Piotr Durniat, 347264
II rok, Fizyka
Wtorek, 8:00-10:15

04.11.2025

Prowadząca:
dr Sylwia Owczarek

Ćwiczenie nr 64

Wyznaczanie stałej siatki dyfrakcyjnej przy użyciu spektrometru

1 Wstęp teoretyczny

Siatka dyfrakcyjna, dyfrakcja i interferencja

Siatka dyfrakcyjna to układ składający się z szeregu szczelin umieszczonych w równych odległościach od siebie na nieprzezroczystym ekranie. W praktyce siatkę taką otrzymuje się często poprzez porysowanie płaskorównoległej płytki szklanej równoległymi kreskami przy użyciu diamentu. Nieprzezroczyste rysy pełnią funkcję zasłon, a przezroczyste przestrzenie między nimi działają jak szczeliny. Odległość między środkami sąsiednich szczelin nazywana jest **stałą siatki** i oznaczana jako d (Dryński, 1976).

Gdy na siatkę pada prostopadle wiązka promieni równoległych, zgodnie z zasadą Huygensa, każda szczelina staje się źródłem nowych drgań, które rozchodzą się we wszystkich kierunkach. Zjawisko to, polegające na uginaniu prostoliniowego biegu promieni, nazywane jest **dyfrakcją** (Dryński, 1976).

Promienie ugięte na różnych szczelinach są promieniami spójnymi, co oznacza, że mogą się ze sobą nakładać, czyli **interferować**. W zależności od kierunku (kąta ugięcia φ), promienie te będą się wzajemnie wzmacniać lub wygaszać (Dryński, 1976).

Warunek wzmocnienia

Do wzmocnienia promieni ugiętych (interferencji konstruktywnej) dochodzi w tych kierunkach, dla których różnica dróg geometrycznych promieni wychodzących z sąsiednich szczelin jest równa całkowitej wielokrotności długości fali światła padającego (λ). Warunek ten, zwany równaniem siatki dyfrakcyjnej, ma postać (Dryński, 1976):

$$n\lambda = d \sin\varphi$$

gdzie:

- $n = 1, 2, 3, \ldots$ – rząd widma (kolejny numer wzmocnienia),
- λ – długość fali światła,
- d – stała siatki dyfrakcyjnej,
- φ – kąt ugięcia promieni, pod którym obserwuje się wzmocnienie.

Sieć krystaliczna jako siatka dyfrakcyjna

Promieniowanie rentgenowskie (promienie X) ma długość fali (rzędu 0,1 nm) porównywalną z odległościami między atomami w ciałach stałych. Z tego powodu regularna, trójwymiarowa struktura atomów w krysztale, zwana siecią krystaliczną, może działać dla promieni X jak trójwymiarowa siatka dyfrakcyjna. Gdy promienie X padają na kryształ, ulegają ugięciu (odbiciu) na kolejnych równoległych płaszczyznach atomowych. Dochodzi do interferencji konstruktywnej (wzmocnienia) tylko pod określonymi kątami, zgodnie z warunkiem znanym jako **prawo Bragga** (Ling et al., 2018):

$$n\lambda = 2d \sin\theta$$

gdzie n to rząd widma (liczba całkowita), λ to długość fali promieniowania X, d to odległość między sąsiednimi płaszczyznami sieci krystalicznej, a θ to kąt padania promieni mierzony względem płaszczyzny kryształu (Ling et al., 2018).

Zasada pomiaru spektrometrem

Spektrometr jest przyrządem pozwalającym na uzyskanie dokładniejszych wyników pomiarów kątów ugięcia φ niż metody uproszczone. Pomiar polega na ustawieniu siatki dyfrakcyjnej na stoliku spektrometru, prostopadle do osi kolimatora (Dryński, 1976).

Za pomocą lunety spektrometru, wyposażonej w noniusze, odczytuje się położenia kątowe dla prążków interferencyjnych (linii widmowych) danego rzędu n. Aby wyznaczyć średni kąt ugięcia, notuje się pozycje noniuszów a_1 i a_2 dla prążka po jednej stronie obrazu nieugiętego (centralnego) oraz b_1 i b_2 dla symetrycznego prążka tego samego rzędu po drugiej stronie. Średni kąt ugięcia φ oblicza się ze wzoru (Dryński, 1976):

$$\varphi = \frac{a_1 - b_1 + a_2 - b_2}{2}$$

Mierząc kąt ugięcia φ dla światła o znanej długości fali λ (np. z lasera), można na podstawie równania siatki wyznaczyć jej stałą d (Dryński, 1976):

$$d = \frac{n\lambda}{\sin\varphi}$$

2 Opis doświadczenia

Pomiary przeprowadzono zgodnie z następującą procedurą:

1. Włączenie zasilania lasera i oświetlenie szczeliny kolimatora.
2. Ustawienie siatki dyfrakcyjnej na stoliku spektrometru w taki sposób, aby położenie prążka zerowego było bliskie zeru na skali kątowej (lub zanotowanie jego dokładnego położenia).
3. Odczytanie wartości kątów odpowiadających prążkom pierwszego rzędu po lewej oraz prawej stronie skali.
4. Zmierzenie wartości kątów dla kolejnych par prążków wyższych rzędów.

3 Opracowanie wyników pomiarów

3.1 Tabele pomiarowe

	Lewa		**Prawa**	
n	φ_{1L}	φ_{2L}	φ_{1P}	φ_{2P}
0	$353°40'$	–	–	$173°50'$
1	$351°05'$	$171°05'$	$359°10'$	$179°06'$
2	$348°20'$	$168°20'$	$1°50'$	$181°35'$
3	$345°35'$	$165°35'$	$4°39'$	$184°39'$
4	–	–	$7°35'$	$187°30'$

Tabela 1: Wartości kątów odpowiadające położeniu prążków.

3.2 Średni kąt ugięcia

Dla każdego rzędu $n \in [1,3]$ średni kąt ugięcia φ_n obliczony został jako średnia arytmetyczna separacji kątowej między prążkami z lewej i prawej strony wiązki nieugiętej (1).

Różnicę kątową $|\dots|_{\text{cykl}}$ wyznaczano jako moduł różnicy odczytów. Ze względu na cykliczność skali goniometru, w przypadku gdy różnica ta przekraczała 180° (przejście przez zero), obliczano dopełnienie do kąta pełnego ($360° - |\text{odczyt}_L - \text{odczyt}_P|$). Otrzymane wartości zapisano w tabeli 2. Natomiast dla rzędu $n = 0$ kąt ugięcia przyjęto z definicji jako $\varphi_0 = 0°$.

$$\varphi_n = \frac{|\varphi_{1L} - \varphi_{1P}|_{\text{cykl}} + |\varphi_{2L} - \varphi_{2P}|_{\text{cykl}}}{2} \tag{1}$$

Przykładowe obliczenia (dla $n = 1$)

Podstawiając wartości kątowe zmierzone dla prążków pierwszego rzędu:

$$\Delta\varphi_{\text{noniusz 1}} = |351°05' - 359°10'| = 8°05'$$

$$\Delta\varphi_{\text{noniusz 2}} = |171°05' - 179°06'| = 8°01'$$

Średnia separacja kątowa:

$$\varphi_1 = \frac{8°05' + 8°01'}{2} = 8°03' = 8 + \frac{3}{60}^{\circ} \approx 8,050°$$

Numer prążka (n)	**Separacja kątowa φ_n [°]**
1	8,050
2	13,375
3	19,067

Tabela 2: Obliczone średnie separacje kątowe φ_n (wg wzoru 1).

3.3 Wyznaczenie stałej siatki dyfrakcyjnej

Stała siatki dyfrakcyjnej dla każdego rzędu n obliczona została ze wzoru (2). Następnie obliczono końcową wartość stałej siatki dyfrakcyjnej $\bar{d}$ jako średnią arytmetyczną tych wszystkich wartości. Wartości dla poszczególnych rzędów oraz wartość średnią zapisano w tabeli 3.

$$d = \frac{n\lambda}{\sin\varphi} \tag{2}$$

gdzie $\lambda = 632{,}8\,\mathrm{nm}$ to długość fali światła lasera użytego w doświadczeniu.

Numer prążka (n)	**Obliczona stała siatki d_n [m]**
1	$4{,}519 \cdot 10^{-6}$
2	$5{,}471 \cdot 10^{-6}$
3	$5{,}811 \cdot 10^{-6}$
Wartość średnia $\bar{d}$	$5{,}267 \cdot 10^{-6}$

Tabela 3: Obliczone wartości stałej siatki dyfrakcyjnej d.

3.4 Liczba rys na milimetr

Znając średnią stałą siatki $\bar{d}$, wyznaczono liczbę rys (szczelin) przypadającą na szerokość 1 mm. Wielkość tę obliczono jako odwrotność stałej siatki wyrażonej w milimetrach:

$$N = \frac{1}{\bar{d}\,[\mathrm{mm}]} = \frac{1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{\bar{d}\,[\mathrm{m}]} \tag{3}$$

Podstawiając obliczoną wartość średnią $\bar{d} \approx 5{,}267 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$:

$$N = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{5{,}267 \cdot 10^{-6}} \approx 189{,}86\,\mathrm{mm}^{-1} \tag{4}$$

4 Ocena niepewności pomiaru

4.1 Niepewność pomiaru kąta ugięcia

Niepewność standardową pomiaru kąta ugięcia oszacowano metodą typu B. Przyjęto dokładność noniusza goniometru $\Delta\varphi = 1' = \frac{1}{60}^{\circ}$. Zakładając rozkład prostokątny, niepewność wynosi:

$$u(\varphi) = \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{60}}{\sqrt{3}} \approx 0{,}0096^{\circ} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad} \tag{5}$$

4.2 Niepewność stałej siatki dla poszczególnych rzędów $u(d)$

Niepewność wyznaczenia stałej siatki d dla każdego rzędu obliczono metodą przenoszenia błędu (z prawa propagacji niepewności) dla wzoru na stałą siatki 2. Ponieważ długość fali λ uznano za wielkość dokładną, a n jest stałą, jedynym źródłem niepewności jest kąt φ.

Wyprowadzenie wzoru na niepewność $u(d)$:

$$u(d) = \left|\frac{\partial d}{\partial\varphi}\right| u(\varphi)$$
$$\frac{\partial d}{\partial\varphi} = -d \cdot \operatorname{ctg}\varphi$$

Zatem:

$$u(d) = d \cdot |\operatorname{ctg}\varphi| \cdot u(\varphi) \tag{6}$$

(gdzie $u(\varphi)$ wyrażono w radianach).

Przykładowe obliczenia (dla $n = 1$)

Podstawiając wartości dla pierwszego rzędu: $d_1 \approx 4{,}52 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$, $\varphi_1 \approx 8{,}05°$ oraz $u(\varphi) \approx 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ rad:

$$u(d_1) = 4{,}52 \cdot 10^{-6} \cdot |\operatorname{ctg}(8{,}05°)| \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-4} \approx 5{,}4 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} \tag{7}$$

4.3 Niepewność średniej stałej siatki

Ze względu na zauważalny rozrzut wyników stałej siatki dla różnych rzędów widma, ostateczną niepewność wyniku średniego obliczono metodą typu A, jako odchylenie standardowe średniej arytmetycznej:

$$u(\bar{d}) = \sqrt{\frac{1}{k(k-1)} \sum_{i=1}^{k} (d_i - \bar{d})^2}$$

Podstawiając obliczone wartości dla $k = 3$ rzędów (gdzie $\bar{d} \approx 5{,}27 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$):

$$\begin{aligned} u(\bar{d}) &= \sqrt{\frac{1}{3(3-1)} \left[(4{,}52 \cdot 10^{-6} - 5{,}27 \cdot 10^{-6})^2 + \cdots + (5{,}81 \cdot 10^{-6} - 5{,}27 \cdot 10^{-6})^2\right]} \\ &\approx 3{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

4.4 Niepewność liczby rys na milimetr

Niepewność wyznaczenia gęstości rys $N = 1/\bar{d}$ obliczono z prawa propagacji niepewności:

$$u(N) = \left|\frac{\partial N}{\partial \bar{d}}\right| u(\bar{d}) = \frac{u(\bar{d})}{\bar{d}^2} = N \cdot \frac{u(\bar{d})}{\bar{d}} \tag{8}$$

Podstawiając wartości ($\bar{d} \approx 5{,}27 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$, $u(\bar{d}) \approx 7{,}4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$, $N \approx 190\,\mathrm{mm}^{-1}$):

$$u(N) \approx 190\,\mathrm{mm}^{-1} \cdot \frac{7{,}4 \cdot 10^{-7}}{5{,}27 \cdot 10^{-6}} \approx 1{,}4 \cdot 10^{1}\,\mathrm{mm}^{-1} \tag{9}$$

5 Wnioski

Celem ćwiczenia było wyznaczenie stałej siatki dyfrakcyjnej przy użyciu spektrometru goniometrycznego. Na podstawie przeprowadzonych pomiarów kątów ugięcia dla trzech rzędów widma sformułowano następujące wnioski:

1. Wyznaczona średnia wartość stałej siatki dyfrakcyjnej oraz jej niepewność standardowa wynoszą odpowiednio:
$$\bar{d} = 5{,}27 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$$
$$u(\bar{d}) = 3{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

2. Na podstawie wyznaczonej stałej obliczono gęstość siatki, która wynosi:
$$N \approx 190\,\mathrm{mm}^{-1}$$
z niepewnością $u(N) \approx 14\,\mathrm{mm}^{-1}$.

3. Analiza niepewności wskazuje na dominujący udział niepewności typu A (statystycznej) nad niepewnością typu B (wynikającą z dokładności noniusza). Wartość $u(\bar{d})$ rzędu 10^{-7} m jest znacznie wyższa niż niepewności pojedynczych pomiarów $u(d_n)$ (rzędu 10^{-9} m), co świadczy o dużym rozrzucie wyników między poszczególnymi rzędami widma.

4. Zauważalna jest systematyczna zależność wyników od rzędu widma (wzrost wartości d wraz ze wzrostem n). Sugeruje to występowanie błędu systematycznego, którego źródłem mogło być nieidealnie prostopadłe ustawienie płaszczyzny siatki dyfrakcyjnej względem osi wiązki padającej (osi kolimatora).

Literatura

Dryński, T. (1976). *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 5 edition.

Ling, S. J., Sanny, J., and Moebs, W. (2018). *Fizyka dla szkół wyższych, Tom 3.* OpenStax. Dostęp: 13.10.2025.