

Ćwiczenie nr 12

Laboratoryjny eksperyment symulujący powstawanie kraterów na planetach i księżycach, wskutek uderzeń meteorytów

1 Wstęp teoretyczny

Celem eksperymentu jest laboratoryjne odwzorowanie procesów powstawania kraterów na powierzchniach ciał niebieskich oraz weryfikacja zależności między energią kinetyczną uderzającego obiektu a wielkością powstałego krateru.

Podstawy fizyczne

- **Spadek swobodny** – ruch ciała pod wpływem wyłącznie siły grawitacji, opisany równaniami:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$
$$v = gt$$

gdzie h – wysokość, v – prędkość, g – przyspieszenie ziemskie, t – czas.

- **Zasada zachowania energii** – energia całkowita układu izolowanego pozostaje stała:

$$E_p + E_k = \text{const}$$

Dla kulki spadającej z wysokości h zachodzi przemiana energii potencjalnej w kinetyczną:

$$E_p = mgh \rightarrow E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

- **Zderzenie niesprężyste** – uderzenie spadającej kulki w piasek powoduje, że część energii kinetycznej zostaje przekształcona w energię deformacji ośrodka.
- **Modele tworzenia kraterów** – rozpatrujemy dwie hipotezy dotyczące zależności między energią kinetyczną uderzającego obiektu a średnicą powstałego krateru:

Model I: $E_k \propto D^3$ (energia przeznaczona głównie na deformację objętości)

Model II: $E_k \propto D^4$ (część energii zamieniana na potencjalną materiału wyrzuconego)

Metoda logarytmowania

Aby zlinearyzować zależność potęgową, stosujemy logarytmowanie stronami:

$$E_k \propto D^n$$

$$E_k = AD^n$$

$$\log(E_k) = \log(A) + n \log(D)$$

Wykreślając zależność $\log(D)$ od $\log(E_k)$ w układzie współrzędnych, otrzymujemy linię prostą o współczynniku kierunkowym $1/n$, co pozwala określić, który z modeli ($n = 3$ czy $n = 4$) lepiej opisuje eksperyment.

2 Opracowanie wyników pomiarów

2.1 Tabele pomiarowe

Rodzaj kulki	Masa [g]	Średnica [cm]
Mała	4,1	1,000
Średnia	14,0	1,500
Duża	31,7	2,000

Tabela 1: Parametry kulek używanych w doświadczeniu

Wysokość [m]	0.25	0.5	1.0	1.5	2.0
Nr pomiaru	Średnica krateru [cm]				
1	3,170	3,760	4,310	4,625	4,760
2	2,880	3,845	3,910	4,510	4,875
3	2,870	3,810	4,220	4,430	4,365
4	3,635	3,580	4,350	4,615	4,575
5	2,965	3,665	4,060	4,550	4,880

Tabela 2: Pomiary średnicy kraterów dla małej kulki

Wysokość [m]	0.5	1.0	1.5	2.0
Nr pomiaru	Średnica krateru [cm]			
1	4,760	5,265	6,210	6,995
2	4,750	5,270	6,055	6,890
3	4,920	5,380	6,355	6,885
4	4,930	5,800	6,155	6,610
5	5,120	5,600	6,225	6,775

Tabela 3: Pomiary średnicy kraterów dla średniej kulki

Wysokość [m]	1.5	2.0
Nr pomiaru	Średnica krateru [cm]	
1	7,310	7,980
2	7,440	7,525
3	7,460	8,035
4	7,375	8,040
5	7,175	7,700

Tabela 4: Pomiary średnicy kraterów dla dużej kulki

2.2 Średnia średnica krateru, energia potencjalna kulki i logarytmy obu wielkości

Dla każdej kombinacji wysokości i rozmiaru kulki wykonano po pięć pomiarów średnicy powstałego krateru. Średnia średnica krateru \bar{D} została obliczona jako średnia arytmetyczna z tych pomiarów według wzoru:

$$\bar{D} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 D_i$$

Energia potencjalna kulki została obliczona ze wzoru $E_p = mgh$, gdzie:

- m - masa kulki [kg]
- g - przyspieszenie ziemskie [$\frac{m}{s^2}$]
- h - wysokość z jakiej upuszczono kulkę [m]

Następnie, w celu zlinearyzowania zależności potęgowej między energią a średnicą krateru, obliczono logarytmy dziesiętne obu wielkości:

$$\log_{10}(\bar{D}) \quad \text{oraz} \quad \log_{10}(E_p)$$

Wartości te zostały wykorzystane do sporządzenia wykresu w układzie podwójnie logarytmicznym, co pozwoli na określenie wykładnika potęgowego badanej zależności.

Wysokość [m]	0.2	0.5	1.0	1.5	2.0
\bar{D} [m]	0,03104	0,03732	0,04170	0,04546	0,04691
E_p [J]	0,0101	0,0201	0,0402	0,0603	0,0804
$\log_{10}(\bar{D})$	-1,5081	-1,4281	-1,3799	-1,3424	-1,3287
$\log_{10}(E_p)$	-1,9976	-1,6966	-1,3955	-1,2195	-1,0945

Tabela 5: Wyniki pomiarów dla małej kulki

Wysokość [m]	0.5	1.0	1.5	2.0
\bar{D} [m]	0,04896	0,05463	0,06200	0,06831
E_p [J]	0,0687	0,1373	0,2060	0,2747
$\log_{10}(\bar{D})$	-1,3102	-1,2626	-1,2076	-1,1655
$\log_{10}(E_p)$	-1,1632	-0,8622	-0,6861	-0,5612

Tabela 6: Wyniki pomiarów dla średniej kulki

Wysokość [m]	1.5	2.0
\bar{D} [m]	0,07352	0,07856
E_p [J]	0,4665	0,6220
$\log_{10}(\bar{D})$	-1,1336	-1,1048
$\log_{10}(E_p)$	-0,3312	-0,2062

Tabela 7: Wyniki pomiarów dla dużej kulki

2.3 Wykres zależności średnicy krateru od energii potencjalnej

Za pomocą języka Python i biblioteki matplotlib został wygenerowany wykres zależności energii potencjalnej od średnicy krateru. Wykres został sporządzony w układzie podwójnie logarytmicznym i zamieszczony na rysunku 1.

2.4 Regresja liniowa - wyznaczenie wykładnika potęgi

Do analizy zależności między energią potencjalną a średnicą krateru wykorzystano regresję liniową w skali logarytmicznej. Dane zostały przetworzone przy użyciu języka Python i biblioteki NumPy.

Regresja liniowa została wykonana na zlogarytmowanych wartościach energii potencjalnej ($\log_{10}(E_p)$) i średnicy krateru ($\log_{10}(D)$). Wykorzystano funkcję `numpy.polyfit`, która dopasowuje wielomian (w tym przypadku pierwszego stopnia) do danych metodą najmniejszych kwadratów.

Otrzymana prosta ma postać:

$$\log_{10}(E_p) = a \log_{10}(D) + b$$

gdzie:

- $a = 4,37$ - współczynnik kierunkowy prostej
- $b = 4,61$ - wyraz wolny

Po przekształceniu wzoru na postać potęgową otrzymujemy:

$$E_p = 10^{4,61} \cdot D^{4,37} \approx 4,07 \cdot 10^4 \cdot D^{4,37}$$

3 Ekstrapolacja wyników

3.0.1 Energia potencjalna na podstawie obliczonej zależności

Korzystając z otrzymanego wcześniej wzoru:

$$E_p = 10^{4,61} \cdot D^{4,37} \approx 4,07 \cdot 10^4 \cdot D^{4,37}$$

Dla średnicy krateru $D = 1200$ m otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E_p &\approx 4,07 \cdot 10^4 \cdot (1200)^{4,37} \\ &\approx 4,07 \cdot 10^4 \cdot 2,22 \cdot 10^{12} \\ &\approx 9,05 \cdot 10^{16} \text{ J} \end{aligned}$$

3.0.2 Energia kinetyczna na podstawie danych historycznych

Energię kinetyczną meteorytu obliczamy ze wzoru:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Dla danych:

- masa meteorytu: $m = 3 \cdot 10^8$ kg
- prędkość meteorytu: $v = 12000$ m/s

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 10^8) \cdot (12000)^2 \\ &= 1,5 \cdot 10^8 \cdot 1,44 \cdot 10^8 \\ &= 2,16 \cdot 10^{16} \text{ J} \end{aligned}$$

4 Ocena niepewności pomiaru

Dla wszystkich przyrządów pomiarowych niepewność standardową typu B obliczono według wzoru:

$$u_B(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

gdzie Δx oznacza dokładność wzorcowania przyrządu pomiarowego.

4.1 Niepewność masy kulek

Masy kulek zapisane w tabeli 1 zmierzono za pomocą wagi analitycznej o dokładności wzorcowania $\Delta m = 0,1$ g.

Korzystając ze wzoru (1), otrzymujemy:

$$u_B(m) = 5,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

4.2 Niepewność średnicy kulek

Do pomiaru średnicy kulek przedstawionych w tabeli 1 wykorzystano suwmiarkę o dokładności wzorcowania $\Delta d = 0,05$ mm.

Zgodnie ze wzorem (1):

$$u_B(d) = 2,9 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

4.3 Niepewność wysokości

Do pomiaru wysokości została użyta miara metrowa o dokładności wzorcowania $\Delta h = 0,01$ m.

Stosując wzór (1):

$$u_B(h) = 0,0058 \text{ m}$$

4.4 Niepewność średnicy kraterów

Do obliczenia odchylenia standardowego średnicy kraterów $u_A(D)$ użyto poniższego wzoru:

$$u_A(D) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}$$

gdzie:

- D_i to wartość pojedynczego pomiaru,
- \bar{D} to średnia z pomiarów,
- n to liczba pomiarów.

Otrzymane wyniki przedstawia tabela 8.

Wysokość h [m]	$u_A(D)$ [m]		
	Mała kulka	Średnia kulka	Duża kulka
0.25	0.0032	-	-
0.5	0.0011	0.0015	-
1.0	0.0018	0.0023	-
1.5	0.00080	0.0011	0.0012
2.0	0.0022	0.0015	0.0023

Tabela 8: Odchylenie standardowe średnicy kraterów dla poszczególnych kulek

Następnie obliczono niepewność typu B średnicy kraterów $u_B(D)$ na podstawie wzoru (1) i otrzymano wartość:

$$u_B(D) = 0.029 \text{ m}$$

Następnie obliczono niepewność całkowitą średnicy kraterów $u_c(D)$ na podstawie wzoru:

$$u_c(D) = \sqrt{u_A(D)^2 + u_B(D)^2}$$

Otrzymane wyniki przedstawia tabela 9.

Wysokość h [m]	$u_c(D)$ [m]		
	Mała kulka	Średnia kulka	Duża kulka
0.25	0.0032	-	-
0.5	0.0011	0.0015	-
1.0	0.0018	0.0023	-
1.5	0.00080	0.0011	0.0012
2.0	0.0022	0.0015	0.0023

Tabela 9: Niepewność całkowita średnicy kraterów dla wszystkich kulek

Przykładowe obliczenie dla małej kulki przy wysokości $h = 1.5 \text{ m}$:

$$\begin{aligned}
 u_A(D) &= \sqrt{\frac{1}{4}[(4.625 - 4.546)^2 + (4.510 - 4.546)^2 + (4.430 - 4.546)^2 + (4.615 - 4.546)^2 + (4.550 - 4.546)^2]} \\
 &= 0.00080 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$u_B(D) = \frac{0.05}{\sqrt{3}} = 0.029 \text{ m}$$

$$u_c(D) = \sqrt{(0.00080)^2 + (0.029)^2} = 0.029 \text{ m}$$

4.5 Niepewność energii potencjalnej

korzystając z prawa przenoszenia niepewności otrzymano:

$$u_c(E) = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial m}\right)^2 u_c(m)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial h}\right)^2 u_c(h)^2}$$

Po podstawieniu wzoru na energię potencjalną $E = mgh$ otrzymano:

$$\begin{aligned} u_c(E) &= \sqrt{g^2 h^2 u_c(m)^2 + g^2 m^2 u_c(h)^2} = \\ &= g \sqrt{h^2 u_c(m)^2 + m^2 u_c(h)^2} \end{aligned}$$

Dla wszystkich kulek i wszystkich wysokości otrzymano wartości niepewności energii potencjalnej przedstawione w tabeli 10.

Wysokość h [m]	$u_c(E)$ [J]		
	Mała kulka	Średnia kulka	Duża kulka
0.25	0.0024	-	-
0.5	0.0024	0.0083	-
1.0	0.0025	0.0083	-
1.5	0.0026	0.0083	0.019
2.0	0.0027	0.0083	0.019

Tabela 10: Niepewność całkowita energii potencjalnej dla wszystkich kulek

Przykładowe obliczenia niepewności energii potencjalnej dla małej kulki (o masie 4.1 g) na wysokości $h = 0.25$ m:

$$u_c(E) = 9.81 \sqrt{(0.25)^2 \cdot (6.00 \cdot 10^{-5})^2 + (0.0041)^2 \cdot (0.06)^2} = 0.0024 \text{ J}$$

4.6 Niepewność pomiarowa współczynników prostej regresji liniowej

Niepewności pomiarowe dla wyznaczonej prostej regresji liniowej $y = ax + b$ obliczono na podstawie odchylenia standardowego reszt s_y oraz rozkładu punktów pomiarowych wzdłuż osi x , korzystając z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} s_y &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}} \\ u_a &= s_y \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \\ u_b &= s_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \end{aligned}$$

gdzie x_i to wartości zmiennej niezależnej, y_i to wartości zmierzone, \hat{y}_i to wartości przewidywane przez model regresji, a n to liczba punktów pomiarowych. Dzielnik $n - 2$ wynika z faktu, że model regresji liniowej ma dwa parametry (a i b).

Obliczone wartości niepewności dla współczynników prostej regresji wyniosły odpowiednio:

- $u_a = 0.14$
- $u_b = 0.018$

5 Wnioski

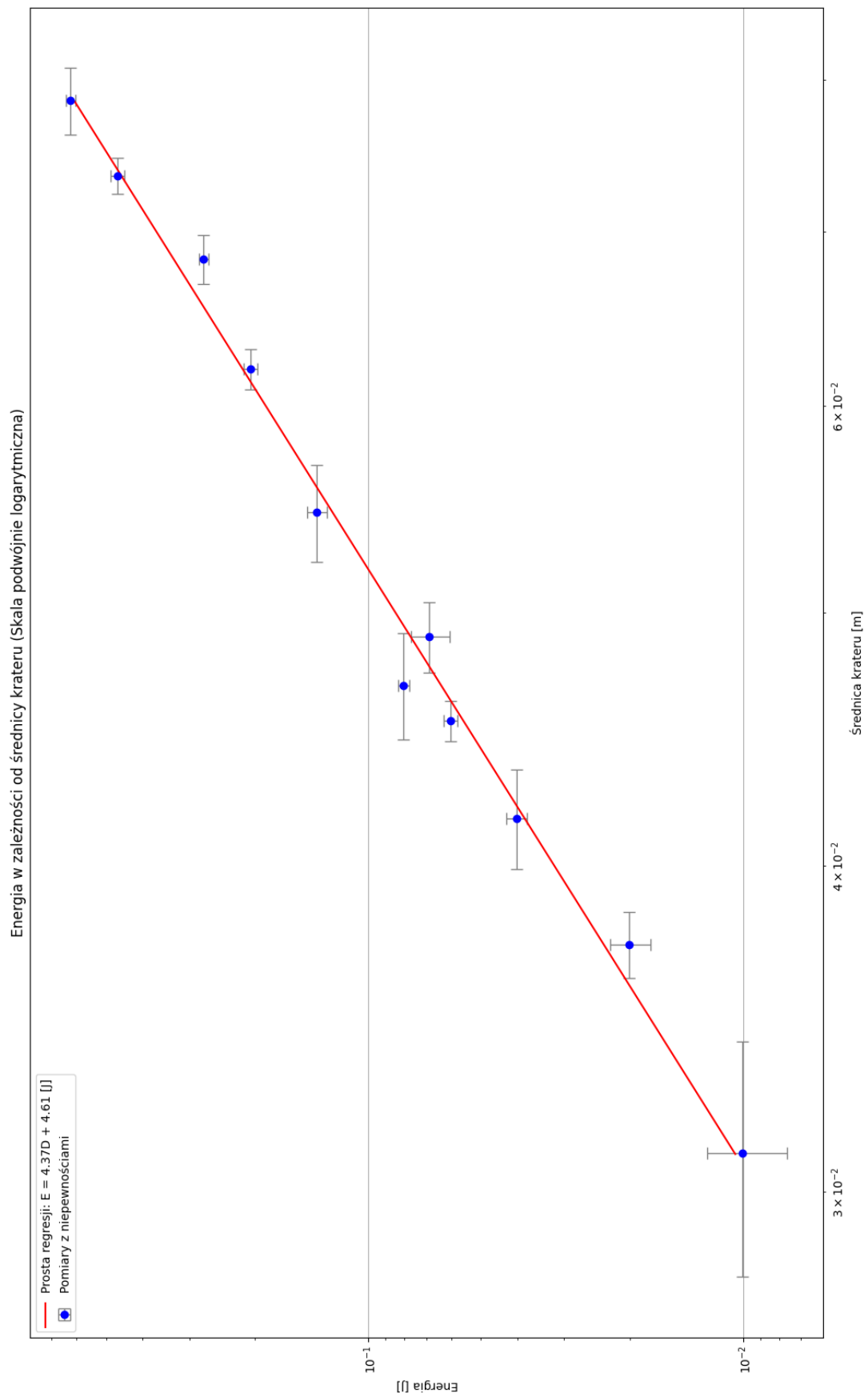
Wykładnik potęgi $a = 4,37(14)$ sugeruje, że zależność między energią potencjalną a średnicą krateru jest bliższa modelowi II ($E_k \propto D^4$) niż modelowi I ($E_k \propto D^3$).

Ekstrapolując otrzymaną zależność do skali astronomicznej, możemy porównać przewidywania naszego modelu z rzeczywistymi danymi. Dla krateru w Arizonie o średnicy 1200 m i meteorytu o masie $3 \cdot 10^8$ kg i prędkości 12000 m/s, energia kinetyczna meteorytu wynosiła:

- Według danych historycznych: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 2,16 \cdot 10^{16}$ J
- Według naszego modelu ($E_k \propto D^{4,37}$): $E_k = 9,05 \cdot 10^{16}$ J

Wartość według naszego modelu jest o 76% większa od wartości historycznej. Jest to stosunkowo dobra zgodność biorąc pod uwagę, że ekstrapolujemy wyniki z eksperymentu laboratoryjnego (skala centymetrów) do zjawiska astronomicznego (skala kilometrów).

6 Wykresy



Rysunek 1: Wykres zależności energii potencjalnej od średnicy krateru