Model Chandrasekhara / Smoluchowskiego - 1 pudełko

Piotr Piękos

23 lipca 2019

1 Oznaczenia

W celach notacyjnych rozbijemy proces $X(t)$ (ilość żyjących osób) na dwa procesy:

- $N(t)$ - Ilość narodzin
- $S(t)$ - Ilość śmierci

Wtedy $X(t) = N(t) - S(t)$, Dodatkowo oznaczymy intensywności procesów przez:

- a_N - intensywność procesu narodzin
- a_S - parametr rozkładu wykładniczego odpowiadającego za długość życia

Dodatkowe oznaczenia:

- $I_X(t)$ - indeksy "żywych" zmiennych w momencie t.
- W_i - zmienna losowa (o rozkładzie wykladniczym z parametrem a_S) mówiąca o długości życia osoby i

Możnaby spróbować zamodelować $S(t)$ jako niejednorodny proces Poissona z intensywnością zależną od $N(t)$. Ja jednak to rozdzieliłem jedynie ze względów notacyjnych.

2 Prawa ewolucji

$P(X(t+h) = x+1 | X(t) = 1)$:

Korzystamy tutaj z faktu, że dla procesu Poissona (N) mamy:

- $P(N(t+h) = n+1 | N(t) = n) = a_N h + o(h)$
- $P(N(t+h) \geqslant n+2 | N(t) = n) = o(h)$

Dodatkowo:

- $P(N(t+h) = n | N(t) = n) = 1 - a_N h + o(h)$
- $P(S(t+h) = s | S(t) = s, X(t) = x) = P(\forall_i \in I_X(t) W_i \geqslant h) + o(h) = \prod_{i \in I_X(t)} P(W_i \geqslant h) + o(h) = e^{-a_S x h} + o(h) = 1 - a_S x h + o(h)$
- $P(S(t+h) = s+1 | S(t) = s, X(t) = x) = x(e^{-a_S (x-1) h} - e^{-a_S x h}) + o(h) = a_S x h + o(h)$
- $P(S(t+h) = s+2 | S(t) = s, X(t) = x) = o(h)$

$o(h)$ pojawia się już po pierwszej równości ze względu na to, że przy dokładnym rozpisaniu prawdopodobienstw należałoby warunkować w którym momencie X(t) się zmieni (X jest zależny od S), jednak ta różnica jest $o(h)$, więc po prostu jest zawarta w tym.

zatem

$$P(X(t+h) = x+1 | X(t) = x) =$$
$$P(N(t+h) = n+1 | N(t) = n) \cdot P(S(t+h) = s | S(t) = s, X(t) = x) =$$
$$(a_N h + o(h)) \cdot (1 - a_S x h + o(h)) =$$
$$a_N h + o(h)$$

$$P(X(t+h) = x-1 | X(t) = x) =$$
$$P(N(t+h) = n | N(t) = n) \cdot P(S(t+h) = s+1 | S(t) = s, X(t) = x) =$$
$$(1 - a_N h + o(h)) \cdot (a_S x h + o(h)) =$$
$$a_S x h + o(h)$$

Czyli mamy

- $P(X(t+h) = x+1 | X(t) = x) = a_N h + o(h)$
- $P(X(t+h) = x-1 | X(t) = x) = a_S x h + o(h)$

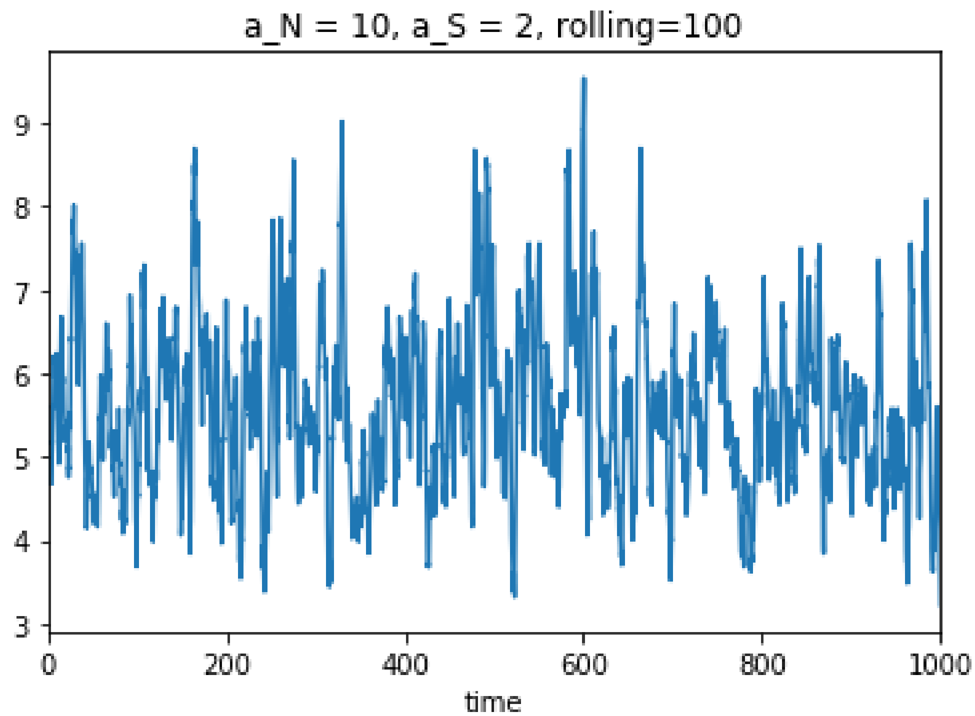
wzory te razem z $Q(x,x) = -a_N h - a_S x h$ i zerami w pozostałych wierszach opisują intensywność przejść procesu Markowa

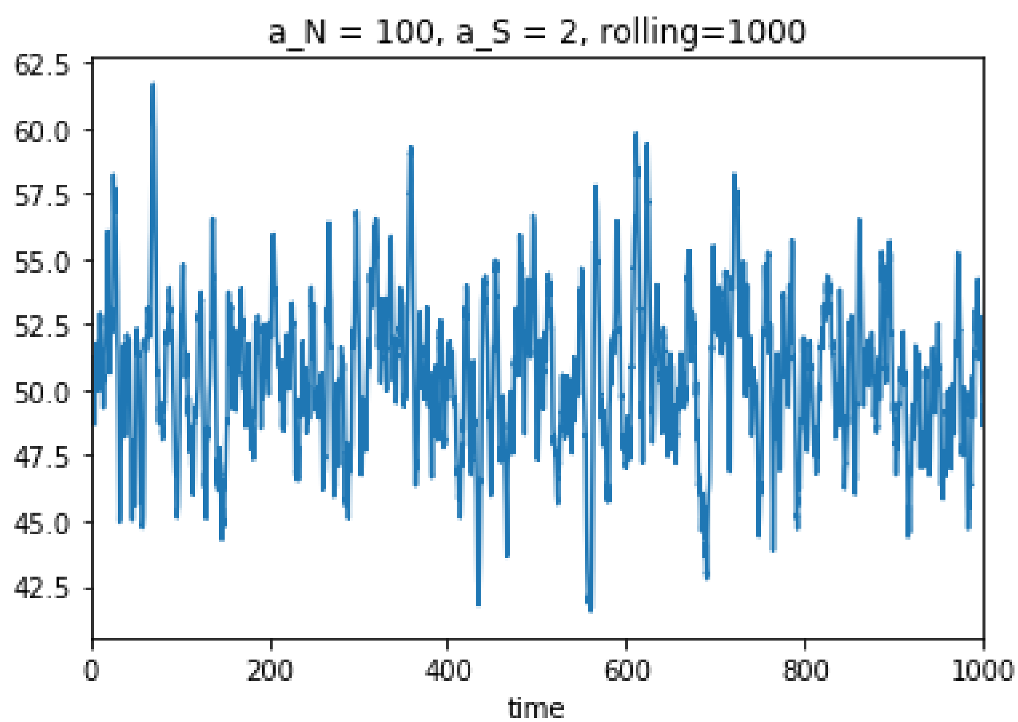
3 Symulacje

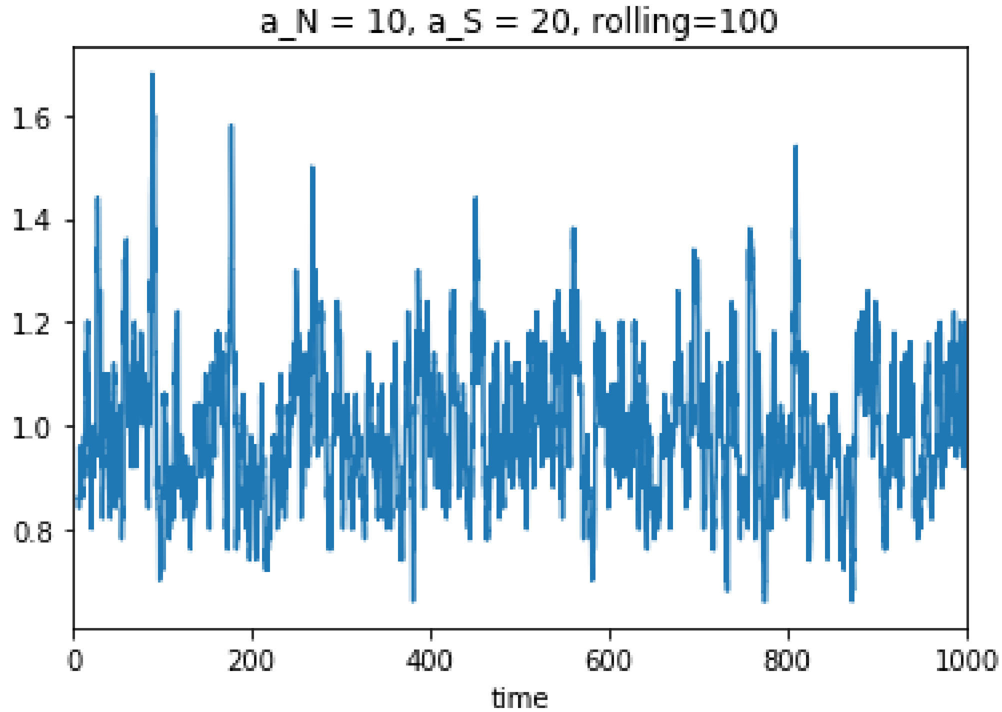
3.1 Algorytm

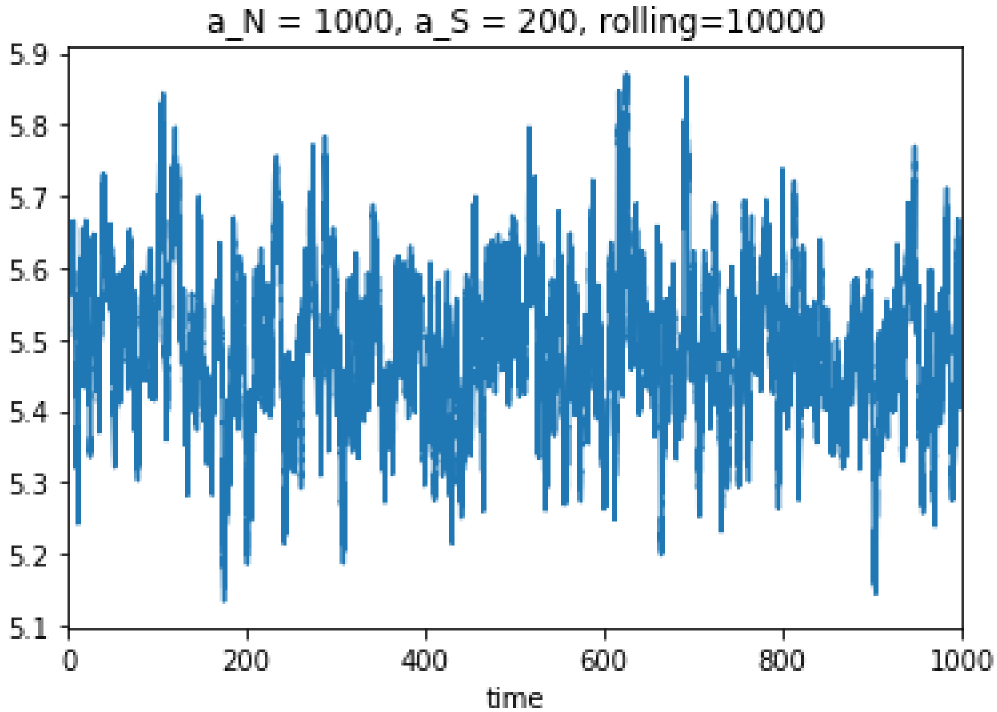
todo

3.2 Przykładowe trajektorie






a_N = 10, a_S = 20, rolling=100
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0
200
400
600
800
1000
time



Wygenerowane wykresy są sparametryzowane 3 parametrami:

- $a\_N - a_N$
- $a\_S - a_S$
- rolling - długość horyzontu średniej kroczącej, średnia krocząca jest konieczna dla wielu wykresów ze względu na ogromną ilośc punktów na wykresie. Pokazuje jednak ona "gęstość" punktów.

W trajektoriach należy także zwrócić uwagę na skalę, gdyż ona odgrywa kluczową rolę.

Od razu widać, że wyróżnioną liczbą jest $\frac{a_N}{a_S}$. Proces oscyluje w jej okolicach, co jest zrozumiałe po spojrzeniu na prawa ewolucji. Mówią one, że punkt $\frac{a_N}{a_S}$ jest punktem granicznym dla którego intensywność śmierci jest taka sama jak intensywność narodzin.

Możnaby pokusić się o alternatywną parametryzację procesu za pomocą parametrów $a = \frac{a_N}{a_S}$ i $b = a_S$, wtedy a reprezentowałaby punkt w okół którego symulacja będzie oscylować, a b reprezentowałby gęstość punktow.

Skyupmy się teraz na dwóch procesach o tym samym parametrze $a(\frac{a_N}{a_S}$. Są widoczne na pierwszym i ostatnim wykresie wyżej ($\frac{a_N}{a_S} = 5$). Na wykresach widać po pierwsze większy parametr rolling który jest konieczny ze względu na większa gęstość punktów. Z tych wykresów możnaby też odczytać, że gęstszy wykres ma mniejsze odchylenia, jednak byłoby to błędne, gdyż jest to spowodowane jedynie wygładzeniem przez średnią kroczącą.

4 Analiza

4.1 Istnienie rozkładu stacjonarnego

4.2 Wartość oczekiwana

4.3 Wyliczenie rozkładu stacjonarnego