Model Chandrasekhara / Smoluchowskiego - 2 pudła

Piotr Piękos

7 sierpnia 2019

W tym przypadku rozpatrujemy przypadek z dwoma pudełkami.

Osoba "rodzi się" na podstawie procesu Poissona z częstotliwością a_N trafiając do pudełka 1, spędza tam czas będący zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem a_{S_1}. Następnie przechodzi do drugiego pudełka w którym spędza czas będący zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem a_{S_2}

1 Prawa Ewolucji

Prawa ewolucji są naturalnym rozszerzem praw ewolucji z procesu dla jednego pudełka. W szczególności pierwsze pudełko musi operować na dokładnie tych samych zasadach co poprzednio.

$$P(X_1(t+h) = x_1+1, X_2(t+h) = x_2 | X_1(t) = x_1, X_2(t) = x_2) = a_N h + o(h)$$

$$P(X_1(t+h) = x_1-1, X_2(t+h) = x_2+1 | X_1(t) = x_1, X_2(t) = x_2) = a_{S_1} x h + o(h)$$

$$P(X_1(t+h) = x_1, X_2(t+h) = x_2-1 | X_1(t) = x_1, X_2(t) = x_2) = a_{S_2} x h + o(h)$$

$$P(X_1(t+h) = x_1, X_2(t+h) = x_2 | X_1(t) = x_1, X_2(t) = x_2) = 1-(a_{S_1}+a_{S_2}) x h + o(h)$$

dla każdego innego przejścia prawdopodobieństwo to $o(h)$

Przy naturalnych założeniach $x_1 > 0$ lub $x_2 > 0$ kiedy się zmniejsza.

2 Algorytm

Algorytm jest naturalnym rozszerzeniem algorytmu symulacji jednego pudełka

Gen $N \sim Poiss(a_N t)$
for $i = 1$ to N do Gen $U_i \sim U(0, t)$, Gen $L1_i \sim Exp(1/a_{S_1})$, Gen $L2_i \sim Exp(1/a_{S_2})$
$(T_1, ..., T_n) = \text{Sort}(U_1, ..., U_n)$ otrzymujemy proces Poissona, czasy narodzin
$(D1_1, ..., D1_n) = (T_1 + L1_1, ..., T_n + L1_n)$ - dodajemy niezalezne czasy zycia do czasow narodzin i mamy czasy przejscia do drugiego pudelka.
$(D2_1, ..., D2_n) = (D1_1 + L2_1, ..., D1_n + L2_n)$ - dodajemy niezalezne czasy zycia do czasow narodzin i mamy czasy smierci.

Czyli od poprzedniego algorytmu różni się jedynie tym że losujemy dodatkowo czasy przebywania w drugim pudełku.

3 Przykładowe trajektorie

4 Rozkład

Zacznijmy od wartości oczekiwanych. Licząc podobnie jak dla pojedynczego pudełka mozna zauważyć, że

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}X_1 = \frac{a_N}{a_{S1}}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}X_2 = \frac{a_N}{a_{S2}}$$

Zgadza sie to z oczekiwaniami: X_1 zachowuje się dokładnie tak samo jak w przypadku jednego pudła, więc wynik jest ten sam. $\mathbb{E}X_2$ bierze się stąd, że pierwsze pudło jedynie opóźnia trafienie cząstek do pudełka 2. Czyli można na to patrzeć również jak na model z jednym pudłem tylko teraz cząstka rodzi się z intensywnością a_N.

Nastepnie czeka jakiś czas (czekanie spowodowane pierwszym pudełkiem) i trafia do pudełka numer 2. Czekanie nie wpływa jednak na średnią ilość cząstek będących w pudełku numer 2.