Optymalizacja, projekt 3 - Raport

Program liniowy: będziemy chcieli znaleźć takie przyporządkowanie pracowników jako szefów sztabów, że odpowiednie wymagania zostaną zachowane. Sztaby będziemy reprezentować przez numery pracowników które aktualnie (przed rozpoczęciem PL) są jego szefami. Będziemy oznaczać przez szt sztaby oraz przez prac pracowników, jawnie będziemy rozdzielać te role mimo, że są to elementy z tego samego zbioru.
Zmienne:

- $Xwsa_{szt,prac} \in \{0,1\}$ gdzie prac jest indeksem pracownika, a szt numerem sztabu, oznacza bycie pracownika prac w optymalnym rozwiązaniu na miejscu na którym wcześniej był pracownik o numerze sztab (trzymamy takie zmienne dla szt i prac takiego, że szt jest na ścieżce pomiędzy CEO a prac, ponieważ pracownik po wymianie może tylko dostać awans, a nie może spaść, ani zmienić dział równolegle) dla firmy WSA
- $Xunion_{szt,prac} \in \{0,1\}$ - jw. tylko dla firmy Union.

Obserwacja: oprócz ułatwienia zapisu, wybieranie tylko takich szt, że prac jest ich potomkiem zmniejszyło w wielu przypadkach liczbę zmiennych z n^2 do $nlog(n)$.

Minimalizujemy:
$\sum$ Wszystkich Zmiennych - jedna zmienna oznacza przypisanie pracownika do danego sztabu, więc oznacza to minimalizację 2*liczbę pracowników, czyli liczbę pracowników.

Zdefiniujmy:
V - zbiór wszystkich pracowników $\text{Feas}_{wsa}(prac)$ - jako zbiór wszystkich wierzchołków na drodze od prac do CEO (łącznie z prac i CEO), czyli wszystkie wierzchołki które są wyżej w drzewie + prac.
$\text{Feas}_{union}(\text{prac})$ - analogicznie
$\text{Off}_{wsa}(szt)$ - (od Offspring) zbiór wszystkich potomków szt w drzewie sztabów wsa + on sam.
$\text{Off}_{union}(szt)$ - analogicznie dla union.
$\text{Restr}_{wsa}(\text{szt})$ - wymaganie z zadania odnośnie sztabu szt (ilość ludzi w sztabie).
$\text{Restr}_{union}(\text{szt})$ - analogicznie.

Ograniczenia:
(1) $\forall_{szt \in V} \sum_{szt1 \in \mathit{Off}_{wsa}(szt)} \sum_{prac \in \mathit{Off}_{wsa}(szt1)} Xwsa_{szt1,prac} \geqslant Restr_{wsa}(szt)$
(2)$\forall_{szt \in V} \sum_{szt1 \in \mathit{Off}_{union}(szt)} \sum_{prac \in \mathit{Off}_{union}(szt1)} Xunionszt1, prac \geqslant Restr_{union}(szt)$
(3) $\forall_{szt \in V : Restr_{wsa}(szt) > 0} \sum_{prac \in \mathit{Off}_{wsa}(szt)} Xwsa_{szt,prac} = 1$
(4) $\forall_{szt \in V : Restr_{union}(szt) > 0} \sum_{prac \in \mathit{Off}_{union}(szt)} Xunion_{szt,prac} = 1$
(5) $\forall_{prac \in V} \sum_{szt \in Feas_{wsa}(prac)} Xwsa_{szt,prac} \leqslant 1$
(6) $\forall_{prac \in V} \sum_{szt \in Feas_{union}(prac)} Xwsa_{szt,prac} \leqslant 1$
(7) $\forall_{prac \in V} \sum_{szt \in Feas_{wsa}(prac)} Xwsa_{szt,prac} = \sum_{szt \in Feas_{union}(prac)} Xunion_{szt,prac}$

Wyjaśnienia:
(1) - dla każdego sztabu szt $\sum_{prac \in \mathit{Off}_{wsa}(szt)} Xwsa_{szt,prac}$ oznacza liczbę ludzi zatrudnionych na tym sztabie, więc jeżeli zsumujemy to po sztabach będących potomkami otrzymamy liczbę ludzi zatrudnionych na sztabach niżej w hierarchii, ten warunek opisuje wymagania zadania odnośnie liczności sztabów
(2) - analogicznie
(3) - Ten warunek oddaje to, że sztabem musi ktoś zarządzać (nie pozwala na wyrzucenie 1 z grafu $1 \leftarrow 2$, gdzie na oba sztaby wymóg wynosi 1). Równość teoretycznie zapewnia, że na danym sztabie siedzi tylko jedna osoba, ale w optymalnym rozwiązaniu i tak by nie wystąpił inny przypadek
(4) analogicznie dla union
(5) - każdy pracownik może zarządzać co najwyżej jednym sztabem w wsa (6) - analogicznie dla union (7) - ten warunek zapewnia, że suma obsadzonych sztabów dla każdego pracownika w wsa i w union jest taka sama, czyli zapewnia to, że albo pracownik został w obu firmach, albo wyleciał z obu.

Program znajdzie nam takie przypisywanie pracowników, że wyżej wymienione constrainty są zachowane + dodatkowo ze względu na istnienie zmiennych mamy dodatkowy warunek, że jeżeli pozycja kogoś się zmieniła to mógł on jedynie wskoczyć w hierarchii (a nie zmienić dział równolegle, bądź spaść), więc jest to to czego szukalimy.