

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z zasadami widmowej analizy sygnałów (analizy w dziedzinie częstotliwości), która stanowi nowoczesne, coraz powszechniej używane narzędzie metrologii.

W przypadku użycia oscyloskopu do obserwacji sygnału, stosujemy analizę czasową, chociaż znając parametry podstawy czasu możemy określić długość okresu, a więc również wartość częstotliwości dla przebiegów okresowych. Nie możemy jednak określić tzw. zawartości harmonicznych dla odkształconych (różnych od sinusoidy) przebiegów okresowych. W tym celu należy zastosować tzw. analizę widmową.

Klasyczna metoda wyznaczania widma częstotliwościowego sygnału elektrycznego polega na przepuszczeniu tego sygnału przez zespół wąskopasmowych filtrów analogowych o różnych wartościach częstotliwości rezonansowych i pomiarze amplitud sygnałów na wyjściach tych filtrów. Metoda ta jest dosyć uciążliwa i mało dokładna. W ostatnich latach została diametralnie zmieniona dzięki zastosowaniu techniki cyfrowego przetwarzania sygnałów. Obecnie widmo sygnału jest wyznaczane metodą numeryczną z wykorzystaniem mikroprocesora. Urządzeniem umożliwiającym obliczenie i zobrazowanie widma sygnału jest cyfrowy analizator widma.

Podstawowe zadania stawiane studentom to:

- ♦ Nabycie praktycznych umiejętności w posługiwaniu się podstawowymi pojęciami analizy widmowej, a w szczególności dyskretną transformatą Fouriera,
- ♦ Opanowanie umiejętności interpretacji wyników pomiarów eksperymentalnych.

2. Wprowadzenie teoretyczne

Sygnał - to jedno z podstawowych pojęć metrologii. Sygnałem jest określony w funkcji czasu przebieg dowolnej wielkości fizycznej $x(t)$, np.: napięcia, prądu, natężenia pola elektrycznego, naprężeń przęsła mostu, prędkości obrotowej turbiny itp. Po zamianie dowolnego sygnału fizycznego (wielkości fizycznej) na wielkość elektryczną, mamy do czynienia z sygnałem elektrycznym. W metrologii są to zwykle sygnały napięciowe lub prądowe.

Sygnały opisane analitycznie lub w inny równoważny sposób, np. graficznie, nazywają się sygnałami zdeterminowanymi, ponieważ ich wartości są określone z góry dla każdej chwili czasu.

Najprostszymi sygnałami zdeterminowanymi są :

- **sygnał harmoniczny:**

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad -\infty < t < \infty, \quad (1)$$

gdzie A jest amplitudą, ω_0 - pulsacją, a φ_0 - fazą początkową,

- **sygnał okresowy:**

$$x(t) = x(t + mT), \quad -\infty < t < \infty, \quad (2)$$

gdzie T jest okresem, a m - liczbą całkowitą dodatnią.

Zależności (1) i (2) opisują sygnały w dziedzinie czasu. Pojęcie „analiza widmowa” określa badanie własności sygnałów nie w dziedzinie czasowej lecz częstotliwościowej, a sygnał przedstawiony w dziedzinie częstotliwości jest nazywany widmem częstotliwościowym.

Przejście z jednej dziedziny do drugiej jest matematycznie opisane przez całkowite przekształcenie Fouriera

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

określane też mianem transformaty całkowitej. Na odtworzenie sygnału pozwala transformata odwrotna:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4)$$

W obydwu wzorach $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ oznacza pulsację.

Jeżeli sygnał $x(t)$ jest okresowy to można go przedstawić w postaci sumy funkcji trygonometrycznych (szeregu Fouriera):

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \quad (5)$$

gdzie:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) dt \quad (6)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad (7)$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad (8)$$

lub w bardziej zwartej formie:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (9)$$

gdzie:

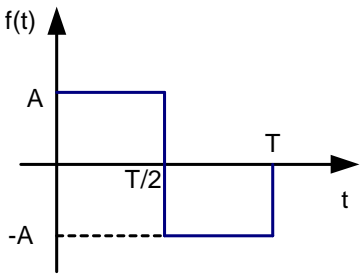
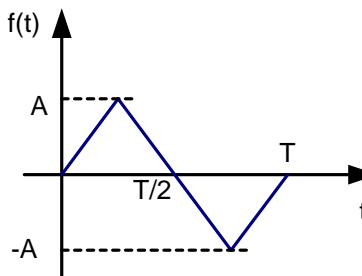
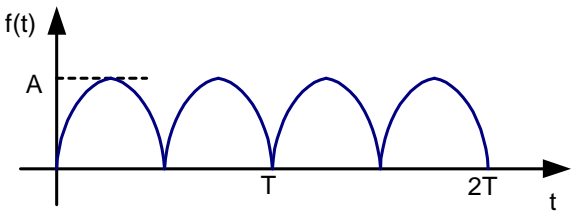
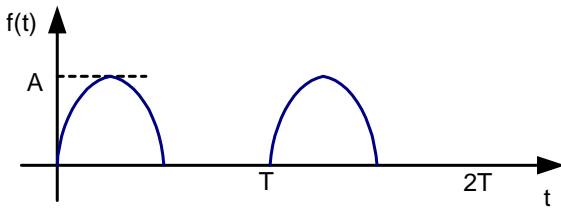
$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (10)$$

W powyższych wzorach $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi f_0$ stanowi pulsację sygnału okresowego.

W przypadku gdy funkcja $x(t)$ jest nieparzysta, współczynniki a_k przyjmują wartość zero (całkowana jest za okres funkcja $\cos(k\omega_0 t)$) i podobnie gdy $x(t)$ jest parzysta, to współczynniki b_k są zerowe (całkowana jest za okres funkcja $\sin(k\omega_0 t)$).

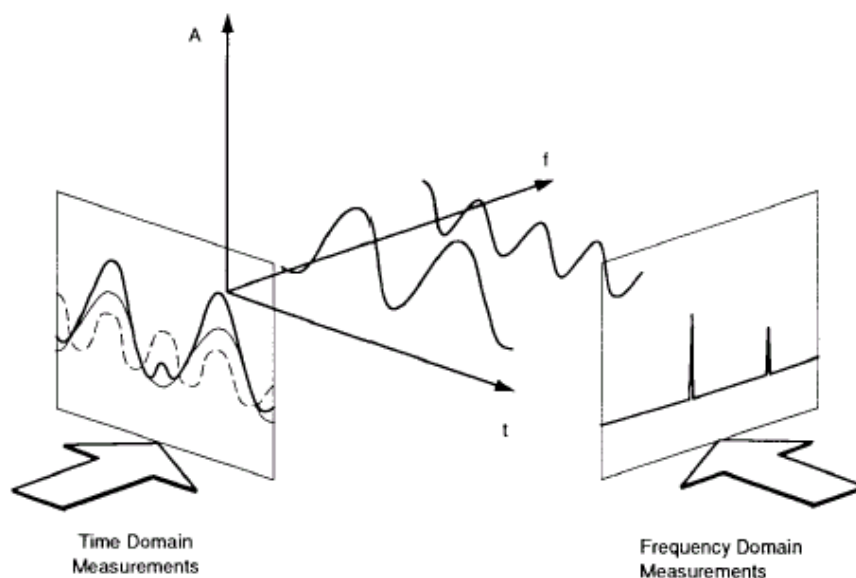
W tabeli 1 przedstawiono rozwinięcie w szereg Fouriera wybranych funkcji okresowych.

Tabela 1. Rozwinięcie w szereg Fouriera

 $f(t) = \frac{4A}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right]$	 $f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left[\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{3^2} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right]$
 $f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\omega_0 t$	 $f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2n\omega_0 t$

Z tabeli 1 wynika, że każdy przebieg okresowy można przedstawić w postaci sumy lub różnicy przebiegów sinusoidalnych o częstotliwościach będących wielokrotnością częstotliwości podstawowej ω_0 . Wartości współczynników rozwinięcia w szereg Fouriera pokazują jaką jest zawartość składowej o danej częstotliwości w analizowanym przebiegu. Przedstawienie tych współczynników w funkcji częstotliwości jest graficznym obrazem widma przebiegu okresowego.

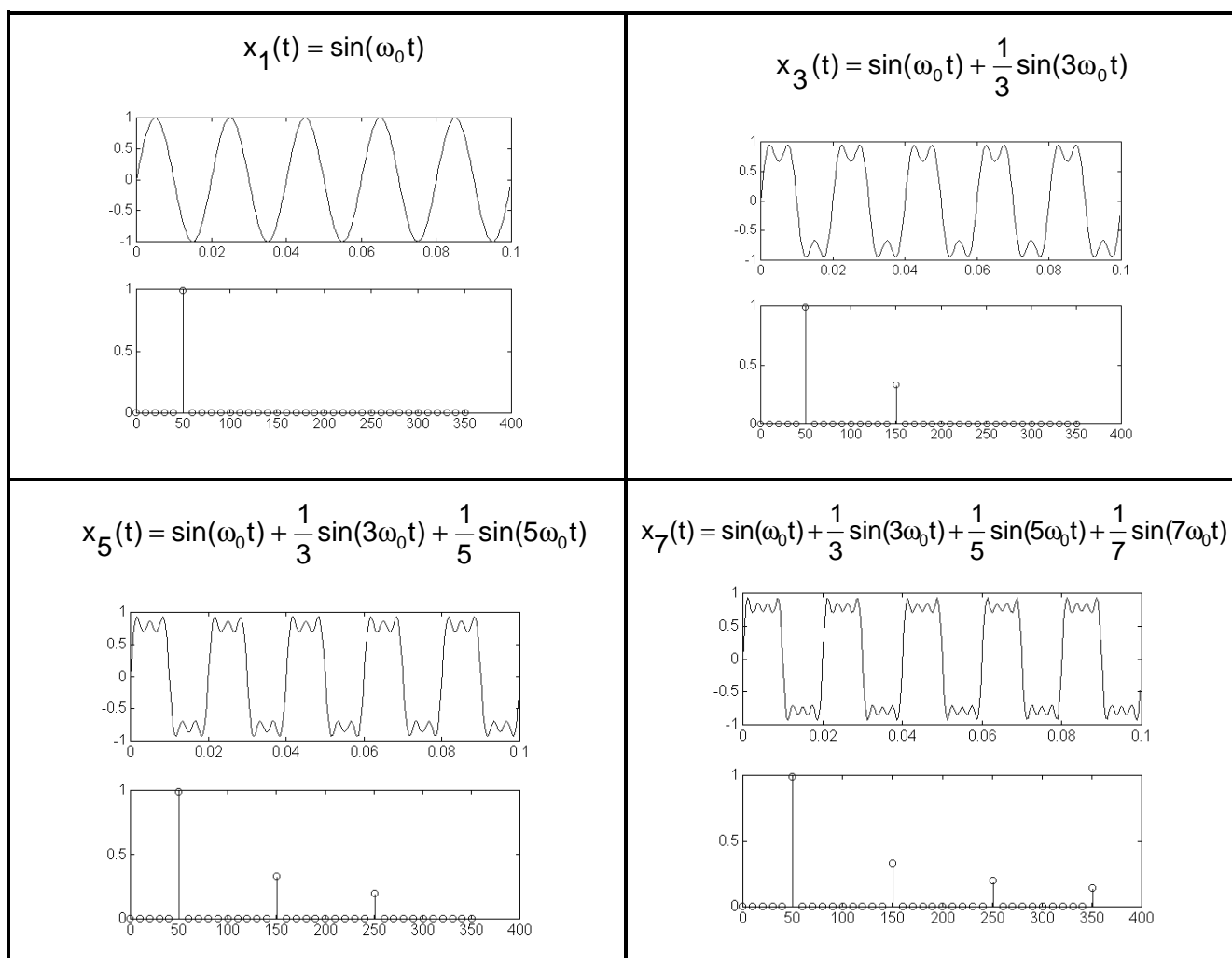
Na rysunku 1 pokazano przebieg sygnału w dziedzinie czasu (time domain) i jego obraz w dziedzinie częstotliwości (frequency domain). Widmo sygnału jest prezentowane w postaci prążków o wysokości odpowiadającej amplitudzie poszczególnych składowych sygnału.



Rys. 1. Sygnał w dziedzinie czasu i częstotliwości

Poniżej (tabela 2) zilustrowano jaki wpływ na kształt sygnału i jego widmo ma proces sumowania przebiegów sinusoidalnych o częstotliwościach będących wielokrotnością częstotliwości podstawowej wyrażonej przez iloczyn $n\omega_0$ dla n nieparzystych i amplitudach malejących w stosunku $1/n$.

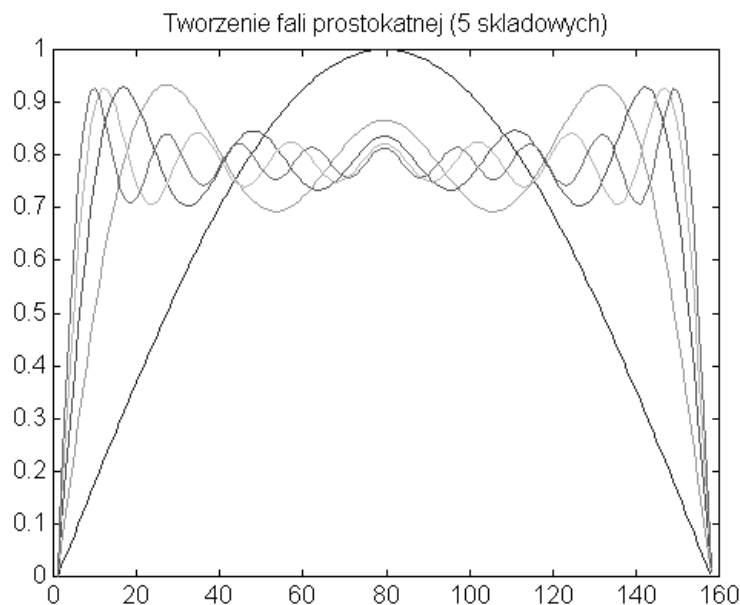
Tabela 2 Synteza przebiegu prostokątnego



Na rysunku 2 zamieszczono (w powiększeniu) przykład kolejnego sumowania harmonicznych (1,3,5,7,9):

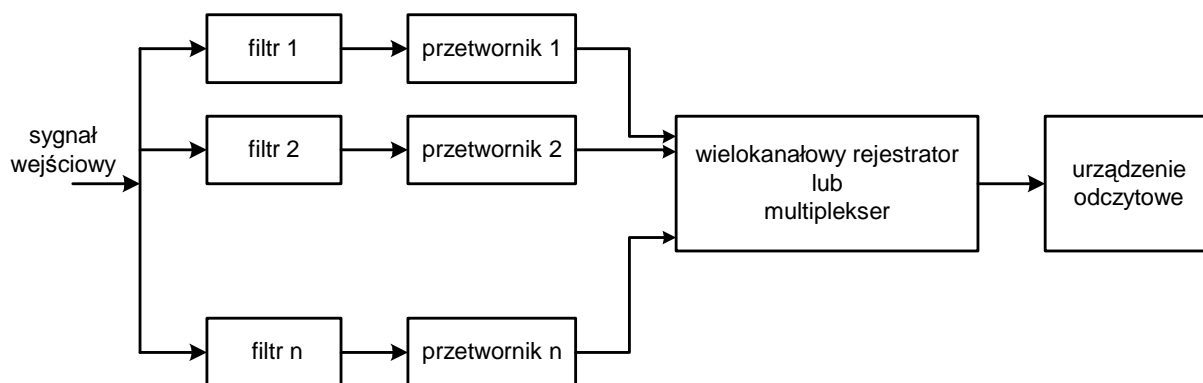
$$x_9(t) = \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega_0 t) + \frac{1}{9} \sin(9\omega_0 t)$$

Widać wyraźnie jak liczba składowych (nieparzystych harmonicznych) wpływa na kształt przebiegu wynikowego.



Rys. 2. Przykład kolejnego sumowania nieparzystych harmonicznych (1,3,5,7,9)

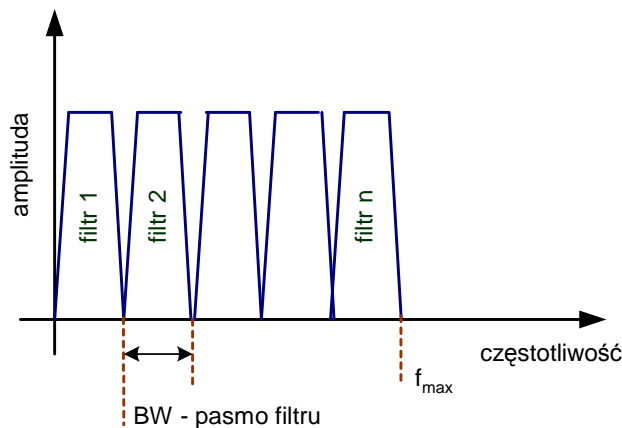
Analiza sygnału w dziedzinie częstotliwości polega na wyodrębnieniu poszczególnych składowych sygnału i zobrazowaniu ich amplitudy w funkcji częstotliwości. Koncepcję urządzenia realizującego takie operacje przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Koncepcja przyrządu do analizy sygnału w dziedzinie częstotliwości

Pasma przepustowe filtrów wejściowych pokrywają przedział częstotliwości od 0 Hz do pewnej częstotliwości f_{\max} wyznaczającej zakres przetwarzania (rys. 4). Przetworniki w postaci detektorów wartości szczytowej sygnału przetwarzają amplitudy składowych sygnału na wartości stałe rejestrowane w pamięci przyrządu lub zobrazowane bezpośrednio na urządzeniu odczytowym. Pomiar lub rejestracja wartości sygnałów odpowiadających poszczególnym harmonicznym wymaga zastosowania dużej liczby filtrów o wąskim paśmie przepustowym BW (składowe o częstotliwościach zawierających się w paśmie danego filtra są nierozróżnialne).

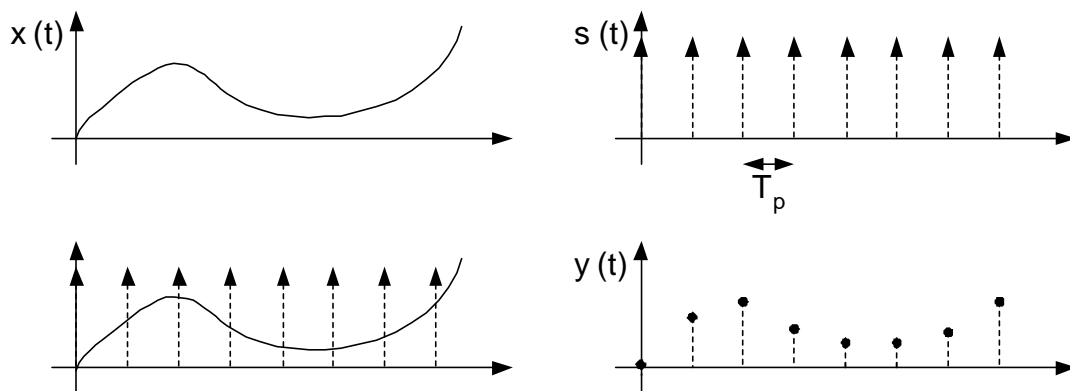
Rozwinięcie koncepcji przedstawionej na rysunku 4 polega na: realizacji filtrów na drodze obliczeniowej, zastosowaniu jednego filtra o przestrajającym paśmie lub przemianie częstotliwości badanego sygnału w taki sposób, aby kolejne harmoniczne tego sygnału znalazły się w określonym paśmie przepustowym jednego filtra.



Rys. 4. Charakterystyki filtrów wejściowych

Wyznaczanie widma sygnału w sposób numeryczny wymaga stosunkowo skomplikowanych obliczeń matematycznych. Na szczęście obliczenia te mogą być wykonywane przy użyciu komputera. W tym celu należy jednak przejść do dziedziny sygnałów cyfrowych.

Sygnał dyskretny otrzymuje się po dokonaniu próbkowania sygnału ciągłego. Próbkowanie sygnału polega na „pobieraniu” wartości jego amplitudy w równomiernych odstępach czasu T_p , zwanych okresem próbkowania. Próbkowanie można interpretować jako mnożenie sygnału ciągłego $x(t)$ przez funkcję próbkującą $s(t)$ w postaci ciągu impulsów Diraca.



Rys. 5. Próbkowanie sygnału

Funkcję próbkującą można przedstawić w postaci analitycznej jako:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT_p) \quad (11)$$

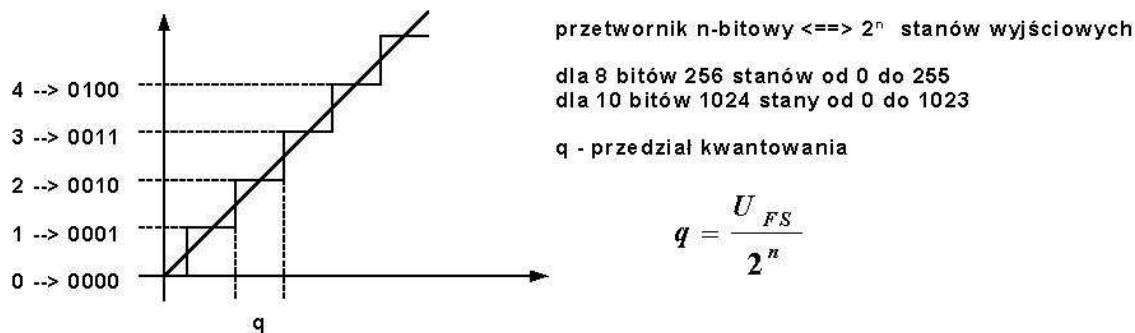
a sygnał wyjściowy w postaci:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(t) \delta(t - nT_p) \quad (12)$$

przy czym sygnał ten jest określony tylko w dyskretnych chwilach czasowych oddległych od siebie o T_p .

Przedział czasu T_p jest nazywany okresem próbkowania, a jego odwrotność częstotliwością próbkowania $f_p = 1/T_p$.

Próbkowanie sygnału to pierwszy krok przygotowujący sygnał do przetworzenia go do postaci cyfrowej akceptowalnej przez mikrokomputer. Drugi krok stanowi kwantyzacja amplitudy realizowana przez przetwornik analogowo-cyfrowy. Polega ona na zastąpieniu ciągłych wartości próbek sygnału pewnymi wartościami dyskretnymi powstającymi w efekcie dokonania podziału obszaru zmienności sygnału na przedziały kwantowania (rys. 6).



Rys. 6. Kwantyzacja sygnału

Kwantowanie powoduje zawsze pewną utratę informacji, ponieważ nieskończenie wielu wartościom sygnału analogowego z przedziału $\pm \frac{1}{2} q$ odpowiada tylko jedna wartość cyfrowa. Przedział kwantowania zależy od liczby bitów przetwornika i jest określony przez iloraz pełnej skali przetwarzania U_{FS} i liczby stanów wyjściowych przetwornika.

Wszystkie sygnały dyskretny, które nie zostały poddane procesowi kwantyzacji pozostają sygnałami analogowymi.

Jeżeli sygnał jest określony tylko w dyskretnych punktach t_n na osi czasu to całkę Fouriera z zależności (3) zastąpi suma:

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t_n) e^{-j\theta} \quad (13)$$

gdzie θ oznacza tzw. pulsację unormowaną względem częstotliwości próbkowania:

$$\theta = \omega T_p = \omega / f_p = 2\pi f / f_p.$$

Z zależności (13) wynika, że widmo $X(e^{j\theta})$ jest funkcją okresową o okresie 2π .

Można je więc rozwinąć w szereg Fouriera o współczynnikach:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta \quad -\infty < n < +\infty \quad (14)$$

które nie określają nic innego jak wartości kolejnych próbek sygnału, tzn.: $x_n = x(t_n)$.

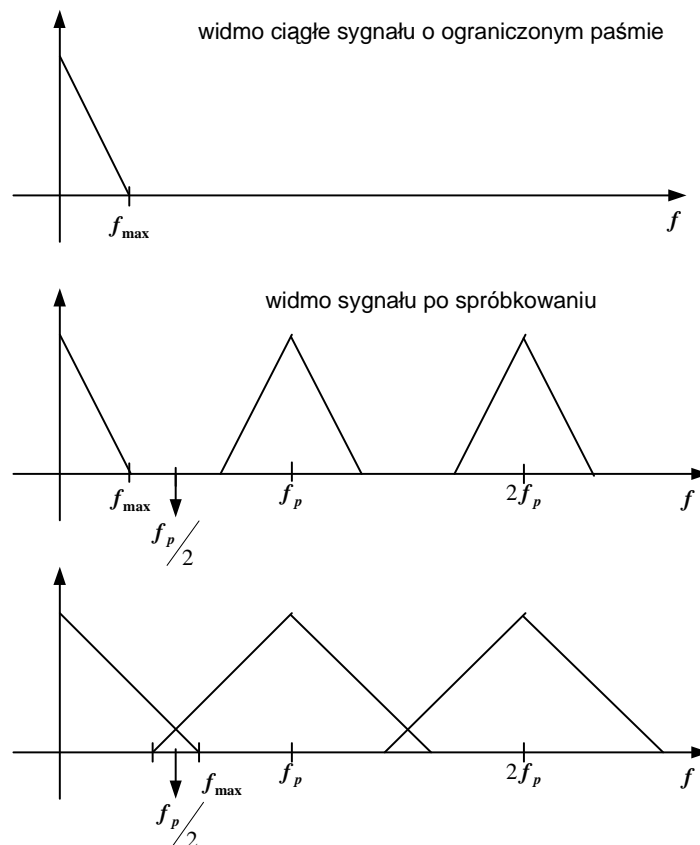
Zatem próbkowanie sygnału powoduje powielenie widma.

Z rysunku 7 widać co stanie się, jeżeli częstotliwość próbkowania będzie mniejsza od połowy najwyższej harmonicznej zawartej w sygnale f_{max} . Powielone widma nałożą się na siebie i uzyskamy błędny obraz widma sygnału. Zjawisko to nosi nazwę „aliasingu” (stosuje się zazwyczaj nazwę angielską, której polskim odpowiednikiem może być „utożsamianie”). Skutecznym sposobem uniknięcia aliasingu jest zastosowanie filtra dolnoprzepustowego ograniczającego pasmo sygnału analogowego. Ponadto fakt, że widmo jest okresowe i symetryczne względem częstotliwości próbkowania powoduje, że większość analizatorów widma jako podstawowy zakres jego zobrazowania przyjmuje częstotliwości od 0 do $f_p/2$, udostępniając możliwość zawężania pasma.

Rysunek 7 stanowi ilustrację podstawowego twierdzenia o próbkowaniu (tw. Shannona).

Wartość częstotliwości próbkowania musi być dwukrotnie większa od wartości maksymalnej częstotliwości zawartej w widmie tego sygnału

Częstotliwość $f_p = 2 f_{max}$ nazywa się częstotliwością Nyquista.



Rys. 7. Widmo sygnału o ograniczonym paśmie, powielenie widma sygnału w wyniku jego próbkowania oraz skutki zbyt niskiej częstotliwości próbkowania

Jeżeli próbkowaniu podlegał sygnał okresowy to widmo tego sygnału będzie stanowił zbiór współczynników $X(k)$, rozwinięcia jednego okresu tego sygnału w szereg Fouriera:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N} \quad -\infty < n < +\infty \quad (15)$$

gdzie każdy ze współczynników $X(k)$ określony jest jako:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad -\infty < k < +\infty, \quad (16)$$

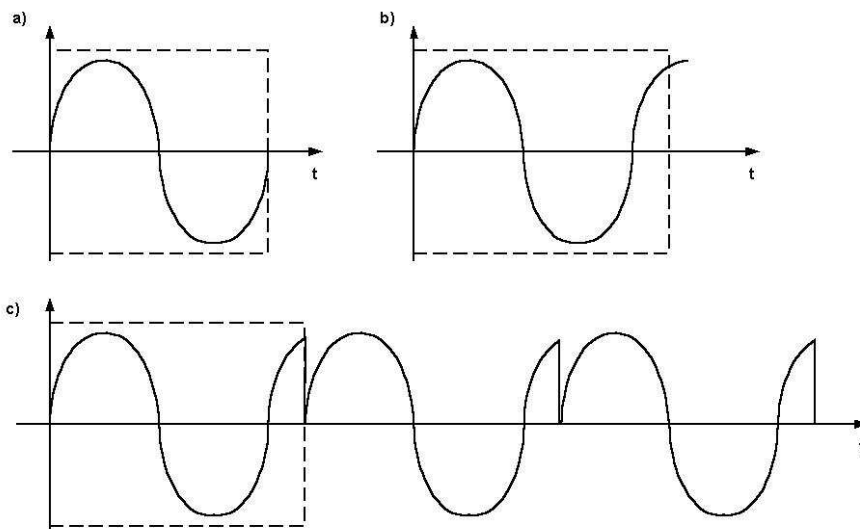
a $2\pi k/N$ jest odpowiednikiem unormowanej pulsacji θ .

Para zależności (15), (16) stanowi zapis odpowiednio prostej i odwrotnej dyskretny transformaty Fouriera (DTF, ODTF)

W praktyce pomiarowej powstaje problem braku korelacji między czasem akwizycji (czasem pobierania próbek) a okresem badanego sygnału. Zależność (16) umożliwia dokładne wyznaczenie widma (tzn. dokładne określenie położenia prążka na osi częstotliwości) tylko w przypadku, jeżeli próbki zostały pobrane z jednego okresu przebiegu badanego (rys.8a) lub całkowitej wielokrotności okresu. W rzeczywistości skończony czas obserwacji sygnału powoduje, że próbki mogą stanowić fragment sygnału taki jak na rysunku 8b. Pobrany zbiór próbek jest traktowany jak jeden okres przebiegu, zatem obliczone widmo odpowiada sygnałowi o kształcie jak na rysunku 8c. W efekcie w widmie znajdują się składowe, które nie występują w oryginalnym sygnale. Zjawisko takie nazywa się „przeciekaniem” widma.

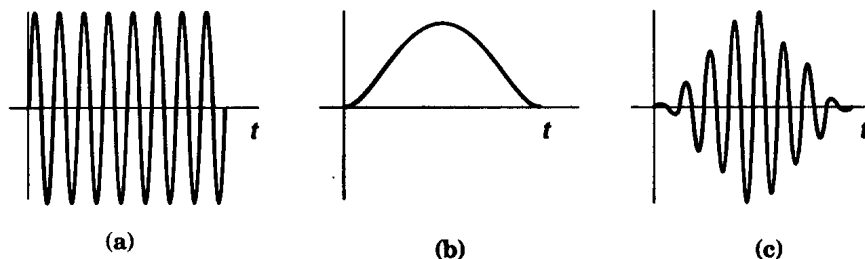
Postać sygnału (taką jak na rysunku 8b) otrzymuje się po przepuszczeniu sygnału dyskretnego przez tzw. prostokątne okno czasowe $w(n)$ zdefiniowane następująco:

$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots, N \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases} \quad (17)$$



Rys. 8. Efekt powielenia sygnału występujący, gdy próbki pobrane zostały z przypadkowego fragmentu przebiegu

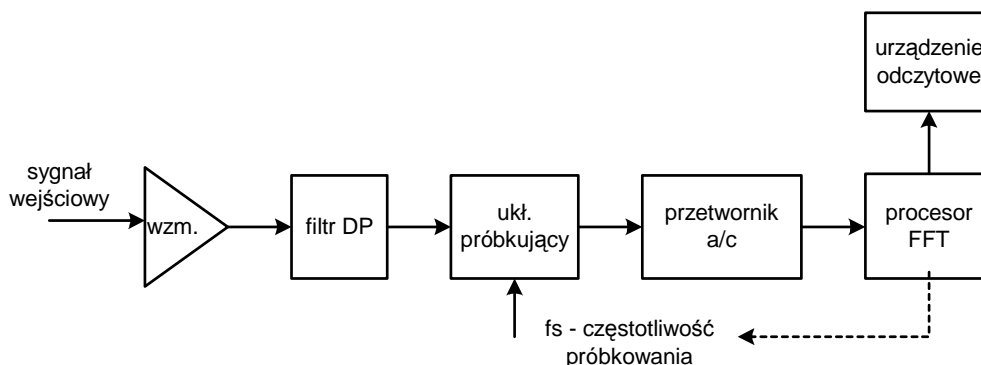
W celu zminimalizowania zjawiska „przecieku” stosuje się specjalne okna czasowe o krawędziach łagodnych (na wzór krzywej Gaussa) w porównaniu z oknem prostokątnym. Wprowadzenie takiego okna wpływa jedynie na wartość amplitudy, nie zmienia natomiast wartości częstotliwości badanego przebiegu, a zapewnia to, że próbkowanie zaczyna się i kończy w „zerowych” wartościach sygnału badanego (rys.9).



Rys. 9. Zastosowanie okna czasowego; a) oryginalny przebieg, b) okno czasowe, c) przebieg po zastosowaniu okna czasowego.

Zależności opisujące prostą i odwrotną Dyskretną Transformatę Fouriera są dość skomplikowane i jak się okazuje wymagają dużego nakładu czasu do wyznaczenia jej w sposób numeryczny. W związku z tym przez szereg lat prowadzone były badania nad opracowanie szybkiego algorytmu numerycznego. Uwieńczeniem ich jest algorytm tzw. Szybkiej Transformaty Fouriera (STF, lub bardziej powszechnie używany skrót zaczerpnięty z jęz. angielskiego: **FFT - Fast Fourier Transform**). Algorytm ten wydatnie skraca czas niezbędny na obliczenia numeryczne. Wszystkie obecnie budowane cyfrowe analizatory widma wykorzystują do obliczeń różne odmiany pierwotnej wersji algorytmu FFT.

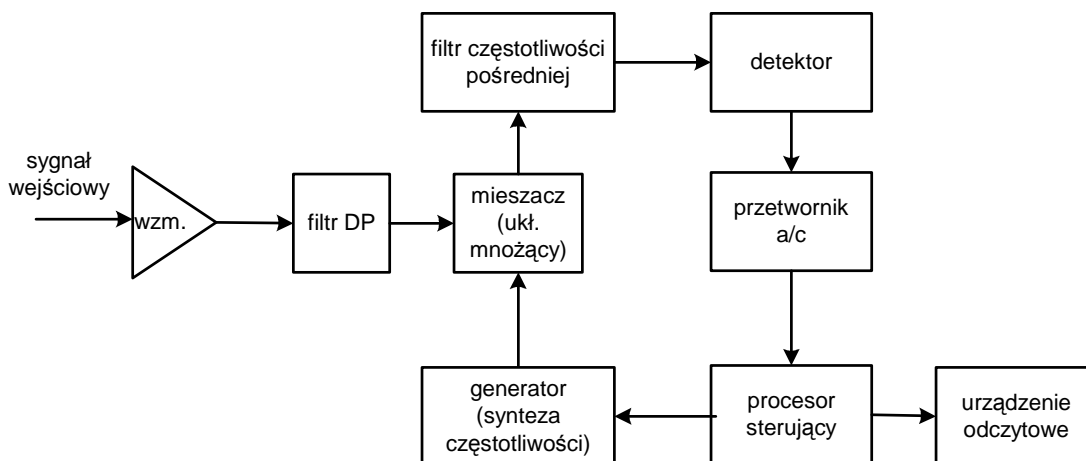
Strukturę takiego analizatora przedstawiono na rysunku 10.



Rys. 10. Struktura analizatora widma z procesorem FFT

Podstawowe znaczenie dla prawidłowej analizy ma relacja między pasmem badanego sygnału a częstotliwością próbkowania f_s . Zadaniem filtra dolnoprzepustowego (tzw. filtra antyaliasingowego) na wejściu układu jest ograniczenie pasma sygnału do wartości umożliwiającej spełnienie twierdzenia o próbkowaniu. Problemem przy analizie widmowej jest rozdzielczość w dziedzinie częstotliwości. Jeżeli zbiór

danych do analizy składa się z N próbek sygnału, a częstotliwość próbkowania wynosiła f_s , to analizator wyznaczy wartości amplitud harmonicznych o częstotliwościach $0, f_s/N, 2f_s/N$ itd., co wcale nie musi odpowiadać rzeczywistym wartościom częstotliwości harmonicznych (to jest analogiczny problem jak z pasmem filtrów na rys. 4). W powyższym przypadku odstęp na osi częstotliwości wyniesie f_s/N , z czego wynika, że aby poprawić rozdzielczość czyli dokładność zobrazowania widma należy zwiększyć liczbę próbek lub zmniejszyć częstotliwość próbkowania. Wzrost liczby próbek zwiększa nakłady obliczeniowe, wydłuża czas obliczeń i wymusza przechowywanie większej liczby danych. Z kolei zmniejszenie częstotliwości próbkowania może spowodować powstanie aliasingu. Z każdą zmianą częstotliwości próbkowania powinna ulegać zmianie charakterystyka filtru wejściowego. W praktyce filtr ma niezmienną charakterystykę, a analizator próbkuje z maksymalną częstotliwością. Proces zmniejszania częstotliwości próbkowania jest realizowany metodą decymacji ciągu próbek wejściowych, tzn. wybierania do analizy co n -tej próbki, a zerowaniu pozostałych. Taka technika poprawia rozdzielczość, ale przy ograniczeniu pasma sygnałów wejściowych. Rozwiązaniem umożliwiającym poprawę rozdzielczości w dowolnym paśmie jest transformacja (przesunięcie) pasma badanego sygnału metodą mieszania tego sygnału z sygnałem z lokalnego generatora (przetwarzanie heterodynowe). Mieszanie sygnałów jest fizycznie realizowane przez układ mnożący. Jeżeli na wejścia układu mnożącego zostaną podane sygnały o częstotliwościach f_1 i f_2 , to na wyjściu pojawi się sygnał zawierający składowe o częstotliwościach $f_1 + f_2$ i $f_1 - f_2$. Składową sumacyjną eliminuje się za pomocą filtru dolnoprzepustowego i dalszemu przetwarzaniu podlega składowa różnicowa. Wynik przetwarzania lub pomiaru musi być przeskalowany na pasmo odpowiadające rzeczywistej częstotliwości badanego sygnału. Analizatory FFT pozwalają na badanie sygnałów w paśmie do kilkuset kHz. Technika transformacji pasma stanowi podstawę działania analizatorów działających w paśmie częstotliwości radiowych. Strukturę takiego analizatora przedstawiono na rys. 11.



Rys. 11. Analizator z przestrajaniem częstotliwości

Idea działania układu mnożącego została wyżej przedstawiona. Zastosowany w układzie filtr częstotliwości pośredniej ma stałą charakterystykę natomiast zmianie ulega częstotliwość generatora lokalnego. W układach analogowych ten generator jest generatorem VCO sterowanym napięciem narastającym liniowo, natomiast w układach cyfrowych generator działa na zasadzie bezpośredniej syntezy częstotliwości (próbki sygnału zapisane w pamięci i wyprowadzane pod kontrolą procesora).

Widmo częstotliwościowe sygnałów rzeczywistych wyznaczane z użyciem typowych analizatorów widma jest zwykle zobrazowane za pomocą linii ciągłej, która stanowiącej obwiednię widma prążkowego. Tę formę zobrazowania prezentuje rys.12

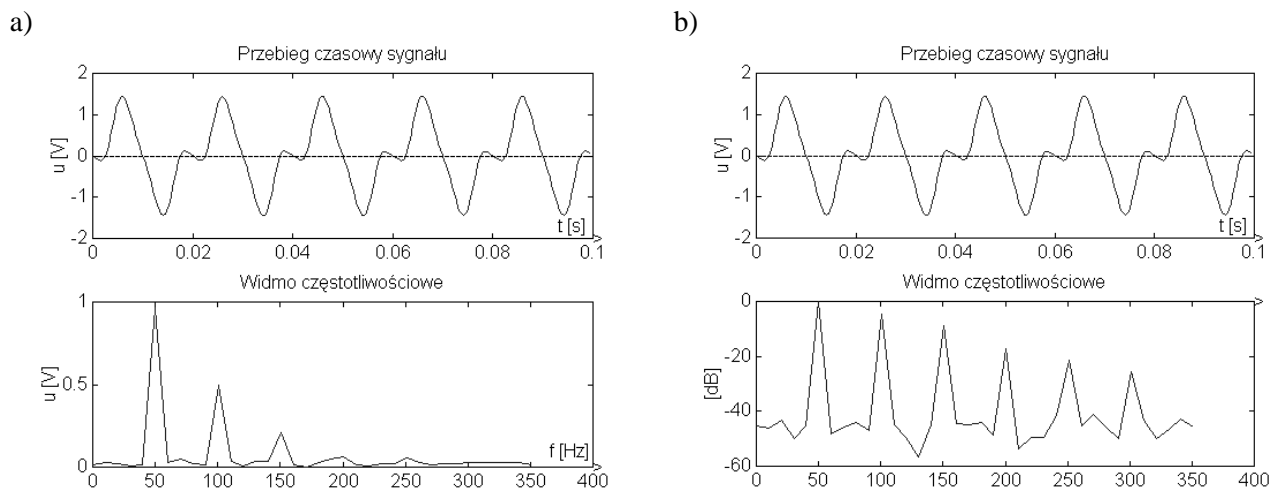
Na rysunku 12a pokazano amplitudy harmonicznych w jednostkach rzeczywistej wartości mierzonej (napięcia) przy zastosowaniu skali liniowej. W takiej skali trudno zobrazować duże różnice w poziomie harmonicznych. Zazwyczaj oś pionową na wykresach widma opisuje się w decybelach (rys.12b). Decybele są jednostką miary logarytmicznej stosunku dwóch wielkości.

Zazwyczaj decybele są stosowane w odniesieniu do mocy sygnałów i wówczas:

$$A[\text{dB}] = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \quad (18)$$

lub w odniesieniu do wartości skutecznych napięcia i wówczas:

$$A[\text{dB}] = 20 \log \frac{U_2}{U_1} \quad (19)$$



Rys. 12. Przebieg sygnału odkształconego i jego widmo w formie obwiedni prążków w skali liniowej (a) i logarytmicznej (b)

W przypadku analizy widmowej wielkością odniesienia (U_1) może być amplituda podstawowej harmonicznej (jako U_2 będą występowały wówczas amplitudy wyższych harmonicznych). Analizatory widma obliczając, na podstawie zależności (19), stosunek dwóch wartości napięcia stosują czasami stałą wartość napięcia odniesienia równą $1V_{sk}$. Wszystkie harmoniczne są wtedy wyrażone w jednostkach dBV.

W rezultacie otrzymuje się obraz widma, na którym lepiej widoczne są wyższe harmoniczne (rys.12b)

Podsumowanie rozważań teoretycznych:

- Wprowadzenie sygnału do pamięci komputera wymaga uprzednio procesu próbkowania (w czasie) i kwantyzacji (w amplitudzie), czyli przetworzenia analogowo-cyfrowego;
- Wyznaczanie widma sygnału w sposób numeryczny jest dokonywane z wykorzystaniem Dyskretnej Transformaty Fouriera (algorytm FFT);
- Sygnał odtworzony z DFT należy traktować jako okresowy, wynikający z powielenia fragmentu (bloku) sygnału wziętego do analizy;
- W celu zmniejszenia zniekształceń sygnału zakłada się nań tzw. okna czasowe o łagodnych krawędziach, łagodzące „ostre” cięcia standardowego okna prostokątnego.

3. Zastosowania analizy widmowej.

Najszerze zastosowanie analiza widmowa znajduje w dziedzinie sygnałów akustycznych. Szczególne miejsce znajdują tu badania audiometryczne prowadzące do określenia częstotliwościowych charakterystyk słuchu. Mieszczą się tutaj również pomiary hałasu, a także akustyki pomieszczeń. Bardzo ważną dziedzinę zastosowań stanowi przetwarzanie sygnału mowy. Z sygnałami akustycznymi są blisko związane badania geofizyczne obejmujące obserwację zjawisk naturalnych (trzęsienia ziemi, wybuchy wulkanów) oraz zjawisk sztucznych związanych z poszukiwaniem surowców, głównie ropy i gazu ziemnego.

Kolejny, bardzo szeroki obszar zastosowań, to diagnostyka urządzeń technicznych. Obejmuje ona badania stanu maszyn, urządzeń i konstrukcji w celu oceny ich jakości, stopnia sprawności lub zużycia. Ważnym parametrem są tutaj drgania mechaniczne (wibracje). Analiza widmowa wibracji pozwala w porę wykryć stany niesprawności oraz wyeliminować zużyte elementy. Typowym przykładem są tutaj drgania łopatek turbiny w elektrowni.

Analizy widmowe stosowane są również w diagnostyce medycznej. Organizm ludzki jest obiektem generującym wiele sygnałów elektrycznych które są wykorzystywane w procesie diagnozowania. Do najbardziej znanych należą elektrokardiogram (EKG) oraz elektroencefalogram (EEG).

Kolejna dziedzina to telekomunikacja oraz telemetria, gdzie często występują sygnały bardzo złożone (modulacja amplitudy, modulacja częstotliwości, modulacje impulsowe). Ostatnio coraz szersze zastosowanie analizy widmowe znajdują również w dziedzinie rozpoznawania obrazów.

W przypadku analizy przebiegu sinusoidalnego z generatora, na podstawie obserwacji jego widma można oszacować tzw. zawartość harmonicznych sygnału sinusoidalnego świadczącą o niedoskonałości generatora.

4. Autonomiczny analizator widma sygnałów

Oscyloskop cyfrowy HP-54603B z modulem HP54659B umożliwia wykonywanie działań matematycznych na próbkach sygnału zapisanych w pamięci oscyloskopu.

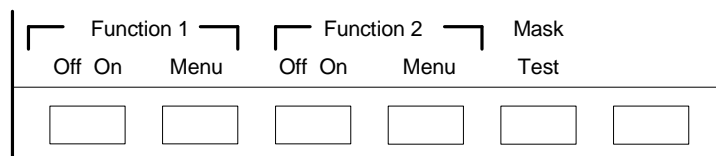
Działania mogą być wykonywane na próbkach dwóch sygnałów i wówczas są to operacje:

- sumowania,
- odejmowania,
- mnożenia

lub próbkach pojedynczego sygnału i wówczas są to operacje:

- całkowania,
- różniczkowania,
- Szybkiej Transformaty Fouriera (FFT).

Menu działań matematycznych jest uaktywniane za pomocą przycisku +/- i jest pokazane na rysunku 13.



Rys. 13. Menu działań matematycznych

Działania są podzielone na dwie grupy:

- *Function 1*,
- *Function 2*.

Function 1 – działania: sumowanie, odejmowanie, mnożenie.

Opcja **ON/OFF** włącza lub wyłącza działanie matematyczne, a aktywując przycisk **Menu** można wybrać, które z działań ma być wykonane.

Function 2 - działania: całkowanie, różniczkowanie, Szybka Transformata Fouriera (FFT).

Tak jak w Function1, w Function 2 opcja **ON/OFF** włącza lub wyłącza działanie funkcji, a przycisk **Menu** udostępnia wybór funkcji do wykonania. W tym menu dostępne są również następujące opcje:

- **Operand** - (1, 2, F1) - dokonanie wyboru, na którym sygnale ma być przeprowadzone działanie funkcji matematycznej:

- a) 1 - sygnał na pierwszym kanale oscyloskopu,
- b) 2 - sygnał na drugim kanale oscyloskopu,
- c) F1 - wybór sygnału, który jest wynikiem działania matematycznego z pierwszej grupy: Function 1.

- **Operation** - jaka operacja (funkcja) matematyczna ma być wykonana. Do wyboru jest dostępne:

- a) całkowanie - $\int dt$,
- b) różniczkowanie - dV/dt ,
- c) FFT.

Przy korzystaniu z funkcji FFT należy zwrócić uwagę na wartość częstotliwości próbkowania sygnału względem częstotliwości sygnału. Chodzi tu o spełnienie tw. o próbkowaniu (zachowanie warunku Nyquista).

Oscyloskop HP-54603B wykorzystuje do analizy sygnału stałą liczbę 1000 próbek (czyli długość rekordu równa jest 1000). To powoduje, że przy różnym czasie rejestracji przebiegu (zależnym od nastawy podstawy czasu) zmienia się efektywna częstotliwość próbkowania.

efektywna częstotliwość próbkowania = $1000 / (\text{nastawa podstawy czasu} * \text{liczba działek na ekranie})$

liczba działek = 10, zatem przy 1ms/dz $f_p=100\text{kHz}$; przy 1 μs /dz $f_p=100\text{MHz}$ itp.

warunek prawidłowej analizy : max. częstotliwość badanego sygnału $f_s < f_p/2$

Uwaga: efektywna częstotliwość próbkowania jest znacznie większa od rzeczywistej częstotliwości pobierania próbek co jest konsekwencją zastosowania w oscyloskopie cyfrowym techniki próbkowania pseudoprzypadkowego.

Aby włączyć analizę FFT należy za pomocą przycisku Function2 / **Menu** --> **Operation** wybrać opcję **FFT** i uaktywnić ją ustawiając Function2 na **ON**.

- **Units/div** wartość dB na jedną działkę ekranu (decybeli na działkę),
- **Ref Levl** wartość poziomu odniesienia (górna krawędź ekranu) określona w dBV. Oznacza to, że jeżeli do wejścia oscyloskopu doprowadzimy sygnał sinusoidalny o wartości 1Vsk (1Vrms) i ustawimy wartość Ref Levl

na "0", to prążek odpowiadający podstawowej harmoniczej będzie sięgać do poziomu odniesienia (górnej krawędzi ekranu).

Operand	Operation	Units/div	Ref Lev	FFT	Previous
1 2 F1	FFT	10.00 dB	-10.00 dBV	Menu	Menu
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Cent Freq	Freq Span	Move 0Hz	Autoscale	Window	Previous
122.1kHz	244.1kHz	To left	FFT	Hanning	Menu
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Rys. 14. Menu Function 2 i FFT Menu

- **FFT Menu** - ustawienia dotyczące analizy widma:

a) **Cent Freq** - wartość częstotliwości w środku ekranu,

b) **Freq Span** – szerokość okna w dziedzinie częstotliwości,

Funkcja ta udostępnia wybór czterech szerokości okna dla danej częstotliwości próbkowania usytuowanych wokół częstotliwości środkowej (Centr Freq) przy czym najszersze okno jest mniejsze od $f_p/2$, kolejne od $f_p/4$ itd.

c) **Move 0Hz** - ustawienie zerowej częstotliwości na ekranie (po środku lub z lewej strony ekranu),

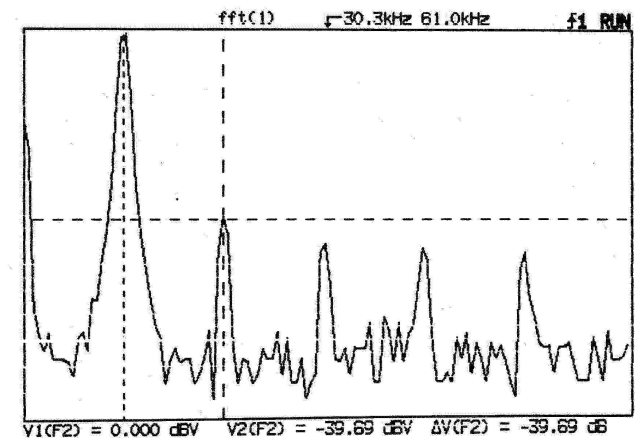
d) **Autoscale FFT** - automatyczne ustawienia oscyloskopu (przyrząd sam dobiera warunki analizy sygnału),

e) **Window** - wybór okien czasowych,

Okna te mają różny kształt i potrafią np.: uwypuklić lub ograniczyć zakłócenia w sygnale, uwydatnić harmoniczne lub uwypuklić prążek główny. Najczęściej stosowane i najbardziej uniwersalne okno to okno *Hanninga*. Daje ono wyraźny obraz prążka głównego i prążków harmonicznych. Ponadto prążki te na ekranie mają szpilkowaty kształt o ostro zakończonych wierzchołkach. Inne okno, o nazwie "*FlatTop*" daje obraz szerokich prążków o płaskim wierzchołku.

- **Previous Menu** - powrót do poprzedniego menu.

Na rysunku 15 przedstawiono rzeczywisty obraz ekranu oscyloskopu z aktywną funkcją FFT.



Rys. 15. Obraz widma sygnału na ekranie oscyloskopu

Amplituda podstawowej harmoniczej (rys. 15), opisana przez położenie kursora V1, wynosi 0dBV co odpowiada w jednostkach napięcia wartości $1V_{sk}$. Rzeczywista wartość amplitudy jest większa $\sqrt{2}$ razy (współczynnik szczytu $k = U_{max} / U_{sk}$ dla przebiegu sinusoidalnego). Poziom kolejnej harmoniczej jest opisany przez położenie kursora V2 i wynosi -39.69dBV.

Wartość harmoniczej w jednostkach napięcia można wyznaczyć z zależności:

$$-39.69[\text{dBV}] = 20 \log U/1V_{sk}$$

a zatem

$$U = 1V_{sk} * 10^{-39.69/20} = 1V_{sk} / 10^{39.69/20}$$

Tak obliczona wartość U wyraża poziom harmoniczej w jednostkach napięcia, ale w odniesieniu do wartości skutecznej.


Analiza widmowa służy przede wszystkim do określania względnych różnic w poziomach harmonicznych. Różnica pomiędzy pierwszą i drugą harmoniczną wynosi $\Delta V = 39.69\text{dB}$ co w skali liniowej odpowiada wartości $10^{39.69/20} = 96.49$ (tyle razy pierwsza harmoniczna jest większa od drugiej). Oznacza to, że druga harmoniczna stanowi około 1% pierwszej. Z tego obliczenia widać jaki jest sens zastosowania decybeli (w skali liniowej obraz drugiej harmonicznej będzie prawie 100 razy mniejszy niż pierwszej).

5. Realizacja ćwiczenia


Część praktyczna ćwiczenia polega na przeprowadzeniu analizy widmowej wybranych sygnałów pomiarowych za pomocą dostępnych analizatorów. Zakres pomiarów realizowanych w ćwiczeniu jest określany przez prowadzącego.

5.1. Zadania podstawowe – autonomiczny analizator widma

5.1.1 Funkcje i właściwości analizatora widma - sygnał sinusoidalny

- Na wejście oscyloskopu podaj z generatora sygnał sinusoidalny o wartości skutecznej 1V i częstotliwości 1kHz.
- Skontroluj parametry sygnału korzystając z funkcji pomiarów automatycznych oscyloskopu.
- Włącz analizę FFT; ustaw częstotliwość próbkowania (**Time/div**) na 10kSa/s, skalę **Unit/div** na 10dB, poziom odniesienia na 0 (**Ref lev**), okno **Hanninga**, wyłącz przebieg czasowy ( -> Off).
- Włącz kursory i zmierz częstotliwość wykorzystując kursor **f1**.
- Sprawdź jaka jest zależność pomiędzy **Freq Span** a częstotliwością próbkowania i jak można regulować **Cent Freq** oraz **Freq Span**; wykorzystaj i sprawdź działanie funkcji: **Move f1 To Center**, **Find Peaks**, **Move 0Hz to Left**
- Dla określonej częstotliwości próbkowania zwiększ częstotliwość sygnału. Co się stanie jeżeli przekroczysz $f_p/2$? Co widzisz na analizatorze ?
- Sprawdź jaki wpływ na kształt prążka mają inne okna. Jakie może być przeznaczenie poszczególnych okien ?
- Ustaw okno płaskie (**FlatTop**); zwiększ amplitudę sygnału tak, aby prążek sięgnął górnej krawędzi ekranu. Oblicz jaka jest teraz wartość amplitudy w jednostkach napięcia ? Włącz przebieg czasowy i zmierz amplitudę sygnału.
- Określ orientacyjnie kursorami (przy wyłączonym przebiegu czasowym) poziom szumu; sprawdź jaki jest odstęp w decybelach pomiędzy podstawową harmoniczną a szumem; przelicz tą wartość na skalę liniową.
- Powtórz doświadczenie ze zwiększaniem częstotliwości sygnału (przy danej częstotliwości próbkowania), ale przy włączonym przebiegu czasowym; spróbuj zaobserwować jak zmienia się obraz przebiegu i jaką może przybrać postać ?

5.1.2 Analiza sygnałów niesinusoidalnych

- Na wejście oscyloskopu podaj z generatora sygnał prostokątny o amplitudzie 1V i częstotliwości 1kHz
- Skontroluj parametry sygnału korzystając z funkcji pomiarów automatycznych oscyloskopu.
- Włącz analizę FFT; wyłącz przebieg czasowy ( -> Off).
- Ustaw poziom odniesienia (**Ref lev**), i rozdzielczość **Unit/div** na taką wartość, aby obraz zmieścił się na ekranie; włącz okno **Hanninga**
- Ustaw częstotliwość próbkowania (**Time/div**) na taką wartość, aby widzieć kilka pierwszych harmonicznych; zmieniaj płynnie częstotliwość sygnału i zaobserwuj jak zmienia się obraz widma; zwróć uwagę jak przemieszczają się prążki wyższych harmonicznych.
- Włącz kursory i zmierz częstotliwość harmonicznych.
- Włącz okno płaskie; korzystając z kursorów zmierz różnice w poziomach poszczególnych harmonicznych i porównaj z obliczeniami teoretycznymi (to można zrobić w sprawozdaniu korzystając z Matlab); przy pomiarze poziomu harmonicznych zwiększ rozdzielczość (**Unit/div** = 1dB).
- Jaka powinna być amplituda sygnału prostokątnego, aby prążek odpowiadający pierwszej harmonicznej przy **Ref lev** = 0 sięgnął górnej krawędzi ekranu ? (zmierz i oblicz !)
- Powtórz doświadczenia z przebiegiem trójkątnym.

5.1.3 Rozdzielczość analizy widmowej

- Na wejścia oscyloskopu podaj z generatorów sygnały sinusoidalne o amplitudzie 1V i częstotliwości 1kHz i 2kHz.
- Skontroluj parametry sygnałów korzystając z funkcji pomiarów automatycznych oscyloskopu.
- Wykonaj sumowanie sygnałów (Function 1).
- Włącz analizę FFT; wybierz **Operand F1**; wyłącz przebiegi czasowe ($\boxed{1}$ -> Off, $\boxed{2}$ -> Off).
- Ustaw poziom odniesienia (**Ref lev**), i rozdzielczość **Unit/div** na taką wartość, aby obraz zmieścił się na ekranie; włącz okno **Hanninga**
- Zaobserwuj widmo sygnału będącego sumą dwóch przebiegów sinusoidalnych; sprawdź kursorami częstotliwość harmonicznych.
- Zmień częstotliwość jednego z przebiegów tak, aby zmniejszyć różnicę częstotliwości harmonicznych; wykorzystując **Freq Span** i **Cent Freq** sprawdź przy jakiej różnicy częstotliwości możesz jeszcze rozróżnić prążki. Jak poprawić rozdzielczość w dziedzinie częstotliwości ?
- Przeprowadź podobne doświadczenia dla iloczynu dwóch sygnałów. Jakie harmoniczne występują w przebiegu wyjściowym?

5.2. Zadania dodatkowe – analizator autonomiczny

1. Porównaj zawartość harmonicznych (poziom zniekształceń) sygnałów sinusoidalnych o tych samych parametrach generowanych przez dwa typy generatorów: standardowy KZ1406 oraz o małych zniekształceniach (Ultra Low Distortion Gen.) KZ1118. Oszacuj zawartość harmonicznych w sygnale pochodzącym z generatora KZ1406. Badania przeprowadź dla różnych wartości częstotliwości.

Zawartość harmonicznych okresowego sygnału odkształconego definiuje się jako:

$$h = \sqrt{h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 + \dots + h_{n-1}^2 + h_n^2} \quad (20)$$

gdzie: $h_k = U_{mk}/U_{m1}$, oznacza zawartość k-tej harmonicznej (stosunek amplitudy k-tej harmonicznej do amplitudy składowej podstawowej)

2. Przeprowadź analizę przebiegów wyjściowych z :

- transformatora sieciowego
- prostownika jednopółkowego,
- prostownika dwupółkowego.

Sygnały występujące na wyjściu prostowników, jako sygnały okresowe (o amplitudzie A i pulsacji ω_0) dają się w prosty sposób rozłożyć na szereg Fouriera. Dla prostownika dwupółkowego otrzymuje się (zapis zespolony i trygonometryczny):

$$x(t) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{j2n\omega_0 t} \quad (21)$$

$$x(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\omega_0 t$$

W przypadku prostownika jednopółkowego:

$$x(t) = \frac{A}{j4} e^{j\omega_0 t} - \frac{A}{j4} e^{-j\omega_0 t} - \frac{A}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{j2n\omega_0 t} \quad (22)$$

$$x(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2n\omega_0 t$$

3. Dokonaj analizy widmowej przebiegu napięcia na obciążeniu (żarówka) tyrystorowego regulatora mocy. Badania przeprowadź dla różnych wartości tej mocy.

6. Literatura uzupełniająca

- [1]. Lyons R. G.: „Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów”, WKŁ, Warszawa, 1999.
- [2]. Marven C., Ewers G.: „Zarys cyfrowego przetwarzania sygnałów”, WKŁ, Warszawa, 1999.
- [3]. Borodziewicz W., Jaszczak K.: „Cyfrowe przetwarzanie sygnałów”, WNT, Warszawa, 1987.
- [4]. Piotrowski J.: „Pomiarowe zastosowania analizy sygnałów”, PWN, Warszawa, 1991