

# Model Chandrasekhara / Smoluchowskiego - 1 pudełko

Piotr Piękos

20 lipca 2019

## 1 Oznaczenia

W celach notacyjnych rozbijemy proces  $X(t)$  (ilość żyjących osób) na dwa procesy:

- $N(t)$  - Ilość narodzin
- $S(t)$  - Ilość śmierci

Wtedy  $X(t) = N(t) - S(t)$ , Dodatkowo oznaczymy intensywności procesów przez:

- $a_N$  - intensywność procesu narodzin
- $a_S$  - parametr rozkładu wykładniczego odpowiadającego za długość życia

Dodatkowe oznaczenia:

- $I_X(t)$  - indeksy "żywych" zmiennych w momencie  $t$ .
- $W_i$  - zmienna losowa (o rozkładzie wykładniczym z parametrem  $a_S$ ) mówiąca o długości życia osoby  $i$

Możnaby spróbować zamodelować  $S(t)$  jako niejednorodny proces poissona z intensywnością zależną od  $N(t)$ . Ja jednak to rozdzieliłem jedynie ze względów notacyjnych.

### 1.1 Prawa ewolucji

$P(X(t+h) = x+1 | X(t) = 1)$ :

Korzystamy tutaj z faktu, że dla procesu Poissona ( $N$ ) mamy:

- $P(N(t+h) = n+1 | N(t) = n) = a_N h + o(h)$
- $P(N(t+h) \geq n+2 | N(t) = n) = o(h)$

Dodatkowo:

- $P(N(t+h) = n | N(t) = n) = 1 - a_N h + o(h)$
- $P(S(t+h) = s | S(t) = s, X(t) = x) = P(\forall_i \in I_X(t) W_i \geq h) + o(h) = \prod_{i \in I_X(t)} P(W_i \geq h) + o(h) = e^{-a_S x h} + o(h) = 1 - a_S x h + o(h)$
- $P(S(t+h) = s+1 | S(t) = s, X(t) = x) = x(e^{-a_S(x-1)h} - e^{-a_S x h}) + o(h) = a_S x h + o(h)$
- $P(S(t+h) = s+2 | S(t) = s, X(t) = x) = o(h)$

$o(h)$  pojawia się już po pierwszej równości ze względu na to, że przy dokładnym rozpisaniu prawdopodobieństw należałoby warunkować w którym momencie  $X(t)$  się zmieni ( $X$  jest zależny od  $S$ ), jednak ta różnica jest  $o(h)$ , więc po prostu jest zawarta w tym.

zatem

$$\begin{aligned}
P(X(t+h) = x+1 | X(t) = x) &= \\
P(N(t+h) = n+1 | N(t) = n) \cdot P(S(t+h) = s+1 | S(t) = s, X(t) = x) &= \\
(a_N h + o(h)) \cdot (1 - a_S x h + o(h)) &= \\
a_N h + o(h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X(t+h) = x-1 | X(t) = x) &= \\
P(N(t+h) = n | N(t) = n) \cdot P(S(t+h) = s+1 | S(t) = s, X(t) = x) &= \\
(1 - a_N h + o(h)) \cdot (a_S x h + o(h)) &= \\
a_S x h + o(h)
\end{aligned}$$

Czyli mamy

- $P(X(t+h) = x+1 | X(t) = x) = a_N h + o(h)$
- $P(X(t+h) = x-1 | X(t) = x) = a_S x h + o(h)$

wzory te razem z  $Q(x, x) = 1 - a_N h - a_S x h$  i zerami w pozostałych wierszach opisują intensywność przejść procesu Markowa

## 2 Conclusion

Write your conclusion here.