

Ćwiczenie nr 46

Prawa Ohma i Kirchhoffa

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Prawo Ohma i rezystancja

Natężenie prądu elektrycznego I definiuje się jako ilość ładunku przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika w jednostce czasu ($I = dQ/dt$). Dla wielu materiałów (zwanych omowymi) gęstość prądu \vec{J} jest wprost proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego \vec{E} . W ujęciu makroskopowym zależność ta, znana jako prawo Ohma, wiąże natężenie prądu I płynącego przez element z napięciem U przyłożonym do jego końców (?):

$$I = \frac{U}{R} \quad (1)$$

Współczynnik proporcjonalności R nazywamy rezystancją (oporem elektrycznym). Jednostką rezystancji w układzie SI jest om (Ω). Rezystancja elementu zależy od jego geometrii oraz rezystywności materiału ρ :

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2)$$

gdzie l to długość przewodnika, a S to pole jego przekroju poprzecznego (?).

1.2 Prawa Kirchhoffa

Analiza złożonych obwodów elektrycznych opiera się na dwóch fundamentalnych zasadach wynikających z praw zachowania:

1. **I Prawo Kirchhoffa (Węzłowe):** Wynika z zasady zachowania ładunku. Suma algebraiczna natężeń prądów wpływających do węzła i wypływających z niego jest równa zero (?):

$$\sum_k I_k = 0 \quad (3)$$

2. **II Prawo Kirchhoffa (Oczkowe):** Wynika z zasady zachowania energii. W dowolnym zamkniętym obwodzie (oczku) suma algebraiczna zmian potencjałów (sił elektromotorycznych \mathcal{E} oraz spadków napięć IR) wynosi zero (?):

$$\sum_k \Delta V_k = 0 \quad \sum \mathcal{E} = \sum IR \quad (4)$$

1.3 Łączenie rezystorów

W obwodach prądu stałego wyróżniamy podstawowe konfiguracje łączenia rezystorów:

- **Połączenie szeregowe:** Przez wszystkie elementy płynie ten sam prąd. Rezystancja zastępcza jest sumą rezystancji składowych:

$$R_z = \sum_i R_i \quad (5)$$

- **Połączenie równoległe:** Na wszystkich elementach występuje to samo napięcie. Odwrotność rezystancji zastępczej jest sumą odwrotności rezystancji składowych (?):

$$\frac{1}{R_z} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (6)$$

1.4 Transfiguracja gwiazda-trójkąt

W przypadku bardziej złożonych struktur, których nie można sprowadzić do połączeń szeregowych lub równoległych (np. mostki), stosuje się transformację układu połączonego w trójkąt (Δ) na równoważny układ połączony w gwiazdę (Y) lub odwrotnie. Dla transformacji trójkąta (rezystancje R_{12}, R_{23}, R_{31}) w gwiazdę (rezystancje R_1, R_2, R_3), wzory na rezystancje zastępcze przyjmują postać (?):

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (7)$$

Zastosowanie tej transformacji pozwala na uproszczenie topologii obwodu i obliczenie rezystancji zastępczej metodami podstawowymi.

2 Opracowanie wyników pomiarów

2.1 Tabele pomiarowe

| R_1 [kΩ] | R_2 [kΩ] | R_3 [kΩ] | R_4 [kΩ] | R_5 [kΩ] |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0,192 | 2,39 | 0,557 | 0,558 | 0,877 |

Tabela 1: Zmierzone wartości rezystancji

| U_1 [V] | U_2 [V] | U_3 [V] | U_4 [V] | U_5 [V] |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 2,03 | 7,93 | 4,08 | 3,81 | — |
| I_1 [mA] | I_2 [mA] | I_3 [mA] | I_4 [mA] | I_5 [mA] |
| 10,73 | 3,32 | 7,44 | 7,44 | — |

Tabela 2: Wyniki pomiarów dla Układu 1

| | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| U_1 [V] | U_2 [V] | U_3 [V] | U_4 [V] | U_5 [V] |
| 1,64 | 8,32 | 2,87 | 5,37 | 4,57 |
| I_1 [mA] | I_2 [mA] | I_3 [mA] | I_4 [mA] | I_5 [mA] |
| 13,85 | 3,48 | 5,23 | 10,49 | 5,28 |

Tabela 3: Wyniki pomiarów dla Układu 2

| |
|---------------|
| R_z [kΩ] |
| 0,901 |

Tabela 4: Zmierzona rezystancja zastępcza

2.2 Obliczenie rezystancji R1-R4

Na podstawie pomiarów napięć i natężeń prądu dla układu z schematu 1, korzystając z prawa Ohma, obliczono wartości rezystancji R1 ÷ R4. Prawo Ohma wyraża się wzorem:

$$R = \frac{U}{I} \quad (8)$$

Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 5.

| Rezystor | Wartość R [Ω] |
|----------|---------------|
| R_1 | 189,19 |
| R_2 | 2388,55 |
| R_3 | 548,39 |
| R_4 | 512,10 |

Tabela 5: Obliczone wartości rezystancji R1-R4

Przykładowe obliczenie dla rezystora R1:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{2,03}{0,01073} \approx 189,19 \Omega \quad (9)$$

Porównanie wartości rezystancji obliczonych ze zmierzonymi

Wyniki obliczeń rezystancji na podstawie pomiarów napięć i prądów oraz wartości zmierzone omomierzem przedstawiono w tabeli 6.

| Rezystor | Obliczona [Ω] | Zmierzona [Ω] | Błąd bezwzględny [Ω] | Błąd względny [%] |
|----------|---------------|---------------|----------------------|-------------------|
| R_1 | 189,19 | 192 | 2,81 | 1,46 |
| R_2 | 2388,55 | 2390 | 1,45 | 0,06 |
| R_3 | 548,39 | 557 | 8,61 | 1,55 |
| R_4 | 512,10 | 558 | 45,90 | 8,23 |

Tabela 6: Porównanie obliczonych i zmierzonych wartości rezystancji

2.3 Obliczenie natężeń z praw Kirchhoffa

Z pierwszego prawa Kirchhoffa:

$$\begin{cases} I_1 - I_3 - I_2 = 0 \\ I_3 - I_4 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Z drugiego prawa Kirchhoffa:

$$\begin{cases} \mathcal{E} - U_1 - U_2 = 0 \\ U_2 - U_3 - U_4 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Z prawa Ohma dla całego układu:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_z} \quad (12)$$

, gdzie $\mathcal{E} = 10,0V$ to napięcie zasilania układu. Przekształcając wzory (10), (11) oraz (12) otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} I_1 = I_3 + I_2 \\ I_3 = I_4 \\ \mathcal{E} - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0 \\ I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_z} \end{cases} \quad (13)$$

Z prawa łączenia rezystorów szeregowo i równoległe:

$$R_z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}} = \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Podstawiając R_z do piątego równania z układu (13) otrzymujemy wzór na I_1 :

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} = \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)}$$

Do czwartego równania układu (13) podstawiamy wzór na I_4 z drugiego równania oraz wzór na I_2 z pierwszego równania:

$$\begin{aligned} R_2(I_1 - I_3) - I_3(R_3 + R_4) &= 0 \\ I_1 R_2 - I_3 R_2 - I_3(R_3 + R_4) &= 0 \\ I_1 R_2 &= I_3(R_2 + R_3 + R_4) \end{aligned}$$

i otrzymujemy wzór na I_3 oraz I_4 :

$$\begin{aligned} I_3 = I_4 &= I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \\ &= \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \\ &= \frac{\mathcal{E}(R_3 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} \end{aligned}$$

Wyznaczamy I_2 podstawiając do pierwszego wzoru z układu równań obliczony powyżej wzór na I_3 :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= I_1 - I_3 = \\
 &= I_1 - I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \\
 &= I_1 \left(1 - \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \right) = \\
 &= I_1 \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \\
 &= \frac{\mathcal{E} (R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)} \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \\
 &= \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)}
 \end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$\begin{cases} I_1 &= \frac{\mathcal{E}(R_2+R_3+R_4)}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)} \\ I_2 &= \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)} \\ I_3 = I_4 &= \frac{\mathcal{E}(R_3+R_4)}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)} \end{cases}$$

Porównanie wartości natężeń obliczonych ze zmierzonymi

Wyniki obliczeń oraz porównanie z wartościami zmierzonymi przedstawiono w tabeli 7.

| Prąd | Obliczony [A] | Zmierzony [A] | Błąd bezwzględny [A] | Błąd względny [%] |
|-------------|---------------|---------------|----------------------|-------------------|
| I_1 | 0,0105 | 0,0107 | 0,000229 | 2,14 |
| I_2 | 0,0033 | 0,0033 | 0,000000 | 0,00 |
| $I_3 = I_4$ | 0,0072 | 0,0074 | 0,000048 | 0,65 |

Tabela 7: Obliczone i zmierzone wartości prądów z błędami

Przykładowe obliczenie dla prądu I_1 :

$$I_1 = \frac{10,0 \cdot (2390 + 557 + 558)}{192 \cdot (2390 + 557 + 558) + 2390 \cdot (557 + 558)} \approx 0,0105 \text{ A} \quad (14)$$

2.4 Obliczenie oporu zastępczego

Z prawa łączenia rezystorów szeregowo i równoległe:

$$R_z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}} = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Podstawiając wartości zmierzone:

$$\begin{aligned}
 R_{||} &= \frac{2390 \cdot (557 + 558)}{2390 + 557 + 558} = \frac{2390 \cdot 1115}{2390 + 1115} = \frac{2390 \cdot 1115}{3505} = 760,30 \Omega \\
 R_z &= 192 + 760,30 = 952,30 \Omega
 \end{aligned}$$

Wartość zmierzona $R_z = 901 \Omega$. Błąd bezwzględny: $952,30 - 901 = 51,30 \Omega$, błąd względny: $\frac{51,30}{901} \cdot 100\% \approx 5,69\%$.

Porównanie wartości rezystancji obliczonych ze zmierzonymi

3 Ocena niepewności pomiaru