

Tabela 3. Przeliczanie schematów zastępczych

wzory na przeliczanie parametrów schematów zastępczych		
rezystancja	indukcyjność	pojemność
$R_s = \frac{1}{1+Q^2} R_p = \frac{D^2}{1+D^2} R_p$	$L_s = \frac{Q^2}{1+Q^2} L_p = \frac{1}{1+D^2} L_p$	$C_s = (1+D^2) C_p = \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) C_p$
$R_p = (1+Q^2) R_s = \left(1 + \frac{1}{D^2}\right) R_s$	$L_p = \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) L_s = (1+D^2) L_s$	$C_p = \frac{1}{1+D^2} C_s = \frac{Q^2}{1+Q^2} C_s$

## 2.2 Metody pomiaru parametrów elementów RLC

Pomiarów impedancji i jej składowych można dokonać jedną z kilku metod. Stosowane są rozwiązania wykorzystujące: metodę woltomierza i amperomierza (pomiar spadku napięcia na badanym elemencie i pomiar natężenia prądu przepływającego przez ten element), klasyczną teorię mostków pomiarowych (mostek Maxwella, mostek Wiena - w tym mostki o równoważeniu automatycznym), metody rezonansowe (metody wykorzystujące zjawisko rezonansu w obwodach RLC, przyrządy realizujące te metody, to tzw. Q-metry), metody analizy sygnału odbitego (przyrządy - reflektometry). Zastosowanie jednej z wymienionych metod jest uzależnione od pożądanej dokładności i zakresu pomiaru, a także częstotliwości przy której element będzie pracował. Niejednokrotnie o wyborze decyduje możliwość zestawienia układu pomiarowego. W instrukcji opisano odmianę metody woltomierza i amperomierza - metodę trzech woltomierzy i metody mostkowe.

### 2.2.1 Metoda trzech woltomierzy

Metodę wygodnie jest omówić na przykładzie projektowania pomiaru impedancji cewki indukcyjnej.

#### Wybór modelu obiektu

Przyjmijmy, że zadaniem pomiarowym jest wyznaczenie indukcyjności cewki w zakresie małych częstotliwości. Najważniejszym parametrem cewki jest indukcyjność własna. Jednostką indukcyjności jest 1 henr ( $1 \text{ H} = 1 \Omega \cdot \text{s}$ ). Pojęcie indukcyjności własnej jest wykorzystywane przy analizie różnych zjawisk fizycznych, np. przy określaniu energii magazynowanej w polu magnetycznym, czy też przy określaniu indukcyjności własnej jako parametru impedancji cewki.

Najczęściej stosowanym modelem cewki dla małych częstotliwości, konstruowanym przy uwzględnieniu strat energii, jest model przedstawiany w postaci dwójnika, złożonego z połączonych szeregowo: indukcyjności  $L_s$  i rezystancji  $R_s$  (rys.1) - nazwijmy go modelem podstawowym. Jego impedancja wyraża się wzorem:

$$\underline{Z}_s = R_s + j\omega L_s \quad (1)$$

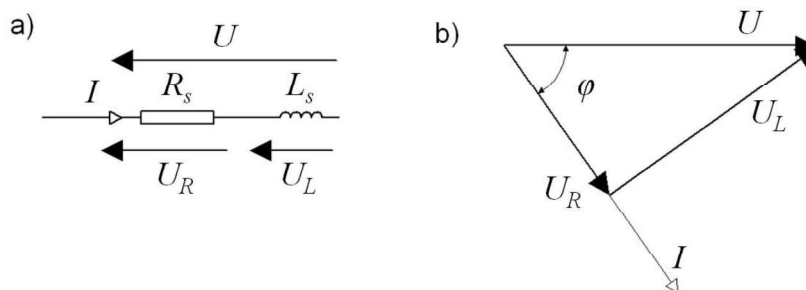
Zależnie od przeznaczenia spotyka się wiele różnych schematów zastępczych. Głównym dążeniem przy ich tworzeniu jest, by dany model przybliżał możliwie dokładnie impedancję cewki lub tylko jej indukcyjność w danym paśmie częstotliwości do zachowania się obiektu rzeczywistego. Praktyka pokazała, że niemożliwym jest zbudowanie dla cewki modelu uniwersalnego, który z jednakową dokładnością odtwarzałby jej parametry w szerokim paśmie częstotliwości.

Zależnie od przyjętych granic błędu oraz celu, dla którego wartość indukcyjności jest wyznaczana, model przedstawiony na rys. 1 może okazać się za mało dokładny. Można wtedy przyjąć model rozszerzony, uwzględniający dodatkowo np. wpływ pojemności między-zwojowych (rys. 2). Przyrównując składowe czynną i bierną obu modeli można określić

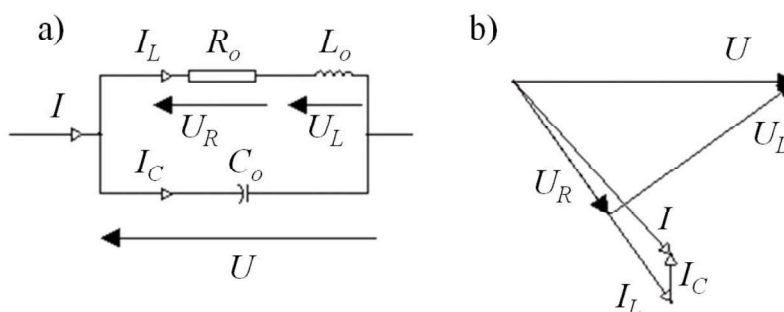
$$R_s = \frac{R_o}{(1 - \omega^2 L_o C_o)^2 + (\omega R_o C_o)^2} \quad (2)$$

$$L_s = \frac{L_o(1 - \omega^2 L_o C_o) - R_o^2 C_o}{(1 - \omega^2 L_o C_o)^2 + (\omega R_o C_o)^2} \quad (3)$$

Sposób połączenia elementów  $L_o$ ,  $C_o$  i  $R_s$  podyktowany jest tym, że straty w cewkach bezrdzeniowych powstają głównie w przewodzie miedzianym, którym cewka jest nawinięta, natomiast pole elektryczne (reprezentowane przez pojemność  $C_o$ ) występuje głównie między zwojami i zaciskami, a więc bocznikuje cewkę.



Rys. 1. Model podstawowy cewki dla małych częstotliwości; a) schemat zastępczy, b) wykres wektorowy

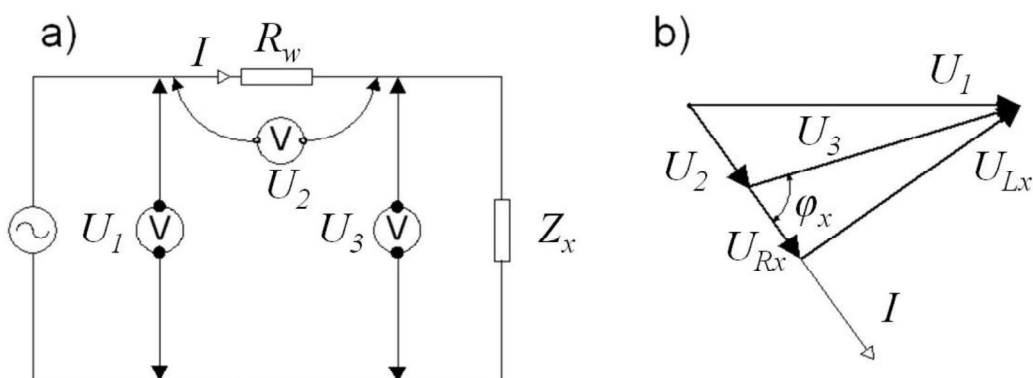


Rys. 2. Model rozszerzony cewki dla małych częstotliwości; a) schemat zastępczy, b) wykres wektorowy

#### Przygotowanie pomiaru

W wielu laboratoriach do popularnych przyrządów o największej dostępności należy multimetr (woltomierz) - stąd pomiar indukcyjności można rozpocząć od metody trzech woltomierzy, znanej niemal od początków elektrycznej techniki pomiarowej. Zasadę tej metody ilustrują układ pomiarowy i wykres wektorowy przedstawione na rys. 3. Z wykresu wektorowego znajdujemy:

$$\cos \varphi_x = \frac{U_1^2 - U_2^2 - U_3^2}{2U_2U_3} \quad (4)$$



Rys. 3. Metoda trzech woltomierzy przy wyznaczaniu parametrów modelu cewki; a) schemat układu pomiarowego, b) wykres wektorowy ilustrujący ideę metody

Znając pulsację  $\omega = 2\pi f$  ( $f$  - częstotliwość napięcia zasilającego układ pomiarowy), rezystancję opornika wzorcowego  $R_w$  oraz  $\cos \varphi_x$  można wyznaczyć także impedancję  $Z_x$ , rezystancję  $R_x$ , reaktancję  $X_x$  oraz indukcyjność  $L_x$ :

$$Z_x = \frac{U_3}{I} = \frac{U_3}{U_2} R_w \quad (5)$$

$$R_x = Z_x \cos \varphi_x \quad (6)$$

$$X_x = \sqrt{Z_x^2 - R_x^2} \quad (7)$$

$$L_x = \frac{X_x}{\omega} = \frac{X_x}{2\pi f} \quad (8)$$

### Wykonanie pomiaru

Mimo nazwy metody sugerującej udział trzech woltomierzy przy pomiarze, wszystkie trzy napięcia można zmierzyć za pomocą jednego woltomierza. Stosowanie jej jest celowe jednak tylko wtedy, gdy rezystancja wejściowa woltomierza jest dostatecznie duża w odniesieniu zarówno do badanej impedancji jak i do rezystancji wzorcowej - wpływ woltomierza na stan obwodu powinien być pomijalnie mały.

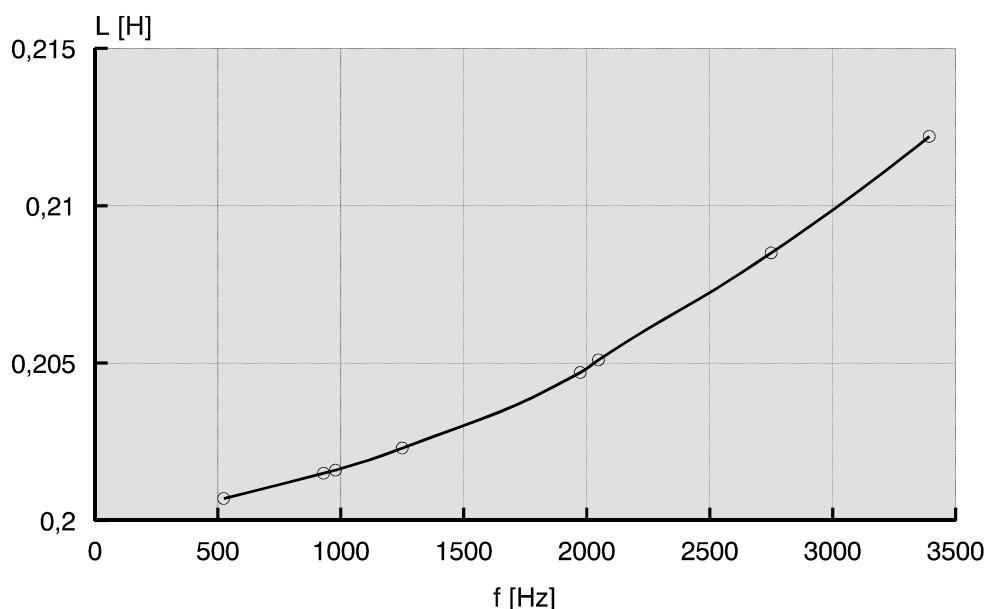
Przy potrzebie prowadzenia pomiarów wielokrotnych metoda ta stosunkowo łatwo poddaje się automatyzacji przy wykorzystaniu komputera.

### Opracowanie wyników

Podstawowe problemy opracowania wyników wiążą się tu z zastosowaniem właściwych metod numerycznych przy obliczeniach wyznaczanych parametrów i szacowaniu błędów. W rozpatrywanym przykładzie podstawowa trudność obliczeń wiąże się z dobrym uwarunkowaniem numerycznym zadania rozwiązywania trójkąta. Odpowiedzią prawidłowo przeprowadzonej analizy jest zalecenie takiego doboru wartości rezystora  $R_w$ , by wyznaczany trójkąt napięć miał ramiona o zbliżonych wartościach. Wtedy wpływy błędów systematycznych przy pomiarach napięć i częstotliwości, na błędy wyznaczanych parametrów, będą najmniejsze.

Tabela 4. Przykład zapisu wyników pomiarów metodą trzech woltomierzy

Lp.	$f$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$R_w$	$Z_x$	$\delta Z_x$	$R_x$	$\delta R_x$	$L_x$	$\delta L_x$
	Hz	V	V	V	$\Omega$	$\Omega$	%	$\Omega$	%	mH	%
1	50,0	9,13	2,41	8,22	10	34,1	$\pm 0,5$	8,59	$\pm 1,4$	105,1	$\pm 1,1$
2	50,0	12,13	3,13	11,38	100	363,6	$\pm 0,5$	40,0	$\pm 1,4$	1150	$\pm 1,1$

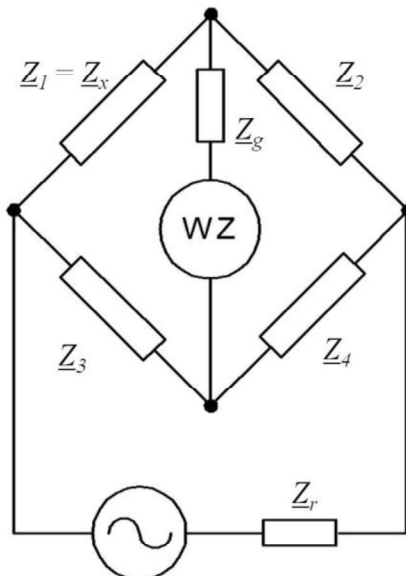


Rys. 4. Przykład prezentacji wyników pomiarów indukcyjności w funkcji częstotliwości

Przykład zapisu wyników pomiarów i obliczeń pokazuje tabela 4. Na rys. 4 pokazano zaś przykład prezentacji wyników pomiarów indukcyjności w funkcji częstotliwości - w postaci graficznej. W tym przypadku wykres przedstawia funkcję w sposób bardziej poglądowy i ilustracyjny niż wartości, które można by zestawić w tablicy. Wykres powinien być zawsze opatrzony informacją o osiach współrzędnych (wielkości, jednostki), zaś punkty zmierzone powinny być zaznaczone odpowiednimi symbolami (np. kółka, krzyżyki, iksy, trójkąty).

### 2.2.2 Metody mostkowe

W technice pomiarowej prądu zmiennego metoda mostkowa służy przede wszystkim do wyznaczania parametrów cewek i kondensatorów. Stosowana jest zwłaszcza wtedy, gdy błąd określenia poszukiwanego parametru powinien być mniejszy od 0,1%. Bardzo duże zróżnicowanie postaci układów mostkowych oraz znaczna liczba odmiennych rozwiązań konstrukcyjnych przeznaczonych dla różnych warunków pracy sprawiają, że szczegółowe informacje o mostkach znajdują się w dość bogatej literaturze przedmiotu. Podstawowy zbiór informacji o mostkach w technice pomiarowej znajduje się w wielokrotnie wydawanej monografii [1].



Rys. 5. Podstawowy układ mostka czteroramiennego

Na rys. 5 przedstawiono układ mostka, w którym wyodrębniono cztery impedancje ramion  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $Z_4$ , impedancję wskaźnika zera  $Z_g$  i impedancję wewnętrzną źródła zasilającego  $Z_r$ . Zwykle w ramieniu pierwszym umieszcza się impedancję nieznaną. Związek pomiędzy prądem  $I_g$  w gałęzi wskaźnika zera, a napięciem zasilającym  $U_r$  można przedstawić wzorem:

$$\underline{I}_g = \underline{U}_r \underline{Y}_{rg} \quad (9)$$

w którym  $Y_{rg}$  - jest admitancją wzajemną między gałęzią źródła a gałęzią wskaźnika. Równanie (9) daje podstawę do zdefiniowania metody mostkowej:

**mostkiem nazywamy obwód, w którym można wydzielić dwie gałęzie - zasilania i wskaźnika zera, i w którym admitancja wzajemna  $Y_{rg}$  między tymi gałęziami jest równa zero, gdy impedancje pozostałych gałęzi spełniają pewne równanie, zwane równaniem równowagi mostka, natomiast jest różna od zera, gdy równanie to nie jest spełnione.**

Gałęzie, których impedancje wchodzą do warunku równowagi, nazywamy ramionami mostka. Można wykazać dla mostka czteroramiennego, że

$$\underline{Y}_{rg} = 0 \quad (10)$$

jeśli

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 \quad (11)$$

Równanie (11) wiąże wielkości zespolone. Jeżeli impedancje ramion mostka są wyrażone w postaci  $\underline{Z}_k = R_k + jX_k$ , gdzie  $k = 1, 2, 3, 4$ , to warunek równowagi można przedstawić za pomocą układu dwóch równań wiążących wielkości skalarne - parametry ramion:

$$\left. \begin{aligned} R_1 R_4 - X_1 X_4 &= R_2 R_3 - X_2 X_3 \\ R_1 X_4 + R_4 X_1 &= R_2 X_3 - R_3 X_2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Jeśli impedancje ramion przedstawić w postaci  $\underline{Z}_k = Z_k e^{j\varphi_k}$ , to układ równań dla warunku równowagi przybierze postać:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 Z_4 &= Z_2 Z_3 \\ \varphi_1 + \varphi_4 &= \varphi_2 + \varphi_3 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

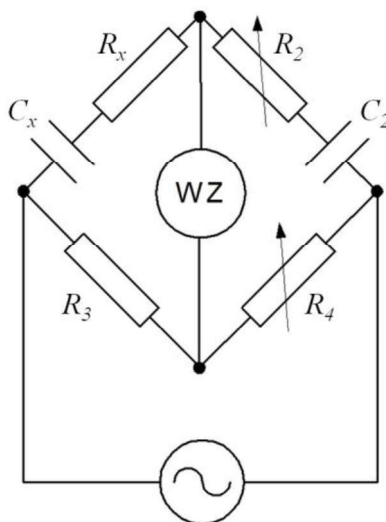
Tak jedna jak i druga postać warunku równowagi wskazują na konieczność równoważenia mostka za pomocą nastawiania co najmniej dwóch parametrów impedancji ramion. Ta właściwość utrudnia proces równoważenia mostka prądu zmiennego w porównaniu z mostkiem prądu stałego.

Dla większości stosowanych w praktyce układów mostkowych warunki równowagi przyjmują postać prostszą niż postać (12). Na przykład w układzie mostka Wiena (rys. 6), stosowanym do pomiaru pojemności i kąta strat kondensatorów, warunek równowagi (12) sprowadza się do postaci opisującej poszukiwane parametry  $R_x$  i  $C_x$ :

$$\left. \begin{aligned} C_x &= C_2 \frac{R_4}{R_3} \\ R_x &= R_2 \frac{R_3}{R_4} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

przy czym tangens kąta strat określa wzór:

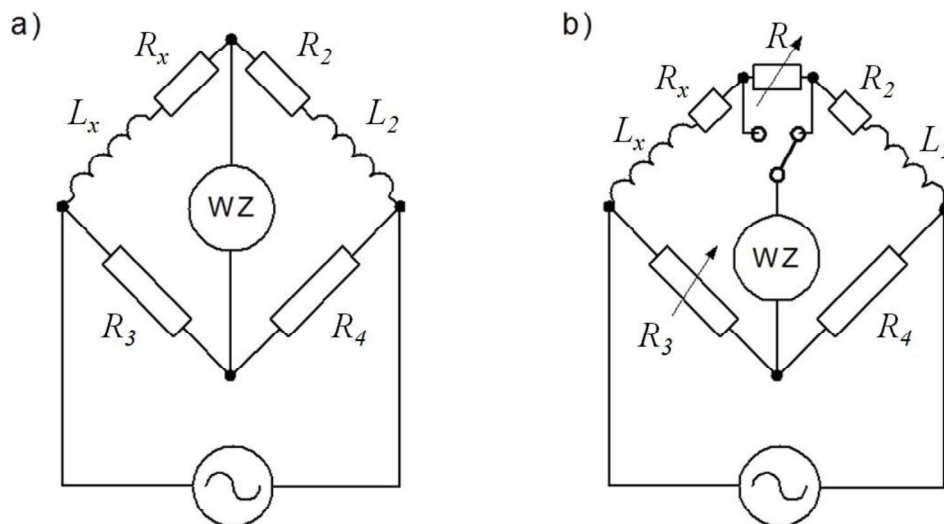
$$\operatorname{tg} \delta_x = \omega C_x R_x = \omega C_2 R_2 \quad (15)$$



Rys. 6. Mostek Wiena

W przypadku, gdy w warunkach równowagi nie ma częstotliwości, mostek zrównoważony przy jednej częstotliwości powinien być zrównoważony także przy innych częstotliwościach. Np. gdy napięcie zasilające jest niesinusoidalne i mostek jest zrównoważony dla pierwszej harmonicznej, to jest także zrównoważony i dla pozostałych harmonicznych. Natomiast, gdy warunki równowagi zależą od częstotliwości, napięcie zasilające powinno być czysto sinusoidalne, zaś wskaźnik zera powinien być selektywny, tj. reagować tylko na podstawową harmoniczną. Trzeba jednak przy tym pamiętać, że schematy zastępcze obwodów RLC konstruowane są jako modele obiektów rzeczywistych i pasują do nich tylko w ograniczonym paśmie częstotliwości. Dość często zdarza się, że w warunku równowagi pozornie nie występuje częstotliwość, bo jej udział jest maskowany rezystancją zastępczą elementu obwodu mostka, która może być silnie zależna od częstotliwości. Tak właśnie jest w przypadku mostka Wiena. Rezystancja  $R_x$  wyrażająca straty w dielektryku zmienia się wraz z częstotliwością w odwrotnej proporcjonalności.

Ten sam efekt zaobserwujemy, gdy do gałęzi  $Z_x$  w mostku Wiena wstawimy jako model badanego kondensatora jego schemat zastępczy admitancyjny (patrz tabele 1÷3). Wtedy w warunku równowagi pojawi się częstotliwość. Tak więc nie powinno budzić naszego zdziwienia zjawisko, że mostek Wiena dokładnie zrównoważony przy częstotliwości zasilania 1 kHz, jest całkowicie niezrównoważony przy częstotliwości 50 Hz i odwrotnie. Przy okazji dobrze jest uświadomić sobie co daje przeliczenie wartości rezystancji zastępczej danego kondensatora w schemacie szeregowym (impedancyjnym) na wartość rezystancji zastępczej w schemacie równoległym (admitancyjnym). Bo wprawdzie przy tangensie kąta strat  $D \ll 1$ , co zazwyczaj ma miejsce, pojemności w obu schematach są takie same, to jednak rezystancje dość istotnie się różnią. Dla badanych w ćwiczeniu kondensatorów zaleca się przeprowadzenie odpowiednich przeliczeń.



Rys. 7. Mostek Maxwella

W układzie mostka Maxwella (rys. 7a), często stosowanym do pomiaru indukcyjności, na podstawie warunku (12) otrzymuje się:

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (16)$$

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (17)$$

przy czym należy zauważyć, że dzieląc (16) i (17) stronami otrzymuje się jeszcze inną postać warunku równowagi:

$$\frac{L_x}{R_x} = \frac{L_2}{R_2} \quad (18)$$

którą można traktować jako uzupełnienie warunku (16) lub (17). Z warunków (16) i (17) widać, że doprowadzenie mostka do stanu równowagi wymaga nastawiania co najmniej dwóch elementów ramion mostka, np: \$R\_2\$ i \$R\_3\$, bądź \$R\_2\$ i \$R\_4\$. Aby zrealizować nastawianie rezystancji \$R\_2\$ włącza się zazwyczaj w szereg z indukcyjnością wzorcową \$L\_2\$ opornik dekadowy \$R\$. Z warunku (18) wynika, że gdy \$L\_x/R\_x > L\_2/R\_2\$, to rezystancja \$R\_2\$ nawet przy nastawieniu opornika \$R\$ na zero rezystancji, będzie za duża. Wtedy rezystancję opornika \$R\$ należy dodawać do rezystancji \$R\_x\$, tj. włączyć \$R\$ w szereg z indukcyjnością \$L\_x\$ (rys. 7b).

Dość popularną odmianą układów mostkowych są tzw. mostki transformatorowe (rys. 8). Zakładając, że współczynnik sprzężenia ramion indukcyjnych w tych mostkach bardzo mało odbiega od jedności, można warunki równowagi przedstawić w postaci:

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_w \frac{m_1}{m_2} \quad (19)$$

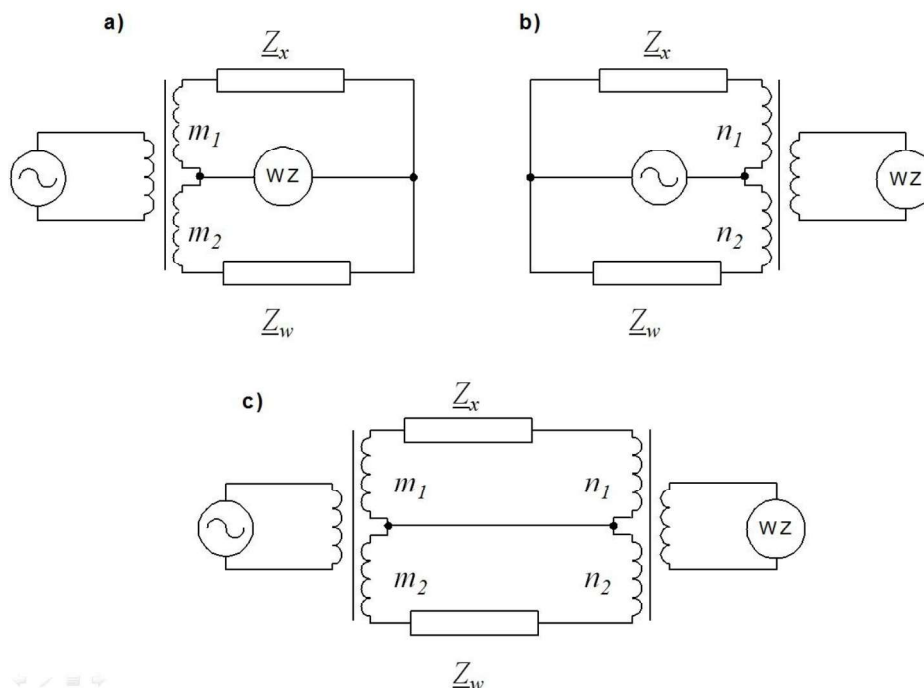
- dla układu z rys.8a,

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_w \frac{n_1}{n_2} \quad (20)$$

- dla układu z rys.8b, oraz

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_w \frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} \quad (21)$$

- dla układu z rys. 8c; we wzorach (19), (20) i (21) literami \$m\$ i \$n\$ oznaczono odpowiednie liczby zwojów, a \$\underline{Z}\_w\$ - impedancję wzorca.



Rys. 8. Mostki transformatorowe

Do zalet mostków transformatorowych należy zaliczyć przede wszystkim:

- możliwość otrzymania szerokiego zakresu pomiaru poprzez stosowanie wielosekcyjnych uzwojeń przy niewielkiej liczbie elementów wzorcowych (z reguły kondensatorów),
- stabilność w funkcji czasu i w funkcji temperatury ilorazów liczb zwojów,
- możliwość zastosowania takiej wartości elementu wzorcowego, przy której ma on największą stałość wartości w funkcji czasu, a także ma niewielkie wymiary gabarytowe.

Te i inne, nie wymienione tu zalety spowodowały, że mostki transformatorowe zastąpiły w dużej mierze wiele z szeroko niegdyś stosowanych układów klasycznych (np. Maxwella i Wiena).

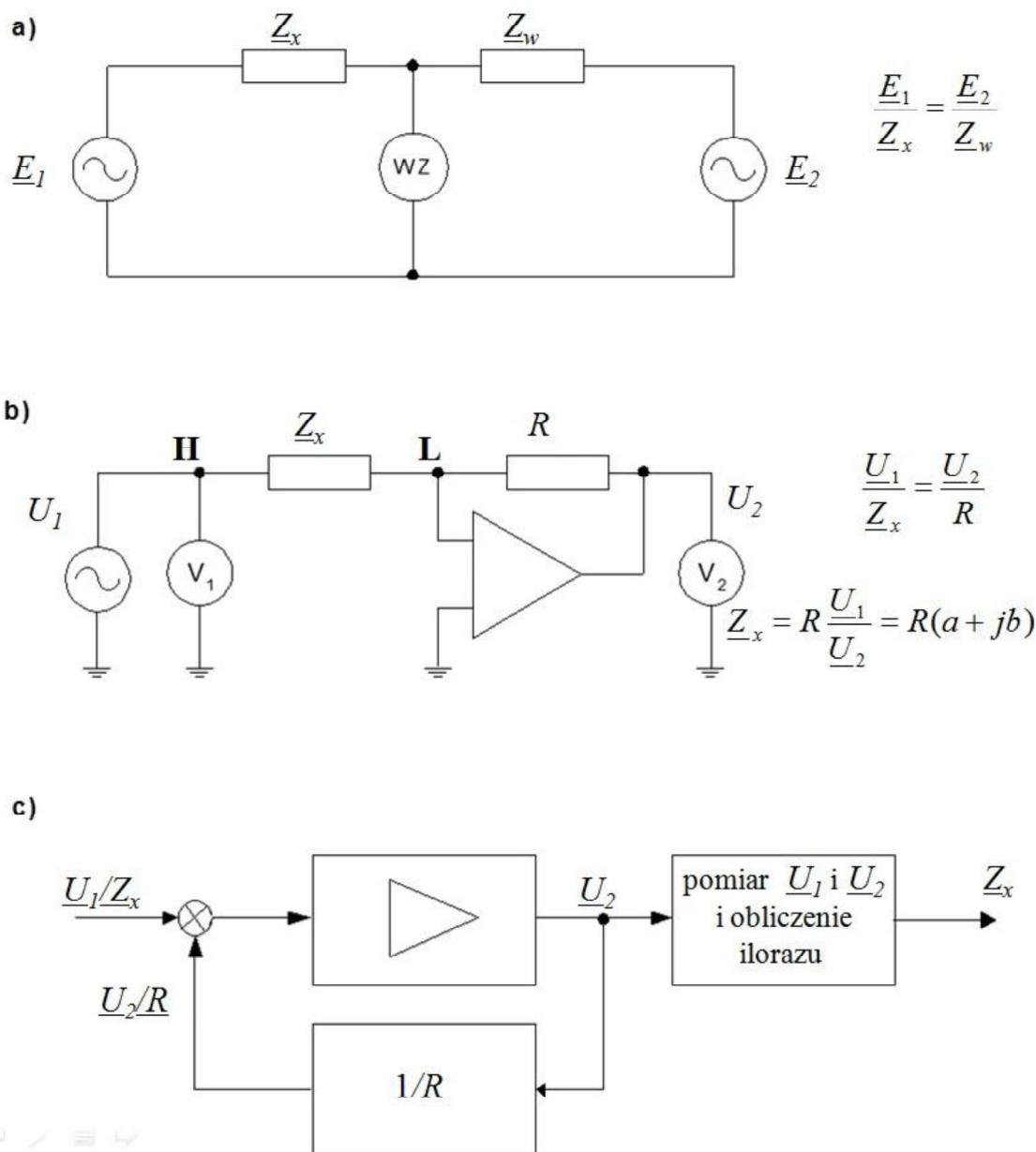
Warunki równowagi (19), (20) i (21) przedstawione są w postaci wektorowej. Wobec tego, że liczby zwojów są wielkościami skalarnymi, elementami równoważącymi mogą być jedynie składowe impedancji wzorca - np. nastawna pojemność kondensatora i dołączona szeregowo lub równolegle nastawna rezystancja rezystora. Liczby zwojów służą jedynie do zmiany zakresu pomiarów. Wymóg stosowania nastawnych wzorców można ominąć modyfikując nieco układ z rys. 8c do postaci, w której elementy wzorcowe mają wartości stałe, zaś mostek równoważony jest ze pomocą nastawiania liczb zwojów [3].

### Proces równoważenia mostków

Rozpatrzmy ogólnie sposób postępowania przy ręcznym równoważeniu mostka za pomocą nastawnych parametrów  $p$  i  $q$ . Nastawianiem np. parametru  $p$  sygnał nierównowagi  $U_g$  sprowadzamy do pewnego minimum przy  $p = p_1$ . Następnie nastawiając parametr  $q$  sprowadzamy  $U_g$  do następnego minimum przy  $q = q_1$ . Jeśli teraz będziemy zmieniać ponownie wartość parametru  $p$ , to okaże się, że kolejne minimum sygnału  $U_g$  otrzymamy przy  $p_2 \neq p_1$ . Podobnie postępując dalej znajdziemy  $q_2 \neq q_1$ , i tak aż do odnalezienia stanu, w którym, przy bardzo już małym poziomie sygnału  $U_g$ , nastawianie tak  $p$  jak i  $q$  nie powoduje dalszego zmniejszania tego sygnału. Można wtedy przyjąć, że otrzymane końcowe wartości  $p = p_k$  i  $q = q_k$  spełniają warunek równowagi mostka. Ten sam algorytm nastawiania może realizować dużo szybciej od człowieka automat cyfrowy, co ma miejsce we współczesnych konstrukcjach mostków automatycznych. Ideę pomiaru automatycznego przedstawiono na rys. 9.

W schemacie ideowym ilustrującym pracę mostka o równoważeniu automatycznym (rys. 8b) prąd przepływający przez mierzoną impedancję  $Z_x$  przepływa również przez rezystancję  $R$ . Wzmacniacz pracuje w układzie przetwornika  $I/U$ . Punkt **L** jest punktem masy pozornej. Impedancja jest wyznaczana poprzez pomiar napięcia w punkcie **H** i pomiar spadku napięcia na rezystancji  $R$ . Rzeczywiste układy pomiarowe są nieco bardziej złożone z uwagi na konieczność równoważenia sygnałów przesuniętych w fazie [5]. Z punktu widzenia użytkownika najważniejsza jest jednak prawidłowa interpretacja wyników. Jest to ważne z uwagi na możliwość wykonywania pomiarów przy założeniu różnych schematów zastępczych badanych elementów (patrz tabela 2).





Rys. 9. Koncepcja metody mostkowej o automatycznym równoważeniu; a) inne przedstawienie schematu mostka z rys. 8a, b) ilustracja zasady kompensacji prądów przy wykorzystaniu wzmacniacza sygnału nie zrównoważenia (schemat układu uproszczony), c) schemat blokowy układu z p.b)

Typowe zadania do wykonania przed przystąpieniem do pomiarów parametrów impedancji za pomocą mostka klasycznego, zestawianego z oporników dekadowych i wzorców pojemności lub indukcyjności, to:

- wybór struktury układu mostka,
- dobór parametrów impedancji ramion,
- dobór źródła zasilania,
- dobór wskaźnika zera.

Wybór struktury układu dla typowych pomiarów pojemności lub indukcyjności sprowadza się na ogół do przyjęcia jednego z układów podstawowych. Dobór parametrów impedancji ramion powinien uwzględniać zakres pomiaru i wymaganą liczbę stopni nastawiania dekadowych elementów równoważących - podstawą przeliczeń są tu równania opisujące stan równowagi. Dobór źródła zasilania polega głównie na doborze wartości i częstotliwości napięcia zasilania. Wartość tego napięcia ograniczona jest dopuszczalną obciążalnością elementów rezystancyjnych i indukcyjnych mostka lub dopuszczalnym napięciem pracy kondensatorów znajdujących się w układzie. Ze względu na funkcję generatora w układzie wybieramy zwykle tzw. generatory mocy, które, w odróżnieniu od generatorów sygnałowych, pozwalają na dopasowanie mocy wyjściowej generatora pod względem potrzebnych napięć i prądów. Natomiast częstotliwość napięcia źródła powinna być tego samego rzędu co częstotliwość, przy której badany element będzie pracował.