

# Ćwiczenie nr 46

## Prawa Ohma i Kirchhoffa

### 1 Wstęp teoretyczny

#### 1.1 Prawo Ohma i rezystancja

Natężenie prądu elektrycznego  $I$  definiuje się jako ilość ładunku przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika w jednostce czasu ( $I = dQ/dt$ ). Dla wielu materiałów (zwanych omowymi) gęstość prądu  $\vec{J}$  jest wprost proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ . W ujęciu makroskopowym zależność ta, znana jako prawo Ohma, wiąże natężenie prądu  $I$  płynącego przez element z napięciem  $U$  przyłożonym do jego końców (Ling et al., 2018):

$$I = \frac{U}{R} \quad (1)$$

Współczynnik proporcjonalności  $R$  nazywamy rezystancją (oporem elektrycznym). Jednostką rezystancji w układzie SI jest om ( $\Omega$ ). Rezystancja elementu zależy od jego geometrii oraz rezystywności materiału  $\rho$ :

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2)$$

gdzie  $l$  to długość przewodnika, a  $S$  to pole jego przekroju poprzecznego (Ling et al., 2018).

#### 1.2 Prawa Kirchhoffa

Analiza złożonych obwodów elektrycznych opiera się na dwóch fundamentalnych zasadach wynikających z praw zachowania:

1. **I Prawo Kirchhoffa (Węzłowe):** Wynika z zasady zachowania ładunku. Suma algebraiczna natężeń prądów wpływających do węzła i wypływających z niego jest równa zeru (Ling et al., 2018):

$$\sum_k I_k = 0 \quad (3)$$

2. **II Prawo Kirchhoffa (Oczkowe):** Wynika z zasady zachowania energii. W dowolnym zamkniętym obwodzie (oczku) suma algebraiczna zmian potencjałów (sił elektromotorycznych  $\mathcal{E}$  oraz spadków napięć  $IR$ ) wynosi zero (Ling et al., 2018):

$$\sum_k \Delta V_k = 0 \quad \vee \quad \sum \mathcal{E} = \sum IR \quad (4)$$

### 1.3 Łączanie rezystorów

W obwodach prądu stałego wyróżniamy podstawowe konfiguracje łączenia rezystorów:

- **Połączenie szeregowe:** Przez wszystkie elementy płynie ten sam prąd. Rezystancja zastępcza jest sumą rezystancji składowych:

$$R_z = \sum_i R_i \quad (5)$$

- **Połączenie równoległe:** Na wszystkich elementach występuje to samo napięcie. Odwrotność rezystancji zastępczej jest sumą odwrotności rezystancji składowych ([Ling et al., 2018](#)):

$$\frac{1}{R_z} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (6)$$

### 1.4 Transfiguracja gwiazda-trójkąt

W przypadku bardziej złożonych struktur, których nie można sprowadzić do połączeń szeregowych lub równoległych (np. mostki), stosuje się transformację układu połączonego w trójkąt ( $\Delta$ ) na równoważny układ połączony w gwiazdę ( $Y$ ) lub odwrotnie. Dla transformacji trójkąta (rezystancje  $R_{12}, R_{23}, R_{31}$ ) w gwiazdę (rezystancje  $R_1, R_2, R_3$ ), wzory na rezystancje zastępcze przyjmują postać ([Ling et al., 2018](#)):

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (7)$$

Zastosowanie tej transformacji pozwala na uproszczenie topologii obwodu i obliczenie rezystancji zastępczej metodami podstawowymi.

## 2 Opracowanie wyników pomiarów

### 2.1 Tabele pomiarowe

$R_1$ [k $\Omega$ ]	$R_2$ [k $\Omega$ ]	$R_3$ [k $\Omega$ ]	$R_4$ [k $\Omega$ ]	$R_5$ [k $\Omega$ ]
0,192	2,39	0,557	0,558	0,877

Tabela 1: Zmierzone wartości rezystancji

$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$U_3$ [V]	$U_4$ [V]	$U_5$ [V]
2,03	7,93	4,08	3,81	—
$I_1$ [mA]	$I_2$ [mA]	$I_3$ [mA]	$I_4$ [mA]	$I_5$ [mA]
10,73	3,32	7,44	7,44	—

Tabela 2: Wyniki pomiarów dla Układu 1

$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$U_3$ [V]	$U_4$ [V]	$U_5$ [V]
1,64	8,32	2,87	5,37	4,57
$I_1$ [mA]	$I_2$ [mA]	$I_3$ [mA]	$I_4$ [mA]	$I_5$ [mA]
13,85	3,48	5,23	10,49	5,28

Tabela 3: Wyniki pomiarów dla Układu 2

$R_z$ [kΩ]
0,901

Tabela 4: Zmierzona rezystancja zastępcza

## 2.2 Obliczenie rezystancji R1-R4

Na podstawie pomiarów napięć i natężeń prądu dla układu z schematu 1, korzystając z prawa Ohma, obliczono wartości rezystancji R1  $\div$  R4. Prawo Ohma wyraża się wzorem:

$$R = \frac{U}{I} \quad (8)$$

Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 5.

Rezystor	Wartość R [Ω]
$R_1$	189,19
$R_2$	2388,55
$R_3$	548,39
$R_4$	512,10

Tabela 5: Obliczone wartości rezystancji R1-R4

Przykładowe obliczenie dla rezystora R1:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{2,03}{0,01073} \approx 189,19 \Omega \quad (9)$$

### Porównanie wartości rezystancji obliczonych ze zmierzonymi

Wyniki obliczeń rezystancji na podstawie pomiarów napięć i prądów oraz wartości zmierzonej omomierzem przedstawiono w tabeli 6.

Rezystor	Obliczona [Ω]	Zmierzona [Ω]	Błąd bezwzględny [Ω]	Błąd względny [%]
$R_1$	189,19	192	2,81	1,46
$R_2$	2388,55	2390	1,45	0,06
$R_3$	548,39	557	8,61	1,55
$R_4$	512,10	558	45,90	8,23

Tabela 6: Porównanie obliczonych i zmierzonych wartości rezystancji

### 2.3 Obliczenie natężeń z praw Kirchhoffa

Z pierwszego prawa Kirchhoffa:

$$\begin{cases} I_1 - I_3 - I_2 = 0 \\ I_3 - I_4 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Z drugiego prawa Kirchhoffa:

$$\begin{cases} \mathcal{E} - U_1 - U_2 = 0 \\ U_2 - U_3 - U_4 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Z prawa Ohma dla całego układu:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_z} \quad (12)$$

, gdzie  $\mathcal{E} = 10,0V$  to napięcie zasilania układu. Przekształcając wzory (10), (11) oraz (12) otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} I_1 = I_3 + I_2 \\ I_3 = I_4 \\ \mathcal{E} - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0 \\ I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_z} \end{cases} \quad (13)$$

Z prawa łączenia rezystorów szeregowo i równolegle:

$$R_z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}} = \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}$$

Podstawiając  $R_z$  do piątego równania układu (13) otrzymujemy wzór na  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}} = \frac{\mathcal{E}(R_2+R_3+R_4)}{R_1(R_2+R_3+R_4) + R_2(R_3+R_4)}$$

Do czwartego równania układu (13) podstawiamy wzór na  $I_4$  z drugiego równania oraz wzór na  $I_2$  z pierwszego równania:

$$\begin{aligned} R_2(I_1 - I_3) - I_3(R_3 + R_4) &= 0 \\ I_1 R_2 - I_3 R_2 - I_3(R_3 + R_4) &= 0 \\ I_1 R_2 &= I_3(R_2 + R_3 + R_4) \end{aligned}$$

i otrzymujemy wzór na  $I_3$  oraz  $I_4$ :

$$\begin{aligned} I_3 = I_4 &= I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \\ &= \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \\ &= \frac{\mathcal{E}(R_3 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} \end{aligned}$$

Wyznaczamy  $I_2$  podstawiając do pierwszego wzoru z układu równań obliczony powyżej wzór na  $I_3$ :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= I_1 - I_3 = \\
 &= I_1 - I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \\
 &= I_1 \left( 1 - \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \right) = \\
 &= I_1 \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \\
 &= \frac{\mathcal{E} (R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)} \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \\
 &= \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)}
 \end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$\begin{cases} I_1 &= \frac{\mathcal{E} (R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)} \\ I_2 &= \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)} \\ I_3 = I_4 &= \frac{\mathcal{E} (R_3 + R_4)}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)} \end{cases}$$

### Porównanie wartości natężen obliczonych ze zmierzonymi

Wyniki obliczeń oraz porównanie z wartościami zmierzonymi przedstawiono w tabeli 7.

Prąd	Obliczony [A]	Zmierzony [A]	Błąd bezwzględny [A]	Błąd względny [%]
$I_1$	0,0105	0,0107	0,000229	2,14
$I_2$	0,0033	0,0033	0,000000	0,00
$I_3 = I_4$	0,0072	0,0074	0,000048	0,65

Tabela 7: Obliczone i zmierzone wartości prądów z błędami

Przykładowe obliczenie dla prądu  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{10,0 \cdot (2390 + 557 + 558)}{192 \cdot (2390 + 557 + 558) + 2390 \cdot (557 + 558)} \approx 0,0105 \text{ A} \quad (14)$$

## 2.4 Obliczenie oporu zastępczego

Z prawa łączenia rezystorów szeregowo i równolegle:

$$R_z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}} = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Podstawiając wartości zmierzone:

$$R_z = 192 + \frac{2390 \cdot (557 + 558)}{2390 + 557 + 558} = 192 + \frac{2390 \cdot 1115}{3505} = 192 + 760,30 = 952,30 \Omega$$

## Porównanie wartości rezystancji obliczonych ze zmierzonymi

Wartość zmierzona oporu zastępczego wynosi  $R_z = 901 \Omega$ , porównując wartość zmierzoną z obliczoną otrzymano następujące wyniki:

- błąd bezwzględny:  $952,30 - 901 = 51,30 \Omega$ ,
- błąd względny:  $\frac{51,30}{901} \cdot 100\% \approx 5,69\%$ .

## 3 Ocena niepewności pomiaru

Korzystając z prawa przenoszenia niepewności maksymalnej (wzór (18) ONP) wyznaczono niepewności maksymalne wyznaczonych wartości oporów R1  $\div$  R4 i oporu zastępczego Rz. Dla funkcji  $R = \frac{U}{I}$  niepewność maksymalna  $\Delta R = \left| \frac{\partial R}{\partial U} \Delta U \right| + \left| \frac{\partial R}{\partial I} \Delta I \right| = \frac{\Delta U}{I} + \frac{U}{I^2} \Delta I$ . Przyjęto dla miernika cyfrowego niepewność maksymalną  $\Delta I = 1\%$  zakresu pomiarowego, natomiast dla zasilacza  $\Delta U = 0,1 \text{ V}$  (ONP, 2023).

Przykładowe obliczenie dla rezystora  $R_1$  w układzie 1:

$$U_1 = 2,03 \text{ V}, \quad I_1 = 0,01073 \text{ A}, \quad u(I_1) = 0,01 \cdot 0,01073 = 0,0001073 \text{ A}$$

$$u(R_1) = \frac{0,1}{0,01073} + \frac{2,03}{0,01073^2} \cdot 0,0001073 \approx 9,32 + 1,89 \approx 11,21 \Omega \approx 0,011 \text{ k}\Omega$$

Tabela 8: Niepewności maksymalne wyznaczonych oporów

Wielkość	Układ	$u(R)$ [kΩ]
$R_1$	1	0,011
$R_2$	1	0,054
$R_3$	1	0,019
$R_4$	1	0,019
$R_1$	2	0,008
$R_2$	2	0,053
$R_3$	2	0,025
$R_4$	2	0,015
$R_5$	2	0,028
$R_z$	2	0,010

## 4 Wnioski

Dokonano weryfikacji praw Ohma i Kirchhoffa w obwodach prądu stałego oraz wyznaczono parametry obwodu (rezystancję i natężenia prądów) metodą pośrednią. Na podstawie analizy wyników sformułowano następujące wnioski:

1. **Weryfikacja prawa Ohma (wyznaczenie rezystancji):** Wartości rezystancji  $R_1, R_2$  oraz  $R_3$  wyznaczone z prawa Ohma wykazały dużą zgodność z pomiarami bezpośrednimi omomierzem. Błąd względny dla tych elementów nie przekroczył 1,6%. Wyjątek stanowi rezistor  $R_4$ , dla którego błąd względny wynosi 8,23% (różnica ok. 46 Ω). Rozbieżność ta może wynikać z niedokładności odczytu lub nagrzewania się elementu.
2. **Weryfikacja praw Kirchhoffa (rozpływ prądów):**
  - Dla prądu  $I_2$  uzyskano pełną zgodność wyników (błąd 0,00%).

- Dla gałęzi z rezystorami  $R_3$  i  $R_4$  błąd wyniósł 0,65%.
- Największy błąd względny odnotowano dla prądu głównego  $I_1$  (2,14%).

Wyniki te potwierdzają słuszność I i II prawa Kirchhoffa dla badanego obwodu.

3. **Opór zastępczy układu:** Porównanie obliczonego teoretycznie oporu zastępczego ( $R_{z,obl} \approx 952,3 \Omega$ ) z wartością zmierzoną ( $R_{z,pom} = 901 \Omega$ ) wykazało błąd względny rzędu 5,69%. Różnica ta może wynikać z sumowania się błędów poszczególnych rezystancji składowych oraz wpływu rezystancji przewodów i styków, które w metodzie teoretycznej zostały pominięte.
4. **Niepewności pomiarowe:** Przeprowadzona analiza niepewności maksymalnej wykazała, że większość wyznaczonych wielkości obarczona jest niewielkimi niepewnościami (rzędu pojedynczych lub dziesiątek omów). Obserwowane w niektórych punktach odchylenia (szczególnie dla  $R_4$ ) wykraczają poza szacowaną niepewność przyrządów.

## Literatura

(2023). *Instrukcja oceny niepewności pomiarów w I Pracowni Fizycznej (ONP)*. Instytut Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Wrocławskiego. Nowe normy międzynarodowe. Dostęp: 11.01.2026.

Ling, S. J., Sanny, J., and Moebs, W. (2018). *Fizyka dla szkół wyższych, Tom 3*. OpenStax. Dostęp: 13.10.2025.