

Ćwiczenie nr 15

Drgania masy zawieszona na sprężynie

Spis treści

1	Wstęp teoretyczny	2
2	Opis doświadczenia	2
3	Opracowanie wyników pomiarów	2
3.1	Tabele pomiarowe	2
3.2	2. Zakres stosowalności prawa Hooke'a	3
3.2.1	Współczynnik sprężystości	4
4	Ocena niepewności pomiaru	4
4.1	Niepewność czasu	4
4.2	Niepewność okresu	5
4.3	Niepewność położenia	5
4.4	Niepewność wydłużenia	5
4.5	Niepewność średniego wydłużenia	6
4.6	Współczynnik sprężystości	6
5	Wnioski	7
6	Wykresy	7

1 Wstęp teoretyczny

2 Opis doświadczenia

3 Opracowanie wyników pomiarów

3.1 Tabele pomiarowe

Nr	A [cm]	$t(20 \text{ drgań})$ [s]
1	1	31,50
2	2	31,31
3	3	31,41
4	4	31,50
5	5	31,31
6	6	31,43
7	7	31,44
8	8	31,28
9	9	31,34
10	10	31,50

Tabela 1: Zależność okresu drgań od amplitudy

Nr	$t(20 \text{ drgań})$ [s]
1	31,44
2	31,16
3	31,28
4	31,34
5	31,66

Tabela 2: Pomiar okresu dla $A = 5 \text{ cm}$

Nr	m [g]	x [cm]
1	10	21,0
2	20	28,2
3	30	35,4
4	40	42,6
5	50	50,0
6	60	57,1
7	60	57,1
8	50	50,0
9	40	42,8
10	30	35,5
11	20	28,2
12	10	21,0

Tabela 3: Zależność położenia szalki od masy

m [g]	$t(20 \text{ drgań})$ [s]	$t(10 \text{ drgań})$ [s]
10	25,41	12,81
20	26,13	13,94
30	29,53	14,81
40	31,47	15,59
50	33,06	16,60
60	34,72	17,84
m_x	33,22	14,91

Tabela 4: Zależność okresu drgań od masy

3.2 2. Zakres stosowalności prawa Hooke’a

Dla szalki bez obciążenia położenie wynosi $x_0 = 13.6$ cm. Na podstawie wyników obliczono wydłużenie Δx_i jako różnicę między położeniem przy obciążeniu a położeniem początkowym:

$$\Delta x_i = x_i - x_0 \quad (1)$$

Następnie obliczono średnie wartości wydłużeń sprężyny x_i pod wpływem określonych obciążeń zgodnie ze wzorem:

$$\overline{\Delta x_i} = \frac{\Delta x_{i1} + \Delta x_{i2}}{2}$$

gdzie:

- Δx_{i1} – wydłużenie szalki z masą m_i przy obciążeniu rosnącym,
- Δx_{i2} – wydłużenie przy obciążeniu malejącym.

Wyniki obliczeń wydłużeń przedstawiono w tabeli 5.

m [kg]	Δx_1 [m]	Δx_2 [m]
0,010	0,074	0,074
0,020	0,146	0,146
0,030	0,218	0,219
0,040	0,290	0,292
0,050	0,364	0,364
0,060	0,435	0,435

Tabela 5: Wartości wydłużeń sprężyny

Ciężar F został obliczony ze wzoru:

$$F = mg$$

gdzie:

- m – masa odważnika [kg],
- g – przyspieszenie ziemskie [m/s²].

W obliczeniach przyjęto wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 9,81$ m/s². Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 6. Wykres zależności wydłużenia sprężyny od ciężaru przedstawiono na rysunku 1.

m [kg]	F [N]	$\overline{\Delta x}$ [m]
0,010	0,0981	0,074
0,020	0,1962	0,146
0,030	0,2943	0,2185
0,040	0,3924	0,291
0,050	0,4905	0,364
0,060	0,5886	0,435

Tabela 6: Średnie wartości wydłużeń sprężyny

3.2.1 Współczynnik sprężystości

W celu wyznaczenia współczynnika sprężystości sprężyny zastosowano regresję liniową dla zależności wydłużenia Δx od siły F wykorzystując język Python i bibliotekę NumPy. Na podstawie równania regresji:

$$\Delta x = kF + b$$

gdzie:

- k – współczynnik sprężystości [m/N],
- b – wyraz wolny [m].

otrzymano następujące wartości:

- $k = 0,7373$ m/N,
- $b = 0,00160$ m.

4 Ocena niepewności pomiaru

4.1 Niepewność czasu

Niepewność typu B czasu obliczono ze wzoru:

$$u_B(t) = \frac{\Delta_d(t)}{\sqrt{3}}$$

Gdzie $\Delta_d(t) = 0.2$ to błąd eksperymentatora, stąd:

$$u_B(t) = \frac{0.2}{\sqrt{3}} \approx 0.12 \text{ s}$$

Niepewność typu A czasu wyznaczono na podstawie pięciu powtórzonych pomiarów dla amplitudy 5 cm (tabela 2), wykorzystując wzór 2.

$$u_A(t) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \quad (2)$$

Podstawiając wartości do wzoru 2 otrzymano:

$$u_A(t) = 0.19 \text{ s}$$

Niepewność złożoną czasu obliczono ze wzoru:

$$u_c(t) = \sqrt{u_A(t)^2 + u_B(t)^2}$$

Podstawiając wartości do wzoru otrzymano:

$$u_c(t) = \sqrt{0.19^2 + 0.12^2} \approx 0.22 \text{ s}$$

4.2 Niepewność okresu

Okres obliczono ze wzoru:

$$T = \frac{t}{N}$$

Gdzie N to liczba drgań, stąd:

$$u_c(T) = \frac{u_c(t)}{N}$$

podstawiając wartość niepewności czasu otrzymano:

$$u_c(T) = \frac{0.22}{20} \approx 0.011 \text{ s}$$

4.3 Niepewność położenia

Niepewność maksymalna miarki wynosi $\Delta_d = 0.001 \text{ m}$. Niepewność wydłużenia obliczono ze wzoru:

$$u_B(x) = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{3}}$$

Po podstawieniu wartości otrzymano:

$$u_B(x) = \frac{0.001}{3} = 0.00058 \text{ m}$$

4.4 Niepewność wydłużenia

Niepewność wydłużenia obliczono z prawa przenoszenia niepewności dla wzoru 1:

$$\begin{aligned} u_c(\Delta x) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta x}{\partial x}\right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial x_0}\right)^2 u^2(x_0)} \\ &= \sqrt{(1)^2 u^2(x) + (-1)^2 u^2(x_0)} \\ &= \sqrt{2} u_B(x) \end{aligned}$$

Stąd niepewność pojedynczego pomiaru wydłużenia:

$$u_c(\Delta x) = \sqrt{2} \cdot 0.00058 \approx 0.00082 \text{ m}$$

4.5 Niepewność średniego wydłużenia

Niepewność złożona średniego wydłużenia

Dla średniego wydłużenia:

$$\overline{\Delta x_i} = \frac{\Delta x_{i1} + \Delta x_{i2}}{2}$$

niepewność złożoną możemy wyznaczyć korzystając z prawa propagacji niepewności:

$$\begin{aligned} u_c(\overline{\Delta x_i}) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{\Delta x_i}}{\partial \Delta x_{i1}}\right)^2 u^2(\Delta x_{i1}) + \left(\frac{\partial \overline{\Delta x_i}}{\partial \Delta x_{i2}}\right)^2 u^2(\Delta x_{i2})} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 u^2(\Delta x) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 u^2(\Delta x)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{4} u^2(\Delta x)} = \frac{u(\Delta x)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Podstawiając wartość niepewności pojedynczego pomiaru wydłużenia otrzymano:

$$u_c(\overline{\Delta x_i}) = \frac{0.00082}{\sqrt{2}} \approx 0.00058 \text{ m}$$

4.6 Współczynnik sprężystości

Niepewności współczynników regresji liniowej obliczono na podstawie następujących wzorów:

$$\begin{aligned} s_y &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}} \\ u(k) &= s_y \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \\ u(b) &= s_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \end{aligned}$$

gdzie:

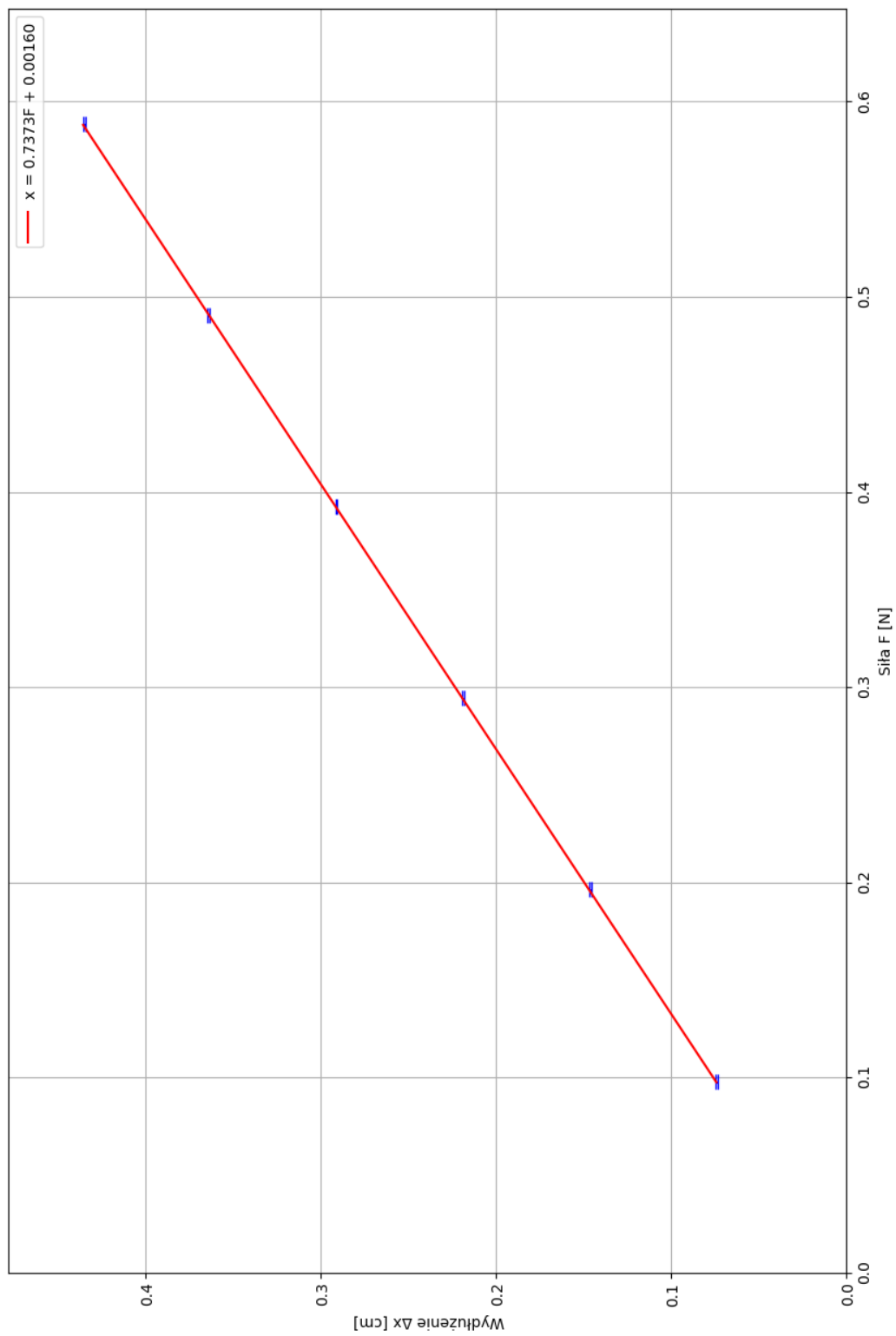
- s_y – odchylenie standardowe reszt,
- $u(k)$ – niepewność standardowa współczynnika kierunkowego prostej regresji,
- $u(b)$ – niepewność standardowa wyrazu wolnego prostej regresji,
- n – liczba punktów pomiarowych,
- x_i – wartości zmiennej niezależnej (siła F),
- y_i – wartości zmierzone (wydłużenie Δx),
- \hat{y}_i – wartości przewidywane przez model regresji,

Obliczone wartości niepewności dla współczynników prostej regresji wynoszą:

- $u(k) = 0.0012 \frac{\text{m}}{\text{N}}$
- $u(b) = 0.00046 \text{ m}$

5 Wnioski

6 Wykresy



Rysunek 1: Zależność wydłużenia sprężyny od ciężaru (źródło: opracowanie własne).