilde{x}_k - x)^T \\ &\quad + (y_k - Cx)R_k^{-1}(y_k - Cx)^T]\end{aligned}\quad (5.4)$$

gdzie

$$\tilde{x}_k = \mathbb{E}[x_k | z_{k-1}^*] \quad (5.5)$$

jest predykcją wektora zmiennych stanu w czasie k , definiowaną jako zmienna losowa x_k warunkowana poprzez dane z_{k-1}^* [21]. Dane z_k^* zawierają pomiary sygnału wyjściowego y_0, y_1, \dots, y_k i sygnału wejściowego u_0, u_1, \dots, u_k .

Dodatkowo

$$\hat{x}_k = \mathbb{E}[x_k | z_k^*] \quad (5.6)$$

jest estymatą wektora zmiennych stanu w czasie k , definiowaną jako zmienna losowa x_k warunkowana poprzez dane z_k^* .

Co więcej

$$\tilde{P}_k = \mathbb{E}[(\tilde{x}_k - x_k)(\tilde{x}_k - x_k)^T] \quad (5.7)$$

jest macierzą kowariancji predykcji błędu estymacji. Macierz kowariancji sygnału wyjściowego ν_k (patrz definicja 20) jest natomiast zdefiniowana jako

$$R_k = \mathbb{E} [\nu_k \nu_k^T] \quad (5.8)$$

podczas gdy macierz kowariancji szumu ω_k (patrz definicja 20, a także Twierdzenie 48 poniżej) jest zdefiniowana jako

$$Q_k = \mathbb{E} [\omega_k \omega_k^T] \quad (5.9)$$

Macierz kowariancji błędu estymacji jest definiowana następująco:

$$P_k = \mathbb{E} [(\hat{x}_k - x_k)(\hat{x}_k - x_k)^T] \quad (5.10)$$

Zakładamy, że wszystkie te macierze są symetryczne.

Lemat 13 *Predykcja wektora zmiennych stanu \tilde{x}_{k+1} na podstawie danych z_k^* określona jest następującą relacją.*

$$\begin{aligned} \Delta^\gamma \tilde{x}_{k+1} &= A_d \hat{x}_k + B u_k \\ \tilde{x}_{k+1} &\approx \Delta^\gamma \tilde{x}_{k+1} \\ &- \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k+1-j} \end{aligned}$$

■

Dowód:

Predykcja wektora zmiennych stanu podana w Lemacie 13 jest uzyskana analogicznie do predykcji wektora stanu w Filtrze Kalmana całkowitego rzędu [75, 21], gdzie predykcja ta jest wyznaczana na podstawie modelu i poprzedniej wartości wektora stanu i sygnału wejściowego (tworząc tzw. replikę modelu).

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \mathbb{E}[x_{k+1}|z_k^*] \\ &= \mathbb{E}[(A_d x_k + B u_k + \omega_k \\ &- \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j})|z_k^*] \\ &= A_d \mathbb{E}[x_k|z_k^*] + B u_k \\ &- \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \mathbb{E}[x_{k+1-j}|z_k^*] \end{aligned}$$

Wyrażenie to można uprościć używając następującego założenia upraszczającego:

$$\mathbb{E}[x_{k+1-j}, z_k^*] \approx \mathbb{E}[x_{k+1-j}, z_{k+1-j}^*]$$

$$\text{dla } i = 1 \dots (k+1)$$

Uproszczenie to powoduje, że poprzednie wartości wektora stanu nie będą aktualizowane przy użyciu nowych danych z_k . Używając tego uproszczenia uzyskać można następującą relację:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{k+1} &\approx A_d \hat{x}_k + B u_k \\ &- \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k+1-j}\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 48 Dla dyskretnego liniowego układu ułamkowego rzędu opisanego w przestrzeni stanu danego definicją 15 Ułamkowy Filtr Kalmana (ang. Fractional Kalman Filter) dany jest następująco:

$$\Delta^\Upsilon \tilde{x}_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B u_k \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{k+1} &= \Delta^\Upsilon \tilde{x}_{k+1} \\ &- \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k+1-j}\end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}_k &= (A_d + \Upsilon_1) P_{k-1} (A_d + \Upsilon_1)^T \\ &+ Q_{k-1} + \sum_{j=2}^k \Upsilon_j P_{k-j} \Upsilon_j^T\end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k (y_k - C \tilde{x}_k) \quad (5.14)$$

$$P_k = (I - K_k C) \tilde{P}_k \quad (5.15)$$

gdzie

$$K_k = \tilde{P}_k C^T (C \tilde{P}_k C^T + R_k)^{-1}$$

przy warunkach początkowych

$$x_0 \in \mathbb{R}^N, \quad P_0 = \mathbb{E}[(\tilde{x}_0 - x_0)(\tilde{x}_0 - x_0)^T]$$

zakładamy także, że ν_k i ω_k są szumami niezależnymi o zerowej wartości oczekiwanej. ■

Dowód:

- a) Równania (5.11) i (5.12) wynikają bezpośrednio z Lematu 13. Uproszczenie zawarte w tym lemacie implikuje to, że algorytm Filtru Kalmana podany w Twierdzeniu 48 jest tylko rozwiązaniem suboptimalnym.
- b) Aby dowieść równania (5.14), należy wyznaczyć minimum funkcji (5.4). Jest to wykonane poprzez zróżniczkowanie jednokrotne tego równania oraz przyrównanie go do zera.

$$-2\tilde{P}_k^{-1}(\tilde{x}_k - \hat{x}_k) - 2C^T R_k^{-1}(y_k - C\hat{x}_k) = 0$$

co prowadzi do następującej zależności:

$$\hat{x}_k = (\tilde{P}_k^{-1} + C^T R_k^{-1} C)^{-1} (\tilde{P}_k^{-1} \tilde{x}_k + C^T R_k^{-1} y_k)$$

Używając lematu o odwrotności macierzy (ang. Matrix Inversion Lemma), można doprowadzić do następującej postaci:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= (\tilde{P}_k - \tilde{P}_k C^T (C \tilde{P}_k C^T + R)^{-1} C \tilde{P}_k)^{-1} \\ &\quad (\tilde{P}_k^{-1} \tilde{x}_k + C^T R_k^{-1} y_k) \end{aligned}$$

Oznaczając

$$K_k = \tilde{P}_k C^T (C \tilde{P}_k C^T + R_k)^{-1} \quad (5.16)$$

które jest nazywane wektorem wzmacnień Filtru Kalmana, otrzymujemy poniższe równanie

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \tilde{x}_k + \tilde{P}_k C^T R_k^{-1} y_k - K_k C \tilde{x}_k \\ &\quad - K_k C \tilde{P}_k C^T R_k^{-1} y_k \end{aligned}$$

co można uprościć do postaci

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k - K_k C \tilde{x}_k + (I - K_k C) \tilde{P}_k C^T R^{-1} y_k$$

Można dokonać jego dalszej redukcji ponownie używając przekształconej relacji (5.16)

$$K_k R = (I - K_k C) \tilde{P}_k C^T$$

co prowadzi do równania (5.14).

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k (y_k - C \tilde{x}_k)$$

Jak można zauważyć, równanie to jest dokładnie takie samo jak w Filtrze Kalmana dla układów całkowitego (pierwszego) rzędu różnicowego.

- c) Wyrowadzenie równania (5.13) oparte jest na równaniu (5.7).

Współczynnik $(\tilde{x}_k - x_k)$ jest wyznaczony jako

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_k - x_k) &= A_d \hat{x}_{k-1} + B u_{k-1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^k [(-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k-j}] \\ &\quad - A_d x_{k-1} - B u_{k-1} - \omega_{k-1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^k [(-1)^j \Upsilon_j x_{k-j}] \\ &= (A_d - \Upsilon_1) (\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}) \\ &\quad - \omega_{k-1} - \sum_{j=2}^k [(-1)^j \Upsilon_j (\hat{x}_{k-j} - x_{k-j})] \end{aligned}$$

Niezależność szumów ω_k, ν_k jest założeniem Twierdzenia 48. Dodatkowo zakładamy, że korelacje między poprzednimi wektorami zmiennych stanu $E[x_k x_j]$ dla $k \neq j$, które są bardzo trudne do wyznaczenia, są pomijalne. Uproszczenie to, które nie byłoby wymagane gdy $E[\omega_k \omega_k^T] = 0$, implikuje że współczynniki $(\hat{x}_l - x_l)(\hat{x}_m - x_m)^T$ są równe zero dla $l \neq m$. Prowadzi to do następującej relacji:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_k &= \mathbb{E}[(\tilde{x}_k - x_k)(\tilde{x}_k - x_k)^T] \\
&= (A_d - \Upsilon_1)\mathbb{E}[(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}) \\
&\quad (\hat{x}_{k-1} - x_{k-1})^T](A_d - \Upsilon_1)^T \\
&+ \mathbb{E}[\omega_{k-1}\omega_{k-1}^T] + \sum_{j=2}^k \Upsilon_j \mathbb{E}[(\hat{x}_{k-j} - x_{k-j}) \\
&\quad (\hat{x}_{k-j} - x_{k-j})^T]\Upsilon_j^T \\
&= (A_d + \Upsilon_1) P_{k-1} (A_d + \Upsilon_1)^T + Q_{k-1} \\
&+ \sum_{j=2}^k \Upsilon_j P_{k-j} \Upsilon_j^T
\end{aligned}$$

Jak można zauważyć, predykcja macierzy kowariancji błędu estymacji \tilde{P}_k zależy od po- przednich wartości macierzy kowariancji błędu. Jest to główna różnica w porównaniu do Filtru Kalmana dla układów pierwszego rzędu.

- d) Wyprowadzenie równania (5.15) przeprowadzone jest w oparciu o definicję macierzy kowariancji błędu estymacji (5.10)

$$\begin{aligned}
P_k &= \mathbb{E}[(\hat{x}_k - x_k)(\hat{x}_k - x_k)^T] \\
&= \mathbb{E}[(\tilde{x}_k + K_k(Cx_k + \nu_k - C\tilde{x}) - x_k) \\
&\quad (\tilde{x}_k + K_k(Cx_k + \nu_k - C\tilde{x}) - x_k)^T] \\
&= (I - K_k C)\mathbb{E}[(\tilde{x}_k - x_k)(\tilde{x}_k - x_k)^T] \\
&\quad (I - K_k C)^T + K_k \mathbb{E}[\nu_k \nu_k^T] K_k^T \\
&= (I - K_k C)\tilde{P}_k(I - K_k C)^T + K_k R_k K_k \\
&= (I - K_k H_k)\tilde{P}_k + (-\tilde{P}_k H_k^T \\
&\quad + K_k H_k \tilde{P}_k H_k^T + K_k R_k)K_k^T
\end{aligned}$$

co można uprościć używając relacji (5.16). Prowadzi to bezpośrednio do relacji (5.15)

$$P_k = (I - K_k C)\tilde{P}_k$$

Tutaj także nie ma różnicy w porównaniu do tradycyjnego (pierwszego rzędu) Filtru Kalmana.

□

Równania zdefiniowane w Twierdzeniu 48 tworzą rekurencyjny algorytm Ułamkowego Filtru Kalmana (FKF). Algorytm ten rozpoczyna działanie z wartościami początkowymi x_0 i P_0 , które reprezentują naszą wiedzę (a priori) o warunkach początkowych estymowanego układu. Zazwyczaj macierz P_0 przyjmowana jest jako macierz diagonalna o dużych wartościach np. $100I$.

Przykład 30 Przykład estymacji zmiennych stanu dla układu bez zakłóceń. Układ estymowany dany jest następującymi macierzami:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

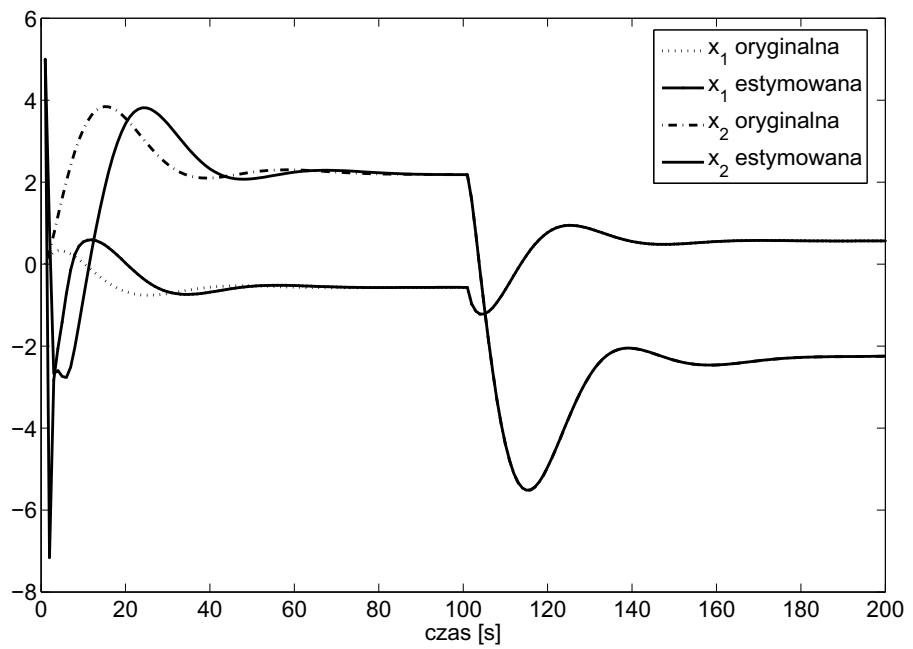
Parametry Ułamkowego Filtru Kalmana są następujące:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = [0.04];$$

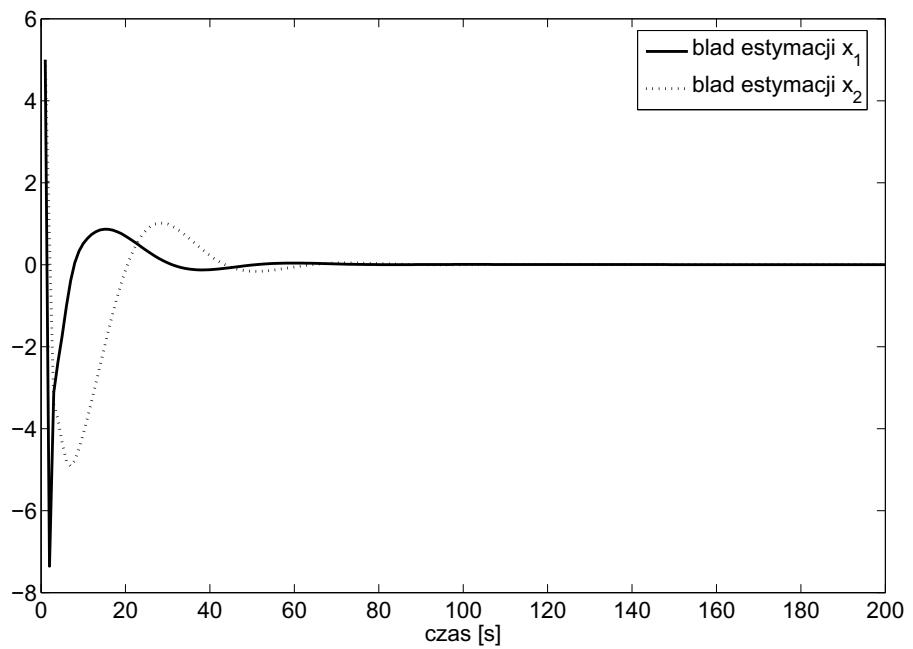
$$x_0 = [5, 5]^T$$

Wynik estymacji zmiennych stanu danego układu przy użyciu Ułamkowego Filtru Kalmana przedstawiony jest na rysunkach 5.9 i 5.10. Rysunek 5.9 przedstawia porównanie zmiennych stanu układu i estymowanych zmiennych stanu, rysunek 5.10 natomiast przedstawia błąd estymacji. Wartość macierzy $R = 0.04$ została tak dobrana, aby zapewnić lepszą zbieżność numeryczną algorytmu Ułamkowego Filtru Kalmana. Przy braku zakłóceń wyjścia układu wartość ta powinna wynosić zero.

Jak można zauważyć, (na przykładzie 30) błąd estymacji szybko dąży do zera, przez co estymowane zmienne stanu dążą do zmiennych stanu układu estymowanego. Szybkość zbieżności tej estymacji można sterować, podobnie jak w przypadku klasycznego Filtru Kalmana, zmieniając wartości macierzy P_0 .



Rysunek 5.9: Rezultat estymacji zmiennych stanu przy użyciu Ułamkowego Filtru Kalmana (zmienne stanu) (przykład 30)



Rysunek 5.10: Rezultat estymacji zmiennych stanu przy użyciu Ułamkowego Filtru Kalmana (błąd estymacji) (przykład 30)

Przykład 31 Przykład estymacji zmiennych stanu dla układu z zakłóceniami. Układ estymowany dany jest następującymi macierzami:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

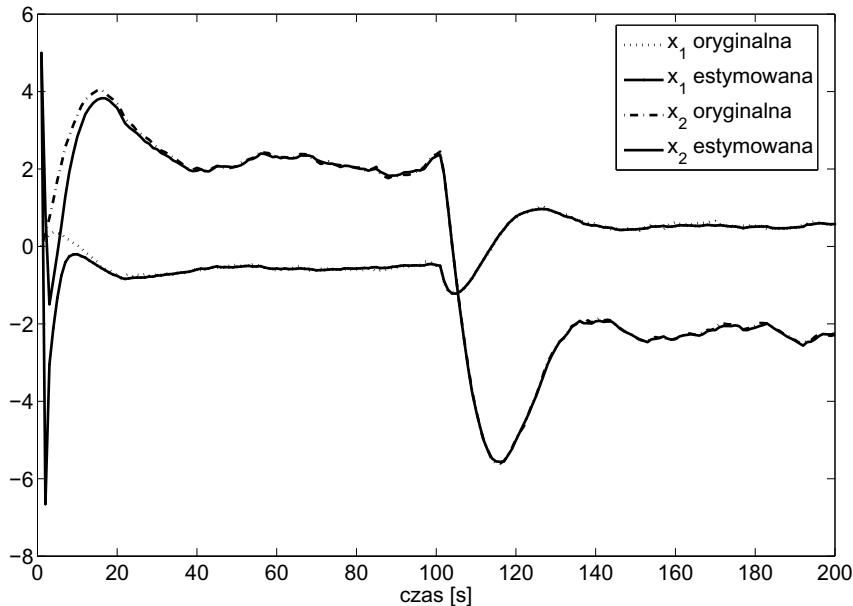
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E[\omega_k^T \omega_k] = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}, \quad E[\nu_k \nu_k] = 0.04$$

Parametry Ułamkowego Filtru Kalmana są następujące:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}, \quad R = [0.04];$$

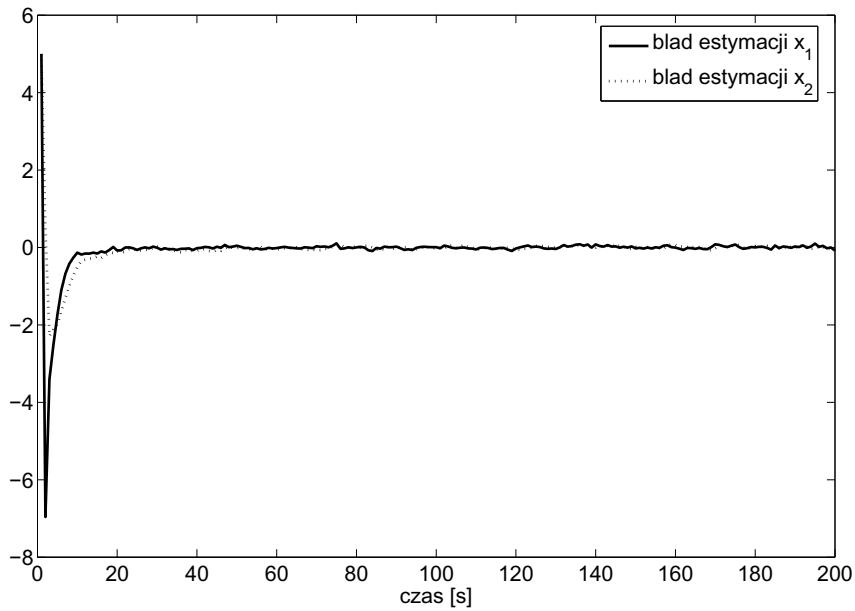
$$x_0 = [0, 0]^T$$

Rysunek 5.11 przedstawia porównanie zmiennych stanu układu i estymowanych zmiennych stanu, rysunek 5.12 natomiast przedstawia błąd estymacji.



Rysunek 5.11: Rezultat estymacji zmiennych stanu przy użyciu Ułamkowego Filtru Kalmana (zmienne stanu) (przykład 31)

Jak można zauważyć (na przykładzie 31), pomimo uproszczeń przyjętych przy wyprowadzaniu Ułamkowego Filtru Kalmana, osiągnięto bardzo dokładne estymaty zmiennych stanu.



Rysunek 5.12: Rezultat estymacji zmiennych stanu przy użyciu Ułamkowego Filtru Kalmana (błąd estymacji) (przykład 31)

Bardzo interesujące jest porównanie osiągniętych wyników estymacji z wynikami z przykładu 28. Ułamkowy Filtr Kalmana osiąga dokładniejsze wyniki estymacji przy zakłóceniami niż obserwator, pomimo większych zakłóceń.

Przykład 32 Przykład estymacji zmiennych stanu dla układu z zakłóceniami (dla różnych wartości rzędów).

Dany jest następujący układ:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

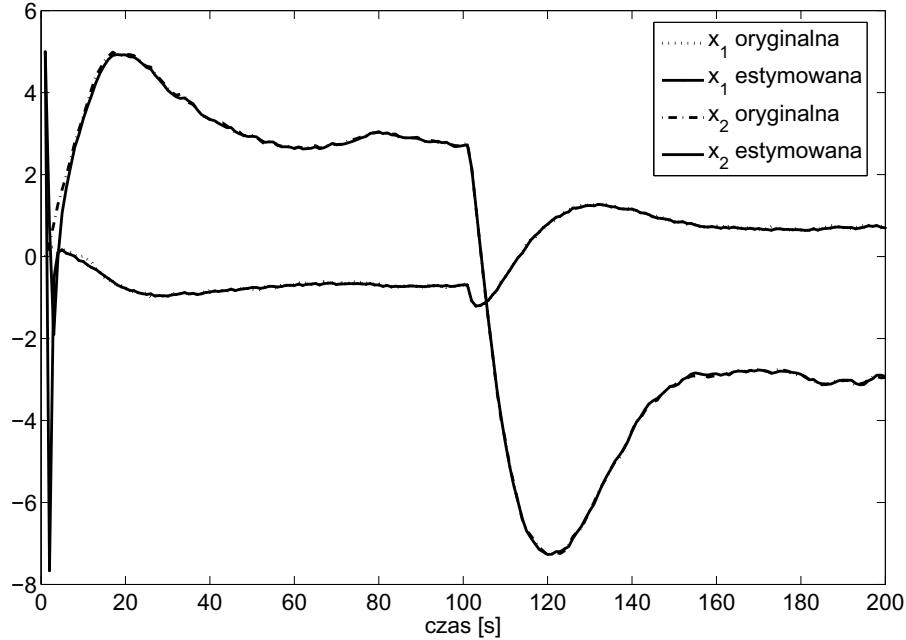
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E[\omega_k^T \omega_k] = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}, \quad E[\nu_k \nu_k] = 0.04$$

Parametry ułamkowego filtru Kalmana są następujące:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}, \quad R = [0.04];$$

$$x_0 = [0, 0]^T$$

Wynik estymacji przedstawiony jest na rysunkach 5.13 i 5.14. Rysunek 5.13 przedstawia porównanie zmiennych stanu układu i estymowanych zmiennych stanu, rysunek 5.14 natomiast przedstawia błąd estymacji.



Rysunek 5.13: Rezultat estymacji zmiennych stanu przy użyciu Ułamkowego Filtru Kalmana (zmienne stanu) (przykład 32)

Dla praktycznej implementacji układów sterowania, bardzo ważnym jest przypadek estymacji zmiennych stanu układu ciągłego ułamkowego rzędu przy użyciu Ułamkowego Filtru Kalmana i modelu dyskretnego ułamkowego rzędu, odpowiadającego układowi ciągłeemu.

Przykład 33 Przykład estymacji zmiennych stanu modelu ciągłego przy użyciu Ułamkowego Filtru Kalmana (dyskretnego).

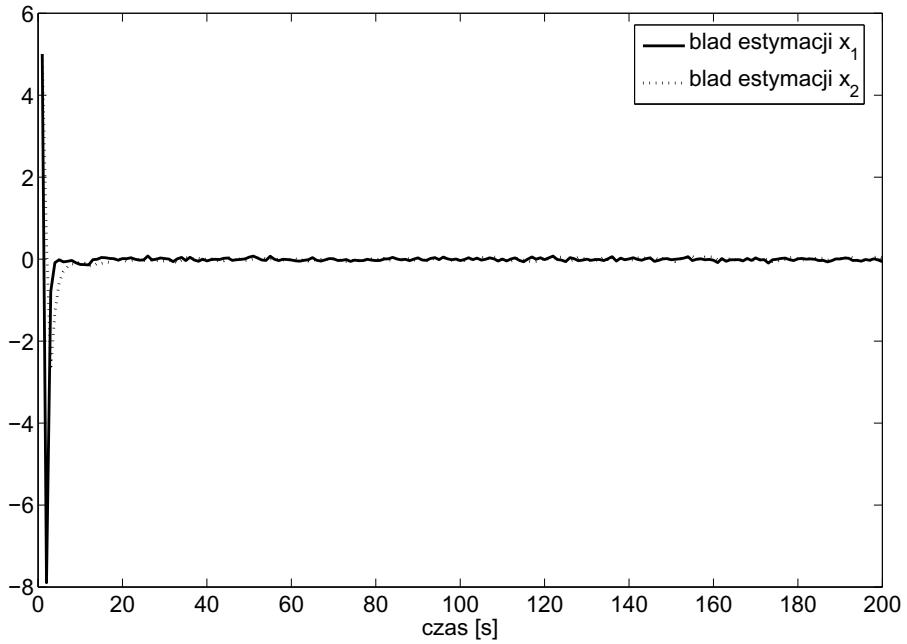
Dany jest układ ciągły opisany równaniami jak w przykładzie 25 dla rzędu równego $n = 0.7$.

Jego model dyskretny dany jest macierzami

$$A_d = \begin{bmatrix} -0.05641 & 0.14434 \\ -0.33726 & -0.49585 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.02900 \\ 0.16772 \end{bmatrix}, \quad n = 0.7$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Parametry ułamkowego filtru Kalmana są następujące:



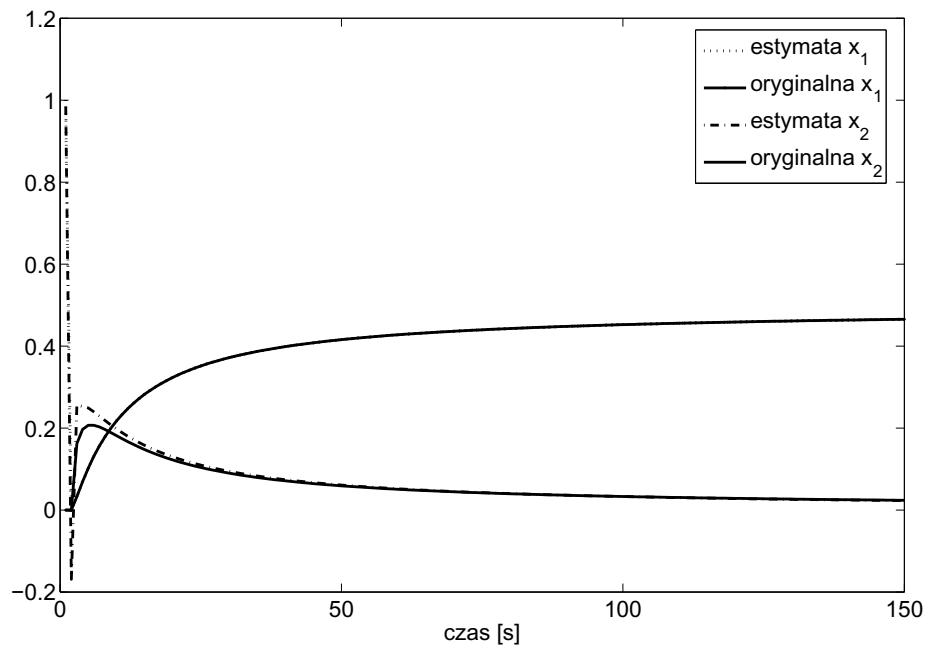
Rysunek 5.14: Rezultat estymacji zmiennych stanu przy użyciu Ułamkowego Filtru Kalmana (błąd estymacji) (przykład 32)

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.0 & 0 \\ 0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad R = [0.0];$$

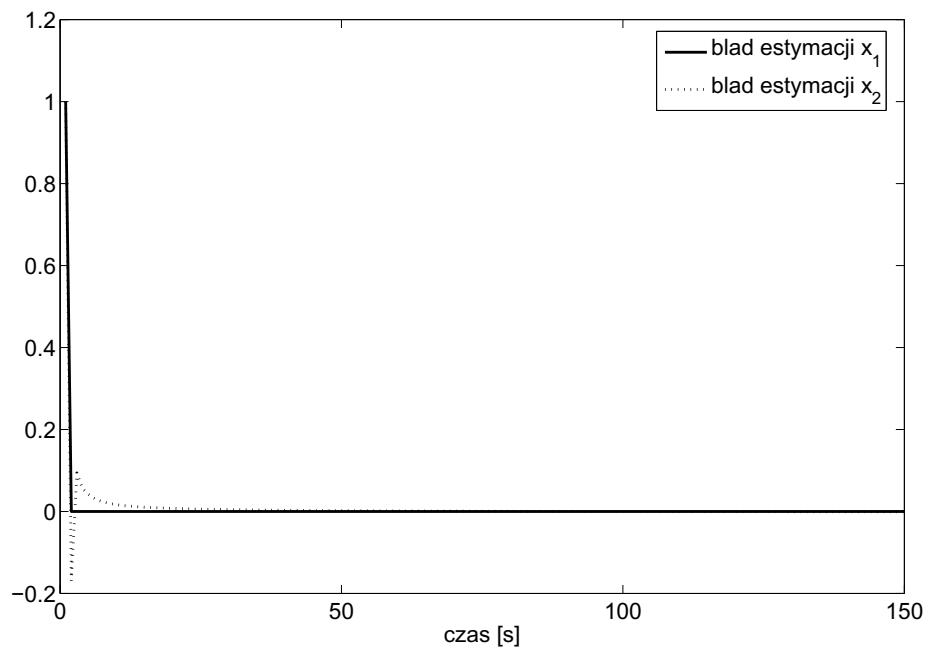
$$x_0 = [0, 0]^T$$

Wynik estymacji przedstawiony jest na rysunkach 5.15 i 5.16. Rysunek 5.15 przedstawia porównanie zmiennych stanu układu i estymowanych zmiennych stanu, rysunek 5.16 natomiast przedstawia błąd estymacji.

Jak można zauważyć (na przykładzie 33), Ułamkowy Filtr Kalmana może być także stosowany do estymacji zmiennych stanu układu ciągłego ułamkowego rzędu (przy założeniu posiadania dokładnego modelu dyskretnego układu ciągłego). Ułamkowy Filtr Kalmana może więc być stosowany w rzeczywistych układach sterowania od stanu.



Rysunek 5.15: Wyniki estymacji zmiennych stanu modelu ciągłego przy użyciu FKF (przykład 33)



Rysunek 5.16: Błąd estymacji modelu ciągłego (przykład 33)

5.3 Filtr Kalmana dla nieliniowych układów dynamicznych dyskretnych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanów

W podrozdziale 5.2 przedstawiony został uproszczony Filtr Kalmana dla dyskretnych układów liniowych ułamkowego rzędu. W tym podrozdziale zostanie przedstawione i przedyskutowane uogólnienie Ułamkowego Filtru Kalmana na dyskretne układy nieliniowe ułamkowego rzędu.

Zakładamy, że nieliniowe funkcje $f(\cdot)$ i $h(\cdot)$ są klasy C^∞ i mogą być zlinearyzowane poprzez rozwinięcie w szereg Taylora

$$f(x) = f(\tilde{x}) + \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x} - x) + W \quad (5.17)$$

gdzie W oznacza część rozkładu w szeregu Taylora zawierającą współczynniki wyższych rzędów niż jeden i pomijane w procesie linearyzacji.

Dla układów nieliniowych zdefiniowany w podrozdziale 5.2 algorytm FKF musi zostać sformułowany w ten sam sposób, jak Rozszerzony Filtr Kalmana dla układów nieliniowych pierwszego rzędu.

Lemat 14 *Predykcja wektora zmiennych stanu \tilde{x}_{k+1} na podstawie danych z_k^* dla układu danego definicją 21 określona jest następująco:*

$$\begin{aligned} \Delta^\top \tilde{x}_{k+1} &= f(\hat{x}_k, u_k) \\ \tilde{x}_{k+1} &\approx \Delta^\top \tilde{x}_{k+1} \\ &- \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k+1-j} \end{aligned}$$

■

Dowód:

Predykcja wektora zmiennych stanu podana w Lemacie 14 jest wyprowadzona w sposób analogiczny do wyprowadzenia predykcji wektora stanu podanego w Lemacie 13.

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{k+1} &= \mathbb{E}[x_{k+1}|z_k^*] \\
&= \mathbb{E}[f(x_k, u_k) + \omega_k \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j})|z_k^*]
\end{aligned}$$

Linearyzując funkcję $f(x_k, u_k)$ w pobliżu punktu \hat{x}_k zgodnie z równaniem (5.17) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{k+1} &= f(\hat{x}_k, u_k) - \frac{\partial f(\hat{x}_k, u_k)}{\partial \hat{x}_k} (\hat{x}_k - \mathbb{E}[x_k|z_k^*]) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \mathbb{E}[x_{k+1-j}|z_k^*]
\end{aligned}$$

Przyjmując założenie upraszczające analogiczne do założenia przyjętego w Lemacie 13

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x_{k+1-j}, z_k^*] &\approx \mathbb{E}[x_{k+1-j}, z_{k+1-j}^*] \\
\text{for } i = 1 \dots (k+1)
\end{aligned}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{k+1} &\approx f(\hat{x}_k, u_k) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k+1-j}
\end{aligned}$$

Uproszczenie to powoduje, tak jak w przypadku liniowym, że poprzednie wartości wektora stanu nie będą aktualizowane przy użyciu nowych danych z_k . Uproszczenie to nie będzie konieczne, gdy $\mathbb{E}[\omega_k \omega_k^T] = 0$.

□

Twierdzenie 49 *Rozszerzony Ułamkowy Filtr Kalmana (EKF) dla układów dyskretnych neliiniowych stochastycznych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu, danych definicją 21, określony jest następującym zbiorem równań:*

$$\Delta^{\Upsilon} \tilde{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k) \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \Delta^{\Upsilon} \tilde{x}_{k+1} \\ &- \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k+1-j} \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_k &= (F_{k-1} + \Upsilon_1) P_{k-1} (F_{k-1} + \Upsilon_1)^T \\ &+ Q_{k-1} + \sum_{j=2}^k \Upsilon_j P_{k-j} \Upsilon_j^T \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k [y_k - h(\tilde{x}_k)] \quad (5.21)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) \tilde{P}_k \quad (5.22)$$

z warunkami początkowymi

$$x_0 \in \mathbb{R}^N, \quad P_0 = E[(\hat{x}_0 - x_0)(\hat{x}_0 - x_0)^T]$$

gdzie

$$K_k = \tilde{P}_k H_k^T (H_k \tilde{P}_k H_k^T + R_k)^{-1}$$

$$F_{k-1} = \left[\frac{\partial f(x, u_{k-1})}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}_{k-1}}$$

$$H_k = \left[\frac{\partial h(x)}{\partial x} \right]_{x=\tilde{x}_k}$$

przy założeniu, że szумy ν_k i ω_k są niezależne i o zerowej wartości oczekiwanej. ■

Dowód:

- a) Równania (5.18) i (5.19) są zdefiniowane w Lemacie 14. Uproszczenie zawarte w wyprowadzeniu Lematu 14 implikuje, że wynik działania algorytmu Rozszerzonego Ułamkowego Filtru Kalmana podanego w tym Twierdzeniu jest tylko wynikiem suboptimalnym.
- b) Aby wyprowadzić równanie (5.21), funkcja celu określona równaniem (5.4) musi być zadaptowana do modelu określonego definicją 21. W tym wypadku funkcja celu przybiera następującą postać:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \arg \min_x [(\tilde{x}_k - x) \tilde{P}_k^{-1} (\tilde{x}_k - x)^T \\ &+ (y_k - h(x)) R_k^{-1} (y_k - h(x))^T] \end{aligned} \quad (5.23)$$

Rozwijając funkcję nieliniową $h(\cdot)$ w szereg Taylora i pomijając wyrazy rzędu wyższego niż jeden, otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= \arg \min_x \left[(\tilde{x}_k - x) \tilde{P}_k^{-1} (\tilde{x}_k - x)^T \right. \\ &\quad + \left(y_k - h(\tilde{x}_k) + \frac{\partial h(\tilde{x}_k)}{\partial \tilde{x}_k} (x_k - \tilde{x}_k) \right) R_k^{-1} \\ &\quad \left. \left(y_k - h(\tilde{x}_k) + \frac{\partial h(\tilde{x}_k)}{\partial \tilde{x}_k} (x_k - \tilde{x}_k) \right)^T \right]\end{aligned}$$

Oznaczając

$$H_k = \left[\frac{\partial h(x)}{\partial x} \right]_{x=\tilde{x}_k} \quad (5.24)$$

i przyrównując pochodną funkcji celu do zera, otrzymujemy następujące równanie:

$$\begin{aligned}- & 2\tilde{P}_k^{-1}(\tilde{x}_k - \hat{x}_k) - 2H_k^T R_k^{-1} [y_k - h(\tilde{x}_k) \\ - & H_k(x_k - \tilde{x}_k)] = 0\end{aligned}$$

Zgodnie z metodą zaprezentowaną w Podrozdziale 5.2, używając lematu o odwrotności macierzy (ang. Matrix Inversion Lemma) i oznaczając

$$K_k = \tilde{P}_k H^T (H \tilde{P}_k H^T + R_k)^{-1} \quad (5.25)$$

równanie (5.21) przyjmuje postać:

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K(y_k - h(\tilde{x}_k))$$

- c) Dowód równania (5.20) przeprowadzony jest w sposób analogiczny do dowodu Twierdzenia 48.

Wyrażenie $(\tilde{x}_k - x_k)$ w (5.7) jest wyznaczone następująco:

$$\begin{aligned}
(\tilde{x}_k - x_k) &= f(x_{k-1}, u_{k-1}) + \omega_{k-1} \\
&- \sum_{j=1}^k (-1)^j \Upsilon_j x_{k-j} - f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}) \\
&+ \sum_{j=1}^k (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k-j} \\
&= f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}) + \omega_{k-1} \\
&+ \frac{\partial f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1})}{\partial \hat{x}_{k-1}} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) \\
&- \sum_{j=1}^k (-1)^j \Upsilon_j x_{k-j} - f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}) \\
&+ \sum_{j=1}^k (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k-j}
\end{aligned}$$

Oznaczając

$$F_{k-1} = \left[\frac{\partial f(x, u_{k-1})}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}_{k-1}} \quad (5.26)$$

otrzymujemy następującą zależność:

$$\begin{aligned}
(\tilde{x}_k - x_k) &= \omega_{k-1} - F_{k-1}(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}) \\
&- \sum_{j=1}^k (-1)^j \Upsilon_j (\hat{x}_{k-j} - x_{k-j})
\end{aligned}$$

Niezależność szumów ω_k, ν_k jest założona w tym Twierdzeniu. Dodatkowo zakładamy, tak samo jak przy dowodzie Twierdzenia 48, że korelacje między poprzednimi wektorami zmiennych stanu $E[x_k x_j]$ dla $k \neq j$, które są bardzo trudne do wyznaczenia, są pomijalne. Uproszczenie to, które nie byłoby wymagane, gdy $E[\omega_k \omega_k^T] = 0$ implikuje, że współczynniki $(\hat{x}_l - x_l)(\hat{x}_m - x_m)^T$ są równe zero dla $l \neq m$. Prowadzi to do następującej relacji:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_k &= \text{E}[(\tilde{x}_k - x_k)(\tilde{x}_k - x_k)^T] \\
&= F_{k-1}\text{E}[(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}) \\
&\quad (\hat{x}_{k-1} - x_{k-1})^T]F_{k-1}^T + \text{E}[\omega_{k-1}\omega_{k-1}^T] \\
&+ \sum_{j=1}^k \Upsilon_j \text{E}[(\hat{x}_{k-j} - x_{k-j}) \\
&\quad (\hat{x}_{k-j} - x_{k-j})^T]\Upsilon_j^T
\end{aligned}$$

co bezpośrednio prowadzi do równania (5.20)

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_k &= (F_{k-1} + \Upsilon_1) P_{k-1} (F_{k-1} + \Upsilon_1)^T \\
&+ Q_{k-1} + \sum_{j=2}^k \Upsilon_j P_{k-j} \Upsilon_j^T
\end{aligned}$$

- d) Wyprowadzenie równania (5.22) przeprowadzone jest w oparciu o definicję macierzy kowariancji błędu estymacji daną równaniem (5.10), w ten sam sposób jak przy wyprowadzeniu równania (5.22). Wyrażenie $(\hat{x}_k - x_k)$ w tej definicji można przedstawić jako

$$\begin{aligned}
(\hat{x}_k - x_k) &= \tilde{x}_k + K_k(y_k - h(\tilde{x}_k)) - x_k \\
&= \tilde{x}_k + K_k[h(\tilde{x}_k) \\
&\quad + \frac{\partial h(\tilde{x}_k)}{\partial \tilde{x}_k}(x_k - \tilde{x}_k) \\
&\quad + \omega_k - h(\tilde{x}_k)] - x_k \\
&= (I - K_k H_k)(\tilde{x}_k - x_k) + K_k \omega_k
\end{aligned}$$

Używając notacji zawartej w równaniu (5.24) i podstawiając powyższą zależność do równania (5.10) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
P_k &= \text{E}[(\hat{x}_k - x_k)(\hat{x}_k - x_k)^T] \\
&= (I - K_k H_k) \text{E}[(\tilde{x}_k - x_k)(\tilde{x}_k - x_k)^T] \\
&\quad (I - K_k H_k)^T + K_k \text{E}[\omega_k \omega_k^T] K_k \\
&= (I - K_k H_k) \tilde{P}_k (I - K_k H_k)^T \\
&\quad + K_k R_k K_k^T \\
&= (I - K_k H_k) \tilde{P}_k + (-\tilde{P}_k H_k^T \\
&\quad + K_k H_k \tilde{P}_k H_k^T + K_k R_k) K_k^T
\end{aligned}$$

co można uprościć, używając relacji (5.25), otrzymując równanie (5.22)

$$P_k = (I - K_k H_k) \tilde{P}_k$$

□

5.4 Filtr Kalmana dla nieliniowych układów dynamicznych dyskretnych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanów oparty na transformacji "Unscented"

Dla układów nieliniowych zachodzi potrzeba stosowania dodatkowych modyfikacji algorytmu, takich jak zastosowanie linearyzacji przez rozwinięcie w szereg Taylora (EKF) lub wyznaczanie macierzy kowariancji i wartości oczekiwanych poprzez transformację "Unscented" (Unscented Ułamkowy Filtr Kalmana (ang. Unscented Fractional Kalman Filter UFKF)).

To drugie podejście daje większą dokładność przy wyznaczaniu predykcji macierzy kowariancji błędu, a dodatkowo nie wymaga różniczkowania przy linearyzacji, co ma decydujące znaczenie dla estymacji rzędu układu, jak to zostanie pokazane w rozdziale 5.4.2.

Transformacja "Unscented" [75, 82] polega na wyznaczeniu dodatkowych punktów (5.27), które określają kowariancję błędu danego wektora, a następnie obliczeniu wartości funkcji nieliniowej dla tych punktów. Z wartości tych wyznaczenia jest nowa wartość oczekiwana i kowariancja błędu wektora w kolejnej chwili.

Przy założeniu, że szum jest addytywny i o zerowej wartości oczekiwanej, korzystając z analogii do tradycyjnego UKF oraz liniowego FKF zdefiniowanego powyżej, możemy otrzymać uogólnienie Filtru Kalmana opartego o transformację "Unscented" dla układów ułamkowego rzędu.

Przyjęto oznaczenie:

$$\hat{\chi}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_k & \hat{x}_k \pm (\sqrt{(L + \lambda)P_k}) \end{bmatrix}$$

które oznacza

$$\hat{\chi}_{i,k} = \begin{cases} \hat{x}_k, i = 0 \\ [\hat{x}_k + (\sqrt{(L + \lambda)P_k})_i], i = 1 \dots L \\ [\hat{x}_k - (\sqrt{(L + \lambda)P_k})_{2L-i}], i = L + 1 \dots 2L \end{cases}$$

gdzie $\sqrt{(L + \lambda)P_k}_i$ oznacza i-tą kolumnę pierwiastka kwadratowego macierzy (np. dolno-trójkątnej faktoryzacji Cholesky'ego), a współczynniki wagowe Unscented transformacji W są równe

$$\begin{aligned} W_0^{(m)} &= \lambda/(L + \lambda) \\ W_0^{(c)} &= \lambda/(L + \lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_i^{(m)} &= W_i^{(c)} = 1/(2(L + \lambda)) \end{aligned}$$

gdzie $\lambda = \alpha^2(L + \kappa) - L$, α jest współczynnikiem określającym szerokość rozstawienia punktów transformacji (w literaturze przyjmowany jest z zakresu $1 \leq \alpha \leq 1e - 4$), κ dodatkowym współczynnikiem skalującym zazwyczaj przyjmowanym jako 3-L, β współczynnikiem powiązanym z naszą znajomością typu szumu, dla szumu gaussowskiego przyjmowany jako $\beta = 2$.

Warunki początkowe algorytmu to

$$\hat{x}_0 = E[x_0], P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]$$

Algorytm natomiast przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}
\hat{\chi}_k &= \left[\begin{array}{cc} \hat{x}_k & \hat{x}_k \pm (\sqrt{(L + \lambda)P_k}) \end{array} \right] \\
\Delta^{\Upsilon} \tilde{\chi}_{i,k} &= F(\hat{\chi}_{i,k-1}, u_{k-1}) \\
\tilde{\chi}_{i,k}^* &= \Delta^{\Upsilon} \tilde{\chi}_{i,k} - \sum_{j=1}^k (-1)^j \Upsilon_j \hat{\chi}_{i,k-j} \\
\tilde{x}_k &= \sum_{i=1}^{2L} W_i^{(m)} \tilde{\chi}_{i,k}^* \\
\tilde{P}_k &= \sum_{i=1}^{2L} W_i^{(c)} [\tilde{\chi}_{i,k}^* - \tilde{x}_k] [\tilde{\chi}_{i,k}^* - \tilde{x}_k]^T + Q_{k-1} \\
\tilde{\chi}_k &= \left[\begin{array}{cc} \tilde{x}_k & \tilde{x}_k \pm (\sqrt{(L + \lambda)\tilde{P}_k}) \end{array} \right] \\
\tilde{\mathcal{Y}}_{i,k} &= H[\tilde{\chi}_{i,k}] \\
\tilde{y}_k &= \sum_{i=1}^{2L} W_i^{(m)} \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k} \\
P_{y_k y_k} &= \sum_{i=1}^{2L} W_i^{(c)} [\tilde{\mathcal{Y}}_{i,k} - \tilde{y}_k] [\tilde{\mathcal{Y}}_{i,k} - \tilde{y}_k]^T + R_k \\
P_{x_k y_k} &= \sum_{i=1}^{2L} W_i^{(c)} [\tilde{\chi}_{i,k} - \tilde{x}_k] [\tilde{\mathcal{Y}}_{i,k} - \tilde{y}_k]^T \\
\mathcal{K}_k &= P_{x_k y_k} P_{y_k y_k}^{-1} \\
\hat{x}_k &= \tilde{x}_k + \mathcal{K}_k (y_k - \tilde{y}_k) \\
P_k &= \hat{P}_k - \mathcal{K}_k P_{y_k y_k} \mathcal{K}_k
\end{aligned}$$

gdzie $F(\hat{\chi}_{i,k-1}, u_{k-1})$ jest funkcją nieliniową wyznaczania kolejnego wektora zmiennych stanu, a $H[\tilde{\chi}_{i,k}]$ jest nieliniową funkcją wyjścia układu. Do wyznaczania predykcji stanu układu i macierzy kowariancji błędu algorytm korzysta z poprzednich danych $\hat{\chi}_{k-j}$, przez co pośrednio otrzymuje informację o poprzednich wartościach macierzy kowariancji błędu estymacji.

5.4.1 Estymacja połączona parametrów i stanów układu jako przykład estymacji stanów układu nieliniowego

W podrozdziale tym zostaną przedstawione przykłady estymacji połączonej (ang. Joint Estimation) wektora zmiennych stanu i parametrów układu. Estymacja połączona polega na poszerzeniu wektora zmiennych stanu o estymowane parametry. Prowadzi to do powstania z układu liniowego układu nieliniowego (biliniowego). Estymacja połączona jest więc przykładem estymacji układów nieliniowych.

Przykład 34 Estymacja połączona wektora zmiennych stanu i parametru a_1 , jako przykład estymacji zmiennych stanu układu nieliniowego.

Dany jest układ

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}, E[\omega_k^T \omega_k] = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}, E[\nu_k \nu_k] = 0.04$$

Do estymacji połączonej parametru a_1 tworzymy rozszerzony wektor stanu

$$\bar{x}_k^p = \begin{bmatrix} x_k \\ a_{1,k} \end{bmatrix}$$

Macierze układu nieliniowego przybierają postać

$$f(x_k, u_k) = \begin{bmatrix} x_{2,k} \\ -0.1x_{1,k} - x_{3,k}x_{2,k} + u_k \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 1.2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

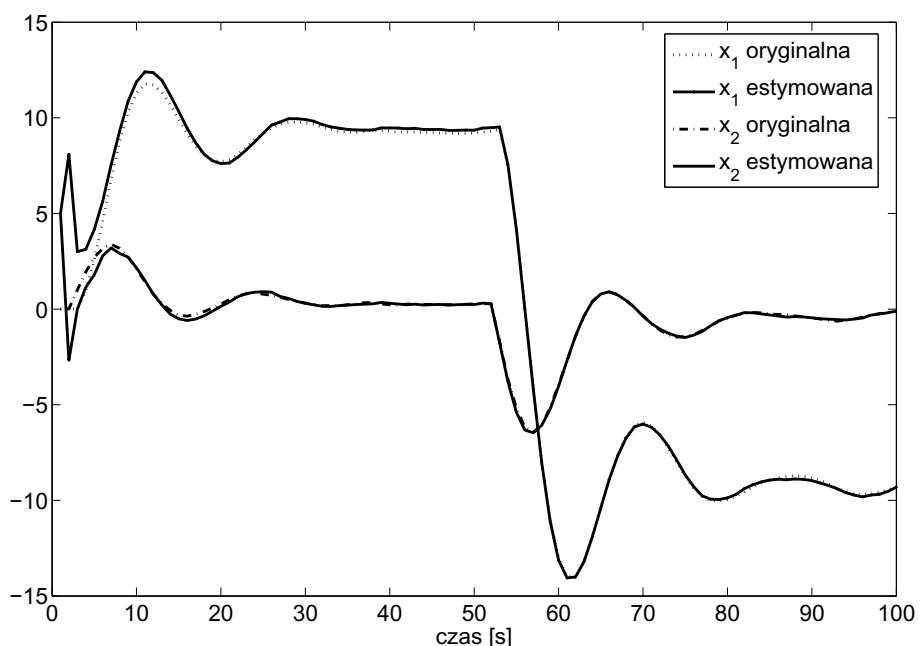
$$h(x_k) = \begin{bmatrix} 0.1x_{1,k} + 0.3x_{2,k} \end{bmatrix}$$

Parametry Rozszerzonego Ułamkowego Filtru Kalmana to

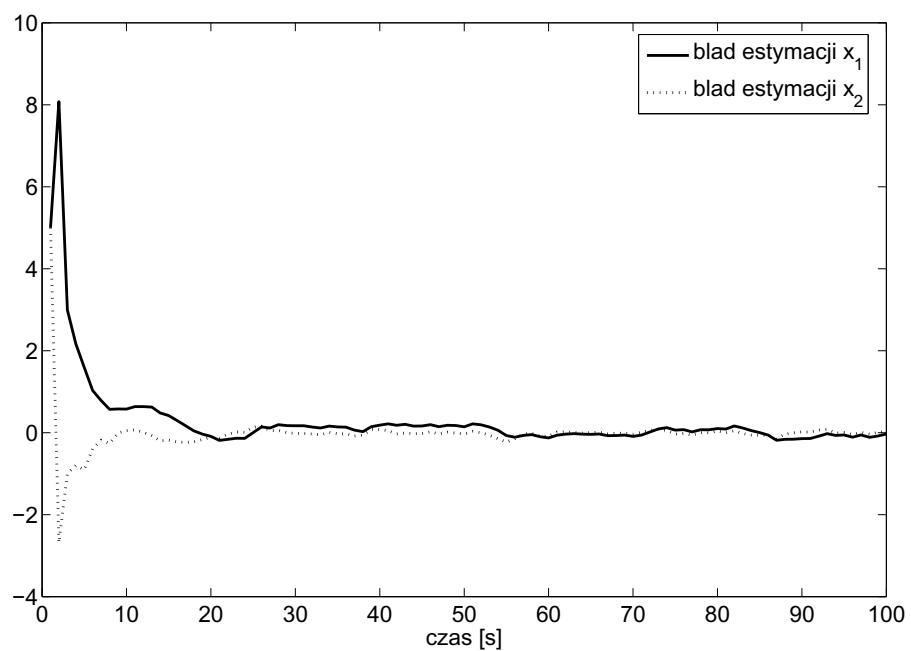
$$P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, Q_0 = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}, R = [0.04]$$

Wynik końcowy estymacji to $a_1 = 0.1950$. Na Rys. 5.17 zaprezentowane są wyniki estymacji zmiennych stanu układu, na Rys. 5.18 przedstawione są błędy estymacji zmiennych stanu układu, a na Rys. 5.19 został przedstawiony wynik estymacji parametru a_1 .

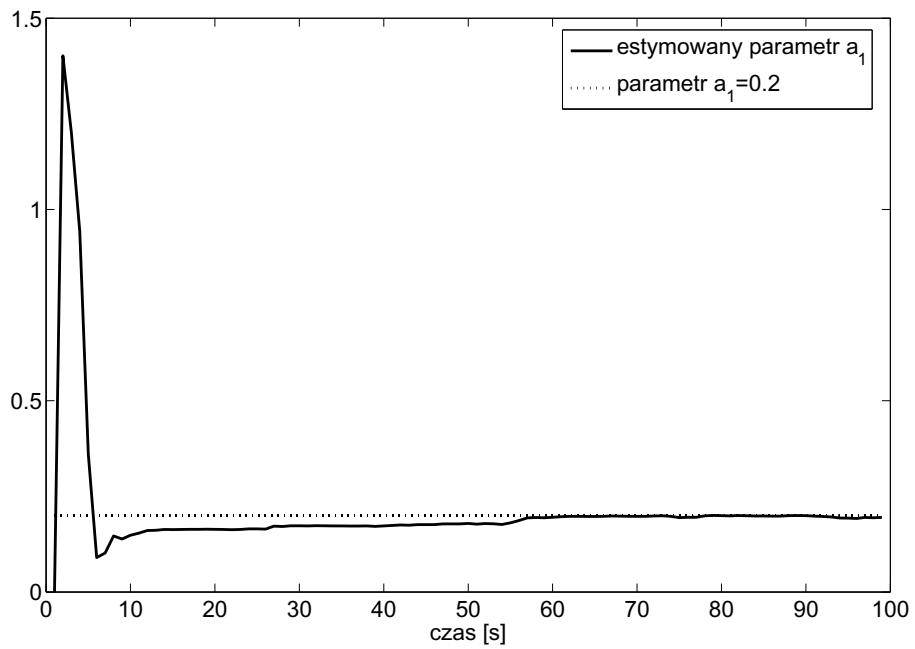
Jak można zauważyć (na przykładzie 34), algorytm estymacji połączonej zmiennych stanu i parametru a_1 , oparty na Rozszerzonym Ułamkowym Filtrze Kalmana, jest efektywny. Błąd estymacji zarówno zmiennych stanu, jak i parametru szybko dąży do zera.



Rysunek 5.17: Wyniki estymacji połączonej zmiennych stanu i parametru układu (zmienne stanu) (przykład 34)



Rysunek 5.18: Wyniki estymacji połączonej zmiennych stanu i parametru układu (błąd estymacji) (przykład 34)



Rysunek 5.19: Wyniki estymacji połączonej zmiennych stanu i parametru układu (estymowany parametr) (przykład 34)

Przykład 35 Estymacja połączona wektora zmiennych stanu i parametru a_0 , przy użyciu Ułamkowego Filtru Kalmana opartego o transformację "Unscented", jako przykład estymacji zmiennych stanu układu nieliniowego.

Dany jest układ

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.3 \end{bmatrix}, E[\omega_k^T \omega_k] = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}, E[\nu_k \nu_k] = 0.04$$

Do estymacji połączonej parametru a_0 tworzymy rozszerzony wektor stanu

$$x_k^p = \begin{bmatrix} x_k \\ a_{0,k} \end{bmatrix}$$

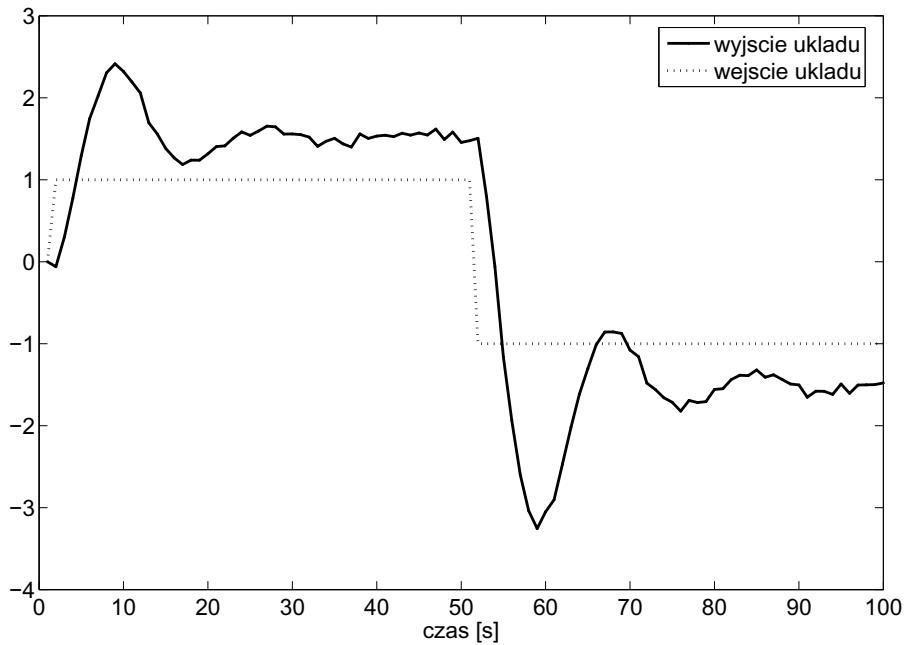
Macierze układu nieliniowego przybierają postać

$$f(x_k, u_k) = \begin{bmatrix} x_{2,k} \\ -x_{3,k}x_{1,k} - 0.2x_{2,k} + u_k \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 1.2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$h(x_k) = \begin{bmatrix} 0.15x_{1,k} + 0.3x_{2,k} \end{bmatrix}$$

Parametry Ułamkowego Filtru Kalmana opartego o transformację "Unscented" to

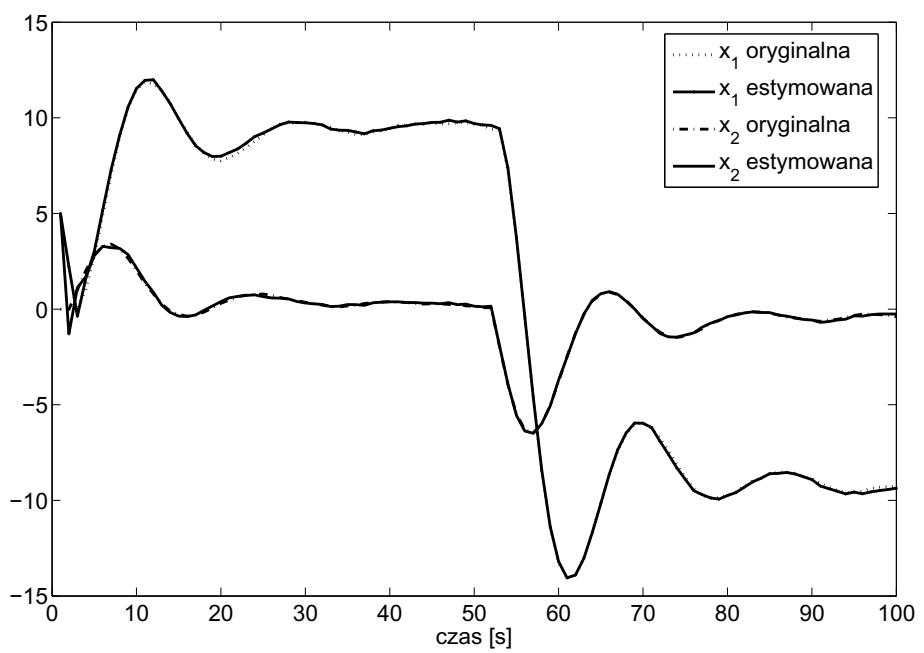
$$P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} Q_0 = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}, R = [0.04], \alpha = 0.01$$



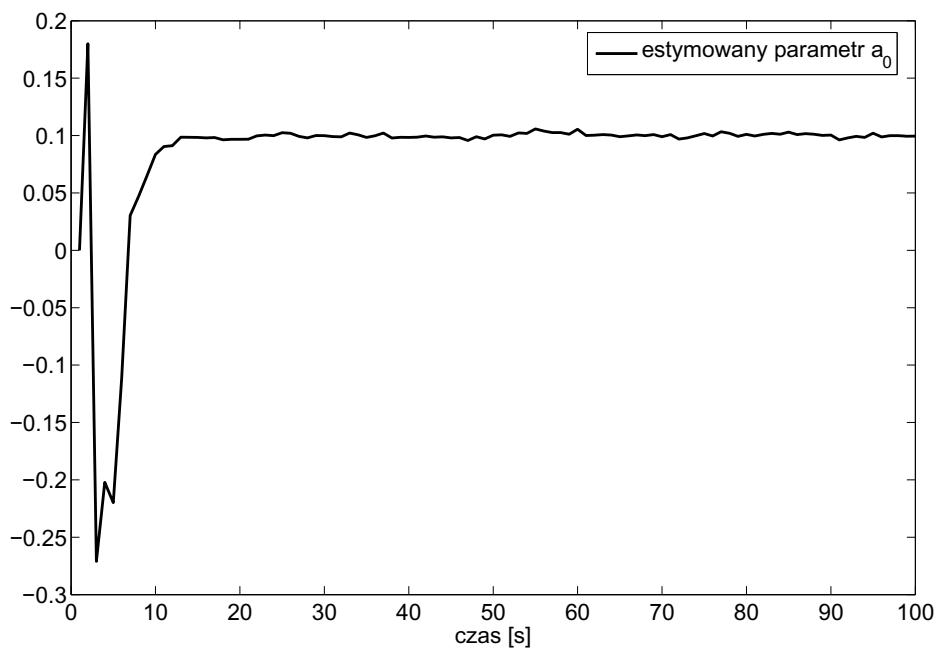
Rysunek 5.20: Wyniki estymacji połączonej zmiennych stanu i parametru układu (wyjście układu) (przykład 35)

Wynik końcowy estymacji to $a_1 = 0.1950$. Na Rys. 5.20 zaprezentowane jest wyjście i wejście danego układu, na Rys. 5.21 przedstawione są wyniki estymacji zmiennych stanu układu, a na Rys. 5.22 został przedstawiony wynik estymacji parametru a_0 .

Jak można zauważyć (na przykładzie 35), algorytm estymacji połączonej zmiennych stanu i parametru a_0 , bazujący na Ułamkowym Filtrze Kalmana opartym o transformację "Unscented",



Rysunek 5.21: Wyniki estymacji połączonej zmiennych stanu i parametru układu (zmienne stanu) (przykład 35)

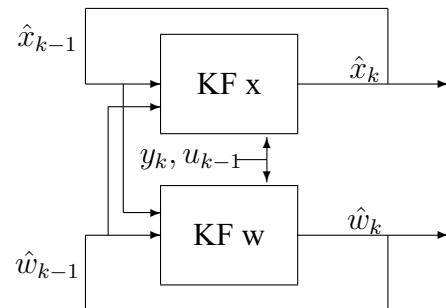


Rysunek 5.22: Wyniki estymacji połączonej zmiennych stanu i parametru układu (estymowany parametr) (przykład 35)

również jest efektywny. Błąd estymacji zarówno zmiennych stanu, jak i parametru szybko dąży do zera.

5.4.2 Estymacja dualna

Estymacja dualna polega na zastosowaniu odrębnych filtrów do estymacji wektora zmiennych stanu x_k i wektora parametrów w_k modelu. Schemat jej działania przedstawiony jest na rysunku 5.23, gdzie KFx jest filtrem dla zmiennych stanu, a KFw jest filtrem dla parametrów modelu. Filtr KFx korzysta z poprzedniej wartości estymaty wektora parametrów w_{k-1} i danych z wejścia u_{k-1} i wyjścia y_k układu do wyznaczenia estymaty wektora stanu układowego \hat{x}_k . Filtr KFw natomiast korzysta z poprzedniej wartości estymowanego przez KFx wektora stanu \hat{x}_{k-1} i z wejścia u_{k-1} oraz danych z wyjścia y_k układu do obliczenia własnej predykcji stanu i wyjścia układowego $\tilde{\chi}_k^w, \mathcal{Y}_k^w$ i w ten sposób wyznaczenia kolejnej estymaty parametrów układowego \hat{w}_k .



Rysunek 5.23: Schemat Estymacji Dualnej

Przy tak zdefiniowanym problemie i przy pełnej analogii do tradycyjnego UKF dla estymacji parametrów możemy zdefiniować UFKF dla estymacji parametrów układu ułamkowego rzędu.

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_k &= \hat{w}_{k-1} \\
\tilde{P}_k^w &= \hat{P}_{k-1}^w + Q_{k-1}^w \\
\tilde{\mathcal{W}}_k &= \left[\begin{array}{c} \tilde{w}_k \quad \tilde{w}_k \pm \left(\sqrt{(L+\lambda)\tilde{P}_k^w} \right)_i \\ \end{array} \right] \\
\Delta^{\Upsilon(\tilde{\mathcal{W}}_k)} \tilde{\chi}_k^w &= A_d(\tilde{\mathcal{W}}_k) \hat{x}_{k-1} + B(\tilde{\mathcal{W}}_k) u_{k-1} \\
\tilde{\chi}_k^w &= \Delta^{\Upsilon(\tilde{\mathcal{W}}_k)} \tilde{\chi}_k^w - \sum_{j=1}^k (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k-j} \\
\tilde{Y}_{k,i}^w &= C(\tilde{\mathcal{W}}_k) \tilde{\chi}_{k,i}^w \\
\tilde{y}_k^w &= \sum_{i=0}^{2L} W^{(m)} \tilde{Y}_{k,i} \\
P_{y_k y_k}^w &= \sum_{i=1}^{2L} W_i^{(c)} [\tilde{\mathcal{Y}}_{i,k} - \tilde{y}_k] [\tilde{\mathcal{Y}}_{i,k} - \tilde{y}_k]^T + R^w \\
P_{w_k y_k}^w &= \sum_{i=1}^{2L} W_i^{(c)} [\tilde{\mathcal{W}}_{i,k} - \tilde{w}_k] [\tilde{\mathcal{Y}}_{i,k} - \tilde{y}_k]^T \\
\mathcal{K}_k^w &= P_{w_k y_k}^w (P_{y_k y_k}^w)^{-1} \\
\hat{w}_k &= \tilde{w}_k + \mathcal{K}_k^w (y_k - \tilde{y}_k^w) \\
P_k^w &= \hat{P}_k^w - \mathcal{K}_k^w P_{y_k y_k}^w \mathcal{K}_k^w
\end{aligned}$$

Przykład 36 Estymacja dualna wektora zmiennych stanu i parametrów a_0 i a_1 . Dany jest układ

$$\begin{aligned}
A_d &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 1.2 \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} 0.15 & 0.3 \end{bmatrix}, E[\omega_k^T \omega_k] = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}, E[\nu_k \nu_k] = 0.04
\end{aligned}$$

Parametry KFx dane są następująco:

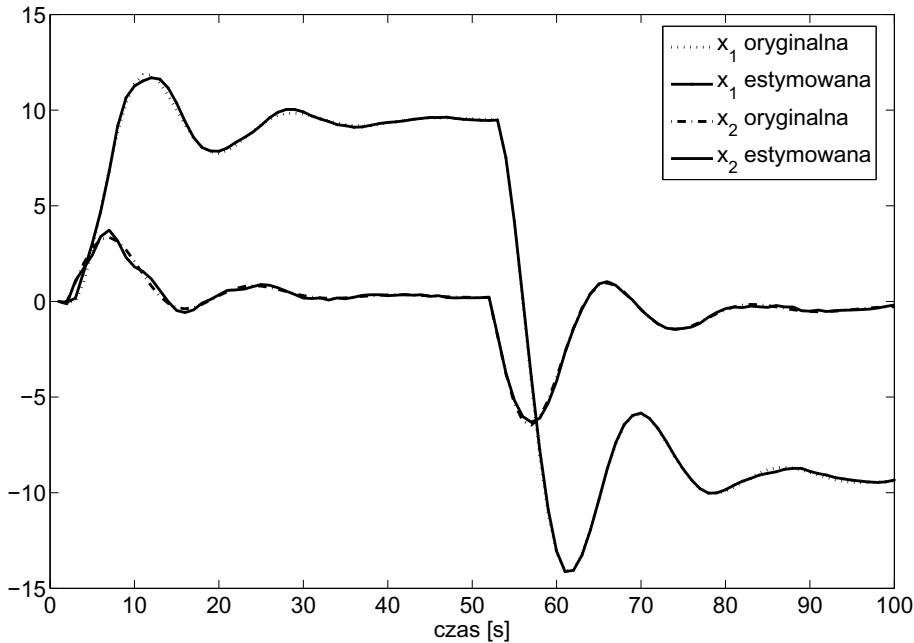
$$\begin{aligned}
P_0 &= \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, Q_0 = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix} \\
x_0 &= [0, 0], R = [0.04]
\end{aligned}$$

Parametry KFw dane są następująco:

$$w = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \end{bmatrix}^T$$

$$P_0^w = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, Q_0^w = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

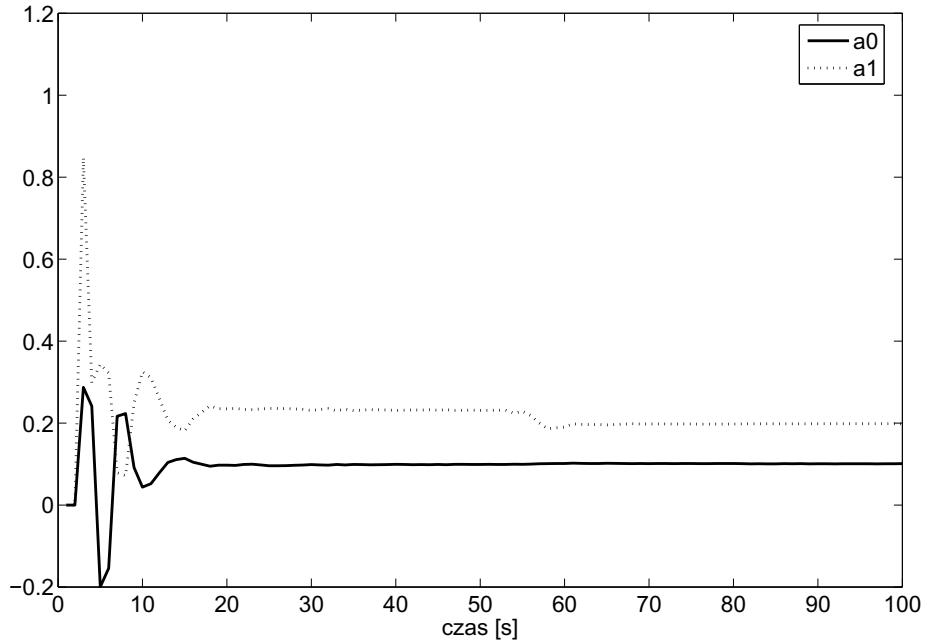
$$w_0 = [0, 0], R^w = [0.1], \alpha = 0.01$$



Rysunek 5.24: Wyniki estymacji dualnej zmiennych stanu i parametrów układu (zmienne stanu) (przykład 36)

Wynik końcowy estymacji to $a_0 = 0.1009$ i $a_1 = 0.1981$. Na Rys. 5.24 przedstawione są wyniki estymacji zmiennych stanu układu, a na Rys. 5.25 został przedstawiony wynik estymacji parametrów a_0 i a_1 .

Jak można zauważyć (na przykładzie 36), przedstawiony algorytm estymacji dualnej jest efektywny. Umożliwia on estymację zmiennych stanu i dwóch parametrów w tym samym czasie. Było to trudne do osiągnięcia metodami estymacji połączonej, pokazanymi w przykładach 34 i 35.



Rysunek 5.25: Wyniki estymacji dualnej zmiennych stanu i parametrów układu (parametry) (przykład 36)

Estymacja dualna zmiennych stanu i rzędu układu

Zależność pomiędzy rzędem układu a jego dynamiką jest bardzo złożona (silnie nieliniowa). Współczynniki $\binom{n}{j}$ w definicji różnicy ułamkowego rzędu zawierają wielomiany rzędu n w potęgach zależnych od chwil czasowych. Powoduje to silną nieliniowość problemu wyznaczania rzędu. W podrozdziale niniejszym do estymacji rzędu układu zostanie użyty algorytm estymacji dualnej.

Przykład 37 Estymacja dualna wektora zmiennych stanu i rzędu n układu.

Dany jest układ

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.3 \end{bmatrix}, E[\omega_k^T \omega_k] = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}, E[\nu_k \nu_k] = 0.04$$

Parametry KF:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, Q_0 = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}$$

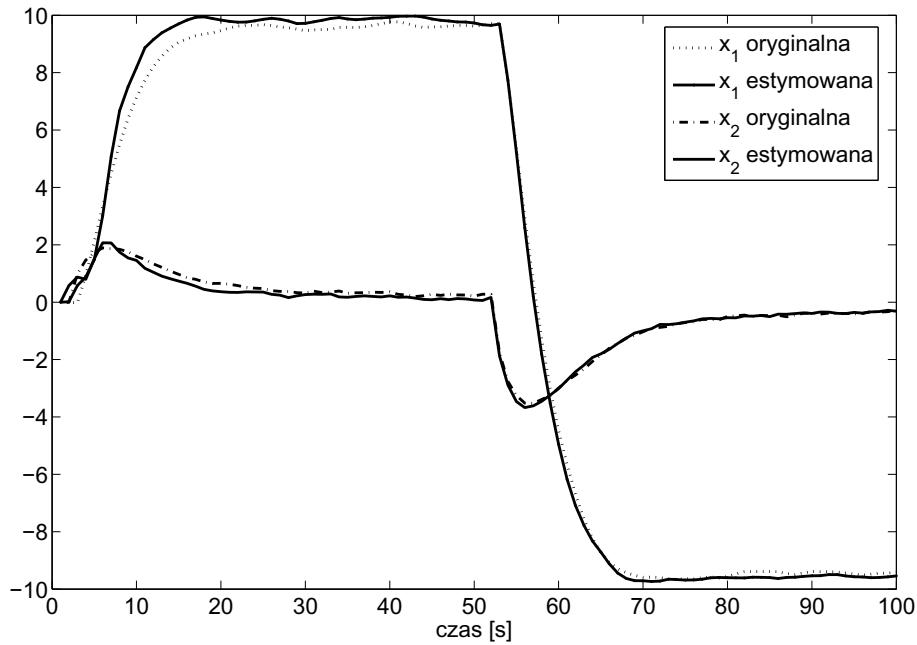
$$x_0 = [0, 0], R = [0.04]$$

Parametry KFw:

$$w = \begin{bmatrix} n \end{bmatrix}$$

$$P_0^w = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}, Q_0^w = \begin{bmatrix} 0.00001 \end{bmatrix}$$

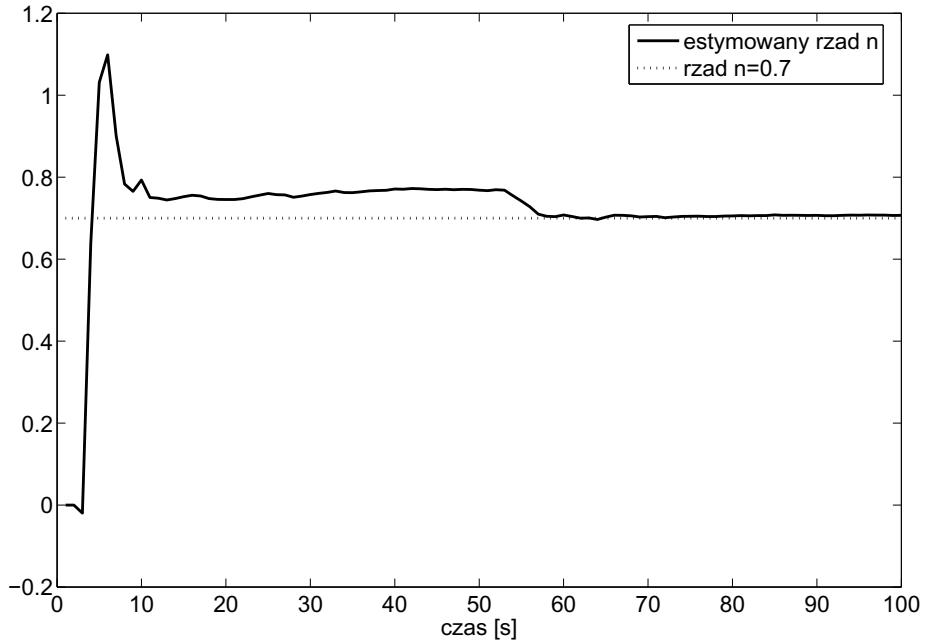
$$w_0 = [0], R^w = [0.04], \alpha = 0.01$$



Rysunek 5.26: Wyniki estymacji dualnej zmiennych stanu i rzędu układu (zmienne stanu) (przykład 37)

Wynik końcowy estymacji rzędu to $n = 0.7068$. Na Rys. 5.26 przedstawione są wyniki estymacji zmiennych stanu układu, a na Rys. 5.27 został przedstawiony wynik estymacji rzędu n układu.

Jak można zauważyć (na przykładzie 37), przedstawiony algorytm estymacji dualnej jest efektywny. Umożliwia on estymację zmiennych stanu i rzędu układu w tym samym czasie,



Rysunek 5.27: Wyniki estymacji dualnej zmiennych stanu i rzędu układu (rząd układu) (przykład 37)

było to trudne do osiągnięcia metodami estymacji połączonej, pokazanymi w przykładach 34 i 35.

5.5 Podsumowanie

W rozdziale tym zostały przedstawione i przeanalizowane podstawowe narzędzia estymacji zmiennych stanu dla układów ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu, takie jak obserwator ułamkowego rzędu i Ułamkowy Filtr Kalmana. Obserwator ułamkowego rzędu jest rozszerzeniem koncepcji obserwatora Luenbergera dla liniowych układów ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu. Przedstawione zostały także symulacje pracy algorytmu obserwatora przy estymacji zmiennych stanu liniowych układów ułamkowego rzędu, deterministycznego i stochastycznego, a także ciągłego układu ułamkowego rzędu. Interesującym rozwińciem prezentowanej koncepcji obserwatora byłby obserwator zredukowanego rzędu oraz obserwator typu deadbeat. Obserwator zredukowanego rzędu pozwalał by na duże oszczędności pamięci i mocy obliczeniowej komputera, na którym algorytm ten byłby implementowany. Obserwator typu deadbeat natomiast umożliwiał by poprawę szybkości estymacji, jednakże ze względu na właściwości macierzy tranzycji układów ułamkowego rzędu projektowanie jego

może być bardzo utrudnione.

Ułamkowy Filtr Kalmana jest rozszerzeniem koncepcji Filtru Kalmana dla liniowych układów ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu. Dla Ułamkowego Filtru Kalmana zostały przedstawione symulacje pracy tego algorytmu przy estymacji zmiennych stanu liniowych stochastycznych układów ułamkowego rzędu, a także ciągłego układu ułamkowego rzędu.

Następnie zostały wprowadzone algorytmy estymacji nieliniowych dyskretnych układów ułamkowego rzędu, tj. Rozszerzony Ułamkowy Filtr Kalmana (ang. EKF) i Ułamkowy Filtr Kalmana oparty o transformację "Unscented" (ang. UKF). Jako przykłady estymacji układów nieliniowych zostały przedstawione przykłady estymacji połączonej zmiennych stanu i parametrów układu.

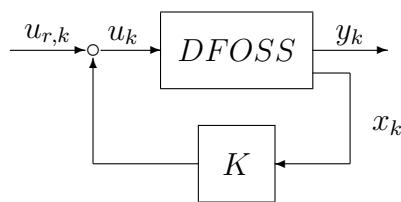
Na zakończenie zostały przedstawione przykłady estymacji dualnej zmiennych stanu i parametrów układu z użyciem Ułamkowego Filtru Kalmana i Ułamkowego Filtru Kalmana opartego o transformację "Unscented". Przedstawione przykłady zawierają estymację dualną zmiennych stanu i parametrów a_0 i a_1 układu, oraz zmiennych stanu i rzędu n układu. Za szczególnie ważny uważam wynik estymacji dualnej rzędu układu. Pokazuje on sposób wyznaczania rzędu układu na podstawie jego wejścia i wyjścia. Wyznaczenie tego rzędu w postaci analitycznej jest bardzo utrudnione, ze względu ma złożoność zagadnienia.

Rozdział 6

Sterowanie dyskretnymi układami dynamicznymi ułamkowego rzędu

W rozdziale tym przedstawiona i przeanalizowana zostanie koncepcja regulatora od stanu dla dyskretnych układów ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu. W podrozdziale 6.1 zostanie wprowadzony regulator od stanu dla układów ułamkowego rzędu wraz z podstawowymi jego właściwościami dla przypadku, gdy wszystkie zmienne stanu są dostępne. W podrozdziale 6.2 zaprezentowany będzie regulator od stanu dla przypadku, kiedy nie wszystkie zmienne stanu są dostępne i wymagany jest estymator zmiennych stanu. W tym przypadku przedstawione są układy sterowania z dwoma typami estymatorów: obserwatorem ułamkowego rzędu i Ułamkowym Filtrem Kalmana (FKF). Podrozdział 6.3 przedstawia regulator samonastrajający się, oparty o połączoną estymację zmiennych stanu i parametru układu.

6.1 Regulator od stanu



Rysunek 6.1: Sprzężenie zwrotne od wektora stanu

Układ zastępczy do układu przedstawionego na Rys. 6.1 wynika z Lematu 4 i jest równy

$$\begin{aligned}\Delta^\gamma x_{k+1} &= (A_d - BK)x_k + Bu_{r,k} \\ x_{k+1} &= \Delta^\gamma x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j} \\ y_{2,k} &= Cx_k + Du_{r,k}\end{aligned}$$

Równanie regulatora jest następujące:

$$\det(Iz\Delta^\gamma(z) - A_d^p) = \det(Iz\Delta^\gamma(z) - A_d + BK)$$

gdzie A_d^p jest macierzą zawierającą wartości własne układu docelowego.

Warunek wyznaczenia regulatora od stanu

Twierdzenie 50 *Korzystając z regulatora od stanu K możemy przesunąć bieguny tylko części sterowalnej.*

Dowód: Dowód analogiczny do pokazanego w [85] (dla układów całkowitego rzędu).

Biorąc pod uwagę dekompozycję podaną w Twierdzeniu 26

$$A_d = \begin{bmatrix} A_{ds} & A_{s\bar{s}} \\ 0 & A_{d\bar{s}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie A_{ds} jest macierzą podukładu sterowalnego, a $A_{d\bar{s}}$ jest macierzą podukładu niesterowalnego.

Równanie charakterystyczne układu z regulatorem $K = [K_1, K_2]$ jest następujące:

$$\begin{aligned}&\det [Iz\Delta^n(z) - A_d + BK] \\&= \det \left[\begin{bmatrix} Iz\Delta^n(z) - A_{ds} & -A_{s\bar{s}} \\ 0 & Iz\Delta^n(z) - A_{d\bar{s}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_s \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right] \\&= \det \begin{bmatrix} Iz\Delta^n(z) - A_{ds} + B_s K_1 & -A_{s\bar{s}} + B_s K_2 \\ 0 & Iz\Delta^n(z) - A_{d\bar{s}} \end{bmatrix} \\&= \det [Iz\Delta^n(z) - A_{ds} + B_s K_1] \det [Iz\Delta^n(z) - A_{d\bar{s}}]\end{aligned}$$

Jak można zauważyć, regulatorem K jesteśmy w stanie zmienić równanie charakterystyczne tylko części sterowalnej układu.

□

6.1.1 Wyznaczanie macierzy regulatora dla układu w postaci kanonicznej regulatorowej

Dla układu w postaci kanonicznej regulatorowej równanie regulatora $\det(Iz\Delta^\Upsilon(z) - A_d^p) = \det(Iz\Delta^\Upsilon(z) - A_d + BK)$ przyjmuje postać (analogicznie jak dla układów całkowitego rzędu [85]):

$$\begin{aligned}
 A_d &= A_d - BK \\
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0^p & -a_1^p & \dots & -a_{N-1}^p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{N-1} \end{bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & \dots & k_{N-1} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0^p & -a_1^p & \dots & -a_{N-1}^p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{N-1} \end{bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_0 & k_1 & \dots & k_{N-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Poprzez porównanie współczynników otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 -a_0^p &= -a_0 - k_0 \\
 -a_1^p &= -a_1 - k_1 \\
 \vdots &= \vdots \\
 -a_{N-1}^p &= -a_{N-1} - k_{N-1}
 \end{aligned}$$

co daje następującą relację:

$$\begin{aligned} k_0 &= a_0^p - a_0 \\ k_1 &= a_1^p - a_1 \\ \vdots &= \vdots \\ k_{N-1} &= a_{N-1}^p - a_{N-1} \end{aligned}$$

Przykład 38 Dobór regulatora dla układu danego w postaci kanonicznej regulatorowej.

Dany jest układ następującymi macierzami:

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{N} &= \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Wielomian charakterystyczny układu o zadanej dynamice jest następujący:

$$w(z) = z^2 \Delta^{n_1+n_2}(z) + 0.2z \Delta^{n_1}(z) + 0.01$$

Współczynniki macierzy regulatora są następujące:

$$\begin{aligned} k_0 &= a_0^p - a_0 = 0.01 - 0.1 = -0.09 \\ k_1 &= a_1^p - a_1 = 0.2 - 0.4 = -0.2 \end{aligned}$$

Warto zauważyć, że wyżej przedstawiony algorytm wyznaczania macierzy K regulatora nie zależy od rzędu układu.

6.1.2 Wyznaczanie macierzy regulatora dla układu nie danego w postaci kanonicznej regulatorowej

Dany niech będzie układ określony Definicją 12 w postaci innej niż kanoniczna regulatorowa wyrażony w zmiennych stanu x_k . Odpowiadający mu układ w postaci kanonicznej regulatorowej, określony w zmiennych stanu z_k , dany jest poprzez przekształcenie $z_k = Px_k$. Macierz przekształcenia P można wyznaczyć korzystając z Twierdzenia 41.

$$P = S_z S_x^{-1}$$

gdzie S_x jest macierzą sterowalności układu o zmiennych stanu x_k , a S_z jest macierzą ste-
rowalności układu o zmiennych stanu z_k .

Dla układu w postaci kanonicznej wyznaczamy macierz regulatora K_p , zadającą następującą
postać prawa sterowania:

$$u_k = -K_p z_k$$

Prawo sterowania dla układu wyrażonego w zmiennych stanu x_k jest następujące:

$$u_k = -K_p P x_k$$

Macierz regulatora dla układu oryginalnego dana jest więc następująco:

$$K = K_p P$$

Przykład 39 Projektowanie regulatora dla układu danego nie w postaci kanonicznej regulatorowej.

Układ dany jest następująco:

$$A_d = \begin{bmatrix} 2.4 & 2.8 & -0.2 \\ -1.8 & -1.6 & 0.4 \\ 2.5 & 1.5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, n = 0.7$$

$$C = \begin{bmatrix} 13 & 16 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz przekształcenia tego układu do postaci kanonicznej regulatorowej jest taka, jak w
przykładzie 13 i jest równa:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz regulatora dla układu w postaci kanonicznej dana jest następująco:

$$K_p = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Macierz regulatora wyznaczamy w następujący sposób:

$$K = K_p P = \begin{bmatrix} 18 & 23 & 2 \end{bmatrix}$$

6.1.3 Regulator od stanu z wejściem odniesienia

W procesie projektowania układów regulacji, oprócz kształtuowania dynamiki układu zamkniętego, bardzo pożądaną własnością jest zerowy uchyb ustalony. Własność ta zapewnia, że odpowiedź układu w stanie ustalonym będzie równa wartości sygnału wejściowego (odniesienia).

Niech będzie dany układ opisany przez definicję 15:

$$\Delta^{\gamma} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

Przyjmijmy następujące prawo sterowania (patrz [60]):

$$u_k = u_{ss} - K(x_k - x_{ss}) \quad (6.1)$$

gdzie u_{ss} jest wejściem układu w stanie ustalonym, x_{ss} wektorem zmiennych stanu w stanie ustalonym.

Różnica ułamkowego rzędu z funkcji stałej jest równa zero dla $k \rightarrow \infty$, przy założeniu, że $x_{k+1} = x_k$ dla $k \rightarrow \infty$ (czyli założeniu istnienia skończonego stanu ustalonego układu).

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\Delta^{\gamma} x_{k+1}) = 0$$

Możemy więc równania układu w stanie ustalonym przedstawić w następującej postaci:

$$0 = Ax_{ss} + Bu_{ss}$$

$$y_{ss} = Cx_{ss} + Du_{ss}$$

gdzie y_{ss} jest wyjściem układu w stanie ustalonym.

Zakładając, że istnieją macierze N_x i N_u takie, że $y_{ss} = r_{ss}$, $u_{ss} = N_u r_{rr}$ i $x_{ss} = N_x r_{ss}$.

Możemy zapisać równania układu jako

$$0 = AN_x r_{ss} + BN_u r_{ss}$$

$$r_{ss} = CN_x r_{ss} + DN_u r_{ss}$$

co dalej możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Z tej relacji możemy wyznaczyć macierze N_x i N_u (przy założeniu możliwości rozwiązania tego układu równań (odwarcalności macierzy)).

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Korzystając z tych macierzy, prawo sterowania dane równaniem (6.1) możemy zapisać jako

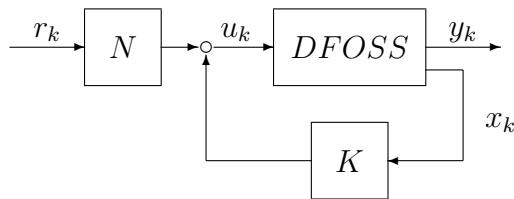
$$u_k = N_u r_{ss} - K(x_k - N_x r_{ss})$$

co można uprościć do postaci

$$u_k = Nr_{ss} - Kx_k$$

gdzie $N = N_u + KN_x$.

W wyniku tego otrzymujemy następujący schemat układu sterowania, który jest przedstawiony na rysunku 6.2.



Rysunek 6.2: Regulator od stanu z wejściem odniesienia

W regulatorze z wejściem odniesienia została dodana macierz N skalująca sygnał wejściowy w taki sposób, aby ustalona wartość wyjściowa układu była równa wartości wymuszenia (wejścia układu).

Przykład 40 Wyznaczenie regulatora od stanu z wejściem odniesienia. Dany jest układ następującymi macierzami (taki jak w przykładzie 38):

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}^T$$

Macierz regulatora ma następującą postać:

$$K = \begin{bmatrix} 0.03 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Tworzymy macierz układu równań

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 \\ -0.1000 & -0.4000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 2.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy wektory rozwiązań

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

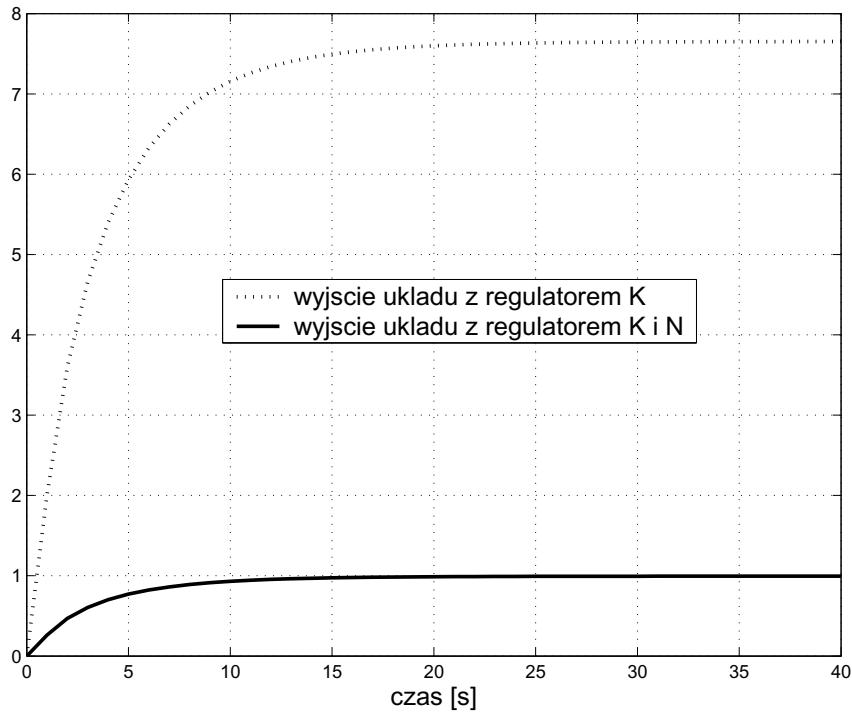
skąd wyznaczamy macierz $N = N_u + KN_x = 0.13$

Odpowiedzi układów z samym regulatorem od stanu (danego macierzą K) i z regulatorem od stanu z wejściem odniesienia (danego macierzami K i N) są przedstawione na rysunku 6.3.

Jak widać w przykładzie 40, dodatkowe przeskalowanie sygnału wejściowego r_k przez wyznaczoną macierz N zapewnia zerowy uchyb ustalony. Jednakże, analogicznie do układów całkowitego rzędu, metoda ta jest wrażliwa na zmiany parametrów układu. Zmiana lub niedokładna znajomość tych parametrów skutkuje najczęściej pojawieniem się niezerowej wartości uchybu.

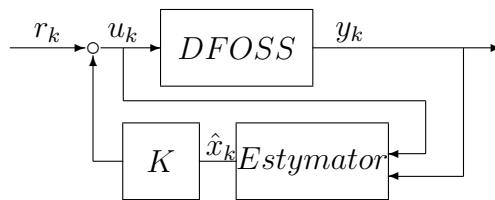
6.2 Regulator od stanu wraz z estymacją zmiennych stanu

W przypadku, gdy pełny wektor zmiennych stanu nie jest dostępny, w układzie sterowania ze sprzężeniem zwrotnym od stanu należy użyć estymatora zmiennych stanu. Na rysunku 6.4



Rysunek 6.3: Odpowiedź skokowa układu z regulatorem K i regulatorami K i N

przedstawiony jest schemat układu regulacji ze sprzężeniem zwrotnym od stanu wraz z estymatorem zmiennych stanu. W podrozdziale 6.2.1 jako estymator został użyty obserwator ułamkowego rzędu. W podrozdziale 6.2.2 natomiast jako estymator został użyty Ułamkowy Filtr Kalmana (FKF).



Rysunek 6.4: Sprzężenie zwrotne od wektora stanu wraz z estymatorem

6.2.1 Regulator od stanu wraz z obserwatorem

Obserwator zmiennych stanu dla dyskretnego układu ułamkowego rzędu przedstawiony został w rozdziale 5.1.

Błąd estymacji obserwatora zdefiniowany jest następującą relacją:

$$e_k = x_k - \hat{x}_k$$

Równanie błędu estymacji jest następujące (szczegóły – patrz równania (5.2), (5.3) i poprzedzające):

$$\begin{aligned}\Delta^\gamma e_{k+1} &= F_d e_k \\ e_{k+1} &= \Delta^\gamma e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j e_{k-j+1}\end{aligned}$$

Prawo sterowania ma postać

$$u_k = r_k - K\hat{x}_k = r_k - K(x_k - e_k)$$

Podstawiając to prawo sterowania do równania systemowego modelu, danego Definicją 15, otrzymujemy

$$\Delta^\gamma x_{k+1} = Ax_k + Bu_k = Ax_k + B(r - K(x_k - e_k)) = (A - BK)x_k + Br + BKe_k$$

Możemy teraz równanie systemowe modelu i równanie błędu obserwatora zapisać łącznie jako model opisujący układ regulacji wraz z obserwatorem.

$$\Delta^\gamma \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ e_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ e_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r_k$$

Równanie charakterystyczne takiego układu jest następujące:

$$\det(I\Delta^\gamma - (A - BK))\det(I\Delta^\gamma - (A - HC)) = 0$$

Jak widać, zbiór wartości własnych układu regulacji z obserwatorem jest równy sumie zbiorów wartości własnych układu z reglatorem i obserwatora. Możemy więc proces projektowania reglatora i obserwatora traktować zupełnie niezależnie, tak jak to ma miejsce przy układach całkowitego rzędu.

Przykład 41 Regulator od stanu wraz z obserwatorem

Weźmy układ dany macierzami (taki jak w przykładzie 26)

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & 0.15 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

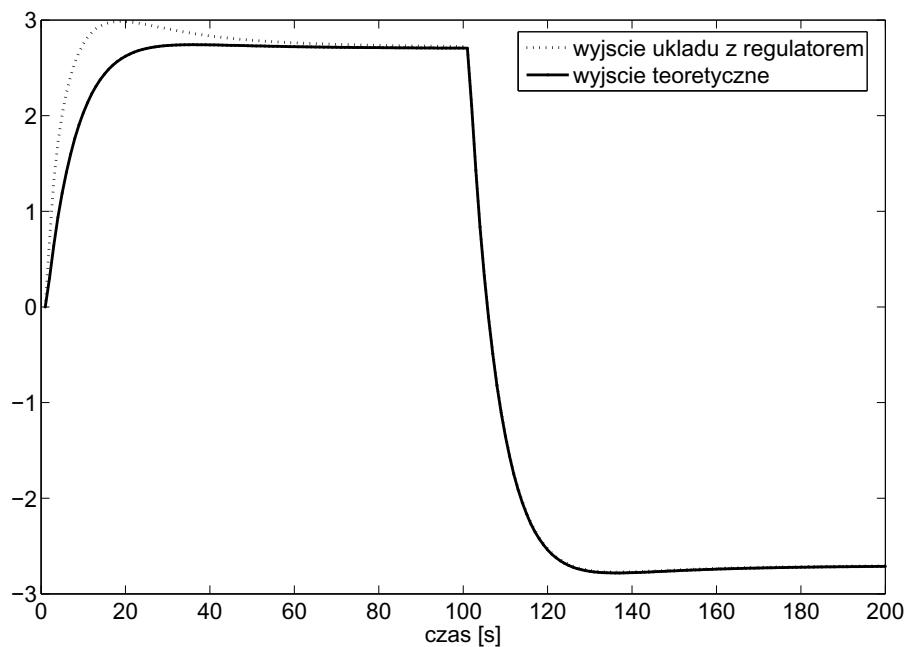
Parametry obserwatora są następujące:

$$F_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & -0.6 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.75 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}, xe_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

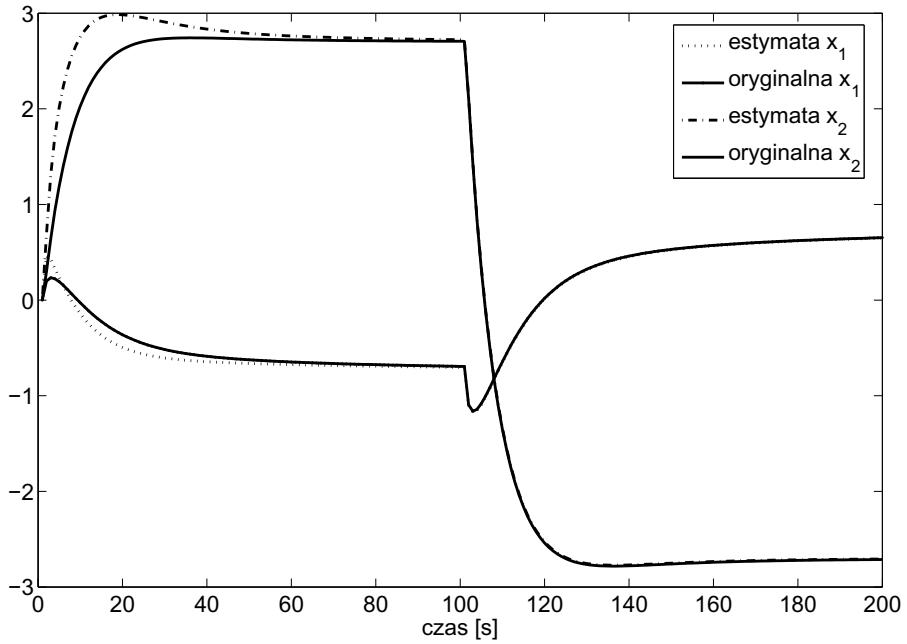
Regulator dany jest następującą macierzą:

$$K = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Na rysunku 6.5 porównane są odpowiedzi: układu wraz z regulatorem i obserwatorem (z innymi warunkami początkowymi niż układ) z układem docelowym. Na rysunku 6.6 przedstawione są zmienne stanu obserwatora i układu estymowanego.



Rysunek 6.5: Odpowiedź układu z regulatorem od stanu wraz z obserwatorem i układu zadane-go.



Rysunek 6.6: Zmienne stanu estymowane przez obserwator i zmienne stanu układu estymowanego.

6.2.2 Regulator od stanu wraz z FKF

W podrozdziale tym zostanie przedstawiony regulator od stanu wraz z Ułamkowym Filtrrem Kalmana jako estymatorem zmiennych stanu stochastycznego układu ułamkowego rzędu. Algorytm Ułamkowego Filtru Kalmana (FKF) został wprowadzony w rozdziale 5.2.

Przykład 42 Regulator od stanu z Ułamkowym Filtrrem Kalmana

Dany jest układ określony macierzami:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & 0.15 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, E[\omega_k^T \omega_k] = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}, E[\nu_k \nu_k] = 0.1$$

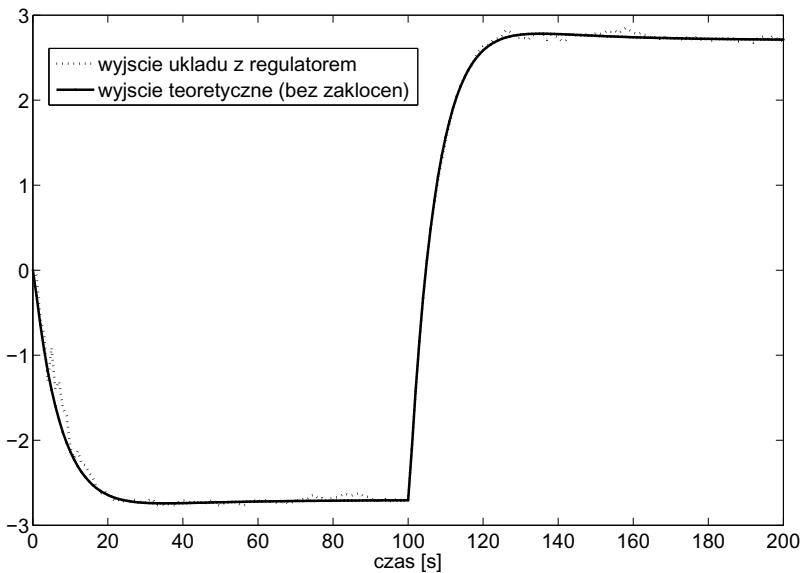
Parametry ułamkowego filtru Kalmana są następujące:

$$P = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}, R = [0.1];$$

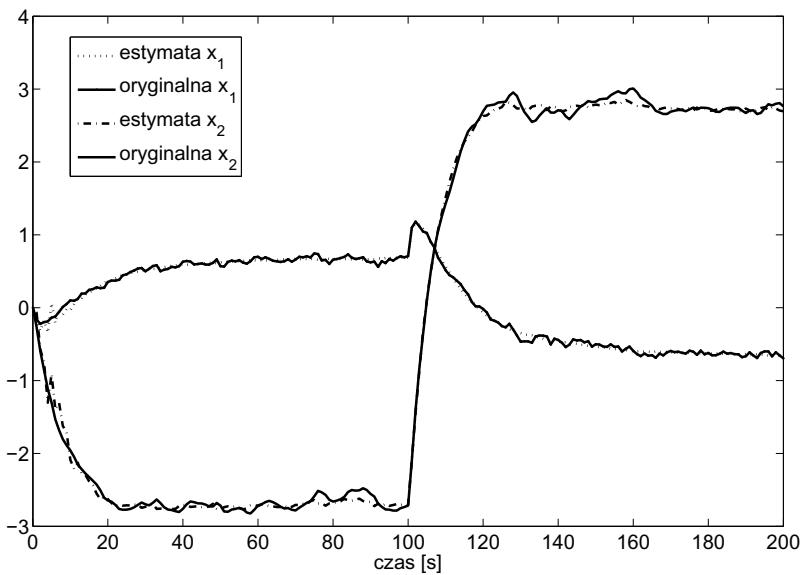
$$x_0 = [0, 0]^T$$

Regulator dany jest następującą macierzą:

$$K = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$



Rysunek 6.7: Odpowiedź układu z regulatorem od stanu wraz z FKF oraz układu zadanego.



Rysunek 6.8: Zmienne stanu estymowane przez FKF i zmienne stanu układu estymowanego.

Na rysunku 6.7 porównane są odpowiedzi: układu wraz z regulatorem i Ułamkowym Filtem Kalmana (FKF) (z innymi warunkami początkowymi niż układ) z układem docelowym.

Na rysunku 6.8 przedstawione są zmienne stanu Ułamkowego Filtru Kalmana (FKF) i układu estymowanego.

Jak widać na przykładzie 42, Ułamkowy Filtr Kalmana jest bardzo użytecznym narzędziem do estymacji zmiennych stanu układu ułamkowego rzędu z zakłóceniami.

6.3 Regulator samonastrajający się

W podrozdziale tym zostanie pokazane użycie estymacji połączonej nieznanego parametru i zmiennych stanu układu oraz regulatora od stanu do utworzenia regulatora samonastrajającego się. Może on zostać użyty w sytuacji, kiedy nie znamy jednego lub większej ilości parametrów. W tym przypadku macierz regulatora K może zależeć od estymowanego parametru i zmieniać się w zależności od zmiany estymowanego parametru. Koncepcję tę można rozbudować także o estymację większej ilości parametrów, a także o estymację dualną parametrów i zmiennych stanu oraz estymację dualną rzędu i zmiennych stanu. Koncepcja estymacji połączonej, polegającej na rozszerzeniu wektora zmiennych stanu o nieznany parametr, przedstawiona jest w podrozdziale 5.4.1. W wyniku poszerzenia wektora stanu o estymowany parametr otrzymujemy nieliniowy układ ułamkowego rzędu, dlatego do estymacji poszerzonego wektora stanu musi być użyty Rozszerzony Ułamkowy Filtr Kalmana (EKF), opisany w rozdziale 5.3.

Przykład 43 Regulator samonastrajający się z estymacją połączoną zmiennych stanu i parametru a_1 .

Dany jest model określony następującymi macierzami:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, E[\omega_k^T \omega_k] = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}, E[\nu_k \nu_k] = 0.1$$

Dla tak danego modelu i estymacji połączonej parametru a_1 nieliniowy model ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu dany jest następująco:

$$\begin{aligned}
x_k^w &= [x_k^T a_1]^T \\
\Delta^\Upsilon x_{k+1}^w &= f(x_k^w, u_k) + \omega_k \\
x_{k+1}^w &= \Delta^\Upsilon x_{k+1}^w - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j}^w \\
y_k &= h(x_k^w) + \nu_k
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
f(x_k^w, u_k) &= \begin{bmatrix} x_{2,k}^w \\ -a_0 x_{1,k}^w - a_1 x_{2,k}^w + u_k \\ 0 \end{bmatrix} \\
h(x_k) &= [b_0 x_{1,k}^w + b_1 x_{2,k}^w]
\end{aligned}$$

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Zlinearyzowane macierze dla algorytmu Rozszerzonego Ułamkowego Filtru Kalmana (EKF) są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned}
F_k &= \left[\frac{\partial F(x, u_k)}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}_k^w} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -\tilde{x}_{2,k}^w \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
H_k &= \left[\frac{\partial H(x)}{\partial x} \right]_{x=\tilde{x}_k^w} \\
&= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Parametry EKF są następujące:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000001 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 \end{bmatrix}$$

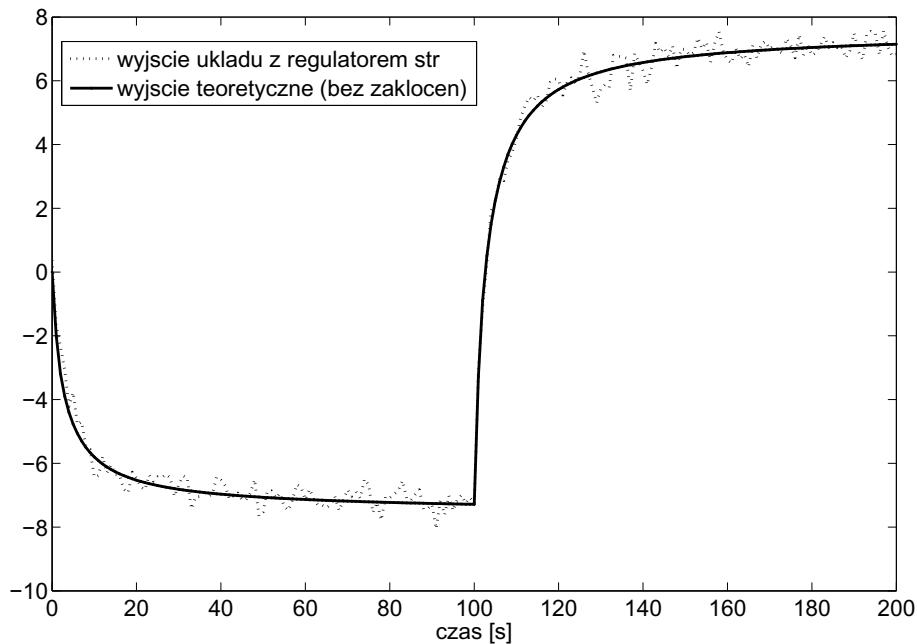
$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz regulatora K zdefiniowana jest następująco:

$$K = \begin{bmatrix} 0.03 & k_1 \end{bmatrix}$$

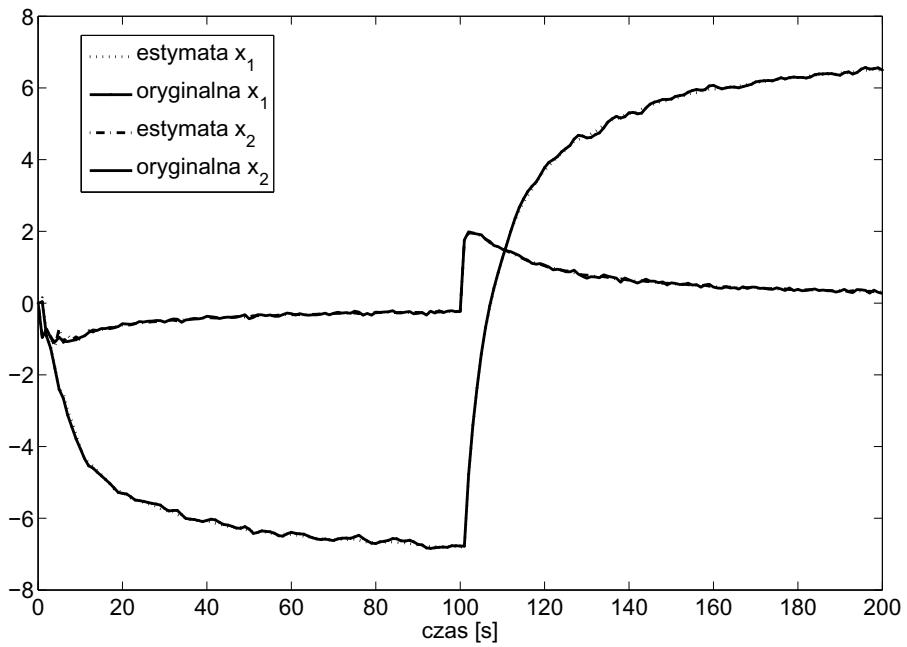
gdzie $k_1 = 1.3 - a_1$

Na rysunku 6.9 przedstawione jest porównanie odpowiedzi układu z regulatorem samonastrającym się z odpowiedzią układu docelowego (bez zakłóceń). Na rysunku 6.10 porównane są zmienne stanu układu ze estymatami zmiennych stanu otrzymanymi z EKF. Rysunek 6.11 przedstawia natomiast estymowany parametr $a_1 = 0.4$.

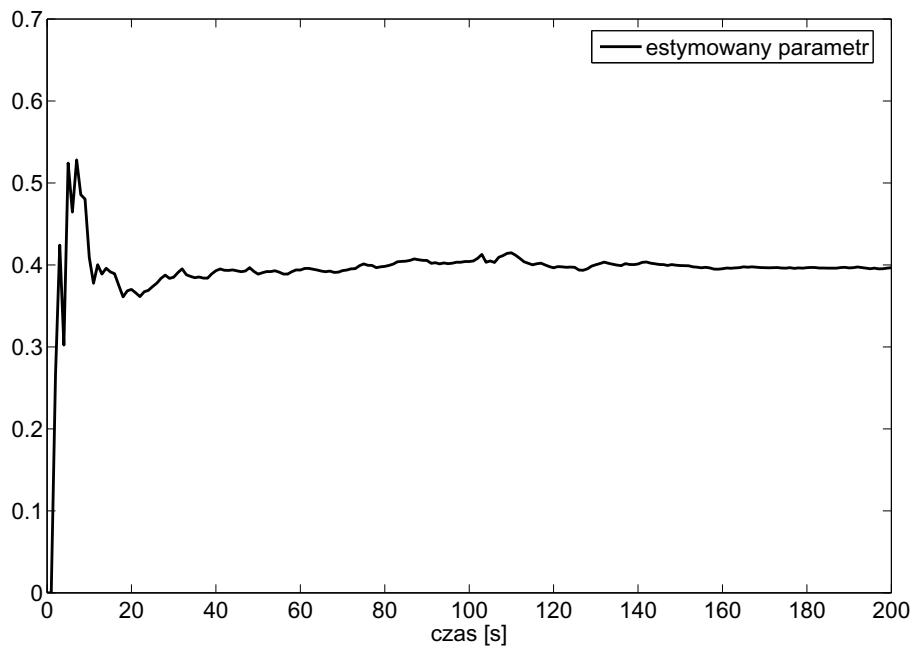


Rysunek 6.9: Odpowiedź układu z regulatorem STR i układu zadanego.

Jak widać w przykładzie 6.3, zaprezentowany algorytm regulatora samonastrajającego się, opartego o estymację połączoną wektora zmiennych stanu i poszukiwanego parametru, jest



Rysunek 6.10: Zmienne stanu estymowane przez EKF i zmienne stanu układu estymowanego.



Rysunek 6.11: Estymowany parametr a_1 przez EKF.

bardzo efektywny. Pomimo zakłóceń i używania estymowanych danych (parametru) do wyznaczania macierzy regulatora K , osiągnięto bardzo wysoką dokładność estymacji nieznanego parametru. Otrzymano także bardzo wysoką dokładność sterowania.

6.4 Podsumowanie

W podrozdziale tym został przedstawiony regulator od stanu dla dyskretnych układów ułamkowego rzędu, wraz z jego modyfikacjami. Na początku został przedstawiony algorytm sterowania od stanu dla przypadku, gdy wszystkie zmienne stanu są dostępne. Dla przypadku tego zostały pokazane warunki istnienia regulatora i sposoby jego projektowania. Wprowadzony został także regulator od stanu z wejściem odniesienia. Dla algorytmów tych zostały przeprowadzone i pokazane zarówno przykłady liczbowe i symulacyjne. Następnie został przedstawiony i przeanalizowany algorytm regulatora od stanu dla przypadku, gdy nie wszystkie zmienne stanu są dostępne i występuje potrzeba ich estymacji. Do estymacji zmiennych stanu użyto estymatorów, które zostały przedstawione w rozdziale 5. Były to: dyskretny obserwator ułamkowego rzędu i Ułamkowy Filtr Kalmana. Dla algorytmów tych zostały przeprowadzone i pokazane przykłady symulacyjne.

Na zakończenie przedstawiono algorytm regulatora od stanu samonanstrajającego się. Został on zbudowany w oparciu o algorytm estymacji połączonej zmiennych stanu i parametru układu. Dzięki temu możliwe jest sterowanie obiektu o nieznanych lub zmieniających się parametrach. Dla algorytmu tego zostały także przeprowadzone i pokazane przykłady symulacyjne.

Rozdział 7

Modelowanie, estymacja i sterowanie układu czwórnika z superkondensatorem

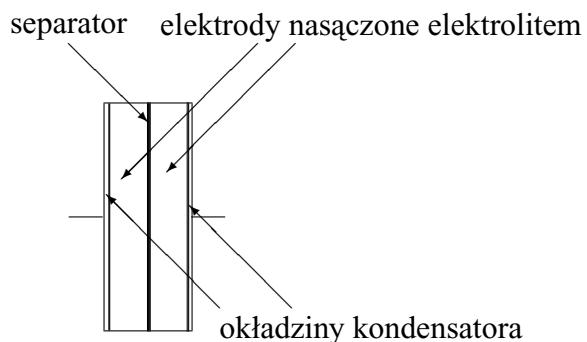
W rozdziale tym zostaną zaprezentowane wyniki eksperimentalne modelowania, estymacji i sterowania układu elektronicznego czwórnika z superkondensatorem. W podrozdziale 7.1 zamieszczone zostanie wprowadzenie do tematyki superkondensatorów, ich budowy, zastosowania i dotychczasowych sposobów modelowania. Podrozdział 7.2 zawiera przegląd otrzymanych wyników eksperimentalnych. Na początku przedstawione są wyniki modelowania ciągłego, na podstawie którego przeprowadzone jest modelowanie dyskretne. Następnie zaprezentowane są wyniki estymacji nieznanych zmiennych stanu układu z superkondensatorem, wraz z estymacją dualną zmiennych stanu i rzędu układu. Kolejno przedstawione będą rezultaty zastosowania regulatora od stanu z obserwatorem lub Ułamkowym Filtrem Kalmana (FKF) do układu z superkondensatorem. Na zakończenie zostaną przedstawione wyniki zastosowania regulatora samonastrajającego się.

7.1 Wprowadzenie do tematyki superkondensatorów

Superkondensatory (nazywane też ultrakondensatorami lub kondensatorami dwuwarstwowymi (ang. double-layer)) są elementami elektronicznymi charakteryzującymi się bardzo dużą pojemnością i gęstością energii. Pojemności typowych superkondensatorów są o kilka rzędów wielkości większe od pojemności kondensatorów elektrolitycznych i wynoszą od setnych części Farada do kilku tysięcy Faradów. Ich gęstość energii rzędu 2...9 Wh/kg i gęstość mocy rzędu 3...8kW/kg umiejscawia superkondensatory pod tym względem pomiędzy tradycyjny-

mi aluminiowymi kondensatorami elektrolitycznymi a akumulatorami.

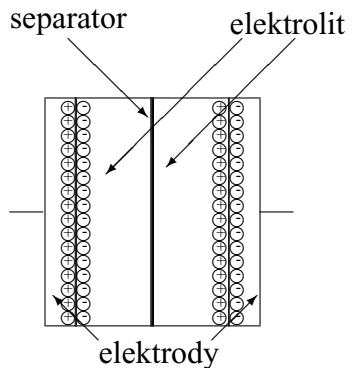
Superkondensator składa się z dwóch okładezin zbudowanych z węgla aktywowanego nasączonego elektrolitem i separatora. Zasada jego działania (patrz [70]) opiera się na zjawisku Helmholtz'a, który zaobserwował, że istnieje pewne napięcie graniczne potrzebne do rozpoczęcia elektrolizy. Poniżej tego napięcia elektrolit nie przewodzi - zachowuje się jak izolator. Gdy do elektrod superkondensatora dołączymy napięcie niższe niż graniczne, elektroliza nie nastąpi, elektrolit zachowuje się wtedy jak izolator. Nastąpi natomiast przemieszczanie się jonów (dodatnich do elektrody ujemnej i ujemnych do dodatniej). Ze względu na brak elektrolizy na powierzchni styku elektrolitu i elektrod wytwarza się bardzo cienka powłoka nieprzewodząca. Dzięki bardzo małej grubości tej powłoki i zastosowaniu jako okładezin węgla aktywowanego, którego powierzchnia styku jest bardzo duża ($500 - 2000 \text{m}^2/\text{g}$), możliwe jest uzyskanie tak dużych pojemności.



Rysunek 7.1: Schemat budowy superkondensatora

Na rysunku 7.1 przedstawiona jest schematyczna budowa superkondensatora. Dwie elektrody, zazwyczaj wykonane jako warstwy węgla aktywowanego nasączone są elektrolitem (np. roztworem kwasu siarkowego H_2SO_4), przedzielone są separatorem. Ma on postać cienkiej porowatej membrany. Separator uniemożliwia bezpośrednie zwarcie elektrod, umożliwia natomiast przemieszczanie się jonów w elektrolicie, którym są nasączone obie elektrody.

Na rysunku 7.2 przedstawiony jest schemat procesu ładowania superkondensatora. Do okładezin superkondensatora podłączono napięcie, które wywołało ruch jonów w elektrolicie. Jony ujemne przemieściły się w kierunku elektrody dodatniej, a jony dodatnie w kierunku ujemnej. Na granicy elektrod i elektrolitu tworzą się dwie warstwy, gdzie gromadzą się nośniki prądu (elektrony i jony) [70]. Dlatego też superkondensatory nazywane są też kondensatorami dwuwarstwowymi (ang. double-layer). Szczegółowy opis procesów zachodzących na granicy elektrolitu i elektrody znajduje się w pracy [54]. Szczegóły budowy typowego superkondensatora



Rysunek 7.2: Schemat ładowania się superkondensatora

zobrazowane są w [222].

Główna cechą charakterystyczną w sposobie pracy superkondensatorów jest wykorzystanie przewodności jonowej elektrolitu (energia magazynowana jest w przesunięciu jonów) w porównaniu z polaryzacją dipoli dielektryka w tradycyjnych kondensatorach i energii wiązań chemicznych w akumulatorach. Wykorzystanie ruchu jonów w elektrolicie pociąga za sobą określone własności elektryczne. Superkondensatory charakteryzują się więc dość dużą rezystancją wewnętrzną, od ok. 100Ω dla kondensatorów podtrzymujących, projektowanych na małe prądy, po rezystancję rzędu ułamków Ω dla kondensatorów projektowanych na większe prądy (rzędu amperów). Rezystancja ta jest modelowana jako rezistor połączony szeregowo z superkondensatorem. Przy ładowaniu superkondensatora na tej rezystancji w chwili początkowej odkłada się napięcie, które jest proporcjonalne do tej rezystancji i prądu ładowania. W tradycyjnych kondensatorach to zjawisko praktycznie nie występuje. Inna własność superkondensatorów jest spowodowana wykorzystaniem zjawiska Helmholza, powoduje to niskie napięcie ich pracy i przebiecia. Obecnie produkowane pojedyncze superkondensatory mają napięcie pracy w granicach od 2V do 5V. Własność ta bardzo ogranicza możliwe zakresy ich zastosowania. Dla zwiększenia tego napięcia superkondensatory łączy się szeregowo, co jednakże zmniejsza ich pojemność, a także - przy nierównomiernym rozkładzie napięć - może spowodować uszkodzenia poszczególnych elementów (patrz [70]).

Zastosowania superkondensatorów

Ze względu na swoją dużą pojemność, przy niewielkich gabarytach, superkondensatory znajdują dość szerokie zastosowanie w technice.

Jedną z preźniej rozwijających się dziedzin ich zastosowań są samochody hybrydowe [23, 39, 217]. W samochodach tych przy hamowaniu silnik elektryczny zaczyna pracować jak prądnica, generując krótki, ale o dużej wartości impuls mocy. Impuls ten jest wykorzystywany do ładowania superkondensatora. Ze względu na małą sprawność ładowanie tym impulsem tradycyjnych akumulatorów byłoby bardzo nieefektywne. Podobnie przy rozruchu silnika elektrycznego potrzebny jest chwilowy wzrost mocy generowanej przez źródło. Ten wzrost mocy osiągany jest poprzez czerpanie jej z superkondensatora.

Innym obszarem zainteresowań są układy energoelektroniczne przekształtników energii (falconników) z pośrednim obwodem DC. W tym obwodzie DC superkondensator traktowany jest jako magazyn energii załączany przy zapadach napięcia zasilającego. W pracy [181] przedstawione jest wykorzystanie tego mechanizmu do płynnego zasilania windy. W pracach [61, 79] przedstawione jest wykorzystanie tej koncepcji do filtrów sieciowych minimalizujących wpływ odbiorników nieliniowych na sieć elektryczną.

Superkondensatory znalazły także zastosowanie w elektrowniach wiatrowych [1], gdzie służą do stabilizacji mocy oddawanej do sieci. Ładują się podczas porywów wiatru, a rozładowują się podczas chwil ciszy.

Znalazły także zastosowanie w systemie oszczędzania energii w metrze [20], gdzie umieszczone wzdłuż trasy wagonów metra, magazynują energię podczas hamowania wagonów, a oddają podczas ich rozruchu.

Mają także zastosowanie w układach elektronicznych jako kondensatory podtrzymujące dla pamięci czy też całych układów elektronicznych.

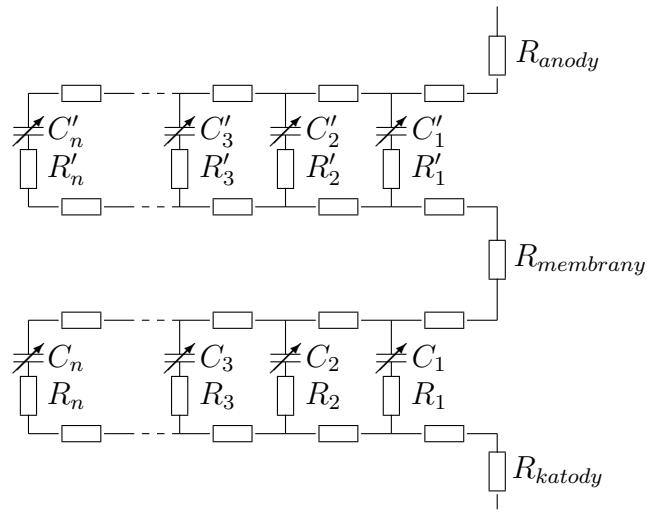
W większości wyżej podanych przykładów zastosowań kluczową rolę odgrywa znajomość dokładnego modelu superkondensatora. Znajomość dokładnego modelu pozwala na projektowanie bardziej dokładnych układów sterowania. Układy sterowania służą na przykład do stabilizacji napięcia na superkondensatorze, którego wahania są obserwowane w czasie ich pracy.

Modelowanie superkondensatorów

Wykorzystanie ruchu jonów w elektrolicie ma jednak wpływ na dynamikę ładowania i rozładowywania superkondensatora, która różni się od dynamiki tradycyjnych kondensatorów. Modelowanie i opis takich układów są też bardziej skomplikowane. W literaturze można znaleźć wiele sposobów modelowania superkondensatorów. Sposoby te można podzielić na następujące grupy:

1. przy użyciu członów RC
2. przy użyciu sztucznych sieci neuronowych (ANN)
3. przy użyciu układów ułamkowego rzędu

Modelowanie przy użyciu członów RC polega na dobieraniu bardziej lub mniej złożonych schematów zastępczych, składających się z rezystorów i kondensatorów, rzadziej cewek. Przykłady takiego modelowania można znaleźć w pracach: [18, 22, 57, 70].

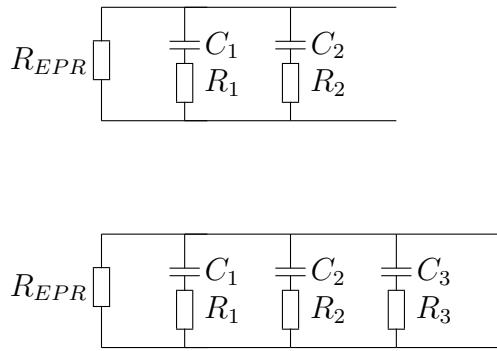


Rysunek 7.3: Schemat zastępczy superkondensatora

Teoretyczny schemat zastępczy superkondensatora przedstawia rysunek 7.3. Jest on złożony z dwóch szeregowych gałęzi RC, reprezentujących zjawiska zachodzące na dwóch elektrodach superkondensatora. Poszczególne gałęzie RC symbolizują pojemności związane z poszczególnymi częściami porowatej elektrody i ze względu na zależność pojemności od napięcia są nienieline. Wartości rezystancji zależą od [57]:

- rezystancji elektrod
- rezystancji elektrolitu
- wielkości porów w elektrodach
- przepuszczalności membrany
- dokładności połączenia pomiędzy elektrodą a okładziną

Model teoretyczny jest jednakże bardzo trudny do praktycznego zastosowania, dlatego w literaturze można spotkać wiele rodzajów uproszczonych schematów zastępczych [18, 22, 57, 70]. Część z nich jest zaprezentowana na rysunku 7.4. Jak można zauważyć, schematy te przedstawiają różnej długości fragmenty schematu linii długiej. Im więcej gałęzi zostanie wziętych pod uwagę, tym dokładniejszy model zostaje otrzymany.



Rysunek 7.4: Uproszczone schematy zastępcze superkondensatora

Modelowanie przy użyciu sztucznych sieci neuronowych przedstawione jest w pracy [109]. Oprócz opisywania zależności dynamicznych prądu do napięcia na superkondensatorze, modelowany jest także wpływ temperatury na tę dynamikę. Do modelowania użyto trzywarstwowej rekurencyjnej sieci neuronowej, jako funkcję nieliniową przyjęto funkcję tangensa hiperbolicznego. W artykule tym zostały przedstawione rzeczywiste wyniki modelowania superkondensatorów o wartościach 2700F i 3700F.

W pracach [171, 216] został przedstawiony bardzo efektywny sposób modelowania przy użyciu układów ułamkowego rzędu.

Wyniki zawarte w pracy [171] pokazują, że dla małych częstotliwości (od 50mHz do 215mHz) przedstawiony w niej superkondensator może być bardzo dokładnie modelowany następującym członem:

$$Z = R_s + \frac{k}{(j\omega)^\alpha} \quad (7.1)$$

gdzie α jest rzędem tego układu bliskim jedności (w pokazanym przypadku $\alpha = 0.972$).

Natomiast dla częstotliwości od 450mHz do 100Hz rzząd modelowanego układu jest bliski połówkowemu (w danym przypadku $\alpha = 0.55$).

Dla pełnego zakresu częstotliwości autorzy wprowadzili następujący model:

$$Z = R_s + \frac{k(1 + j\frac{\omega}{\omega_0})^\alpha}{(j\omega)^\beta} \quad (7.2)$$

gdzie α jest bliska połowie (dla najdokładniejszej identyfikacji $\alpha = 0.5190$, a β jest bliska jedności (dla najdokładniejszego przypadku identyfikacji $\beta = 0.9765$.

Można stąd wnioskować, że superkondensatory dla małych częstotliwości mają dynamikę bardzo zbliżoną do tradycyjnych kondensatorów (pomijając duże wartości R_s). Natomiast dla wyższych częstotliwości konieczne jest już wykorzystanie do opisu rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu.

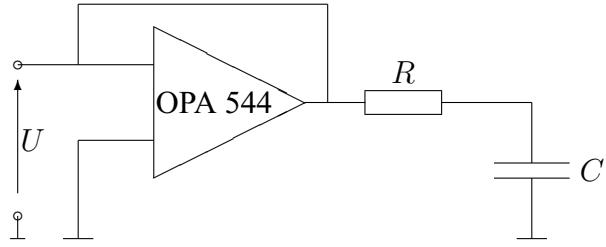
7.2 Omówienie układu doświadczalnego

Schemat układu przedstawiony jest na rysunku 7.5. Układ składa się ze wzmacniacza operacyjnego, który pracuje w układzie wtórnika napięciowego, rezystora R pomiaru prądu i superkondensatora C, będącego głównym elementem układu. Ze względu na duże wartości pojemności superkondensatora i spodziewane duże prądy ładowania takiego kondensatora zastosowano wysokoprądowy wzmacniacz operacyjny OPA 544 [24] (maksymalny prąd wyjściowy 2A). Jako superkondensator zastosowano superkondensator 0.22F 5.5V firmy Panasonic. Jest to superkondensator zaprojektowany do małego poboru prądu, jego rezystancja wewnętrzna (wg danych producenta) jest nie większa niż 75Ω przy częstotliwości 1kHz. Żywotność tego superkondensatora oceniana jest na 1000h. Po tym czasie możliwy spadek pojemności wynosi 30% przy czterokrotnym wzroście rezystancji wewnętrznej. Jego szczegółowe dane dostępne są w pracach [151, 152].

Aby skompensować wpływ dużej rezystancji wewnętrznej tego superkondensatora na wynik skoku jednostkowego (duża wartość napięcia na kondensatorze w chwili początkowej), zastosowano dość dużą wartość rezystora $R = 180\Omega$. Dzięki temu powstaje dzielik napięcia, który obniża napięcie na kondensatorze w chwili przyłożenia napięcia do czwórnika.

Do pomiaru, zadawania napięć i implementacji regulatorów zastosowano kartę DSpace DS1103 PPC Control Card [44]. Karta ta posiada:

- procesor PowerPC PPC604e
- pamięć 256Kx64-bit lokalnej pamięci SRAM (2 MB), 16Mx64-bit globalnej pamięci SDRAM (128 MB)



Rysunek 7.5: Schemat układu pomiarowego

- kontroler przerwań, 22 źródła przerwań, 4 przerwania zewnętrzne
- przetwornik ADC 16 bit, 4x4 multipleksowany (razem 16 wejść), zakres wejściowy $+10 \dots -10$ V
- przetwornik ADC 12 bit, 4 wejścia, zakres wejściowy $+10 \dots -10$ V
- przetwornik DAC 14 bit, 8 wyjść, zakres wyjściowy $+10 \dots -10$ V
- 6 wejść dla enkoderów inkrementalnych cyfrowych
- wejście dla enkodera inkrementalnego analogowego
- 32 wejścia/wyjścia cyfrowe
- interfejsy CAN i RS232
- Dodatkowy procesor Texas Instruments TMS320F240 DSP 20 MHz zawierający:
 - 12 wyjść PWM
 - 16 wejść przetwornika ADC

Jest ona wykonana w postaci karty ISA i można ją zainstalować w komputerach typu PC wyposażonych w to złącze lub komputerach przemysłowych (ang. rack box) także wyposażonych w slot ISA. Do karty dołączone jest środowisko ControlDesk [43, 45, 46]. W środowisku tym możemy tworzyć programy w języku C, kompilować i ładować je na kartę. Po załadowaniu na kartę są one wykonywane. W programie ControlDesk możemy nie tylko obserwować (archiwizować) przebiegi danych zmiennych programu, ale także zmieniać ich wartości w trakcie

wykonywania danego programu. Umożliwia to Host Interface, przez który środowisko ControlDesk ma dostęp do komórek fizycznej pamięci karty i może je przez ten interfejs odczytywać i zmieniać.

Dodatkowo w środowisku ControlDesk znajdują się biblioteki dla Simulinka [46]. Zawierają one port dla Toolbox'a Real-Time Workshop do generacji kodu źródłowego na tę kartę. Umożliwia to bardzo szybkie i efektywne wygenerowanie kodu źródłowego w C z danego układu bloków danych w Simulinku. Dodatkowo biblioteka zawiera bloki dla Symulinka realizujące urządzenia wejścia/wyjścia karty (bloki przetworników ADC, DAC itd.). Port dla Simulika generuje także automatycznie plik z rozszerzeniem *.trc, który zawiera wszystkie etykiety sygnałów, a także parametry i sygnały bloków. Plik ten jest następnie używany przy automatycznej komplikacji, linkowaniu i ładowaniu programu, aby udostępnić później te zmienne w środowisku.

Do symulacji dyskretnych układów ułamkowego rzędu użyłem specjalnie do tego celu napisanego zestawu procedur i bloków (ang. toolkit) [191]. Zawiera on bloki napisane w postaci C-MEX S-funkcji [110] realizujące dyskretny układ ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu i Dyskretny Ułamkowy Filtr Kalmana.

7.3 Wyniki eksperymentalne modelowania

W rozdziale tym zostaną przedstawione wyniki modelowania układu superkondensatora i układu czwórnika z superkondensatorem. Podrozdział 7.3.1 zawiera wyniki modelowania układu superkondensatora na podstawie charakterystyki widmowej układu ciągłego ułamkowego rzędu. Podrozdział 7.3.2 zawiera wyniki takiego samego typu modelowania dla układu czwórnika z superkondensatorem. Modelowanie przeprowadzone w tych rozdziałach ma za zadanie wyznaczenie struktury (rzędu) układu. Struktura ta (rząd) została przyjęta do rozważań w podrozdziale 7.3.3, który zawiera wyniki modelowania układu czwórnika z superkondensatorem przy pomocy dyskretnego układu ułamkowego rzędu opisanego w przestrzeni stanu.

7.3.1 Charakterystyki częstotliwościowe superkondensatora

Transmitancja widmowa superkondensatora została przyjęta jako

$$G_{uc}(j\omega) = \frac{U_{uc}(j\omega)}{I(j\omega)}$$

gdzie $U_u c(j\omega)$ jest transformatą widmową napięcia na superkondensatorze, a $I(j\omega)$ transformatą widmową prądu.

Parametry układu:

$$C = 0.22F \quad R = 180\Omega$$

Ze względu na to, iż superkondensator jest kondensatorem elektrolitycznym, może on przyjmować tylko napięcia dodatnie. Dlatego też jako sygnał wejściowy układu użyto sygnału ze składową stałą $u(t) = 0.2 + 0.1\sin(\omega t)$. Napięcie na superkondensatorze (w stanie ustalonym) jest w tym przypadku $u_c(t) = 0.2 + A_c(\omega)\sin(\omega t)$, a prąd ładowania superkondensatora $i(t) = A_i(\omega)\sin(\omega t)$.

Wzmocnienie układu dla danej częstotliwości wyznaczano jako

$$A(\omega) = \frac{A_c(\omega)}{A_i(\omega)}$$

skąd wyznaczono charakterystykę częstotliwościową obiektu

$$M(\omega) = 20 \log(A(\omega))$$

Zmierzone dane eksperymentalne zostały przedstawione w Tabeli 7.1, a graficznie zostały przedstawione i porównane z charakterystyką transmitancji teoretycznej na rysunku 7.6.

$\omega [Hz]$	0.004	0.01	0.04	0.1	0.4	1
$M(\omega)$	48.92	44.10	40.27	37.84	34.72	33.30
$\phi(\omega)$	-64.19	-44.41	-30.64	-25.89	-18.71	-14.03
$\omega [Hz]$	4	10	40	100	400	
$M(\omega)$	31.90	31.36	31.04	30.50	30.38	
$\phi(\omega)$	-8.37	-6.14	-5.07	-3.68	-1.86	

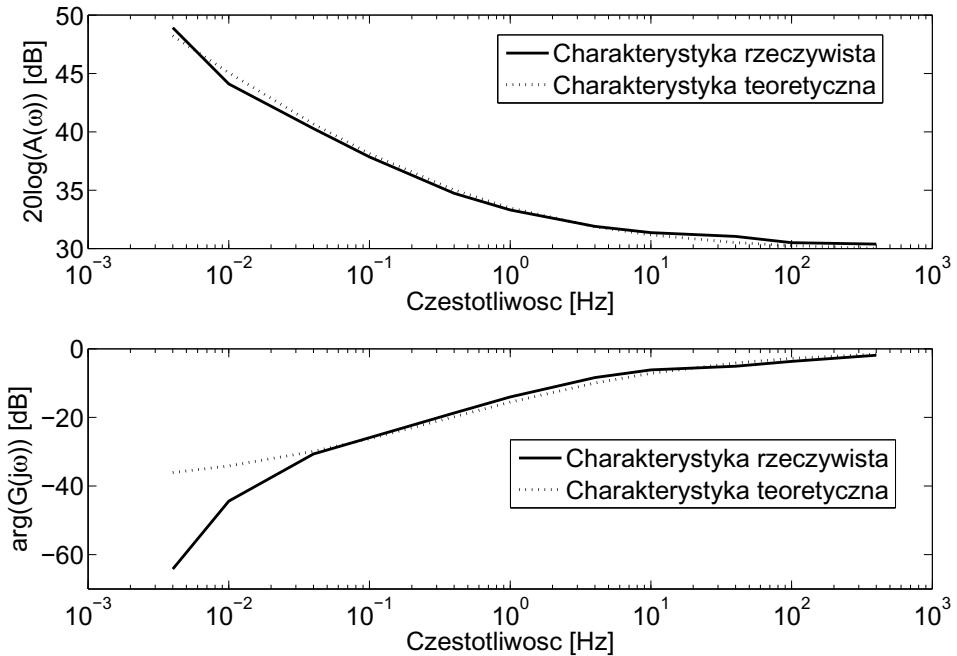
Tabela 7.1: Zmierzone wartości wzmocnienia układu superkondensatora $M(\omega)$ w zależności od częstotliwości

Transmitancja modelu została przyjęta jako

$$G(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_1 s^\alpha} \right)$$

W wyniku identyfikacji parametrów modelu na podstawie dopasowania do charakterystyki rzeczywistej otrzymano następujące parametry modelu ciągłego:

$$K = 30.63, T_1 = 1.57, \alpha = 0.45$$



Rysunek 7.6: Charakterystyka logarytmiczna częstotliwościowa amplitudowa i fazowa superkondensatora 0.22 F i charakterystyka teoretyczna dla $K = 30.63, T_1 = 1.72, \alpha = 0.45$

7.3.2 Charakterystyki częstotliwościowe czwórnika z superkondensatorem

Transmitancja widmowa czwórnika z superkondensatorem została zdefiniowana jako

$$G_{cz}(j\omega) = \frac{U_{uc}(j\omega)}{U(j\omega)}$$

gdzie $U_{uc}(j\omega)$ jest transformatą widmową napięcia na superkondensatorze, a $U(j\omega)$ transformatą widmową napięcia wejściowego.

Model teoretyczny został przyjęty jako

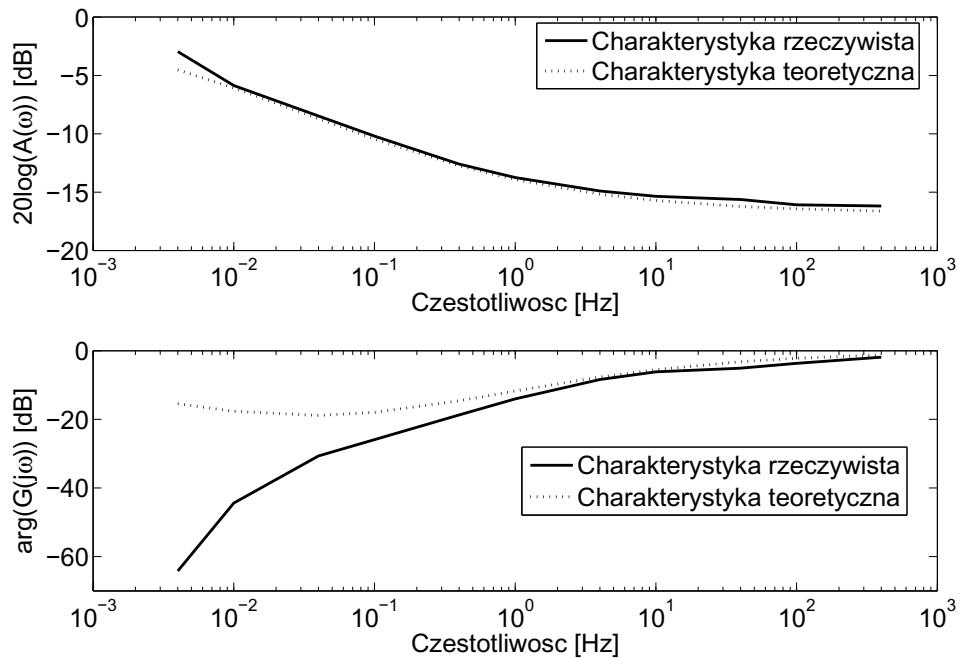
$$G_{cz}(j\omega) = \frac{G_{uc}(s)}{1 + G_{uc}(s)}$$

W wyniku identyfikacji parametrów modelu na podstawie dopasowania do charakterystyki rzeczywistej otrzymano następujące parametry modelu ciągłego:

ω_k [Hz]	0.004	0.01	0.04	0.1	0.4	1
$M(\omega)$	-2.95	-5.86	-8.47	-10.19	-12.59	-13.74
$\varphi(\omega)$	-64.19	-44.41	-30.64	-25.89	-18.71	-14.03
ω_k [Hz]	4	10	40	100	400	
$M(\omega)$	-14.90	-15.36	-15.62	-16.08	-16.18	
$\varphi(\omega)$	-8.37	-6.14	-5.07	-3.68	-1.8	

Tabela 7.2: Zmierzone wartości wzmacnienia układu czwórnika z superkondensatorem $M(\omega)$ w zależności od częstotliwości

$$K = 30.23, T_1 = 1.72, \alpha = 0.45$$



Rysunek 7.7: Charakterystyka logarytmiczna częstotliwościowa amplitudowa i fazowa układu czwórnika

7.3.3 Modelowanie za pomocą dyskretnego modelu ułamkowego rzędu opisanego w przestrzeni stanu

Na podstawie danych zidentyfikowanych w podrozdziale 7.3.2 możemy napisać następujący model ciągły ułamkowego rzędu:

$$\begin{aligned}\frac{d^{0.45}x}{dt^{0.45}} &= [a_{0,0}]x(t) + [b_0]u(t) \\ y &= [c_0]x(t) + [d_0]u_k\end{aligned}$$

Modelowanie praktyczne takiego układu może nie być proste, a uzyskany model jest trudny do wykorzystania ze względu na to, iż niezerowy element d_0 może powodować powstanie pętli algebraicznej (ang. algebraic loop) przy układzie sterowania od wyjścia. Bezpośrednia, algebraiczna zależność pomiędzy wejściem i wyjściem układu oraz bezpośrednie, algebraiczne połączenie pomiędzy wyjściem i wejściem układu (pętla sprzężenia zwrotnego) jest np. niemożliwa do symulacji w Simulinku.

Dlatego założymy, że układ ten będziemy opisywać dyskretnym modelem ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu z dwoma zmiennymi stanu i rzędem obu równań równych $\alpha = 0.2$.

Zidentyfikowane na podstawie minimalizacji błędu odpowiedzi modelu dane to:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.03531171270826 & 0.00181484140434 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, T_s = 0.1 \quad (7.3)$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.01862377766114 & 0.18843211184930 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \alpha = 0.2 \quad (7.4)$$

Wartości własne macierzy $A_d + nI$ są następujące:

$$eig(A_d + nI) = \begin{bmatrix} 0.01299111986430 \\ 0.38882372154004 \end{bmatrix}$$

Macierz sterowalności zidentyfikowanego modelu jest następująca:

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & \Phi(1)B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0.20181484140434 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}[\mathcal{S}] = 2$$

Układ jest więc sterowalny.

Macierz obserwonalności tego modelu jest następująca:

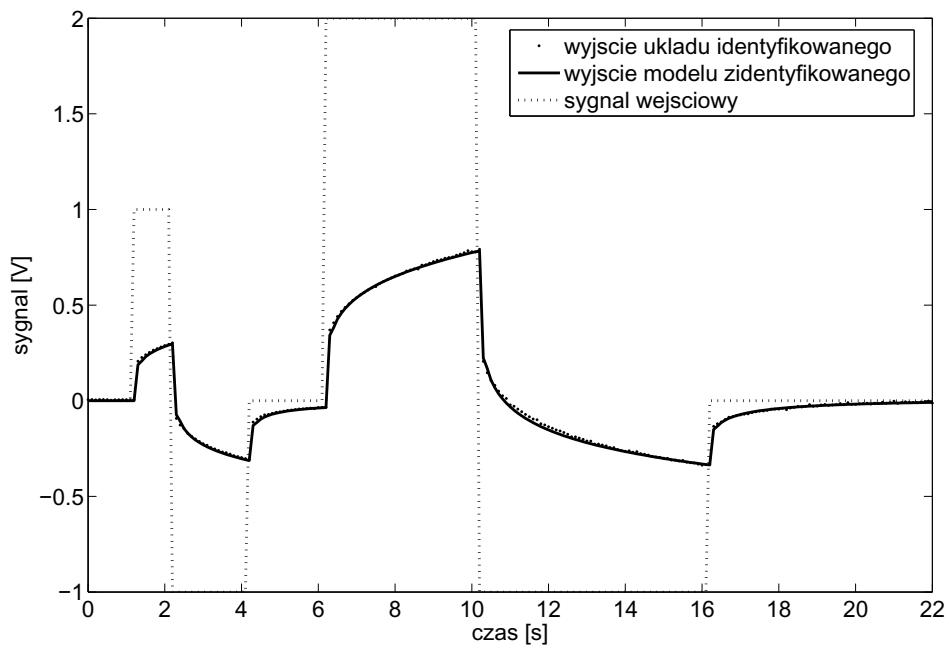
$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01862377766114 & 0.18843211184930 \\ 0.00292910506641 & 0.01940461910721 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}[\mathcal{O}] = 2$$

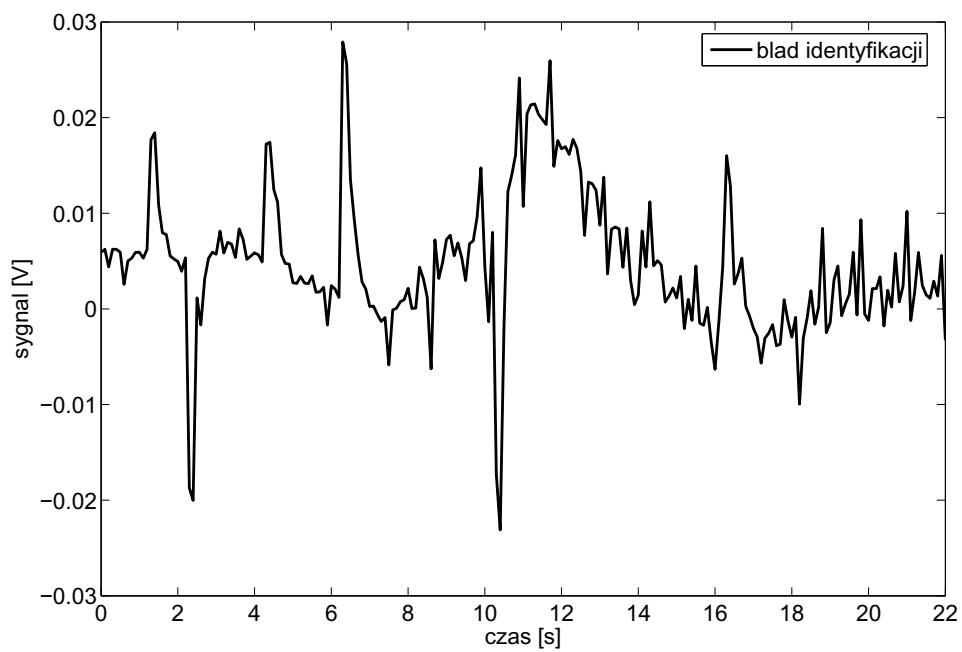
Układ jest więc obserwonalny.

Wynik modelowania przedstawiony jest na rysunkach 7.8 i 7.9. Rysunek 7.8 przedstawia porównanie zmierzonego sygnału wyjściowego i sygnału wyjściowego modelu na ten sam sygnał wejściowy. Przedstawiony sygnał wejściowy nie zawiera offsetu o wartości $-2V$, ustawiającego poziom zerowy sygnału na rzeczywistej wartości 2 Voltów. Rysunek 7.9 przedstawia natomiast wynik błędu modelowania, będącego różnicą pomiędzy sygnałem wyjściowym zmierzonym a sygnałem wyjściowym zidentyfikowanego modelu. Jak można zauważyć, modelowanie układem ułamkowego rzędu dało bardzo dobre rezultaty. Błąd modelowania w większości nie przekracza wartości 0.02. Większe wartości błędu modelowania rejestrowane są tylko w chwilach zmiany sygnału sterującego. Spowodowane jest to przyjęciem upraszczającego modelu bez macierzy D .

Do identyfikacji przyjęto regulatorową postać modelu w przestrzeni stanu. Wybór ten powoduje, że zmienne stanu układu nie mają swojej interpretacji fizycznej. Interpretacja fizyczna zmiennych stanu została także utracona przy przyjęciu modelu pozbawionego macierzy D i zawierającego dwie zmienne stanu.



Rysunek 7.8: Wynik identyfikacji układu czwórnika



Rysunek 7.9: Wynik identyfikacji układu czwórnika - błąd modelowania

7.4 Wyniki eksperymentalne estymacji układu czwórnika z superkondensatorem

W rozdziale tym przedstawione zostaną wyniki estymacji zmiennych stanu układu czwórnika z superkondensatorem. Zmienne stanu tego układu, jak to zostało zaznaczone w poprzednim rozdziale, nie są mierzalne, dlatego też do ich estymacji (odtworzenia) musi zostać użyty estymator. W podrozdziale 7.4.1 przedstawione są wyniki estymacji zmiennych stanu przy użyciu dyskretnego obserwatora ułamkowego rzędu. W podrozdziale 7.4.2 natomiast przedstawione są wyniki estymacji zmiennych stanu przy użyciu dyskretnego Ułamkowego Filtru Kalmana.

7.4.1 Estymacja przy użyciu obserwatora

Dyskretny obserwator układów ułamkowego rzędu został wprowadzony i przedyskutowany w rozdziale 5.1. W podrozdziale tym zostanie użyty do estymacji nieznanych, niemierzalnych zmiennych stanu układu czwórnika z superkondensatorem.

Wartości własne modelu dyskretnego układu czwórnika, danego równaniami 7.3 i 7.4, są równe

$$\text{eig}[A_d + \text{diag}(N)] = [0.013 \quad 0.389]$$

Promień stabilności, określony Twierdzeniem 16, dla takiego modelu i $L = \infty$ równy jest 0.2.

Dobierzmy wartości własne dla obserwatora, w taki sposób, aby zapewnić stabilność asymptotyczną równania błędu, a także odpowiednią szybkość odtwarzania zmiennych stanu.

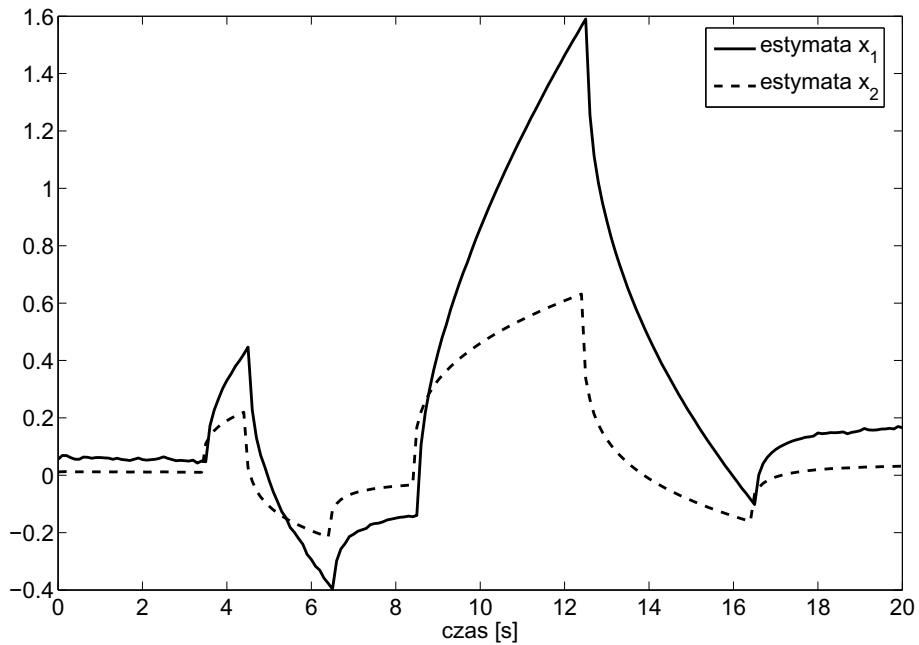
$$\text{eig}[F + \text{diag}(N)] = [0.117 \quad 0.0039]$$

Wybór takich wartości własnych macierzy obserwatora F implikuje następujące wartości macierzy obserwatora:

$$F = \begin{bmatrix} 0.30530170627342 & -2.08898904996778 \\ 0.09328584555151 & -0.58475725385212 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 16.39311378327184 \\ 3.11290941602129 \end{bmatrix}$$

Rysunki 7.10 i 7.11 przedstawiają wyniki estymacji niemierzalnych zmiennych stanu przy użyciu dyskretnego obserwatora ułamkowego rzędu. Rysunek 7.10 przedstawia estymaty zmiennych stanu układu po okresie adaptacji (po kilku przebiegach sekwencji sterującej). Jak można na nim zauważyć, zerowemu sygnałowi sterującemu (zadawanemu na początku sekwencji) odpowiada niezerowa zmienna stanu x_1 . Jest to spowodowane pewną bardzo małą niezerową wartością stałą (ang. offsetem) sygnału wyjściowego. Napięcie na superkondensatorze po rozładowaniu do $0V$ (w rzeczywistości do $2V$) nie jest równa $0V$, ale jest szumem o wartości oczekiwanej bliskiej zeru, ale nie zerowej. Wartość tego offsetu jest inna dla każdego przebiegu i dlatego bardzo trudna do eliminacji. Rysunek 7.11 przedstawia natomiast porównaną odpowiedź układu z odpowiedzią modelu przy tak odtworzonych zmiennych stanu. Jak można zauważyć, sygnały te bardzo dobrze sobie odpowiadają.

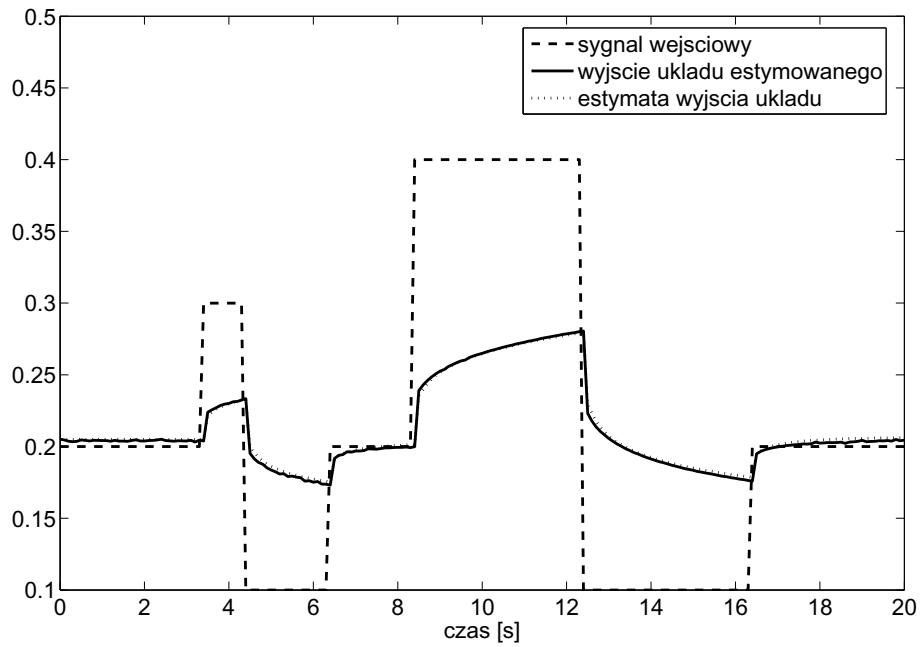


Rysunek 7.10: Wynik estymacji układu czwórnika przy użyciu obserwatora (estymaty układu)

7.4.2 Estymacja przy użyciu Ułamkowego Filtru Kalmana (FKF)

Ułamkowy Filtr Kalmana został przedstawiony i przedyskutowany w rozdziale 5.2. W tym podrozdziale przedstawione zostanie użycie Ułamkowego Filtru Kalmana do estymacji nieznanych zmiennych stanu układu czwórnika z superkondensatorem.

Dla układu zidentyfikowanego w rozdziale 7.3.3, na podstawie oszacowania wariancji sy-



Rysunek 7.11: Wynik estymacji układu czwórnika przy użyciu obserwatora (wyjście układu)

gnałów (także błędu modelowania), określone zostały następujące parametry filtra FKF:

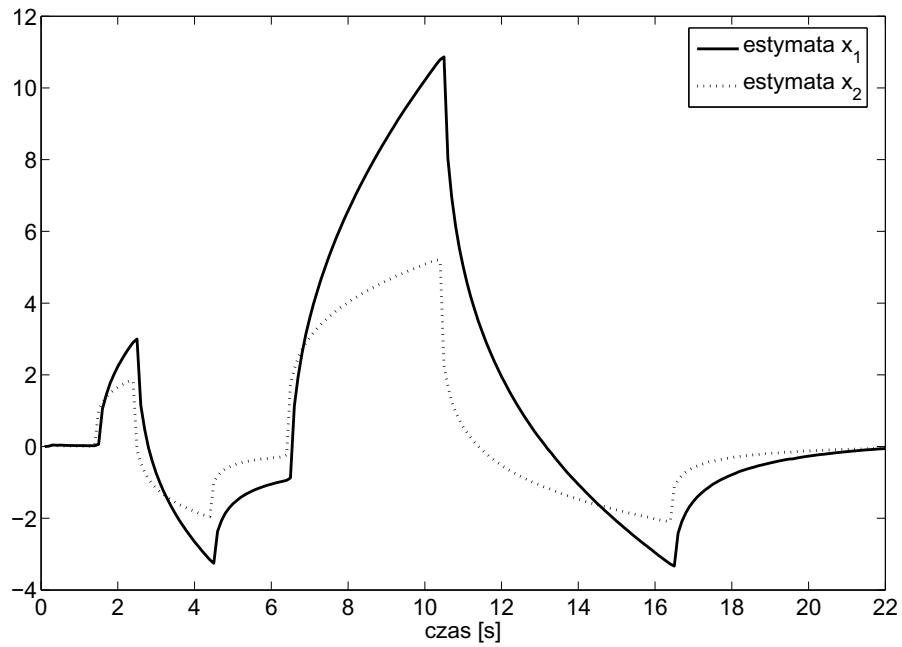
$$P = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, R = [0.01];$$

$$x_0 = [0, 0]^T$$

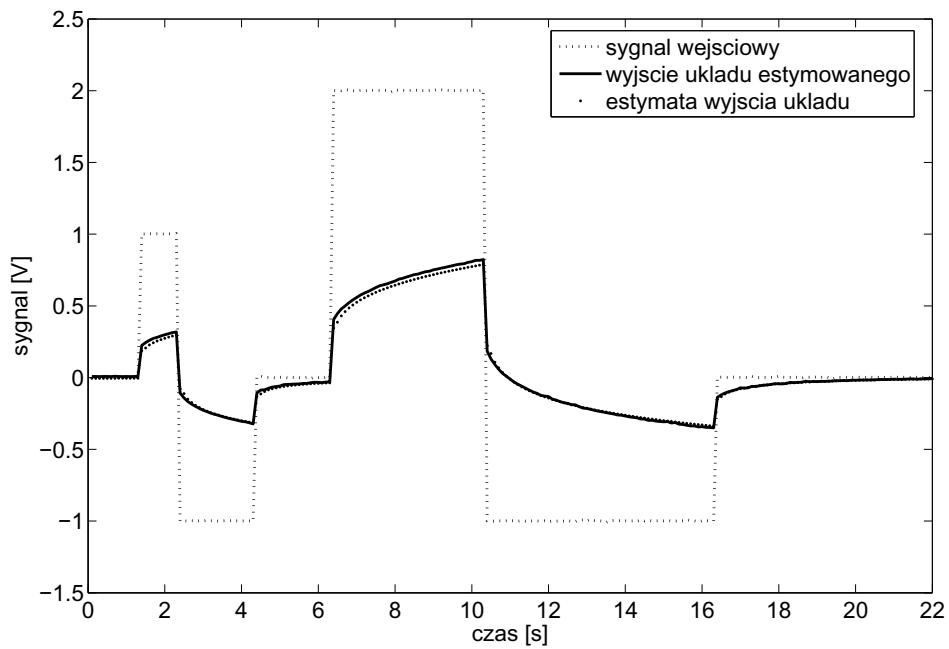
Rysunek 7.12 przedstawia odtworzone zmienne stanu układu. Jak widać, w porównaniu do estymat uzyskanych przy pomocy obserwatora, brak jest pewnej wartości składowej stałej. Jest to najpewniej spowodowane założeniem zerowej wartości oczekiwanej szumu wyjściowego i zmiennych stanu, jakie zostało wykonane przy wyprowadzaniu algorytmu FKF. Rysunek 7.13 natomiast przedstawia porównanie zmierzonej odpowiedzi układu z odpowiedzią wyznaczoną z odtworzonych zmiennych stanu. Można na nim zauważyć większy błąd niż w przypadku obserwatora. Jest to także spowodowane istnieniem, trudnej do eliminacji, składowej stałej sygnału wyjściowego układu.

7.4.3 Estymacja rzędu układu

Estymacja dualna wektora zmiennych stanu i rzędu układu została przedstawiona w rozdziale 5.4.2. W tym podrozdziale zostanie ona zastosowana dla układu czwórnika z superkondensa-



Rysunek 7.12: Wynik estymacji układu czwórnika przy użyciu FKF (estymaty układowu)



Rysunek 7.13: Wynik estymacji układu czwórnika przy użyciu FKF (wyjście układowu)

torem. W estymacji dualnej oddzielne filtry użyte są do estymacji zmiennych stanu i estymacji parametru (rzędu układu).

Do estymacji zmiennych stanu użyty został Ułamkowy Filtr Kalmana o następujących pa-

rametrach:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, Q_0 = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}$$

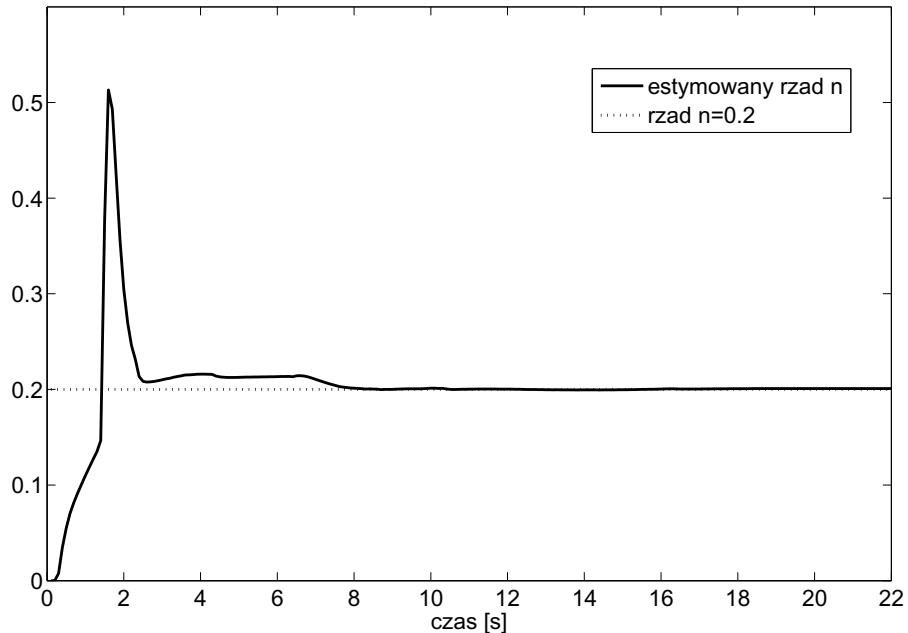
$$x_0 = [0, 0], R = [0.04]$$

Do estymacji rzędu układu został użyty Ułamkowy Filtr Kalmana oparty o transformację "Unscented" o następujących parametrach:

$$w = \begin{bmatrix} n \end{bmatrix}$$

$$P_0^w = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}, Q_0^w = \begin{bmatrix} 0.00001 \end{bmatrix}$$

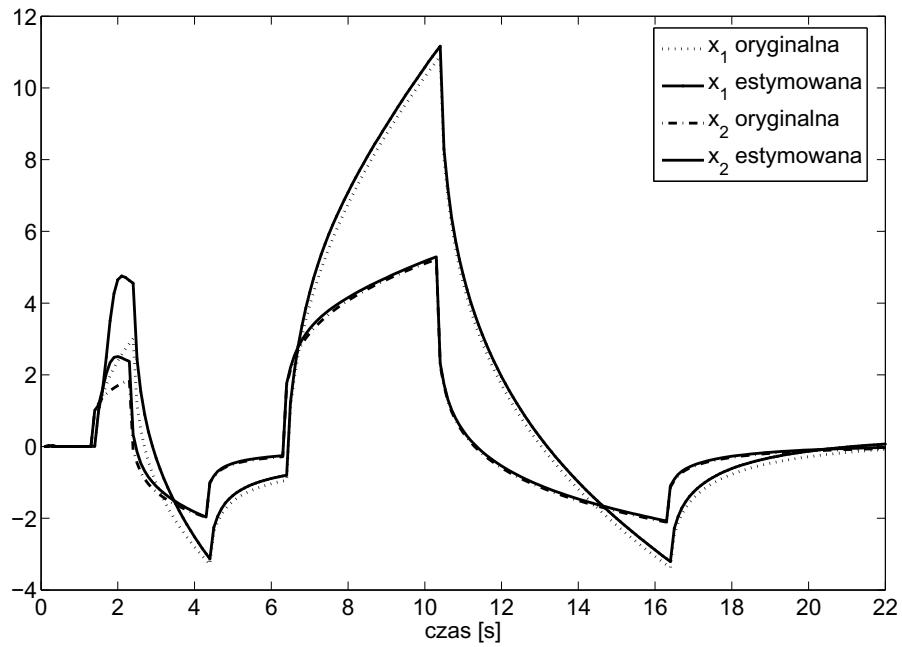
$$w_0 = [0], R^w = [0.04], \alpha = 0.01$$



Rysunek 7.14: Wyniki estymacji dualnej rzędu układu (rząd układu).

Na rysunkach 7.14 i 7.15 przedstawione są wyniki estymacji dualnej (rzędu i zmiennych stanu) układu czwórnika z superkondensatorem.

Rysunek 7.14 przedstawia wynik estymacji rzędu układu. Jak można zauważyć, estymowany rząd dość szybko osiąga wartość $n = 0.2$. Rysunek 7.15 przedstawia natomiast zmienne



Rysunek 7.15: Wyniki estymacji dualnej rzędu układu (zmienne stanu).

stanu układu estymowane w procesie estymacji dualnej, porównane ze zmiennymi stanu estymowanymi przez FKF przy założeniu znajomości rzędu. Jak można zauważyć, estymaty zmiennych stanu po krótkim okresie adaptacji (osiągnięcia poprawnej wartości estymowanego rzędu), osiągają wartości praktycznie identyczne z wartościami estymowanymi przy znajomości rzędu układu.

7.5 Wyniki eksperymentalne sterowania przy użyciu regulatora od stanu dla układu czwórnika z superkondensatorem

W rozdziale są przedstawione wyniki zastosowania regulatora od stanu do układu czwórnika z superkondensatorem. Zmienne stanu układu są niemierzalne, dlatego musi być zastosowany estymator zmiennych stanu. W podrozdziale 7.5.1 do estymacji zmiennych stanu zastosowano obserwator, a w podrozdziale 7.5.2 Ułamkowy Filtr Kalmana (FKF).

7.5.1 Regulator od stanu z obserwatorem

Regulator od stanu wraz z obserwatorem ułamkowego rzędu jako estymatorem zmiennych stanu został przedstawiony i przedyskutowany w rozdziale 6.2.1. W podrozdziale tym zostanie on wykorzystany do regulacji napięcia na superkondensatorze połączonym w układ czwórnika. Zadaniem sterowania jest kształtowanie dynamiki napięcia na superkondensatorze do pożądanego położenia biegunów układu.

Założymy, że pożądane wartości własne układu z regualatorem dane są następująco:

$$\text{eig}(A_d + BK + nI) = \begin{bmatrix} 0.22687024714910 + 0.16344698605755i \\ 0.22687024714910 - 0.16344698605755i \end{bmatrix}$$

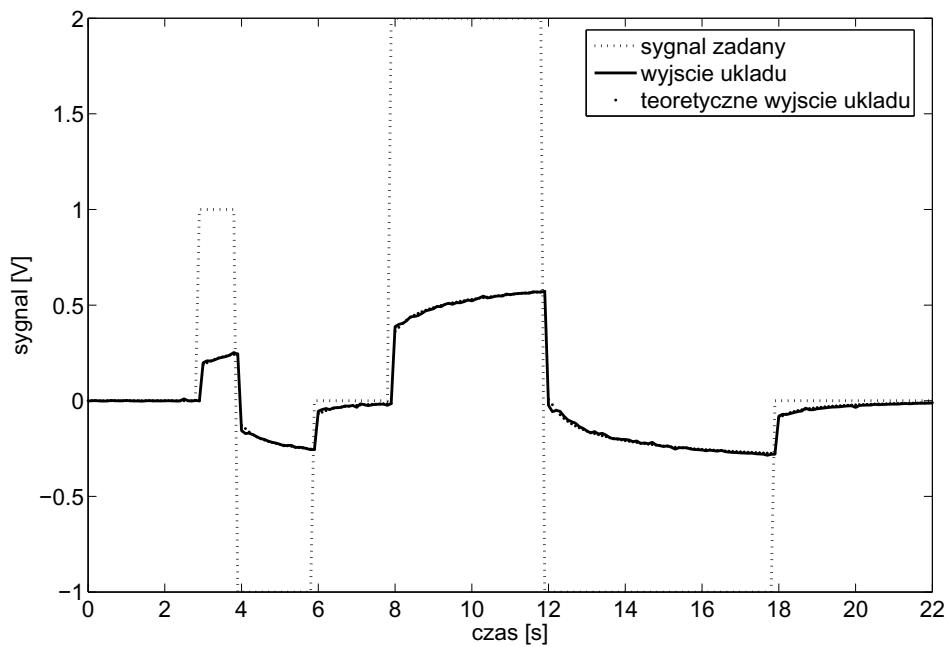
Uzyskujemy w ten sposób następującą macierz regulatora:

$$K = [0.05 \quad 0.05]$$

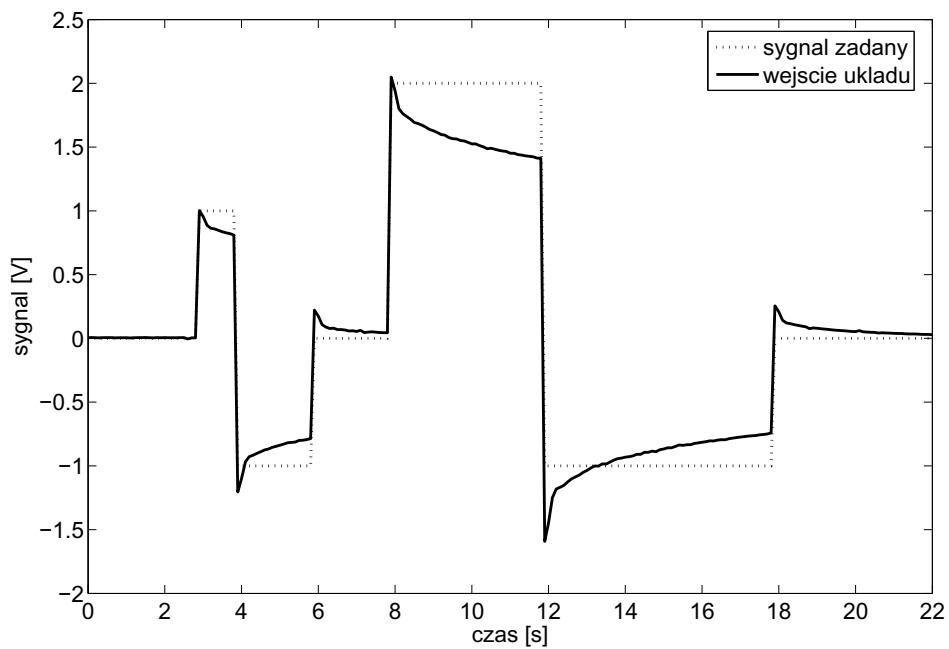
Parametry obserwatora to:

$$F = \begin{bmatrix} 0.30530170627342 & -2.08898904996778 \\ 0.09328584555151 & -0.58475725385212 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$H = \begin{bmatrix} 16.39311378327184 \\ 3.11290941602129 \end{bmatrix}$$

Wyniki działania regulatora od stanu wraz z obserwatorem porównane z teoretyczną odpowiedzią układu zamkniętego pokazane są na rysunku 7.16. Na rysunku 7.17 natomiast przedstawiono wartości sygnału wejściowego do układu podawanego przez regulator.



Rysunek 7.16: Wynik sterowania od stanu układu czwórnika wraz z obserwatorem (wyjście układu)



Rysunek 7.17: Wynik sterowania od stanu układu czwórnika wraz z obserwatorem (wejście układu)

Jak widać, dokładność sterowania jest bardzo wysoka, jedynie przy zmianach sygnału sterującego da się zauważać bardzo małe niedokładności. Spowodowane jest to przyjętymi założeniami upraszczającymi przy modelowaniu (pominięcie macierzy D).

7.5.2 Regulator od stanu z FKF

Regulator od stanu z Ułamkowym Filtrrem Kalmana jako estymatorem zmiennych stanu został przedstawiony w rozdziale 6.2.2. W tym podrozdziale zostanie zastosowany do kształtuowania dynamiki napięcia na superkondensatorze połączonym w układ czwórnika z rezystorem.

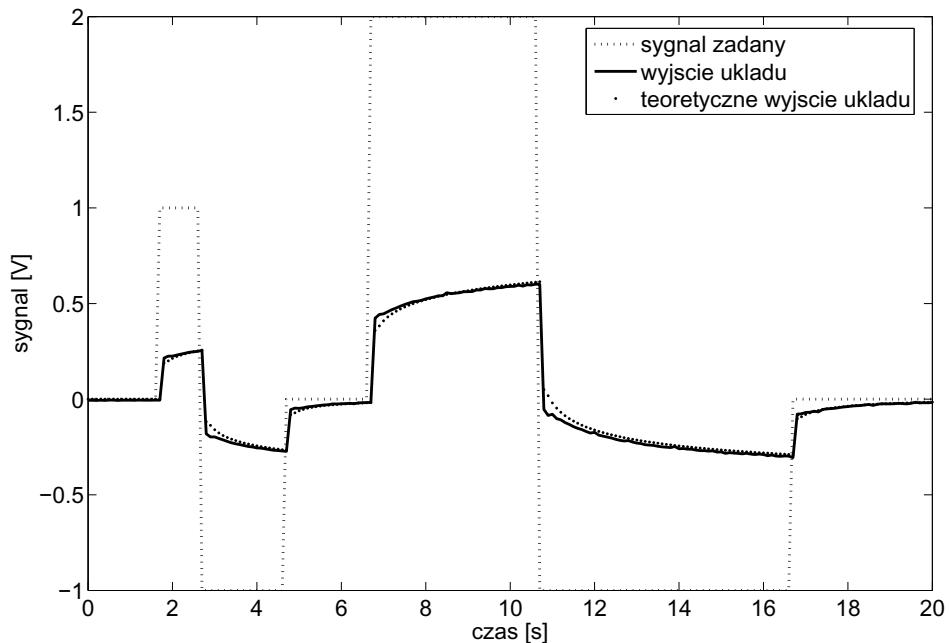
Macierz regulatora jest następująca:

$$K = [0.05 \quad 0.05]$$

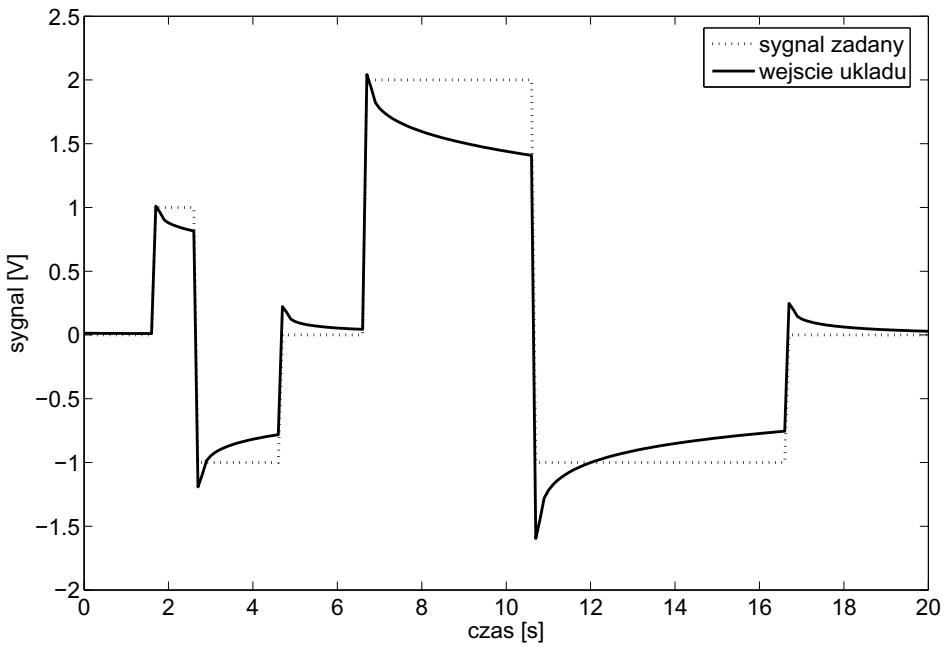
Parametry FKF to :

$$P = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, R = [0.01];$$

$$x_0 = [0, 0]^T$$



Rysunek 7.18: Wynik sterowania od stanu układu czwórnika z użyciem FKF



Rysunek 7.19: Wynik sterowania od stanu układu czwórnika z użyciem FKF

Rysunki 7.18 i 7.19 przedstawiają wyniki działania regulatora od stanu wraz z Ułamkowym Filtrami Kalmana (FKF) porównane z danymi teoretycznymi (z teoretyczną odpowiedzią układu na dane wymuszenie). Jak można zauważyć na rysunku 7.18, dokładność sterowania jest mniejsza niż dla przypadku z obserwatorem, jednakże nadal jest bardzo wysoka. Jest to analogiczny rezultat, jak dla przypadku samej estymacji i podobnie ma związek z nieznaczną składową stałą sygnału wyjściowego (napięcia na superkondensatorze). Ma to także związek z uproszczeniami przy modelowaniu, pomijaniem macierzy D . Mała wartość zaszumienia także powoduje, że algorytm obserwatora nie traci swojej skuteczności. W tym akurat przypadku, algorytm obserwatora uzyskuje dokładniejszą estymację, jednakże nie oznacza to, że algorytm Ułamkowego Filtru Kalmana jest gorszy od algorytmu obserwatora. Gdyby zaszumienie było większe lub nie byłoby składowej stałej, algorytm Ułamkowego Filtru Kalmana z pewnością okazał by się bardziej skuteczny.

7.5.3 Estymacja połączona i regulator samonastrajający się

Regulator samonastrajający się oparty o estymację połączoną stanu i parametru układu przedstawiony został w rozdziale 6.3. W podrozdziale tym zostanie zastosowany do kształtuowania dynamiki układu czwórnika z superkondensatorem oraz estymacji nieznanych zmiennych stanu

i parametru tego układu.

Dla modelu danego w podrozdziale 7.3.3 i estymacji połączonej parametru a_1 nieliniowy model ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu dany jest następująco:

$$\begin{aligned} x_k^w &= [x_k^T a_1]^T \\ \Delta^\Upsilon x_{k+1}^w &= f(x_k^w, u_k) + \omega_k \\ x_{k+1}^w &= \Delta^\Upsilon x_{k+1}^w - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j}^w \\ y_k &= h(x_k^w) + \nu_k \end{aligned}$$

gdzie

$$f(x_k^w, u_k) = \begin{bmatrix} x_{2,k}^w \\ -a_0 x_{1,k}^w - a_1 x_{2,k}^w + u_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h(x_k) = [b_0 x_{1,k}^w + b_1 x_{2,k}^w]$$

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Zlinearyzowane macierze dla algorytmu Rozszerzonego Ułamkowego Filtru Kalmana (EKF) są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} F_k &= \left[\frac{\partial F(x, u_k)}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}_k^w} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -\tilde{x}_{2,k}^w \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ H_k &= \left[\frac{\partial H(x)}{\partial x} \right]_{x=\tilde{x}_k^w} \\ &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Parametry EKF są następujące:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.01 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix}$$

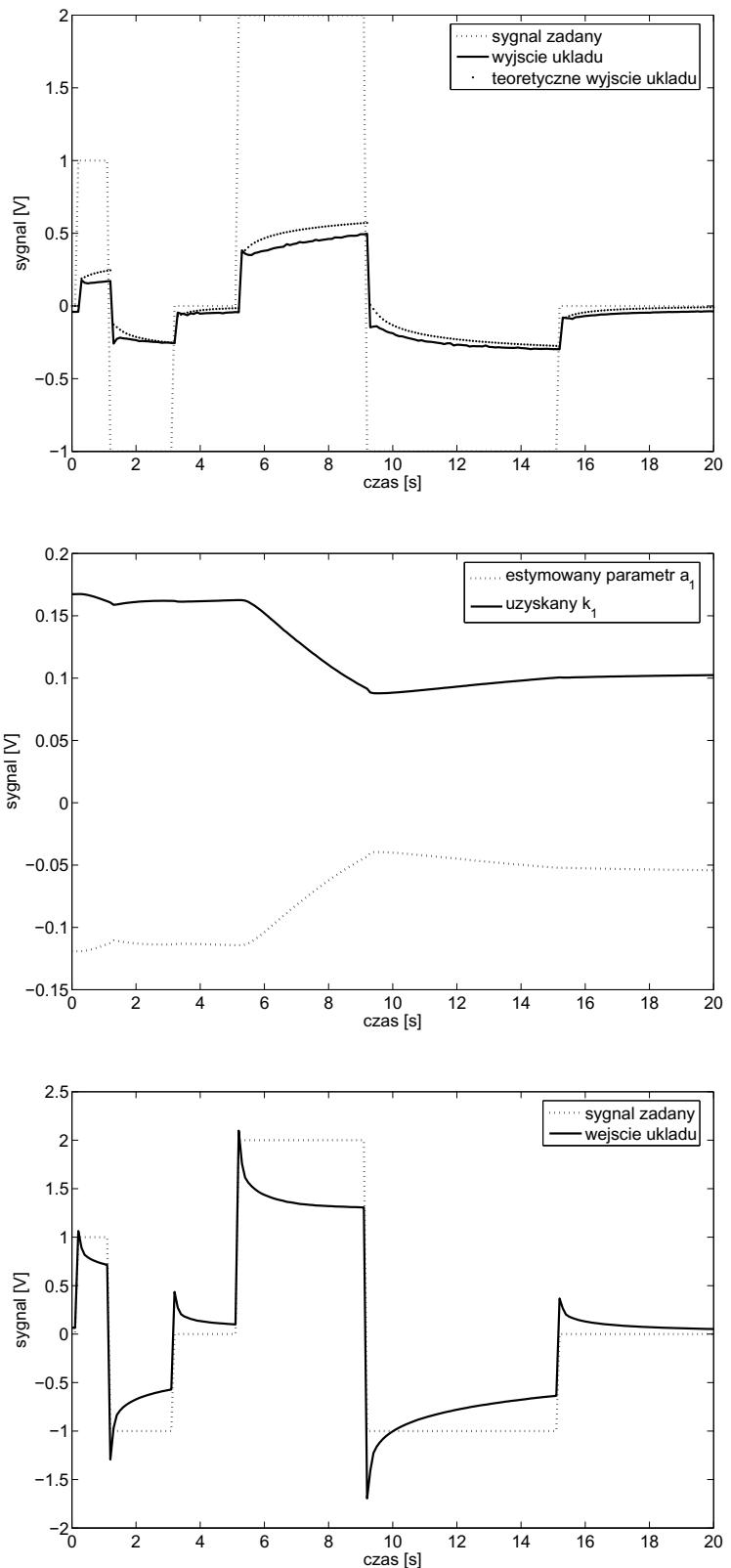
Macierz regulatora K zdefiniowana jest następująco:

$$K = \begin{bmatrix} 0.05 & k_1 \end{bmatrix}$$

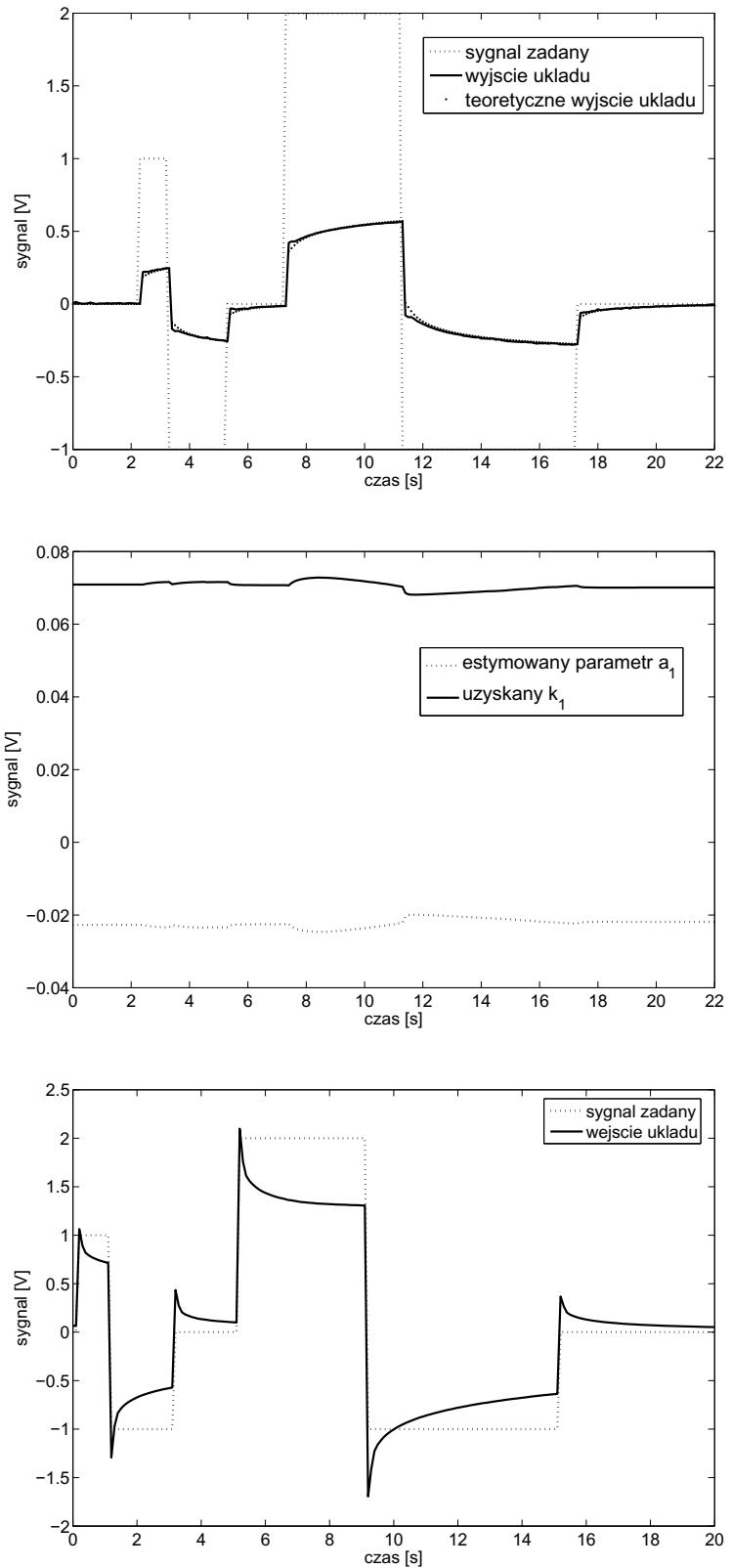
gdzie $k_1 = 0.048185 - a_1$

Rysunek 7.20 przedstawia wyniki zastosowania samonastrajającego się regulatora od stanu zmierzone na początku działania algorytmu. Jak można zauważyć, w początkowej fazie procesu sterowania dynamika (odpowiedź) układu zamkniętego znacząco odbiega od dynamiki teoretycznej (żądanej). Dynamika zmian (adaptacji) estymowanego parametru może być kształtowana przy pomocy odpowiednich zmian w macierzy Q i P . W tym eksperymencie macierze te zostały tak dobrane, aby lepiej uwidoczyć proces adaptacji estymowanego parametru.

Rysunek 7.21 przedstawia wyniki zastosowania samonastrajającego się regulatora od stanu zmierzone po okresie adaptacji algorytmu. Jak można zauważyć, dynamika (odpowiedź) układu z regulatorem samonastrajającym się odpowiada bardzo dokładnie dynamice układu teoretycznego (lepiej niż przy zastosowaniu tylko FKF). Estymowany parametr a_1 ustabilizował się w granicach -0.02 (lekkoscylując w tych granicach, szczególnie przy silnych zmianach sygnału sterującego). Wartość znacznie odbiega od modelu zidentyfikowanego (-0.0018). Patrząc jednak na ogólne wyniki sterowania można przypuszczać, że algorytm estymacji połączonej w tych warunkach otrzymał bardziej efektywny model, jakkolwiek zmienny w czasie.



Rysunek 7.20: Wyniki działania regulatora samonastrajającego się w okresie adaptacji



Rysunek 7.21: Wyniki działania regulatora samonastrajającego się po okresie adaptacji

7.6 Podsumowanie

W rozdziale tym zostały przedstawione wyniki eksperymentalne modelowania, estymacji i sterowania układu czwórnika z superkondensatorem. Modelowanie przedstawione w rozdziale 7.3.1 pokazało dużą dokładność modelowania przy użyciu dyskretnego modelu ułamkowego rzędu opisanego w przestrzeni stanu, a tym samym dużą użyteczność tego modelu do modelowania rzeczywistych układów. W rozdziale 7.4 zaprezentowane zostało wykorzystanie przedstawionych w rozdziale 5 algorytmów estymacji zmiennych stanu, takich jak obserwator ułamkowego rzędu i Ułamkowy Filtr Kalmana. Osiągnięte wyniki potwierdziły skuteczność stosowania tych algorytmów dla rzeczywistego obiektu estymacji. Szczególnie istotny, w świetle późniejszych badań, jest wynik estymacji rzędu układu. Jest on interesujący ze względu na związek rzędu układu z czasem użytkowania superkondensatora. Im dłużej jest użytkowany, tym jego rząd bardziej zbliża się do jedności. Możliwość wyznaczania tego, jak długo dany superkondensator może pełnić swoją rolę, może być bardzo użyteczna z praktycznego punktu widzenia. Modelowanie to i estymacja ta może pełnić główną rolę w systemach detekcji błędów (ang. fault detection), wykrywającego anomalie i błędne stany pracy układów z superkondensatorami. Jest to szczególnie ważne przy zespołach superkondensatorów połączonych szeregowo (dla zwiększenia napięcia pracy), w których awaria jednego superkondensatora może spowodować uszkodzenie dalszych. W rozdziale 7.5 zostało przedstawione wykorzystanie algorytmów sterowania od stanu, przedstawionych w rozdziale 6. Jako estymatory zostały użyte algorytmy obserwatora ułamkowego rzędu, Ułamkowego Filtru Kalmana i Rozszerzonego Ułamkowego Filtru Kalmana przy estymacji połączonej. Wyniki także potwierdziły bardzo dużą efektywność tych algorytmów w zastosowaniu do rzeczywistego obiektu, jakim był czwórnik z superkondensatorem. W dalszych pracach szczególnie interesująco rysuje się możliwość wykorzystania teorii układów dodatkowych ułamkowego rzędu do modelowania i sterowania układami z superkondensatorami [86]. Także interesujące jest zastosowanie sterowania z wejściem odniesienia, którego nie użyto ze względu na zbyt duże przeskalowywanie sygnału sterującego, powodujące przekraczanie dopuszczalnych sterowań.

Rozdział 8

Zakończenie

W pracy wprowadzony został dyskretny model dynamiczny ułamkowego rzędu opisany w przestrzeni stanu. Zostały podane warunki określające podstawowe własności systemowe tego modelu. Dla osiągalności, obserwonalności i stabilności zostały podane warunki konieczne i wystarczające. Dla sterowalności – tylko warunki konieczne. Zostało podane także proste w użyciu kryterium stabilności, podające fragment obszaru stabilności ograniczony okręgiem o podanym przez to kryterium promieniu. Podanie kryterium podającego dokładniejszy obszar stabilności będzie celem dalszych badań.

Dla modelu tego zostały podane algorytmy identyfikacji parametrycznej, oparte o metodę najmniejszych kwadratów, wraz z przykładami numerycznymi i symulacyjnymi. Szczególnie ważnym przykładem była identyfikacja układu dyskretnego na podstawie układu ciągłego. Pokazała ona możliwość modelowania modelem dyskretnym układów ciągłych (rzeczywistych). Trudności napotkane przy identyfikacji układów z zakłóceniami stanowią motywację do rozwoju tych algorytmów.

Następnie zostały pokazane i przeanalizowane podstawowe algorytmy estymacji wektora zmiennych stanu liniowych i nieliniowych modeli ułamkowego rzędu. Dla liniowych modeli były to: Dyskretny Obserwator Ułamkowego Rzędu i Ułamkowy Filtr Kalmana. Dla nieliniowych modeli były to: Rozszerzony Ułamkowy Filtr Kalmana i Ułamkowy Filtr Kalmana oparty o transformację "Unscented". Dla wszystkich tych algorytmów przedstawione i przedyskutowane zostały przykłady symulacyjne.

Następnie został przedstawiony i przedyskutowany algorytm regulatora od stanu, wraz z jego modyfikacjami dla sytuacji, gdy potrzebny jest estymator zmiennych stanu. Jako estymator zostały użyte wprowadzone wcześniej algorytmy estymacji. Dla wszystkich tych przypadków

przedstawione i przedyskutowane zostały przykłady symulacyjne. Przy projektowaniu regulatorów zakładano znajomość docelowej dynamiki obiektu, nie uwzględniając zagadnień sterowania optymalnego czy odpornego. Wprowadzenie tych zagadnień wymaga dalszych prac.

Na zakończenie pokazane zostało zastosowanie przedstawionych w tej pracy algorytmów estymacji i sterowania do obiektu rzeczywistego, jakim był układ elektroniczny z superkondensatorem. Przedstawione wyniki eksperymentalne potwierdziły efektywność tych algorytmów i dużą dokładność zarówno identyfikacji, estymacji jak i sterowania. Osiągnięte wyniki są motywacją do dalszych prac nad tematyką modelowania, estymacji i sterowania układów z superkondensatorami. Szczególnie interesujący wydaje się kierunek badań, zmierzający do skonstruowania systemu detekcji błędów i awarii w zespołach superkondensatorów.

Praca niniejsza jest pierwszym w Polsce i jednym z pierwszych, a na pewno najpełniejszym w świecie, przedstawieniem i opisem dyskretnych dynamicznych układów ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu. Wyniki zawarte w pracy zostały przedstawione na konferencjach krajowych i międzynarodowych.

Za szczególnie ważne uważam konferencje FDA'06 i ICCC'07. Na konferencji FDA'06 obecna była większość ważniejszych osób nauki zajmujących się rachunkiem różniczkowym ułamkowego rzędu (I. Podlubny, A. Oustaloup, S. Samko, B. Vinagre, J. Tenreiro Machado i wielu innych). Dzięki temu możliwa była rzetelna weryfikacja prezentowanych tam prac [48, 49]. Jedna z tych prac została zaproponowana do umieszczenia w specjalnym wydaniu International Jurnal of Vibration and Control (przewidywane wydanie początek 2008 roku). Przewodniczącym konferencji ICCC'07 natomiast był prof. Igor Podlubny, a obecni także byli B. Vinagre, I. Petrás i L. Dorčák. Artykuł prezentowany na tej konferencji [51], został wybrany głosami uczestników jednym z trzech najlepszych artykułów tej konferencji. Efektem tego będzie także publikacja w specjalnym wydaniu Acta Montanistica Slovaca.

Zaprezentowane wyniki stanowią doskonałą podbudowę do dalszych prac badawczych zarówno teoretycznych, jak i praktycznych.

Bibliografia

- [1] C. Abbey and G. Joos. Supercapacitor energy storage for wind energy applications. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 43(3):769 – 776, 2007.
- [2] Om P. Agrawal. Solution for a Fractional Diffusion-Wave Equation Defined in a Bounded Domain. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4):145–155, July 2002.
- [3] M. A. Al-Alaoui. Novel digital integrator and differentiator. *Electronics Letters*, 29(4):376–378, 1993.
- [4] M. A. Al-Alaoui. Filling the gap between the bilinear and the backward difference transforms: an interactive design approach. *Int. J. of Electrical Engineering Education*, 34(4):331–337, 1997.
- [5] J. Alonso. *On Differential Equations of Fractional Order*. PhD thesis, University of Cincinnati, 1964.
- [6] M. Alper and Haldun M. Ozaktas. The Fractional Fourier Transform and Harmonic Oscillation. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4):157–172, July 2002.
- [7] A. Aprile, J. A. Inaudi, and J. M. Kelly. Evolutionary model of viscoelastic dampers for structural applications. *Journal of Engineering Mechanics*, pages 551–560, 1997.
- [8] A. Aprile, J. A. Inaudi, and J. M. Kelly. Evolutionary model of viscoelastic dampers for structural applications. *Journal of Engineering Mechanics*, pages 551–560, 1997.
- [9] J. Audonet and J. M. Roquejoffre. An Asymptotic Fractional Differential Model of Spherical Flame. In *Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*, pages 15–27. ESAIM: Proceedings, December 1998.

- [10] M. Axtell and E. M. Bise. Fractional calculus applications in control systems. In *Proceedings of the IEEE 1990 Nat. Aerospace and Electronics Conf.*, pages 563–566, New York, USA, 1990.
- [11] R. L. Bagley. Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA Journal*, 21:741–748, 1983.
- [12] R. L. Bagley and R. A. Calico. Fractional-order state equations for the control of viscoelastic damped structures. *J. Guidance, Control and Dynamics*, 14(2):304–311, 1991.
- [13] R. Barbosa, F. Duarte, and J. Tenreiro Machado. A Fractional Calculus Perspective of Mechanical Systems Modeling. In *Controlo 2002: 5th Portuguese Conference on Automatic Control*, pages 394–399, September 2002.
- [14] R. Barbosa and J. Tenreiro Machado. Implementation of discrete-time fractional-order controllers based on LS approximation. *Acta Polytechnica Hungarica*, 3(4):5–22, 2006.
- [15] R. S. Barbosa, J.A. Tenreiro Machado, and I. M. Ferreira. Least-squares Design of Digital Fractional-order Operators. In *Proceedings of 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, ENSEIRB, Bordeaux, France, 2004. FDA'04.
- [16] J. L. Battaglia, O. Cois, J. C. Batsale, and A. Oustaloup. La Dérivation Non Entière: Outil de Modélisation en Thermique. In *Les Systèmes à Dérivées Non Entières: Théorie et Applications*, volume 7. Alain Oustaloup and Michael Guglielmi, 2001.
- [17] L. Bel, G. Oppenheim, L. Robbiano, and M. C. Viano. Distribution Processes with Stationary Fractional Increments. In *Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*, pages 43–54. ESAIM: Proceedings, December 1998.
- [18] F. Belhachemi, S. Rael, and B. Davat. A physical based model of power electric double-layer supercapacitors. In *Proceedings of Industry Applications Conference, 2000. Conference Record of the 2000 IEEE*, volume 5, pages 3069–3076, 2000.
- [19] L. Blank. Numerical treatment of differential equations of fractional order. Numerical Analysis Report 287, University of Manchester, Manchester, UK, 1996.
- [20] M. Brenna, F. Foiadelli, E. Tironi, and D. Zaninelli. Ultracapacitors application for energy saving in subway transportation systems. In *Proceedings of International Conference on Clean Electrical Power, 2007. ICCEP '07, 21-23 May 2007*, pages 69 – 73, 2007.

- [21] R. G. Brown and P.Y.C. Hwang. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering. With Matlab Exercises and Solutions*. John Wiley & Sons, Inc., 1997.
- [22] S. Buller, E. Karden, D. Kok, and R.W. De Doncker. Modeling the dynamic behavior of supercapacitors using impedance spectroscopy. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 38(6):1622–1626, 2002.
- [23] A. Burke. Review of ultracapacitor technologies for vehicle applications. *AABC*, (2), 2001. http://www.nesscap.com/data_nesscap/Prof%20Burke-AABC%202001.PDF.
- [24] BURR-BROWN. *High-Voltage, High-Current OPERATIONAL AMPLIFIER*, 1995. <http://elenota.iele.polsl.gliwice.pl/pdf/Burr-Brown/opa544.pdf>.
- [25] A. J. Calderón, C. Monje, and B. Vinagre. Fractional Order Control of a Power Electronic Buck Converter. In *Controlo 2002: 5th Portuguese Conference on Automatic Control*, pages 365–370, September 2002.
- [26] M. Caputo. Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent. *II, Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 13:529–539, 1967.
- [27] M. Caputo. Elasticità e dissipazione. *Zanichelli, Bologna*, 1969.
- [28] G. E. Carlson and C. A. Halijak. Simulation of the fractional derivative operator and the fractional integral operator. *Proc. of the CSSCM, Kansas State University Bulletin*, 45(7), May 1961.
- [29] G. E. Carlson and C. A. Halijak. Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular newton process. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 7:210–213, 1964.
- [30] A. Carpintieri and F. Mainardi. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Springer-Verlag, Viena-New York, 1997.
- [31] Yang Quan Chen and Kevin L. Moore. Discretization Schemes for Fractional-Order Differentiators and Integrators. *IEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 49(3):363–367, March 2002.
- [32] M. Ciesielski. *Frakcjalna metoda różnic skończonych w zastosowaniu do modelowania anomalnej dyfuzji w obszarze ograniczonym*. Rozprawa doktorska, Politechnika Częstochowska, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Informatyki, 2005.

- [33] O. Cois, A. Oustaloup, E. Battaglia, and J.-L. Battaglia. Non integer model from modal decomposition for time domain system identification. In *Proceedings of Symposium on System Identification*, volume 3, page 989. SYSID 2000, 2000.
- [34] O. Cois, A. Oustaloup, T. Poinot, and J.-L. Battaglia. Fractional state variable filter for system identification by fractional model. In *Proceedings of European Control Conference*, Porto, Portugal, 2001. ECC'2001.
- [35] A. Cusmariu. Fractional Analytics Signals. *Signal Processing*, 82:267–272, 2002.
- [36] D. Lj. Debeljković, M. Aleksević, N. Yi-Yong, and Q.L. Zhang. Lyapunov and non-lyapunov stability of linear discrete time delay systems. *FACTA UNIVERSITATIS, Series: Mechanical Engineering*, 1:1147–1160, 2002.
- [37] L. Decreusefond and A. S. Üstünel. Fractional Brownian Motion: Theory and Applications. In *Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*, pages 75–86. ESAIM: Proceedings, December 1998.
- [38] K. Diethelm. An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 5, March 1997.
- [39] J. W. Dixon, M. Ortúzar, and J. Moreno. Dsp based ultracapacitor system for hybrid-electric vehicles. In *Proceedings of 20th Electric Vehicle Symposium, 2003, November 15-19, 2003, Long Beach, California, USA, on CD-ROM.*, 2003.
- [40] L. Dorčák. Numerical models for simulation the fractional - order control systems. In *UEF-04-94, The Academy of Science, Institute of Experimental Physics*, pages 1–12, Kosice, Slovak Republic, 1994.
- [41] L. Dorčák, V. Lesko, and I. Košťial. Identification of fractional-order dynamical systems. In *Proceedings of 12th International Conference on Process Control and Simulation-AS RTP'96*, number 1, pages 62–68, Kosice, Slovak Republic, September 1996.
- [42] L. Dorčák, I. Petrás, I. Košťial, and J. Terpák. Fractional-order state space models. In *Proceedings of International Carpathian Control Conference. ICCC' 2002*, 2002.
- [43] dSPACE. *ControlDesk Experiment Guide*, 2002.
- [44] dSPACE. *DS1103 Hardware Reference*, 2002.

- [45] dSPACE. *MLIB/MTRACE Matlab-dSPACE Interface Libraries*, 2002.
- [46] dSPACE. *Real-Time Interface (RTI and RTI-MP) Implementation Guide*, 2002.
- [47] A. Dzieliński and D. Sierociuk. Adaptive feedback control of fractional order discrete state-space systems. In *Proceedings of International Conference on Computational Intelligence for Modelling Control and Automation*, pages 804–809. CIMCA’2005, Vienna, Austria, 28-30 November, 2005.
- [48] A. Dzieliński and D. Sierociuk. Observer for discrete fractional order state-space systems. In *Proceedings of 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, IFAC FDA’06*, pages 524–529. Porto, Portugal, 19-21 July, 2006.
- [49] A. Dzieliński and D. Sierociuk. Stability of discrete fractional state-space systems. In *Proceedings of 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, IFAC FDA’06*, pages 518–523. Porto, Portugal, 19-21 July, 2006.
- [50] A. Dzieliński and D. Sierociuk. Controllability and observability of fractional order discrete state-space systems. In *Proceedings of 13th IEEE/IFAC International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR’07*, pages 129–134. Szczecin, Poland, 27-30 August, 2007.
- [51] A. Dzieliński and D. Sierociuk. Ultracapacitor modelling and control using discrete fractional order state-space model. In *Proceedings of 8th International Carpathian Control Conference, ICCC’07*, pages 127–130. Štrbské Pleso, Slovakia, 24-27 May, 2007.
- [52] A. Dzieliński and D. Sierociuk. Ultracapacitor modelling and control using discrete fractional order state-space models and fractional kalman filter. In *Proceedings of European Control Conference, ECC’07*, pages 2916–2922. Kos, Greece, 2-5 July, 2007.
- [53] D. Elizarraraz and L. Verde-Star. Fractional Divided Differences and the Solution of Differential Equations of Fractional Order. *Advances in Applied Mathematics*, 24:260–283, 2000.
- [54] M. Endo, T. Takeda, Y.J. Kim, K. Koshiiba, and K Ishii. High power electric double layer capacitors (edlc’s); from operating principle to pore size control in advanced activated carbons. *Carbon Science*, 1(3&4):117–128, 2001.

- [55] M. Enelund. Discussion: Modeling of viscoelastic dampers for structural applications. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(4):407–409, 1997.
- [56] N. Engheta. On the role of fractional calculus in electromagnetic theory. *IEEE Antennas and Propagation*, 39(4), August 1997.
- [57] R. Faranda, M. Gallina, and D.T. Son. A new simplified model os double-layer capacitors. In *Proceedings of International Conference on Clean Electrical Power, 2007. ICCEP '07.*, pages 706 – 710, 2007.
- [58] V. Feliu, K. S. Rattan, and H. B. Brown. Model identification of a single-link flexible manipulator in the presence of friction. In *Proceedings of the 19th ISA Annual Modeling and Simulation Conference*, volume 19, Pittsburgh,USA, May 1988.
- [59] N. M. Fonseca Ferreira and J. A. Tenreiro Machado. Fractional-order hybrid control of robotic manipulators. In *Proceedings of The 11th International Conference on Advanced Robotics*, Coimbra, Portugal, 2003.
- [60] G. Franklin, D. Powell, and A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [61] W. Koczara G. Wodecki. Active compensator of dc load power variability. In *Proceedings of International Conference on POWER ELECTRONICS AND INTELLIGENT CONTROL FOR ENERGY CONSERVATION Warsaw, Poland, 16-19 October, 2005*, 2004.
- [62] K. Gałkowski. Fractional polynomials and nd systems. In *Proceedings of IEEE Symposium on Circuits and Systems*, Kobe (Japan), May 2005. ISCAS-2005.
- [63] G. Garcia and J. Bernussou. Identification of the Dynamics of a Lead Acid Battery by a Diffusive Model. In *Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*, pages 87–98. ESAIM: Proceedings, December 1998.
- [64] L. Gaul, P. Klein, and S. Kemple. Damping description involving fractional operators. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 5(2):81–88, 1991.
- [65] R. Gorenflo. *Fractional Calculus: Some Numerical Methods*. Udine, Sept. 1996.

- [66] R. Gorenflo, Yu. Luchko, and S. Rogosin. Mittag-Leffler type functions: notes on growth properties and distribution of zeros. Preprint, Freie Universität Berlin, Department of Mathematics and Informatics.
- [67] R. Gorenflo and F. Mainardi. Fractional oscillations and Mittag-Leffler functions. Technical report.
- [68] R. Gorenflo and F. Mainardi. Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order. In A. Carpintieri and F. Mainardi, editors, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Vienna-New York, 1997. Springer-Verlag.
- [69] R. Gorenflo, F. Mainardi, D. Moretti, and P. Paradisi. Time Fractional Diffusion: A Discrete Random Walk Approach. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4):129–143, July 2002.
- [70] P. Górecki. 2700 Faradów, czyli Super(ultra)kondensatory. *Elektronika dla Wszystkich*, 6:21–24, 2001.
- [71] A. K. Grünwald. Über "begrenzte" Derivationen und deren Anwendung. *Z. Angew. Math. Phys.*, 12:441–480, 1867.
- [72] C. T. Haba, M. Martos, G. Ablart, and P. Bidan. Composants Électroniques à Impédance Fractionnaire. In *Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*, pages 99–109. ESAIM: Proceedings, December 1998.
- [73] T. T. Hartley and C. F. Lorenzo. Fractional system identification: an application using continuous order-distribution. TM 1999-209640, NASA, NASA Center for Aerospace Information, 7121 Stadard Drive, Hanover, MD 21076, USA, Nov. 1999.
- [74] T. T. Hartley and C. F. Lorenzo. Dynamics and Control of Initialized Fractional-Order Systems. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4):201–233, July 2002.
- [75] S. Haykin. *Kalman Filtering and Neural Networks*. John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [76] D. Heleschewitz and D. Matignon. Diffusive realisations of fractional integrodifferential operators: structural analysis under approximation. Internet, <http://www-sig.enst.fr/~matignon>.
- [77] R. Hilfer, editor. *Application of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, 2000.

- [78] R. Hotzel and M. Fliess. On Linear Systems with a Fractional Derivation: Introductory Theory and Examples. *Mathematics and Computers in Simulation*, 45:385–395, 1998.
- [79] Y.R.L. Jayawickrama and S. Rajakaruna. In *Proceedings of InternaUonal Conference on Power System Technology - POWERCON 2004, Singapor, 21-24 November 2004*, pages 232 – 237, 2004.
- [80] Wang Jifeng and Li Yuankai. Frequency domain analysis and applications for fractional-order control systems. *Journal of Physics: Conference Series*, 13:268–273, 2005.
- [81] W. B. Jones, W. J. Thron, and H. Waadeland (Ed.). *Analytic Theory of Continued Fractions*. Lecture Notes in Mathematics. Springer–Verlag, Singapore, 1982.
- [82] S. Julier and J. Uhlmann. A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions. Technical report, RRG, Dept. of Engineering Science, University of Oxford, Nov 1996. <http://citeseer.ist.psu.edu/julier96general.html>.
- [83] S.C. Jun. A note on fractional differences based on a linear combination between forward and backward differences. *Computers and Mathematics with Applications*, 41:373–378, 2001.
- [84] T. Kaczorek. *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1998.
- [85] T. Kaczorek. *Teoria Sterowania i Systemów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.
- [86] T. Kaczorek. Reachability and controllability to zero of positive fractional discrete-time systems. *Machine Intelligence and Robotic Control*, 6(4), 2007.
- [87] T. Kaczorek, A. Dzieliński, W. Dąbrowski, and R. Łopatka. *Teoria Sterowania i Systemów*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2005.
- [88] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*, 82(Series D):35–45, 1960.
- [89] S. Kempfle, I. Schäfer, and H. Beyer. Fractional Calculus via Functional Calculus: Theory and Applications. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4):99–127, July 2002.

- [90] V. Kiryakova. *Generalized fractional calculus and applications*, volume 301 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific and Technical (Ed), Essex, January 1994.
- [91] M. Klimek. Fractional mechanics - a noncommutative approach. In *Proceedings of 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, IFAC FDA'06*, pages 198–203. Porto, Portugal, 19-21 July, 2006.
- [92] R. C. Koeller. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 51:299–307, 1984.
- [93] S. Ladaci and A. Charef. On fractional adaptive control. *Nonlinear Dynamics*, 43:365–378, 2006.
- [94] F. Lavernhe and J. Solhusvik. Fractional Noises: Diffusive Model for CCD Imager Band-Pass Adquisition Chain. In *Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*, pages 119–130. ESAIM: Proceedings, December 1998.
- [95] L. Lay, A. Oustaloup, J. C. Trigeassou, and F. Levron. Frequency domain identification by non integer model. In *Preprints of the IFAC Conference on System Structure and Control*, number 2, pages 297–302, Nantes, France, 1998.
- [96] J. Liouville. Mémoire sur quelques quéstions de géometrie et de mécanique, et sur un nouveau genre pour résoudre ces quéstions. *J. École Polytech.*, 13:1–69, 1832.
- [97] J. J. Loiseau and H. Mounier. Stabilisation de L'équation de la Chaleur Commandée en Flux. In *Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*, pages 131–144. ESAIM: Proceedings, December 1998.
- [98] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley. Initialization, conceptualization, and application in the generalized fractional calculus. TM 1998-208415, NASA, NASA Center for Aerospace Information, 7121 Stadard Drive, Hanover, MD 21076, USA, Dec. 1998.
- [99] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley. Initialized fractional calculus. *Int. J. of Applied Mathematics*, 3(3):249–265, 2000.
- [100] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley. r -function relationships for application in the fractional calculus. TM 2000-210361, NASA, NASA Center for Aerospace Information, 7121 Stadard Drive, Hanover, MD 21076, USA, Aug. 2000.

- [101] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley. Variable Order and Distributed Order Fractional Operators. *Carl F. Lorenzo and T*, 29(1-4):57–98, July 2002.
- [102] C. H. Lubich. Discretized fractional calculus. *SIAM J. Math. Anal.*, 17(3):704–719, May 1986.
- [103] L. L. Ludovic, A. Oustaloup, J. C. Trigeassou, and F. Levron. Frequency identification by non integer model. In *Proc. of IFAC Symposium on System Structure and Control*, pages 297–302, Nantes, France, July 1998.
- [104] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Trans. Military Electronics*, MIL-8(2):74–80, April 1964.
- [105] J. A. Tenreiro Machado. *Nonlinear Dynamics, Especial Issue of Fractional Order Calculus and Its Applications*, volume 29. Kluwer Academic Publishers, July 2002.
- [106] J.A. Tenreiro Machado. Analysis and design of fractional-order digital control systems. *SAMS-Journal Systems Analysis, Modelling, Simulation*, 27:107–122, 1997.
- [107] F. Mainardi. The Laplace transforms for the Mittag-Leffler function. In A. Carpinteri and F. Mainardi, editors, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Viena-New York, 1997. Springer-Verlag.
- [108] Shunji Manabe. A Suggestion of Fractional-Order Controller for Flexible Spacecraft Attitude Control. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4):251–268, July 2002.
- [109] J.-N. Marie-Francoise, H. Gualous, and A. Berthon. Supercapacitor thermal- and electrical-behaviour modelling using ann. *IEE Proc.-Electr. Power Appl.*, 153(2):255–262, 2006.
- [110] MathWorks. *Simulink, Writing S-Function*, Version 5.
- [111] D. Matignon. Stability properties for generalized fractional differential systems. In *ESA-IM: Proceedings, Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*, volume 5, pages 145–158, 1998.
- [112] D. Matignon, J. Audounet, and G. Montseny. Energy decay for wave equations with damping of fractional order. In *Forth International Conference on Mathematical and*

Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena, Golden, Colorado, USA, 1998.
SIAM.

- [113] D. Matignon and B. D'Andréa-Novel. Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. In *Computational Engineering in Systems Applications*, volume 2, pages 952–956. IMACS, IEEE-SMC, 1996.
- [114] D. Matignon and B. D'Andréa-Novel. Observer-based controllers for fractional differential systems. In *Conference on Decision and Control*, pages 4967–4972. IEEE-CSS, SIAM, 1997.
- [115] A. Le Méhauté. *Fractal Geometries: Theory and Applications*. Penton Press, 1991.
- [116] R. Metzler, W. Schick, H-G. Kilian, and T. F. Nonnenmacher. Relaxation in filled polymers: A fractional calculus approach. *J. Chem. Phys.*, 103(16):7180–7186, 1995.
- [117] J. Mikusiński. *Operational calculus / Vol. 1*. Polish Scientific Publ., Warszawa, 1983.
- [118] J. Mikusiński and T. K. Boehme. *Operational calculus / Vol. 2*. Polish Scientific Publ., Warszawa, 1987.
- [119] K.S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [120] G. M. Mittag-Leffler. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 137:554–558, 1903.
- [121] G. M. Mittag-Leffler. Spora la funzione $E_\alpha(x)$. *Rend. Acc. Lincei, ser. 5*, 13:3–5, 1904.
- [122] F. J. Molz, G. J. Fix, and Silong Lu. A Physical Interpretation for the Fractional Derivative in Levy Diffusion. *Applied Mathematics Letters*, 15:907–911, 2002.
- [123] C. A. Monje, A. J. Calderón, B. M. Vinagre, and V. Feliu. PI vs Fractional DI Control: First Results. In *Control 2002: 5th Portuguese Conference on Automatic Control*, pages 359–364, September 2002.
- [124] G. Montseny, J. Audouinet, and B. Mbodje. Optimal models of fractional integrators and applications to systems with fading memory. In *Proceedings of the Conference IEEE Systems, Man and Cybernetics*, Le Touquet, France, 1998.

- [125] Ö. Morgül. Control and stabilization of a rotating flexible structure. *Automatica*, 30(2):351–356, 1994.
- [126] M. Moshrefi-Torbati and K. Hammond. Physical and geometrical interpretation of fractional operators. *Journal of the Franklin Institute*, 335B(6):1077–1086, August 1998.
- [127] M. Nakagawa and K. Sorimachi. Basic characteristics of a fractance device. *IEICE Trans. Fundamentals*, (12):1814–1819, 1992.
- [128] K. Nishimoto. *Fractional Calculus*. Decartes Press, Koriyama, 1984.
- [129] K. B. Oldham. Semiintegral electroanalysis: Analog implementation. *Analytical Chemistry*, 45(1):39–47, 1973.
- [130] K. B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus*. Academic Press, 1974.
- [131] M. D. Ortigueira. Introduction to fractional linear systems I: Continuous-time case. *IEE Proceedings on Vision, Image and Signal Processing*, 147(1), 2000.
- [132] M. D. Ortigueira. Introduction to fractional linear systems II: Discrete-time case. *IEE Proceedings on Vision, Image and Signal Processing*, 147(1), 2000.
- [133] M. D. Ortigueira. Introduction to fractional linear systems: Interconversions. In *Proceedings of the 5th Iberoamerican Symposium on Pattern Recognition*, pages 729–739, Lisbon, Portugal, 2000. APRP.
- [134] M. D. Ortigueira and C. J. C. Matos. An introduction to the fractional linear prediction. In *Proceedings of the 5th Iberoamerican Symposium on Pattern Recognition*, pages 741–748, Lisbon, Portugal, 2000. APRP.
- [135] Manuel D. Ortigueira, Carlos J. C. Matos, and Moisés S. Piedade. Fractional Discrete-Time Signal Processing: Scale Conversion and Linear Prediction. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4):173–190, July 2002.
- [136] P. Ostalczyk. The non-integer difference of the discrete-time function and its application to the control system synthesis. *International Journal of Systems Science*, 31(12):1551–1561, December 2000.

- [137] P. Ostalczyk. Fractional-Order Backward Difference Equivalent Forms Part I - Horner's Form. In *Proceedings of 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, ENSEIRB, Bordeaux, France, 2004. FDA'04.
- [138] P. Ostalczyk. Fractional-Order Backward Difference Equivalent Forms Part II - Polynomial Form. In *Proceedings of 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, ENSEIRB, Bordeaux, France, 2004. FDA'04.
- [139] P. Ostalczyk and T. Rybicki. Variable-Fractional Order Dead-Beat Control of an Electromagnetic Servo — Part II. In *Proceedings of 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, IFAC FDA'06*, pages 164–169. Porto, Portugal, 19-21 July, 2006.
- [140] Piotr Ostalczyk. Fundamental properties of the fractional-order discrete-time integrator. *Signal Processing*, 83(11):2367–2376, 2003.
- [141] A. Oustaloup. Fractional order sinusoidal oscillators: Optimization and their use in highly linear FM modulators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 28(10):1007–1009, 1981.
- [142] A. Oustaloup. Nouveau système de suspension: La suspension CRONE. *INPI Patent 90 046 13*, 1990.
- [143] A. Oustaloup. *La commande CRONE*. Edition Hermès, Paris, 1991.
- [144] A. Oustaloup. *Commande CRONE*. Hermés, Paris, 1993.
- [145] A. Oustaloup. The crone control of resonant plants: Application to a flexible transmission. *European Journal of Control*, 1:113–121, 1995.
- [146] A. Oustaloup. *La dérivation non entière*. Hermés, Paris, 1995.
- [147] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, and F. M. Nanot. Frequency-band complex noninteger differentiator: Characterization and synthesis. *IEEE Trans. on C & S, I: Fundamental Theory and Applications*, 47(1):25–39, 2000.
- [148] A. Oustaloup and B. Mathieu. *La commande CRONE : du scalaire au multivariable*. HERMES, Paris, 1999.

- [149] A. Oustaloup, J. Sabatier, and P. Lanusse. From fractal robustness to CRONE control. *Fractionnal Calculus and applied Analysis*, 2(1):1–30, 1999.
- [150] A. Oustaloup, J. Sabatier, and X. Moreau. From fractal robustness to the CRONE approach. *ESAIM: Proceedings on Fractional Differential Systems, Models, Methods and Applications*, 5(1998):177–192, 1998.
- [151] Panasonic. *Electric Double Layer Capacitor(Gold Capacitor), Series SD, Reliability Data(5.5V 0.22F)*, 2005. <http://industrial.panasonic.com/www-data/pdf/ABC0000/ABC0000PE12.pdf>.
- [152] Panasonic. *Electric Double Layer Capacitor(Gold Capacitor), Series SD, Catalog*, 2006. <http://industrial.panasonic.com/www-data/pdf/ABC0000/ABC0000CE1.pdf>.
- [153] I. Petráš. *Fractional Calculus in Control*. PhD thesis, Technical University of Kosice (Slovak Republic), 1999.
- [154] I. Petráš. The fractional-order controllers: Methods for their synthesis and application. *Journal of Electrical Engineering*, 50(9-10):284–288, 1999.
- [155] I. Petráš, L. Dorčák, and I. Koštial. Methods for application of fractional-order controllers. *AT and P Journal (in Slovak)*, 4:59–60, 1998.
- [156] I. Petráš, L. Dorčák, and I. Koštial. The modelling and analysis of fractional-order control systems in discrete domain. In *Proceedings of ICCC'2000*, pages 257–260, High Tatras, Slovak Republic, May 23-26 2000.
- [157] I. Petráš, L. Dorčák, P. O’Leary, B. M. Vinagre, and I. Podlubny. The modelling and analysis of fractional-order control systems in frequency domain. In *Proceedings of ICCC'2000*, pages 261–264, High Tatras, Slovak Republic, May 23-26 2000.
- [158] I. Petráš, L. Dorčák, P. O’Leary, B. M. Vinagre, and I. Podlubny. The modelling and analysis of fractional-order regulated systems in the state space. In *Proceedings of ICCC'2000*, pages 185–188, High Tatras, Slovak Republic, May 23-26 2000.
- [159] I. Podlubny. Numerical methods of the fractional calculus. *Transactions of the Technical University of Kosice*, 4(3-4):200–208, 1994.

- [160] I. Podlubny. Numerical solution of initial value problems for ordinary fractional-order differential equations. In W. F. Ames, editor, *Proceedings of the 14th World Congress on Computation and Applied Mathematics*, pages 107–111, Atlanta, Georgia, USA, July 1994. Late Papers volume.
- [161] I. Podlubny. Numerical solution of ordinary fractional differential equations by the fractional difference method. In G. Ladas S. Elaydi, I. Gyori, editor, *Advances in Difference Equations*, pages 507–516, Amsterdam, June 1997.
- [162] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1999.
- [163] I. Podlubny. Matrix approach to discrete fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 3(4):359–386, 2000.
- [164] I. Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 5(4):367–386, 2002.
- [165] I. Podlubny, L. Dorčák, and I. Koštial. On fractional derivatives, fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ -controllers. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4985–4990., San Diego, December 1997.
- [166] I. Podlubny, L. Dorčák, and J. Misanek. Application of fractional - order derivatives to calculation of heat load intensity change in blast furnace walls. *Transactions of Tech. Univ. of Kosice*, 5(5):137–144, 1995.
- [167] I. Podlubny and Ahmed M. A. El-Sayed. On two definitions of fractional derivatives. Technical Report UEF-03-96, Slovak Academy of Sciences. Institute of Experimental Physics, Department of Contrlo Engineering. Faculty of Mining, University of Tecnology. Kosice, 1996.
- [168] I. Podlubny and J. Misanek. The use of fractional derivatives for modelling the motion of a large thin plate in a viscous fluid. In *Proceedings of the 9th Conference on Process Control*, pages 274–278, STU Bratislava, May 1993. Tatranské Matliare.
- [169] T. Poinot and J.C. Trigeassou. Modelling and simulation of fractional systems using a non integer integrator. In *Proceedings of DETC.03 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, Illinois, USA, sep 2003. ASME 2003.

- [170] T. Poinot and J.C. Trigeassou. Identification of fractional systems using an output-error technique. *Nonlinear Dynamics*, 38:133–154, 2004.
- [171] J. J. Quintana, A. Ramos, and I. Nuez. Identification of the fractional impedance of ultracapacitors. In *Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*. IFAC FDA'06, Porto, Portugal, 19-21 July, 2006.
- [172] C. Ramus-Serment, X. Moreau, M. Nouillant, A. Oustaloup, and F. Levron. Generalised Approach on Fractional Response of Fractal Networks. *Chaos, Solutions and Fractals*, 14:479–488, 2002.
- [173] H.F. Raynaud and A. ZergaInoh. State-space representation for fractional order controllers. *Automatica*, 36:1017–1021, 2000.
- [174] M.E. Reyes-Melo, J.J. Martinez-Vega, C.A. Guerrero-Salazar, and U. Ortiz-Mendez. Application of fractional calculus to modelling of relaxation phenomena of organic dielectric materials. In *Proceedings of International Conference on Solid Dielectrics*, Toulouse, France, 2004.
- [175] M.E. Reyes-Melo, J.J. Martinez-Vega, C.A. Guerrero-Salazar, and U. Ortiz-Mendez. Modelling of relaxation phenomena in organic dielectric materials. application of differential and integral operators of fractional order. *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*, 6(3):1037–1043, September 2004.
- [176] F. Riewe. Nonconservative lagrangian and hamiltonian mechanics. *Physical Review E*, 53(2):1890–1899, 1996.
- [177] F. Riewe. Mechanics with fractional derivatives. *Physical Review E*, 55(3):3581–3592, 1997.
- [178] D. Riu, N. Retiére, and M. Ivanés. Turbine generator modeling by non-integer order systems. In *Proceedings of IEEE International Electric Machines and Drives Conference*, Cambridge , Massachussets (USA), 2001. IEEE IEMDC 2001.
- [179] B. Ross. A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus. In Bertrand Ross, editor, *Fractional Calculus*, number 457 in Lecture Notes in Mathematics, pages 1–36, Boston, March 1974. Springer-Verlag.

- [180] B. Ross. Fractional calculus and its applications. In *International Conference on Fractional Calculus and Its Applications*, 1975.
- [181] A. Rufer and P. Barrade. A supercapacitor-based energy-storage system for elevators with soft commutated interface. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 38(5):1151 – 1159, 2002.
- [182] T. Rybicki. *Wykorzystanie różniczki niecałkowitego rzędu do projektowania układu odpornego na zmiany parametów*. PhD thesis, Politechnika Łódzka, Wydział Elektrotechniki i Elektroniki, 2003.
- [183] T. Rybicki and P. Ostalczyk. Variable-Fractional Order Dead-Beat Control of an Electromagnetic Servo — Part I. In *Proceedings of 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, IFAC FDA'06*, pages 158–163. Porto, Portugal, 19-21 July, 2006.
- [184] H. Beyer S. Kempfle. Global and causal solutions of fractional linear differential equations. In *Proc. 2nd International Workshop Transform Methods and Special Functions*, pages 210–226, Varna, August 1996.
- [185] J. Sabatier, O. P. Agrawal, and J. A. Tenreiro Machado. *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Springer, 2007.
- [186] J. Sabatier, A. Garcia Iturricha, A. Oustaloup, and F. Levron. Third generation CRONE control of continuous linear time periodic systems. In *Proc. of the IFAC Conference on System Structure and Control*, Nantes, France, July 1998.
- [187] A. I. Saichev and G. M. Zaslavsky. Fractional kinetic equations: solutions and applications. *Chaos*, 7(4):753–764, 1997.
- [188] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivative. Theory and Applications*. Gordon & Breach Sci. Publishers, 1987.
- [189] H. Schiessel, R. Metzler, A. Blumen, and T. F. Nonnenmacher. Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions. *J. Physics A: Math. Gen.*, 28:6567–6584, 1995.

- [190] J. Schutter, J. Geeter, T. Lefebvre, and H. Bruynickx. Kalman filters: A tutorial. October 1999. <http://citeseer.ist.psu.edu/443226.html>.
- [191] D. Sierociuk. *Fractional Order Discrete State-Space System Simulink Toolkit User Guide*, 2005. <http://www.ee.pw.edu.pl/~dsieroci/fsst/fsst.htm>.
- [192] D. Sierociuk. Użycie ułamkowego filtru kalmana do estymacji parametrów układu ułamkowego rzędu. In *XV Krajowa Konferencja Automatyki*, Warszawa, Polska, 2005.
- [193] D. Sierociuk and A. Dzieliński. Fractional Kalman Filter algorithm for states, parameters and order of fractional system estimation. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 16(1):101–112, 2006.
- [194] M. Sjöberg and L. Kari. Non-linear behavior of a rubber isolator system using fractional derivatives. *Vehicle System Dynamics*, 37(3):217 – 236, March 2002.
- [195] S. B. Skaar, A. N. Michel, and R. K. Miller. Stability of viscoelastic control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(4):348–357, April 1988.
- [196] M. Soula and Y. Chevalier. La Dérivée Fractionnaire en Rhéologie des Polyères- Application aux Comportements Élastiques et Visco-Élastiques Linéaires et Non Linéaires des Élastomères. In *Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*, pages 193–204. ESAIM: Proceedings, December 1998.
- [197] M. Stiassnie. On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models. *Applied Mathematical Modelling*, 3:300–302, 1979.
- [198] J.I. Suarez, B. M. Vinagre, and Y. Q. Chen. Spatial path tracking of an autonomous industrial vehicle using fractional order controllers. In *Proceedings of the 11th International Conference on Advanced Robotics*. ICAR 2003, 2003.
- [199] J.P.F. Sum, C.S. Leung, and L.W. Chan. Extended kalman filter in recurrent neural network training and pruning. Technical report, Department of Computer Science and Engineering, The Chinese University of Hong Kong, 1996. CS-TR-96-05.
- [200] T. Söderström and P. Stoica. *Identyfikacja systemów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1997.

- [201] P. J. Torvik and R. L. Bagley. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. *Transactions of the ASME*, 51(4):294–298, June 1984.
- [202] Chien-Cheng Tseng, Soo-Chang Pei, and Shih-Chang Hsia. Computation of Fractional Derivatives using Fourier Transform and Digital FIR Differentiator. *Signal Processing*, 80:151–159, 2000.
- [203] A. P. Tzes and S. Yorkovich. A frequency domain identification scheme for flexible structure control. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, 112, 1990.
- [204] D. Trigiante V. Lakshmikantham. *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications*. Academic Press, 1988.
- [205] D. Valerio and J. Sá da Costa. Time-domain implementation of non-integer order controllers. In *Controlo 2002: 5th Portuguese Conference on Automatic control*, pages 353–358, September 2002.
- [206] B. M. Vinagre, V. Feliú, and J. J. Feliú. Frequency domain identification of a flexible structure with piezoelectric actuators using irrational transfer function models. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1278–1280, Tampa, Florida, USA, December 1998.
- [207] B. M. Vinagre, I. Petráš, I. Podlubny, and Y. Q. Chen. Using Fractional Order Adjustment Rules and Fractional Order Reference Models in Model-Reference Adaptative Control. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4):269–279, July 2002.
- [208] B. M. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernandez, and V. Feliu. Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 3(3):231–248, 2000.
- [209] B.M. Vinagre. *Modelado y Control de Sistemas Dinámicos caracterizados por Ecuaciones Integro-Diferenciales de Orden Fraccional*. PhD thesis, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2001.
- [210] B.M. Vinagre and V. Feliu. Modeling and control of dynamic system using fractional calculus: Application to electrochemical processes and flexible structures. In *Proceedings of 41st IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, dec 2002.

- [211] B.M. Vinagre, C.A. Monje, and A.J. Calderón. Fractional order systems and fractional order control actions. In *Lecture 3 of the IEEE CDC02 TW#2: Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics*, 2002.
- [212] B.M. Vinagre, I. Podlubny, L. Dorčák, and V. Feliu. On fractional PID controllers: a frequency domain approach. In *IFAC Workshop on Digital Control*, volume in press, pages 53–58, Terrassa, Spain, April 2000.
- [213] J. C. Wang. Realizations of generalized warburg impedance with rc ladder networks and transmission lines. *J. Elect. Soc.: Elect. Science and Technology*, pages 1915–1920, 1987.
- [214] B. West, M. Bologna, and P. Grigolini. *Physics of Fractal Operators*. Springer-Verlag, 2003.
- [215] S. Westerlund. Dead matter has memory. *Physics Letters A (Preprint PLA10334)*, 43:174–179, 1991.
- [216] S. Westerlund and L. Ekstam. Capacitor theory. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 1, 1994.
- [217] G. Wight. On-road and dynamometer testing of a capacitor-equipped electric vehicle. *EVS19*, (10), 2002. http://www.nesscap.com/data_nesscap/EVS19SuperCapPaper_Evermont.pdf.
- [218] R. Gorenflo Y. Luchko. The initial value problem for some fractional differential equations with the caputo derivatives. Preprint A8-98, Freie Universität Berlin, Dept. of Mathematics and Computer Science, 1998.
- [219] B. S. Yago Sánchez. *Fractional-PID control for active reduction of vertical tail buffeting*. PhD thesis, Saint Louise University, 1999.
- [220] V. Zaborovsky and R. Meylanov. Informational network traffic model based on fractional calculus. In *Proceedings of the International Conference on Info-tech and Info-net*, Beijing, 2001. ICII 2001.
- [221] P. Zavada. Operator of fractional derivative in the complex plane. *Commun. Math. Phys.*, 192(2):261–285, 1998.

[222] G. Zorpette. Super charged. *IEEE Spectrum*, 42(1):32–37, 2005.