

# Ćwiczenie nr 44

## Prawo Ohma dla prądu przemiennego

### 1 Wstęp teoretyczny

#### 1.1 Charakterystyka prądu przemiennego

Prądem przemiennym nazywamy prąd elektryczny, którego wartość chwilowa i kierunek ulegają okresowym zmianom. W najprostszym przypadku zmiany te mają charakter harmoniczny (sinusoidalny) i mogą być opisane równaniami:

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t), \quad i(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

gdzie  $U_0, I_0$  to amplitudy napięcia i natężenia,  $\omega = 2\pi f$  to częstość kołowa, a  $\varphi$  oznacza przesunięcie fazowe między napięciem a natężeniem.

W obwodach prądu przemiennego najczęściej posługujemy się wartościami skutecznymi napięcia i natężenia, które dla przebiegów sinusoidalnych wiążą się z amplitudami zależnością:

$$U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{sk} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

#### 1.2 Impedancja i zawada

W obwodach prądu przemiennego opór całkowity nazywamy **\*\*impedancją\*\***. Jest to wielkość zespolona, składająca się z części rzeczywistej (rezystancja  $R$ ) oraz części urojonej (reaktancja  $X$ ). Moduł impedancji nazywamy **\*\*zawadą\*\*** i oznaczamy symbolem  $|Z|$ .

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (3)$$

Uogólnione prawo Ohma dla wartości skutecznych przyjmuje postać:

$$I_{sk} = \frac{U_{sk}}{|Z|} \quad (4)$$

#### 1.3 Elementy R, L, C w obwodzie prądu przemiennego

##### 1.3.1 Rezystor idealny

Dla rezystora idealnego reaktancja wynosi zero, zatem zawada jest równa jego rezystancji ( $|Z| = R$ ). Napięcie i natężenie są zgodne w fazie ( $\varphi = 0$ ).

### 1.3.2 Cewka indukcyjna

Cewka idealna o indukcyjności  $L$  stawia prądowi przemiennemu opór bierny zwany reaktancją indukcyjną (induktancją)  $X_L$ :

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad (5)$$

W rzeczywistości cewka posiada również opór czynny uzwojenia  $R_L$ . Jej zawada wynosi zatem:

$$|Z_L| = \sqrt{R_L^2 + X_L^2} = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2} \quad (6)$$

W cewce idealnej napięcie wyprzedza natężenie prądu o kąt  $\pi/2$ .

### 1.3.3 Kondensator

Kondensator o pojemności  $C$  charakteryzuje się reaktancją pojemnościową (kapacytancją)  $X_C$ :

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (7)$$

Dla kondensatora idealnego (gdzie  $R = 0$ ) zawada wynosi  $|Z_C| = X_C$ . Natężenie prądu wyprzedza napięcie o kąt  $\pi/2$ .

## 1.4 Szeregowy obwód RLC

W przypadku szeregowego połączenia rezystora, cewki i kondensatora, wypadkowa zawada obwodu wynosi:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (8)$$

Przesunięcie fazowe  $\varphi$  w takim obwodzie wyraża się wzorem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (9)$$

## 2 Opracowanie wyników pomiarów

### 2.1 Tabele pomiarowe

Tabela 1: Uzwojenie L1

lp	I [mA]	U [V]
1	10,0	0,50
2	20,0	1,00
3	29,9	1,50
4	39,7	2,00
5	49,7	2,50
6	59,5	3,00
7	69,1	3,50
8	79,3	4,00
9	89,3	4,50
10	99,0	5,00

Tabela 4: Kondensator C

lp	I [mA]	U [V]
1	0,48	0,48
2	1,00	0,96
3	1,60	1,49
4	2,10	1,98
5	2,70	2,49
6	3,20	2,99
7	3,80	3,51
8	4,40	4,01
9	5,00	4,53
10	5,50	5,02

Tabela 2: Uzwojenie L1+L2

lp	I [mA]	U [V]
1	3,7	0,50
2	7,5	1,00
3	11,2	1,50
4	14,9	2,00
5	18,8	2,51
6	22,4	3,00
7	26,1	3,50
8	29,9	3,99
9	33,7	4,50
10	37,4	5,00

Tabela 5: Kondensator 2C

lp	I [mA]	U [V]
1	1,0	0,50
2	2,2	1,02
3	3,3	1,50
4	4,3	1,98
5	5,5	2,47
6	6,8	3,05
7	7,8	3,52
8	8,9	3,98
9	10,1	4,52
10	11,3	5,03

Tabela 3: Uzwojenie L1+L2+L3

lp	I [mA]	U [V]
1	1,5	0,48
2	3,0	0,96
3	4,7	1,50
4	6,3	1,98
5	7,9	2,50
6	9,4	2,97
7	11,1	3,48
8	12,7	3,98
9	14,3	4,49
10	16,0	5,02

Tabela 6: Kondensator 4C

lp	I [mA]	U [V]
1	2,4	0,48
2	5,0	0,99
3	7,7	1,52
4	10,1	2,00
5	12,8	2,53
6	15,5	3,05
7	17,7	3,48
8	20,4	4,01
9	22,4	4,51
10	25,5	5,02

Tabela 7: Układ L1+L2+L3+C1

lp	I [mA]	U [V]
1	0,8	0,51
2	1,6	0,98
3	2,4	1,49
4	3,3	2,02
5	4,1	2,49
6	4,9	2,98
7	5,7	3,47
8	6,6	4,00
9	7,5	4,53
10	8,3	5,02

### Dane ogólne

Częstotliwość prądu przemiennego wynosi:  $f = 50$  Hz, stąd częstość kołowa ( $\omega$ ), wynosi:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 100\pi = 314,16 \text{ rad/s}$$

Rezystancje uzwojeń cewek wynoszą:

$$R_{ab} = 36 \Omega, \quad R_{bc} = 16 \Omega, \quad R_{cd} = 33 \Omega$$

Stąd rezystancje układów cewek wynoszą:

$$\begin{aligned} R_1 &= 36 \Omega \\ R_{1+2} &= 36 + 16 = 52 \Omega \\ R_{1+2+3} &= 36 + 16 + 33 = 85 \Omega \end{aligned}$$

## 2.2 Wyznaczenie indukcyjności cewki

Na podstawie bezpośrednich pomiarów dla cewki  $L_1$  oraz wyznaczonych teoretycznie impedancji cewek  $L_2$  i  $L_3$ , sporządzono ich charakterystyki prądowo-napięciowe (rys. 1).

Do wyznaczenia parametrów tych charakterystyk wykorzystano metodę regresji liniowej. Przyjęto model liniowy  $U(I) = a \cdot I + b$ , gdzie współczynnik kierunkowy  $a$  odpowiada wartości zawady  $|Z|$  danego układu, a wyraz wolny  $b$  powinien być bliski zeru.

Niepewność standardową współczynnika kierunkowego  $u(a)$  wyznaczono zgodnie ze wzorem (6) z instrukcji (ONP, 2023):

$$u(a) = s_y \sqrt{\frac{n}{D}}$$

Wyniki dopasowania prostych do danych pomiarowych dla narastających układów uzwojeń przedstawiono w tabeli 8.

Układ	$a ( Z ) [\Omega]$	$u(a) [\Omega]$	$b [\text{V}]$	$R^2$
$L_1$ (a-b)	50,58	0,07	-0,0091	1,0000
$L_1 + L_2$ (a-c)	133,53	0,18	0,0047	1,0000
$L_1 + L_2 + L_3$ (a-d)	312,39	0,65	0,0214	1,0000

Tabela 8: Współczynniki regresji liniowej wyznaczone dla charakterystyk cewek ( $U = aI + b$ ).

### 2.2.1 Obliczenie indukcyjności całkowitych ( $L_{ukl}$ )

Dla każdego badanego układu, znając rezystancję czynną  $R$  (sumę rezystancji włączonych sekcji) oraz częstotliwość kołową  $\omega = 314,16 \text{ rad/s}$ , obliczono całkowitą indukcyjność  $L_{ukl}$  przekształcając wzór na impedancję:

$$L_{ukl} = \frac{1}{\omega} \sqrt{|Z|^2 - R^2} \quad (10)$$

Niepewność  $u(L_{ukl})$  obliczono metodą przenoszenia niepewności (wzór 15 w (ONP, 2023)), traktując  $|Z|$  jako zmienną pomiarową:

$$u(L_{ukl}) = \left| \frac{\partial L}{\partial |Z|} \right| u(|Z|) = \left| \frac{1}{\omega} \frac{2|Z|}{2\sqrt{|Z|^2 - R^2}} \right| u(|Z|) = \frac{|Z|}{\omega(\omega L_{ukl})} u(|Z|) = \frac{|Z|}{\omega^2 L_{ukl}} u(|Z|) \quad (11)$$

**Przykładowe obliczenie** (dla układu  $L_1 + L_2$ , czyli zaciski a-c):

- Dane:  $|Z| = 133,53 \Omega$ ,  $u(|Z|) = 0,18 \Omega$ ,  $R = R_{ab} + R_{bc} = 36,0 + 16,0 = 52,0 \Omega$ .
- Obliczenie wartości  $L_{(a-c)}$ :

$$L_{(a-c)} = \frac{1}{314,16} \sqrt{133,53^2 - 52,0^2} = \frac{\sqrt{17830,26 - 2704}}{314,16} \approx \frac{122,99}{314,16} \approx 0,3915 \text{ H}$$

- Obliczenie niepewności  $u(L_{(a-c)})$ :

$$u(L_{(a-c)}) = \frac{133,53}{314,16^2 \cdot 0,3915} \cdot 0,18 \approx \frac{133,53}{38651,5} \cdot 0,18 \approx 0,0006 \text{ H}$$

Analogicznie obliczono  $L_{(a-b)} \approx 0,1131 \text{ H}$  oraz  $L_{(a-d)} \approx 0,9568 \text{ H}$ .

### 2.2.2 Obliczenie indukcyjności sekcji ( $L_1, L_2, L_3$ )

Ponieważ pomiary wykonywano w układzie narastającym (szeregowym), indukcyjności poszczególnych sekcji wyznaczono różnicowo:

- $L_1 = L_{(a-b)}$
- $L_2 = L_{(a-c)} - L_{(a-b)}$
- $L_3 = L_{(a-d)} - L_{(a-c)}$

Niepewność wyznaczenia indukcyjności sekcji (dla  $L_2$  i  $L_3$ ) obliczono jako pierwiastek z sumy kwadratów niepewności składowych (prawo przenoszenia niepewności dla różnicy):

$$u(L_{sekcja}) = \sqrt{u^2(L_{obecny}) + u^2(L_{poprzedni})}$$

**Przykładowe obliczenie** (dla sekcji  $L_2$ ):

- Dane (z poprzedniego kroku):  $L_{(a-c)} = 0,3915 \text{ H}$ ,  $L_{(a-b)} = 0,1131 \text{ H}$ .
- Wynik:

$$L_2 = 0,3915 - 0,1131 = 0,2784 \text{ H}$$

- Niepewność:

$$u(L_2) = \sqrt{0,0006^2 + 0,0003^2} \approx 0,0007 \text{ H}$$

Ostateczne wyniki dla poszczególnych sekcji zestawiono w tabeli 9.

Sekcja	Indukcyjność $L$ [H]	Niepewność $u(L)$ [H]
$L_1$	0,1131	0,0003
$L_2$	0,2784	0,0007
$L_3$	0,5654	0,0022
<b>Suma (a-d)</b>	<b>0,9568</b>	-

Tabela 9: Wyznaczone współczynniki samoindukcji poszczególnych sekcji cewki.

## 2.3 Wyznaczenie pojemności kondensatora

Podobnie jak w przypadku cewek, dla trzech kondensatorów ( $C_1$ ,  $C_2$  oraz  $C_3$ ) sporządzono charakterystyki prądowo-napięciowe (rys. 2). Przyjęto model liniowy  $I(U) = a \cdot U$ , gdzie współczynnik kierunkowy  $a$  jest związany z pojemnością  $C$  zależnością:

$$a = \omega C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{a}{\omega} \quad (12)$$

gdzie  $\omega = 314,16 \text{ rad/s}$ .

Niepewność standardową współczynnika kierunkowego  $u(a)$  wyznaczono metodą regresji liniowej (zgodnie ze wzorem 6 z instrukcji ONP). Następnie, korzystając z prawa przenoszenia niepewności (wzór 15 z instrukcji ONP), wyznaczono niepewność złożoną pojemności  $u(C)$ . Ponieważ  $\omega$  przyjęto jako stałą bezbłędną, pochodna cząstkowa wynosi:

$$u(C) = \left| \frac{\partial C}{\partial a} \right| u(a) = \left| \frac{1}{\omega} \right| u(a) = \frac{u(a)}{\omega} \quad (13)$$

**Przykładowe obliczenie** (dla kondensatora  $C_1$ ):

- Dane z regresji:  $a = 1,1107 \cdot 10^{-3} \text{ A/V}$ ,  $u(a) = 6,22 \cdot 10^{-6} \text{ A/V}$ .
- Obliczenie wartości  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{1,1107 \cdot 10^{-3}}{314,16} \approx 3,535 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 3,54 \mu\text{F}$$

- Obliczenie niepewności  $u(C_1)$ :

$$u(C_1) = \frac{6,22 \cdot 10^{-6}}{314,16} \approx 1,98 \cdot 10^{-8} \text{ F} \approx 0,02 \mu\text{F}$$

Wyniki dla wszystkich badanych elementów zestawiono w tabeli 10.

Tabela 10: Wyznaczone parametry kondensatorów wraz z niepewnościami.

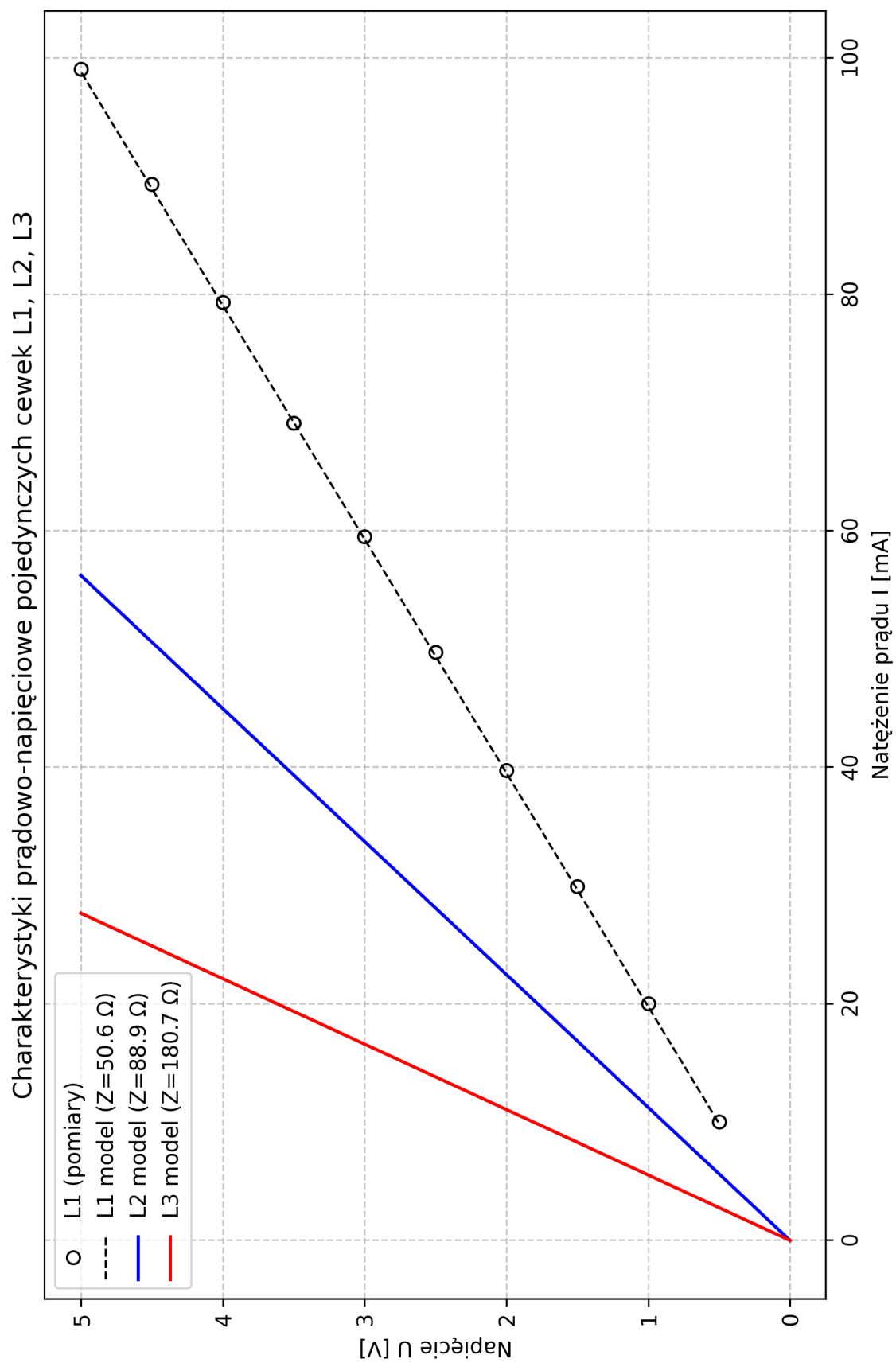
El.	$a$ [A/V]	$u(a)$ [A/V]	$C$ [ $\mu\text{F}$ ]	$u(C)$ [ $\mu\text{F}$ ]
$C_1$	$1,1107 \cdot 10^{-3}$	$6,22 \cdot 10^{-6}$	3,54	0,02
$C_2$	$2,2662 \cdot 10^{-3}$	$7,49 \cdot 10^{-6}$	7,21	0,02
$C_3$	$5,0502 \cdot 10^{-3}$	$3,55 \cdot 10^{-5}$	16,08	0,11

Analizując otrzymane wartości pojemności, wyznaczono ich stosunki względem pojemności podstawowej  $C_1$ :

- $C_2/C_1 \approx 2,04$  (oczekiwano wartości bliskiej 2, układ  $2C$ ),
- $C_3/C_1 \approx 4,55$  (oczekiwano wartości bliskiej 4, układ  $4C$ ).

Wyniki potwierdzają, że badane elementy mają pojemności będące przybliżonymi wielokrotnościami pojemności  $C_1$ .

### 3 Wykresy

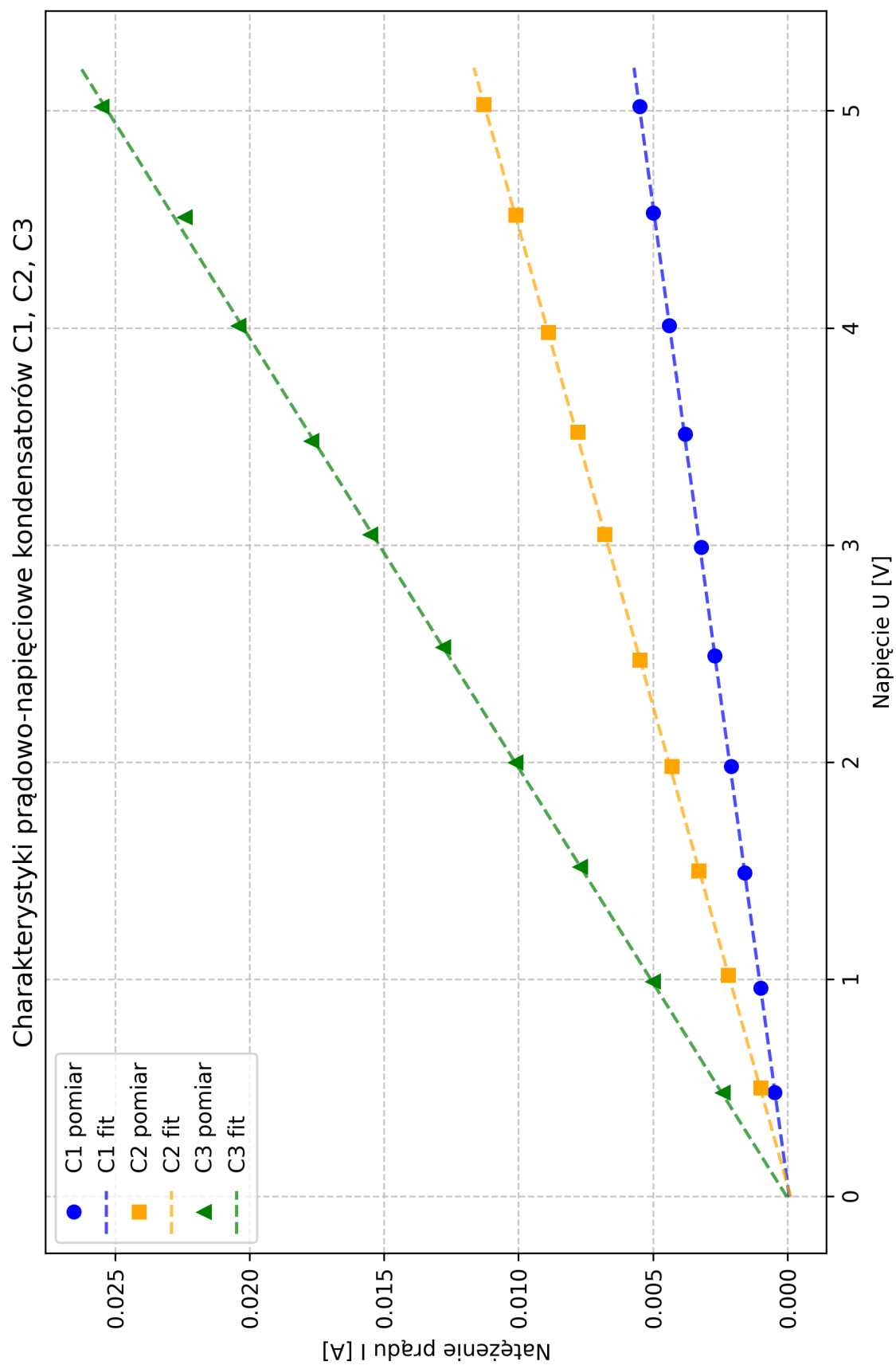


Rysunek 1: Charakterystyki prądowo-napięciowe cewek  $L_1$ ,  $L_2$  oraz  $L_3$ .



## Literatura

(2023). *Instrukcja oceny niepewności pomiarów w I Pracowni Fizycznej (ONP)*. Instytut Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Wrocławskiego. Nowe normy międzynarodowe. Dostęp: 11.01.2026.



Rysunek 2: Charakterystyki prądowo-napięciowe kondensatorów  $C_1$ ,  $C_2$  oraz  $C_3$ .