

## Ćwiczenie nr 19

### Pomiary stałej grawitacji $G$ (ważenie Ziemi)

#### Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp teoretyczny</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Opis doświadczenia</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Opracowanie wyników pomiarów</b>	<b>3</b>
3.1	Tabele pomiarowe . . . . .	3
3.2	Wyznaczanie położenia środkowych . . . . .	4
3.3	Wyznaczanie okresu drgań . . . . .	4
3.4	Wyznaczanie stałej grawitacji . . . . .	5
3.5	Wyznaczanie masy Ziemi . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Ocena niepewności pomiaru</b>	<b>5</b>
4.1	Niepewność $\Delta b$ . . . . .	5
4.2	Niepewność $T$ . . . . .	6
4.3	Niepewność $G$ . . . . .	6
4.4	Niepewność $M_Z$ . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Wnioski</b>	<b>7</b>
<b>6</b>	<b>Wykresy</b>	<b>8</b>

# 1 Wstęp teoretyczny

## Siła grawitacji

Siłę grawitacji  $F$  dla dwóch ciał o masach  $m_1$  i  $m_2$  oddalonych o  $r$  można wyrazić wzorem:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$

gdzie:

- $G$  - stała grawitacji

## Metoda wagi skręceń Cavendisha

Metoda wagi skręceń Cavendisha jest jedną z metod wyznaczania stałej grawitacji  $G$ . Waga skręceń składa się z dwóch ciężarków o masie  $m$  zawieszonych na obu końcach pręta, który jest zawieszony na cienkiej sprężystej nici będącej osią obrotu. W pobliżu tych kulek umieszcza się dwa duże ciężkie kulki o masie  $M$ . Wówczas siła grawitacji działająca na kulki  $m$  wywołuje skręcenie nici aż do momentu, w którym siła grawitacji zrównoważy siłę sprężystości nici.

Mierząc okres drgań układu oraz odległość między wychyleniami masy  $m$  względem położenia równowagi w dwóch różnych ustawieniach masy  $M$  można wyznaczyć stałą grawitacji  $G$  ze wzoru:

$$G = \frac{\pi^2 r^2 d \Delta b}{MT^2 L} \quad (2)$$

gdzie:

- $L = 0,86$  m - odległość zwierciadła od ekranu
- $r = 0,047$  m - odległość między środkami mas  $M$  i  $m$
- $d = 0,05$  m - odległość małej kulki od osi obrotu
- $M = 1,5$  kg - masa dużej kulki
- $T$  - okres drgań układu (wyznaczony w doświadczeniu)
- $\Delta b$  - Różnica między wychyleniami masy  $m$  względem położenia równowagi w dwóch różnych ustawieniach masy  $M$  (wyznaczona w doświadczeniu)

Wstęp teoretyczny opracowano na podstawie materiałów pomocniczych do ćwiczenia [2].

## 2 Opis doświadczenia

1. Obserwacja początkowego położenia plamki świetlnej na skali.
2. Ustawienie dużych kul w pierwszym skrajnym położeniu (wykonywane przez prowadzącego).
3. Rejestrowanie położenia plamki na skali co 30 sekund przez około 30 minut.
4. Przesunięcie dużych kul do drugiego skrajnego położenia (wykonywane przez prowadzącego).
5. Powtórne rejestrowanie położenia plamki co 30 sekund przez około 30 minut.
6. Sporządzenie wykresów ruchu wahadła dla obu ustawień kul.

7. Wyznaczenie maksimów i minimów oscylacji wahadła.
8. Obliczenie położenia środków wahań dla obu ustawień kul.
9. Wyznaczenie różnicy położenia środków wahań  $\Delta b$ .
10. Obliczenie stałej grawitacji  $G$  na podstawie uzyskanych pomiarów.
11. Oszacowanie masy Ziemi przy użyciu wyznaczonej wartości  $G$ .

## 3 Opracowanie wyników pomiarów

### 3.1 Tabele pomiarowe

lp	Czas [t] w min	Położenie plamki 1	Położenie plamki 2
1	00:00:00	10	30
2	00:00:30	5	35
3	00:01:00	5	45
4	00:01:30	5	55
5	00:02:00	5	60
6	00:02:30	10	70
7	00:03:00	15	80
8	00:03:30	20	75
9	00:04:00	25	60
10	00:04:30	30	50
11	00:05:00	40	35
12	00:05:30	40	30
13	00:06:00	45	25
14	00:06:30	45	25
15	00:07:00	45	30
16	00:07:30	40	40
17	00:08:00	40	45
18	00:08:30	35	55
19	00:09:00	30	70
20	00:09:30	25	80
21	00:10:00	20	80
22	00:10:30	20	75
23	00:11:00	15	70
24	00:11:30	15	65
25	00:12:00	15	60
26	00:12:30	20	55
27	00:13:00	20	55
28	00:13:30	20	50
29	00:14:00	25	50
30	00:14:30	30	50
31	00:15:00	30	55
32	00:15:30	35	55
33	00:16:00	35	60
34	00:16:30	35	65
35	00:17:00	40	70
36	00:17:30	35	70
37	00:18:00	35	75
38	00:18:30	35	75
39	00:19:00	30	75
40	00:19:30	30	75

lp	Czas [t] w min	Położenie plamki 1	Położenie plamki 2
41	00:20:00	25	75
42	00:20:30	20	70
43	00:21:00	20	70
44	00:21:30	20	65
45	00:22:00	20	65
46	00:22:30	20	60
47	00:23:00	20	60
48	00:23:30	20	60
49	00:24:00	25	55
50	00:24:30	25	55
51	00:25:00	25	55
52	00:25:30	30	60
53	00:26:00	30	60
54	00:26:30	30	65
55	00:27:00	30	65
56	00:27:30	35	65
57	00:28:00	30	70
58	00:28:30	30	70
59	00:29:00	30	70
60	00:29:30	30	70
61	00:30:00	25	70

### 3.2 Wyznaczanie położenia środków

Położenia środkowe zostały wyznaczone przez dopasowanie funkcji:

$$y(t) = y_0 + Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$$

do danych pomiarowych metodą najmniejszych kwadratów (kod GitHub: [1], dopasowane funkcje zostały wykreślone na wykresie 1). Odpowiednio dla pierwszego i drugiego ustawienia kul otrzymano:

$$y_{01} = 27,17 \text{ mm}$$

$$y_{02} = 63,75 \text{ mm}$$

Następnie obliczono położenia środkowe dla obu ustawień kul na podstawie wzoru:

$$\Delta b = y_{02} - y_{01} = 63,75 \text{ mm} - 27,17 \text{ mm} = 37,65 \text{ mm}$$

### 3.3 Wyznaczanie okresu drgań

Okres drgań został wyznaczony jako średnia arytmetyczna okresów drgań dla obu ustawień kul, które zostały odczytane z parametrów dopasowanych funkcji. Odpowiednio dla pierwszego i drugiego ustawienia kul otrzymano:

$$T_1 = 634,494 \text{ s}$$

$$T_2 = 626,726 \text{ s}$$

Średnia arytmetyczna tych okresów wynosi:

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 630,610 \text{ s}$$

### 3.4 Wyznaczanie stałej grawitacji

Stałą grawitacji wyznaczono korzystając ze wzoru:

$$G = \frac{\pi^2 r^2 d \Delta b}{MT^2 L}$$

Podstawiając wartości liczbowe:

$$\begin{aligned} G &= \frac{\pi^2 \cdot (0,047)^2 \cdot 0,05 \cdot 0,03765 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot (630,610)^2 \cdot 0,086} \\ &= 8,00089 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \end{aligned}$$

### 3.5 Wyznaczanie masy Ziemi

Siła grawitacji  $F$  działająca na masę  $m$  na powierzchni Ziemi wynosi:

$$F = G \frac{m M_Z}{R_Z^2} \quad (3)$$

gdzie  $M_Z$  to masa Ziemi,  $R_Z$  to promień Ziemi.

Siła z jaką Ziemia przyciąga masę  $m$  wynosi:

$$F = mg \quad (4)$$

Stąd porównując wzory (3) i (4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} mg &= G \frac{m M_Z}{R_Z^2} \Rightarrow \\ M_Z &= \frac{g R_Z^2}{G} \end{aligned}$$

Podstawiając wartości liczbowe:

$$\begin{aligned} M_Z &= \frac{9,81 \cdot (6,38 \cdot 10^6)^2}{8,00089 \cdot 10^{-11}} \\ &= 4,99 \cdot 10^{24} \text{ kg} \end{aligned}$$

## 4 Ocena niepewności pomiaru

### 4.1 Niepewność $\Delta b$

Niepewność wzorcowania dla każdego z pomiarów  $b_1, b_2, b_3$  wynosi:

$$\Delta b_x = 0,005 \text{ mm}$$

Niepewność położenia środka wahań (dla obu ustawień) została obliczona na podstawie wzoru:

$$b_{0x} = \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{4}$$

stąd maksymalna niepewność  $\Delta b_{0x}$  wynosi:

$$\Delta b_{0x} = \frac{1}{4}\Delta b_x + \frac{1}{2}\Delta b_x + \frac{1}{4}\Delta b_x = \Delta b_x$$

$\Delta b$  zostało obliczone na podstawie wzoru:

$$\Delta b = b_{02} - b_{01}$$

stąd maksymalna niepewność  $\Delta(\Delta b)$  wynosi:

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta b) &= |1 \cdot \Delta b_{02}| + |(-1) \cdot \Delta b_{01}| = \Delta b_{02} + \Delta b_{01} = 2\Delta b_x \\ &= 0,010 \text{ mm}\end{aligned}$$

## 4.2 Niepewność $T$

Niepewność przyrządu pomiarowego wynosi  $\Delta t_p = 0,01 \text{ s}$ , a niepewność eksperymentatora  $\Delta t_e = 1,0 \text{ s}$ . Całkowita niepewność pomiaru czasu wynosi:

$$\Delta t = \Delta t_p + \Delta t_e = 1,01 \text{ s}$$

Okres został obliczony jako różnica między dwoma pomiarami czasu, stąd jego niepewność wynosi:

$$\Delta T = 2 \cdot \Delta t = 2,02 \text{ s}$$

## 4.3 Niepewność $G$

Niepewność pomiaru stałej grawitacji wyznaczamy korzystając ze wzoru (18) z instrukcji ONP:

$$\Delta y = \sum_{k=1}^K \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k \right|$$

Podstawiając wzór na stałą grawitacji:

$$G = \frac{\pi^2 r^2 d \Delta b}{MT^2 L}$$

Wyznaczamy odpowiednie pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \Delta b} &= \frac{\pi^2 r^2 d}{MT^2 L} = \frac{G}{\Delta b} \\ \frac{\partial G}{\partial T} &= \frac{-2\pi^2 r^2 d}{MT^3 L} = \frac{-2G}{T}\end{aligned}$$

Uwzględniając największy wpływ niepewności wyznaczenia  $\Delta b$  oraz okresu drgań  $T$ , otrzymujemy:

$$\Delta G = \left| \frac{-2G}{T} \Delta T \right| + \left| \frac{G}{\Delta b} \Delta(\Delta b) \right|$$

Podstawiając wartości liczbowe:

$$\Delta G = \left| \frac{-2 \cdot 8,00089 \cdot 10^{-11}}{630,610} \cdot 2,02 \right| + \left| \frac{8,00089 \cdot 10^{-11}}{0,03765} \cdot 0,010 \cdot 10^{-3} \right| = 0,053 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

#### 4.4 Niepewność $M_Z$

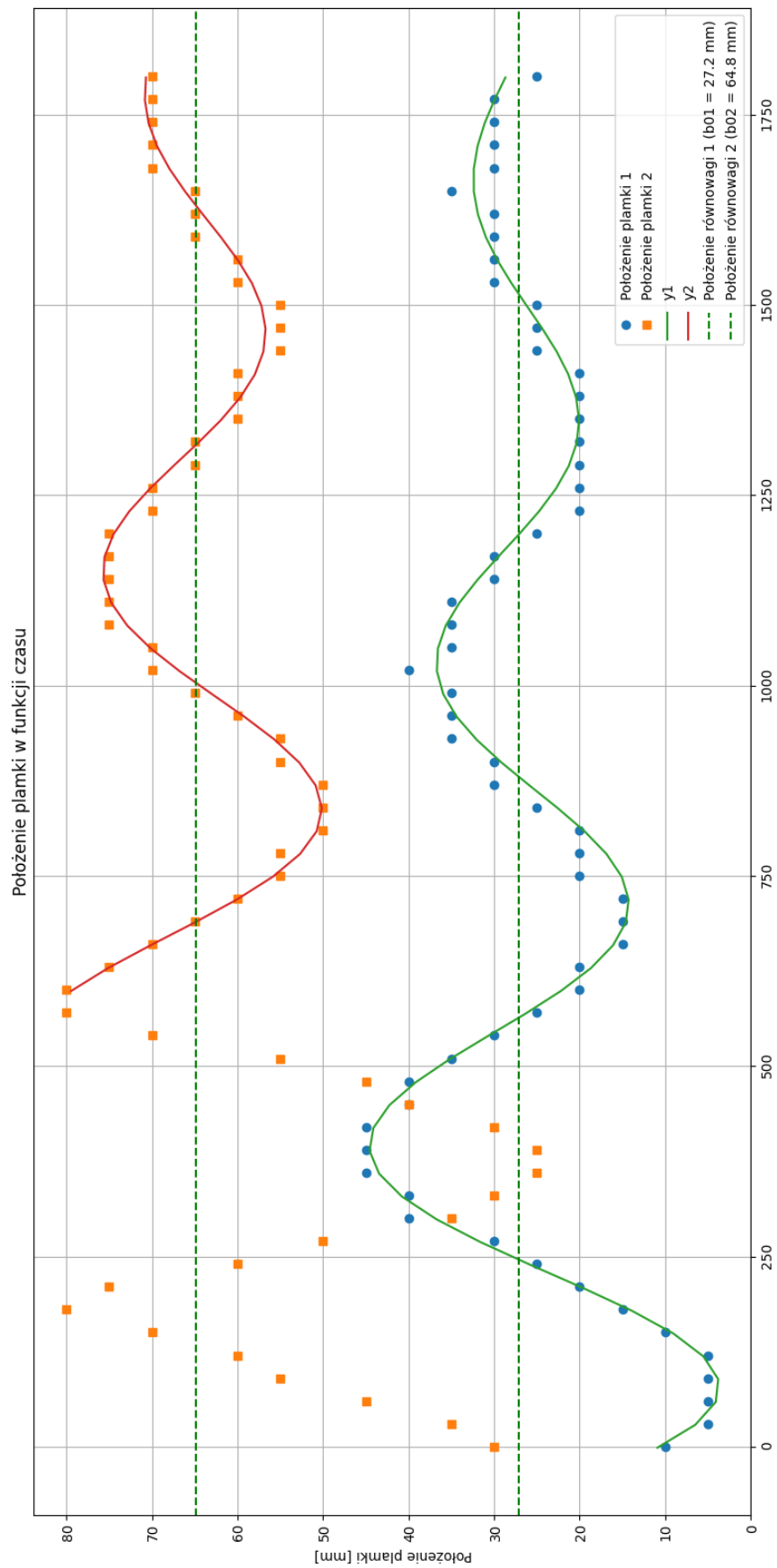
Niepewność wyznaczenia masy Ziemi wynosi:

$$\Delta M_Z = \left| \frac{\partial M_Z}{\partial G} \Delta G \right| = \left| \frac{-g R_Z^2}{G^2} \Delta G \right| = \left| \frac{-9,81 \cdot (6,38 \cdot 10^6)^2}{(8,00089 \cdot 10^{-11})^2} \cdot 0,053 \cdot 10^{-11} \right| = 3,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

### 5 Wnioski

1. Obliczona wartość stałej grawitacji wynosi  $8,001 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$  z niepewnością maksymalną  $0,053 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ . Rzeczywista wartość stałej grawitacji wynosi  $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ , co nie mieści się w przedziale niepewności.
2. Obliczona wartość masy Ziemi wynosi  $4,99 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  z niepewnością maksymalną  $3,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ . Rzeczywista wartość masy Ziemi wynosi  $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .
3. Główne źródła niepewności w pomiarze to:
  - Wpływ czynników zewnętrznych (drgania podłoża, ruchy powietrza), które mogły zaburzać ruch wahadła pomimo osłony szklanej.
  - Trudności w precyzyjnym odczytaniu położenia płamki na skali (przyjęto niepewność  $0,050 \text{ mm}$ ).
4. Otrzymane wyniki potwierdzają słuszność prawa powszechnego ciążenia Newtona.

## 6 Wykresy



Rysunek 1: Wykres zależności wychYLENIA od czasu (źródło: opracowanie własne)



# Literatura

- [1] Piotr Durniat. Damped oscillation regression model. <https://github.com/piotrdurniat/damped-oscillation-regression>.
- [2] Instytut Fizyki Doświadczalnej UW. Materiały pomocnicze do ćwiczenia nr 19. [https://wfa.uwr.edu.pl/wp-content/uploads/sites/216/2024/04/Mech.19\\_wstep.pdf](https://wfa.uwr.edu.pl/wp-content/uploads/sites/216/2024/04/Mech.19_wstep.pdf), 2024. Materiały pomocnicze do ćwiczenia nr 19, I Pracownia Fizyczna.