

# Ćwiczenie nr 46

## Prawa Ohma i Kirchhoffa

### 1 Wstęp teoretyczny

#### 1.1 Prawo Ohma i rezystancja

Natężenie prądu elektrycznego  $I$  definiuje się jako ilość ładunku przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika w jednostce czasu ( $I = dQ/dt$ ). Dla wielu materiałów (zwanych omowymi) gęstość prądu  $\vec{J}$  jest wprost proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ . W ujęciu makroskopowym zależność ta, znana jako prawo Ohma, wiąże natężenie prądu  $I$  płynącego przez element z napięciem  $U$  przyłożonym do jego końców (?):

$$I = \frac{U}{R} \quad (1)$$

Współczynnik proporcjonalności  $R$  nazywamy rezystancją (oporem elektrycznym). Jednostką rezystancji w układzie SI jest om ( $\Omega$ ). Rezystancja elementu zależy od jego geometrii oraz rezystywności materiału  $\rho$ :

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2)$$

gdzie  $l$  to długość przewodnika, a  $S$  to pole jego przekroju poprzecznego (?).

#### 1.2 Prawa Kirchhoffa

Analiza złożonych obwodów elektrycznych opiera się na dwóch fundamentalnych zasadach wynikających z praw zachowania:

1. **I Prawo Kirchhoffa (Węzłowe):** Wynika z zasady zachowania ładunku. Suma algebraiczna natężeń prądów wpływających do węzła i wypływających z niego jest równa zero (?):

$$\sum_k I_k = 0 \quad (3)$$

2. **II Prawo Kirchhoffa (Oczkowe):** Wynika z zasady zachowania energii. W dowolnym zamkniętym obwodzie (oczku) suma algebraiczna zmian potencjałów (sił elektromotorycznych  $\mathcal{E}$  oraz spadków napięć  $IR$ ) wynosi zero (?):

$$\sum_k \Delta V_k = 0 \quad \sum \mathcal{E} = \sum IR \quad (4)$$

### 1.3 Łączenie rezystorów

W obwodach prądu stałego wyróżniamy podstawowe konfiguracje łączenia rezystorów:

- **Połączenie szeregowe:** Przez wszystkie elementy płynie ten sam prąd. Rezystancja zastępcza jest sumą rezystancji składowych:

$$R_z = \sum_i R_i \quad (5)$$

- **Połączenie równoległe:** Na wszystkich elementach występuje to samo napięcie. Odwrotność rezystancji zastępczej jest sumą odwrotności rezystancji składowych (?):

$$\frac{1}{R_z} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (6)$$

### 1.4 Transfiguracja gwiazda-trójkąt

W przypadku bardziej złożonych struktur, których nie można sprowadzić do połączeń szeregowych lub równoległych (np. mostki), stosuje się transformację układu połączonego w trójkąt ( $\Delta$ ) na równoważny układ połączony w gwiazdę ( $Y$ ) lub odwrotnie. Dla transformacji trójkąta (rezystancje  $R_{12}, R_{23}, R_{31}$ ) w gwiazdę (rezystancje  $R_1, R_2, R_3$ ), wzory na rezystancje zastępcze przyjmują postać (?):

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (7)$$

Zastosowanie tej transformacji pozwala na uproszczenie topologii obwodu i obliczenie rezystancji zastępczej metodami podstawowymi.

## 2 Opracowanie wyników pomiarów

### 2.1 Tabele pomiarowe

$R_1$ [kΩ]	$R_2$ [kΩ]	$R_3$ [kΩ]	$R_4$ [kΩ]	$R_5$ [kΩ]
0,192	2,39	0,557	0,558	0,877

Tabela 1: Zmierzone wartości rezystancji

$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$U_3$ [V]	$U_4$ [V]	$U_5$ [V]
2,03	7,93	4,08	3,81	—
$I_1$ [mA]	$I_2$ [mA]	$I_3$ [mA]	$I_4$ [mA]	$I_5$ [mA]
10,73	3,32	7,44	7,44	—

Tabela 2: Wyniki pomiarów dla Układu 1

$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$U_3$ [V]	$U_4$ [V]	$U_5$ [V]
1,64	8,32	2,87	5,37	4,57
$I_1$ [mA]	$I_2$ [mA]	$I_3$ [mA]	$I_4$ [mA]	$I_5$ [mA]
13,85	3,48	5,23	10,49	5,28

Tabela 3: Wyniki pomiarów dla Układu 2

$R_z$ [kΩ]
0,901

Tabela 4: Zmierzona rezystancja zastępcza

## 2.2 Obliczenie rezystancji R1-R4

Na podstawie pomiarów napięć i natężeń prądu dla układu z schematu 1, korzystając z prawa Ohma, obliczono wartości rezystancji R1 ÷ R4. Prawo Ohma wyraża się wzorem:

$$R = \frac{U}{I} \quad (8)$$

Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 5.

Rezystor	Wartość R [Ω]
$R_1$	189,19
$R_2$	2388,55
$R_3$	548,39
$R_4$	512,10

Tabela 5: Obliczone wartości rezystancji R1-R4

Przykładowe obliczenie dla rezystora R1:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{2,03}{0,01073} \approx 189,19 \Omega \quad (9)$$

**Porównanie wartości rezystancji obliczonych ze zmierzonymi**

## 2.3 Obliczenie prądów I1, I2, I3=I4

Na podstawie praw Kirchhoffa oraz prawa Ohma, obliczono wartości prądów w układzie z schematu 1. Wzory na prądy wynoszą:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\mathcal{E}(R_2+R_3+R_4)}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)} \\ I_2 = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)} \\ I_3 = I_4 = \frac{\mathcal{E}(R_3+R_4)}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)} \end{cases} \quad (10)$$

## 2.4 Obliczenie natężeń z praw Kirchhoffa

Z pierwszego prawa Kirchhoffa:

$$\begin{cases} I_1 - I_3 - I_2 = 0 \\ I_3 - I_4 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Z drugiego prawa Kirchhoffa:

$$\begin{cases} \mathcal{E} - U_1 - U_2 = 0 \\ U_2 - U_3 - U_4 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Z prawa Ohma dla całego układu:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_z} \quad (13)$$

, gdzie  $\mathcal{E} = 10,0V$  to napięcie zasilania układu. Przekształcając wzory (11), (12) oraz (13) otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} I_1 = I_3 + I_2 \\ I_3 = I_4 \\ \mathcal{E} - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0 \\ I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_z} \end{cases} \quad (14)$$

Z prawa łączenia rezystorów szeregowo i równoległe:

$$R_z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}} = \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Podstawiając  $R_z$  do piątego równania z układu (14) otrzymujemy wzór na  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} = \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)}$$

Do czwartego równania układu (14) podstawiamy wzór na  $I_4$  z drugiego równania oraz wzór na  $I_2$  z pierwszego równania:

$$\begin{aligned} R_2(I_1 - I_3) - I_3(R_3 + R_4) &= 0 \\ I_1 R_2 - I_3 R_2 - I_3(R_3 + R_4) &= 0 \\ I_1 R_2 &= I_3(R_2 + R_3 + R_4) \end{aligned}$$

i otrzymujemy wzór na  $I_3$  oraz  $I_4$ :

$$\begin{aligned} I_3 = I_4 &= I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \\ &= \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \\ &= \frac{\mathcal{E}(R_3 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} \end{aligned}$$

Wyznaczamy  $I_2$  podstawiając do pierwszego wzoru z układu równań obliczony powyżej wzór na  $I_3$ :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= I_1 - I_3 = \\
 &= I_1 - I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \\
 &= I_1 \left( 1 - \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \right) = \\
 &= I_1 \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \\
 &= \frac{\mathcal{E} (R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)} \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \\
 &= \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)}
 \end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$\begin{cases} I_1 &= \frac{\mathcal{E}(R_2+R_3+R_4)}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)} \\ I_2 &= \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)} \\ I_3 = I_4 &= \frac{\mathcal{E}(R_3+R_4)}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)} \end{cases}$$

## Porównanie wartości natężeń obliczonych ze zmierzonymi

Wyniki obliczeń oraz porównanie z wartościami zmierzonymi przedstawiono w tabeli 6.

Prąd	Obliczony [A]	Zmierzony [A]	Błąd bezwzględny [A]	Błąd względny [%]
$I_1$	0,0105	0,0107	0,000229	2,14
$I_2$	0,0033	0,0033	0,000000	0,00
$I_3 = I_4$	0,0072	0,0074	0,000048	0,65

Tabela 6: Obliczone i zmierzone wartości prądów z błędami

Przykładowe obliczenie dla prądu  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{10,0 \cdot (2390 + 557 + 558)}{192 \cdot (2390 + 557 + 558) + 2390 \cdot (557 + 558)} \approx 0,0105 \text{ A} \quad (15)$$

## 2.5 Obliczenie oporu zastępczego

Z prawa łączenia rezystorów szeregowo i równolegle:

$$R_z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}}$$

Porównanie wartości rezystancji obliczonych ze zmierzonymi

## 3 Ocena niepewności pomiaru