

Ćwiczenie nr 65

Wyznaczanie promienia krzywizny soczewki za pomocą pierścieni Newtona

1 Wstęp teoretyczny

Interferencja światła i spójność

Interferencja jest zjawiskiem charakterystycznym dla ruchów falowych, obserwowanym, gdy fale nakładają się na siebie. Zjawisko to jest ściśle związane z pojęciem spójności (koherencji) fal. Gdy fale pochodzące ze spójnych źródeł (np. drgających ze stałą częstością) interferują, powstaje regularna struktura miejsc, w których drgania się wygaszają i wzmacniają (Dryński, 1976).

Warunki interferencji i prążki jednakowej grubości

Wzmocnienie (maksimum) występuje, gdy różnica dróg optycznych interferujących promieni jest równa całkowitej wielokrotności długości fali ($k\lambda$), a wygaszenie (minimum) dla nieparzystej wielokrotności połówek długości fali ($(2k + 1)\frac{\lambda}{2}$). Należy uwzględnić ewentualną zmianę fazy o π (odpowiadającą zmianie drogi optycznej o $\lambda/2$) przy odbiciu od ośrodka optycznie gęstszego (Dryński, 1976).

W przypadku oświetlenia cienkiej płytki o zmiennej grubości światłem rozciągniętym, obserwuje się prążki interferencyjne umiejscowione na powierzchni płytki, biegnące przez punkty o jednakowej grubości. Są to tzw. **krzywe jednakowej grubości** (Dryński, 1976).

Pierścienie Newtona

Najdogodniejszym sposobem uzyskania regularnych prążków jednakowej grubości jest użycie **zestawu Newtona**. Składa się on z płasko-równoległej płytki szklanej i soczewki płasko-wypukłej o dużym promieniu krzywizny, położonej wypukłą stroną na płytce. Między soczewką a płytką tworzy się klin powietrzny o grubości d rosnącej wraz z odległością r od punktu styku (Dryński, 1976).

Gdy układ jest oświetlony prostopadle światłem jednorodnym (monochromatycznym), interferencja zachodzi między promieniami odbitymi od dolnej powierzchni soczewki i od górnej powierzchni płytki szklanej. Ponieważ grubość klina powietrznego jest stała wzdłuż okręgu o

środku w punkcie styku, powstają koncentryczne prążki interferencyjne zwane **pierścieniami Newtona**. W centrum obserwuje się ciemny prążek ($k = 0$), gdyż przy odbiciu od płytki szklanej (ośrodek gęstszy) następuje zmiana fazy o π (Dryński, 1976).

Dla padania prostopadłego ($\cos \beta \approx 1$), warunek na k -ty ciemny pierścień (minimum), uwzględniający zmianę fazy przy odbiciu od płytki, ma postać:

$$2nd = k\lambda$$

Dla klina powietrznego ($n = 1$):

$$2d_k = k\lambda$$

gdzie d_k to grubość warstwy powietrza dla k -tego ciemnego pierścienia ($k = 0, 1, 2, \dots$) (Dryński, 1976).

Zasada pomiaru promienia krzywizny soczewki

Grubość warstwy powietrza d w odległości r od punktu styku można powiązać z promieniem krzywizny R soczewki. Z geometrii układu (rys. 157 w (Dryński, 1976)) wynika zależność $2Rd - d^2 = r^2$. Ponieważ d jest bardzo małe w porównaniu z R , można pominąć człon d^2 , co daje przybliżony wzór:

$$d \approx \frac{r^2}{2R}$$

Podstawiając to do warunku na k -ty ciemny pierścień ($2d_k = k\lambda$), otrzymujemy:

$$2 \frac{r_k^2}{2R} = k\lambda$$

$$r_k^2 = kR\lambda$$

gdzie r_k to promień k -tego ciemnego pierścienia. Stąd można wyznaczyć promień krzywizny soczewki R : (Dryński, 1976).

$$R = \frac{r_k^2}{k\lambda}$$

2 Opracowanie wyników pomiarów

2.1 Tabele pomiarowe

Dla wybranych numerów prążków $n \in [2, 6]$ (licząc od środkowego prążka) zmierzono położenia ich lewego, prawego, dolnego i górnego brzegu (oznaczone odpowiednio x_{min} , x_{max} , y_{min} i y_{max}). Ze względu na niezerową grubość prążków, pomiary dokonywano do ich, w osi X – lewej i w osi Y – dolnej krawędzi. Pomiary zostały zapisane w tabeli 1.

n	$x_{max} [10^{-3} \text{ m}]$	$x_{min} [10^{-3} \text{ m}]$	$y_{max} [10^{-3} \text{ m}]$	$y_{min} [10^{-3} \text{ m}]$
2	23,62	19,89	7,92	4,23
3	24,21	19,34	8,54	3,70
4	24,58	18,78	8,89	3,23
5	25,09	18,44	9,39	2,86
6	25,38	18,04	9,72	2,46

Tabela 1: Położenia lewej, prawej, dolnej i górnej krawędzi prążków.

2.2 Średnie promienie prążków

Dla każdego prążka z tabeli 1 wyznaczono średnicę w kierunku X : $D_{X,n} = x_{max,n} - x_{min,n}$ i w kierunku Y : $D_{Y,n} = y_{max,n} - y_{min,n}$. Następnie obliczono średni promień r_n jako połowę średniej arytmetycznej tych średnic (1). Wyniki zapisano w tabeli 2:

$$r_n = \frac{D_{X,n} + D_{Y,n}}{4}, \quad (1)$$

gdzie indeks n określa numer prążka.

n	$D_X [10^{-3} \text{ m}]$	$D_Y [10^{-3} \text{ m}]$	$r_n [10^{-3} \text{ m}]$
2	3,73	3,69	1,8550
3	4,87	4,84	2,4275
4	5,80	5,66	2,8650
5	6,65	6,53	3,2950
6	7,34	7,26	3,6500

Tabela 2: Średnice (pozioma i pionowa) oraz średnie promienie prążków.

Przykładowe obliczenia

Dla $n = 2$:

$$\begin{aligned} D_{X,2} &= (23,62 - 19,89) \cdot 10^{-3} = 3,73 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ D_{Y,2} &= (7,92 - 4,23) \cdot 10^{-3} = 3,69 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ r_2 &= \frac{(3,73 + 3,69) \cdot 10^{-3}}{4} = 1,8550 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

2.3 Promień krzywizny soczewki

Na podstawie wartości z tab. 2 wyznaczono promień krzywizny soczewki R_i (dla każdego i -tego pomiaru) ze wzoru (2). Wartości zapisano w tabeli 3.

$$R_n = \frac{r_n^2}{n \cdot \lambda}, \quad (2)$$

gdzie:

- n - numer prążka,
- r_n - promień n -tego prążka,
- $\lambda = 589 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ - długość fali dla lampy sodowej.

n	$R_n [\text{m}]$
2	2,921
3	3,335
4	3,484
5	3,687
6	3,770

Tabela 3: Promień krzywizny dla każdego prążka.

Ostateczna wartość promienia krzywizny \bar{R} została obliczona jako średnia arytmetyczna promieni krzywizny dla wszystkich prążków (3) i wyniosła 3,439 m.

$$\bar{R} = \frac{1}{5} \sum_{n=2}^6 R_n \quad (3)$$

Przykładowe obliczenia

$$R_2 = \frac{(1,8550 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 589 \cdot 10^{-9}} \approx 2,921 \text{ m}$$

$$\bar{R} = \frac{2,921 + 3,335 + 3,484 + 3,687 + 3,770}{5} \approx 3,439 \text{ m}$$

3 Ocena niepewności pomiaru

3.1 Niepewności pomiarów bezpośrednich

Niepewność maksymalna pomiaru położenia wynosi $\Delta x = \Delta y = 0,01 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Niepewność standardowa typu B wynosi (4).

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \frac{0,01 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{\sqrt{3}} = 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad (4)$$

Niepewność standardowa długości fali λ została przyjęta jako $0,1 \cdot 10^{-9} \text{ m}$, ze względu na to, że z taką dokładnością została podana w instrukcji.

$$u(\lambda) = 0,1 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad (5)$$

3.2 Niepewność promienia prążków

Średni promień prążka obliczany jest ze wzoru (1). Niepewność standardowa obliczona została z prawa propagacji niepewności wielkości nieskorelowanych (6). Niepewność $u(x_{min}) = u(x_{max}) = u(y_{min}) = u(y_{max}) = u(x)$.

$$u(r_n) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 u(x)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 u(x)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 u(x)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 u(x)^2} = \frac{u(x)}{2} = 2,9 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad (6)$$

3.3 Niepewność promienia krzywizny soczewki

Promień krzywizny soczewki obliczany jest ze wzoru (2). Niepewność standardowa obliczona została z prawa propagacji niepewności wielkości nieskorelowanych (7). Wyniki zapisano w tabeli 4.

$$u(R_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial R_n}{\partial r_n}\right)^2 u^2(r_n) + \left(\frac{\partial R_n}{\partial \lambda}\right)^2 u^2(\lambda)} = \sqrt{\left(\frac{2r_n}{n\lambda}\right)^2 u^2(r_n) + \left(-\frac{r_n^2}{n\lambda^2}\right)^2 u^2(\lambda)} \quad (7)$$

Numer prążka (n)	R_n [m]	$u(R_n)$ [m]
2	2,921	$9,5 \cdot 10^{-3}$
3	3,335	$8,6 \cdot 10^{-3}$
4	3,484	$7,8 \cdot 10^{-3}$
5	3,687	$7,4 \cdot 10^{-3}$
6	3,770	$7,0 \cdot 10^{-3}$

Tabela 4: Obliczone wartości promienia krzywizny R_n oraz ich niepewności $u(R_n)$.

Przykładowe obliczenia (dla $n = 2$)

Dla $n = 2$ (gdzie $R_2 = 2,921$ m, $r_2 = 1,855 \cdot 10^{-3}$ m, $u(r_n) = 1,45 \cdot 10^{-6}$ m, $\lambda = 589 \cdot 10^{-9}$ m, $u(\lambda) = 0,58 \cdot 10^{-9}$ m), niepewność złożoną $u(R_2)$ obliczono następująco:

$$u(R_2) = 2,921 \text{ m} \cdot \sqrt{4 \left(\frac{1,45 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{1,855 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \right)^2 + \left(\frac{0,58 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{589 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \right)^2} \approx 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

3.4 Niepewność standardowa średniej promienia krzywizny

Średnią wartość promienia krzywizny R obliczono jako średnią arytmetyczną z $N = 5$ pomiarów. Niepewność standardową tej średniej $u(\bar{R})$ wyznaczono metodą typu A, korzystając bezpośrednio ze wzoru na odchylenie standardowe średniej arytmetycznej (8).

$$u(\bar{R}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=2}^6 (R_n - \bar{R})^2} \quad (8)$$

gdzie R_i to wynik i -tego pomiaru promienia krzywizny. Podstawiając wartości z tabeli 4 do wzoru (8).

$$u(\bar{R}) = \sqrt{\frac{1}{5(4)} [(2,921 - 3,439)^2 + \dots + (3,770 - 3,439)^2]} \approx 1,5 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

4 Wnioski

W wyniku przeprowadzonych pomiarów i obliczeń wyznaczono promień krzywizny soczewki jako $\bar{R} = 3,4$ m z niepewnością standardową $u(\bar{R}) = 0,15$ m.

Literatura

Dryński, T. (1976). *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 5 edition.