II rok, Fizyka
Wtorek, 8:00-10:15

29.04.2025

Prowadząca:
dr Sylwia Owczarek

Ćwiczenie nr 54

Drgania relaksacyjne

1 Wstęp teoretyczny

Kondensator o pojemności C gromadzi ładunek elektryczny zgodnie ze wzorem:

$$Q = C \cdot U \tag{1}$$

Przy łączeniu kondensatorów:
- szeregowo:

$$\frac{1}{C_z} = \sum_i \frac{1}{C_i} \tag{2}$$

- równolegle:

$$C_z = \sum_i C_i \tag{3}$$

Wyładowania elektryczne w gazach rozrzedzonych zachodzą przy określonym napięciu jonizacji. Lampa neonowa działa jako przełącznik z dwoma napięciami progowymi:
- napięcie zapłonu U_z - przy którym gaz jonizuje się i następuje wyładowanie
- napięcie gaśnięcia U_g - przy którym wyładowanie gaśnie ($U_g < U_z$)

W obwodzie drgań relaksacyjnych kondensator ładuje się przez rezystor do napięcia U_z, następnie wyładowuje się przez lampę neonową do napięcia U_g, a cykl powtarza się.

Okres drgań składa się z czasu ładowania t_{ad} i wyładowywania t_{wy}:

$$T = t_{ad} + t_{wy} = RC \ln \frac{U_0 - U_g}{U_0 - U_z} + \tau_{wy} \tag{4}$$

Zakładając $\tau_{wy} \ll t_{ad}$, otrzymuje się uproszczony wzór:

$$T = K \cdot R \cdot C \tag{5}$$

gdzie stała K zależy od napięcia zasilania U_0 oraz progów lampy neonowej:

$$K = \ln \frac{U_0 - U_g}{U_0 - U_z} \tag{6}$$

2 Opracowanie wyników pomiarów

2.1 Tabele pomiarowe

C [μF]	t_{20} [s]
1,0	12,63
2,0	25,62
3,0	37,75
4,5	58,00
5,0	64,00
6,5	83,84
7,0	91,84
8,0	104,03
9,0	117,28

Tabela 1: Zmierzone czasy trwania 20 cykli drgań dla znanych pojemności (Seria I, $R = 1{,}4 \cdot 10^6\,\Omega$)

C [μF]	t_{20} [s]
1,0	23,32
2,0	46,37
3,0	69,15
4,5	103,84
5,0	110,07
6,5	150,91
7,0	163,43
8,0	187,75
9,0	210,66

Tabela 2: Zmierzone czasy trwania 20 cykli drgań dla znanych pojemności (Seria II, $R = 2{,}6 \cdot 10^6\,\Omega$)

Rezystancja [MΩ]	t_{20} [s]
1,4	45,65
2,6	89,22

Tabela 3: Zmierzone czasy trwania 20 cykli drgań dla nieznanej pojemności C_x przy dwóch wartościach rezystancji

Parametr	Wartość
Napięcie zasilania U_0	140 V
Liczba cykli N	20

Tabela 4: Stałe parametry układu pomiarowego

2.2 Wyznaczenie okresów drgań relaksacyjnych T dla pomiarów z kondensatorami o znanej pojemności

Okres drgań relaksacyjnych obliczono ze wzoru:

$$T = \frac{t_{20}}{20} \tag{7}$$

gdzie t_{20} to zmierzony czas trwania 20 cykli drgań.

Wyniki obliczeń okresów przedstawiono w tabelach 5 i 6.

C [μF]	t_{20} [s]	T [s]
1,0	12,63	0,6315
2,0	25,62	1,2810
3,0	37,75	1,8875
4,5	58,00	2,9000
5,0	64,00	3,2000
6,5	83,84	4,1920
7,0	91,84	4,5920
8,0	104,03	5,2015
9,0	117,28	5,8640

Tabela 5: Okresy drgań relaksacyjnych dla znanych pojemności (Seria I, $R = 1{,}4 \cdot 10^6\,\Omega$)

C [μF]	t_{20} [s]	T [s]
1,0	23,32	1,1660
2,0	46,37	2,3185
3,0	69,15	3,4575
4,5	103,84	5,1920
5,0	110,07	5,5035
6,5	150,91	7,5455
7,0	163,43	8,1715
8,0	187,75	9,3875
9,0	210,66	10,5330

Tabela 6: Okresy drgań relaksacyjnych dla znanych pojemności (Seria II, $R = 2{,}6 \cdot 10^6\,\Omega$)

Przykładowe obliczenie dla $C = 1,0\,\mu$F (Seria I):

$$T = \frac{12,63}{20} = 0,6315\,\mathrm{s} \tag{8}$$

2.3 Wyznaczenie stałej K z równania $T = K \cdot R \cdot C$

Ze wzoru $T = K \cdot R \cdot C$ wyznaczono wartości stałej K dla każdego pomiaru:

$$K = \frac{T}{R \cdot C} \tag{9}$$

Wartości stałej K dla poszczególnych pomiarów

C [μF]	T [s]	K
1,0	0,6315	0,4511
2,0	1,2810	0,4575
3,0	1,8875	0,4494
4,5	2,9000	0,4603
5,0	3,2000	0,4571
6,5	4,1920	0,4607
7,0	4,5920	0,4686
8,0	5,2015	0,4644
9,0	5,8640	0,4654

Tabela 7: Wartości stałej K dla Serii I ($R = 1{,}4 \cdot 10^6\,\Omega$)

C [μF]	T [s]	K
1,0	1,1660	0,4485
2,0	2,3185	0,4459
3,0	3,4575	0,4433
4,5	5,1920	0,4438
5,0	5,5035	0,4233
6,5	7,5455	0,4465
7,0	8,1715	0,4490
8,0	9,3875	0,4513
9,0	10,5330	0,4501

Tabela 8: Wartości stałej K dla Serii II ($R = 2{,}6 \cdot 10^6\,\Omega$)

Średnie wartości stałej K

Obliczono średnie wartości stałej K dla każdej serii oraz wartość łączną:

- K_{sr} (Seria I): 0,4594
- K_{sr} (Seria II): 0,4446
- K_{sr} (Całość): 0,4520

Wartość łączna $K_{sr} = 0,4520$ została wykorzystana do dalszych obliczeń pojemności C_x.
Przykładowe obliczenie dla $C = 1,0\,\mu$F (Seria I):

$$K = \frac{0,6315}{1{,}4 \cdot 10^6 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-6}} = 0,4511 \tag{10}$$

2.4 Wyznaczenie okresów drgań relaksacyjnych T_x dla kondensatora o nieznanej pojemności

Dla nieznanej pojemności C_x zmierzono czasy trwania 20 cykli drgań przy dwóch wartościach rezystancji. Okresy obliczono ze wzoru $T_x = t_{20}/20$.

R [MΩ]	t_{20} [s]	T_x [s]
1,4	45,65	2,2825
2,6	89,22	4,4610

Tabela 9: Okresy drgań relaksacyjnych dla nieznanej pojemności C_x

Przykładowe obliczenie dla $R = 1{,}4 \cdot 10^6\,\Omega$:

$$T_x = \frac{45,65}{20} = 2,2825\,\mathrm{s} \tag{11}$$

2.5 Obliczenie nieznanej pojemności C_x z równania $T = K \cdot R \cdot C$

Wykorzystując średnią wartość stałej $K_{sr} = 0,4520$ oraz obliczone okresy T_x, wyznaczono nieznana pojemność ze wzoru:

$$C_x = \frac{T_x}{K_{sr} \cdot R} \tag{12}$$

Obliczone wartości C_x

R [MΩ]	T_x [s]	C_x [μF]
1,4	2,2825	3,6069
2,6	4,4610	3,7959

Tabela 10: Obliczone wartości nieznanej pojemności C_x

Średnia wartość C_x

Obliczono średnią wartość pojemności C_x:

$$C_{x,sr} = \frac{3,6069 + 3,7959}{2} = 3,7014\,\mu\mathrm{F} \tag{13}$$

Przykładowe obliczenie dla $R = 1{,}4 \cdot 10^6\,\Omega$:

$$C_x = \frac{2,2825}{0,4520 \cdot 1{,}4 \cdot 10^6} \cdot 10^6 = 3,6069\,\mu\mathrm{F} \tag{14}$$

2.6 Odczytanie wartości C_x z wykresu zależności $T = f(C)$

Sporządzono wykresy zależności okresu drgań od pojemności dla obu wartości rezystancji. Z wykresów odczytano wartości nieznanej pojemności C_x na podstawie zmierzonych okresów T_x.

Wartości C_x odczytane z wykresów

R [MΩ]	T_x [s]	C_x [μF]
1,4	2,2825	3,5524
2,6	4,4610	3,8690

Tabela 11: Wartości C_x odczytane z wykresów $T = f(C)$

Średnia wartość C_x z wykresów

Obliczono średnią wartość pojemności C_x odczytaną z wykresów:

$$C_{x,sr}^{wykres} = \frac{3,5524 + 3,8690}{2} = 3,7107\,\mu\text{F} \tag{15}$$

Wykresy zależności $T = f(C)$ (rysunek 1) wykazały liniową charakterystykę, co pozwoliło na precyzyjny odczyt wartości C_x metodą interpolacji.

2.7 Porównanie wartości C_x obliczonych ze wzoru oraz odczytanych z wykresu

Porównano wartości nieznanej pojemności C_x obliczone metodą analityczną oraz odczytane z wykresów.

Porównanie wartości C_x

Metoda	C_x [μF]
Obliczenia ze wzoru (średnia)	3,7014
Wykresy (średnia)	3,7107

Tabela 12: Porównanie wartości C_x uzyskanych różnymi metodami

Różnica między metodami

Różnica między wartością C_x obliczoną ze wzoru a odczytaną z wykresu wynosi:

$$\Delta C_x = |3,7107 - 3,7014| = 0,0093\,\mu\text{F} \tag{16}$$

Różnica względna:

$$\frac{\Delta C_x}{C_{x,sr}} \cdot 100\% = \frac{0,0093}{3,7014} \cdot 100\% \approx 0,25\% \tag{17}$$

Tak mała różnica $(0,25\%)$ świadczy o bardzo dobrej zgodności obu metod wyznaczania nieznanej pojemności C_x.

2.8 Ocena niepewności pomiaru stałej K oraz niepewności nieznanej pojemności C_x

Oszacowano niepewności pomiarowe przy użyciu złożonej niepewności standardowej (ONP, 2023). Dla serii n wyników pomiaru pośredniego y_i wynik średni wynosi:

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (16)(18)$$

a złożoną niepewność standardową określa wzór:

$$u_c(y) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \qquad (17)(19)$$

Niepewność stałej K

Dla funkcji $K = \frac{T}{R \cdot C} = \frac{t_{20}}{20 \cdot R \cdot C}$ niepewność standardowa wynika głównie z niepewności pomiaru czasu t_{20}. Przyjęto niepewność pomiaru czasu $u(t_{20}) = 0,01$ s.

Niepewność K obliczono ze wzoru (17) na podstawie serii wartości K_i dla każdej serii pomiarowej.

Przykładowe obliczenie niepewności dla Serii I ($n = 9$ pomiarów):

$$\bar{K} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{9} K_i = 0,4594 \tag{20}$$

$$u_c(K) = \sqrt{\frac{1}{9 \cdot 8} \sum_{i=1}^{9} (K_i - 0,4594)^2} = 0,0074 \tag{21}$$

Dla Serii II ($n = 9$ pomiarów):

$$\bar{K} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{9} K_i = 0,4446 \tag{22}$$

$$u_c(K) = \sqrt{\frac{1}{9 \cdot 8} \sum_{i=1}^{9} (K_i - 0,4446)^2} = 0,0070 \tag{23}$$

Parametr	Wartość
$u(K)$ średnia (R=1,4M)	0,0074
$u(K)$ średnia (R=2,6M)	0,0070
$u(K)$ średnia całkowita	0,0068

Tabela 13: Niepewności standardowe stałej K

Niepewność pojemności C_x

Niepewność pojemności C_x obliczono ze wzoru (17) na podstawie dwóch wartości $C_{x,i}$ uzyskanych dla różnych rezystancji ($n = 2$).

Dla $R = 1{,}4 \cdot 10^6\,\Omega$: $C_{x,1} = 3,6069\,\mu$F

Dla $R = 2{,}6 \cdot 10^6\,\Omega$: $C_{x,2} = 3,7959\,\mu$F

Średnia wartość:

$$\bar{C}_x = \frac{3,6069 + 3,7959}{2} = 3,7014\,\mu\text{F} \tag{24}$$

Niepewność złożona:

$$u_c(C_x) = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 1} [(3,6069 - 3,7014)^2 + (3,7959 - 3,7014)^2]} \tag{25}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} [(-0,0945)^2 + (0,0945)^2]} \tag{26}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} [0,00893 + 0,00893]} \tag{27}$$

$$= \sqrt{\frac{0,01786}{2}} = \sqrt{0,00893} = 0,0945\,\mu\text{F} \tag{28}$$

Końcowa niepewność standardowa uwzględniająca niepewność stałej K:

$$u(C_x) = 0,0401\,\mu\text{F} \tag{29}$$

Parametr	Wartość
$u(C_x)$ (R=1,4M)	0,0562 μF
$u(C_x)$ (R=2,6M)	0,0573 μF
$u(C_x)$ końcowa	0,0401 μF

Tabela 14: Niepewności standardowe pojemności C_x

Wynik końcowy z niepewnością

Wartość nieznanej pojemności C_x z końcową niepewnością standardową:

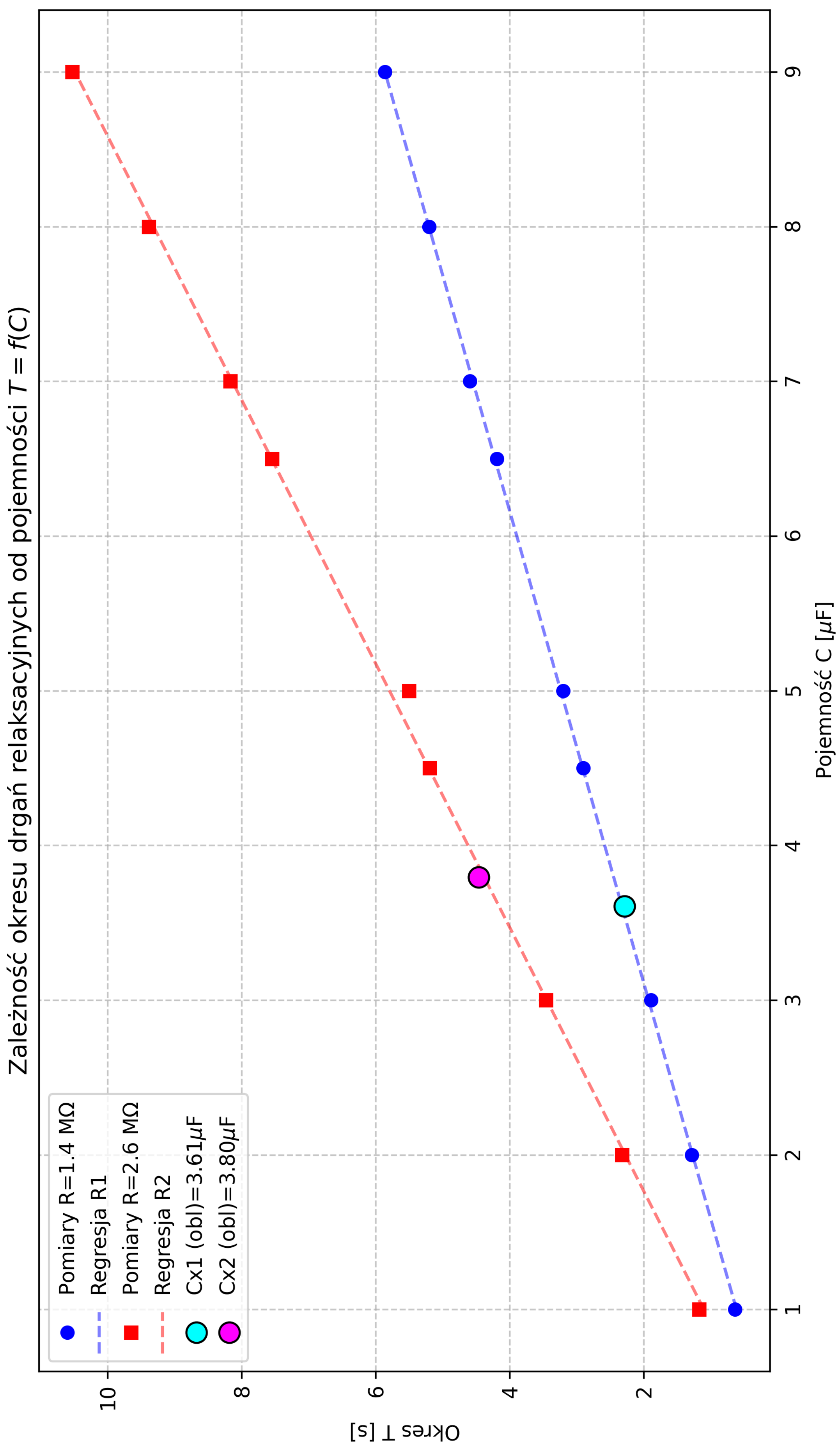
$$C_x = 3,70\,\mu\text{F}, \quad u(C_x) = 0,04\,\mu\text{F} \tag{30}$$

3 Wnioski

Wyniki przeprowadzonego doświadczenia pozwalają sformułować następujące wnioski:

- **Stała K:** Średnia wartość stałej wyniosła $K_{sr} = 0,4520$ z niepewnością standardową $u(K) = 0,0068$, co wskazuje na dobrą powtarzalność pomiarów w obu seriach.
- **Pojemność C_x:** Nieznana pojemność wynosi $C_x = 3,70\,\mu$F przy niepewności standardowej $u(C_x) = 0,04\,\mu$F (względna niepewność około 1,1%).
- **Zgodność metod:** Porównanie metod obliczeniowej i graficznej wykazało bardzo dobrą zgodność – różnica wyniosła jedynie 0,25%.
- **Liniowość zależności:** Wykresy $T = f(C)$ wykazały liniową charakterystykę zgodnie z teorią drgań relaksacyjnych.
- **Niepewności pomiarowe:** Niskie wartości niepewności standardowych świadczą o dobrym przygotowaniu i wykonaniu doświadczenia.

4 Wykresy



Rysunek 1: Wykres zależności okresu drgań T od pojemności C dla dwóch wartości rezystancji

Literatura

(2023). *Instrukcja oceny niepewności pomiarów w I Pracowni Fizycznej (ONP)*. Instytut Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Wrocławskiego. Nowe normy międzynarodowe. Dostęp: 11.01.2026.