

## Ćwiczenie nr 30

### Wyznaczanie względnej gęstości cieczy i ciał stałych

#### Spis treści

1	Wstęp teoretyczny	2
2	Opis doświadczenia	4
3	Opracowanie wyników pomiarów	5
3.1	Tabele pomiarowe . . . . .	5
3.2	Waga Mohra . . . . .	6
3.3	Waga Jolly'ego . . . . .	6
3.4	Sprawdzenie prawa Hooke'a . . . . .	6
4	Ocena niepewności pomiaru	7
4.1	Względna gęstość obliczona z wagi Mohra . . . . .	7
4.2	Względna gęstość obliczona z wagi Jolly'ego . . . . .	7
4.3	Niepewność współczynnika sprężystości . . . . .	8
5	Wnioski	8
6	Wykresy	10

# 1 Wstęp teoretyczny

## Ciężar właściwy ciała

Ciężar właściwy ciała ( $\gamma$ ) jest to stosunek ciężaru ciała ( $P$ ) do jego objętości ( $V$ ), wyrażony wzorem:

$$\gamma = \frac{P}{V}$$

W ogólności ciała rozszerzają się, gdy rośnie temperatura, tym samym ponieważ masa pozostaje stała, to gęstość ciała maleje. Istnieją jednak wyjątki od tej reguły, np. woda, która w temperaturze poniżej 4 stopni Celsjusza zachowuje się anomalnie - wzrasta jej gęstość wraz ze wzrostem temperatury, a poniżej 4 stopni Celsjusza zachowuje się odwrotnie - maleje gęstość wraz ze wzrostem temperatury.

## Waga Jolly'ego

Wyprowadzenie wzoru na względną gęstość ciała stałego wyznaczonego za pomocą wagi Jolly'ego:

Waga Jolly'ego to przyrząd wykorzystujący prawo Hooke'a do pomiaru siły wyporu i wyznaczenia gęstości ciał. Zgodnie z prawem Hooke'a, siła sprężystości jest proporcjonalna do odkształcenia sprężyny i wyraża się wzorem:

$$F_s = -k \cdot \Delta x$$

gdzie  $k$  jest współczynnikiem sprężystości, a  $\Delta x$  oznacza zmianę długości sprężyny.

Rozważmy dwa przypadki pomiarowe. W pierwszym przypadku, gdy ciało znajduje się w powietrzu, zachodzi równowaga sił:

$$F_s + F_g = 0$$

gdzie  $F_g$  to siła ciężkości działająca na ciało. Po podstawieniu otrzymujemy:

$$-k(h_p - h_0) + \rho_s V g = 0$$

gdzie  $h_p$  to położenie wskazówki wagi z ciężarkiem w powietrzu, a  $h_0$  to położenie wskazówki bez obciążenia. Z tego wynika, że:

$$k(h_p - h_0) = \rho_s V g \quad (1)$$

W drugim przypadku, gdy ciało jest zanurzone w cieczy, równowaga sił uwzględnia dodatkowo siłę wyporu:

$$F_s + F_{\text{wypór}} = F_g$$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$-k(h_w - h_0) + \rho_c V g = \rho_s V g$$

gdzie  $h_w$  to położenie wskazówki wagi z ciężarkiem zanurzonym w cieczy. Przekształcając to równanie, uzyskujemy:

$$k(h_w - h_0) = (\rho_s - \rho_c) V g \quad (2)$$

Aby wyznaczyć względną gęstość ciała, dzielimy równanie (1) przez równanie (2):

$$\frac{h_p - h_0}{h_w - h_0} = \frac{\rho_s}{(\rho_s - \rho_c)}$$

Następnie przekształcamy to wyrażenie:

$$\frac{h_w - h_0}{h_p - h_0} = \frac{\rho_s - \rho_c}{\rho_s}$$

$$1 - \frac{h_w - h_0}{h_p - h_0} = \frac{\rho_c}{\rho_s}$$

Odwracając ostatnie równanie, otrzymujemy wzór na względną gęstość ciała stałego:

$$R = \frac{\rho_s}{\rho_c} = \frac{h_p - h_0}{h_p - h_w} \quad (3)$$

W powyższym wzorze:

- $\rho_s$  to gęstość badanego ciała stałego,
- $\rho_c$  to gęstość cieczy,
- $h_p$  to położenie wskazówki wagi, gdy ciężarek znajduje się w powietrzu (na górnej szalce),
- $h_w$  to położenie wskazówki wagi, gdy ciężarek jest zanurzony w cieczy (na dolnej szalce),
- $h_0$  to położenie wskazówki wagi, gdy obie szalki są puste (bez ciężarka).

## Moment siły

Moment siły  $M$  jest to iloczyn siły  $F$  i ramienia  $r$ :

$$M = F \cdot r$$

## Waga Mohra

Waga Mohra składa się z wysuwanego ramienia, na którym umieszczona jest belka. Jedno z ramion belki jest podzielone na 10 równych działek, na których można wieszać ciężarki o znanych masach umownych. Na końcu belki znajduje się nurek, który umieszczany jest w badanej cieczy. Po umieszczeniu nurka w cieczy, należy zrównoważyć wagę za pomocą ciężarków umieszczonych na szalkach. Zając wagi koników i ich położenia, można wyznaczyć masę wypartej cieczy, korzystając z równowagi momentów sił. W stanie równowagi belki zachodzi równowaga momentów sił między ciężarkiem zawieszonym na 10 podziałce, a konikiem zawieszonym na  $n$ -tej podziałce. Porównując momenty sił dla obu ramion belki otrzymujemy:

$$m_z g R = m_i g \frac{R}{10} n$$

gdzie:

- $m_z$  - masa zastępcza ciężarka na 10 podziałce
- $m_i$  - masa  $i$ -tego konika
- $n$  - numer podziałki, na której wieszony jest konik
- $R$  - długość ramienia

Stąd masa zastępcza konika zawieszonego na  $n$ -tej podziałce wynosi:

$$m_z = m_i \frac{n}{10}$$

Masa wypartej cieczy przez ciężarek równa się więc sumie mas zastępczych wszystkich zawieszonych koników.

$$m_w = \sum_{i=1}^N \frac{m_i n_i}{10} \quad (4)$$

gdzie  $n_i$  to numer podziałki, na której zawieszony jest  $i$ -ty konik, a  $N$  to liczba koników.

W tym doświadczeniu szukana wielkość to względna gęstość alkoholu izopropylowego względem gęstości wody destylowanej, ponieważ objętość cieczy wypartej przez konik jest taka sama, niezależnie od cieczy, to otrzymujemy:

$$R = \frac{\rho_a}{\rho_w} = \frac{\frac{m_a}{V_a}}{\frac{m_w}{V_w}} = \frac{m_a}{m_w} = \frac{\sum_{i=1}^{N_a} m_{a,i} n_{a,i}}{\sum_{i=1}^{N_w} m_{w,i} n_{w,i}} \quad (5)$$

gdzie  $R$  to względna gęstość alkoholu względem gęstości wody, a  $m_w$  oraz  $m_a$  to masy wypartej cieczy odpowiednio dla wody oraz alkoholu,  $m_{a,i}$  oraz  $m_{w,i}$  to masy koników odpowiednio dla alkoholu oraz wody, a  $n_{a,i}$  oraz  $n_{w,i}$  to numery podziałek, na których zawieszony jest  $i$ -ty konik.

Wstęp teoretyczny opracowano na podstawie podręcznika Fizyka dla szkół wyższych, tom 2, dział Termodynamika, rozdziały 1.3 Rozszerzalność cieplna [2], oraz rozdziały 8 i 9 podręcznika Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, wydanie V [1].

## 2 Opis doświadczenia

Doświadczenie polega na wyznaczeniu gęstości cieczy oraz gęstości ciał stałych przy użyciu dwóch metod: wagi Mohra oraz wagi Jolly'ego.

### Część I: Waga Mohra

1. Zrównoważenie wagi z nurkiem w powietrzu
2. Zanurzenie nurka w wodzie destylowanej i zrównoważenie wagi za pomocą koników o znanych masach umownych
3. Powtórzenie pomiaru dla alkoholu
4. Odczyt i zapisanie położenia koników dla każdej cieczy

### Część II: Waga Jolly'ego

1. Przygotowanie co najmniej czterech różnych ciał stałych do badań
2. Wyznaczenie położenia zerowego wagi ( $h_0$ )
3. Wążenie ciał na górnej szalce ( $h_p$ )
4. Wążenie ciał na dolnej szalce zanurzonej w wodzie ( $h_w$ )
5. Powtórzenie pomiarów dla alkoholu

### Część III: Sprawdzenie prawa Hooke'a

1. Ustalenie położenia zerowego wagi Jolly'ego bez zanurzania szalek w cieczy
2. Obciążanie szalki odważnikami od 1g do 10g, z odczytem położenia wskazówki wagi przy każdym obciążeniu
3. Powtórzenie pomiarów dla obciążeń malejących

### 3 Opracowanie wyników pomiarów

#### 3.1 Tabele pomiarowe

##### Waga Jolly’ego

Położenie początkowe wagi Jolly’ego (bez żadnych obciążeń, ani zanurzonych szalek):  $h_0 = 23,4$  cm.

Ciało	$h_0$ [cm]	$h_p$ [cm]	$h_w$ [cm]
1	22,3	25,4	24,2
2	22,3	34,6	33,1
3	22,3	25,4	25,0
4	22,3	30,6	29,8

Tabela 1: Pomiary dla wody

Ciało	$h_0$ [cm]	$h_p$ [cm]	$h_w$ [cm]
1	22,4	25,4	24,5
2	22,4	34,7	33,5
3	22,4	25,5	25,1
4	22,4	30,6	30,0

Tabela 2: Pomiary dla alkoholu izopropylowego

Masa [g]	Wychylenie [cm]	Położenie 0 [cm]
1	23,1	22,7
2	23,5	22,7
3	24,0	22,7
4	24,4	22,7
5	24,7	22,7
6	25,7	22,7
7	25,7	22,7
8	26,3	22,7
9	26,6	22,7
10	27,1	22,7

Tabela 3: Położenia sprężyny dla poszczególnych mas

##### Waga Mohra

Masy zastępcze koników oznaczono jako  $m_1, m_2, m_3$ , wynoszą odpowiednio:

- $m_1 = 1A$
- $m_2 = 0,1A$
- $m_3 = 0,01A$

Pozycje i rodzaje koników dla wody destylowanej oraz alkoholu przedstawiono w poniższych tabelach.

Numer podziałki	Rodzaj konika
3	$m_1$
7	$m_1$
2	$m_2$
4	$m_3$
6	$m_3$
8	$m_3$

Tabela 4: Pozycje i rodzaje koników dla wody destylowanej (waga Mohra)

Numer podziałki	Rodzaj konika
1	$m_1$
7	$m_1$
2	$m_2$
4	$m_3$
5	$m_3$

Tabela 5: Pozycje i rodzaje koników dla alkoholu (waga Mohra)

### 3.2 Waga Mohra

Korzystając z wzoru (5) oraz danych z tabel 4 oraz 5 otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1m_1 + 7m_1 + 2m_2 + 4m_3 + 5m_3}{3m_1 + 7m_1 + 2m_2 + 4m_3 + 6m_3 + 8m_3} \\
 &= \frac{8m_1 + 2m_2 + 9m_3}{10m_1 + 2m_2 + 18m_3} = \frac{8A + 0.2A + 0.09A}{10A + 0.2A + 0.18A} = 0,799
 \end{aligned}$$

### 3.3 Waga Jolly'ego

Podstawiając do wzoru (3) wartości z tabel 1 oraz 2 otrzymano wartości gęstości względnych przedstawione w tabeli 6.

Ciało	$R$ (woda)	$R$ (alkohol)
1	2,58	3,33
2	8,20	10,25
3	7,75	7,75
4	10,38	13,67

Tabela 6: Względne gęstości ciał w wodzie i alkoholu

Przykładowo dla wody destylowanej i ciała 1 otrzymujemy:

$$R = \frac{25,4 - 22,3}{25,4 - 24,2} = 2,58$$

### 3.4 Sprawdzenie prawa Hooke'a

Na podstawie danych z tabeli 3 wyprowadzono wzór na siłę wydłużającą sprężynę za pomocą regresji liniowej dla zależności  $F = k \cdot x$ . Do obliczeń wykorzystano program Python i bibliotekę

numpy. Otrzymano współczynnik sprężystości  $k = 0,045 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Punkty pomiarowe oraz regresję liniową przedstawiono na wykresie 1.

## 4 Ocena niepewności pomiaru

### 4.1 Względna gęstość obliczona z wagi Mohra

Położenia koników były zdeterminowane przez haczyki zamocowane na stałe na belce, których niepewność położenia nie jest znana (w eksperymencie nie ma możliwości ich przesunięcia, a ich położenie nie zostało zmierzone bezpośrednio). Drugim czynnikiem jest niepewność wagi koników. Koniki nie były ważone bezpośrednio (ich masy są określone w instrukcji), więc niepewność wagi koników również nie jest znana. Kolejnym czynnikiem jest dokładność odczytu położenia równowagi belki, która wynosi jedną podziałkę, lecz w doświadczeniu nie zostało zmierzone, jak wpływa to na dokładność wyznaczenia względnej gęstości.

### 4.2 Względna gęstość obliczona z wagi Jolly'ego

Niepewność wzorcowania położenia wskazówki wagi Jolly'ego wynosi:

$$\Delta_d h = 0,1 \text{cm} = 0,001 \text{m}$$

Korzystając z prawa przenoszenia niepewności maksymalnych i wzoru (3) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Delta R &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial R}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial h_i} \cdot \frac{h_p - h_0}{h_p - h_w} \right| \cdot \Delta h_i \end{aligned}$$

Obliczając pochodne cząstkowe otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial R}{\partial h_0} \right| &= \left| \frac{-1}{h_p - h_w} \right| \\ \left| \frac{\partial R}{\partial h_p} \right| &= \left| \frac{1}{h_p - h_w} - \frac{h_p - h_0}{(h_p - h_w)^2} \right| \\ \left| \frac{\partial R}{\partial h_w} \right| &= \left| \frac{h_p - h_0}{(h_p - h_w)^2} \right| \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\Delta R = \Delta h \left( \frac{1}{|h_p - h_w|} + \left| \frac{1}{h_p - h_w} - \frac{h_p - h_0}{(h_p - h_w)^2} \right| + \frac{|h_p - h_0|}{(h_p - h_w)^2} \right) \quad (6)$$

Przykładowo dla wody destylowanej i ciała 1 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Delta R &= 0,001 \left( \frac{1}{|0,254 - 0,242|} + \left| \frac{1}{0,254 - 0,242} - \frac{0,254 - 0,223}{(0,254 - 0,242)^2} \right| + \frac{|0,254 - 0,223|}{(0,254 - 0,242)^2} \right) \\ &= 0.43 \end{aligned}$$

Dla wszystkich ciał otrzymujemy następujące niepewności względnej gęstości:

Ciało	Niepewność dla wody	Niepewność dla alkoholu
Ciało 1	0,43	0,74
Ciało 2	1,1	1,7
Ciało 3	3,9	3,9
Ciało 4	2,6	4,6

Tabela 7: Niepewności względnej gęstości dla poszczególnych ciał

### 4.3 Niepewność współczynnika sprężystości

Współczynnik sprężystości  $k$  został obliczony z regresji liniowej, dla zależności  $F = k \cdot x$ . Niepewność współczynnika sprężystości jest równa niepewności współczynnika  $a$  wyznaczonego z regresji liniowej, która została obliczona na podstawie wzoru (7).

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}} \quad (7)$$

$$u_a = s_y \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (8)$$

gdzie  $x_i$  to wartości zmiennej niezależnej,  $y_i$  to wartości zmierzone,  $\hat{y}_i$  to wartości przewidywane przez model regresji, a  $n$  to liczba punktów pomiarowych.

Po podstawieniu wartości otrzymujemy:

- $u_a = 0,030 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

## 5 Wnioski

### 1. Waga Mohra

Za pomocą wagi Mohra wyznaczono względną gęstość alkoholu izopropylowego względem gęstości wody destylowanej. Otrzymano wartość  $R = 0,799$ . Ze względu na brak bezpośrednich pomiarów nie wyznaczono niepewności względnej gęstości.

### 2. Waga Jolly'ego

Za pomocą wagi Jolly'ego wyznaczono względną gęstość ciał stałych w wodzie oraz alkoholu izopropylowym. Otrzymano następujące wartości.

Ciało	$R$ (woda)	$R$ (alkohol)
1	$2,58 \pm 0,43$	$3,33 \pm 0,74$
2	$8,2 \pm 1,1$	$10,2 \pm 1,7$
3	$7,8 \pm 3,9$	$7,8 \pm 3,9$
4	$10,4 \pm 2,6$	$13,7 \pm 4,6$

Tabela 8: Względne gęstości ciał w wodzie i alkoholu wraz z niepewnościami

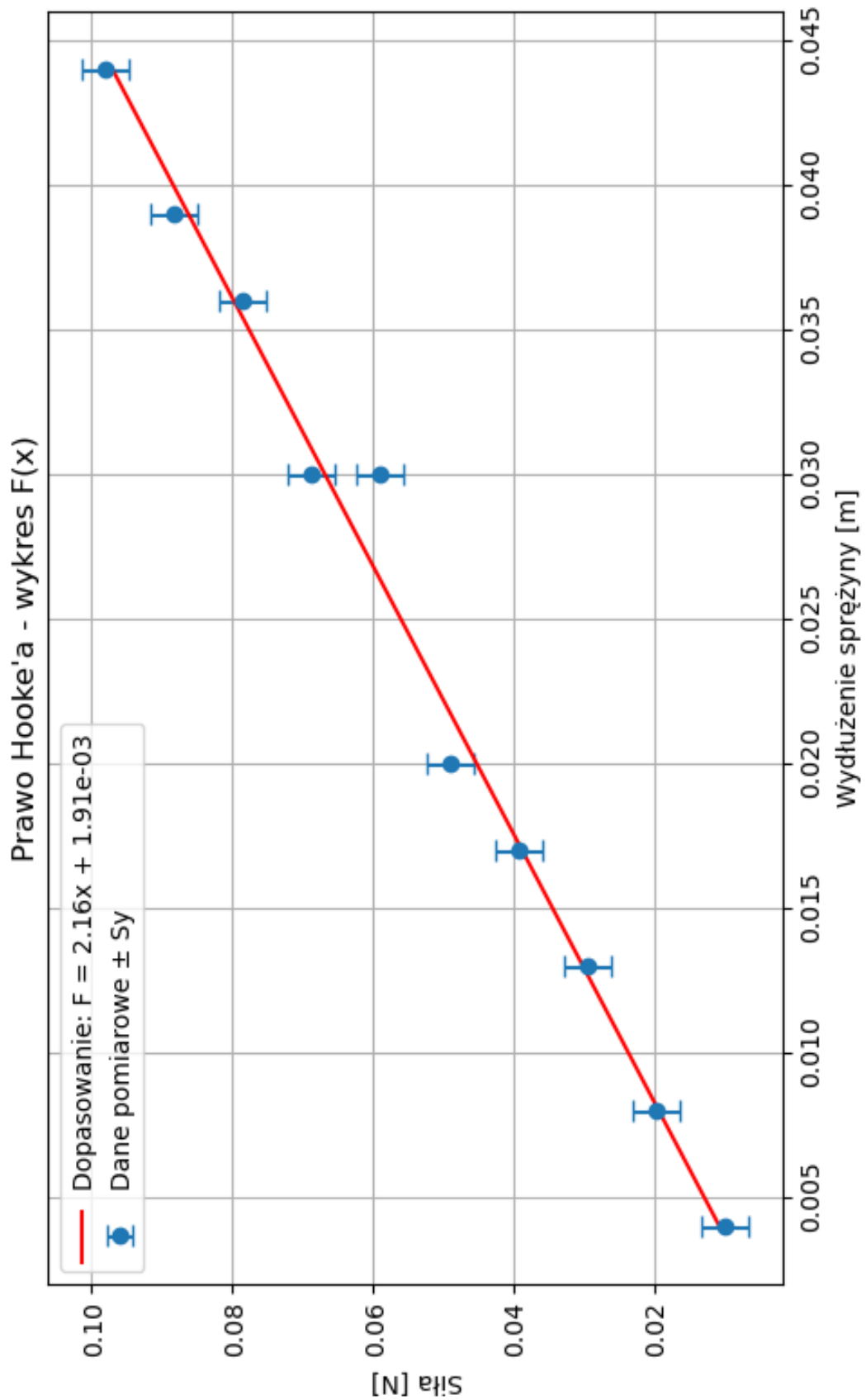
### 3. Sprawdzenie prawa Hooke'a

Pomiary wykazały zgodność z prawem Hooke'a. Współczynnik sprężystości wagi Jolly'ego wyniósł  $k = 2,160 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  z niepewnością  $u_k = 0,030 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ .





## 6 Wykresy



Rysunek 1: Wydłużenie sprężyny w zależności od masy obciążającej (źródło: opracowanie własne).

## Literatura

- [1] Tadeusz Dryński. *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 5 edition, 1976.
- [2] William Moebs, Samuel J. Ling, and Jeff Sanny. *Fizyka dla szkół wyższych, Tom 2*. OpenStax, 2018. Dostęp: 14.04.2024.