26 kwietnia 2014

Model Chandrasekhara / Smoluchowskiego (proces narodzin i śmierci)

1 pudełko

Rozważmy „pudełko” zawierające pewną liczbę „cząstek”. Niech $X(t)$ oznacza liczbę cząstek znajdujących się w pudełku w chwili $t \geqslant 0$. Ewolucję procesu (w czasie ciągłym) opisują następujące prawa:

- $\star$ Do pudełka wpadają nowe cząstki, przy czym strumień tych wpadających cząstek stanowi jednorodny w czasie proces Poissona z intensywnością $a_\star$.
- $\dagger$ Każda cząstka znajduje sie w pudełku przez okres czasu będący zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $a_\dagger$ (o wartości średniej $1/a_\dagger$), po czym opuszcza pudełko bezpowrotnie. Czasy przebywania w pudełku dla poszczególnych cząstek są stochastycznie niezależne.

Schematycznie:

$$\star \quad \xrightarrow{a_\star} \quad X \quad \xrightarrow{a_\dagger} \quad \dagger$$

1. Opisz prawa ewolucji w postaci
   - $\star$ $\mathbb{P}(X(t+h) = x+1 | X(t) = x) = \ldots + o(h)$ dla $h \searrow 0$.
   - $\dagger$ $\mathbb{P}(X(t+h) = x-1 | X(t) = x) = \ldots + o(h)$ dla $h \searrow 0$.

   Równoważnie, napisz wzory na intensywności przejść $Q(x, x')$ procesu Markowa $X(t)$.

2. Przeprowadź symulację tego procesu. Sugerowane wartości parametrów: $a_\star = 10$, $a_\dagger = 2$. Zrób wykres kilku trajektorii, dla różnych stanów początkowych.

3. Zbadaj symulacyjnie zbieżność procesu do rozkładu stacjonarnego:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X(t) = x) = \pi(x).$$

Oszacuj stacjonarną wartość oczekiwaną

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}X(t) = ?$$

Zbadaj symulacyjnie rozkład stacjonarny (np. *barplot*).

Wskazówka: Jeśli istnieje rozkład stacjonarny π, to

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{I}(X(s) = x) \mathrm{d}s = \pi(x),$$

więc wystarczy symulować *jedną, długą* trajektorię.

4. Zgadnij (powiedzmy, na podstawie symulacji) postać rozkładu stacjonarnego i udowodnij, że to jest rzeczywiście rozkład stacjonarny. Przeprowadź odpowiedni test statystyczny (test zgodności).

2 pudełka

Rozważmy teraz 2 pudełka i następujący schemat przepływu cząstek:

$$\star \quad \xrightarrow{a_{\star 1}} \quad X_1 \quad \xrightarrow{a_{12}} \quad X_2 \quad \xrightarrow{a_{2\dagger}} \quad \dagger$$

Reguły ewolucji są podobne jak poprzednio, tylko każda cząstka opuszczająca pudełko X_1 momentalnie przechodzi do pudełka X_2.

1. Napisz wzory na intensywnosci przejścia 2-wymiarowego procesu Markowa $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$.

2. Przeprowadź symulacje podobne jak w przypadku jednego pudełka. Zbadaj istnienie i postać 2-wymiarowego rozkładu stacjonarnego $\pi(x_1, x_2)$.

3. Oszacuj symulacyjnie $\lim_{t\to\infty} \mathrm{Cov}(X_1(t), X_2(t))$. Zastanów się jak to zrobić i zinterpretuj wynik.

Wiele pudełek

Rozważmy k pudełek, połączonych strzałkami w dowolny sposób. Dodatkowo można sobie wyobrazić 2 fikcyjne pudełka oznaczone symbolami $\star$ i $\dagger$ (źródło cząstek przybywających „z zewnątrz” i miejsce gromadzące cząstki opuszczające układ). Rozważamy proces k-wymiarowy $X(t) = (X_1(t), \ldots, X_k(t))$ opisany przy pomocy grafu skierowanego o zbiorze wierzchołków $\mathcal{V} = \{\star, 1, \ldots, k, \dagger\}$ i zbioru krawędzi $\mathcal{E} \subseteq \{(i,j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : i \neq j\}$ z „wagami” $a_{ij} > 0$ dla $(i,j) \in \mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[dr] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[dl] \\
\star \arrow[r, "a_{\star i}"] & X_i \arrow[r, bend left, "a_{ij}"] \arrow[dl] \arrow[d] & X_j \arrow[l, bend left, "a_{ji}"] \arrow[r, "a_{i\dagger}"] \arrow[d] \arrow[dr] & \dagger \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Równoważnie, mamy macierz (a_{ij}) wymiaru $(k+2) \times (k+2)$, o elementach $a_{ij} \geqslant 0$ dla $i \neq j$; jeśli nie ma strzałki od i do j, to $a_{ij} = 0$).

c.d.n.