Piotr Durniat
I rok, Fizyka
Wtorek, 8:00-10:15

Data wykonania pomiarów:
01.04.2025

Prowadząca:
dr Iwona Mróz

Ćwiczenie nr 15

Drgania masy zawieszonej na sprężynie

Spis treści

1 Wstęp teoretyczny

W doświadczeniu badamy ruch drgający masy zawieszonej na sprężynie. Podstawą teoretyczną jest prawo Hooke'a oraz równanie ruchu harmonicznego.

Prawo Hooke'a

Prawo Hooke'a opisuje zależność siły sprężystości F_s od wydłużenia sprężyny Δx:

$$F_s = -k\Delta x \tag{1}$$

gdzie k jest współczynnikiem sprężystości sprężyny. Znak minus oznacza, że siła sprężystości działa przeciwnie do kierunku wychylenia.

Równanie ruchu harmonicznego

Dla masy m zawieszonej na sprężynie, zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{2}$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{3}$$

gdzie:

- A – amplituda drgań
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – częstość kołowa drgań
- ϕ – faza początkowa

Okres drgań

Okres drgań T masy zawieszonej na sprężynie wyraża się wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{4}$$

Wzór (4) uwzględnia jedynie masę zawieszoną na sprężynie, jednakże w drganiach bierze udział również masa sprężyny. Uwzględniając ją należy dodać do masy ciężarka $\frac{1}{3}$ masy sprężyny m_{spr}. Otrzymujemy w ten sposób wzór:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_{spr}}{k}} \tag{5}$$

Z powyższego wzoru wynika zależność kwadratu okresu drgań od masy:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m + \frac{4\pi^2 m_{spr}}{3k} \tag{6}$$

gdzie m_{spr} jest masą sprężyny.

Izochronizm drgań

Teoretycznie, dla małych amplitud, okres drgań nie zależy od amplitudy. Jest to tzw. izochronizm drgań, który sprawdzamy w pierwszej części doświadczenia.

Niniejszy wstęp teoretyczny opracowano na podstawie podręcznika Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki - rozdział 24 [1].

2 Opis doświadczenia

Celem doświadczenia jest zbadanie drgań masy zawieszonej na sprężynie poprzez realizację trzech zadań:

Badanie izochronizmu drgań

- Używając masy 50 g, wykonano pomiary czasu 20 pełnych drgań dla amplitud od 1 do 10 cm
- Dla amplitudy 5 cm wykonano 5 powtórzeń pomiaru
- Celem było sprawdzenie, czy okres drgań zależy od amplitudy

Wyznaczanie współczynnika sprężystości k

- Wykonano pomiary wydłużenia sprężyny dla mas od 10 do 60 g (co 10 g)
- Pomiary wykonano dwukrotnie: przy zwiększaniu i zmniejszaniu obciążenia
- Na podstawie wykresu zależności wydłużenia od siły sprawdzono zakres stosowalności prawa Hooke'a

Badanie zależności okresu drgań od masy

- Zmierzono czas 10 pełnych drgań dla mas od 10 do 50 g (co 10 g)
- Wykonano dodatkowy pomiar dla masy nieznanej m_x
- Na podstawie zależności T^2 od m wyznaczono masę nieznaną oraz parametry układu

Podczas wszystkich pomiarów położenia wykorzystano lusterko umieszczone obok metrówki, aby zapewnić prawidłowy odczyt poprzez pokrycie się wskaźnika sprężyny z jego odbiciem.

3 Opracowanie wyników pomiarów

3.1 Tabele pomiarowe

Nr	A [cm]	t(20 drgań) [s]
1	1	31,50
2	2	31,31
3	3	31,41
4	4	31,50
5	5	31,31
6	6	31,43
7	7	31,44
8	8	31,28
9	9	31,34
10	10	31,50

Tabela 1: Zależność okresu drgań od amplitudy

Nr	t(20 drgań) [s]
1	31,44
2	31,16
3	31,28
4	31,34
5	31,66

Tabela 2: Pomiar okresu dla $A = 5$ cm

Nr	m [g]	x [cm]
1	10	21,0
2	20	28,2
3	30	35,4
4	40	42,6
5	50	50,0
6	60	57,1
7	60	57,1
8	50	50,0
9	40	42,8
10	30	35,5
11	20	28,2
12	10	21,0

Tabela 3: Zależność położenia szalki od masy

m [g]	t(20 drgań) [s]	t(10 drgań) [s]
10	25,41	12,81
20	26,13	13,94
30	29,53	14,81
40	31,47	15,59
50	33,06	16,60
60	34,72	17,84
m_x	33,22	14,91

Tabela 4: Zależność okresu drgań od masy

3.2 1. Izochronizm drgań

Okres drgań T wyznaczono na podstawie zmierzonego czasu t dla n drgań, ze wzoru:

$$T = \frac{t}{n}$$

gdzie:

- t – zmierzony czas dla n drgań,
- n – liczba drgań.

Na podstawie uzyskanych czasów obliczono okresy drgań sprężyny dla każdej amplitudy:

Nr	A [cm]	t(20 drgań) [s]	T [s]
1	1	31,50	1,575
2	2	31,31	1,5655
3	3	31,41	1,5705
4	4	31,50	1,575
5	5	31,31	1,5655
6	6	31,43	1,5715
7	7	31,44	1,572
8	8	31,28	1,564
9	9	31,34	1,567
10	10	31,50	1,575

Tabela 5: Obliczone okresy drgań dla różnych amplitud

Dla amplitudy $A = 5\,\mathrm{cm}$ wykonano pięć pomiarów, na podstawie których obliczono wartości okresów:

Nr	t(20 drgań) [s]	T [s]
1	31,44	1,572
2	31,16	1,558
3	31,28	1,564
4	31,34	1,567
5	31,66	1,583

Tabela 6: Pomiary okresu dla amplitudy $A = 5\,\mathrm{cm}$

Na podstawie powyższych danych wyznaczono średni okres:

$$T_{\text{śr}} = \frac{1{,}572 + 1{,}558 + 1{,}564 + 1{,}567 + 1{,}583}{5} = 1{,}569\,\mathrm{s}$$

Maksymalne odchylenie od średniej definiuje się jako:

$$\Delta T_{\text{max}} = \max\left(T_{\text{max}} - T_{\text{śr}},\ T_{\text{śr}} - T_{\text{min}}\right)$$

Podstawiając wartości otrzymano:

$$\Delta T_{\text{max}} = \max(1{,}583 - 1{,}569,\ 1{,}569 - 1{,}558) = 0{,}014\,\text{s}$$

Wyniki pomiarów okresu dla wszystkich amplitud mieszczą się w przedziale niepewności:

$$(T_{\text{śr}} - \Delta T_{\text{max}},\ T_{\text{śr}} + \Delta T_{\text{max}}) = (1{,}555,\ 1{,}583)\ \text{s}$$

3.3 2. Zakres stosowalności prawa Hooke'a

Dla szalki bez obciążenia położenie wynosi $x_0 = 13.6$ cm. Na podstawie wyników obliczono wydłużenie Δx_i jako różnicę między położeniem przy obciążeniu a położeniem początkowym:

$$\Delta x_i = x_i - x_0 \tag{7}$$

Następnie obliczono średnie wartości wydłużeń sprężyny x_i pod wpływem określonych obciążeń zgodnie ze wzorem:

$$\overline{\Delta x_i} = \frac{\Delta x_{i1} + \Delta x_{i2}}{2}$$

gdzie:

- Δx_{i1} – wydłużenie szalki z masą m_i przy obciążeniu rosnącym,
- Δx_{i2} – wydłużenie przy obciążeniu malejącym.

Wyniki obliczeń wydłużeń przedstawiono w tabeli 7.

m [kg]	Δx_1 [m]	Δx_2 [m]
0,010	0,074	0,074
0,020	0,146	0,146
0,030	0,218	0,219
0,040	0,290	0,292
0,050	0,364	0,364
0,060	0,435	0,435

Tabela 7: Wartości wydłużeń sprężyny

Ciężar F został obliczony ze wzoru:

$$F = mg$$

gdzie:

- m – masa odważnika [kg],
- g – przyspieszenie ziemskie [m/s^2].

W obliczeniach przyjęto wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 9,81$ m/s^2. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 8. Wykres zależności wydłużenia sprężyny od ciężaru przedstawiono na rysunku 1.

m [kg]	F [N]	$\overline{\Delta x}$ [m]
0,010	0,0981	0,074
0,020	0,1962	0,146
0,030	0,2943	0,2185
0,040	0,3924	0,291
0,050	0,4905	0,364
0,060	0,5886	0,435

Tabela 8: Średnie wartości wydłużeń sprężyny

3.3.1 Współczynnik sprężystości

W celu wyznaczenia współczynnika sprężystości sprężyny zastosowano regresję liniową dla zależności wydłużenia Δx od siły F wykorzystując język Python i bibliotekę NumPy. Na podstawie równania regresji:

$$\Delta x = aF + b$$

gdzie:

- $a = \frac{1}{k}$ – współczynnik kierunkowy prostej [m/N],
- b – wyraz wolny [m].

otrzymano następujące wartości:

- $a = 0,7373$ m/N,
- $b = 0,00160$ m.

Stąd współczynnik sprężystości wynosi:

$$k = \frac{1}{a} = \frac{1}{0{,}7373} \approx 1{,}356 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

3.4 Analiza zależności kwadratu okresu od masy

Poszukujemy zależności liniowej w postaci:

$$T^2 = a \cdot m + b$$

Zestawienie wyników pomiarów:

Masa m [kg]	Kwadrat okresu T^2 [s^2]
0.028	1.6142
0.038	1.7069
0.048	2.1800
0.058	2.4759
0.068	2.7324
0.078	3.0137

Wielkości pomocnicze do obliczeń:

$$\text{Liczba pomiarów } n = 6$$
$$\text{Suma mas } \sum x_i = 0.318$$
$$\text{Suma } T^2 \ \sum y_i = 13.7229$$
$$\text{Suma kwadratów mas } \sum x_i^2 = 0.018884$$
$$\text{Suma iloczynów } \sum x_i y_i = 0.76735$$

Wyznacznik układu równań D:

$$D = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 = 6 \cdot 0.018884 - (0.318)^2 = 0.01218$$

Parametry prostej regresji:

Współczynnik kierunkowy a:

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{D} = \frac{4.6041 - 4.3659}{0.01218} \approx 29.63\,\mathrm{s^2/kg}$$

Punkt przecięcia z osią T^2 b:

$$b = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{D} = \frac{0.018884 \cdot 13.7229 - 0.318 \cdot 0.76735}{0.01218} \approx 0.72\ \mathrm{s}^2$$

Otrzymana zależność empiryczna:

$$T^2 = 29.63 \cdot m + 0,72$$

Graficzna reprezentacja tej zależności znajduje się w sekcji z wykresami.

Teoretyczne wartości współczynników prostej

Dysponując wartością współczynnika sprężystości:

$$k = 1{,}356\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Możemy wyznaczyć teoretyczne wartości współczynników A i B w równaniu:

$$T^2 = A \cdot m + B$$

zgodnie ze wzorami:

$$A = \frac{4\pi^2}{k}, \qquad B = \frac{4\pi^2 m_{spr}}{3k}$$

Dane do obliczeń:

- $k = 1{,}356\,\frac{N}{m}$
- $m_{spr} = 74\,\mathrm{g} = 0{,}074\,\mathrm{kg}$

- $\pi^2 \approx 9{,}8696$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$A = \frac{4\pi^2}{k} = \frac{4 \cdot 9,87}{1,356} = 29,12$$

$$B = \frac{4\pi^2 m_{spr}}{3k} = \frac{4 \cdot 9,87 \cdot 0,074}{3 \cdot 1,356} = 0,72$$

Wyznaczenie masy nieznanej m_x

Wykorzystując otrzymaną zależność empiryczną:

$$T^2 = 29{,}63 \cdot m + 0{,}72$$

oraz zmierzoną wartość $T^2 = 2{,}76$, uwzględniając masę szalki $m_s = 0{,}018$ kg, możemy zapisać:

$$2{,}76 = 29{,}63 \cdot (m_x + 0{,}018) + 0{,}72$$

Przekształcając kolejno:

$$2{,}04 = 29{,}63 \cdot (m_x + 0{,}018)$$

$$m_x + 0{,}018 = \frac{2{,}04}{29{,}63} = 0{,}0689$$

$$m_x = 0{,}0689 - 0{,}018 = 0{,}0509 \text{ kg} = 50{,}9 \text{ g}$$

4 Ocena niepewności pomiaru

4.1 Niepewność czasu

Niepewność typu B czasu obliczono ze wzoru:

$$u_B(t) = \frac{\Delta_d(t)}{\sqrt{3}}$$

Gdzie $\Delta_d(t) = 0,2$ to błąd eksperymentatora, stąd:

$$u_B(t) = \frac{0,2}{\sqrt{3}} \approx 0,12 \text{ s}$$

Niepewność typu A czasu wyznaczono na podstawie pięciu powtórzonych pomiarów dla amplitudy 5 cm (tabela 2), wykorzystując wzór 8.

$$u_A(t) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2} \tag{8}$$

Podstawiając wartości do wzoru 8 otrzymano:

$$u_A(t) = 0{,}19 \text{ s}$$

Niepewność złożoną czasu obliczono ze wzoru:

$$u_c(t) = \sqrt{u_A(t)^2 + u_B(t)^2}$$

Podstawiając wartości do wzoru otrzymano:

$$u_c(t) = \sqrt{0{,}19^2 + 0{,}12^2} \approx 0{,}22 \text{ s}$$

4.2 Niepewność okresu

Okres obliczono ze wzoru:

$$T = \frac{t}{N}$$

Gdzie N to liczba drgań, stąd:

$$u_c(T) = \frac{u_c(t)}{N}$$

podstawiając wartość niepewności czasu otrzymano:

$$u_c(T) = \frac{0,22}{20} \approx 0,011 \text{ s}$$

4.3 Niepewność położenia

Niepewność maksymalna miarki wynosi $\Delta_d = 0,001$ m. Niepewność wydłużenia obliczono ze wzoru:

$$u_B(x) = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{3}}$$

Po podstawieniu wartości otrzymano:

$$u_B(x) = \frac{0,001}{3} = 0,00058 \text{ m}$$

4.4 Niepewność wydłużenia

Niepewność wydłużenia obliczono z prawa przenoszenia niepewności dla wzoru 7:

$$\begin{aligned} u_c(\Delta x) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta x}{\partial x}\right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial x_0}\right)^2 u^2(x_0)} \\ &= \sqrt{(1)^2 u^2(x) + (-1)^2 u^2(x_0)} \\ &= \sqrt{2} u_B(x) \end{aligned}$$

Stąd niepewność pojedynczego pomiaru wydłużenia:

$$u_c(\Delta x) = \sqrt{2} \cdot 0,00058 \approx 0,00082 \text{ m}$$

4.5 Niepewność średniego wydłużenia

Niepewność złożona średniego wydłużenia

Dla średniego wydłużenia:

$$\overline{\Delta x_i} = \frac{\Delta x_{i1} + \Delta x_{i2}}{2}$$

niepewność złożoną możemy wyznaczyć korzystając z prawa propagacji niepewności:

$$
\begin{aligned}
u_c(\overline{\Delta x_i}) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{\Delta x_i}}{\partial \Delta x_{i1}}\right)^2 u^2(\Delta x_{i1}) + \left(\frac{\partial \overline{\Delta x_i}}{\partial \Delta x_{i2}}\right)^2 u^2(\Delta x_{i2})} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 u^2(\Delta x) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 u^2(\Delta x)} \\
&= \sqrt{\frac{2}{4} u^2(\Delta x)} = \frac{u(\Delta x)}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Podstawiając wartość niepewności pojedynczego pomiaru wydłużenia otrzymano:

$$u_c(\overline{\Delta x_i}) = \frac{0,00082}{\sqrt{2}} \approx 0,00058 \text{ m}$$

4.6 Współczynnik sprężystości

Niepewności współczynników regresji liniowej dla zależności $x = aF + b$ obliczono na podstawie następujących wzorów:

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}}$$

$$u(k) = s_y \sqrt{\frac{n}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

$$u(b) = s_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

gdzie:

- s_y – odchylenie standardowe reszt,
- $u(a)$ – niepewność standardowa współczynnika kierunkowego prostej regresji,
- $u(b)$ – niepewność standardowa wyrazu wolnego prostej regresji,
- n – liczba punktów pomiarowych,
- x_i – wartości zmiennej niezależnej (siła F),
- y_i – wartości zmierzone (wydłużenie Δx),
- $\hat{y}_i$ – wartości przewidywane przez model regresji,

Obliczone wartości niepewności dla współczynników prostej regresji wynoszą:

- $u(a) = 0,0012\,\frac{\text{m}}{\text{N}}$
- $u(b) = 0,00046\,\text{m}$

Współczynnik sprężystości wyraża się wzorem:

$$k = \frac{1}{a}$$

Stąd niepewność współczynnika sprężystości wynosi:

$$u(k) = \frac{1}{a^2} \cdot u(a)$$

Podstawiając wartość niepewności współczynnika a otrzymano:

$$u(k) = \frac{1}{0{,}7373^2} \cdot 0,0012 \approx 0,0022 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{N}}$$

4.7 Niepewności współczynników A i B zależności $T^2 = Am + B$

Niepewności współczynników A i B zależności $T^2 = Am + B$ obliczono na podstawie następujących wzorów:

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}}$$

$$u(A) = s_y \sqrt{\frac{n}{n\sum m_i^2 - \left(\sum m_i\right)^2}}$$

$$u(B) = s_y \sqrt{\frac{\sum m_i^2}{n\sum m_i^2 - \left(\sum m_i\right)^2}}$$

gdzie:

- s_y – odchylenie standardowe reszt,
- $u(A)$ – niepewność standardowa współczynnika kierunkowego prostej regresji,
- $u(B)$ – niepewność standardowa wyrazu wolnego prostej regresji,
- n – liczba punktów pomiarowych,
- m_i – wartości mas efektywnych,
- y_i – wartości zmierzone (T^2),
- $\hat{y}_i$ – wartości przewidywane przez model regresji.

Obliczone wartości niepewności dla współczynników prostej regresji wynoszą:

- $u(A) = 1{,}54\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}$
- $u(B) = 0{,}12\,\mathrm{s}^2$

4.8 Niepewności współczynników A i B z wzorów

Na podstawie wzoru 6 współczynniki A i B wyrażają się następującymi zależnościami:

$$A = \frac{4\pi^2}{k}$$

$$B = \frac{4\pi^2 m_{spr}}{3k}$$

Korzystając ze wzoru na niepewność złożoną:

$$u_c(E) = \sqrt{\sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\partial E}{\partial x_k}\right)^2 u^2(x_k)}$$

Dla współczynnika A mamy tylko jedną zmienną (k), więc:

$$u_c(A) = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial k}\right)^2 u^2(k)}$$

Po podstawieniu pochodnej:

$$u_c(A) = \sqrt{\left(-\frac{4\pi^2}{k^2}\right)^2 u^2(k)}$$

Ostatecznie:

$$u_c(A) = \frac{4\pi^2}{k^2} u(k)$$

Podstawiając wartości:

$$u_c(A) = \frac{4\pi^2}{1.356^2} \cdot 0,0022 \approx 0,048 \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}$$

Dla współczynnika B mamy dwie zmienne (k i m_{spr}), lecz ze względu na brak informacji o niepewności masy sprężyny $u(m_{spr})$, ograniczymy się do obliczenia niepewności względem zmiennej k:

$$u_c(B) = \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial k}\right)^2 u^2(k)}$$

Po podstawieniu pochodnej cząstkowej:

$$u_c(B) = \sqrt{\left(-\frac{4\pi^2 m_{spr}}{3k^2}\right)^2 u^2(k)}$$

Ostatecznie:

$$u_c(B) = \frac{4\pi^2 m_{spr}}{3k^2} u(k)$$

Podstawiając wartości:

$$u_c(B) = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 0.074}{3 \cdot 1.356^2} \cdot 0.0022 \approx 0.0012 \mathrm{s}^2$$

5 Wnioski

Wyniki eksperymentu wykazały, że w badanym zakresie amplitud (od 1 do 10 cm) okres drgań pozostaje stały w granicach błędu pomiarowego. Świadczy o tym fakt, że wszystkie wyznaczone wartości okresów znajdują się wewnątrz przedziału niepewności, który został określony na podstawie serii pięciu pomiarów wykonanych dla amplitudy 5 cm. Zaobserwowana niezależność okresu od amplitudy potwierdza występowanie zjawiska izochronizmu, które jest przewidywane przez teorię ruchu harmonicznego przy małych wychyleniach.

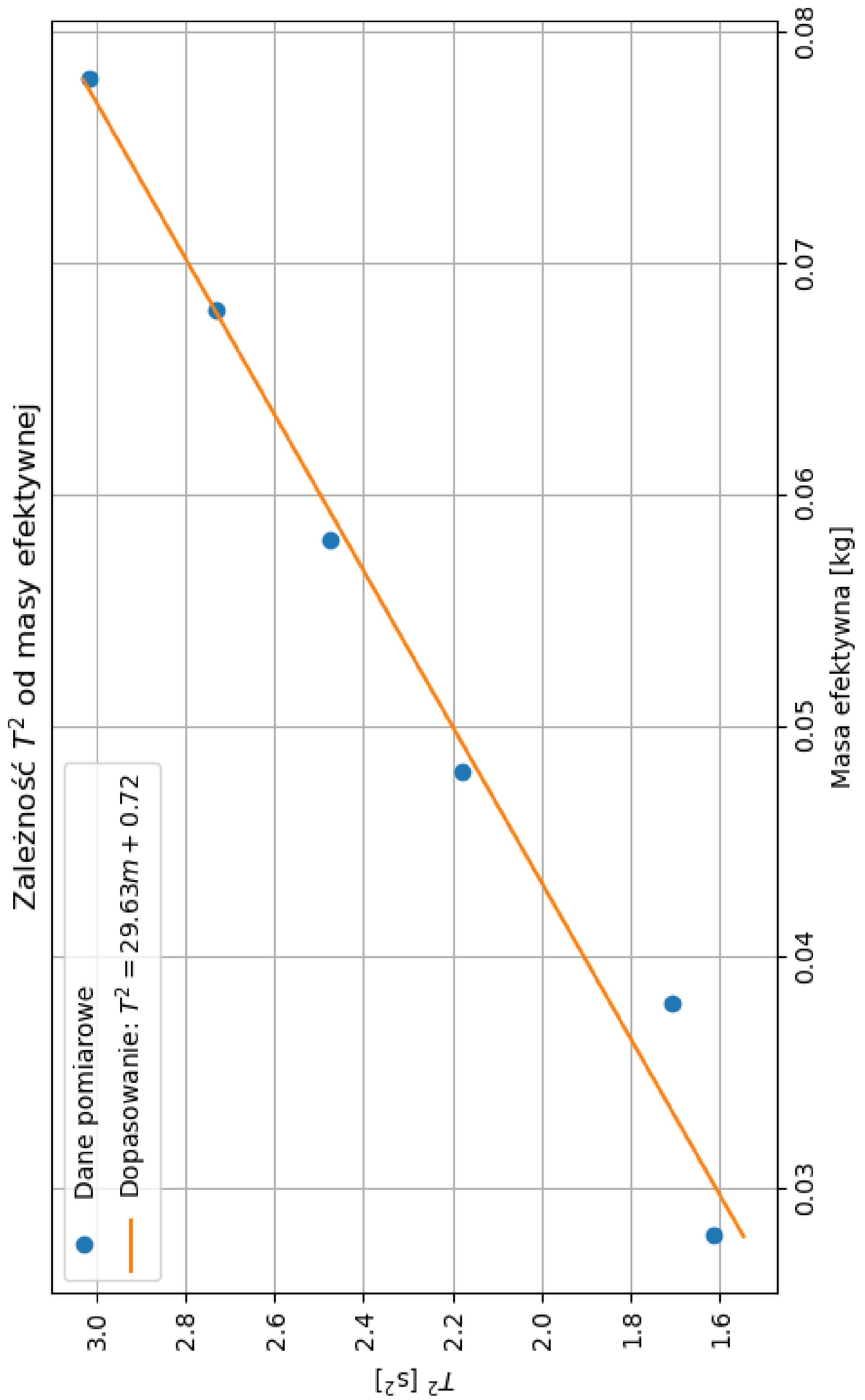
Na podstawie wyników pomiarów wyznaczono współczynnik sprężystości sprężyny $k = 0{,}7373 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{N}}$, $u(k) = 0{,}0022 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{N}}$ oraz wyraz wolny $b = 0{,}00160$m, $u(b) = 0{,}00046$m, który jest bliski zeru. Wykonane pomiary potwierdziły prawo Hooke'a w zakresie od 10 g do 60 g.

Otrzymane empirycznie współczynniki prostej regresji ($a = 29,63$ s^2/kg, $b = 0,72$ s^2) są bardzo zbliżone do wartości przewidzianych teoretycznie ($A = 29,12$ s^2/kg, $B = 0,72$ s^2). Wyraz wolny $b = 0,72$ s^2 odpowiada teoretycznej wartości wynikającej z uwzględnienia masy sprężyny, co potwierdza słuszność korekty $\frac{1}{3}m_{spr}$ w równaniu okresu drgań.

Wykorzystując otrzymaną zależność empiryczną, udało się wyznaczyć nieznaną masę $m_x = 50,9$ g.

6 Wykresy

Rysunek 1: Zależność wydłużenia sprężyny od ciężaru (źródło: opracowanie własne).



Rysunek 2: Zależność wydłużenia sprężyny od ciężaru (źródło: opracowanie własne).

Literatura

[1] Tadeusz Dryński. *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 5 edition, 1976.