

Ćwiczenie nr 46

Prawa Ohma i Kirchhoffa

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Prawo Ohma i rezystancja

Natężenie prądu elektrycznego I definiuje się jako ilość ładunku przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika w jednostce czasu ($I = dQ/dt$). Dla wielu materiałów (zwanych omowymi) gęstość prądu \vec{J} jest wprost proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego \vec{E} . W ujęciu makroskopowym zależność ta, znana jako prawo Ohma, wiąże natężenie prądu I płynącego przez element z napięciem U przyłożonym do jego końców (Ling et al., 2018):

$$I = \frac{U}{R} \quad (1)$$

Współczynnik proporcjonalności R nazywamy rezystancją (oporem elektrycznym). Jednostką rezystancji w układzie SI jest om (Ω). Rezystancja elementu zależy od jego geometrii oraz rezystywności materiału ρ :

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2)$$

gdzie l to długość przewodnika, a S to pole jego przekroju poprzecznego (Ling et al., 2018).

1.2 Prawa Kirchhoffa

Analiza złożonych obwodów elektrycznych opiera się na dwóch fundamentalnych zasadach wynikających z praw zachowania:

1. **I Prawo Kirchhoffa (Węzłowe):** Wynika z zasady zachowania ładunku. Suma algebraiczna natężeń prądów wpływających do węzła i wypływających z niego jest równa zero (Ling et al., 2018):

$$\sum_k I_k = 0 \quad (3)$$

2. **II Prawo Kirchhoffa (Oczkowe):** Wynika z zasady zachowania energii. W dowolnym zamkniętym obwodzie (oczku) suma algebraiczna zmian potencjałów (sił elektromotorycznych \mathcal{E} oraz spadków napięć IR) wynosi zero (Ling et al., 2018):

$$\sum_k \Delta V_k = 0 \quad \vee \quad \sum \mathcal{E} = \sum IR \quad (4)$$

1.3 Łączenie rezystorów

W obwodach prądu stałego wyróżniamy podstawowe konfiguracje łączenia rezystorów:

- **Połączenie szeregowe:** Przez wszystkie elementy płynie ten sam prąd. Rezystancja zastępcza jest sumą rezystancji składowych:

$$R_z = \sum_i R_i \quad (5)$$

- **Połączenie równoległe:** Na wszystkich elementach występuje to samo napięcie. Odwrotność rezystancji zastępczej jest sumą odwrotności rezystancji składowych (Ling et al., 2018):

$$\frac{1}{R_z} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (6)$$

1.4 Transfiguracja gwiazda-trójkąt

W przypadku bardziej złożonych struktur, których nie można sprowadzić do połączeń szeregowych lub równoległych (np. mostki), stosuje się transformację układu połączonego w trójkąt (Δ) na równoważny układ połączony w gwiazdę (Y) lub odwrotnie. Dla transformacji trójkąta (rezystancje R_{12}, R_{23}, R_{31}) w gwiazdę (rezystancje R_1, R_2, R_3), wzory na rezystancje zastępcze przyjmują postać (Ling et al., 2018):

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (7)$$

Zastosowanie tej transformacji pozwala na uproszczenie topologii obwodu i obliczenie rezystancji zastępczej metodami podstawowymi.

2 Opracowanie wyników pomiarów

2.1 Tabele pomiarowe

R_1 [kΩ]	R_2 [kΩ]	R_3 [kΩ]	R_4 [kΩ]	R_5 [kΩ]
0,192	2,39	0,557	0,558	0,877

Tabela 1: Zmierzone wartości rezystancji

U_1 [V]	U_2 [V]	U_3 [V]	U_4 [V]	U_5 [V]
2,03	7,93	4,08	3,81	—
I_1 [mA]	I_2 [mA]	I_3 [mA]	I_4 [mA]	I_5 [mA]
10,73	3,32	7,44	7,44	—

Tabela 2: Wyniki pomiarów dla Układu 1

U_1 [V]	U_2 [V]	U_3 [V]	U_4 [V]	U_5 [V]
1,64	8,32	2,87	5,37	4,57
I_1 [mA]	I_2 [mA]	I_3 [mA]	I_4 [mA]	I_5 [mA]
13,85	3,48	5,23	10,49	5,28

Tabela 3: Wyniki pomiarów dla Układu 2

R_z [kΩ]
0,901

Tabela 4: Zmierzona rezystancja zastępcza

2.2 Obliczenie rezystancji R1-R4

Na podstawie pomiarów napięć i natężeń prądu dla układu z schematu 1, korzystając z prawa Ohma, obliczono wartości rezystancji R1 ÷ R4. Prawo Ohma wyraża się wzorem:

$$R = \frac{U}{I} \quad (8)$$

Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 5.

Rezystor	Wartość R [Ω]
R_1	189,19
R_2	2388,55
R_3	548,39
R_4	512,10

Tabela 5: Obliczone wartości rezystancji R1-R4

Przykładowe obliczenie dla rezystora R1:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{2,03}{0,01073} \approx 189,19 \Omega \quad (9)$$

Porównanie wartości rezystancji obliczonych ze zmierzonymi

Wyniki obliczeń rezystancji na podstawie pomiarów napięć i prądów oraz wartości zmierzone omomierzem przedstawiono w tabeli 6.

Rezystor	Obliczona [Ω]	Zmierzona [Ω]	Błąd bezwzględny [Ω]	Błąd względny [%]
R_1	189,19	192	2,81	1,46
R_2	2388,55	2390	1,45	0,06
R_3	548,39	557	8,61	1,55
R_4	512,10	558	45,90	8,23

Tabela 6: Porównanie obliczonych i zmierzonych wartości rezystancji

2.3 Obliczenie natężeń z praw Kirchhoffa

Z pierwszego prawa Kirchhoffa:

$$\begin{cases} I_1 - I_3 - I_2 = 0 \\ I_3 - I_4 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Z drugiego prawa Kirchhoffa:

$$\begin{cases} \mathcal{E} - U_1 - U_2 = 0 \\ U_2 - U_3 - U_4 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Z prawa Ohma dla całego układu:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_z} \quad (12)$$

, gdzie $\mathcal{E} = 10,0V$ to napięcie zasilania układu. Przekształcając wzory (10), (11) oraz (12) otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} I_1 = I_3 + I_2 \\ I_3 = I_4 \\ \mathcal{E} - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0 \\ I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_z} \end{cases} \quad (13)$$

Z prawa łączenia rezystorów szeregowo i równoległe:

$$R_z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}} = \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Podstawiając R_z do piątego równania z układu (13) otrzymujemy wzór na I_1 :

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} = \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)}$$

Do czwartego równania układu (13) podstawiamy wzór na I_4 z drugiego równania oraz wzór na I_2 z pierwszego równania:

$$\begin{aligned} R_2(I_1 - I_3) - I_3(R_3 + R_4) &= 0 \\ I_1 R_2 - I_3 R_2 - I_3(R_3 + R_4) &= 0 \\ I_1 R_2 &= I_3(R_2 + R_3 + R_4) \end{aligned}$$

i otrzymujemy wzór na I_3 oraz I_4 :

$$\begin{aligned} I_3 = I_4 &= I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \\ &= \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \\ &= \frac{\mathcal{E}(R_3 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} \end{aligned}$$

Wyznaczamy I_2 podstawiając do pierwszego wzoru z układu równań obliczony powyżej wzór na I_3 :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= I_1 - I_3 = \\
 &= I_1 - I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \\
 &= I_1 \left(1 - \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \right) = \\
 &= I_1 \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \\
 &= \frac{\mathcal{E} (R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)} \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \\
 &= \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)}
 \end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$\begin{cases} I_1 &= \frac{\mathcal{E}(R_2+R_3+R_4)}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)} \\ I_2 &= \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)} \\ I_3 = I_4 &= \frac{\mathcal{E}(R_3+R_4)}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)} \end{cases}$$

Porównanie wartości natężeń obliczonych ze zmierzonymi

Wyniki obliczeń oraz porównanie z wartościami zmierzonymi przedstawiono w tabeli 7.

Prąd	Obliczony [A]	Zmierzony [A]	Błąd bezwzględny [A]	Błąd względny [%]
I_1	0,0105	0,0107	0,000229	2,14
I_2	0,0033	0,0033	0,000000	0,00
$I_3 = I_4$	0,0072	0,0074	0,000048	0,65

Tabela 7: Obliczone i zmierzone wartości prądów z błędami

Przykładowe obliczenie dla prądu I_1 :

$$I_1 = \frac{10,0 \cdot (2390 + 557 + 558)}{192 \cdot (2390 + 557 + 558) + 2390 \cdot (557 + 558)} \approx 0,0105 \text{ A} \quad (14)$$

2.4 Obliczenie oporu zastępczego

Z prawa łączenia rezystorów szeregowo i równoległo:

$$R_z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}} = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Podstawiając wartości zmierzone:

$$R_z = 192 + \frac{2390 \cdot (557 + 558)}{2390 + 557 + 558} = 192 + \frac{2390 \cdot 1115}{3505} = 192 + 760,30 = 952,30 \Omega$$

Porównanie wartości rezystancji obliczonych ze zmierzonymi

Wartość zmierzona oporu zastępczego wynosi $R_z = 901 \Omega$, porównując wartość zmierzoną z obliczoną otrzymano następujące wyniki:

- błąd bezwzględny: $952,30 - 901 = 51,30 \Omega$,
- błąd względny: $\frac{51,30}{901} \cdot 100\% \approx 5,69\%$.

3 Ocena niepewności pomiaru

Niepewności maksymalne rezystorów obliczono korzystając z prawa przenoszenia niepewności maksymalnej dla funkcji $R = U/I$, gdzie $u(U) = 0,1 \text{ V}$ dla zasilacza, a $u(I) = 1\%$ zakresu pomiarowego miernika cyfrowego prądu.

Przykładowe obliczenie dla rezystora R_1 w układzie 1:

$$U_1 = 2,03 \text{ V}, \quad I_1 = 0,01073 \text{ A}, \quad u(I_1) = 0,01 \cdot 0,01073 = 0,0001073 \text{ A}$$
$$u(R_1) = \frac{0,1}{0,01073} + \frac{2,03}{0,01073^2} \cdot 0,0001073 \approx 9,32 + 1,89 \approx 11,21 \Omega \approx 0,011 \text{ k}\Omega$$

Tabela 8: Niepewności maksymalne wyznaczonych oporów

Wielkość	Układ	$u(R)$ [k Ω]
R_1	1	0,011
R_2	1	0,054
R_3	1	0,019
R_4	1	0,019
R_1	2	0,008
R_2	2	0,053
R_3	2	0,025
R_4	2	0,015
R_5	2	0,028
R_z	2	0,010

Literatura

Ling, S. J., Sanny, J., and Moebs, W. (2018). *Fizyka dla szkół wyższych, Tom 3*. OpenStax. Dostęp: 13.10.2025.