Piotr Durniat
I rok, Fizyka
Wtorek, 8:00-10:15

Data wykonania pomiarów:
18.03.2025

Prowadząca:
dr Iwona Mróz

Ćwiczenie nr 11

Wyzznaczanie elipsoidy bezwładności bryły sztywnej

Spis treści

1 Wstęp teoretyczny **2**

2 Opis doświadczenia **3**

3 Opracowanie wyników pomiarów **4**
3.1 Tabele pomiarowe 4
3.2 Moment bezwładności bryły wzorcowej 4
3.3 Moment bezwładności badanej bryły 4
3.4 Wyznaczanie elipsoidy bezwładności badanej bryły 5
3.5 Wyznaczanie momentu bezwładności względem osi niebędących głównymi osiami bezwładności 5
3.5.1 Oś przechodząca przez środek masy (s) 5
3.5.2 Oś nieprzechodząca przez środek masy (t) 6
3.6 Porównanie momentów bezwładności obliczonych dwoma sposobami 7

4 Ocena niepewności pomiaru **7**
4.1 Niepewność standardowa momentu bezwładności 7

5 Wnioski **7**

6 Wykresy **7**

1 Wstęp teoretyczny

Pierwsza zasada dynamiki ruchu obrotowego

Pierwsza zasada dynamiki ruchu obrotowego stwierdza, że jeżeli na ciało nie działa wypadkowy moment siły, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem obrotowym jednostajnym. Matematycznie można to zapisać jako:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

gdzie M_i oznacza i-ty moment siły działający na ciało, a $\vec{L}$ to moment pędu ciała. Moment pędu wyraża się wzorem:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

gdzie I oznacza moment bezwładności ciała, a $\vec{\omega}$ jego prędkość kątową.

Tensor momentu bezwładności

Moment bezwładności ciała zależy od wyboru osi obrotu. Do pełnego opisu własności bezwładnościowych ciała służy tensor momentu bezwładności, który ma postać macierzy:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Elementy tego tensora definiuje się następująco:

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k(r_k^2\delta_{ij} - r_{ki}r_{kj})$$

gdzie m_k oznacza masę k-tego elementu ciała, r_{ki} to współrzędna k-tego elementu na osi i, a δ_{ij} to delta Kroneckera.

Elipsoida bezwładności

Elipsoida bezwładności to powierzchnia, której odległość r od środka masy w dowolnym kierunku jest powiązana z momentem bezwładności I względem tej osi zależnością:

$$I = \frac{1}{r^2}$$

Długości półosi elipsoidy są równe odwrotnościom pierwiastków kwadratowych z głównych momentów bezwładności:

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_{xx}}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{I_{yy}}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{I_{zz}}}$$

Znajomość elipsoidy bezwładności umożliwia wyznaczenie momentu bezwładności dla dowolnej osi obrotu.

Wahadło torsyjne

Wahadło torsyjne to układ składający się z pręta zawieszonego na nici, który może wykonywać drgania skrętne. Po wychyleniu o kąt θ od położenia równowagi, na pręt działa moment siły sprężystości M:

$$M = -k\theta \tag{1}$$

gdzie k jest współczynnikiem sprężystości skrętnej. Okres drgań wahadła torsyjnego wyraża się wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \tag{2}$$

gdzie:

- I – moment bezwładności bryły
- k – moment kierujący wahadła

Z powyższego wzoru można wyznaczyć moment bezwładności:

$$I = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \tag{3}$$

Wstęp teoretyczny opracowano na podstawie monografii [1] (rozdział 19) oraz instrukcji do ćwiczenia [2].

2 Opis doświadczenia

Celem doświadczenia było wyznaczenie elipsoidy bezwładności bryły sztywnej metodą wahadła torsyjnego. Pomiary wykonano w następujących etapach:

1. **Pomiar okresu drgań samej ramki**
   Zmierzono czas trwania 10 drgań pustej ramki wahadła torsyjnego (T_0). Ramkę wychylano o ustalony kąt za pomocą elektromagnesu, a po jego wyłączeniu mierzono czas drgań układem elektronicznym.

2. **Pomiar okresu drgań z bryłą wzorcową**
   Wykonano pomiar czasu 10 drgań ramki z zamocowanym walcem wzorcowym o masie 1330 g (T_w). Zmierzono również wymiary walca niezbędne do obliczenia jego momentu bezwładności.

3. **Pomiary dla badanej bryły**
   Dla badanej bryły wykonano serię pomiarów czasu 10 drgań (T_1):

   - względem trzech osi głównych przechodzących przez środek masy
   - względem jednej dowolnie wybranej osi przechodzącej przez środek masy
   - względem osi wskazanej przez prowadzącego, nieprzechodzącej przez środek masy

Układ pomiarowy składał się z wahadła torsyjnego z elektromagnetycznym mechanizmem wyzwalania drgań oraz elektronicznego układu pomiaru czasu.

3 Opracowanie wyników pomiarów

3.1 Tabele pomiarowe

- Błąd wskazania zerowego suwmiarki wyniósł 0.15 mm.
- Niepewność wzorcowania suwmiarki $\Delta_d D = 0.05$ mm.
- Kąt $\alpha = 30°$.

Rodzaj układu	**Czas 10 drgań [s]**	**Okres T [s]**
Sama ramka	18.135	1.8135
Ramka + walec wzorcowy	25.192	2.5192

Tabela 1: Pomiar czasu drgań ramki i ramki z walcem wzorcowym

Oś obrotu	**Czas 10 drgań [s]**	**Okres T [s]**
Główna oś 1 (x)	23.001	2.3001
Główna oś 2 (y)	23.008	2.3008
Główna oś 3 (z)	22.937	2.2937
Dowolna oś przez środek masy (s)	23.006	2.3006
Dowolna oś nieprzechodząca przez środek masy (t)	22.573	2.2573

Tabela 2: Pomiar czasu drgań ramki z badaną bryłą dla różnych osi

Wielkość	**Wartość [mm]**	**Po korekcie [mm]**
Średnica podstawy d [mm]	60.15	60.00
Wysokość walca h [mm]	60.15	60.00
Masa walca m [g]	1330	1330

Tabela 3: Rozmiary bryły wzorcowej, wraz z korektą wskazania zerowego

3.2 Moment bezwładności bryły wzorcowej

Badaną bryłą jest walec o wymiarach w tabeli 3, moment bezwładności walca dla osi przechodzącej przez środki podstaw określa wzór:

$$I_w = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\right)^2 \tag{4}$$

Podstawiając dane z tabeli 3 otrzymujemy:

$$I_w = \frac{1}{2} \cdot 1,330 \cdot \left(\frac{0.06}{2}\right)^2 = 0.0060\,\mathrm{kgm}^2 \tag{5}$$

3.3 Moment bezwładności badanej bryły

Dla samej ramki okres drgań na podstawie wzoru 2 wynosi:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{k}} \tag{6}$$

Stąd okres T_w drgań ramki z bryłą wzorcową o momencie bezwładności I_w wynosi:

$$T_w = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_w}{k}} \tag{7}$$

Zatem z równań (6) i (7) moment kierujący wahadła wynosi:

$$k = \frac{4\pi^2 I_w}{T_w^2 - T_0^2} \tag{8}$$

Z wzorów (3) i (8) otrzymujemy moment bezwładności I_x badanej bryły:

$$I_x = \frac{T_x^2 - T_0^2}{T_w^2 - T_0^2} \cdot I_w \tag{9}$$

Po podstawieniu okresów drgań z tabel 2 oraz 1 i momentu bezwładności walca I_w z wzoru (5) otrzymujemy:

Oś	Moment bezwładności [$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$]
I_x	0,000392
I_y	0,000392
I_z	0,000386
I_s	0,000392
I_t	0,000354

Tabela 4: Momenty bezwładności względem poszczególnych osi

Przykładowe obliczenia dla I_x:

$$I_x = \frac{(2,3001)^2 - (1,8135)^2}{(2,5192)^2 - (1,8135)^2} \cdot 0,005985 = 0,000392\,\mathrm{kgm}^2$$

3.4 Wyznaczanie elipsoidy bezwładności badanej bryły

Równanie elipsoidy ma postać:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{10}$$

a, b, c to półosie elipsoidy, które są zdefiniowane jako:

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_x}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{I_y}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{I_z}}$$

Podstawiając momenty bezwładności z tabeli 4 otrzymujemy:

$$a = 50,519636\mathrm{m} \quad b = 50,479042\mathrm{m} \quad c = 50,894785\mathrm{m}$$

3.5 Wyznaczanie momentu bezwładności względem osi niebędących głównymi osiami bezwładności

3.5.1 Oś przechodząca przez środek masy (s)

Znając momenty bezwładności względem głównych osi możemy obliczyć momenty bezwładności względem osi niebędących głównymi osiami bezwładności, korzystając z wzoru:

$$I_i = \frac{1}{R_i^2} \tag{11}$$

gdzie R_i to odległość między początkiem układu współrzędnych a punktem przebicia elipsoidy bezwładności przez wybraną oś:

$$R_i = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{12}$$

Wybrana oś przechodzi przez dwa przeciwległe wierzchołki sześcianu o boku a, stąd współrzędne jednego z punktów leżącego na osi s wynoszą:

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a}{2}, \quad z = \frac{a}{2}$$

Równanie prostej przechodzącej przez środek sześcianu (0, 0, 0) i punkt (a/2, a/2, a/2) ma postać:

$$\frac{x}{a/2} = \frac{y}{a/2} = \frac{z}{a/2} \Rightarrow x = y = z \tag{13}$$

Tworzymy układ równań (10) i (13) i rozwiązujemy go względem x, y, z:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = y = z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} &= 1 \\ x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \\ x &= \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \end{aligned}$$

Podstawiając wartości a, b, c otrzymujemy:

$$x = y = z = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{50{,}519636^2} + \frac{1}{50{,}479042^2} + \frac{1}{50{,}894785^2}}} = 29.2313\,\mathrm{m}$$

Stąd podstawiając do wzoru (11) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I_{s,elip} &= \frac{1}{R_i^2} = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2} = \frac{1}{3x^2} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 29.231314^2} = 0.0003901\,\mathrm{kgm}^2 \end{aligned}$$

3.5.2 Oś nieprzechodząca przez środek masy (t)

[[TODO: Obliczenia]]

3.6 Porównanie momentów bezwładności obliczonych dwoma sposobami

Moment bezwładności obliczony z wzoru (9) wartość z tabeli 4 wynosi $I_s = 0.0003923\,\mathrm{kgm}^2$. Porównując metodę elipsoidy (11) z metodą na podstawie okresu drgań wzoru (9) otrzymujemy:

$$\frac{I_s - I_{s,elip}}{I_s} = \frac{0.0003923 - 0.0003901}{0.0003923} = 0.0055$$

Wartość obliczona z elipsoidy bezwładności jest mniejsza o 0.55% od wartości obliczonej z wzoru (9).

[[TODO: Porównanie dla osi (t)]]

4 Ocena niepewności pomiaru

4.1 Niepewność standardowa momentu bezwładności

5 Wnioski

6 Wykresy

Literatura

[1] Tadeusz Dryński. *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 5 edition, 1976.

[2] Instytut Fizyki Doświadczalnej UWr. Wyznaczanie elipsoidy bryły sztywnej. https://wfa.uwr.edu.pl/wp-content/uploads/sites/216/2023/10/Mech.11-2023.pdf, 2023. Wstęp do ćwiczenia nr 11, I Pracownia Fizyczna.