

Ćwiczenie nr 42

Mostek Wheatstone’a

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Mostek Wheatstone’a

Mostek Wheatstone’a to układ czterech przewodników (rezystorów), który pozwala na wyznaczenie wartości nieznanej rezystancji w sposób niewymagający bezpośredniego pomiaru natężenia prądu ani napięcia (Dryński, 1976). Układ ten składa się z dwóch równoległych gałęzi zasilanych ze źródła prądu stałego, połączonych poprzeczną gałęzią (mostkiem) zawierającą czuły galwanometr.

Stan równowagi mostka osiągany jest wtedy, gdy przez galwanometr nie płynie prąd. Fizycznie oznacza to, że potencjały w punktach węzłowych mostka są jednakowe, a napięcie między nimi wynosi zero (Dryński, 1976). Warunek ten jest spełniony tylko wtedy, gdy cztery rezystancje spełniają następującą proporcję:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (1)$$

Gdy jeden z czterech rezystorów jest nieznany, można wyznaczyć jego rezystancję z powyższej proporcji (1), znając wartości pozostałych trzech elementów.

1.1.1 Liniowy mostek Wheatstone’a

W liniowym mostku Wheatstone’a rezystancje R_1 i R_2 stanowią fragmenty drutu oporowego o stałym przekroju q i rezystywności ρ , rozpiętego na podstawce wzdłuż skali milimetrowej (Dryński, 1976). Zgodnie z drugim prawem Ohma rezystancja takiego przewodu wyraża się wzorem $R = \rho \frac{l}{q}$.

Ponieważ drut jest jednorodny na całej długości, parametry materiałowe i geometryczne upraszczają się, dzięki czemu stosunek rezystancji $\frac{R_1}{R_2}$ można zastąpić bezpośrednio stosunkiem długości odcinków drutu $\frac{l_1}{l_2}$ (Dryński, 1976). W ten sposób dla nieznanej rezystancji $R_x = R_3$ i znanej rezystancji z opornicy $R_4 = R$, można określić wartość R_x jako:

$$R_x = R \frac{l_1}{l_2} \quad (2)$$

Najmniejszy błąd pomiaru uzyskuje się w sytuacji, gdy stosunek długości jest bliski jedności ($l_1 \approx l_2$), co odpowiada ustawieniu suwaka w pobliżu środka skali (Dryński, 1976).

2 Opis doświadczenia

Pomiary przeprowadzono zgodnie z następującą procedurą:

- Zmontowano układ pomiarowy według schematu ideowego, składający się z badanego rezystora R_x , znanej opornicy dekadowej R_w , rezystancji zabezpieczającej R_z , listwy pomiarowej (dzielącej się na odcinki l_1 i l_2) oraz miliamperomierza służącego do wykrywania prądu w gałęzi mostka.
- Zadbano o to, aby napięcie zasilające układ nie przekraczało dopuszczalnej wartości 3 V.
- Dla każdego z pięciu badanych rezystorów ($R_1 - R_5$) znaleziono położenie równowagi mostka, dobierając nastawy opornicy dekadowej tak, aby przez miliamperomierz nie płynął prąd.
- Pomiary dla każdego elementu wykonano przy trzech ustalonych położeniach suwaka na listwie pomiarowej: w 1/3, 1/2 oraz 2/3 jej całkowitej długości.
- Analogiczną procedurę pomiarową powtórzono dla wskazanych przez prowadzącego układy połączeń rezystorów (szeregowego i równoległego).

3 Opracowanie wyników pomiarów

3.1 Tabele pomiarowe

Zmierzone wartości nastaw opornicy dekadowej R_w dla trzech ustawień suwaka listwy L , dla badanych rezystorów R_1, R_2, \dots, R_5 zapisano w tabeli 1. Jako R_s i R_r oznaczono rezystancję zastępczą układu rezystorów 1-3, połączonych odpowiednio szeregowo i równolegle.

Długość L	Nastawa opornicy R_w [Ω] dla rezystora:						
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_r (równol.)	R_s (szereg.)
1/3	97	202	832	2320	6100	64	1060
1/2	52	90	452	1340	3299	32	560
2/3	27,6	49,3	232	653	1720	16,4	309

Tabela 1: Wartości nastaw opornicy dekadowej R_w dla poszczególnych badanych rezystancji.

Długość L	Napięcie U [V] przy pomiarze rezystora:						
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_r	R_s
1/3	0,67	0,63	0,62	0,65	0,61	0,64	0,62
1/2	0,64	0,63	0,62	0,62	0,62	0,64	0,61
2/3	0,64	0,62	0,61	0,61	0,62	0,66	0,61

Tabela 2: Wartości napięcia zasilania U podczas pomiarów poszczególnych rezystancji.

4 Opracowanie wyników pomiarów

4.1 Wartości badanych rezystancji i ich wartości średnie

Dla każdego podziału listwy L obliczono stosunek $\frac{l_1}{l_2}$:

Następnie korzystając ze wzoru (2), dla każdej nastawy opornicy dekadowej R_w i długości listwy L , obliczono wartości nieznanej rezystancji R_x . Wyniki przedstawiono w tabeli poniżej.

Ustawienie L	Stosunek $\frac{l_1}{l_2}$
1/3	0,5
1/2	1,0
2/3	2,0

Tabela 3: Wartości stosunku podziału listwy dla badanych ustawień L .

Rezystor	$R_x [\Omega]$ dla $L = 1/3$	$R_x [\Omega]$ dla $L = 1/2$	$R_x [\Omega]$ dla $L = 2/3$
R_1	48,5	52,0	55,2
R_2	101,0	90,0	98,6
R_3	416,0	452,0	464,0
R_4	1160,0	1340,0	1306,0
R_5	3050,0	3299,0	3440,0
R_r	32,0	32,0	32,8
R_s	530,0	560,0	618,0

Tabela 4: Wyznaczone wartości badanych rezystancji dla różnych ustawień mostka.

Przykładowe obliczenie (dla rezystora R_2 przy ustawieniu $L = 1/3$):

Wartość $R_w = 202 \Omega$, stosunek $\frac{l_1}{l_2} = 0,5$.

$$R_2^{(1/3)} = 202 \cdot 0,5 = 101,0 \Omega$$

Na podstawie wyznaczonych wartości cząstkowych obliczono średnie wartości rezystancji dla każdego badanego elementu:

Rezystor	Średnia rezystancja $\bar{R} [\Omega]$
R_1	51,9
R_2	96,5
R_3	444,0
R_4	1268,7
R_5	3263,0
R_r	32,3
R_s	569,3

Tabela 5: Średnie wartości badanych rezystancji.

Przykładowe obliczenie (dla rezystora R_1):

Korzystając z wartości wyznaczonych dla trzech ustawień suwaka ($48,5 \Omega$, $52,0 \Omega$ oraz $55,2 \Omega$):

$$\bar{R}_1 = \frac{48,5 + 52,0 + 55,2}{3} = \frac{155,7}{3} = 51,9 \Omega$$

4.2 Ocena niepewności pomiaru

Niepewność pomiaru ΔR oszacowano metodą maksymalnego rozrzutu wyników, zgodnie ze wzorem:

$$\Delta R = \frac{R_{max} - R_{min}}{2} \quad (3)$$

Wyniki obliczeń niepewności przedstawiono w tabeli poniżej.

Rezystor	Niepewność ΔR [Ω]
R_1	3,4
R_2	5,5
R_3	24,0
R_4	90,0
R_5	195,0
R_r	0,4
R_s	44,0

Tabela 6: Niepewności maksymalne wyznaczonych rezystancji.

Przykładowe obliczenie (dla rezystora R_2):

Wartości skrajne wynoszą $R_{max} = 101,0 \Omega$ oraz $R_{min} = 90,0 \Omega$.

$$\Delta R_2 = \frac{101,0 - 90,0}{2} = 5,5 \Omega$$

Ostateczne wyniki pomiarów (wraz z niepewnościami) wynoszą:

- $R_1 = (51,9 \pm 3,4) \Omega$
- $R_2 = (96,5 \pm 5,5) \Omega$
- $R_3 = (444 \pm 24) \Omega$
- $R_4 = (1269 \pm 90) \Omega$
- $R_5 = (3263 \pm 195) \Omega$
- $R_r = (32,3 \pm 0,4) \Omega$
- $R_s = (569 \pm 44) \Omega$

4.3 Weryfikacja prawa łączenia rezystorów

Korzystając z wyznaczonych wcześniej średnich wartości rezystancji R_1, R_2 oraz R_3 , obliczono teoretyczne wartości rezystancji zastępczej dla połączenia szeregowego ($R_{s,teor}$) i równoległego ($R_{r,teor}$).

Dla połączenia szeregowego:

$$R_{s,teor} = R_1 + R_2 + R_3 = 51,9 + 96,5 + 444,0 = 592,4 \Omega \quad (4)$$

Dla połączenia równoległego:

$$R_{r,teor} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{51,9} + \frac{1}{96,5} + \frac{1}{444,0} \right)^{-1} \approx 31,4 \Omega \quad (5)$$

Następnie porównano wartości teoretyczne z wynikami zmierzonymi bezpośrednio (R_{pom}), wyznaczając błąd bezwzględny $|\Delta R| = |R_{pom} - R_{teor}|$ oraz błąd względny $\delta = \frac{|\Delta R|}{R_{teor}} \cdot 100\%$.

Połączenie	R_{pom} [Ω]	R_{teor} [Ω]	$ \Delta R $ [Ω]	δ [%]
Szeregowe (R_s)	569,3	592,4	23,1	3,90
Równoległe (R_r)	32,3	31,4	0,9	2,86

Tabela 7: Porównanie zmierzonych rezystancji zastępczych z wartościami teoretycznymi.

5 Wnioski

W ramach ćwiczenia wyznaczono wartości rezystancji pięciu nieznanymi rezystorów oraz ich połączeń (szeregowego i równoległego) metodą mostka Wheatstone’a. Pomiary wykonano dla trzech różnych ustawień suwaka na listwie ($L = 1/3, 1/2, 2/3$), a jako wynik końcowy przyjęto wartość średnią.

Ostateczne wyniki pomiarów wraz z niepewnościami maksymalnymi wynoszą:

- $R_1 = (51,9 \pm 3,4) \Omega$
- $R_2 = (96,5 \pm 5,5) \Omega$
- $R_3 = (444 \pm 24) \Omega$
- $R_4 = (1269 \pm 90) \Omega$
- $R_5 = (3263 \pm 195) \Omega$
- $R_r = (32,3 \pm 0,4) \Omega$ (połączenie równoległe R_1, R_2, R_3)
- $R_s = (569 \pm 44) \Omega$ (połączenie szeregowe R_1, R_2, R_3)

Przeprowadzono weryfikację praw łączenia rezystorów, porównując zmierzone wartości rezystancji zastępczych z wartościami teoretycznymi obliczonymi na podstawie składowych R_1, R_2, R_3 :

1. Dla połączenia szeregowego wartość teoretyczna wynosi $R_{s,teor} = 592,4 \Omega$, natomiast wartość zmierzona $R_{s,pom} = 569,3 \Omega$. Różnica wynosi $23,1 \Omega$, co stanowi błąd względny $\delta \approx 3,90\%$.
2. Dla połączenia równoległego wartość teoretyczna wynosi $R_{r,teor} = 31,4 \Omega$, natomiast wartość zmierzona $R_{r,pom} = 32,3 \Omega$. Różnica wynosi $0,9 \Omega$, co stanowi błąd względny $\delta \approx 2,86\%$.

Uzyskane wyniki charakteryzują się wysoką zgodnością z teorią. Błędy względne w obu przypadkach nie przekraczają 4% , co potwierdza poprawność praw Kirchhoffa oraz skuteczność metody mostka Wheatstone’a w pomiarach rezystancji. Różnice między wartościami zmierzonymi a teoretycznymi mieszczą się w granicach oszacowanych niepewności pomiarowych (dla R_s różnica $23,1 \Omega$ mieści się w niepewności $\pm 44 \Omega$).

Literatura

Dryński, T. (1976). *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 5 edition.