

Ćwiczenie nr 15

Drgania masy zawieszona na sprężynie

Spis treści

1	Wstęp teoretyczny	2
2	Opis doświadczenia	3
3	Opracowanie wyników pomiarów	4
3.1	Tabele pomiarowe	4
3.2	1. Izochronizm drgań	5
3.3	2. Zakres stosowalności prawa Hooke'a	6
3.3.1	Współczynnik sprężystości	7
4	Ocena niepewności pomiaru	7
4.1	Niepewność czasu	7
4.2	Niepewność okresu	8
4.3	Niepewność położenia	8
4.4	Niepewność wydłużenia	8
4.5	Niepewność średniego wydłużenia	9
4.6	Współczynnik sprężystości	9
4.7	Niepewności współczynników A i B zależności $T^2 = Am + B$	10
5	Wnioski	11
6	Wykresy	12

1 Wstęp teoretyczny

W doświadczeniu badamy ruch drgający masy zawieszony na sprężynie. Podstawą teoretyczną jest prawo Hooke'a oraz równanie ruchu harmonicznego.

Prawo Hooke'a

Prawo Hooke'a opisuje zależność siły sprężystości F_s od wydłużenia sprężyny Δx :

$$F_s = -k\Delta x \quad (1)$$

gdzie k jest współczynnikiem sprężystości sprężyny. Znak minus oznacza, że siła sprężystości działa przeciwnie do kierunku wychylenia.

Równanie ruchu harmonicznego

Dla masy m zawieszony na sprężynie, zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (2)$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (3)$$

gdzie:

- A – amplituda drgań
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – częstość kołowa drgań
- ϕ – faza początkowa

Okres drgań

Okres drgań T masy zawieszony na sprężynie wyraża się wzorem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4)$$

Wzór (4) uwzględnia jedynie masę zawieszoną na sprężynie, jednakże w drganiach bierze udział również masa sprężyny. Uwzględniając ją należy dodać do masy ciężarka $\frac{1}{3}$ masy sprężyny m_{spr} . Otrzymujemy w ten sposób wzór:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_{spr}}{k}} \quad (5)$$

Z powyższego wzoru wynika zależność kwadratu okresu drgań od masy:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m + \frac{4\pi^2 m_{spr}}{3k} \quad (6)$$

gdzie m_{spr} jest masą sprężyny.

Izochronizm drgań

Teoretycznie, dla małych amplitud, okres drgań nie zależy od amplitudy. Jest to tzw. izochronizm drgań, który sprawdzamy w pierwszej części doświadczenia.

Niniejszy wstęp teoretyczny opracowano na podstawie podręcznika Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki - rozdział 24 [1].

2 Opis doświadczenia

Celem doświadczenia jest zbadanie drgań masy zawieszonej na sprężynie poprzez realizację trzech zadań:

Badanie izochronizmu drgań

- Używając masy 50 g, wykonano pomiary czasu 20 pełnych drgań dla amplitud od 1 do 10 cm
- Dla amplitudy 5 cm wykonano 5 powtórzeń pomiaru
- Celem było sprawdzenie, czy okres drgań zależy od amplitudy

Wyznaczanie współczynnika sprężystości k

- Wykonano pomiary wydłużenia sprężyny dla mas od 10 do 60 g (co 10 g)
- Pomiary wykonano dwukrotnie: przy zwiększaniu i zmniejszaniu obciążenia
- Na podstawie wykresu zależności wydłużenia od siły sprawdzono zakres stosowalności prawa Hooke'a

Badanie zależności okresu drgań od masy

- Zmierzono czas 10 pełnych drgań dla mas od 10 do 50 g (co 10 g)
- Wykonano dodatkowy pomiar dla masy nieznanej m_x
- Na podstawie zależności T^2 od m wyznaczono masę nieznaną oraz parametry układu

Podczas wszystkich pomiarów położenia wykorzystano lusterko umieszczone obok metrówki, aby zapewnić prawidłowy odczyt poprzez pokrycie się wskaźnika sprężyny z jego odbiciem.

3 Opracowanie wyników pomiarów

3.1 Tabele pomiarowe

Nr	A [cm]	$t(20 \text{ drgań})$ [s]
1	1	31,50
2	2	31,31
3	3	31,41
4	4	31,50
5	5	31,31
6	6	31,43
7	7	31,44
8	8	31,28
9	9	31,34
10	10	31,50

Tabela 1: Zależność okresu drgań od amplitudy

Nr	$t(20 \text{ drgań})$ [s]
1	31,44
2	31,16
3	31,28
4	31,34
5	31,66

Tabela 2: Pomiar okresu dla $A = 5$ cm

Nr	m [g]	x [cm]
1	10	21,0
2	20	28,2
3	30	35,4
4	40	42,6
5	50	50,0
6	60	57,1
7	60	57,1
8	50	50,0
9	40	42,8
10	30	35,5
11	20	28,2
12	10	21,0

Tabela 3: Zależność położenia szalki od masy

m [g]	$t(20 \text{ drgań})$ [s]	$t(10 \text{ drgań})$ [s]
10	25,41	12,81
20	26,13	13,94
30	29,53	14,81
40	31,47	15,59
50	33,06	16,60
60	34,72	17,84
m_x	33,22	14,91

Tabela 4: Zależność okresu drgań od masy

3.2 1. Izochronizm drgań

Okres drgań T wyznaczono na podstawie zmierzonego czasu t dla n drgań, ze wzoru:

$$T = \frac{t}{n}$$

gdzie:

- t – zmierzony czas dla n drgań,
- n – liczba drgań.

Na podstawie uzyskanych czasów obliczono okresy drgań sprężyny dla każdej amplitudy:

Nr	A [cm]	$t(20 \text{ drgań})$ [s]	T [s]
1	1	31,50	1,575
2	2	31,31	1,5655
3	3	31,41	1,5705
4	4	31,50	1,575
5	5	31,31	1,5655
6	6	31,43	1,5715
7	7	31,44	1,572
8	8	31,28	1,564
9	9	31,34	1,567
10	10	31,50	1,575

Tabela 5: Obliczone okresy drgań dla różnych amplitud

Dla amplitudy $A = 5 \text{ cm}$ wykonano pięć pomiarów, na podstawie których obliczono wartości okresów:

Nr	$t(20 \text{ drgań})$ [s]	T [s]
1	31,44	1,572
2	31,16	1,558
3	31,28	1,564
4	31,34	1,567
5	31,66	1,583

Tabela 6: Pomiary okresu dla amplitudy $A = 5 \text{ cm}$

Na podstawie powyższych danych wyznaczono średni okres:

$$T_{\text{sr}} = \frac{1,572 + 1,558 + 1,564 + 1,567 + 1,583}{5} = 1,569 \text{ s}$$

Maksymalne odchylenie od średniej definiuje się jako:

$$\Delta T_{\max} = \max(T_{\max} - T_{\text{śr}}, T_{\text{śr}} - T_{\min})$$

Podstawiając wartości otrzymano:

$$\Delta T_{\max} = \max(1,583 - 1,569, 1,569 - 1,558) = 0,014 \text{ s}$$

Wyniki pomiarów okresu dla wszystkich amplitud mieszczą się w przedziale niepewności:

$$(T_{\text{śr}} - \Delta T_{\max}, T_{\text{śr}} + \Delta T_{\max}) = (1,555, 1,583) \text{ s}$$

3.3 2. Zakres stosowalności prawa Hooke'a

Dla szalki bez obciążenia położenie wynosi $x_0 = 13.6 \text{ cm}$. Na podstawie wyników obliczono wydłużenie Δx_i jako różnicę między położeniem przy obciążeniu a położeniem początkowym:

$$\Delta x_i = x_i - x_0 \quad (7)$$

Następnie obliczono średnie wartości wydłużeń sprężyny x_i pod wpływem określonych obciążeń zgodnie ze wzorem:

$$\overline{\Delta x_i} = \frac{\Delta x_{i1} + \Delta x_{i2}}{2}$$

gdzie:

- Δx_{i1} – wydłużenie szalki z masą m_i przy obciążeniu rosnącym,
- Δx_{i2} – wydłużenie przy obciążeniu malejącym.

Wyniki obliczeń wydłużeń przedstawiono w tabeli 7.

m [kg]	Δx_1 [m]	Δx_2 [m]
0,010	0,074	0,074
0,020	0,146	0,146
0,030	0,218	0,219
0,040	0,290	0,292
0,050	0,364	0,364
0,060	0,435	0,435

Tabela 7: Wartości wydłużeń sprężyny

Ciężar F został obliczony ze wzoru:

$$F = mg$$

gdzie:

- m – masa odważnika [kg],
- g – przyspieszenie ziemskie [m/s²].

W obliczeniach przyjęto wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 8. Wykres zależności wydłużenia sprężyny od ciężaru przedstawiono na rysunku 1.

$m \text{ [kg]}$	$F \text{ [N]}$	$\overline{\Delta x} \text{ [m]}$
0,010	0,0981	0,074
0,020	0,1962	0,146
0,030	0,2943	0,2185
0,040	0,3924	0,291
0,050	0,4905	0,364
0,060	0,5886	0,435

Tabela 8: Średnie wartości wydłużeń sprężyny

3.3.1 Współczynnik sprężystości

W celu wyznaczenia współczynnika sprężystości sprężyny zastosowano regresję liniową dla zależności wydłużenia Δx od siły F wykorzystując język Python i bibliotekę NumPy. Na podstawie równania regresji:

$$\Delta x = aF + b$$

gdzie:

- $a = \frac{1}{k}$ – współczynnik kierunkowy prostej $[\text{m/N}]$,
- b – wyraz wolny $[\text{m}]$.

otrzymano następujące wartości:

- $a = 0,7373 \text{ m/N}$,
- $b = 0,00160 \text{ m}$.

Stąd współczynnik sprężystości wynosi:

$$k = \frac{1}{a} = \frac{1}{0,7373} \approx 1,356 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

4 Ocena niepewności pomiaru

4.1 Niepewność czasu

Niepewność typu B czasu obliczono ze wzoru:

$$u_B(t) = \frac{\Delta_d(t)}{\sqrt{3}}$$

Gdzie $\Delta_d(t) = 0,2$ to błąd eksperymentatora, stąd:

$$u_B(t) = \frac{0,2}{\sqrt{3}} \approx 0,12 \text{ s}$$

Niepewność typu A czasu wyznaczono na podstawie pięciu powtórzonych pomiarów dla amplitudy 5 cm (tabela 2), wykorzystując wzór 8.

$$u_A(t) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \quad (8)$$

Podstawiając wartości do wzoru 8 otrzymano:

$$u_A(t) = 0,19 \text{ s}$$

Niepewność złożoną czasu obliczono ze wzoru:

$$u_c(t) = \sqrt{u_A(t)^2 + u_B(t)^2}$$

Podstawiając wartości do wzoru otrzymano:

$$u_c(t) = \sqrt{0,19^2 + 0,12^2} \approx 0,22 \text{ s}$$

4.2 Niepewność okresu

Okres obliczono ze wzoru:

$$T = \frac{t}{N}$$

Gdzie N to liczba drgań, stąd:

$$u_c(T) = \frac{u_c(t)}{N}$$

podstawiając wartość niepewności czasu otrzymano:

$$u_c(T) = \frac{0,22}{20} \approx 0,011 \text{ s}$$

4.3 Niepewność położenia

Niepewność maksymalna miarki wynosi $\Delta_d = 0,001 \text{ m}$. Niepewność wydłużenia obliczono ze wzoru:

$$u_B(x) = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{3}}$$

Po podstawieniu wartości otrzymano:

$$u_B(x) = \frac{0,001}{3} = 0,00058 \text{ m}$$

4.4 Niepewność wydłużenia

Niepewność wydłużenia obliczono z prawa przenoszenia niepewności dla wzoru 7:

$$\begin{aligned} u_c(\Delta x) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta x}{\partial x}\right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial x_0}\right)^2 u^2(x_0)} \\ &= \sqrt{(1)^2 u^2(x) + (-1)^2 u^2(x_0)} \\ &= \sqrt{2} u_B(x) \end{aligned}$$

Stąd niepewność pojedynczego pomiaru wydłużenia:

$$u_c(\Delta x) = \sqrt{2} \cdot 0,00058 \approx 0,00082 \text{ m}$$

4.5 Niepewność średniego wydłużenia

Niepewność złożona średniego wydłużenia

Dla średniego wydłużenia:

$$\overline{\Delta x_i} = \frac{\Delta x_{i1} + \Delta x_{i2}}{2}$$

niepewność złożoną możemy wyznaczyć korzystając z prawa propagacji niepewności:

$$\begin{aligned} u_c(\overline{\Delta x_i}) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{\Delta x_i}}{\partial \Delta x_{i1}}\right)^2 u^2(\Delta x_{i1}) + \left(\frac{\partial \overline{\Delta x_i}}{\partial \Delta x_{i2}}\right)^2 u^2(\Delta x_{i2})} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 u^2(\Delta x) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 u^2(\Delta x)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{4} u^2(\Delta x)} = \frac{u(\Delta x)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Podstawiając wartość niepewności pojedynczego pomiaru wydłużenia otrzymano:

$$u_c(\overline{\Delta x_i}) = \frac{0,00082}{\sqrt{2}} \approx 0,00058 \text{ m}$$

4.6 Współczynnik sprężystości

Niepewności współczynników regresji liniowej dla zależności $x = aF + b$ obliczono na podstawie następujących wzorów:

$$\begin{aligned} s_y &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}} \\ u(k) &= s_y \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \\ u(b) &= s_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \end{aligned}$$

gdzie:

- s_y – odchylenie standardowe reszt,
- $u(a)$ – niepewność standardowa współczynnika kierunkowego prostej regresji,
- $u(b)$ – niepewność standardowa wyrazu wolnego prostej regresji,
- n – liczba punktów pomiarowych,
- x_i – wartości zmiennej niezależnej (siła F),
- y_i – wartości zmierzone (wydłużenie Δx),
- \hat{y}_i – wartości przewidywane przez model regresji,

Obliczone wartości niepewności dla współczynników prostej regresji wynoszą:

- $u(a) = 0,0012 \frac{\text{m}}{\text{N}}$
- $u(b) = 0,00046 \text{ m}$

Współczynnik sprężystości wyraża się wzorem:

$$k = \frac{1}{a}$$

Stąd niepewność współczynnika sprężystości wynosi:

$$u(k) = \frac{1}{a^2} \cdot u(a)$$

Podstawiając wartość niepewności współczynnika a otrzymano:

$$u(k) = \frac{1}{0,7373^2} \cdot 0,0012 \approx 0,0022 \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

4.7 Niepewności współczynników A i B zależności $T^2 = Am + B$

Niepewności współczynników A i B zależności $T^2 = Am + B$ obliczono na podstawie następujących wzorów:

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}}$$

$$u(A) = s_y \sqrt{\frac{n}{n \sum m_i^2 - (\sum m_i)^2}}$$

$$u(B) = s_y \sqrt{\frac{\sum m_i^2}{n \sum m_i^2 - (\sum m_i)^2}}$$

gdzie:

- s_y – odchylenie standardowe reszt,
- $u(A)$ – niepewność standardowa współczynnika kierunkowego prostej regresji,
- $u(B)$ – niepewność standardowa wyrazu wolnego prostej regresji,
- n – liczba punktów pomiarowych,
- m_i – wartości mas efektywnych,
- y_i – wartości zmierzone (T^2),
- \hat{y}_i – wartości przewidywane przez model regresji.

Obliczone wartości niepewności dla współczynników prostej regresji wynoszą:

- $u(A) = 1,54 \frac{\text{s}^2}{\text{kg}}$
- $u(B) = 0,12 \text{ s}^2$

5 Wnioski

Wyniki eksperymentu wykazały, że w badanym zakresie amplitud (od 1 do 10 cm) okres drgań pozostaje stały w granicach błędu pomiarowego. Świadczy o tym fakt, że wszystkie wyznaczone wartości okresów znajdują się wewnątrz przedziału niepewności, który został określony na podstawie serii pięciu pomiarów wykonanych dla amplitudy 5 cm. Zaobserwowana niezależność okresu od amplitudy potwierdza występowanie zjawiska izochronizmu, które jest przewidywane przez teorię ruchu harmonicznego przy małych wychyleniach.

Na podstawie wyników pomiarów wyznaczono współczynnik sprężystości sprężyny $k = 0,7373 \frac{\text{m}}{\text{N}}$, $u(k) = 0,0022 \frac{\text{m}}{\text{N}}$ oraz wyraz wolny $b = 0,00160\text{m}$, $u(b) = 0,00046\text{m}$, który jest bliski zeru. Wykonane pomiary potwierdziły prawo Hooke’a w zakresie od 10 g do 60 g.

6 Wykresy



Rysunek 1: Zależność wydłużenia sprężyny od ciężaru (źródło: opracowanie własne).

Literatura

- [1] Tadeusz Dryński. *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 5 edition, 1976.