

5. Pasywne i aktywne układy formowania sygnałów elektrycznych

Wprowadzenie

W niniejszym wykładzie będą zaprezentowane podstawowe rodzaje filtrów stosowanych w układach elektronicznych. Omówione zostaną właściwości prostych filtry pasywne typu RC, RL i RLC oraz niektórych rodzajów filtrów aktywnych, które w swojej strukturze zawierają wzmacniacze operacyjne.

Podstawowym zadaniem filtrów jest wytłumienie, z punktu widzenia zastosowania danego układu elektronicznego, niepożądanych częstotliwości występujących w sygnale sterującym.

Układy filtrów dzieli się, przyjmując odpowiednie kryteria, na różne grupy. Jednym z najistotniejszych jest podział ze względu na pasmo częstotliwości, które jest tłumione przez filtr. Wyróżnia się tu filtry:

- dolnoprzepustowe,
- górnoprzepustowe,
- pasmowoprzepustowe, w tym szerokopasmowe i wąskopasmowe (selektywne)
- pasmowozaporowe, które tłumią sygnały w określonym paśmie częstotliwości.

Inne kryteria jakie bierze się pod uwagę w klasyfikacji filtrów to np. kształt charakterystyk częstotliwościowych: amplitudowej i fazowej, rodzaj zastosowanych elementów, technologia wykonania.

Ważną cechą filtru jest jego rząd. Stosuje się filtry I, II i wyższych rzędów. Im wyższy rząd filtru tym bardziej strome zbocza na krańcach pasma przenoszenia i tym bardziej idealna (prostokątna) charakterystyka częstotliwościowa (amplitudowa).

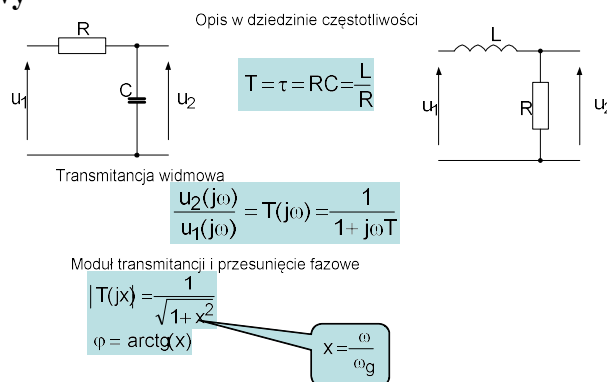
Ważnym kryterium podziału filtrów wynika z rodzaju sygnałów jakie są przetwarzane. Wyróżnia się tu filtry analogowe, które są przedmiotem niniejszego wykładu i filtry cyfrowe.

Układy pasywne

Filtry pasywne to układy, które w swojej strukturze zawierają elementy pasywne: rezystory, kondensatory i dławiki indukcyjne. Zaletą takich układów jest to, że mogą przenosić duże moce, a zatem mogą być stosowane w urządzeniach energoelektronicznych (np. w układach prostowników, falowników, itp.). ponadto mają prostą konstrukcję i nie wymagają dodatkowych źródeł zasilania.

W technice sygnałowej dla wielkich częstotliwości wymiary geometryczne oraz indukcyjności dławików są bardzo małe i dlatego często w tej sytuacji wykorzystuje się do konstrukcji filtru istniejące w układzie rzeczywistym indukcyjności montażowe.

Filtr dolnoprzepustowy



Rys. 5.1. Filtr pasywny dolnoprzepustowy

Dwie wersje filtru RC i RL przedstawiono na Rys. 5.1. Właściwości obu układów w dziedzinie częstotliwości i czasu są identyczne.

Opis w dziedzinie częstotliwości

W filtrze RC iloczyn RC, a w filtrze RL iloraz L/R jest równy $\tau = T$.

Stałą τ nazywa się stałą czasową obwodu RC lub RL.

Transmitancję widmową filtru można opisać zależnością:

$$\frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \quad 5.1$$

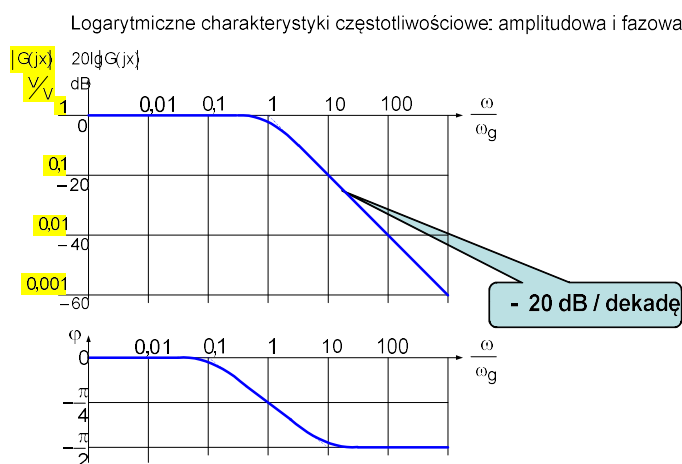
Moduł transmitancji widmowej i faza sygnału wyjściowego względem wejściowego po znormalizowaniu pulsacji przebiegu względem pulsacji granicznej ω_g jest równy:

$$|T(jx)| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 \omega_g^2 T^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad 5.2$$

$$\varphi = \arctg(x\omega_g T) = \arctgx \quad 5.3$$

gdzie:

$$x = \frac{\omega}{\omega_g} \quad (0 < x < \infty) \quad 5.4$$



Rys. 5.2. Charakterystyki częstotliwościowe filtra dolnoprzepustowego

Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe modułu (amplitudową) i przesunięcia fazowego (fazową) przedstawiono na rys. 5.2. Pulsacja graniczna ω_g lub częstotliwość graniczna f_g filtru to taka wartość ω lub f , przy której moduł zmniejsza się w stosunku do tego jaki jest przy niskich częstotliwościach o 3dB, tzn. jest równy $\frac{1}{\sqrt{2}}$ wartości maksymalnej.

Z zależności 5.2 wynika, że

$$\omega_g = \frac{1}{T}, \text{ lub} \quad 5.5$$

$$f_g = \frac{1}{2\pi T} \quad 5.6$$

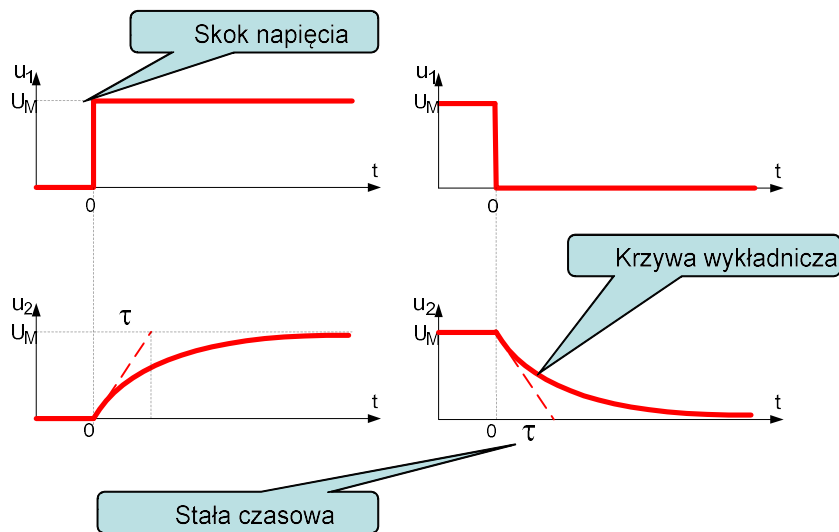
Przesunięcie fazowe dla tej częstotliwości jest równe $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Charakterystyka amplitudowa opada z prędkością 20 dB / dekadę.

Jeżeli wymagana jest większa prędkość opadania charakterystyki można połączyć kaskadowo n filtrów dolnoprzepustowych. Wypadkowa transmitancja widmowa będzie w tym wypadku równa iloczynowi transmitancji poszczególnych filtrów, a liczba n będzie mówiła o rzędzie filtru.

Opis w dziedzinie czasu

Opis w dziedzinie czasu



Rys. 5.3. Filtr dolnoprzepustowy opis w dziedzinie czasu

Opis w dziedzinie czasu polega na badaniu odpowiedzi układu na wymuszenie standardowe. Najczęściej stosuje się wymuszenie w postaci skoku jednostkowego. Na slajdzie przedstawiono odpowiedź układów RC i RL przy załączeniu i wyłączeniu napięcia wejściowego.

W przypadku złączenia napięcie wyjściowe zmienia się wykładniczo zgodnie z zależnością:

$$u_2(t) = U_M \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ a przy wyłączeniu} \quad 5.7$$

$$u_2(t) = U_M e^{-\frac{t}{\tau}} \quad 5.8$$

Wartości ustalone U_M przy załączeniu i 0 przy wyłączeniu są osiągnane asymptotycznie. Miarą czasu dojścia do stanu ustalonego jest stała czasowa τ . Często zakłada się, że po czasie 5τ jest już stan ustalony. W tym wypadku różnica pomiędzy wartością ustaloną i rzeczywistą stanowi mniej niż 1% wartości ustalonej.

Właściwości filtru dolnoprzepustowego

Jeżeli sygnał sterujący u_1 nie zawiera składowej stałej, a jego pulsacja spełnia warunek $\omega \gg \omega_g$ to filtr dolnoprzepustowy działa jak układ całkujący.

Jeżeli sygnał sterujący u_1 oprócz składowej przemiennej zawiera składową stałą,

$$u_1(t) = U_0 + u_p(t) \quad 5.9$$

filtr dolnoprzepustowy działa jak układ uśredniający

$$u_2 = \frac{1}{\tau} \int_0^t u_p(\delta) d\delta + U_0 \quad 5.10$$

Pierwszy składnik sumy reprezentuje tętnienia, a drugi składową stałą sygnału.

Jeżeli stała czasowa jest bardzo duża składnik reprezentujący tętnienia można pominąć i napięcie wyjściowe jest równe w tym wypadku składowej stałej.

Jedną z wielkości charakteryzujących filtr dolnoprzepustowy jest czas narastania t_r . Podaje on, w jakim czasie napięcie wyjściowe filtra wzrośnie od 10% do 90% wartości ustalonej po zadaniu na wejściu układu skoku jednostkowego.

$$t_r = t_{90\%} - t_{10\%} = \tau(\ln 0,9 - \ln 0,1) = \tau \ln 9 \approx 2,2\tau \quad 5.11$$

Jeżeli znana jest częstotliwość graniczna to czas t_r jest równy w przybliżeniu:

$$t_r \approx \frac{1}{3f_g} \quad 5.12$$

Związek ten obowiązuje także dla filtrów dolnoprzepustowych wyższych rzędów. Jeżeli czasy narastania poszczególnych filtrów składowych są różne to wypadkowy czas narastania jest średnią geometryczną poszczególnych czasów.

$$t_r \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n t_{ri}^2} \quad 5.13$$

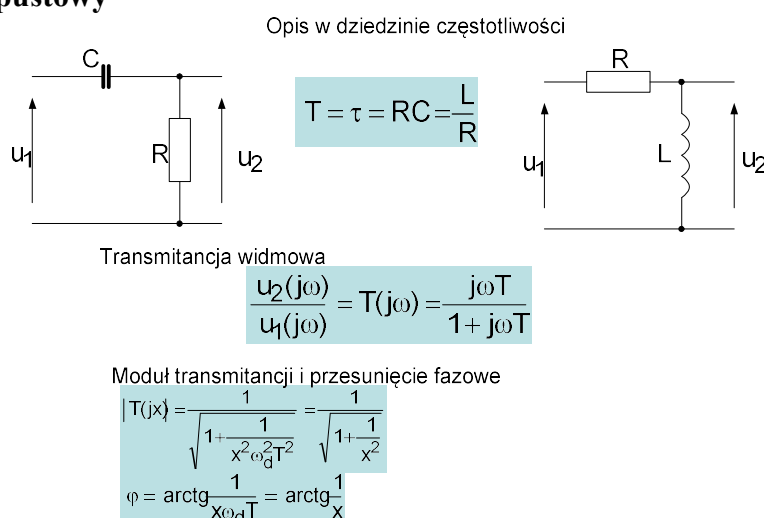
Częstotliwość graniczna takiego filtru jest równa

$$f_g \approx \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{gi}^2}}} \quad 5.14$$

Kiedy połączy się kaskadowo n jednakowych filtrów wypadkowa częstotliwość graniczna będzie równa:

$$f_g = \frac{f_{gi}}{n} \quad 5.15$$

Filtr górnoprzepustowy



Rys. 5.4. Pasywny filtr górnoprzepustowy

Opis w dziedzinie częstotliwości

Transmitancja widmowa układu ma postać:

$$\frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T} \quad 5.16$$

Moduł transmitancji widmowej i faza sygnału wyjściowego względem wejściowego po znormalizowaniu pulsacji przebiegu względem pulsacji granicznej ω_d jest równy:

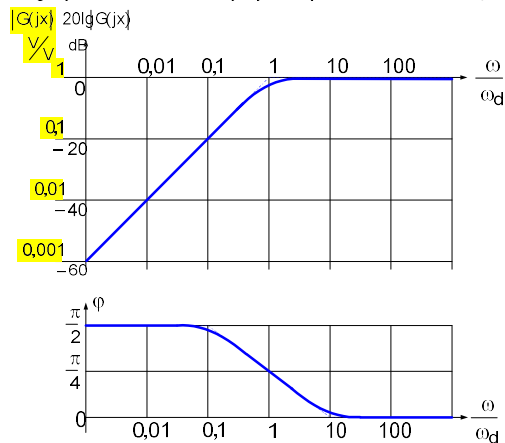
$$|T(jx)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2\omega_d^2 T^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \quad 5.17$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{x\omega_d T} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad 5.18$$

gdzie:

$$x = \frac{\omega}{\omega_d} \quad (0 < x < \infty) \quad 5.19$$

Logarymiczne charakterystyki częstotliwościowe; amplitudowa i fazowa



Rys. 5. 5. Charakterystyki częstotliwościowe

Logarymiczne charakterystyki częstotliwościowe przedstawiono na rys. 5.5.

Pulsacja i częstotliwość graniczna są równe:

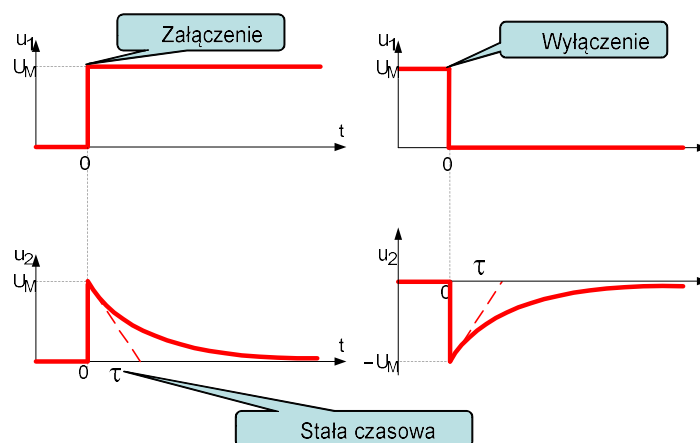
$$\omega_d = \frac{1}{T}$$

$$f_d = \frac{1}{2\pi T}$$

Przesunięcie fazowe przy tej częstotliwości jest równe $\frac{\pi}{4}$. Szybkość wznoszenia się charakterystyki 20 dB / dekadę.

Opis w dziedzinie czasu

Opis w dziedzinie czasu



Rys. 5. 6. Opis w dziedzinie czasu

Na Rys. 5.6. przedstawiono odpowiedź układów RC i RL przy załączeniu i wyłączeniu napięcia wejściowego.

W przypadku złączenia napięcie wyjściowe zmienia się wykładniczo zgodnie z zależnością:

$$u_2(t) = U_M e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ a przy wyłączeniu} \quad 5.20$$

$$u_2(t) = -U_M e^{-\frac{t}{\tau}} \quad 5.21$$

Podobnie jak w układzie filtra dolnoprzepustowego wartość ustalona $u_2 = 0$ V jest osiągana asymptotycznie. Miarą czasu dojścia do stanu ustalonego jest stała czasowa τ . Często zakładamy, że po czasie 5τ jest już stan ustalony. W tym wypadku różnica pomiędzy wartością ustaloną i rzeczywista stanowi mniej niż 1% wartości ustalonej.

Właściwości filtra górnoprzepustowego

Jeżeli na wejście jest zadany sygnał prostokątny o pulsacji $\omega \gg \omega_d$ to po czasie równym połowie okresu na wyjściu układu filtru nie będzie wartości ustalonej napięcia i przebieg będzie podobny do przebiegu sygnału wejściowego, ale nie będzie zawierał składowej stałej. Dlatego filtr górnoprzepustowy, a szczególnie układ RC jest stosowany jako układ sprzęgający (np. w sprzężeniach międzystopniowych wzmacniaczy m.cz.). Jeżeli sygnał wejściowy ma pulsację $\omega \ll \omega_d$ to można przyjąć, że $u_2 \ll u_1$. W tym wypadku układ ma właściwości różniczkujące.

$$u_2 = \tau \frac{du_1}{dt} \quad 5.22$$

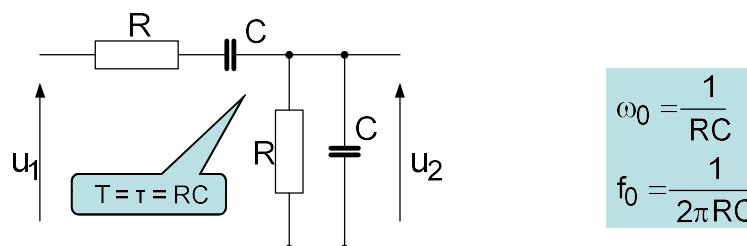
Częstotliwość graniczna filtra górnoprzepustowego n-tego rzędu jest równa:

$$f_d = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_{di}^2}, \quad 5.23$$

lub dla kaskadowego połączenia n identycznych filtrów I rzędu

$$f_d = f_{di} \sqrt{n} \quad 5.24$$

Filtr pasmowoprzepustowy RC



$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

Transmitancja widmowa

$$\frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + 3j\omega T - \omega^2 T^2}$$

Moduł transmitancji i przesunięcie fazowe

$$|T(jx)| = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{1}{x\omega_0 T} - x\omega_0 T\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{1}{x} - x\right)^2}}$$

$$\varphi = \arctg \frac{1 - x^2 \omega_0^2 T^2}{3x\omega_0 T} = \arctg \frac{1 - x^2}{3x}$$

Rys. 5.7. Pasywny filtr pasmowoprzepustowy

Łącząc kaskadowo filtr górnoprzepustowy i dolnoprzepustowy otrzymuje się filtr pasmowo-przepustowy. Przykład takiego filtra przedstawiono na rysunku. Transmitancja widmowa takiego układu jest równa:

$$\frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + 3j\omega T - \omega^2 T^2},$$

gdzie $T = \tau = RC$

Moduł transmitancji widmowej i faza sygnału wyjściowego względem wejściowego, po znormalizowaniu pulsacji przebiegu względem pulsacji rezonansowej ω_0 , jest równy:

$$|T(jx)| = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{1}{x\omega_0 T} - x\omega_0 T\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{1}{x} - x\right)^2}} \quad 5.25$$

$$\varphi = \arctg \frac{1 - x^2 \omega_0^2 T^2}{3x\omega_0 T} = \arctg \frac{1 - x^2}{3x} \quad 5.26$$

gdzie:

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

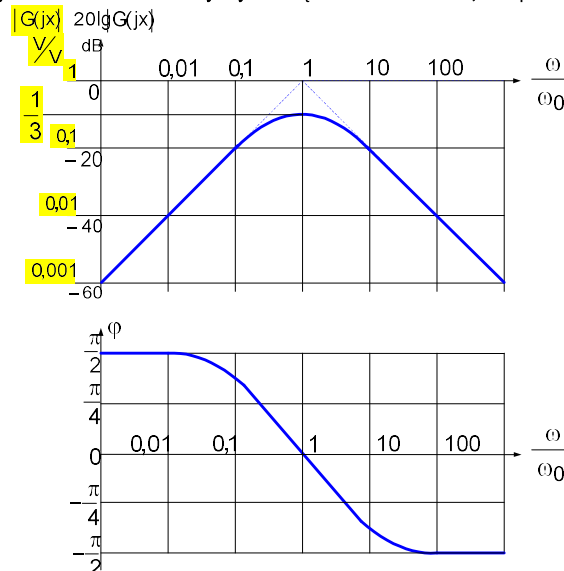
Pulsacja i częstotliwość rezonansowa są równe:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad 5.27$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

Logarymiczne charakterystyki amplitudowa i fazowa filtra pasmowo-przepustowego są przedstawione na Rys.5.8.

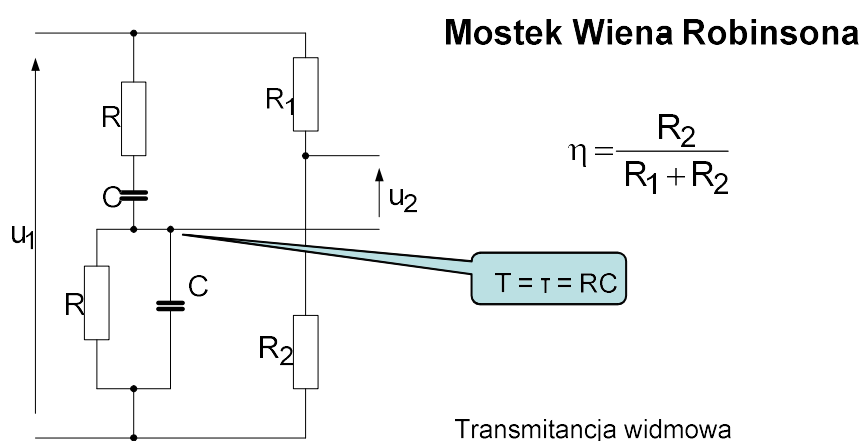
Logarymiczne charakterystyki częstotliwościowe; amplitudowa i fazowa



Rys.5.8. Charakterystyki częstotliwościowe filtra pasmowo-przepustowego

Dla częstotliwości rezonansowej moduł transmitancji jest największy i równy $\frac{1}{3}$, a przesunięcie fazowe jest równe zeru.

Filtr pasmowozaporowy z mostkiem Wiena –Robinsona



$$\frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = \frac{\eta(1 - \omega^2 T^2) + j\omega T(3\eta - 1)}{1 + 3j\omega T - \omega^2 T^2}$$

Rys. 5.9. Filtr pasmowozaporowy z mostkiem Wiena –Robinsona

W ogólnym wypadku transmitancja widmowa tego układu jest równa:

$$\frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = \frac{\eta(1 - \omega^2 T^2) + j\omega T(3\eta - 1)}{1 + 3j\omega T - \omega^2 T^2} \quad 5.28$$

$$\text{gdzie } T = \tau = RC \quad 5.29$$

$$\eta = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad 5.30$$

Przy założeniu, że współczynnik podziału dzielnika napięcia jest równy $\eta = \frac{1}{3}$

moduł transmitancji widmowej i faza sygnału wyjściowego względem wejściowego, po znormalizowaniu pulsacji przebiegu względem pulsacji rezonansowej ω_0 , jest równy:

$$|T(jx)| = \frac{|1 - x^2 \omega_0^2 T^2|}{3\sqrt{9x^2 \omega_0^2 T^2 + (1 - x^2 \omega_0^2 T^2)^2}} = \frac{|1 - x^2|}{3\sqrt{9x^2 + (1 - x^2)^2}} \quad 5.31$$

$$\varphi = \arctg \frac{3x\omega_0 T}{x^2 \omega_0^2 T^2 - 1} = \arctg \frac{3x}{x^2 - 1}, \quad x \neq 1 \quad 5.32$$

gdzie:

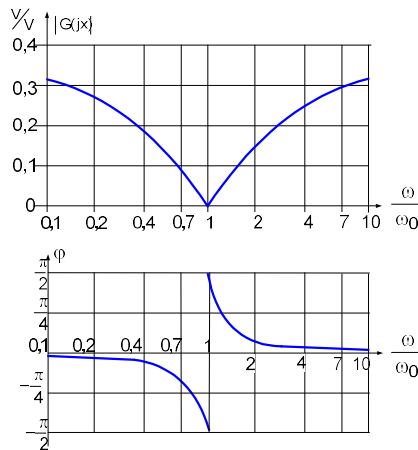
$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (0 < x < \infty) \quad 5.33$$

Pulsacja i częstotliwość rezonansowa są równe:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad 5.34$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

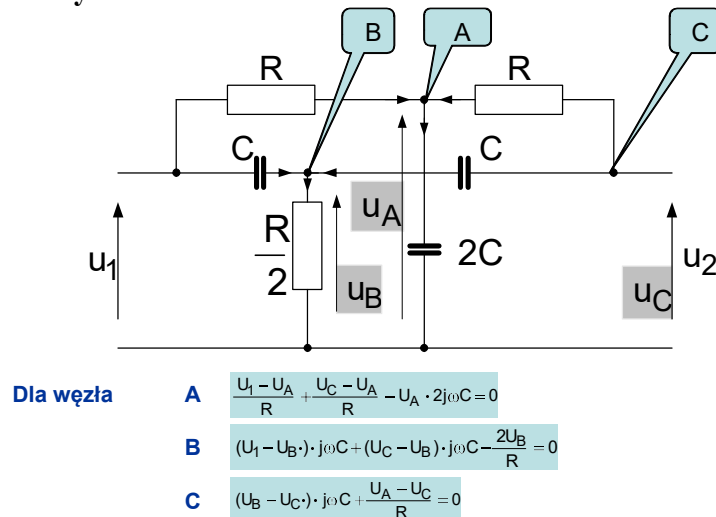
Charakterystyki amplitudowa i fazowa filtru pasmowozaporowego z mostkiem Wiena-Robinsona



Rys. 5. 10. Charakterystyki amplitudowa i fazowa filtru pasmowozaporowego z mostkiem Wiena-Robinsona

Charakterystyki amplitudowa i fazowa filtru pasmowozaporowego z mostkiem Wiena-Robinsona są przedstawione na rys. 5.10. Dla częstotliwości rezonansowej moduł amplitudy jest najmniejszy i równy zero, a faza jest nieokreślona.

Filtr pasmowozaporowy w układzie TT



Rys. 5.11. Filtr pasmowozaporowy w układzie TT

Charakterystyki częstotliwościowe można wyznaczyć stosując prawo Kirchhoffa dla węzłów A, B i C przy nieobciążonym układzie.

Dla węzła A jest

$$\frac{U_1 - U_A}{R} + \frac{U_C - U_A}{R} - U_A \cdot 2j\omega C = 0 \quad 5.35$$

Dla węzła B jest

$$(U_1 - U_B) \cdot j\omega C + (U_C - U_B) \cdot j\omega C - \frac{2U_B}{R} = 0 \quad 5.36$$

Dla węzła C jest

$$(U_B - U_C) \cdot j\omega C + \frac{U_A - U_C}{R} = 0 \quad 5.37$$

Eliminując z tego układu równań napięcia U_A i U_B oraz przyjmując, że $U_2 = U_C$ transmitancja widmowa układu jest opisana zależnością:

$$\frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 T^2}{1 + 4j\omega T - \omega^2 T^2} \quad 5.38$$

Moduł transmitancji widmowej i faza sygnału wyjściowego względem wejściowego, po znormalizowaniu pulsacji przebiegu względem pulsacji rezonansowej ω_0 , jest równy:

$$|T(jx)| = \frac{|1 - x^2 \omega_0^2 T^2|}{\sqrt{16x^2 \omega_0^2 T^2 + (1 - x^2 \omega_0^2 T^2)^2}} = \frac{|1 - x^2|}{\sqrt{16x^2 + (1 - x^2)^2}} \quad 5.39$$

$$\varphi = \arctg \frac{4x\omega_0 T}{x^2 \omega_0^2 T^2 - 1} = \arctg \frac{4x}{x^2 - 1}, \quad x \neq 1 \quad 5.40$$

gdzie:

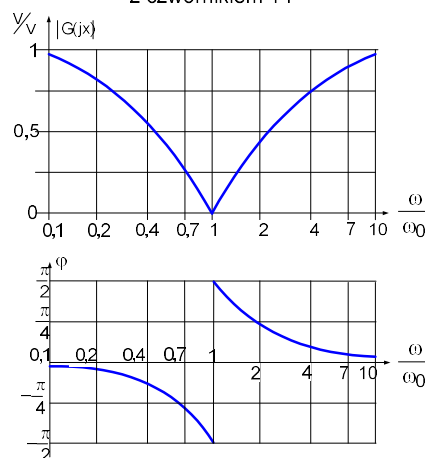
$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (0 < x < \infty) \quad 5.41$$

Pulsacja i częstotliwość rezonansowa są równe:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad 5.42$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

Charakterystyki amplitudowa i fazowa filtra pasmowozaporowego z czwórnikiem TT



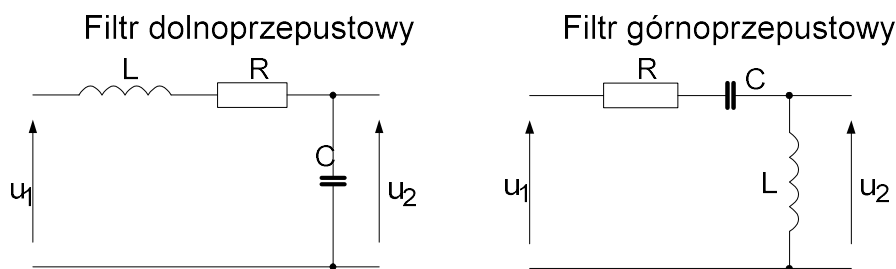
Rys. 5.12. Charakterystyki częstotliwościowe filtra pasmowo zaporowego TT

Charakterystyki amplitudowa i fazowa filtra pasmowozaporowego z układem TT są podobne do charakterystyk filtra z mostkiem Wiena-Robinsona. Dla częstotliwości rezonansowej moduł amplitudy jest najmniejszy i równy zero, a faza jest nieokreślona.

Filtry pasywne II rzędu zawierają w swojej strukturze elementy RLC, które w zależności od konfiguracji połączeń tworzą filtr:

- dolnoprzepustowy
- pasmowoprzepustowy
- zaporowy
- górnoprzepustowy

Tego typu filtry nazywamy filrami rezonansowymi.



Transmitancje widmowe

$$\frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

$$\frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = \frac{-\omega^2 LC}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

Rys. 5.13. Schematy ideowe filtru dolnoprzepustowego i filtru górnoprzepustowego II rzędu

Odpowiednie schematy ideowe filtru dolnoprzepustowego i filtru górnoprzepustowego przedstawiono na Rys. 5.13. Transmitancje widmowe tych filtrów są opisane zależnościami:

$$\text{filtr dolnoprzepustowy} \quad \frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} \quad 5.43$$

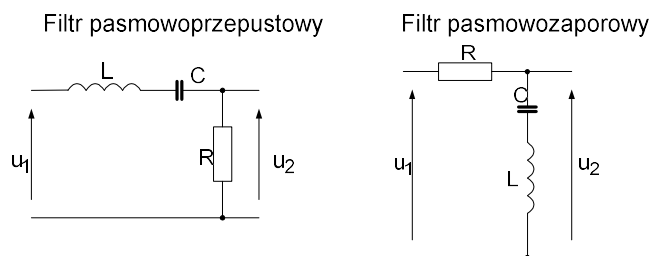
$$\text{filtr górnoprzepustowy} \quad \frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = \frac{-\omega^2 LC}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} \quad 5.44$$

Ponieważ w mianownikach obu wyrażeń operator $j\omega$ występuje w drugiej potęgze ($j\omega \cdot j\omega = -\omega^2$) mówimy, że filtry są II rzędu.

Znormalizowany moduł transmitancji widmowej są odpowiednio równe:

$$\text{filtr dolnoprzepustowy} \quad |T(jx)| = \frac{1}{\sqrt{x^2 \omega_g^2 R^2 C^2 + (1 - x^2 \omega_g^2 LC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2}}, \quad 5.55$$

$$\text{filtr górnoprzepustowy} \quad |T(jx)| = \frac{x^2 \omega_d^2 LC}{\sqrt{x^2 \omega_d^2 R^2 C^2 + (1 - x^2 \omega_d^2 LC)^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2}} \quad 5.56$$



Transmitancje widmowe

$$|T(jx)| = \frac{x \omega_g RC}{\sqrt{x^2 \omega_g^2 R^2 C^2 + (1 - x^2 \omega_g^2 LC)^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2}}$$

$$|T(jx)| = \frac{|1 - x^2 \omega_g LC|}{\sqrt{x^2 \omega_g^2 R^2 C^2 + (1 - x^2 \omega_g^2 LC)^2}} = \frac{|1 - x^2|}{\sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2}}$$

Rys.5.14. Schematy ideowe filtru zaporowego i filtru pasmowo przepustowego II rzędu

Odpowiednie schematy ideowe filtru zaporowego i filtru pasmowoprzepustowego przedstawiono na rys.5.14. W tym wypadku znormalizowany moduł transmitancji widmowej i przesunięcie fazowe są odpowiednio równe:

filtr pasmowoprzepustowy

$$|T(jx)| = \frac{x\omega_0 RC}{\sqrt{x^2\omega_0^2 R^2 C^2 + (1 - x^2\omega_0^2 LC)^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2}} \quad 5.57$$

filtr pasmowozaporowy

$$|T(jx)| = \frac{|1 - x^2\omega_0^2 LC|}{\sqrt{x^2\omega_0^2 R^2 C^2 + (1 - x^2\omega_0^2 LC)^2}} = \frac{|1 - x^2|}{\sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2}} \quad 5.58$$

Charakterystycznym parametrem filtrów pasmowych i rezonansowych jest pasmo przenoszenia B i dobroć filtru Q, definiowana jako:

$$Q = \frac{f_0}{B}, \text{ gdzie } f_0 \text{ częstotliwość rezonansowa lub częstotliwość środkowa filtru.}$$

Pasmo przenoszenia wyznacza się przyjmując, że na krańcach pasma, dla częstotliwości dolnej i częstotliwości górnej, moduł transmitancji widmowej różni się od wartości jaką ma przy częstotliwości środkowej lub rezonansowej o ± 3 dB.

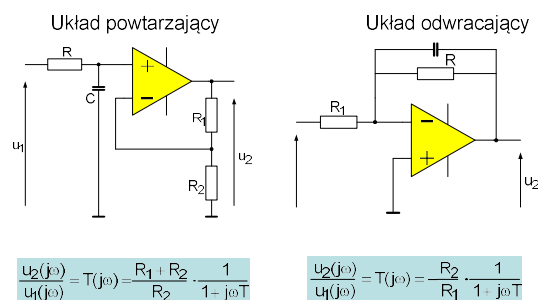
Filtry aktywne

W zakresie małych częstotliwości realizacja filtrów rezonansowych stwarza wiele trudności. Ponieważ wartości indukcyjności dławików w obwodach filtrów są duże, zatem ich wykonanie jest trudne, a to w efekcie prowadzi do tego, że ich właściwości elektryczne nie są zadowalające. Dlatego, aby uniknąć tej sytuacji do typowych układów pasywnych z elementami RC dołącza się dodatkowy element aktywny. Takie układy nazywa się filtrami aktywnymi. Tego typu układy, w których rolę elementu aktywnego obecnie najczęściej pełni wzmacniacz operacyjny, są produkowane także w postaci gotowych układów scalonych. Filtry aktywne są filtrami sygnałowymi. Celem ich stosowania jest wydzielenie z sygnału roboczego sygnału użytecznego przy jednoczesnym tłumieniu zakłóceń. Podobnie jak w układach pasywnych filtr aktywny jest opisany transmitancją widmowa, z której można wyznaczyć charakterystyki częstotliwościowe układu oraz odpowiednie pulsacje lub częstotliwości (graniczne: dolną i górną, środkową lub rezonansową) oraz dla filtrów pasmowych pasmo częstotliwości przepuszczanych lub tłumionych i dobroć filtru.

Cechy filtrów aktywnych

- możliwość wzmacniania sygnałów użytecznych
- możliwość realizacji filtrów selektywnych o częstotliwości środkowej (rezonansowej) rzędu 0,01 Hz i bardzo dużych dobrociach Q
- brak wpływu obciążenia na charakterystyki filtru
- łatwe i niezależne strojenie parametrów filtru (częstotliwość, wzmocnienie, dobroć)
- możliwość budowy filtrów uniwersalnych.

Filtry dolnoprzepustowe i górnoprzepustowe I rzędu



Rys. 5.15. Filtr dolnoprzepustowy I rzędu

Schemat filtrów dolnoprzepustowych przedstawiono na Rys. 5.15. Transmitancja widmowa układu powtarzającego ma postać

$$\frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega T}, \text{ gdzie } T = \tau = RC, \quad 5.59$$

a układu odwracającego

$$\frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega T}, \text{ gdzie } T = \tau = R_2 C \quad 5.60$$

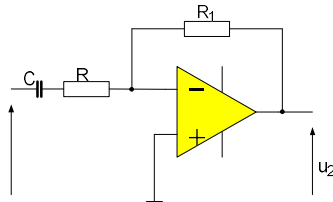
Pulsacja i częstotliwość graniczna są równe

$$\omega_g = \frac{1}{T} \quad 5.61$$

$$f_g = \frac{1}{2\pi T}$$

Charakterystyki częstotliwościowe są takie jak dla filtru pasywnego, przy czym charakterystyka amplitudowa jest przesunięta w pionie o wartość odpowiadającą ustawionemu w układzie wzmacnieniu (w skali dB).

Filtr górnoprzepustowy



$$\frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}$$

Rys. 5. 16. Filtr górnoprzepustowy I rzędu

Transmitancja widmowa jest opisana zależnością:

$$\frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = T(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}, \text{ gdzie } T = \tau = R_1 C_1 \quad 5.62$$

Jak wynika z zależności 5.62 zmiana rezystora R_2 powoduje zmianę wzmacnienia układu przy czym zmiana ta nie ma wpływu na częstotliwość graniczną filtru, która zależy wyłącznie od wartości elementów R_1 i C_1 .

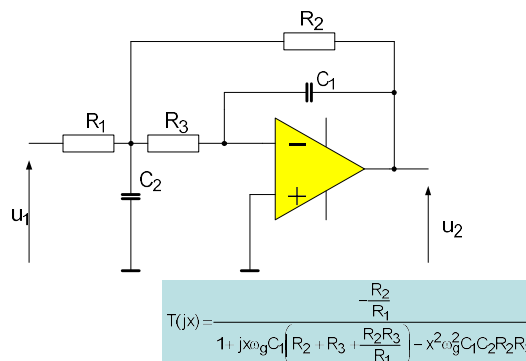
Odpowiednio pulsacja i częstotliwość graniczna dolna opisane są wzorami:

$$\omega_d = \frac{1}{T} \quad 5.63$$

$$f_d = \frac{1}{2\pi T}$$

Filtry dolnoprzepustowy i górnoprzepustowy II rzędu

Aktywny filtr dolnoprzepustowy z wielokrotnym ujemnym sprzężeniem zwrotnym



Rys. 15.17. Filtr dolnoprzepustowy II rzędu

Aktywny filtr dolnoprzepustowy z wielokrotnym ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Schemat ideowy filtra przedstawiono na rys. 5.17. Znormalizowana względem ω_g transmitancja widmowa tego układu opisana jest zależnością:

$$T(jx) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + jx\omega_g C_1 \left(R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \right) - x^2 \omega_g^2 C_1 C_2 R_2 R_3} \quad 5.64$$

gdzie

$$x = \frac{\omega}{\omega_g} \quad (0 < x < \infty) \quad 5.65$$

Podana transmitancja widmowa układu jest prawdziwa, jeżeli założy się, że wzmacniacz operacyjny jest idealny. Warunek ten może być spełniony kiedy zastosuje się do realizacji układu szybki wzmacniacz operacyjny.

Przy projektowaniu najczęściej zakłada się, że znane są wartości pojemności kondensatorów, a oblicza się rezystancje.

W przypadku ogólnym transmitancję widmową dla dowolnego filtra dolnoprzepustowego II rzędu można zapisać w postaci:

$$T(jx) = \frac{k_{u0}}{1 + ja_1 x - b_1 x^2} \quad 5.66$$

Współczynnik k_{u0} ustala wzmocnienie układu dla składowej stałej i jest przyjmowany dowolnie w zależności od potrzeb. Współczynniki a_1 oraz b_1 są dodatnie i mają określone stałe wartości, które zostały stabelaryzowane w zależności od rodzaju realizowanego filtra.

Do najpopularniejszych należą filtry:

- z tłumieniem krytycznym
- Bessela
- Butterwortha
- Czebyszewa

W zależności od rodzaju filtra odpowiednio wybrane wartości współczynników a_1 , b_1 umożliwiają realizację odpowiedniego kształtu charakterystyki amplitudowej filtra.

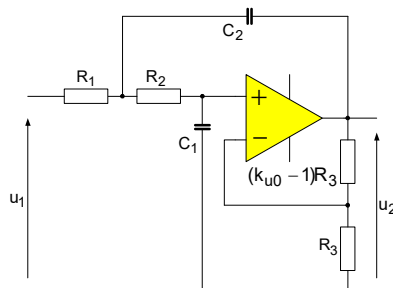
Np. realizując filtr z tłumieniem krytycznym należy przyjąć następujące wartości współczynników:

$$a_1 = 1,2872, b_1 = 0,4142$$

Omawiany tutaj filtr dolnoprzepustowy z wielokrotnym ujemnym sprzężeniem zwrotnym dla składowej stałej odwraca fazę sygnału ($k_{u0} < 0$), a zatem można wnioskować, że podobnie dzieje się dla sygnałów w zakresie małych częstotliwości.

Obliczone rezystancje R_1 , R_2 , R_3 przy zadanych wartościach pojemności kondensatorów są rzeczywiste (dodatnie), gdy jest spełniony warunek:

$$\frac{C_2}{C_1} \geq \frac{4b_1}{a_1^2} \quad 5.67$$



Rys. 5.18. Filtr dolnoprzepustowy II rzędu

Aktywny filtr dolnoprzepustowy można również zrealizować obejmując wzmacniacz operacyjny, w którym dokładnie ustalono wzmocnienie napięciowe za pomocą ujemnego sprzężenia zwrotnego, pętlą dodatniego sprzężenia zwrotnego.

W układzie jak na rys. 5.18. sprzężenie dodatnie jest realizowane przez elementy R_1 , R_2 , C_1 , C_2 , a sprzężenie ujemne przez elementy $(k_{u0} - 1)R_3$ oraz R_3 .

Znormalizowana transmitancja widmowa tego układu opisana jest zależnością:

$$T(j\omega) = \frac{k_{u0}}{1 + j\omega_g [C_1(R_1 + R_2) + (1 - k_{u0})R_1C_2] - \omega_g^2 R_1R_2C_1C_2} \quad 5.68$$

Często w celu uproszczenia zależności 5.68 przyjmuje się, że wewnętrzny współczynnik wzmocnienia $k_{u0} = 1$. Oznacza to, że wzmacniacz jest objęty pełnym ujemnym sprzężeniem zwrotnym i rezystor R_3 jest zbędny. W tym wypadku znormalizowana transmitancja widmowa układu ma postać:

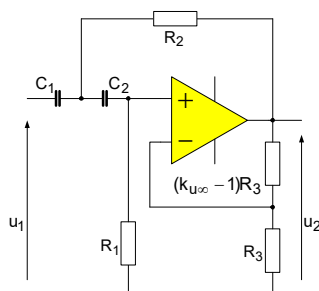
$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega_g C_1(R_1 + R_2) - \omega_g^2 R_1R_2C_1C_2} \quad 5.69$$

i jest identyczna jak postać ogólna podana zależnością 5.66.

Rezystory mają rzeczywiste wartości, gdy spełniony jest warunek:

$$\frac{C_2}{C_1} \geq \frac{4b_1}{a_1^2} \quad 5.70$$

Jeżeli w układzie przedstawionym na Rys. 5.18 zamieni się miejscami rezystory i kondensatory, tzn. w miejsce rezystorów R_1 , R_2 włączy się kondensatory C_1 , C_2 , a w miejsce kondensatorów C_1 , C_2 rezystory R_1 , R_2 to otrzyma się filtr górnoprzepustowy II rzędu z pojedynczym dodatnim sprzężeniem zwrotnym.



Rys. 5.19. Filtr górnoprzepustowy z pojedynczym dodatnim sprzężeniem zwrotnym

Ogólna, znormalizowana transmitancja widmowa takiego filtra ma postać:

$$T(jx) = \frac{k_{u\infty}}{1 + \frac{a_1}{jx} - \frac{b_1}{x^2}} \quad 5.71$$

i różni się od transmitancji filtra dolnoprzepustowego II rzędu tym, że współczynniki a_1 oraz b_1 nie są mnożone przez odpowiednią potęgę operatora jx tylko są przez ten operator dzielone. Szczegółowa postać znormalizowanej transmitancji widmowej układu przedstawionego na rys. 5.19 opisana jest zależnością:

$$T(jx) = \frac{k_{u\infty}}{1 + \frac{R_2(C_1 + C_2) + R_1C_2(1 - k_{u\infty})}{jx\omega_d R_1 R_2 C_1 C_2} - \frac{1}{x^2 \omega_d^2 R_1 R_2 C_2}} \quad 5.72$$

Często w celu ułatwienia projektowania przyjmuje się, że wzmacniacz operacyjny jest objęty pełnym ujemnym sprzężeniem zwrotnym $k_{u\infty} = 1$ oraz $C_1 = C_2 = C$.

Znormalizowana transmitancja filtra pasmowoprzepustowego II rzędu ma postać:

$$T(jx) = \frac{jxk_{u0} \frac{2\pi B}{\omega_0}}{1 + jx \frac{2\pi B}{\omega_0} - x^2} \quad 5.73$$

Można ją otrzymać stosując transformację transmitancji filtra dolnoprzepustowego I rzędu polegającą na podstawieniu w miejsce operatora jx we wzorze

$$T(jx) = \frac{k_{u0}}{1 + jx} \quad 5.74$$

$$\text{wyrażenia } \frac{\omega_0}{2\pi B} \left(jx - \frac{1}{jx} \right) \quad 5.75$$

gdzie:

$\frac{2\pi B}{\omega_0}$ - znormalizowany zakres pulsacji w paśmie przenoszenia,

B - szerokość pasma przenoszenia,

ω_0 - pulsacja rezonansowa (środkowa) filtra.

Przez analogie do obwodu rezonansowego dobroć filtra definiuje się jako stosunek częstotliwości rezonansowej f_0 do szerokości pasma przenoszenia B .

$$Q = \frac{f_0}{B}$$

Zatem wzór 5.73 można zapisać w postaci:

$$T(jx) = \frac{jxk_{u0} \frac{1}{Q}}{1 + jx \frac{1}{Q} - x^2} \quad 5.76$$

Znormalizowane charakterystyki częstotliwościowe amplitudowa i fazowa opisane są zależnościami:

$$|T(jx)| = \frac{x \frac{k_{u0}}{Q}}{\sqrt{1 + x^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 2 \right) + x^4}} \quad 5.77$$

$$\varphi = \arctg \frac{Q(1-x^2)}{x} \quad 5.78$$

gdzie

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad 5.79$$

Najprostszy filtr pasmowoprzepustowy II rzędu otrzymuje się łącząc kaskadowo dwa filtry I rzędu: górnoprzepustowy i dolnoprzepustowy.

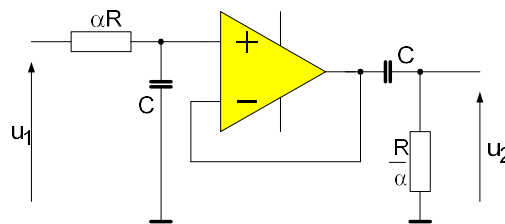
Uwzględniając transmitancje widmowe obu filtrów (wzory 5.62 oraz 5.59 lub 5.60) można zapisać znormalizowaną transmitancję widmową takiego filtru w postaci:

$$T(jx) = \frac{k_{u1}}{1+jx} \cdot \frac{k_{u2}}{1+\frac{1}{jx}} = \frac{jxk_{u1}k_{u2}}{1+j2x-x^2} = \frac{jx \frac{2k_{u1}k_{u2}}{2}}{1+j2x-x^2} \quad 5.80$$

Z porównania zależności 5.76 i 5.77 wynika, że tego typu filtr ma wzmocnienie $k_{u0} = \frac{k_{u1}k_{u2}}{2}$

i dobroć $Q = \frac{1}{2}$. Ponieważ dla częstotliwości rezonansowej f_0 wzmocnienie k_{u0} ma rzeczywistą wartość zatem dla tej częstotliwości przesunięcie fazowe jest równe zero.

Aktywny filtr pasmowo przepustowy złożony z kaskadowo połączonych filtrów I rzędu górnoprzepustowego i dolnoprzepustowego



$$T(jx) = \frac{\frac{jx}{\alpha}}{1 + jx \frac{1+\alpha^2}{\alpha} - x^2}$$

Rys. 5.20. Filtr pasmowoprzepustowy II rzędu

Przykład realizacji praktycznej takiego układu przedstawiono na slajdzie.

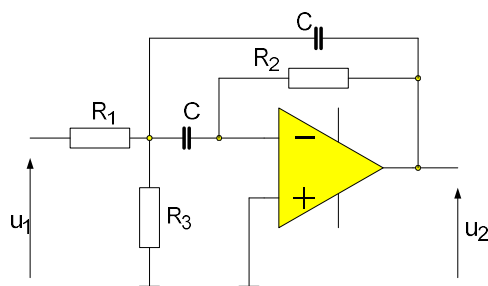
Transmitancja widmowa tego układu opisana jest zależnością:

$$T(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\alpha RC} \cdot \frac{1}{1+\frac{\alpha}{j\omega RC}} = \frac{j\omega RC \frac{1}{\alpha}}{1+j\omega RC \frac{1+\alpha^2}{\alpha} - \omega^2 R^2 C^2} \quad 5.81$$

Znormalizowana względem częstotliwości rezonansowej $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ transmitancja widmowa ma postać:

$$T(jx) = \frac{\frac{jx}{\alpha}}{1 + jx \frac{1+\alpha^2}{\alpha} - x^2} \quad 5.82$$

Maksymalna dobroć takiego układu $Q = \frac{1}{2}$ można osiągnąć kiedy $\alpha = 1$.



$$T(jx) = \frac{-jx\omega_0 \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_3} C}{1 + jx\omega_0 \frac{2R_1 R_3}{R_1 + R_3} C - x^2 \omega_0^2 C^2 \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_3}}$$

Rys. 5. 21. Układy z wielokrotnym ujemnym sprzężeniem zwrotnym

W układach filtrów pasmowoprzepustowych można także stosować układy z wielokrotnym ujemnym sprzężeniem zwrotnym i układy z pojedynczym dodatnim sprzężeniem zwrotnym. Dla układu z wielokrotnym sprzężeniem zwrotnym znormalizowana transmitancja widmowa ma postać:

$$T(jx) = \frac{-jx\omega_0 \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_3} C}{1 + jx\omega_0 \frac{2R_1 R_3}{R_1 + R_3} C - x^2 \omega_0^2 C^2 \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_3}}, \text{ gdzie } x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad 5.83$$

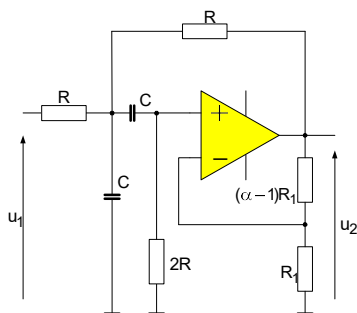
Ponieważ zgodnie z zależnością 5.76 współczynnik przy x^2 w mianowniku tego wyrażenia musi być równy 1 to biorąc pod uwagę ten warunek można wyznaczyć częstotliwość rezonansową układu

$$f_0 = \frac{1}{2\pi C} \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3}} \quad 5.84$$

Dobroć tego układu jest równa,

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 R_3}} \quad 5.85$$

$$\text{szerokość pasma } B = \frac{f_0}{Q} = \frac{1}{\pi R_2 C}$$



$$T(jx) = \frac{jx\omega_0 \alpha RC}{1 + jx\omega_0 (3 - \alpha) RC - x^2 \omega_0^2 R^2 C^2} = \frac{jx\alpha}{1 + jx(3 - \alpha) - x^2}$$

Rys. 5.22. Układy z pojedynczym dodatnim sprzężeniem zwrotnym

Dla układu z pojedynczym dodatnim sprzężeniem zwrotnym:

$$T(jx) = \frac{jx\omega_0\alpha RC}{1 + jx\omega_0(3 - \alpha)RC - x^2\omega_0^2 R^2 C^2} = \frac{jx\alpha}{1 + jx(3 - \alpha) - x^2} \quad 5.86$$

$$\text{Częstotliwość rezonansowa układu } f_0 = \frac{1}{2\pi CR} \quad 5.87$$

$$\text{Dobroć } Q = \frac{1}{3 - \alpha} \quad 5.88$$

Dla $\alpha = 3$ układ staje się niestabilny, powstają drgania nietłumione.

Znormalizowana transmitancja filtra pasmowozaporowego II rzędu ma postać:

$$T(jx) = \frac{k_{u0}(1 - x^2)}{1 + jx \frac{2\pi B}{\omega_0} - x^2} \quad 5.89$$

Można ją otrzymać stosując transformację transmitancji filtra dolnoprzepustowego I rzędu polegającą na podstawieniu w miejsce operatora jx we wzorze

$$T(jx) = \frac{k_{u0}}{1 + jx} \quad 5.90$$

$$\text{wyrażenia } \frac{\frac{\omega_0}{2\pi B}}{\left(jx + \frac{1}{jx}\right)} \quad 5.91$$

gdzie: $\frac{2\pi B}{\omega_0}$ - znormalizowany zakres pulsacji w paśmie zaporowym,

B - szerokość pasma zaporowego,

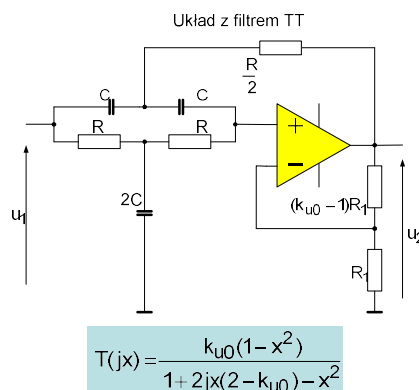
ω_0 - pulsacja rezonansowa (środkowa) filtra.

Charakterystyki częstotliwościowe amplitudowa i fazowa są opisane zależnościami:

$$|T(jx)| = \frac{k_{u0}|1 - x^2|}{\sqrt{1 + x^2\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) + x^4}} \quad 5.92$$

$$\varphi = \arctg \frac{x}{Q(x^2 - 1)} \quad 5.93$$

$$\text{Gdzie } x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad 5.94$$



Rys. 5.23. Układ z filtrem TT

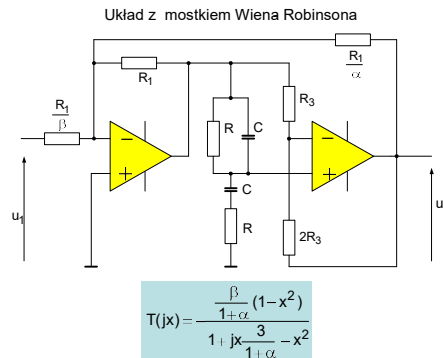
Przykład filtrów pasmowozaporowych II rzędu przedstawiono na Rys.5.22. Układ z filtrem TT ma znormalizowaną transmitancję widmową opisaną zależnością:

$$T(jx) = \frac{k_{u0}(1-x^2)}{1+2jx(2-k_{u0})-x^2} \quad 5.95$$

Częstotliwość rezonansowa i dobroć są równe

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad 5.96$$

$$Q = \frac{1}{2(2-k_{u0})} \quad 5.97$$



Rys. 5.24. Układ z mostkiem Wiena – Robinsona

Układ z mostkiem Wiena – Robinsona ma znormalizowaną transmitancję widmową dana wzorem:

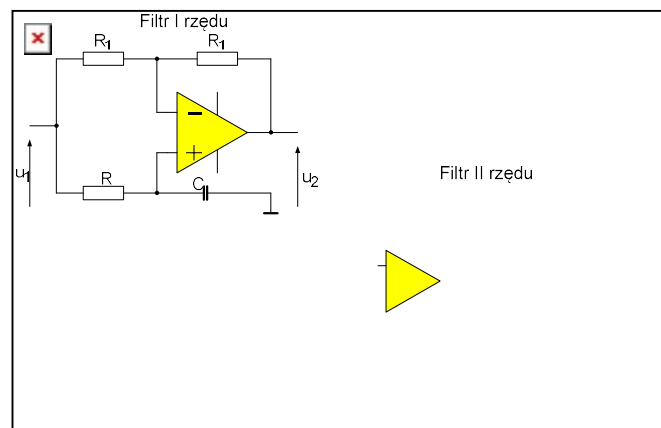
$$T(jx) = -\frac{\frac{\beta}{1+\alpha}(1-x^2)}{1+jx\frac{3}{1+\alpha}-x^2} \quad 5.98$$

Częstotliwość rezonansowa, dobroć i wzmacnienie układu są równe

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_2 C} \quad 5.99$$

$$Q = \frac{1+\alpha}{3} \quad 5.100$$

$$k_{u0} = -\frac{\beta}{1+\alpha} \quad 5.101$$



Rys. 5.25. Filtry wszechprzepustowe

Układy, w których wzmacnienie jest stałe i nie zależy od częstotliwości, a zmienia się tylko przesunięcie fazowe nazywa się filtrami wszechprzepustowymi.

Przykłady takich filtrów przedstawiono na rys.5.25. Pierwszy to układ I rzędu, a drugi II rzędu. Układ I rzędu to typowy przesuwnik fazowy. Transmitancja widmowa tego układu i przesunięcie fazowe są opisane zależnościami

$$T(j\omega) = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad 5.102$$

$$\varphi = -2\arctg(\omega RC)$$

Transmitancja drugiego układu ma postać:

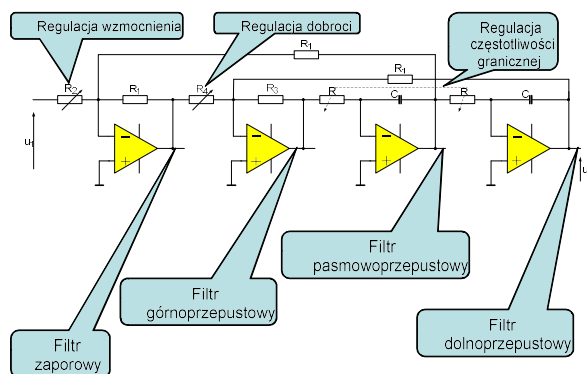
$$T(j\omega) = - \frac{1 + j\omega C(2R_1 - \alpha R_2) - \omega^2 R_1 R_2 C^2}{1 + 2j\omega CR_1 - \omega^2 R_1 R_2 C^2} \quad 5.103$$

Uniwersalny filtr II rzędu ma transmitancję widmową opisaną zależnością

$$T(j\omega) = \frac{d_0 + j\omega d_1 - \omega^2 d_2}{c_0 + j\omega c_1 - \omega^2 c_2} \quad 5.104$$

Opisane wyżej filtry stanowią szczególne warianty przedstawionej tutaj funkcji.

- filtr dolnoprzepustowy $d_1 = d_2 = 0$
- filtr górnoprzepustowy $d_0 = d_1 = 0$
- filtr pasmowoprzepustowy $d_0 = d_2 = 0$
- filtr pasmowozaporowy $d_1 = 0, d_0 = d_2$
- filtr wszechprzepustowy $d_0 = c_0, d_1 = -c_1, d_2 = c_2$



Rys. 5.26. Przykład filtru uniwersalnego II rzędu

Przykład filtru uniwersalnego II rzędu przedstawiono na rys. 5.26. Interesującą cechą tego układu jest to, że może on pełnić równocześnie funkcje różnych filtrów: pasmowoprzepustowego (selektywnego), pasmowo-zaporowego, dolnoprzepustowego, górnoprzepustowego.

Filtry uniwersalne są dostępne jako układy scalone, w których w celu wybrania typu filtru i częstotliwości charakterystycznych należy jedynie podłączyć kilka zewnętrznych rezystancji. Zaletą filtrów ciągłych jest nie występowanie w nich szumów wynikających z taktowania układu, ponieważ układy te nie wymagają sterowania zewnętrznym sygnałem taktującym.

Bibliografia

Kaźmierkowski M. P., Matysik J. T.: Wprowadzenie do elektroniki i energoelektroniki, Warszawa, Oficyna Wydawnicza PW 2005

Nadachowski M., Kulka Z.: Analogowe układy scalone, Warszawa, WKiŁ, 1985

Nosal Z., Baranowski J. Układy elektroniczne. Cz. 1. Układy analogowe liniowe, Warszawa, WNT 1998