

## Ćwiczenie nr 65

### Wyznaczanie promienia krzywizny soczewki za pomocą pierścieni Newtona

#### 1 Wstęp teoretyczny

##### Interferencja światła i spójność

Interferencja jest zjawiskiem charakterystycznym dla ruchów falowych, obserwowanym, gdy fale nakładają się na siebie. Zjawisko to jest ściśle związane z pojęciem spójności (koherencji) fal. Gdy fale pochodzące ze spójnych źródeł (np. drgających ze stałą częstością) interferują, powstaje regularna struktura miejsc, w których drgania się wygaszają i wzmacniają (Dryński, 1976).

##### Warunki interferencji i prążki jednakowej grubości

Wzmocnienie (maksimum) występuje, gdy różnica dróg optycznych interferujących promieni jest równa całkowitej wielokrotności długości fali ( $k\lambda$ ), a wygaszenie (minimum) dla nieparzystej wielokrotności połówek długości fali ( $(2k + 1)\frac{\lambda}{2}$ ). Należy uwzględnić ewentualną zmianę fazy o  $\pi$  (odpowiadającą zmianie drogi optycznej o  $\lambda/2$ ) przy odbiciu od ośrodka optycznie gęstszego (Dryński, 1976).

W przypadku oświetlenia cienkiej płytki o zmiennej grubości światłem rozciągniętym, obserwuje się prążki interferencyjne umiejscowione na powierzchni płytki, biegnące przez punkty o jednakowej grubości. Są to tzw. **krzywe jednakowej grubości** (Dryński, 1976).

##### Pierścienie Newtona

Najdogodniejszym sposobem uzyskania regularnych prążków jednakowej grubości jest użycie **zestawu Newtona**. Składa się on z płasko-równoległej płytki szklanej i soczewki płasko-wypukłej o dużym promieniu krzywizny, położonej wypukłą stroną na płytce. Między soczewką a płytką tworzy się klin powietrzny o grubości  $d$  rosnącej wraz z odległością  $r$  od punktu styku (Dryński, 1976).

Gdy układ jest oświetlony prostopadle światłem jednorodnym (monochromatycznym), interferencja zachodzi między promieniami odbitymi od dolnej powierzchni soczewki i od górnej powierzchni płytki szklanej. Ponieważ grubość klina powietrznego jest stała wzdłuż okręgu o

środku w punkcie styku, powstają koncentryczne prążki interferencyjne zwane **pierścieniami Newtona**. W centrum obserwuje się ciemny prążek ( $k = 0$ ), gdyż przy odbiciu od płytki szklanej (ośrodek gęstszy) następuje zmiana fazy o  $\pi$  (Dryński, 1976).

Dla padania prostopadłego ( $\cos \beta \approx 1$ ), warunek na  $k$ -ty ciemny pierścień (minimum), uwzględniający zmianę fazy przy odbiciu od płytki, ma postać:

$$2nd = k\lambda$$

Dla klina powietrznego ( $n = 1$ ):

$$2d_k = k\lambda$$

gdzie  $d_k$  to grubość warstwy powietrza dla  $k$ -tego ciemnego pierścienia ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) (Dryński, 1976).

## Zasada pomiaru promienia krzywizny soczewki

Grubość warstwy powietrza  $d$  w odległości  $r$  od punktu styku można powiązać z promieniem krzywizny  $R$  soczewki. Z geometrii układu (rys. 157 w (Dryński, 1976)) wynika zależność  $2Rd - d^2 = r^2$ . Ponieważ  $d$  jest bardzo małe w porównaniu z  $R$ , można pominąć człon  $d^2$ , co daje przybliżony wzór:

$$d \approx \frac{r^2}{2R}$$

Podstawiając to do warunku na  $k$ -ty ciemny pierścień ( $2d_k = k\lambda$ ), otrzymujemy:

$$2 \frac{r_k^2}{2R} = k\lambda$$

$$r_k^2 = kR\lambda$$

gdzie  $r_k$  to promień  $k$ -tego ciemnego pierścienia. Stąd można wyznaczyć promień krzywizny soczewki  $R$ : (Dryński, 1976).

$$R = \frac{r_k^2}{k\lambda}$$

## 2 Opis doświadczenia

Przebieg doświadczenia składał się z następujących kroków:

1. Włączono lampę sodową, podłączając ją przez dławik, i odczekano kilka minut, aż palnik uzyskał pełną jasność.
2. Wyregulowano wysokość tubusu mikroskopu, aby uzyskać ostry obraz pierścieni Newtona.
3. Wybrano 5 ciemnych prążków o możliwie dużych średnicach do pomiaru.
4. Używając przesuwów stolika mikroskopu, zmierzono średnice każdego wybranego pierścienia. W tym celu zapisano położenia:
  - lewego i prawego brzegu pierścienia (pomiar w osi X),
  - górnego i dolnego brzegu pierścienia (pomiar w osi Y).

### 3 Opracowanie wyników pomiarów

#### 3.1 Tabele pomiarowe

Dla wybranych numerów prążków  $n \in [2, 6]$  (licząc od środkowego prążka) zmierzono położenia ich lewego, prawego, dolnego i górnego brzegu (oznaczone odpowiednio  $x_{\min}$ ,  $x_{\max}$ ,  $y_{\min}$  i  $y_{\max}$ ). Ze względu na niezerową grubość prążków, pomiary dokonywano do ich, w osi  $X$  – lewej i w osi  $Y$  – dolnej krawędzi. Pomiary zostały zapisane w tabeli 1.

| $n$ | $x_{\max} [10^{-3} \text{ m}]$ | $x_{\min} [10^{-3} \text{ m}]$ | $y_{\max} [10^{-3} \text{ m}]$ | $y_{\min} [10^{-3} \text{ m}]$ |
|-----|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 2   | 23,62                          | 19,89                          | 7,92                           | 4,23                           |
| 3   | 24,21                          | 19,34                          | 8,54                           | 3,70                           |
| 4   | 24,58                          | 18,78                          | 8,89                           | 3,23                           |
| 5   | 25,09                          | 18,44                          | 9,39                           | 2,86                           |
| 6   | 25,38                          | 18,04                          | 9,72                           | 2,46                           |

Tabela 1: Położenia lewej, prawej, dolnej i górnej krawędzi prążków.

#### 3.2 Średnie promienie prążków

Dla każdego prążka z tabeli 1 wyznaczono średnicę w kierunku  $X$ :  $D_{X,n} = x_{\max,n} - x_{\min,n}$  i w kierunku  $Y$ :  $D_{Y,n} = y_{\max,n} - y_{\min,n}$ . Następnie obliczono średni promień  $r_n$  jako połowę średniej arytmetycznej tych średnic (1). Wyniki zapisano w tabeli 2:

$$r_n = \frac{D_{X,n} + D_{Y,n}}{4}, \quad (1)$$

gdzie indeks  $n$  określa numer prążka.

| $n$ | $D_X [10^{-3} \text{ m}]$ | $D_Y [10^{-3} \text{ m}]$ | $r_n [10^{-3} \text{ m}]$ |
|-----|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 2   | 3,73                      | 3,69                      | 1,8550                    |
| 3   | 4,87                      | 4,84                      | 2,4275                    |
| 4   | 5,80                      | 5,66                      | 2,8650                    |
| 5   | 6,65                      | 6,53                      | 3,2950                    |
| 6   | 7,34                      | 7,26                      | 3,6500                    |

Tabela 2: Średnice (pozioma i pionowa) oraz średnie promienie prążków.

#### Przykładowe obliczenia

Dla  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} D_{X,2} &= (23,62 - 19,89) \cdot 10^{-3} = 3,73 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ D_{Y,2} &= (7,92 - 4,23) \cdot 10^{-3} = 3,69 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ r_2 &= \frac{(3,73 + 3,69) \cdot 10^{-3}}{4} = 1,8550 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

#### 3.3 Promień krzywizny soczewki

Na podstawie wartości z tab. 2 wyznaczono promień krzywizny soczewki  $R_i$  (dla każdego  $i$ -tego pomiaru) ze wzoru (2). Wartości zapisano w tabeli 3.

$$R_n = \frac{r_n^2}{n \cdot \lambda}, \quad (2)$$

gdzie:

- $n$  - numer prążka,
- $r_n$  - promień  $n$ -tego prążka,
- $\lambda = 589 \cdot 10^{-9} \text{ m}$  - długość fali dla lampy sodowej.

| $n$ | $R_n [\text{m}]$ |
|-----|------------------|
| 2   | 2,921            |
| 3   | 3,335            |
| 4   | 3,484            |
| 5   | 3,687            |
| 6   | 3,770            |

Tabela 3: Promienie krzywizny dla każdego prążka.

Ostateczna wartość promienia krzywizny  $\bar{R}$  została obliczona jako średnia arytmetyczna promieni krzywizny dla wszystkich prążków (3) i wyniosła 3,439 m.

$$\bar{R} = \frac{1}{5} \sum_{n=2}^6 R_n \quad (3)$$

## Przykładowe obliczenia

$$R_2 = \frac{(1,8550 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 589 \cdot 10^{-9}} \approx 2,921 \text{ m}$$

$$\bar{R} = \frac{2,921 + 3,335 + 3,484 + 3,687 + 3,770}{5} \approx 3,439 \text{ m}$$

## 4 Ocena niepewności pomiaru

### 4.1 Niepewności pomiarów bezpośrednich

Niepewność maksymalna pomiaru położenia wynosi  $\Delta x = \Delta y = 0,01 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Niepewność standardowa typu B wynosi (4).

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \frac{0,01 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{\sqrt{3}} = 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad (4)$$

Niepewność standardowa długości fali  $\lambda$  została przyjęta jako  $0,1 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ , ze względu na to, że z taką dokładnością została podana w instrukcji.

$$u(\lambda) = 0,1 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad (5)$$

## 4.2 Niepewność promienia prążków

Średni promień prążka obliczany jest ze wzoru (1). Niepewność standardowa obliczona została z prawa propagacji niepewności wielkości nieskorelowanych (6). Niepewność  $u(x_{min}) = u(x_{max}) = u(y_{min}) = u(y_{max}) = u(x)$ .

$$u(r_n) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 u(x)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 u(x)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 u(x)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 u(x)^2} = \frac{u(x)}{2} = 2,9 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad (6)$$

## 4.3 Niepewność promienia krzywizny soczewki

Promień krzywizny soczewki obliczany jest ze wzoru (2). Niepewność standardowa obliczona została z prawa propagacji niepewności wielkości nieskorelowanych (7). Wyniki zapisano w tabeli 4.

$$u(R_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial R_n}{\partial r_n}\right)^2 u^2(r_n) + \left(\frac{\partial R_n}{\partial \lambda}\right)^2 u^2(\lambda)} = \sqrt{\left(\frac{2r_n}{n\lambda}\right)^2 u^2(r_n) + \left(-\frac{r_n^2}{n\lambda^2}\right)^2 u^2(\lambda)} \quad (7)$$

| Numer prążka ( $n$ ) | $R_n$ [m] | $u(R_n)$ [m]        |
|----------------------|-----------|---------------------|
| 2                    | 2,921     | $9,5 \cdot 10^{-3}$ |
| 3                    | 3,335     | $8,6 \cdot 10^{-3}$ |
| 4                    | 3,484     | $7,8 \cdot 10^{-3}$ |
| 5                    | 3,687     | $7,4 \cdot 10^{-3}$ |
| 6                    | 3,770     | $7,0 \cdot 10^{-3}$ |

Tabela 4: Obliczone wartości promienia krzywizny  $R_n$  oraz ich niepewności  $u(R_n)$ .

### Przykładowe obliczenia (dla $n = 2$ )

Dla  $n = 2$  (gdzie  $R_2 = 2,921 \text{ m}$ ,  $r_2 = 1,855 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $u(r_n) = 1,45 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $\lambda = 589 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ ,  $u(\lambda) = 0,58 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ ), niepewność złożoną  $u(R_2)$  obliczono następująco:

$$u(R_2) = 2,921 \text{ m} \cdot \sqrt{4 \left(\frac{1,45 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{1,855 \cdot 10^{-3} \text{ m}}\right)^2 + \left(\frac{0,58 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{589 \cdot 10^{-9} \text{ m}}\right)^2} \approx 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

## 4.4 Niepewność standardowa średniej promienia krzywizny

Średnią wartość promienia krzywizny  $R$  obliczono jako średnią arytmetyczną z  $N = 5$  pomiarów. Niepewność standardową tej średniej  $u(\bar{R})$  wyznaczono metodą typu A, korzystając bezpośrednio ze wzoru na odchylenie standardowe średniej arytmetycznej (8).

$$u(\bar{R}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=2}^6 (R_n - \bar{R})^2} \quad (8)$$

gdzie  $R_i$  to wynik  $i$ -tego pomiaru promienia krzywizny. Podstawiając wartości z tabeli 4 do wzoru (8).

$$u(\bar{R}) = \sqrt{\frac{1}{5(4)} [(2,921 - 3,439)^2 + \dots + (3,770 - 3,439)^2]} \approx 1,5 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

## 5 Wnioski

W wyniku przeprowadzonych pomiarów i obliczeń wyznaczono promień krzywizny soczewki jako  $\bar{R} = 3,4 \text{ m}$  z niepewnością standardową  $u(\bar{R}) = 0,15 \text{ m}$ .

Niepewność standardowa średniej  $u(\bar{R}) = 0,15 \text{ m}$  (wyznaczona z rozrzutu pomiarów  $R_n$ ) jest znacząco większa (o ponad rząd wielkości) od niepewności  $u(R_n)$  obliczonych dla pojedynczych pomiarów (np.  $u(R_2) \approx 0,01 \text{ m}$ , tabela 4).

Wartości promienia krzywizny  $R_n$  nie są stałe. Obserwuje się wyraźny trend – obliczona wartość  $R_n$  rośnie wraz ze wzrostem numeru prążka  $n$  (tabela 3)

Główny wkład do niepewności końcowej wносił duży rozrzut statystyczny wynikający prawdopodobnie z niedoskonałości układu pomiarowego czym objawia się wspomniany wyżej trend systematyczny.

Dokładniejszą metodą wyznaczenia  $R$ , która niweluje problem niedokładnego styku, mogło by być sporządzenie wykresu  $r_n^2$  w funkcji  $n$  i wyznaczenie promienia  $R$  z nachylenia dopasowanej prostej (zgodnie z zależnością  $r_n^2 = (R\lambda)n$ ).

## Literatura

Dryński, T. (1976). *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 5 edition.