1 Wzory

1.1 Niepewność standardowa typu A

Niepewność standardowa typu A wyznaczana jest na podstawie rozrzutu wyników pomiarów:

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \tag{1}$$

gdzie:

- N - liczba pomiarów
- x_i - i-ty wynik pomiaru
- $\bar{x}$ - wartość średnia wyników pomiarów

1.2 Niepewność standardowa typu B

Niepewność standardowa typu B wyznaczana jest na podstawie niepewności wzorcowania przyrządu pomiarowego:

$$u_B(x) = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{3}} \tag{2}$$

gdzie:

- $\Delta_d x$ - niepewność wzorcowania przyrządu pomiarowego

1.3 Całkowita niepewność standardowa

Całkowita niepewność standardowa jest pierwiastkiem z sumy kwadratów niepewności typu A i B:

$$u_c(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} \tag{3}$$

1.4 Prawo przenoszenia niepewności standardowych

Dla funkcji wielu zmiennych $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_K)$, niepewność standardowa złożona wyznaczana jest ze wzoru:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 u^2(x_k)} \tag{4}$$

gdzie:

- $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ - pochodna cząstkowa funkcji f względem zmiennej x_k
- $u(x_k)$ - niepewność standardowa zmiennej x_k

1.5 Prawo przenoszenia niepewności maksymalnych

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \Delta x_i \tag{5}$$

1.6 Niepewność względna

Często używana jest również niepewność względna, która pozwala określić procentową niepewność wyniku:

$$\frac{\Delta y}{|y|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \Delta x_i}{|y|} \tag{6}$$

W przypadku prostych zależności funkcyjnych (jak np. iloczyn czy iloraz), niepewność względna może być wyrażona jako suma niepewności względnych poszczególnych zmiennych:

$$\frac{\Delta g}{|g|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} + \dots \tag{7}$$

1.7 Niepewność średniej arytmetycznej

Niepewność średniej arytmetycznej z N pomiarów wyznaczana jest ze wzoru:

$$u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}} \tag{8}$$

1.8 Niepewność pomiarowa współczynników prostej regresji liniowej

Niepewności pomiarowe dla wyznaczonej prostej regresji liniowej $y = ax + b$ obliczono na podstawie odchylenia standardowego reszt s_y oraz rozkładu punktów pomiarowych wzdłuż osi x, korzystając z następujących wzorów:

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}}$$

$$u_a = s_y \sqrt{\frac{n}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

$$u_b = s_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

gdzie x_i to wartości zmiennej niezależnej, y_i to wartości zmierzone, $\hat{y}_i$ to wartości przewidywane przez model regresji, a n to liczba punktów pomiarowych. Dzielnik $n-2$ wynika z faktu, że model regresji liniowej ma dwa parametry (a i b).

1.9 Szczególne przypadki przenoszenia niepewności

1.9.1 Suma lub różnica

Dla funkcji $f = x \pm y$:

$$u(f) = \sqrt{u^2(x) + u^2(y)} \tag{9}$$

1.9.2 Iloczyn lub iloraz

Dla funkcji $f = x \cdot y$ lub $f = \frac{x}{y}$:

$$\frac{u(f)}{|f|} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{|x|}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{|y|}\right)^2} \tag{10}$$

1.9.3 Potęgowanie

Dla funkcji $f = x^n$:

$$\frac{u(f)}{|f|} = |n| \cdot \frac{u(x)}{|x|} \tag{11}$$