

Ćwiczenie nr 44

Prawo Ohma dla prądu przemiennego

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Charakterystyka prądu przemiennego

Prądem przemiennym nazywamy prąd elektryczny, którego wartość chwilowa i kierunek ulegają okresowym zmianom. W najprostszym przypadku zmiany te mają charakter harmoniczny (sinusoidalny) i mogą być opisane równaniami:

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t), \quad i(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

gdzie U_0, I_0 to amplitudy napięcia i natężenia, $\omega = 2\pi f$ to częstość kołowa, a φ oznacza przesunięcie fazowe między napięciem a natężeniem.

W obwodach prądu przemiennego najczęściej posługujemy się wartościami skutecznymi napięcia i natężenia, które dla przebiegów sinusoidalnych wiążą się z amplitudami zależnością:

$$U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{sk} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

1.2 Impedancja i zawada

W obwodach prądu przemiennego opór całkowity nazywamy ****impedancją****. Jest to wielkość zespolona, składająca się z części rzeczywistej (rezystancja R) oraz części urojonej (reaktancja X). Moduł impedancji nazywamy ****zawadą**** i oznaczamy symbolem $|Z|$.

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (3)$$

Uogólnione prawo Ohma dla wartości skutecznych przyjmuje postać:

$$I_{sk} = \frac{U_{sk}}{|Z|} \quad (4)$$

1.3 Elementy R, L, C w obwodzie prądu przemiennego

1.3.1 Rezystor idealny

Dla rezystora idealnego reaktancja wynosi zero, zatem zawada jest równa jego rezystancji ($|Z| = R$). Napięcie i natężenie są zgodne w fazie ($\varphi = 0$).

1.3.2 Cewka indukcyjna

Cewka idealna o indukcyjności L stawia prądowi przemiennemu opór bierny zwany reaktancją indukcyjną (induktancją) X_L :

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad (5)$$

W rzeczywistości cewka posiada również opór czynny uzwojenia R_L . Jej zawada wynosi zatem:

$$|Z_L| = \sqrt{R_L^2 + X_L^2} = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2} \quad (6)$$

W cewce idealnej napięcie wyprzedza natężenie prądu o kąt $\pi/2$.

1.3.3 Kondensator

Kondensator o pojemności C charakteryzuje się reaktancją pojemnościową (kapacytancją) X_C :

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (7)$$

Dla kondensatora idealnego (gdzie $R = 0$) zawada wynosi $|Z_C| = X_C$. Natężenie prądu wyprzedza napięcie o kąt $\pi/2$.

1.4 Szeregowy obwód RLC

W przypadku szeregowego połączenia rezystora, cewki i kondensatora, wypadkowa zawada obwodu wynosi:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (8)$$

Przesunięcie fazowe φ w takim obwodzie wyraża się wzorem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (9)$$

2 Opracowanie wyników pomiarów

2.1 Tabele pomiarowe

Tabela 1: Uzwojenie L1

lp	I [mA]	U [V]
1	10,0	0,50
2	20,0	1,00
3	29,9	1,50
4	39,7	2,00
5	49,7	2,50
6	59,5	3,00
7	69,1	3,50
8	79,3	4,00
9	89,3	4,50
10	99,0	5,00

Tabela 4: Kondensator C

lp	I [mA]	U [V]
1	0,48	0,48
2	1,00	0,96
3	1,60	1,49
4	2,10	1,98
5	2,70	2,49
6	3,20	2,99
7	3,80	3,51
8	4,40	4,01
9	5,00	4,53
10	5,50	5,02

Tabela 2: Uzwojenie L1+L2

lp	I [mA]	U [V]
1	3,7	0,50
2	7,5	1,00
3	11,2	1,50
4	14,9	2,00
5	18,8	2,51
6	22,4	3,00
7	26,1	3,50
8	29,9	3,99
9	33,7	4,50
10	37,4	5,00

Tabela 5: Kondensator 2C

lp	I [mA]	U [V]
1	1,0	0,50
2	2,2	1,02
3	3,3	1,50
4	4,3	1,98
5	5,5	2,47
6	6,8	3,05
7	7,8	3,52
8	8,9	3,98
9	10,1	4,52
10	11,3	5,03

Tabela 3: Uzwojenie L1+L2+L3

lp	I [mA]	U [V]
1	1,5	0,48
2	3,0	0,96
3	4,7	1,50
4	6,3	1,98
5	7,9	2,50
6	9,4	2,97
7	11,1	3,48
8	12,7	3,98
9	14,3	4,49
10	16,0	5,02

Tabela 6: Kondensator 4C

lp	I [mA]	U [V]
1	2,4	0,48
2	5,0	0,99
3	7,7	1,52
4	10,1	2,00
5	12,8	2,53
6	15,5	3,05
7	17,7	3,48
8	20,4	4,01
9	22,4	4,51
10	25,5	5,02

Tabela 7: Układ L1+L2+L3+C1

lp	I [mA]	U [V]
1	0,8	0,51
2	1,6	0,98
3	2,4	1,49
4	3,3	2,02
5	4,1	2,49
6	4,9	2,98
7	5,7	3,47
8	6,6	4,00
9	7,5	4,53
10	8,3	5,02

Dane ogólne

Częstotliwość prądu przemiennego wynosi: $f = 50$ Hz, stąd częstość kołowa (ω), wynosi:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 100\pi = 314,16 \text{ rad/s}$$

Rezystancje uzwojeń cewek wynoszą:

$$R_{ab} = 36 \Omega, \quad R_{bc} = 16 \Omega, \quad R_{cd} = 33 \Omega$$

Stąd rezystancje układów cewek wynoszą:

$$\begin{aligned} R_1 &= 36 \Omega \\ R_{1+2} &= 36 + 16 = 52 \Omega \\ R_{1+2+3} &= 36 + 16 + 33 = 85 \Omega \end{aligned}$$

2.2 Wyznaczenie indukcyjności cewki

Na podstawie bezpośrednich pomiarów dla cewki L_1 oraz wyznaczonych teoretycznie impedancji cewek L_2 i L_3 , sporządzono ich charakterystyki prądowo-napięciowe (rys. 1).

Do wyznaczenia parametrów tych charakterystyk wykorzystano metodę regresji liniowej. Przyjęto model liniowy $U(I) = a \cdot I + b$, gdzie współczynnik kierunkowy a odpowiada wartości zawady $|Z|$ danego układu, a wyraz wolny b powinien być bliski zeru.

Niepewność standardową współczynnika kierunkowego $u(a)$ wyznaczono zgodnie ze wzorem (6) z instrukcji (ONP, 2023):

$$u(a) = s_y \sqrt{\frac{n}{D}}$$

Wyniki dopasowania prostych do danych pomiarowych dla narastających układów uzwojeń przedstawiono w tabeli 8.

Układ	$a (Z) [\Omega]$	$u(a) [\Omega]$	$b [\text{V}]$	R^2
L_1 (a-b)	50,58	0,07	-0,0091	1,0000
$L_1 + L_2$ (a-c)	133,53	0,18	0,0047	1,0000
$L_1 + L_2 + L_3$ (a-d)	312,39	0,65	0,0214	1,0000

Tabela 8: Współczynniki regresji liniowej wyznaczone dla charakterystyk cewek ($U = aI + b$).

2.2.1 Obliczenie indukcyjności całkowitych (L_{ukl})

Dla każdego badanego układu, znając rezystancję czynną R (sumę rezystancji włączonych sekcji) oraz częstotliwość kołową $\omega = 314,16 \text{ rad/s}$, obliczono całkowitą indukcyjność L_{ukl} przekształcając wzór na impedancję:

$$L_{ukl} = \frac{1}{\omega} \sqrt{|Z|^2 - R^2} \quad (10)$$

Niepewność $u(L_{ukl})$ obliczono metodą przenoszenia niepewności (wzór 15 w (ONP, 2023)), traktując $|Z|$ jako zmienną pomiarową:

$$u(L_{ukl}) = \left| \frac{\partial L}{\partial |Z|} \right| u(|Z|) = \left| \frac{1}{\omega} \frac{2|Z|}{2\sqrt{|Z|^2 - R^2}} \right| u(|Z|) = \frac{|Z|}{\omega(\omega L_{ukl})} u(|Z|) = \frac{|Z|}{\omega^2 L_{ukl}} u(|Z|) \quad (11)$$

Przykładowe obliczenie (dla układu $L_1 + L_2$, czyli zaciski a-c):

- Dane: $|Z| = 133,53 \Omega$, $u(|Z|) = 0,18 \Omega$, $R = R_{ab} + R_{bc} = 36,0 + 16,0 = 52,0 \Omega$.
- Obliczenie wartości $L_{(a-c)}$:

$$L_{(a-c)} = \frac{1}{314,16} \sqrt{133,53^2 - 52,0^2} = \frac{\sqrt{17830,26 - 2704}}{314,16} \approx \frac{122,99}{314,16} \approx 0,3915 \text{ H}$$

- Obliczenie niepewności $u(L_{(a-c)})$:

$$u(L_{(a-c)}) = \frac{133,53}{314,16^2 \cdot 0,3915} \cdot 0,18 \approx \frac{133,53}{38651,5} \cdot 0,18 \approx 0,0006 \text{ H}$$

Analogicznie obliczono $L_{(a-b)} \approx 0,1131 \text{ H}$ oraz $L_{(a-d)} \approx 0,9568 \text{ H}$.

2.2.2 Obliczenie indukcyjności sekcji (L_1, L_2, L_3)

Ponieważ pomiary wykonywano w układzie narastającym (szeregowym), indukcyjności poszczególnych sekcji wyznaczono różnicowo:

- $L_1 = L_{(a-b)}$
- $L_2 = L_{(a-c)} - L_{(a-b)}$
- $L_3 = L_{(a-d)} - L_{(a-c)}$

Niepewność wyznaczenia indukcyjności sekcji (dla L_2 i L_3) obliczono jako pierwiastek z sumy kwadratów niepewności składowych (prawo przenoszenia niepewności dla różnicy):

$$u(L_{sekcja}) = \sqrt{u^2(L_{obecny}) + u^2(L_{poprzedni})}$$

Przykładowe obliczenie (dla sekcji L_2):

- Dane (z poprzedniego kroku): $L_{(a-c)} = 0,3915 \text{ H}$, $L_{(a-b)} = 0,1131 \text{ H}$.
- Wynik:

$$L_2 = 0,3915 - 0,1131 = 0,2784 \text{ H}$$

- Niepewność:

$$u(L_2) = \sqrt{0,0006^2 + 0,0003^2} \approx 0,0007 \text{ H}$$

Ostateczne wyniki dla poszczególnych sekcji zestawiono w tabeli 9.

Sekcja	Indukcyjność L [H]	Niepewność $u(L)$ [H]
L_1	0,1131	0,0003
L_2	0,2784	0,0007
L_3	0,5654	0,0022
Suma (a-d)	0,9568	-

Tabela 9: Wyznaczone współczynniki samoindukcji poszczególnych sekcji cewki.

2.3 Wyznaczenie pojemności kondensatora

Podobnie jak w przypadku cewek, dla trzech kondensatorów (C_1 , C_2 oraz C_3) sporządzono charakterystyki prądowo-napięciowe (rys. 2). Przyjęto model liniowy $I(U) = a \cdot U$, gdzie współczynnik kierunkowy a jest związany z pojemnością C zależnością:

$$a = \omega C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{a}{\omega} \quad (12)$$

gdzie $\omega = 314,16 \text{ rad/s}$.

Niepewność standardową współczynnika kierunkowego $u(a)$ wyznaczono metodą regresji liniowej (zgodnie ze wzorem 6 z instrukcji ONP). Następnie, korzystając z prawa przenoszenia niepewności (wzór 15 z instrukcji ONP), wyznaczono niepewność złożoną pojemności $u(C)$. Ponieważ ω przyjęto jako stałą bezbłędną, pochodna cząstkowa wynosi:

$$u(C) = \left| \frac{\partial C}{\partial a} \right| u(a) = \left| \frac{1}{\omega} \right| u(a) = \frac{u(a)}{\omega} \quad (13)$$

Przykładowe obliczenie (dla kondensatora C_1):

- Dane z regresji: $a = 1,1107 \cdot 10^{-3} \text{ A/V}$, $u(a) = 6,22 \cdot 10^{-6} \text{ A/V}$.
- Obliczenie wartości C_1 :

$$C_1 = \frac{1,1107 \cdot 10^{-3}}{314,16} \approx 3,535 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 3,54 \mu\text{F}$$

- Obliczenie niepewności $u(C_1)$:

$$u(C_1) = \frac{6,22 \cdot 10^{-6}}{314,16} \approx 1,98 \cdot 10^{-8} \text{ F} \approx 0,02 \mu\text{F}$$

Wyniki dla wszystkich badanych elementów zestawiono w tabeli 10.

Tabela 10: Wyznaczone parametry kondensatorów wraz z niepewnościami.

El.	a [A/V]	$u(a)$ [A/V]	C [μF]	$u(C)$ [μF]
C_1	$1,1107 \cdot 10^{-3}$	$6,22 \cdot 10^{-6}$	3,54	0,02
C_2	$2,2662 \cdot 10^{-3}$	$7,49 \cdot 10^{-6}$	7,21	0,02
C_3	$5,0502 \cdot 10^{-3}$	$3,55 \cdot 10^{-5}$	16,08	0,11

Analizując otrzymane wartości pojemności, wyznaczono ich stosunki względem pojemności podstawowej C_1 :

- $C_2/C_1 \approx 2,04$ (oczekiwano wartości bliskiej 2, układ $2C$),
- $C_3/C_1 \approx 4,55$ (oczekiwano wartości bliskiej 4, układ $4C$).

Wyniki potwierdzają, że badane elementy mają pojemności będące przybliżonymi wielokrotnościami pojemności C_1 .

3 Wyznaczenie zawady obwodu RLC

W ostatniej części doświadczenia zbadano szeregowy obwód RLC składający się z połączenia wszystkich sekcji cewki (L_{1+2+3}), kondensatora C_1 oraz rezystancji wewnętrznych. Sporządzono charakterystykę prądowo-napięciową układu (rys. 3). Zgodnie z prawem Ohma dla prądu przemiennego ($I = U/Z$), współczynnik kierunkowy prostej regresji a odpowiada odwrotności zawady (modułowi admitancji):

$$a = \frac{1}{Z} \Rightarrow Z_{pom} = \frac{1}{a} \quad (14)$$

Niepewność wyznaczenia zawady $u(Z)$ obliczono metodą przenoszenia niepewności, wychodząc od niepewności współczynnika kierunkowego $u(a)$:

$$u(Z) = \left| \frac{dZ}{da} \right| u(a) = \frac{1}{a^2} u(a) = Z^2 \cdot u(a) \quad (15)$$

Na podstawie dopasowania prostej do danych eksperymentalnych otrzymano:

$$a = (1,6637 \pm 0,0035) \cdot 10^{-3} \text{ S}$$

Stąd wyznaczona doświadczalnie wartość zawady wynosi:

$$Z_{pom} = 601,07 \pm 1,27 \Omega \quad (16)$$

3.1 Weryfikacja z modelem teoretycznym

Wartość tę porównano z zawadą teoretyczną Z_{teo} , obliczoną na podstawie parametrów wyznaczonych w poprzednich częściach ćwiczenia:

- Rezystancja całkowita: $R = R_{ab} + R_{bc} + R_{cd} = 85,0 \Omega$
- Indukcyjność całkowita: $L = 0,9568 \text{ H} \Rightarrow X_L = \omega L \approx 300,60 \Omega$
- Pojemność: $C = C_1 = 3,5354 \mu\text{F} \Rightarrow X_C = \frac{1}{\omega C} \approx 900,36 \Omega$

Korzystając ze wzoru na impedancję szeregowego obwodu RLC:

$$Z_{teo} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{85,0^2 + (300,60 - 900,36)^2} \quad (17)$$

$$Z_{teo} = \sqrt{7225 + (-599,76)^2} \approx \sqrt{7225 + 359712} \approx 605,76 \Omega \quad (18)$$

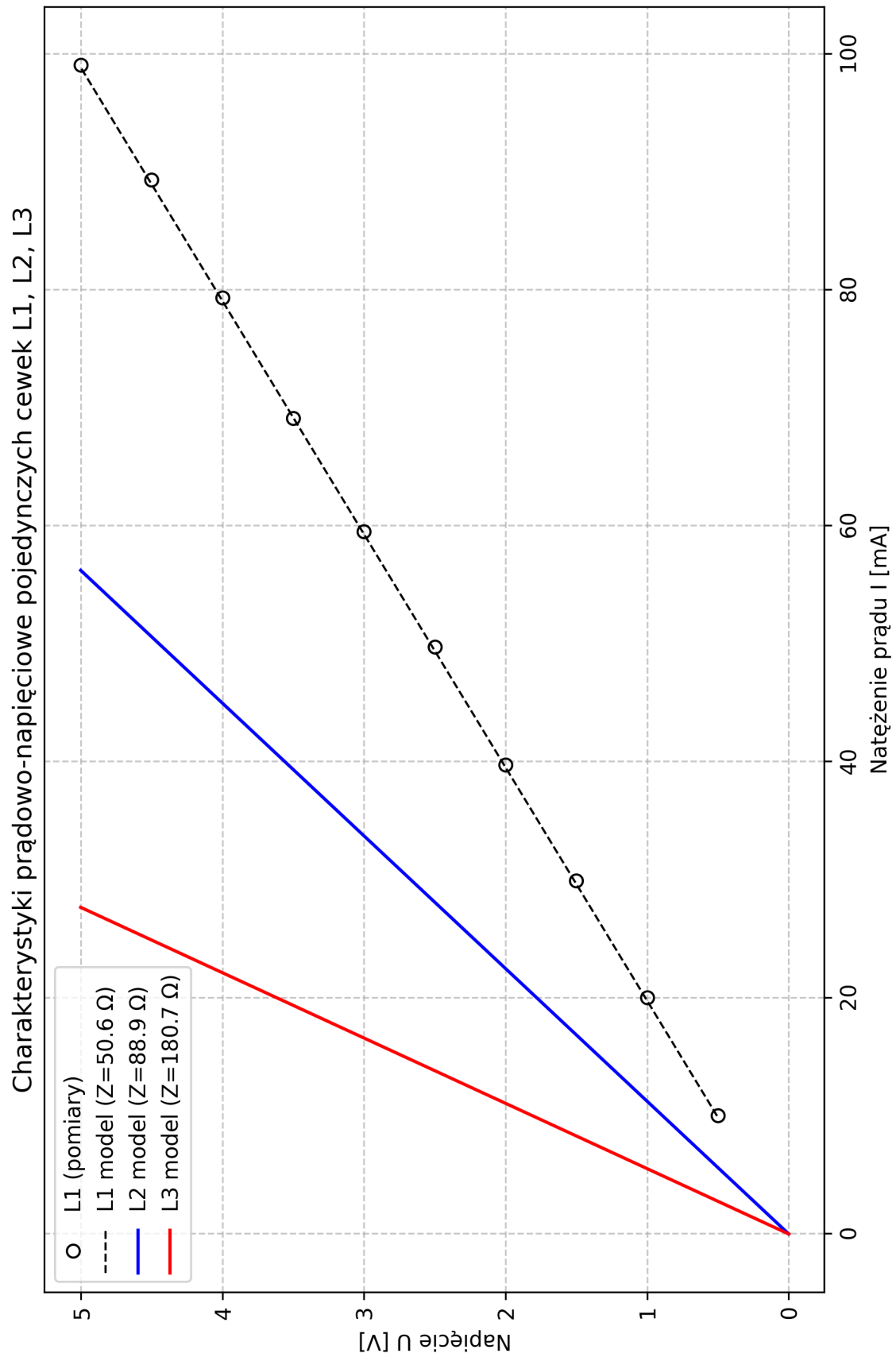
3.2 Wnioski

Porównując wartość wyznaczoną z charakterystyki $I(U)$ z wartością teoretyczną:

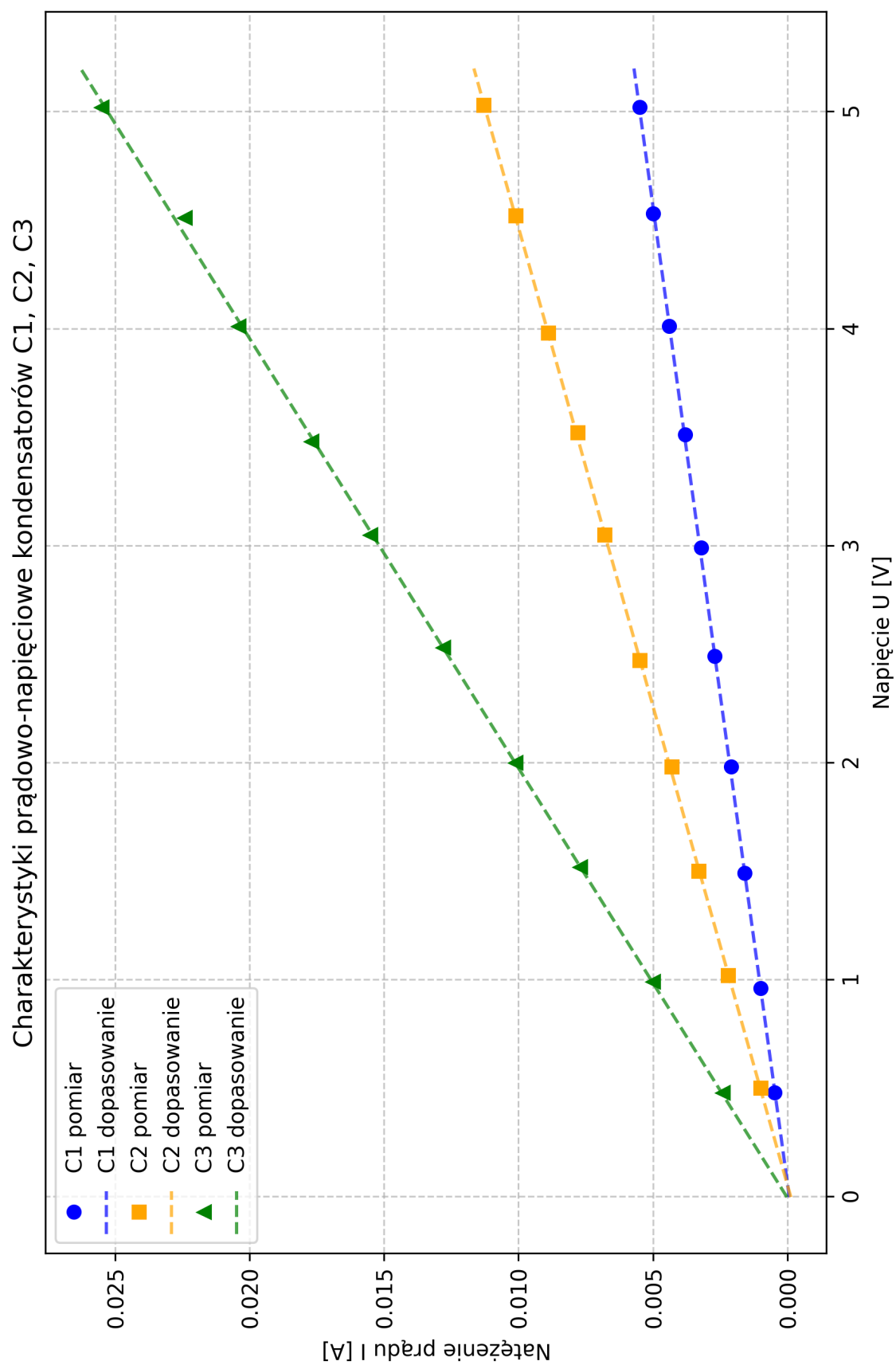
$$|Z_{pom} - Z_{teo}| = |601,07 - 605,76| = 4,69 \Omega$$

Rozszerzona niepewność pomiarowa ($2u(Z)$) wynosi ok. $2,54 \Omega$. Stwierdzono, że różnica między wartością zmierzoną a teoretyczną jest większa od podwojonej niepewności standardowej. Niewielka rozbieżność (na poziomie ok. 0,8%) może wynikać z uproszczeń modelu (np. pominięcia rezystancji połączeń, niedokładności częstotliwości sieci) lub niepewności wyznaczenia składowych L i C w poprzednich krokach.

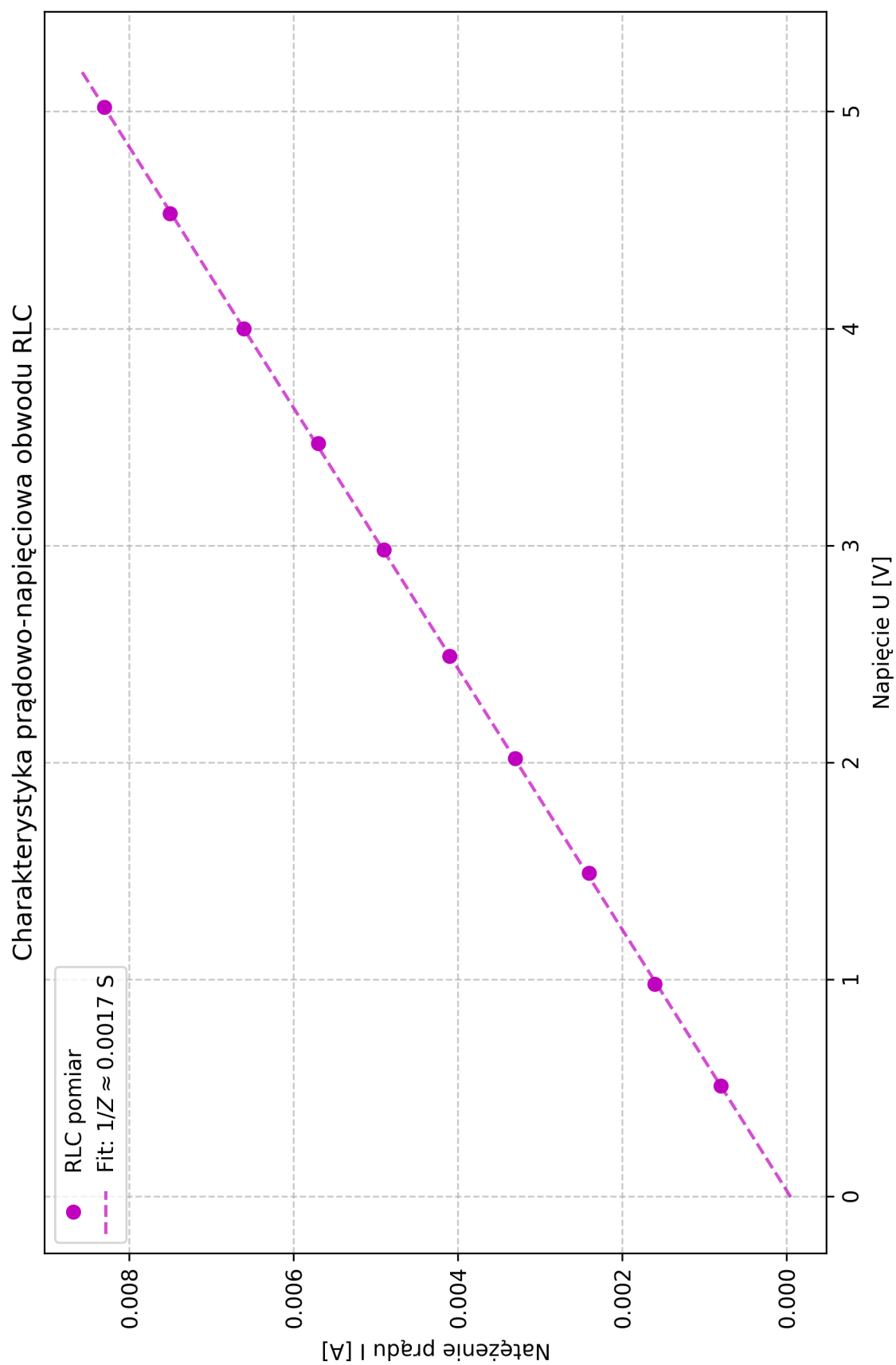
4 Wykresy



Rysunek 1: Charakterystyki prądowo-napięciowe cewek L_1 , L_2 oraz L_3 .



Rysunek 2: Charakterystyki prądowo-napięciowe kondensatorów C_1 , C_2 oraz C_3 .



Rysunek 3: Charakterystyka prądowo-napięciowa szeregowego obwodu RLC wraz z dopasowaną prostą regresji.

Literatura

(2023). *Instrukcja oceny niepewności pomiarów w I Pracowni Fizycznej (ONP)*. Instytut Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Wrocławskiego. Nowe normy międzynarodowe. Dostęp: 11.01.2026.