

26 kwietnia 2014

Model Chandrasekhara / Smoluchowskiego (proces narodzin i śmierci)

1 pudełko

Rozważmy „pudełko” zawierające pewną liczbę „cząstek”. Niech $X(t)$ oznacza liczbę cząstek znajdujących się w pudełku w chwili $t \geq 0$. Ewolucję procesu (w czasie ciągłym) opisują następujące prawa:

- ★ Do pudełka wpadają nowe cząstki, przy czym strumień tych wpadających cząstek stanowi jednorodny w czasie proces Poissona z intensywnością a_\star .
- † Każda cząstka znajduje się w pudełku przez okres czasu będący zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem a_\dagger (o wartości średniej $1/a_\dagger$), po czym opuszcza pudełko bezpowrotnie. Czasy przebywania w pudełku dla poszczególnych cząstek są stochastycznie niezależne.

Schematycznie:

$$\star \xrightarrow{a_\star} X \xrightarrow{a_\dagger} \dagger$$

1. Opisz prawa ewolucji w postaci

$$\star \quad \mathbb{P}(X(t+h) = x+1 | X(t) = x) = \dots + o(h) \text{ dla } h \searrow 0.$$

$$\dagger \quad \mathbb{P}(X(t+h) = x-1 | X(t) = x) = \dots + o(h) \text{ dla } h \searrow 0.$$

Równoważnie, napisz wzory na intensywności przejść $Q(x, x')$ procesu Markowa $X(t)$.

2. Przeprowadź symulację tego procesu. Sugerowane wartości parametrów: $a_\star = 10$, $a_\dagger = 2$. Zrób wykres kilku trajektorii, dla różnych stanów początkowych.

3. Zbadaj symulacyjnie zbieżność procesu do rozkładu stacjonarnego:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X(t) = x) = \pi(x).$$

Oszacuj stacjonarną wartość oczekiwaną

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}X(t) = ?$$

Zbadaj symulacyjnie rozkład stacjonarny (np. *barplot*).

Wskazówka: Jeśli istnieje rozkład stacjonarny π , to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{I}(X(s) = x) ds = \pi(x),$$

wiec wystarczy symulować *jedną, długą* trajektorię.

4. Zgadnij (powiedzmy, na podstawie symulacji) postać rozkładu stacjonarnego i udowodnij, że to jest rzeczywiście rozkład stacjonarny. Przeprowadź odpowiedni test statystyczny (test zgodności).

2 pudełka

Rozważmy teraz 2 pudełka i następujący schemat przepływu cząstek:

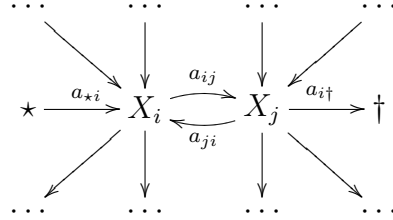
$$\star \xrightarrow{a_{\star 1}} X_1 \xrightarrow{a_{12}} X_2 \xrightarrow{a_{2 \dagger}} \dagger$$

Reguły ewolucji są podobne jak poprzednio, tylko każda cząstka opuszczająca pudełko X_1 momentalnie przechodzi do pudełka X_2 .

1. Napisz wzory na intensywności przejścia 2-wymiarowego procesu Markowa $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$.
2. Przeprowadź symulacje podobne jak w przypadku jednego pudełka. Zbadaj istnienie i postać 2-wymiarowego rozkładu stacjonarnego $\pi(x_1, x_2)$.
3. Oszacuj symulacyjnie $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Cov}(X_1(t), X_2(t))$. Zastanów się jak to zrobić i zinterpretuj wynik.

Wiele pudełek

Rozważmy k pudełek, połączonych strzałkami w dowolny sposób. Dodatkowo można sobie wyobrazić 2 fikcyjne pudełka oznaczone symbolami \star i \dagger (źródło cząstek przybywających „z zewnątrz” i miejsce gromadzące cząstki opuszczające układ). Rozważamy proces k -wymiarowy $X(t) = (X_1(t), \dots, X_k(t))$ opisany przy pomocy grafu skierowanego o zbiorze wierzchołków $\mathcal{V} = \{\star, 1, \dots, k, \dagger\}$ i zbioru krawędzi $\mathcal{E} \subseteq \{(i, j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : i \neq j\}$ z „wagami” $a_{ij} > 0$ dla $(i, j) \in \mathcal{E}$.



Równoważnie, mamy macierz (a_{ij}) wymiaru $(k+2) \times (k+2)$, o elementach $a_{ij} \geq 0$ dla $i \neq j$; jeśli nie ma strzałki od i do j , to $a_{ij} = 0$.

[c.d.n.](#)