

Ćwiczenie nr 44

Prawo Ohma dla prądu przemiennego

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Charakterystyka prądu przemiennego

Prądem przemiennym nazywamy prąd elektryczny, którego wartość chwilowa i kierunek ulegają okresowym zmianom. W najprostszym przypadku zmiany te mają charakter harmoniczny (sinusoidalny) i mogą być opisane równaniami:

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t), \quad i(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

gdzie U_0, I_0 to amplitudy napięcia i natężenia, $\omega = 2\pi f$ to częstość kołowa, a φ oznacza przesunięcie fazowe między napięciem a natężeniem.

W obwodach prądu przemiennego najczęściej posługujemy się wartościami skutecznymi napięcia i natężenia, które dla przebiegów sinusoidalnych wiążą się z amplitudami zależnością:

$$U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{sk} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

1.2 Impedancja i zawada

W obwodach prądu przemiennego opór całkowity nazywamy ****impedancją****. Jest to wielkość zespolona, składająca się z części rzeczywistej (rezystancja R) oraz części urojonej (reaktancja X). Moduł impedancji nazywamy ****zawadą**** i oznaczamy symbolem $|Z|$.

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (3)$$

Uogólnione prawo Ohma dla wartości skutecznych przyjmuje postać:

$$I_{sk} = \frac{U_{sk}}{|Z|} \quad (4)$$

1.3 Elementy R, L, C w obwodzie prądu przemiennego

1.3.1 Rezystor idealny

Dla rezystora idealnego reaktancja wynosi zero, zatem zawada jest równa jego rezystancji ($|Z| = R$). Napięcie i natężenie są zgodne w fazie ($\varphi = 0$).

1.3.2 Cewka indukcyjna

Cewka idealna o indukcyjności L stawia prądowi przemiennemu opór bierny zwany reaktancją indukcyjną (induktancją) X_L :

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad (5)$$

W rzeczywistości cewka posiada również opór czynny uzwojenia R_L . Jej zawada wynosi zatem:

$$|Z_L| = \sqrt{R_L^2 + X_L^2} = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2} \quad (6)$$

W cewce idealnej napięcie wyprzedza natężenie prądu o kąt $\pi/2$.

1.3.3 Kondensator

Kondensator o pojemności C charakteryzuje się reaktancją pojemnościową (kapacytancją) X_C :

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (7)$$

Dla kondensatora idealnego (gdzie $R = 0$) zawada wynosi $|Z_C| = X_C$. Natężenie prądu wyprzedza napięcie o kąt $\pi/2$.

1.4 Szeregowy obwód RLC

W przypadku szeregowego połączenia rezystora, cewki i kondensatora, wypadkowa zawada obwodu wynosi:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (8)$$

Przesunięcie fazowe φ w takim obwodzie wyraża się wzorem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (9)$$

2 Opracowanie wyników pomiarów

2.1 Tabele pomiarowe

Tabela 1: Uzwojenie L1

| lp | I [mA] | U [V] |
|----|--------|-------|
| 1 | 10,0 | 0,50 |
| 2 | 20,0 | 1,00 |
| 3 | 29,9 | 1,50 |
| 4 | 39,7 | 2,00 |
| 5 | 49,7 | 2,50 |
| 6 | 59,5 | 3,00 |
| 7 | 69,1 | 3,50 |
| 8 | 79,3 | 4,00 |
| 9 | 89,3 | 4,50 |
| 10 | 99,0 | 5,00 |

Tabela 4: Kondensator C

| lp | I [mA] | U [V] |
|----|--------|-------|
| 1 | 0,48 | 0,48 |
| 2 | 1,00 | 0,96 |
| 3 | 1,60 | 1,49 |
| 4 | 2,10 | 1,98 |
| 5 | 2,70 | 2,49 |
| 6 | 3,20 | 2,99 |
| 7 | 3,80 | 3,51 |
| 8 | 4,40 | 4,01 |
| 9 | 5,00 | 4,53 |
| 10 | 5,50 | 5,02 |

Tabela 2: Uzwojenie L1+L2

| lp | I [mA] | U [V] |
|----|--------|-------|
| 1 | 3,7 | 0,50 |
| 2 | 7,5 | 1,00 |
| 3 | 11,2 | 1,50 |
| 4 | 14,9 | 2,00 |
| 5 | 18,8 | 2,51 |
| 6 | 22,4 | 3,00 |
| 7 | 26,1 | 3,50 |
| 8 | 29,9 | 3,99 |
| 9 | 33,7 | 4,50 |
| 10 | 37,4 | 5,00 |

Tabela 5: Kondensator 2C

| lp | I [mA] | U [V] |
|----|--------|-------|
| 1 | 1,0 | 0,50 |
| 2 | 2,2 | 1,02 |
| 3 | 3,3 | 1,50 |
| 4 | 4,3 | 1,98 |
| 5 | 5,5 | 2,47 |
| 6 | 6,8 | 3,05 |
| 7 | 7,8 | 3,52 |
| 8 | 8,9 | 3,98 |
| 9 | 10,1 | 4,52 |
| 10 | 11,3 | 5,03 |

Tabela 3: Uzwojenie L1+L2+L3

| lp | I [mA] | U [V] |
|----|--------|-------|
| 1 | 1,5 | 0,48 |
| 2 | 3,0 | 0,96 |
| 3 | 4,7 | 1,50 |
| 4 | 6,3 | 1,98 |
| 5 | 7,9 | 2,50 |
| 6 | 9,4 | 2,97 |
| 7 | 11,1 | 3,48 |
| 8 | 12,7 | 3,98 |
| 9 | 14,3 | 4,49 |
| 10 | 16,0 | 5,02 |

Tabela 6: Kondensator 4C

| lp | I [mA] | U [V] |
|----|--------|-------|
| 1 | 2,4 | 0,48 |
| 2 | 5,0 | 0,99 |
| 3 | 7,7 | 1,52 |
| 4 | 10,1 | 2,00 |
| 5 | 12,8 | 2,53 |
| 6 | 15,5 | 3,05 |
| 7 | 17,7 | 3,48 |
| 8 | 20,4 | 4,01 |
| 9 | 22,4 | 4,51 |
| 10 | 25,5 | 5,02 |

Tabela 7: Układ L1+L2+L3+C1

| lp | I [mA] | U [V] |
|----|--------|-------|
| 1 | 0,8 | 0,51 |
| 2 | 1,6 | 0,98 |
| 3 | 2,4 | 1,49 |
| 4 | 3,3 | 2,02 |
| 5 | 4,1 | 2,49 |
| 6 | 4,9 | 2,98 |
| 7 | 5,7 | 3,47 |
| 8 | 6,6 | 4,00 |
| 9 | 7,5 | 4,53 |
| 10 | 8,3 | 5,02 |

Dane ogólne

Częstotliwość prądu przemiennego: $f = 50$ Hz.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 100\pi = 314,16 \text{ rad/s}$$

Rezystancje uzwojeń cewek:

$$R_{ab} = 36 \Omega, \quad R_{bc} = 16 \Omega, \quad R_{cd} = 33 \Omega$$

$$R_1 = 36 \Omega$$

$$R_{1+2} = 36 + 16 = 52 \Omega$$

$$R_{1+2+3} = 36 + 16 + 33 = 85 \Omega$$

2.2 Wyznaczenie indukcyjności cewki

Na podstawie pomiarów napięcia i natężenia prądu dla cewek sporządzono charakterystyki prądowo-napięciowe (rys. 1).

Do wyznaczenia parametrów tych charakterystyk wykorzystano metodę regresji liniowej. Przyjęto model liniowy $U(I) = a \cdot I + b$, gdzie współczynnik kierunkowy a odpowiada wartości zawady $|Z|$ danego układu, a wyraz wolny b powinien być bliski zeru.

Niepewność standardową współczynnika kierunkowego $u(a)$ wyznaczono zgodnie ze wzorem (6) z instrukcji (ONP, 2023):

$$u(a) = s_y \sqrt{\frac{n}{D}}$$

Wyniki dopasowania prostych do danych pomiarowych dla narastających układów uzwojeń przedstawiono w tabeli 8.

| Układ | $a (Z) [\Omega]$ | $u(a) [\Omega]$ | $b [\text{V}]$ | R^2 |
|-------------------------|--------------------|-----------------|----------------|--------|
| L_1 (a-b) | 50,58 | 0,07 | -0,0091 | 1,0000 |
| $L_1 + L_2$ (a-c) | 133,53 | 0,18 | 0,0047 | 1,0000 |
| $L_1 + L_2 + L_3$ (a-d) | 312,39 | 0,65 | 0,0214 | 1,0000 |

Tabela 8: Współczynniki regresji liniowej wyznaczone dla charakterystyk cewek ($U = aI + b$).

2.2.1 Obliczenie indukcyjności całkowitych (L_{ukl})

Dla każdego badanego układu, znając rezystancję czynną R (sumę rezystancji włączonych sekcji) oraz częstotliwość kołową $\omega = 314,16 \text{ rad/s}$, obliczono całkowitą indukcyjność L_{ukl} przekształcając wzór na impedancję:

$$L_{ukl} = \frac{1}{\omega} \sqrt{|Z|^2 - R^2} \quad (10)$$

Niepewność $u(L_{ukl})$ obliczono metodą przenoszenia niepewności (wzór 15 w (ONP, 2023)), traktując $|Z|$ jako zmienną pomiarową:

$$u(L_{ukl}) = \left| \frac{\partial L}{\partial |Z|} \right| u(|Z|) = \left| \frac{1}{\omega} \frac{2|Z|}{2\sqrt{|Z|^2 - R^2}} \right| u(|Z|) = \frac{|Z|}{\omega(\omega L_{ukl})} u(|Z|) = \frac{|Z|}{\omega^2 L_{ukl}} u(|Z|) \quad (11)$$

Przykładowe obliczenie (dla układu $L_1 + L_2$, czyli zaciski a-c):

- Dane: $|Z| = 133,53 \Omega$, $u(|Z|) = 0,18 \Omega$, $R = R_{ab} + R_{bc} = 36,0 + 16,0 = 52,0 \Omega$.
- Obliczenie wartości $L_{(a-c)}$:

$$L_{(a-c)} = \frac{1}{314,16} \sqrt{133,53^2 - 52,0^2} = \frac{\sqrt{17830,26 - 2704}}{314,16} \approx \frac{122,99}{314,16} \approx 0,3915 \text{ H}$$

- Obliczenie niepewności $u(L_{(a-c)})$:

$$u(L_{(a-c)}) = \frac{133,53}{314,16^2 \cdot 0,3915} \cdot 0,18 \approx \frac{133,53}{38651,5} \cdot 0,18 \approx 0,0006 \text{ H}$$

Analogicznie obliczono $L_{(a-b)} \approx 0,1131 \text{ H}$ oraz $L_{(a-d)} \approx 0,9568 \text{ H}$.

2.2.2 Obliczenie indukcyjności sekcji (L_1, L_2, L_3)

Ponieważ pomiary wykonywano w układzie narastającym (szeregowym), indukcyjności poszczególnych sekcji wyznaczono różnicowo:

- $L_1 = L_{(a-b)}$
- $L_2 = L_{(a-c)} - L_{(a-b)}$
- $L_3 = L_{(a-d)} - L_{(a-c)}$

Niepewność wyznaczenia indukcyjności sekcji (dla L_2 i L_3) obliczono jako pierwiastek z sumy kwadratów niepewności składowych (prawo przenoszenia niepewności dla różnicy):

$$u(L_{sekcja}) = \sqrt{u^2(L_{obecnny}) + u^2(L_{poprzedni})}$$

Przykładowe obliczenie (dla sekcji L_2):

- Dane (z poprzedniego kroku): $L_{(a-c)} = 0,3915 \text{ H}$, $L_{(a-b)} = 0,1131 \text{ H}$.
- Wynik:

$$L_2 = 0,3915 - 0,1131 = 0,2784 \text{ H}$$

- Niepewność:

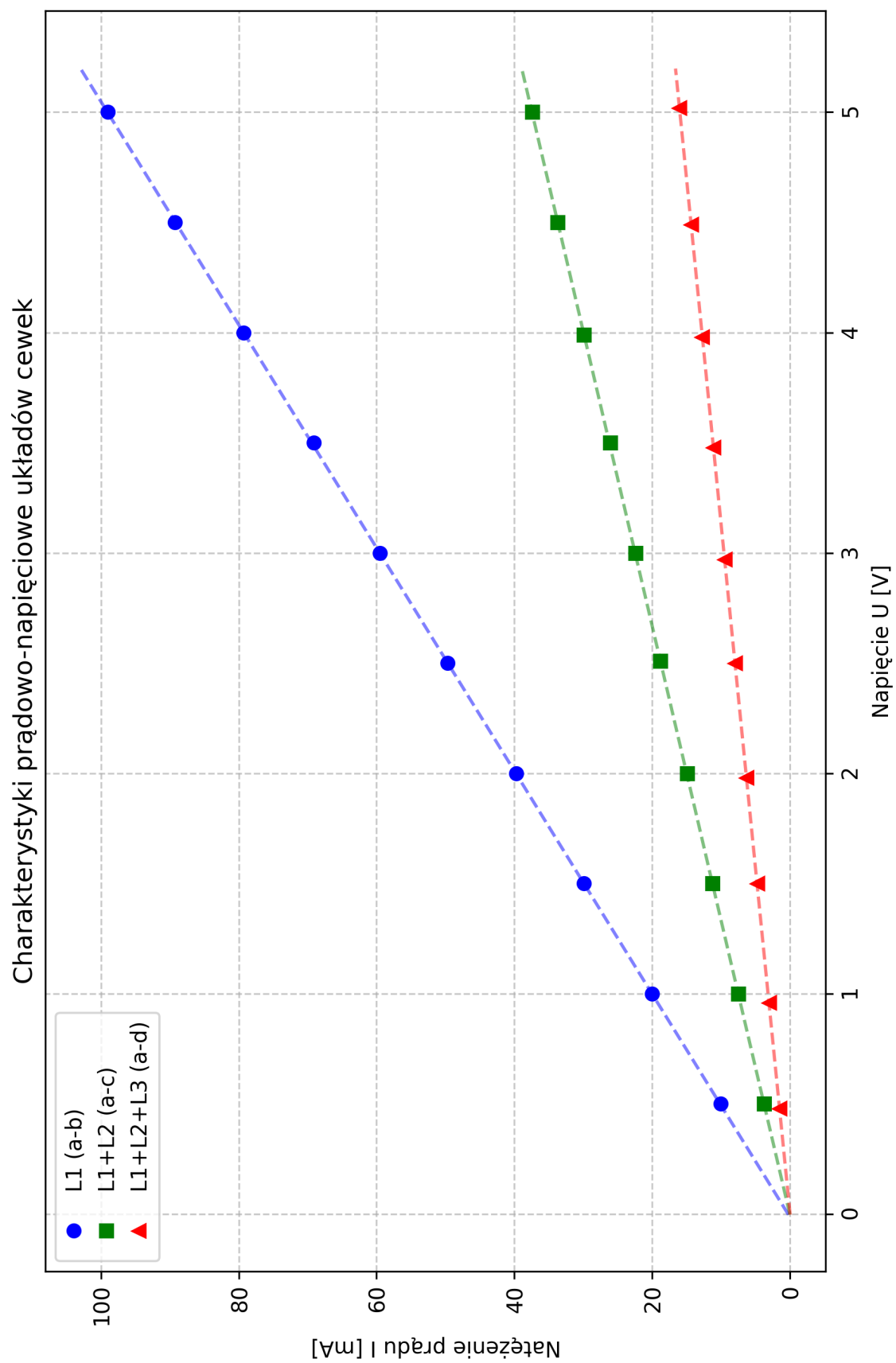
$$u(L_2) = \sqrt{0,0006^2 + 0,0003^2} \approx 0,0007 \text{ H}$$

Ostateczne wyniki dla poszczególnych sekcji zestawiono w tabeli 9.

| Sekcja | Indukcyjność L [H] | Niepewność $u(L)$ [H] |
|-------------------|----------------------|-----------------------|
| L_1 | 0,1131 | 0,0003 |
| L_2 | 0,2784 | 0,0007 |
| L_3 | 0,5654 | 0,0022 |
| Suma (a-d) | 0,9568 | - |

Tabela 9: Wyznaczone współczynniki samoindukcji poszczególnych sekcji cewki.

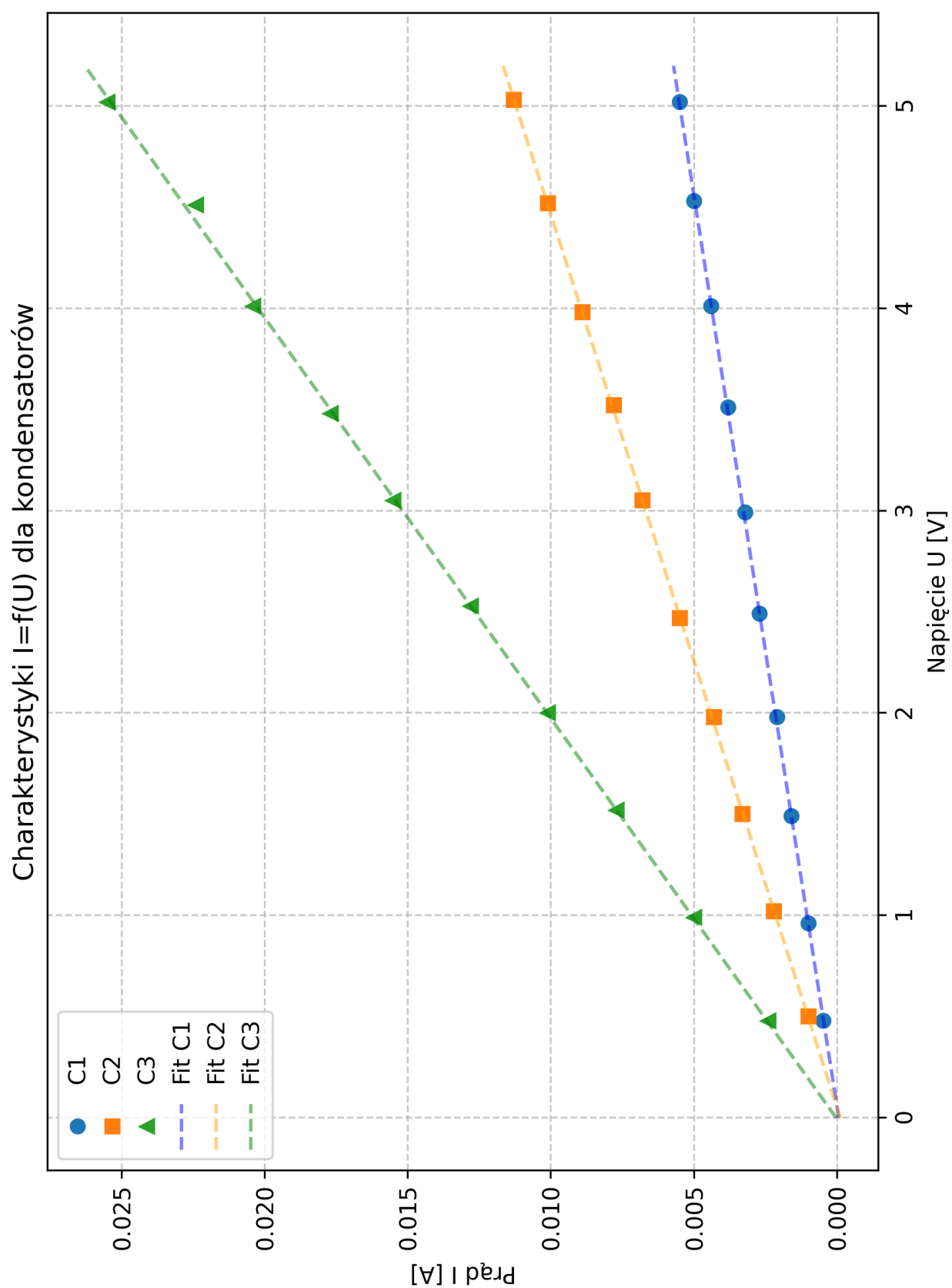
3 Wykresy



Rysunek 1: Charakterystyki prądowo-napięciowe cewek L_1 , L_2 oraz L_3 .

Literatura

(2023). *Instrukcja oceny niepewności pomiarów w I Pracowni Fizycznej (ONP)*. Instytut Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Wrocławskiego. Nowe normy międzynarodowe. Dostęp: 11.01.2026.



Rysunek 2: Charakterystyki prądowo-napięciowe kondensatorów C_1 , C_2 oraz C_3 .